

ÖNSÖZ

Bu ders kitabının amacı, akıcı bir lisanla elden geldiğince Türkçe'ye de önem vererek, öğrencilerin daha fazla faydalanmaları ve bilgilenmelerini sağlamaktır.

2004-2005 ders yılında öğrencilerin istifâdelerine sunulan ders notu, gözden geçirilerek, yeniden düzenlenmiş ve kitap olarak basılmış bulunmaktadır.

Pamukkale Üniversitesi Mühendislik Fakültesi Elektrik-Elektronik Mühendisliği'nin öğretim programında IV. yarıyılıda 4 kredilik zorunlu ders olarak okutulan *Elektromanyetik Alanlar* dersine âit bu ders kitabı, bölümün müfredat programında belirtilen içeriklere göre, hazırlanmış olup *Elektrostatik, Statik Enerji, Hareketli Yüklerin Alanı, Dielektrik Ortamlar ve Kapasite, Laplas (Laplace) Denklemi ve Çözümleri, Manyetik Alanlar ve Manyetik Devreler* olmak üzere, 7 bölümden meydana gelmektedir.

Görevimiz, kitaptaki her bir ilmî ya da bilimsel kavramı “*güzel söz*” kelimesi ile ifâde ederek, öğrencilerimizin, millet ve memleketimize hizmet doğrultusunda, kazanacakları bakış açılarıyla, kitaplarda karşılaştıklarını zannettikleri zorlukların, A. *Mâhir Pekşen*'in diliyle ifâde edilen,

*Söz var ki ibret dolu, söz var ki bir hecedir.
Kitap var ki, konusu sâdece düzmecedir.
Güzel sözü kavramak öyle kolay mı sandın?
Söz var ki âlim anlar, câhile bilmecedir.*

dörtlüğünün sırrına hâkim olmalarıyla çözülebileceğini, ‘*Faydalı olan kitap zor olan kitaptır*’ vecîzesinin yardımı ile birlikte, benliklerine fısıldamaktır.

Geleceğimizin güvencesi saydığımız gençlerimize bu fısıltıyı duyurabilirsek belki görevimizi yapmış sayılabiliriz.

İleride daha düzgün basımlarının elde edilmesi için öğrencilerimizin her türlü yapıcı tenkit, teklif ve baskı hatâlarını **mustafatemiz@yahoo.com** adresine ya da doğrudan doğruya tarafıma bildirme zahmetine katlanmalarını arzû ediyor, bütün öğrencilerime ve kitaptan faydalanan herkese en içten başarı dileklerimi bildiriyorum.

Prof. Dr. Mustafa TEMİZ
15.12.2010

İÇİNDEKİLER

Ön Sayfa	i
ÖNSÖZ	ii

BÖLÜM I ELEKTROSTATİK

1.1 COULOMB KANUNU	1
1.2 ELEKTRİK YÜK YOĞUNLUĞU	3
1.3 STATİK ELEKTRİK ALANI	5
1.4 GRADYANIN FİZİKİ ANLAMI	10
1.5 BİR VEKTÖRÜN DİVERJANSI	15
1.6 BİR VEKTÖRÜN ROTASYONU	17
1.7 STATİK ELEKTRİK ALANININ KORUYUCULUK ÖZELLİĞİ	19
1.8 ELEKTRİK AKISI	21
1.9 TEKİL FONKSİYONLAR	23
1.10. TEST FONKSİYONU	25
1.11. GAUSS KÂNUNU VE DİVERJANS TEOREMİ	32

BÖLÜM II STATİK ENERJİ

2.1. NOKTA ŞEKLİNDEKİ ELEKTRİK YÜKLERİ VE İŞ	37
2.2. ELEKTRİK GERİLİMİ	39
2.3. STATİK ELEKTRİK ALANINDAKİ ENERJİ	41

BÖLÜM III HAREKETLİ YÜKLERİN ALANI

3.1. GİRİŞ	48
3.2. HAREKETLİLİK KATSAYISI, YÜK YOĞUNLUĞU VE İLETKENLİK	48
3.3. SÜREKLİLİK DENKLEMİ	54
3.4. RÖLAKSASYON ZAMANI	55
3.5. DİELEKTRİK-İLETKEN ARAYÜZEYİNDE ELEKTRİK ALANINA ÂİT SINIR ŞARTLARI	58
3.6. DİELEKTRİK-İLETKEN ARAYÜZEYİNDE ELEKTRİK AKI YOĞUNLUĞU VEKTÖRÜNE ÂİT SINIR ŞARTLARI	61
3.7. STATİK ELEKTRİK ALANINDA FARKLI İKİ MALZEME ARASINDAKİ ARAYÜZEYİNDE SINIR ŞARTLARI	63

BÖLÜM IV DİELEKTRİK ORTAMLAR VE KAPASİTE

4.1. GİRİŞ	66
4.2. KUTUPLANMA (POLARİZASYON)	66
4.3. DİELEKTRİK MALZEMELERDE ELEKTRİK AKI YOĞUNLUĞU VEKTÖRÜ	70
4.4. KONDANSATÖRLERDE SÂBİT GERİLİM ALTINDA ELEKTRİK ALANI VE ELEKTRİK AKI YOĞUNLUĞU VEKTÖRÜ	72

4.5. KONDANSATÖRLERDE SÂBİT YÜK ALTINDA ELEKTRİK ALANI VE ELEKTRİK AKI YOĞUNLUĞU VEKTÖRÜ	74
4.6. KONDANSATÖRÜN ELEKTRİK ALANDA BİRİKEN ENERJİ	74

BÖLÜM V LAPLACE DENKLEMİ VE ÇÖZÜMLERİ

5.1. GİRİŞ	78
5.2. LAPLACE DENKLEMİNİN BİR BOYUTLU KARTEZYEN KOORDİNAT SİSTEMİNDEKİ ÇÖZÜMÜ	79
5.3. LAPLACE DENKLEMİNİN İKİ BOYUTLU KARTEZYEN KOORDİNAT SİSTEMİNDEKİ ÇÖZÜMÜ-KARTEZYEN ÇARPIM ÇÖZÜMÜ	81
5.4. LAPLACE DENKLEMİNİN SİLİNDİRİK KOORDİNAT SİSTEMİNDEKİ ÇÖZÜMÜ	84
5.5. LAPLACE DENKLEMİNİN KÜRESEL KOORDİNAT SİSTEMİNDEKİ ÇÖZÜMÜ	86

BÖLÜM VI MANYETİK ALANLAR

6.1. GİRİŞ	92
6.2. BIOT-SAVART KÂNUNU VE MANYETİK ALANIN KAYNAĞI	93
6.3. MANYETİK ALAN KUVVETİ	96
6.4. AMPER KÂNUNU VE MANYETOMOTOR KUVVETİ	100
6.5. BİR VEKTÖRÜN ROTASYONU	103
6.6. MANYETİK ALANIN ROTASYONELİ VE MAXWELL DENKLEMİ	106
6.7. MANYETİK VEKTÖR POTANSİYEL	106
6.8. MANYETİK AKI	107
6.9. MANYETİK İNDÜKSİYON VE FARADAY İNDÜKSİYON KÂNUNU	108
6.10. STATİK ELEKTRİK ALANINA ÂT MAXWELL DENKLEMLERİ	110
6.11. ELEKTRİK AKI YOĞUNLUĞU AKIMI-DEPLASMAN AKIMI	110
6.12. ZAMANA BAĞLI MAXWELL DENKLEMLERİ	111
6.13. İKİ ORTAMI AYIRAN BİR ARAYÜZEYDE MANYETİK ALANA ÂT SINIR ŞARTLARI	117
6.14. İKİ ORTAMI AYIRAN BİR ARAYÜZEYDE MANYETİK AKI YOĞUNLUĞU VEKTÖRÜNE ÂT SINIR ŞARTLARI	119
6.15. BİR KUVVETİN MOMENTİ	124
6.16. BİR BOBİNİN MAGNETİK MOMENTİ	125
6.17. ÖZ İNDÜKTANS	128

BÖLÜM VII MANYETİK DEVRELER

7.1. GİRİŞ	132
7.2. DEMİRİN MANYETİK ÖZELLİKLERİ	133
7.3. MANYETİK DEVRELER	135
7.4. HAVA ARALIKLI MANYETİK DEVRE	137
7.5. MANYETİK ARALIK KUVVETİ	139

BÖLÜM I

ELEKTROSTATİK

*Milletimizin sâf seciyesi istidatlarla doludur.
Ancak, bu tabii istidâdı inkişaf ettirecek usullerle
mücehhez vatandaşlar lâzımdır.*

K. Atatürk

1.1 COULOMB KÂNUNU

Bir cismin boyutları, incelemeye alınan diğer boyutlara ve uzaklıklara göre son derece küçük ise, bu cisme *Nokta Cisim* denir. Meselâ, en küçük elektrik yükünü taşıyan elektronun boyutları, molekülün boyutlarından oldukça küçük olduğundan, elektronların boyutlarına, moleküllerin boyutları yanında birer nokta cisim gözüyle bakılabilir. Bir nokta cisim gibi kabul edilebilecek olan bir elektronun taşıdığı elektrik yükü -1.602×10^{-19} Coulomb'dur. Bu bir nokta yüküdür. Düşünülebilecek en küçük elektrik yükü budur. Diğer bütün elektrik yükleri bunun katları durumundadır. Meselâ, bir amperlik bir elektrik akımındaki elektrik yükünü meydana getiren elektronların sayısı yaklaşık olarak 6×10^{18} elektronun yükünden oluşmaktadır. Bir noktada elektronun yükünün katları da varsa, bu da bir nokta yük sayılır.

Görüldüğü gibi elektronun elektrik yükü (-) işâretlidir. Pozitronun elektrik yükü ise, $+1.602 \times 10^{-19}$ Coulomb'dur. Görüldüğü gibi, pozitif ve negatif olmak üzere, iki cins elektrik yükü vardır.

Ödevler:

- 1) *Milikan deneyini araştırınız.*
- 2) *Sükûnet kütlesi nedir?*
- 3) *Elektronun sükûnetteki kütlesi, 9.1095×10^{-31} kg olduğuna göre, elektronun elektrik yükünün sükûnetteki kütesine oranını hesaplayınız.*

Sükûnet hâlindeki Q_1 ve Q_2 yüklerini taşıyan iki maddî nokta arasında meydana gelen kuvvetin ifâdesi, 1 nolu yükün 2 nolu yük üzerine uyguladığı Coulomb kuvveti, \mathbf{F}_{12} , olmak üzere,

$$\mathbf{F}_{12} = \frac{Q_1 Q_2}{4\pi\epsilon r_{12}^2} \mathbf{a}_{12} = F_{12} \mathbf{a}_{12} \quad (1)$$

ile verilir. Burada r_{12} , Q_1 ve Q_2 yükleri arasındaki uzaklıktır. Görüldüğü gibi, vektörler ve bunların şiddetleri (büyüklükleri) sırasıyla koyu ve normal harflerle gösterilecektir. Yâni $\mathbf{F}_{12} = F_{12} \mathbf{a}_{12}$ vektörünün şiddeti F_{12} 'dir. Burada \mathbf{a}_{12} , birim vektördür ve ϵ ortamın dielektrik sâbitidir. 1 ve 2 noktaları arasındaki uzaklık $r = |\mathbf{r}|$ olduğuna göre, 1'den 2'ye yönlenmiş \mathbf{r}_{12} vektörü, r uzaklığı cinsinden $\mathbf{r}_{12} = r \mathbf{a}_{12}$ ile gösterilebilir; o zaman birim vektör,

$$\mathbf{a}_{12} = \mathbf{r}_{12} / r, \quad |\mathbf{a}_{12}| = 1 \quad (2)$$

olur. Benzer şekilde, Q_2 elektrik yükünün Q_1 elektrik yüküne uyguladığı \mathbf{F}_{21} kuvveti

$$\mathbf{F}_{21} = \frac{Q_1 Q_2}{4\pi\epsilon r_{21}^2} \mathbf{a}_{21} = F_{12} \mathbf{a}_{21} \quad (3)$$

olur ki, burada $\mathbf{a}_{21} = -\mathbf{a}_{12}$ olduğu için $\mathbf{F}_{21} = -\mathbf{F}_{12}$ elde edilir. Demek oluyor ki, $Q_1 Q_2 > 0$ ise, kuvvet $\mathbf{r}_{12} = r_{12} \mathbf{a}_{12}$ ile aynı yönde $Q_1 Q_2 < 0$ ise, kuvvet $\mathbf{r}_{12} = r_{12} \mathbf{a}_{12}$ vektörü ile ters yöndedir. Bu şu demektir:

Elektrik yükleri aynı işaretli iseler, kuvvet birim vektör yönünde; ters işaretli iseler, başta ele alınan birim vektörün ters yönündedir. Başka bir ifadeyle elektrik yükleri aynı işaretli iseler, birbirlerini iterler; farklı işaretli iseler birbirlerini çekerler.

Elektrik yükünün birimi, MKSA birim sisteminde Coulomb (C)'dur. Bir büyüklüğün birimi köşeli parantez, [], ile temsil edilirse, [Q]=C yazılabilir. Buna göre, formülde geçen büyüklüklerin birimleri, [Q]=C, [r]=m, [ε]=F/m olarak alınır, kuvvetin birimi MKSA birim sisteminde Newton (N), [F]=[F]=N, olur¹. (2) ifadesi (1)'de yerine konursa,

$$\mathbf{F}_{12} = \frac{Q_1 Q_2}{4\pi\epsilon r_{12}^2} \mathbf{r}_{12} \quad (4)$$

elde edilir. Bu da Coulomb kuvvetinin diğer bir ifadesi olur.

Sorular:

1) Hidrojen atomunun elektronunun çekirdeğe uzaklığı yaklaşık 0.5 \AA ($1 \text{ \AA} = 10^{-10} \text{ m}$) olduğuna göre, elektronla çekirdeğin etkileşim kuvvetini hesaplayınız.

Cevaplar:

1) Hidrojenin bir elektronu ve çekirdeğinde ise bir protonu bulunur. Çekirdeğin elektrik yükü bir pozitronun yüküne eşittir.

$$Q_1 = Q_e = -1.602 \times 10^{-19} \text{ C},$$

$$Q_2 = Q_p = +1.602 \times 10^{-19} \text{ C},$$

$$r_{12} = r = 0.5 \times 10^{-10} \text{ m}, \quad \mathbf{F} = \mathbf{F}_{12} = \frac{Q_1 Q_2}{4\pi\epsilon r^2} \mathbf{a}_r = F \mathbf{a}_r,$$

$$\mathbf{F} = -\frac{(1.602 \times 10^{-19})^2}{4\pi \frac{10^{-9}}{36\pi} \times (0.5 \times 10^{-10})^2} \mathbf{a}_r = 92.3904 \times 10^{-9} \mathbf{a}_r.$$

Bir bölgede 2'den fazla nokta şeklinde yük varsa, o zaman Coulomb Kuvveti'nin ifadesi,

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_{12} = \frac{Q_1}{4\pi\epsilon} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{Q_{2i}}{r_{2i}^2} \mathbf{a}_{2i} = \frac{Q_1}{4\pi\epsilon} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{Q_{2i}}{r_{2i}^3} \mathbf{r}_{2i} \quad (5)$$

¹ Önal, H., *Elektroteknîğe Giriş, I, Elektrostatik*, Arı Kitabevi Matbaası, 1966, İstanbul.

olur. Burada r_{2i} , $i=1, 2, 3, \dots, \infty$, Q_1 elektrik yükü ile i . elektrik yükü arasındaki mesâfeyi ve \mathbf{a}_{2i} ise, i . \mathbf{r}_{2i} vektörüne âit birim vektörü gösterir.

En küçük elektrik yükü elektronun yükü olduğu için, bir hacim içinde elektrik yükü taşıyan maddî noktalar çok yoğun bir şekilde bulunabilir. Bu sebepten, elektrik yükünün, nokta nokta yerine, sürekli olan bir yoğunlukta olduğu farz edilebileceğinden dolayı, her bir noktanın Q_1 elektrik yüküne uzaklığı \mathbf{r} olmak üzere, (5) ifâdesi,

$$\mathbf{F} = \frac{Q_1}{4\pi\epsilon} \int \frac{\rho \mathbf{r}}{r^3} dV = \frac{Q_1}{4\pi\epsilon} \int \frac{\rho}{r^2} \mathbf{a}_r dV \quad (6)$$

şekline döner. Burada entegral sürekli değişim sebebiyle gelmiştir. Başka bir ifâdeyle, sürekli fonksiyonların hesabında entegral kullanılır. İfâdedeki ρ , hacme âit yük yoğunluğunu, \mathbf{r} ise yük yoğunluğunun yer vektörünü göstermektedir.

1.2. ELEKTRİK YÜK YOĞUNLUĞU

Büyük bir inkılap yapan Hz. Muhammed (s.a.v)'e karşı beslenen sevgi ancak onun ortaya koyduğu fikirleri, esasları korumakla tecelli edebilir.

M. KEMAL ATATÜRK²

Hacmi V olan bir ortamda birim hacim içinde bulunan elektrik yük miktarına hacme âit *Elektrik Yük Yoğunluğu (Hacim Elektrik Yük Yoğunluğu)* denir. dv hacmi içinde bulunan elektrik yük miktarı dQ ise, o zaman hacme âit elektrik yük yoğunluğu,

$$\rho = \frac{dQ}{dV} \quad (7)$$

olarak tanımlanır. Bunun birimi C/m^3 'dür, $[\rho] = C/m^3$. Eğer bir V hacmi içindeki yük yoğunluğu verilirse, toplam yük, (7)'den hareket edilerek hesaplanabilir:

$$Q = \iiint_V \rho dV = \int_V \rho dV. \quad (8)$$

Bu entegral üç boyutlu bir entegraldir. Benzer şekilde, yüzeye ve hatta âit yük yoğunlukları da tanımlanabilir:

Yüzeyi S olan bir ortamda birim yüzey içinde bulunan elektrik yük miktarına yüzeye âit *Elektrik Yük Yoğunluğu (Yüzey Elektrik Yük Yoğunluğu)* denir. dS yüzeyi içinde bulunan elektrik yük miktarı dQ ise, o zaman yüzeye âit elektrik yük yoğunluğu,

$$\rho_s = \frac{dQ}{dS} \quad (9)$$

² Kerem Yılmaz, *Dindar Atatürk*, Düşünce yayınları, 2004.

olarak tanımlanır. Bunun birimi C/m^2 'dir, $[\rho_s] = C/m^2$. Eğer bir S yüzeyi içindeki yük yoğunluğu verilirse, toplam yük, (9)'dan hareket edilerek hesaplanabilir:

$$Q = \iint_S \rho_s dS = \int_S \rho_s dS. \quad (10)$$

Bu entegral iki boyutlu bir entegraldir.

Boy ℓ olan bir uzunluk üzerinde birim uzunlukta bulunan elektrik yük miktarına hatta âit *Elektrik Yük Yoğunluğu (Hat Elektrik Yük Yoğunluğu)* denir. $d\ell$ uzunluğu içinde bulunan elektrik yük miktarı dQ ise, o zaman hatta âit elektrik yük yoğunluğu,

$$\rho_\ell = \frac{dQ}{d\ell} \quad (11)$$

olarak tanımlanır. Bunun birimi C/m 'dir, $[\rho_\ell] = C/m$. Eğer bir ℓ uzunluğundaki yük yoğunluğu verilirse, toplam yük, (11)'den hareket edilerek hesaplanabilir:

$$Q = \int_\ell \rho_\ell d\ell. \quad (12)$$

Bu entegral bir boyutlu bir entegraldir³.

Sorular:

1) Del operatörü nedir?

2) Gradyan nedir?

3) $\varphi = 2x^2 + 3y^2 + 4z^2$ skaler fonksiyonunun gradyanını bulunuz.

4) $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ olduğuna göre $\text{grad}(1/r) = \nabla\left(\frac{1}{r}\right) = -\frac{\mathbf{r}}{r^3}$ olduğunu gösteriniz.

Cevaplar:

1) $\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\mathbf{a}_x + \frac{\partial}{\partial y}\mathbf{a}_y + \frac{\partial}{\partial z}\mathbf{a}_z$ ile tanımlanan bir diferansiyel türev operatörüdür. Bu

bir vektördür.

2) Gradyan, del operatörünün bir skaler fonksiyona uygulanması sonunda elde edilen bir vektördür. Skaler fonksiyon φ ise, bu fonksiyonun gradyanı,

$$\nabla\varphi = \left(\frac{\partial}{\partial x}\mathbf{a}_x + \frac{\partial}{\partial y}\mathbf{a}_y + \frac{\partial}{\partial z}\mathbf{a}_z\right)\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial x}\mathbf{a}_x + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\mathbf{a}_y + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\mathbf{a}_z$$

ile tanımlanır ve $\nabla\varphi = \text{grad}\varphi$ ile gösterilir.

³ Edminister, J.A., Electromagnetics, Schaum's Outline Series in Engineering, McGraw-Hill Book Company, 1979.

$$3) \quad \nabla \varphi = \left(\frac{\partial}{\partial x} \mathbf{a}_x + \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{a}_y + \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{a}_z \right) (2x^2 + 3y^2 + 4z^2) = \frac{\partial(2x^2 + 3y^2 + 4z^2)}{\partial x} \mathbf{a}_x + \frac{\partial(2x^2 + 3y^2 + 4z^2)}{\partial y} \mathbf{a}_y + \frac{\partial(2x^2 + 3y^2 + 4z^2)}{\partial z} \mathbf{a}_z$$

veyâ

$$\nabla \varphi = 4x\mathbf{a}_x + 6y\mathbf{a}_y + 8z\mathbf{a}_z.$$

Görüldüğü gibi, bir skaler fonksiyonun gradyanı vektör bir büyüklüktür.

4)

$$\nabla (1/r) = \nabla \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \left(\frac{\partial}{\partial x} \mathbf{a}_x + \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{a}_y + \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{a}_z \right) \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

$$\nabla (1/r) = \left(\frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \mathbf{a}_x + \frac{\partial}{\partial y} \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \mathbf{a}_y + \frac{\partial}{\partial z} \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \mathbf{a}_z \right) = -\frac{\mathbf{r}}{r^3}$$

İnsanlar tecrübeleri nispetinde değil, tecrübelerinden aldıkları dersler nispetinde olgunlaşırlar.

Bernard Shaw

1.3. STATİK ELEKTRİK ALANI

Sükûnet hâlindeki pozitif birim yüke etki eden Coulomb Kuvveti'ne *Elektrik Alan Vektörü*, \mathbf{E} , denir. Elektrik Alan Vektörü, vektör bir büyüklüktür. (1) ifâdesinde $Q_2 = +1$ C alınırsa

$$\mathbf{F}_{12} = \mathbf{E} = \frac{Q_1}{4\pi\epsilon r_{12}^2} \mathbf{a}_{12} = \mathbf{E} \mathbf{a}_{12} \quad (13)$$

veyâ $Q_1 = Q$, $r_{12} = r$, $\mathbf{a}_{12} = \mathbf{a}$ alınırsa,

$$\mathbf{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon r^2} \mathbf{a}_r = \mathbf{E} \mathbf{a}_r \quad (14)$$

olur. Elektrik alanı duran yüklerden dolayı meydana geldiği için bu elektrik alanına *Statik Elektrik Alanı* denmektedir. Bu son formül, sâbit bir noktadaki Q elektrik yükünün, noktadan r kadar uzaklıktaki noktalarda meydana gelen elektrik vektör alanının ifâdesini verir. Dikkat edilirse görülür ki, elektrik alanı, pozitif birim yük başına düşen bir Coulomb Kuvveti'dir:

$$\mathbf{E} = \frac{\mathbf{F}}{Q} \mathbf{a}_r \quad (15)$$

(14)'den

$$E = \frac{Q}{4\pi\epsilon r^2} \quad (16)$$

şeklindeki *Elektrik Alan Şiddeti* elde edilir. Elektrik alanının birimi V/m'dir, $[\mathbf{E}] = [E] = \text{V/m}$. (14) formülü, (2)'deki birim vektör, $\mathbf{a}_r = \frac{\mathbf{r}}{r}$, tanımı göz önüne alındığında

$$\mathbf{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon r^3} \mathbf{r} = -\frac{Q}{4\pi\epsilon} \nabla\left(\frac{1}{r}\right) = -\frac{Q}{4\pi\epsilon} \text{grad}(1/r) \quad (17)$$

şeklinde de yazılabilir. Burada $\frac{\mathbf{r}}{r^3}$ ifâdesinin $\frac{\mathbf{r}}{r^3} = -\nabla\left(\frac{1}{r}\right) = \text{grad}(1/r)$ olduğu görülmektedir.

(16) formülünün paydasındaki r yarıçaplı küre yüzeyi dikkate alındığında, $S = 4\pi r^2$ olduğu için,

$$E = \frac{Q}{\epsilon S} \quad (18)$$

olur. Burada $D = Q/S$ büyüklüğüne *Elektrik Akı Yoğunluğu* denir, birimi C/m^2 'dir, $[\mathbf{D}] = [D] = C/m^2$. (16) ifadesinden,

$$D = E\epsilon \quad (19)$$

şeklinde, elektrik alan şiddeti cinsinden, elektrik akı yoğunluğu şiddeti elde edilir. Bu büyüklük de vektör bir büyüklüktür:

$$\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E} \quad (20)$$

Bu vektöre *Deplasman Vektörü* de denir.

Sorular:

1) Hidrojen atomunun elektronunun çekirdeğe uzaklığı yaklaşık 0.5Å ($1 \text{Å} = 10^{-10} \text{m}$) olduğuna göre, elektronun çekirdeğin bulunduğu yerde meydana getirdiği elektrik alanını ve şiddetini hesaplayınız.

Cevaplar:

1)

$$Q = -1.602 \times 10^{-19} \text{ C},$$

$$r = 0.5 \times 10^{-10} \text{ m}$$

$$\mathbf{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon r^2} \mathbf{a}_r = E \mathbf{a}_r$$

$$\mathbf{E} = \frac{1.602 \times 10^{-19}}{4\pi \frac{10^{-9}}{36\pi} \times (0.5 \times 10^{-10})^2} \mathbf{a}_r = 57.6720 \times 10^{10} \mathbf{a}_r \text{ V/m}, E = 57.6720 \times 10^{10} \text{ V/m}$$

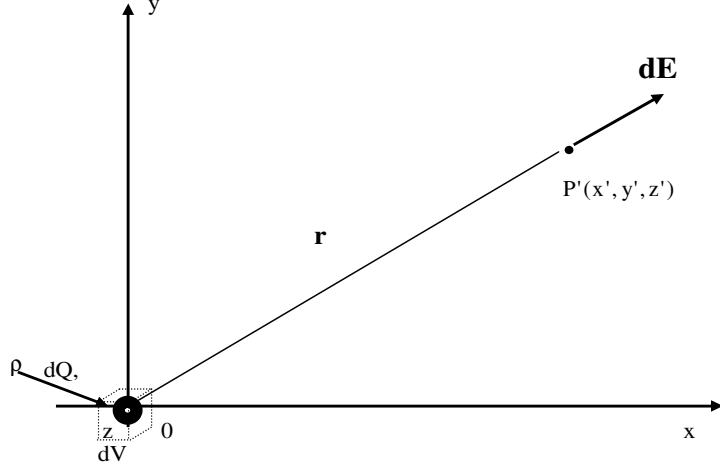
Eğer ortamda 2'den fazla nokta şeklindeki elektrik yükleri varsa, Şekil 1'de görüldüğü gibi, o zaman elektrik alanının ifâdesi, (5)'den

$$\mathbf{E} = \sum \mathbf{E}_i = \frac{\mathbf{F}}{Q_1} = \frac{1}{4\pi\epsilon} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{Q_{2i}}{r_{2i}^2} \mathbf{a}_{2i} \quad (21)$$

bulunur. Yüklerin V hacmi içinde sürekli dağılımı hâlinde ise elektrik alanı (6)'dan

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon} \int \frac{dQ \mathbf{r}}{r^3} = \frac{1}{4\pi\epsilon} \int \frac{\rho dV \mathbf{r}}{r^3} = \frac{1}{4\pi\epsilon} \int \frac{\rho}{r^2} \mathbf{a}_r dV \quad (22)$$

olur (Şekil 1). Burada $dQ = \rho dv$, dV hacim elemanı içindeki yük miktarını göstermektedir.



Şekil 1 dV hacim elemanı içindeki dQ (ρ yük yoğunluğu) yükü koordinat merkezinde iken uzayın her hangi bir P' noktasındaki elektrik alan vektörü

Bundan sonra, aksi söylenmedikçe, elektrik yükü, akım ve yük yoğunluğu gibi, kaynak özelliği taşıyan büyüklüklerin yer vektörleri, \mathbf{r}' gibi, üstlü olarak, uzayda ele alınan herhangi bir noktanın yer vektörü, \mathbf{r} gibi, üstsüz olarak gösterilecektir. Yâni, Şekil 2'de $P'(x', y', z')$ ve $P(x, y, z)$ noktaları, sırasıyla, kaynağın ve elektrik alanı hesaplanması istenen noktanın koordinat noktalarını göstermektedir. Burada \mathbf{r}' vektörü yükün yer vektörü; \mathbf{r} vektörü, elektrik alanının hesaplandığı P noktasının yer vektürüdür.

Elektrik alanını doğuran yüke bir kaynak gözüyle bakılır. Elektrik yük yoğunluğu da bir kaynaktır. (15)'den,

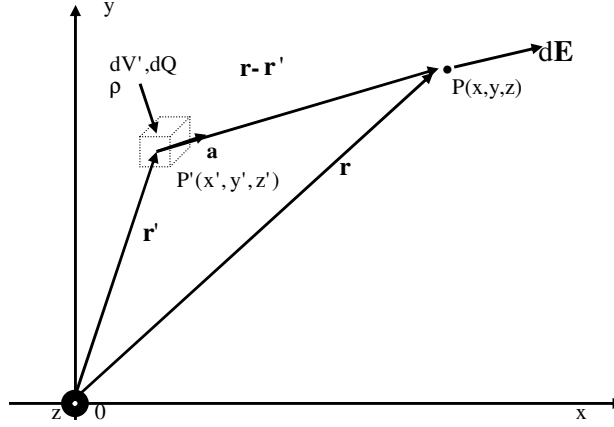
$$\mathbf{F}(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = Q(\mathbf{r}')\mathbf{E}(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \quad (23)$$

veyâ

$$\mathbf{F}(x - x', y - y', z - z') = Q(x', y', z') \mathbf{E}(x - x', y - y', z - z') \quad (24)$$

yazılabilir⁴.

⁴ Jackson, J.D., *Classical Electrodynamics*, John Wiley and Sons, Inc., New York, 1967.



Şekil 2 Dik kartezyen koordinat sisteminde $P'(x', y', z')$ noktasında bulunan bir dQ elektrik yükünün uzayın herhangi bir $P(x, y, z)$ noktasındaki elektrik alan vektörü

Burada $P'(x', y', z')$ ve $P(x, y, z)$, sırasıyla, kaynağın ve elektrik alanının koordinat noktalarını göstermektedir. Burada $\mathbf{r}'(x', y', z')$ vektörü, yükün yer vektörü; $\mathbf{r}(x, y, z)$ P noktasının yer vektörünü göstermektedir. (22)'den faydalanarak Şekil 2'deki elektrik alanı, $\mathbf{a} = (\mathbf{r} - \mathbf{r}')/|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$ birim vektörünü göstermek üzere,

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon} \int_V \frac{\rho}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2} \mathbf{a} dV' = \frac{1}{4\pi\epsilon} \iiint_V \frac{\rho(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} dV' \quad (25)$$

olur. Burada $dV' = dx' dy' dz'$, \mathbf{r}' tarafından belirlenen P' noktasındaki diferansiyel hacim elemanıdır. Dik kartezyen koordinatlarda

$$\mathbf{r} - \mathbf{r}' = (x - x')\mathbf{a}_x + (y - y')\mathbf{a}_y + (z - z')\mathbf{a}_z \text{ ve } |\mathbf{r} - \mathbf{r}'| = \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2}$$

olduğu hatırlanırsa, (25) ifâdesi,

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon} \iiint_V \rho(x', y', z') \frac{(x - x')\mathbf{a}_x + (y - y')\mathbf{a}_y + (z - z')\mathbf{a}_z}{[(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2]^{3/2}} dV' \quad (26)$$

şeklinde elde edilir. Bu ifâde, üç boyutlu bir cisimde (x, y, z) koordinatlarının fonksiyonu olarak verilen yük yoğunluğunun uzayın herhangi bir $P(x, y, z)$ noktasında meydana getirdiği elektrik alanı vermektedir. (23) ve (24)'ün ışığı altında (4)'den, Coulomb kuvveti,

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_{12} &= \frac{Q_1 Q_2 (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)}{4\pi\epsilon |\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|^3} = \frac{Q_1 Q_2 \mathbf{a}_{12}}{4\pi\epsilon} \frac{1}{\sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2}} \\ &= \frac{Q_1 Q_2 (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)}{4\pi\epsilon |\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|^3} = \frac{Q_1 Q_2}{4\pi\epsilon} \frac{(x - x')\mathbf{a}_x + (y - y')\mathbf{a}_y + (z - z')\mathbf{a}_z}{[(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2]^{3/2}} \end{aligned} \quad (27)$$

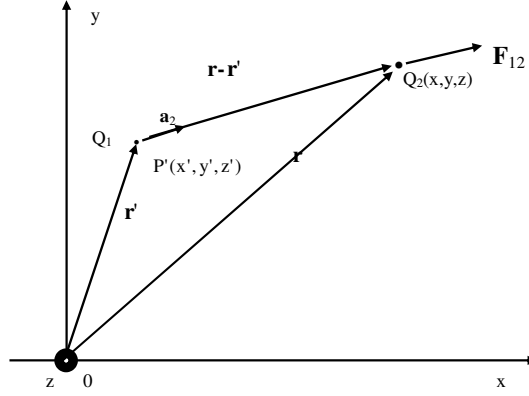
olur (Şekil 3). (23) ve (24)'ün ışığı altında (27)'den, bu kuvvet

$$\mathbf{F}_i = \sum_{j \neq i} \mathbf{F}_{ij} = \sum_{j \neq i} \frac{Q_j Q_i \mathbf{a}_{ij}}{4\pi\epsilon |\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|^2} \quad (28)$$

veyâ

$$\mathbf{F}_i = \sum_{j \neq i} \frac{Q_j Q_i (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j)}{4\pi\epsilon |\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|^3} = \sum_{j \neq i} \frac{Q_j Q_i}{4\pi\epsilon} \frac{(x_i - x'_j) \mathbf{a}_{ij} + (y_i - y'_j) \mathbf{a}_{ij} + (z_i - z'_j) \mathbf{a}_{ij}}{[(x_i - x'_j)^2 + (y_i - y'_j)^2 + (z_i - z'_j)^2]^{3/2}} \quad (29)$$

olarak elde edilir.



Şekil 3 Dik koordinat sisteminde $Q_1(x,y,z)$ yükünün $Q_2(x', y', z')$ yükü üzerine uyguladığı Coulomb kuvveti

Burada $Q_i=1$ C ve $Q_j=Q$ alınırsa, i. noktadaki elektrik alanı,

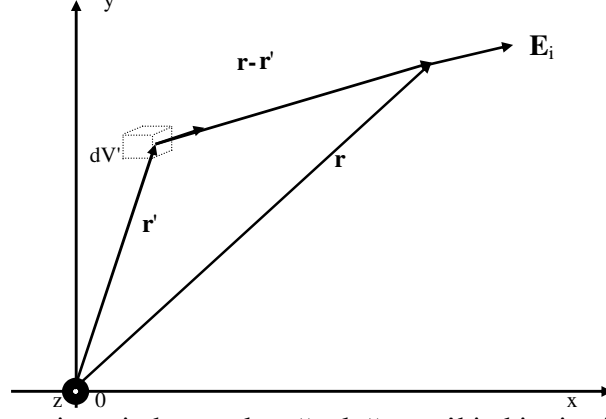
$$\mathbf{E}_i = \sum_{j \neq i} \frac{Q(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j)}{4\pi\epsilon |\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|^3} = \sum_{j \neq i} \frac{Q}{4\pi\epsilon} \frac{(x_i - x'_j) \mathbf{a}_{ij} + (y_i - y'_j) \mathbf{a}_{ij} + (z_i - z'_j) \mathbf{a}_{ij}}{[(x_i - x'_j)^2 + (y_i - y'_j)^2 + (z_i - z'_j)^2]^{3/2}} \quad (30)$$

olur.

Ancak yükler doğada nokta şekline olmaktan ziyâde çoğu kere belli bir hacim içinde sürekli biçimde dağılmış olduğu için, V hacmi içindeki toplam Q yükü $dQ=\rho(\mathbf{r}')dV'$ olacağından dolayı, elektrik alanı sürekli yükler için (30) ifâdesi,

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_i &= \iiint_V \frac{\rho(\mathbf{r}')(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{4\pi\epsilon |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} dV' = \iiint_V \frac{\rho(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{4\pi\epsilon |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2} dV' \\ &= \iiint_V \frac{\rho}{4\pi\epsilon} \frac{(x_i - x'_j) \mathbf{a}_{ij} + (y_i - y'_j) \mathbf{a}_{ij} + (z_i - z'_j) \mathbf{a}_{ij}}{[(x_i - x'_j)^2 + (y_i - y'_j)^2 + (z_i - z'_j)^2]^{3/2}} dV' \end{aligned} \quad (31)$$

şeklini alır (Şekil 4). Burada $\varphi(\mathbf{r}) = \iiint \frac{\rho(\mathbf{r}')}{4\pi\epsilon_0|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} dV'$ ifâdesine skaler potansiyel fonksiyonu adı verilir⁵.



Şekil 4 Dik koordinat sisteminde ρ yük yoğunluğuna sâhip bir cismin dV' hacmindeki dQ yükünün i. noktada meydana getirdiği elektrik alan vektörü

Sorular:

1) Coulomb kuvvetini din olarak hesaplamak için hangi birim kullanılır?

Cevaplar:

1) Coulomb formülünde $1/4\pi\epsilon_0 = 1$ alınırsa, cgs sistemine geçilir. O zaman elektrik yükünün birimi statcoulomb (statkulon), uzunluk birimi cm ve kuvvet birimi din olur.

Ey Ödevi:

- 1) İki âdet nokta şeklindeki yüke âit
 - a) Coulomb kânununu,
 - b) Elektrik akı yoğunluğu vektörünü yazınız.
- 2) İki den fazla nokta şeklindeki yüke âit
 - a) Coulomb kânununu,
 - b) Elektrik akı yoğunluğu vektörünü yazınız.
- 3) Sürekli yük dağılımına âit
 - a) Elektrik alanını,
 - b) Coulomb kânununu,
 - c) Elektrik akı yoğunluğu vektörünü yazınız.

Zamânın kaybolduğunu bilenler, en çok elem duyanlardır.
Dante

1.4. GRADYANIN FİZİKÎ ANLAMI

Bir vektör diferansiyel operatör olan ve nabla adı ile de tanınan

⁵ Özemre, A.Y., Klâsik Elektrodinamiğe Giriş, İstanbul Üniversitesi, Fen Fakültesi, 1983.

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{a}_x + \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{a}_y + \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{a}_z \quad (32)$$

del operatörü, bir vektörün sâhip olduğu özellikleri taşır. Bu operatör, gradyan, diverjans ve rotasyon olmak üzere, 3 âdet büyüklüğün tanımında kullanılabilir.

Her hangi bir skaler fonksiyon $\varphi(x, y, z)$ olarak alınır, del operatörünün bu fonksiyona uygulanması sonunda elde edilen

$$\nabla\varphi = \left(\frac{\partial}{\partial x} \mathbf{a}_x + \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{a}_y + \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{a}_z \right) \varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial x} \mathbf{a}_x + \frac{\partial\varphi}{\partial y} \mathbf{a}_y + \frac{\partial\varphi}{\partial z} \mathbf{a}_z \quad (33)$$

ifâdesine dik karteziyen koordinat sisteminde $\varphi(x, y, z)$ skaler fonksiyonun gradyanı denir, $\nabla\varphi = \text{grad } \varphi$ ile gösterilir ⁶. Bu bir vektördür. Bunun herhangi bir \mathbf{a} birim vektörle skaler çarpımı, $\nabla\varphi \cdot \mathbf{a}$, bu vektörün, o birim vektör üzerindeki izdüşümünü, yâni bu vektörün birim vektör doğrultusundaki bileşenini verir. Bu bileşenin birim vektör doğrultusundaki ifâdesi, bu skaler fonksiyonun birim vektör doğrultusundaki kısmî türevini verir. Bunun fiziksel anlamı şudur:

Bir skaler $\varphi(x, y, z)$ fonksiyonunun gradyanının verilen bir doğrultudaki birim vektör ile çarpımı, bu fonksiyonun o doğrultudaki değişimine eşittir. Meselâ (örneğin), birim vektör x eksenine doğrultusunda ise, $\nabla\varphi \cdot \mathbf{a}_x = \partial\varphi / \partial x$ elde edilir.

Skaler $\varphi(x, y, z)$ fonksiyonunun tanımlı olduğu bir bölgede birbirine yakın iki nokta, Şekil 5'de görüldüğü gibi, P ve N olsun. N noktasının, P noktasının koordinat değişkenlerinin diferansiyel artımlarının sonunda meydana gelen yeni bir nokta olduğuna dikkat ediniz. Dolayısıyla, \mathbf{r} vektöründeki diferansiyel artım

$$d\mathbf{r} = dx\mathbf{a}_x + dy\mathbf{a}_y + dz\mathbf{a}_z \quad (34)$$

olur.

Yeri gelmişken burada belirtmekte fayda vardır ki, dik karteziyen koordinat sisteminde yay uzunluğu

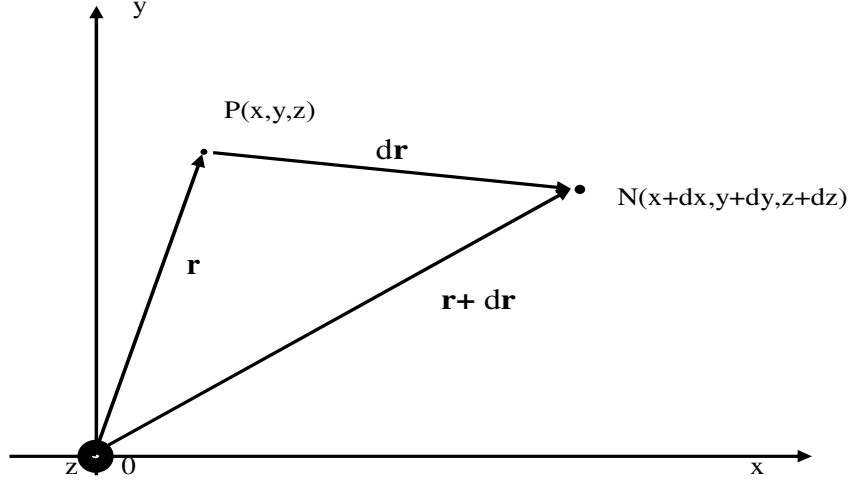
$$d\ell = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2} \quad (35)$$

ve hacim elemanı

$$dV = dx dy dz \quad (36)$$

ile verilir.

⁶ Spiegel, M.R., *Vector Analysis*, Schaum Publishing Co., New York, 1959.



Şekil 5 Bir yer vektöründeki diferansiyel artım

Elektrik mühendisliğinde potansiyel fonksiyonu genel olarak $\varphi(x, y, z)$ fonksiyonu ile gösterilir. Dolayısıyla, $\varphi(x, y, z)$ fonksiyonu bir potansiyel fonksiyon ise, P ve N noktalarına ilişkin olarak $\varphi(x, y, z)$ fonksiyonunda da bir değişme söz konusu olur. Yani, bu potansiyel fonksiyonunun tam diferansiyeli

$$d\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial x} dx + \frac{\partial\varphi}{\partial y} dy + \frac{\partial\varphi}{\partial z} dz \quad (37)$$

şekindedir. (33), bir skaler fonksiyonun (x, y, z) dik kartezyen koordinat sistemindeki gradyan ifâdesidir. Bu, (33) ve (34)'den hareket ederek

$$\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x} \mathbf{a}_x + \frac{\partial\varphi}{\partial y} \mathbf{a}_y + \frac{\partial\varphi}{\partial z} \mathbf{a}_z \right) \cdot (dx \mathbf{a}_x + dy \mathbf{a}_y + dz \mathbf{a}_z) = \frac{\partial\varphi}{\partial x} dx + \frac{\partial\varphi}{\partial y} dy + \frac{\partial\varphi}{\partial z} dz = \nabla\varphi \cdot d\mathbf{r} \quad (38)$$

şeklinde ifâde edilebilir. Nihâyet (37) ve (38)'den

$$d\varphi = \nabla\varphi \cdot d\mathbf{r} \quad (39)$$

bulunur. Bu önemli özellikler ifâde eden bir formüldür. Bu şu demektir: $\text{grad } \varphi$ ile $d\mathbf{r}$ vektör artımının skaler çarpımı, skaler fonksiyonun tam diferansiyelini verir. Yani:

Verilen sâbit bir vektör artım miktarı $|d\mathbf{r}|$ için görülür ki, skaler $\varphi(x, y, z)$ fonksiyonunda $d\mathbf{r}$ vektörü doğrultusundaki $d\varphi$ değişmesi, $\text{grad } \varphi = \nabla\varphi$ 'nin, $d\mathbf{r}$ üzerindeki izdüşümü ile orantılıdır.

C_1 ve C_2 ($C_2 > C_1$), birer sâbit olmak üzere ayrı ayrı $\varphi_1(x, y, z) = C_1$ ve $\varphi_2(x, y, z) = C_2$ şeklinde, iki potansiyelin değeri olarak alınırsa iki eşpotansiyel yüzey elde edilir. C_1 eşpotansiyel yüzeyi üzerinde P ve N noktalarını ele alalım. P noktası, $\varphi_1(x, y, z) = C_1$ eşpotansiyel yüzeyi üzerinde olduğundan, $d\varphi = 0$ olur. Bu sonuç, C_1 eşpotansiyel yüzeyi üzerinde geçerlidir. Çünkü, Şekil 6'da görüldüğü gibi, eşpotansiyel yüzeyi üzerinde

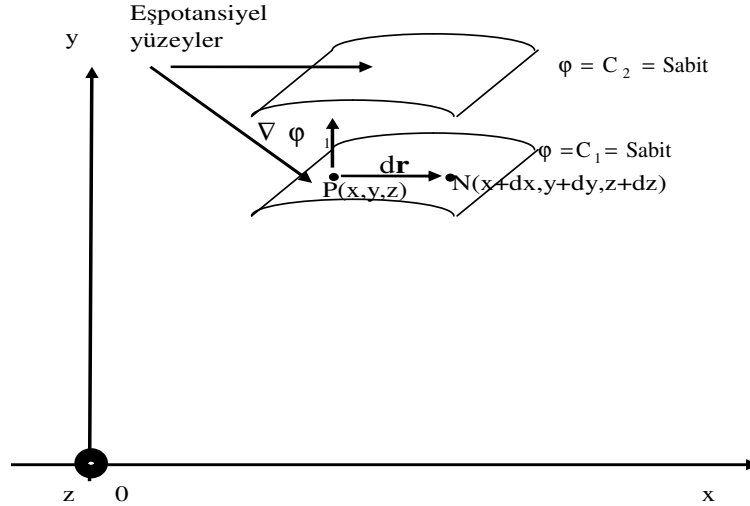
potansiyelde bir artma söz konusu değildir. Yani, $d\phi_1(x, y, z)=0$ olur. O zaman bir eşpotansiyel yüzey üzerinde (39)'dan

$$d\phi = \nabla\phi \cdot d\mathbf{r}=0 \quad (40)$$

elde edilir⁷. Bu sonuç, Şekil 6'da görüldüğü gibi, bu yüzey üzerindeki $\nabla\phi$ ile $d\mathbf{r}$ vektör artımının birbirine dik olduklarını gösterir. $d\mathbf{r}$ ise, $\phi_1(x, y, z)=C_1$ eşpotansiyel yüzey üzerindeki P noktası civârında bulunan N noktası için eşpotansiyel yüzeyine P noktasında teğet bir vektördür. Bundan dolayı, $\nabla\phi$, eşpotansiyel yüzeyin P noktasındaki yüzey normal vektörünün doğrultusunda olmak zorundadır. $\nabla\phi$, $(C_2 \setminus C_1)$ olması sebebiyle, $\phi(x, y, z)$ fonksiyonunun artışı doğrultusunda olduğu için, $\nabla\phi$, $\phi_1(x, y, z)=C_1$ 'den $\phi_2(x, y, z)=C_2$ 'ye doğru bir gidişi belirtir.

Son olarak, şunu söylemek mümkündür: Bir potansiyel fonksiyonun gradyanı, bu fonksiyona âit eş potansiyel yüzeye dik olan bir vektör alanıdır. Bu vektör alanının yönü, eşpotansiyel yüzeyin birim normal vektörü ile aynı yöndedir.

Sonuç olarak dik kartezyen koordinat sisteminde $\phi(x, y, z)$ skaler fonksiyonun $\nabla\phi = \text{grad } \phi$ gradyanı (33) ile verilir.

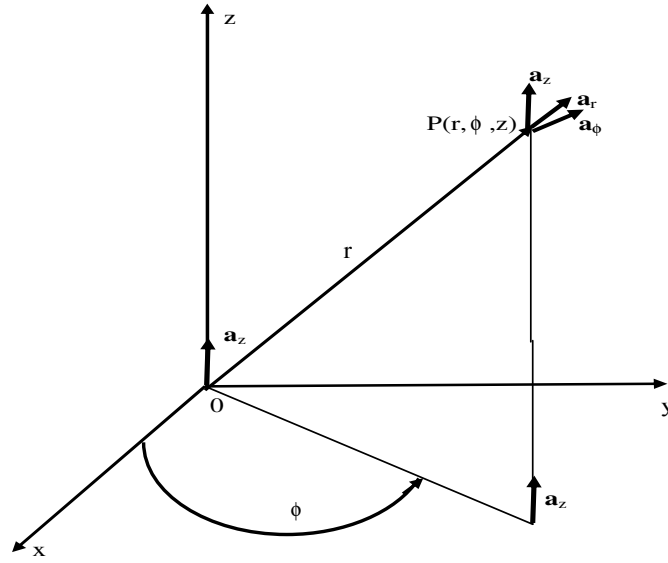


Şekil 6 Eş potansiyel yüzelere göre potansiyel fonksiyonun gradyanının yönü Bir $\phi(x, y, z)$ sıkalor fonksiyonun, (Şekil 7)'de görülen (r, ϕ, z) silindirik ve

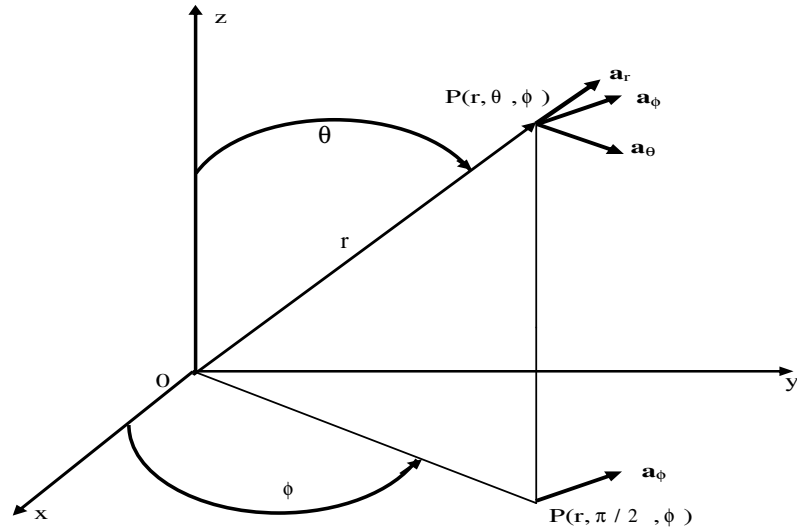
(Şekil 8) 'de görülen (r, θ, ϕ) dik küresel koordinat sistemlerindeki gradyan ifâdeleri ise, sırasıyla, aşağıda (41) ve (42)'de verilmiştir.

$$\nabla\phi = \left(\frac{\partial}{\partial r} \mathbf{a}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \phi} \mathbf{a}_\phi + \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{a}_z \right) \phi = \frac{\partial \phi}{\partial r} \mathbf{a}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \phi} \mathbf{a}_\phi + \frac{\partial \phi}{\partial z} \mathbf{a}_z \quad (41)$$

⁷ Edminister, J.A., Electromagnetics, Schaum's Outline Series in Engineering, McGraw-Hill Book Company, 1979.

Şekil 7 (r, ϕ , z) silindirik koordinat sistemi

$$\nabla\varphi = \left(\frac{\partial}{\partial r} \mathbf{a}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \mathbf{a}_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} \mathbf{a}_\phi \right) \varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial r} \mathbf{a}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \mathbf{a}_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \varphi}{\partial \phi} \mathbf{a}_\phi \quad (42)$$

Şekil 8 (r, θ , ϕ) küresel koordinat sistemi

Ev Ödevi:

- 1) Koordinat sistemlerine çalışınız.
- 2) Bir sıkalara fonksiyon dik kartezyen koordinat sisteminde $\varphi(x, y, z) = 5x^2 + y^3 + 2xz$ olarak verildiğine göre bunun gradyanını bulunuz.

3) Bir sıkalar fonksiyon dik silindirik koordinat sisteminde $\varphi(r, \phi, z) = 5r^2 + \cos^3 \phi + 2rz$ olarak verildiğine göre bunun gradyanını bulunuz.

4) Bir sıkalar fonksiyon dik küresel koordinat sisteminde $\varphi(r, \theta, \phi) = 5r^2 \sin \theta + \cos^3 \phi$ olarak verildiğine göre bunun gradyanını bulunuz.

1.5. BİR VEKTÖRÜN DİVERJANSI

Uzayın her hangi bir noktasındaki bir yer vektörü

$$\mathbf{r}(x, y, z) = r_x \mathbf{a}_x + r_y \mathbf{a}_y + r_z \mathbf{a}_z$$

olarak alınır, del operatörünün bu vektörle yapılan skaler çarpımına bu vektörün diverjansı denir:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{r}(x, y, z) &= \left(\frac{\partial}{\partial x} \mathbf{a}_x + \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{a}_y + \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{a}_z \right) \cdot \mathbf{r}(x, y, z) \\ &= \left(\frac{\partial}{\partial x} \mathbf{a}_x + \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{a}_y + \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{a}_z \right) \cdot (r_x \mathbf{a}_x + r_y \mathbf{a}_y + r_z \mathbf{a}_z) \\ &= \frac{\partial r_x}{\partial x} + \frac{\partial r_y}{\partial y} + \frac{\partial r_z}{\partial z} \end{aligned} \quad (43)$$

Bu sonuç, \mathbf{r} vektörünün kartezyen dik koordinat sistemindeki diverjansıdır⁸.

Ödev:

1) $\mathbf{A}(x, y, z) = A_x(x, y, z)\mathbf{a}_x + A_y(x, y, z)\mathbf{a}_y + A_z(x, y, z)\mathbf{a}_z$ vektörünün dik kartezyen koordinat sistemindeki diverjans ifâdesini yazınız.

2) $\mathbf{R}(x, y, z) = 2x^2 \sin^2 y \mathbf{a}_x + 3 \cos^2 y \mathbf{a}_y + 3xyz \mathbf{a}_z$ vektörünün $P(1, 2, 0)$ noktasındaki diverjansının değerini bulunuz.

Genel olarak bir \mathbf{A} vektörünün verilen bir P noktasındaki diverjansı

$$\text{div } \mathbf{A} = \nabla \cdot \mathbf{A} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \oint_S \frac{\mathbf{A} \cdot d\mathbf{S}}{\Delta V} \quad (44)$$

olarak tanımlanır. Yâni:

\mathbf{A} vektörünün verilen bir P noktasındaki diverjansı, \mathbf{A} vektörünün P noktasını kuşatan herhangi bir kapalı yüzey üzerinden entegralinin, bu kapalı yüzeyin P noktası civârında meydana getirdiği ΔV hacmine oranının hacmin sıfıra giderkenki limitine eşittir.

$$\mathbf{A}(r, \phi, z) = A_r \mathbf{a}_r + A_\phi \mathbf{a}_\phi + A_z \mathbf{a}_z \quad (45)$$

⁸ Spiegel, M.R., *Vector Analysis*, Schaum Publishing Co., New York, 1959.

ile verilen bir \mathbf{A} vektörünün (r, ϕ, z) silindirik dik koordinat sisteminde ve

$$\mathbf{B}(r, \theta, \phi) = B_r \mathbf{a}_r + B_\theta \mathbf{a}_\theta + B_\phi \mathbf{a}_\phi \quad (46)$$

ile verilen \mathbf{B} vektörünün (r, θ, ϕ) küresel dik koordinat sisteminde herhangi bir P noktasındaki diverjans ifâdeleri ise, sırasıyla,

$$\nabla \cdot \mathbf{A}(r, \phi, z) = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r A_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial A_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \quad (47)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B}(r, \theta, \phi) = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 B_r) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (B_\theta \sin \theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial B_\phi}{\partial \phi} \quad (48)$$

ile verilir.

Sorular:

1) Dik karteziyen, silindirik ve küresel koordinatlara âit uzunluk, yüzey ve hacim elemanları nelerdir?

Cevaplar:

1) Dik karteziyen, silindirik ve küresel koordinatlara âit uzunluk, yüzey ve hacim elemanları aşağıda verilmiştir⁹.

Uzunluk elemanları:

$$d\ell = \sqrt{dr^2 + r^2 d\phi^2 + dz^2}, \text{ (Silindirik)}$$

$$d\ell = \sqrt{dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2}, \text{ (Küresel)}$$

Yüzey elemanları:

$$dS = r d\phi dr, \text{ (Silindirik, } xy \text{ düzleminde)}$$

$$dS = r^2 \sin \theta d\theta d\phi, \text{ (Küresel, küre yüzeyinde)}$$

Hacim elemanları:

$$dV = r d\phi dr dz, \text{ (Silindirik)}$$

$$dV = r^2 \sin \theta d\theta d\phi dr, \text{ (Küresel)}$$

Ödev: Aşağıdaki vektörlerin diverjanslarını bulunuz.

1) $\mathbf{A}(r, \phi, z) = 2r^2 \mathbf{a}_r + 3 \cos^3 \phi \mathbf{a}_\phi + z^3 \sin \phi \mathbf{a}_z$

2) $\mathbf{A}(r, \theta, \phi) = 2r^2 \cos \theta \mathbf{a}_r + 3 \sin^3 \theta \mathbf{a}_\theta + z^3 \sin \phi \mathbf{a}_\phi$

⁹ Edminister, J.A., Electromagnetics, Schaum's Outline Series in Engineering, McGraw-Hill Book Company, 1979.

1.6. BİR VEKTÖRÜN ROTASYONU

Uzayın her hangi bir noktasındaki her hangi bir

$$\mathbf{R}(x, y, z) = R_x \mathbf{a}_x + R_y \mathbf{a}_y + R_z \mathbf{a}_z \quad (49)$$

vektörünün rotasyonu, $\nabla \wedge \mathbf{R}$ olarak tanımlanır ve

$$\nabla \wedge \mathbf{R} = \begin{vmatrix} \mathbf{a}_x & \mathbf{a}_y & \mathbf{a}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ R_x & R_y & R_z \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial R_z}{\partial y} - \frac{\partial R_y}{\partial z} \right) \mathbf{a}_x + \left(\frac{\partial R_x}{\partial z} - \frac{\partial R_z}{\partial x} \right) \mathbf{a}_y + \left(\frac{\partial R_y}{\partial x} - \frac{\partial R_x}{\partial y} \right) \mathbf{a}_z \quad (50)$$

olarak hesaplanır¹⁰.

Ev Ödevi:

Silindirik ve küresel koordinat sistemlerinde rotasyon ifâdelerini araştırınız.

Sorular:

- 1) $\mathbf{r}(x, y, z) = x\mathbf{a}_x + y\mathbf{a}_y + z\mathbf{a}_z$ vektörünün diverjansı nedir?
- 2) $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ olduğuna göre grad $r = \nabla r$ 'yi hesaplayınız.
- 3) Laplace operatörü nedir? $\nabla \cdot \nabla \phi(x, y, z) = \nabla^2 \phi(x, y, z)$ olduğunu gösteriniz.
- 4) $\nabla \wedge (\nabla \wedge \mathbf{R}) = -\nabla^2 \mathbf{R} + \nabla (\nabla \cdot \mathbf{R})$ olduğunu gösteriniz.
- 5) $\nabla \cdot \left(\frac{\mathbf{r}}{r^3} \right) = 0$ olduğunu gösteriniz.

Cevaplar:

$$\begin{aligned} 1) \nabla \cdot \mathbf{r} &= \left(\frac{\partial}{\partial x} \mathbf{a}_x + \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{a}_y + \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{a}_z \right) \cdot (x\mathbf{a}_x + y\mathbf{a}_y + z\mathbf{a}_z) = 1 + 1 + 1 = 3 \\ 2) \nabla r &= \nabla \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \left(\frac{\partial}{\partial x} \mathbf{a}_x + \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{a}_y + \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{a}_z \right) \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \\ &= \frac{x\mathbf{a}_x + y\mathbf{a}_y + z\mathbf{a}_z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \frac{\mathbf{r}}{r} = \mathbf{a}_r \end{aligned}$$

Görüldüğü gibi birim vektörü ∇r olarak almak mümkündür. O zaman meselâ (17)'deki elektrik alanı

¹⁰ Spiegel, M.R., *Vector Analysis*, Schaum Publishing Co., New York, 1959.

$$\mathbf{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon r^2} \mathbf{a}_r = \frac{Q}{4\pi\epsilon r^2} \nabla r = \frac{Q}{4\pi\epsilon r^3} \mathbf{r} = -\frac{Q}{4\pi\epsilon} \nabla \left(\frac{1}{r} \right) = -\frac{Q}{4\pi\epsilon} \text{grad}(1/r)$$

olarak da yazılabilir.

3) Bir skaler fonksiyonun gradyanının diverjansı Laplace operatörü adı verilen bir operatörle temsil edilir:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot (\nabla \varphi) &= \left(\frac{\partial}{\partial x} \mathbf{a}_x + \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{a}_y + \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{a}_z \right) \cdot \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \mathbf{a}_x + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \mathbf{a}_y + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \mathbf{a}_z \right) \\ &= \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} \end{aligned}$$

veyâ

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = \nabla^2 \varphi$$

olur ki burada ∇^2 operatörüne Laplace operatörü denir. Dolayısıyla, $\nabla \cdot \nabla \varphi(x, y, z) = \nabla^2 \varphi(x, y, z)$ olur.

4)

$$\nabla \wedge (\nabla \wedge \mathbf{R}) =$$

$$\nabla \wedge \begin{vmatrix} \mathbf{a}_x & \mathbf{a}_y & \mathbf{a}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ R_x & R_y & R_z \end{vmatrix} = \nabla \wedge \left[\left(\frac{\partial R_z}{\partial y} - \frac{\partial R_y}{\partial z} \right) \mathbf{a}_x + \left(\frac{\partial R_x}{\partial z} - \frac{\partial R_z}{\partial x} \right) \mathbf{a}_y + \left(\frac{\partial R_y}{\partial x} - \frac{\partial R_x}{\partial y} \right) \mathbf{a}_z \right]$$

$$\begin{aligned} & \begin{vmatrix} \mathbf{a}_x & \mathbf{a}_y & \mathbf{a}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial R_z}{\partial y} - \frac{\partial R_y}{\partial z} & \frac{\partial R_x}{\partial z} - \frac{\partial R_z}{\partial x} & \frac{\partial R_y}{\partial x} - \frac{\partial R_x}{\partial y} \end{vmatrix} = \left[\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial R_y}{\partial x} - \frac{\partial R_x}{\partial y} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial R_x}{\partial z} - \frac{\partial R_z}{\partial x} \right) \right] \mathbf{a}_x + \\ & \left[\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial R_z}{\partial y} - \frac{\partial R_y}{\partial z} \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial R_y}{\partial x} - \frac{\partial R_x}{\partial y} \right) \right] \mathbf{a}_y + \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial R_x}{\partial z} - \frac{\partial R_z}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial R_z}{\partial y} - \frac{\partial R_y}{\partial z} \right) \right] \mathbf{a}_z \end{aligned}$$

$$= \left(-\frac{\partial^2 R_x}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 R_x}{\partial z^2} \right) \mathbf{a}_x + \left(-\frac{\partial^2 R_y}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 R_y}{\partial x^2} \right) \mathbf{a}_y + \left(-\frac{\partial^2 R_z}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 R_z}{\partial y^2} \right) \mathbf{a}_z$$

$$+ \left(\frac{\partial^2 R_y}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 R_z}{\partial z \partial x} \right) \mathbf{a}_x + \left(\frac{\partial^2 R_z}{\partial z \partial y} + \frac{\partial^2 R_x}{\partial x \partial y} \right) \mathbf{a}_y + \left(\frac{\partial^2 R_x}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 R_y}{\partial y \partial z} \right) \mathbf{a}_z$$

$$= \left(-\frac{\partial^2 R_x}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 R_x}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 R_x}{\partial z^2} \right) \mathbf{a}_x + \left(-\frac{\partial^2 R_y}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 R_y}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 R_y}{\partial z^2} \right) \mathbf{a}_y + \left(-\frac{\partial^2 R_z}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 R_z}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 R_z}{\partial z^2} \right) \mathbf{a}_z$$

$$\begin{aligned}
& + \left(\frac{\partial^2 R_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 R_y}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 R_z}{\partial z \partial x} \right) \mathbf{a}_x + \left(\frac{\partial^2 R_x}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 R_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 R_z}{\partial z \partial y} \right) \mathbf{a}_y + \left(\frac{\partial^2 R_x}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 R_y}{\partial y \partial z} + \frac{\partial^2 R_z}{\partial z^2} \right) \mathbf{a}_z \\
& = - \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) (R_x \mathbf{a}_x + R_y \mathbf{a}_y + R_z \mathbf{a}_z) + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial R_x}{\partial x} + \frac{\partial R_y}{\partial y} + \frac{\partial R_z}{\partial z} \right) \mathbf{a}_x + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial R_x}{\partial x} + \frac{\partial R_y}{\partial y} + \frac{\partial R_z}{\partial z} \right) \mathbf{a}_y \\
& + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial R_x}{\partial x} + \frac{\partial R_y}{\partial y} + \frac{\partial R_z}{\partial z} \right) \mathbf{a}_z = -\nabla^2 R + \nabla \left(\frac{\partial R_x}{\partial x} + \frac{\partial R_y}{\partial y} + \frac{\partial R_z}{\partial z} \right) = -\nabla^2 R + \nabla(\nabla \cdot \mathbf{R})
\end{aligned}$$

$$5) \nabla \cdot \left(\frac{\mathbf{r}}{r^3} \right) = ?$$

$$\begin{aligned}
\nabla \cdot \left(\frac{\mathbf{r}}{r^3} \right) & = \nabla(r^{-3}) \cdot \mathbf{r} + r^{-3} \nabla \cdot \mathbf{r} = -3r^{-5} \mathbf{r} \cdot \mathbf{r} + 3r^{-3} = -3r^{-4} \mathbf{a}_r \cdot \mathbf{r} + 3r^{-3} = -3r^{-4} \nabla r \cdot \mathbf{r} + 3r^{-3} \\
& = -3r^{-4} \frac{\mathbf{r}}{r} \cdot \mathbf{r} + 3r^{-3} = -3r^{-5} \mathbf{r} \cdot \mathbf{r} + 3r^{-3} = -3r^{-3} + 3r^{-3} = 0
\end{aligned}$$

Ev Ödevleri:

$$1) \nabla^2(1/r) = 0 \text{ olduğunu gösteriniz.}$$

$$2) \nabla \left(\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) = - \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \text{ olduğunu gösteriniz.}$$

$$3) \nabla \cdot \left[\nabla \left(\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) \right] = \nabla^2 \left(\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) = 0 \text{ olduğunu gösteriniz.}$$

Hatâsız insan yoktur. Bütün büyük işler hatâlarını kabul ve tâmir etmesini bilen insanların eseridir.

1.7. STATİK ELEKTRİK ALANININ KORUYUCULUK ÖZELLİĞİ

Statik elektrik alanında iki nokta arasındaki potansiyel farkı aradaki yola bağlı değildir. Nokta şeklindeki Q yükünün uzayda iki nokta arasında meydana getirdiği potansiyel farkı

$$V = \int_{r_1}^{r_2} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \frac{Q}{4\pi\epsilon} \int_{r_1}^{r_2} \frac{\mathbf{r}_0}{r^2} \cdot d\mathbf{l} = \frac{Q}{4\pi\epsilon} \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r^2} = - \frac{Q}{4\pi\epsilon r} \Big|_{r=r_1}^{r_2} = \frac{Q}{4\pi\epsilon} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) \quad (51)$$

ile verilir. Potansiyel farkı aradaki yola bağlı olmadığı için

$$V = \frac{Q}{4\pi\epsilon} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{Q}{4\pi\epsilon r_2} \right) = V_1 - V_2 \quad (52)$$

olarak alınabilir. $r_1=r$ ve $r_2 \rightarrow \infty$ için $V_2=0$ olur ki, buradan

$$V = \frac{Q}{4\pi\epsilon r} \quad (53)$$

elde edilir. Diğer taraftan, nokta şeklindeki yükün r mesâfedeki elektrik alanı ve enerjisi için

$$E = \frac{Q}{4\pi\epsilon r^2} = V/r \quad (54)$$

ve

$$W = \int \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} = Q \int \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} = QV \rightarrow V = W/Q \quad (55)$$

elde edilir ki, buradan şu sonuçları elde edebiliriz:

Nokta şeklindeki bir Q yükünün V potansiyeli, sonsuzun referans (sonsuzun potansiyeli sıfır) seçilerek hesaplanan potansiyel farkını (gerilimini) gösterir. Bu potansiyele *Mutlak Potansiyel* denir. Buna göre, potansiyel birim yük başına yapılan iş olarak da tanımlanır.

Yâni potansiyel farkı birim yükün, $r = \ell$ kadar götürülmesinden dolayı yapılan iş eşittir. Dolayısıyla genel olarak

$$\phi = V = E \ell \quad (56)$$

yazılabilir. Başka bir ifâdeyle, bu potansiyel farkı, statik elektrik alanının, pozitif birim elektrik yükünü, meselâ herhangi bir A noktasından herhangi bir B noktasına götürmek için bu pozitif birim elektrik yükü üzerine yaptığı iştir ve

$$\phi = V_{AB} = \int_0^{\ell} \mathbf{E} \cdot \mathbf{d} \ell \quad (57)$$

olarak da yazılabilir. Eğer pozitif birim elektrik yükünün, aynı statik elektrik alanı içinde bu sefer B'den A'ya getirilmesi istense, o zaman

$$\phi = V_{BA} = \int_{\ell}^0 \mathbf{E} \cdot \mathbf{d} \ell = -\int_0^{\ell} \mathbf{E} \cdot \mathbf{d} \ell \quad (58)$$

ya da

$$d\phi = -E d\ell \quad (59)$$

olarak yazılmalıdır. Bu potansiyel ise, aynı statik elektrik alanı içinde pozitif birim yüküne karşı dış alan kuvvetlerinin yapacağı işi gösterir.

Statik elektrik alanında $V_{AB} = -V_{BA}$ 'dır. Yâni,

$$V_{AB} + V_{BA} = \int_0^{\ell} \mathbf{E} \cdot \mathbf{d} \ell + \int_{\ell}^0 \mathbf{E} \cdot \mathbf{d} \ell = \int_0^{\ell} \mathbf{E} \cdot \mathbf{d} \ell = 0 \quad (60)$$

edilir ki, bu statik elektrik alanlarının koruyuculuk (konservatiflik) özelliğini belirtir ve şöyle ifâde edilir:

Statik elektrik alanında, elektrik alanının kapalı bir eğri boyunca bir boyutlu (çizgi şeklindeki entegrali) sıfırdır. Ya da

Statik elektrik alanında, iki nokta arasındaki potansiyel farkı, yola bağlı değil değildir; bu noktaların potansiyellerinin farkına eşittir.

(39) ve (59)'dan, $dr=d\ell$ olduğu göz önünde tutularak

$$\mathbf{E} = -\nabla\phi \quad (61)$$

bulunur. Bu, elektrik alanının diferansiyel ifâdesidir. (60) ifâdesi, bir kapalı çevrim belirttiği için

$$\phi = -\oint \mathbf{E} \cdot d\boldsymbol{\ell} \quad (62)$$

şeklinde yazılabilir.

Stokes teoremine göre, bir vektörün herhangi bir kapalı çevrim boyunca bir boyutlu entegrali, bu vektörün rotasyonelinin kapalı çevrimin belirttiği herhangi bir yüzey üzerinden alınan yüzey entegraline eşittir.

Bu teoreme göre, (62) entegrali,

$$\phi = -\oint \mathbf{E} \cdot d\boldsymbol{\ell} = \iint_S (\nabla \wedge \mathbf{E}) \cdot d\mathbf{S} \quad (63)$$

şekline girer. Bu, statik elektrik alanı için (60)'dan dolayı sıfır sonucunu verir ki

$$\iint_S (\nabla \wedge \mathbf{E}) \cdot d\mathbf{S} = 0 \quad (64)$$

olur veya $d\mathbf{S} \neq 0$ olması nedeniyle

$$\nabla \wedge \mathbf{E} = 0 \quad (65)$$

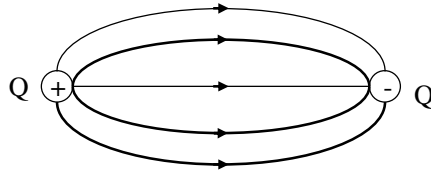
bulunur. Bu, statik elektrik alanının koruyuculuk özelliğinin diferansiyel ifâdesini verir.

Ödev: $V = \frac{Q}{4\pi\epsilon r}$ 'nin r 'ye göre gradyanını alınız.

*Eğer kederli iseniz, şu yolda hareket etseniz,
pek kısa zamanda dertlerinizden sıyrılabilirsiniz.
Her gün yardıma muhtaç bir insanı nasıl mesut
edeceğinizi düşününüz ve ona göre hareket ediniz.
Alfred Adler*

1.8. ELEKTRİK AKISI

Pozitif elektrik yükünden çıkan, negatif elektrik yükünde son bulan bir elektrik akısı vardır. Elektrik akısı noktadan çıkan ya da noktaya giren elektrik yüküne eşittir, $\phi = +Q$ veya $\phi = -Q$ (Şekil 9), birimi C'dir, genel olarak ϕ ile gösterilir. Yâni, pozitif işâret, akının noktadan çıktığını; negatif işâret ise akının noktaya girdiğini gösterecek şekilde tanımlanabilir.



Şekil 9 Elektrik Akısı

Bu açıklamaların ışığı altında elektrik akı yoğunluğunun büyüklüğü $D = \frac{Q}{S}$ ve elektrik akı yoğunluğu vektörü

$$\mathbf{D} = D \mathbf{a}_r \quad (66)$$

Veyâ φ elektrik akısını göstermek üzere

$$\mathbf{D} = \frac{d\varphi}{dS} \mathbf{a}_r \quad (67)$$

ve *Elektrik Akısı*

$$\varphi = \iint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = \iint_S \mathbf{D} \cdot \mathbf{a}_r dS \quad (68)$$

ya da

$$\varphi = \iint_S D dS \quad (69)$$

olur. r yarıçaplı bir kürenin merkezine konan bir Q yükünün yüzeyin herhangi bir noktasındaki elektrik akı yoğunluğunun şiddeti,

$$D = \frac{Q}{4\pi r^2} \quad (70)$$

ve elektrik akı yoğunluğu vektörü,

$$\mathbf{D} = \frac{Q}{4\pi r^2} \mathbf{a}_r = \frac{Q}{4\pi r^3} \mathbf{r} = -\frac{Q}{4\pi} \nabla \left(\frac{1}{r} \right) \quad (71)$$

ile verilir. Bu, aynı zamanda nokta şeklindeki bir Q yükünden çevreye yayılan elektrik akısının ifâdesidir. Buradaki birim vektör \mathbf{a}_r , yarıçap doğrultusundaki birim vektördür. Elektrik akı yoğunluğu vektörü, (2)'deki birim vektör tanımının dikkate alınmasıyla, (20)'deki tanım gereğince $\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}$ sırasıyla (21) ve (22)'den nokta nokta yükler için,

$$\mathbf{D} = \frac{1}{4\pi} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{Q_{2i}}{r_{2i}^2} \mathbf{a}_{2i} \quad (72)$$

ve sürekli dağılımlı yükler için,

$$\mathbf{D} = \frac{1}{4\pi} \iiint_V \frac{dQ \mathbf{r}'}{r'^3} = \frac{1}{4\pi} \iiint_V \frac{\rho dV \mathbf{r}'}{r'^3} = \frac{1}{4\pi} \iiint_V \frac{\rho \mathbf{r}'}{r'^3} dV = \frac{1}{4\pi} \iiint_V \frac{\rho}{r'^2} \mathbf{a}_r dV \quad (73)$$

olarak elde edilir.

Ev Ödevi:

Nokta şeklindeki ve sürekli dağılım hâlindeki yüklerin elektrik akı yoğunluğu vektörlerini gradyan cinsinden yazınız.

Sorular:

1) *a yarıçaplı bir kürenin merkezine konan $\pm Q$ yükünün α ve β arasında değişen θ açısının belirlediği küre dilimi yüzeyinden geçirdiği elektrik akısının ifâdesini veriniz.*

2) a yarıçaplı bir kürenin merkezine konan $\pm Q$ yükünün küre yüzeyinden geçirdiği toplam elektrik akısını hesaplayınız. Akının yönünü belirtiniz.

3) Yarıçapı 5 cm olan dâire şeklinde bir disk üzerindeki yüzey yük yoğunluğu $\rho_s = 25 \sin \phi$ C/m² olduğuna göre, yüzeyden geçen net elektrik akısını bulunuz.

Cevaplar:

1) ϕ bir açığı ve φ elektrik akısını göstermek üzere:

$$\varphi = \iint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = \iint_S \mathbf{D} \cdot \mathbf{a}_r dS = \iint_S D \mathbf{a}_r \cdot \mathbf{a}_r dS = \iint_S D dS = \iint_S \frac{Q}{4\pi r^2} (r^2 \sin\theta \, d\theta \, d\varphi)$$

$$\varphi = \frac{Q}{4\pi} \int_{\theta=\alpha}^{\beta} \sin\theta \, d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi = \pm \frac{Q}{2} (\cos\alpha - \cos\beta), C$$

2)

$$\varphi = \iint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = \iint_S \mathbf{D} \cdot \mathbf{a}_r dS = \iint_S \frac{Q}{4\pi r^2} (r^2 \sin\theta \, d\theta \, d\varphi) = \frac{Q}{4\pi} \int_0^{\pi} \sin\theta \, d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi$$

$$= \pm Q$$

veyâ

$$\varphi = \iint_S \frac{Q}{4\pi r^2} (r^2 \sin\theta \, d\theta \, d\varphi) = \frac{Q}{4\pi} \int_{\theta=0}^{\beta} \sin\theta \, d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi = \pm \frac{Q}{2} (\cos\alpha - \cos\beta) = \pm Q$$

3) Akının akış yönü pozitif yük için yükten sonsuza doğru, negatif yük için sonsuzdan yüke doğrudur.

4)

$$Q = \iint_S \rho_s dS = \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{r=0}^{5 \times 10^{-2}} \rho_s r dr d\varphi = \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{r=0}^{5 \times 10^{-2}} 25 \sin\varphi r dr d\varphi = 25 \int_{\varphi=0}^{2\pi} \sin\varphi d\varphi \int_{r=0}^{5 \times 10^{-2}} r dr = 0 C$$

1.9. TEKİL FONKSİYONLAR¹¹

Nokta şeklindeki kaynak fonksiyonlara tekil (singular) fonksiyonlar denir. Bir zaman noktasında darbe (impuls) şeklinde etki eden fonksiyonu da bir tekil fonksiyondur. Tekil fonksiyonlar, klâsik fonksiyonlar yardımıyla tanımlanamazlar. Bu fonksiyonlarla ilgili çalışmalar, 1945 yılında *L. Schwartz* tarafından geliştirilen genelleştirilmiş fonksiyonlar teorisini doğurmuştur.

Schwartz, teorisini *Distribisyon (Distribution) Teorisi* adı ile vermiştir. Distribisyon, klâsik fonksiyonlar kavramını da içermekte ve onların genel şeklini vermektedir. Bu yüzden Distribisyona “*Genelleştirilmiş Fonksiyonlar*” denmektedir¹².

Burada genelleştirilmiş fonksiyonlar içinde olan (*Dirac*) delta fonksiyonu tanıtılacaktır. Bu fonksiyon, genel olarak ara hesaplarda görülmez. Sonuçlarda ise, tekil

¹¹ Yarasa, R., Fourier Analizi, Çağlayan Basımevi, 1975.

¹² Jackson, J.D., *Classical Electrodynamics*, John Wiley and Sons, Inc., New York, 1967.

fonksiyonlar ya tamâmen ortadan kaybolmuş ya da entegral işâreti altında test fonksiyonu (yeterince iyileştirilmiş bir fonksiyon) denilen bir fonksiyonla çarpım şeklinde görülür.

Yük yoğunluğu, ayrık yükler için, delta fonksiyonu cinsinden

$$\rho(\mathbf{r}') = \sum_{i=1}^n q_i \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \quad (74)$$

ile gösterilir.

Bu, \mathbf{r}'_i noktalarında bulunan n tâne nokta şeklindeki yüklerin dağılımını verir. Bu tanım, potansiyel fonksiyonuna taşınırsa,

$$\varphi(\mathbf{r}) = \iiint_V \frac{\sum_{i=1}^n q_i \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{4\pi\epsilon |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV' \quad (75)$$

elde edilir. Burada $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}$ ifâdesine Green Fonksiyonu denir. Dirac delta fonksiyonu $\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$, Laplasian operatörü cinsinden

$$\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = -\nabla^2 \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \quad (76)$$

olarak yazılabilir. Dolayısıyla Green Fonksiyonunun Laplace'sı

$$\nabla^2 G(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = -\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \quad (77)$$

olarak elde edilir.

Dirac delta fonksiyonu $\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$, üç boyutludur. Yâni, $\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = \delta(x - x')\delta(y - y')\delta(z - z')$ 'dir. Meselâ x' kaynağın apsisini ve x ise apsis değişkenini göstermek üzere, bunun bir boyutlu şekli $\delta(x - a)$, $x' = a$, olup aşağıdaki iki özelliği taşımaktadır:

- 1) $\delta(x - a) = 0$, $x \neq a$
 $\delta(x - a) = \infty$, $x = a$
- 2) $\int \delta(x - a) dx = 1$, $x = a$.

Bu ifâde, entegral bölgesinin $x=a$ eşitliğini içermesi hâline âittir. Entegral bölgesi $x=a$ eşitliğini içermiyorsa, bu ifâde sıfırdır.

Klasik fonksiyonlara benzemeyen *Dirac delta fonksiyonu* (1)'de görüldüğü gibi, $x=0$ civârında çok büyük değer alan ve orijini çeviren küçük bir aralığın dışında ise sıfır olan bir fonksiyondur. Elektrostatikte nokta şeklindeki yüklerin, formüllerden de görüldüğü gibi, gerek potansiyel ve gerekse elektrik alanı yarıçapın tersi ile orantılı olduğu için, $r=0$ civârında büyük potansiyel ve alan değerine ulaşılmaktadır. İşte bu yüzden ki, $\delta(x)$ fonksiyonu $r=0$ ve civârındaki işlemlerin yapılması için ortaya atılmıştır. $\delta(x)$ fonksiyonu bir çift fonksiyondur: $\delta(-x) = \delta(x)$.

Bu tanımlardan açıkça görülür ki, herhangi bir keyfi $f(x)$ fonksiyonu için

$$\int f(x)\delta(x-a)dx = f(a) \quad (78)$$

$$\int f(x)\delta'(x-a)dx = -f'(a) \quad (79)$$

yazılabilir. Burada delta üzerindeki üs, ('), argümana göre türevi göstermektedir. Üç boyutlu Dirac delta fonksiyonu $\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}')$ için

$$1) \iiint_{\Delta V} \delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}')dV = 1, \text{ eğer } \Delta V, \mathbf{r} = \mathbf{r}' \text{ ise,} \quad (80)$$

$$2) \iiint_{\Delta V} \delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}')dV = 0, \text{ eğer } \Delta V, \mathbf{r} \neq \mathbf{r}' \text{ ise} \quad (81)$$

*İnsan görüldüğünden daha değerli olmalı,
çok iş başarmalı fakat az ortaya çıkmalıdır.*

Moltke

1.10. TEST FONKSİYONU

Eşitlik (78)'de görüldüğü gibi delta fonksiyonuna âit $f(x)$ fonksiyonuna *Test Fonksiyonu* denir. Bu fonksiyon $f(a)$ sayısını düzenlediği için, sâdece $f(a)$ 'yı bilmek yetmektedir.

Değişken x değerleri için tanımlanmış bir bölgede her mertebeden sürekli türevleri kabul eden ve sonlu olan reel $f(x)$ fonksiyonlar cümlesini ele aldığımızda, tanımlanan bölgenin çok küçük sınırlı bir kısmındaki noktalarda $f(x) \neq 0$ ve bunun dışındaki bütün noktalarda $f(x)=0$ oluyorsa, böyle tanımlanan $f(x)$ fonksiyonlarına *Test Fonksiyonları* denir¹³.

Sorular:

- 1) $f(x)=\sin x$ nasıl bir fonksiyondur?
- 2) Test fonksiyonun tanımını veriniz.
- 3) Bir test fonksiyonunun Sıfıra Yakınsaması ne demektir?
- 4) Fonksiyonel nedir?
- 5) Sâbit fonksiyonu tanımlayınız.
- 6) Genelleşmiş fonksiyonda öteleme nasıldır?
- 7) Genelleşmiş fonksiyonda türev nasıldır?
- 8) Birim basamak fonksiyonunun türevi nasıldır?
- 9) Dirac $\delta(x)$ fonksiyonunun [Distribisyonun] genelleşmiş fonksiyonunun bir sayıyı verdiğini gösteriniz.
- 10) $x=x_0$ noktasındaki Dirac $\delta(x)$ fonksiyonunu [Distribisyonu] tanımlayınız.
- 11) Dirac $\delta(x)$ fonksiyonunun türevini bulunuz.
- 12) Sürekli ve ardışık olarak türetilen bir $\alpha(x)$ fonksiyonu ile $\delta(x)$ fonksiyonunun çarpımının türevini bulunuz.

¹³ Yarasa, R., Fourier Analizi, Çağlayan Basımevi, 1975.

- 13) Sürekli ve ardışık olarak türetilen bir $\alpha(x)$ fonksiyonu ile $\delta'(x)$ fonksiyonunun türevinin çarpımını bulunuz.
- 14) $x\delta'(x) = -\delta(x)$ olduğunu gösteriniz.
- 15) Birim basamak fonksiyonunun türevinin $\delta(x)$ 'ya eşit olduğunu gösteriniz.
- 16) İmpuls fonksiyonunun türevi nasıldır?
- 17 İmpuls fonksiyonunun bir çift fonksiyon olduğunu gösteriniz.

Cevaplar:

1) Bir değişkene, meselâ x değişkenine göre, her mertebeden sürekli türevleri olan ve sonlu olan her reel fonksiyonu ele alalım. Örnek olarak $f(x)=\sin x$ fonksiyonunun x değişkenine göre her mertebeden türevleri olduğu gibi, bu fonksiyon sonlu bir fonksiyondur. Bütün x değerleri için söz konusu bölge R ile temsil edilirse, $f(x)=\sin x$ fonksiyonun tanımlanmış R bölgesinde sürekli türevleri ve reel değerleri vardır. Bu bir test fonksiyonu olarak alınabilir.

$f(x)=\sin x$ fonksiyonu R' 'de 0 ile π arasındaki her noktada bir değeri vardır ve süreklidir. Ancak $x=0$ ve $x=\pm\pi$ noktalarında $f(x)=\sin x$ fonksiyonu 0 olur. Buna göre $f(x)=\sin x$ fonksiyonu $0 < |x| < \pi$ aralığında sıfırdan farklı olup bu noktaları içeren çok küçük kapalı cümle $0 \leq |x| \leq \pi$ olarak belirtilebilir. Bunun dışında $\pi < |x|$ açık cümlesinde fonksiyon yine sıfırdır. Sonuç olarak, fonksiyonun sıfır olduğu $x=-\pi, 0, \pi$ noktaları, sürekli olduğu R' 'nin $0 < |x| < \pi$ açık aralığına dâhil değildir.

2) $f(x)=\sin x$ fonksiyonunda görüldüğü gibi, demek ki, test fonksiyonu, tanımlanan bir R bölgesinin çok küçük sınırlı bir bölgesindeki bütün noktalarda sıfırdan farklı ve bunun dışında 0 olmaktadır. Tanımları böyle olan $f(x)$ fonksiyonlarına Test Fonksiyonu denir. Bu test fonksiyonlarının hepsine test uzayı adı verilir. Bu uzay P ile temsil edilebilir.

Bir test fonksiyonu reel sayılarla çarpılıp toplanırsa, sonuçta yine bir test fonksiyonu elde edilir: $f_1(x), f_2(x) \subseteq P \rightarrow f_1(x)c_1 + f_2(x)c_2 \subseteq P$ olur. Bu da test fonksiyonlarının lineer bir uzay meydana getirmesi demektir.

3) P uzayını meydana getiren test fonksiyonlarının

$$f_1(x), f_2(x), f_3(x), \dots, f_n(x) \quad (n=1, 2, 3, \dots)$$

gibi bir dizisi sınırlı, aynı bölgenin dışında sıfır ve ardışık türevleri de düzgün biçimde sıfıra giderse, bu $f_n(x)$ dizisi P uzayında Sıfıra Yakınsar denir.

4) P uzayında bir $f(x)$ test fonksiyonuna karşı bir sayı düşüren her işleme Fonksiyonel denir. $F(x)$ fonksiyonu ile belirtilmiş ve $f(x)$ test fonksiyonuna göre tanımlanmış bir fonksiyoneli başka bir ifâdeyle $f(x)$ test fonksiyonuna karşı bir sayı düşüren fonksiyonel

$$\int_P F(x)f(x)dx$$

ile verilir. Bunun sonucu bir sayıdır. 13. referansta Ruchan Yarasa bu sayıyı

$$\langle F(x), f(x) \rangle$$

olarak sembolize etmiştir:

$$\int_P F(x)f(x)dx = \langle F(x), f(x) \rangle$$

Bu ifâde hem lineerdir ve hem de yakınsar. $\int_P F(x)f(x)dx$ ile tanımlanmış bütün genelleşmiş fonksiyonlara (distribisyonlara) Regüler denir.

P uzayının sonlu her bölgesinde integrali alınabilen $F(x)$ gibi fonksiyonlara Lokal Intregrabl-Bölgesel olarak entegre edilebilen fonksiyon denir. Klasik anlamda bir fonksiyon olmayan $\delta(x)$ fonksiyonu da Lokal Intregrabl bir fonksiyondur. Dolayısıyla bu da $f(x)$ test fonksiyonu ile birlikte meydana getirdiği fokksiyonel

$$\int_P \delta(x)f(x)dx = \langle \delta(x), f(x) \rangle$$

de bir sayı verebilir. $\delta(x)$ fonksiyonu ile düzenlenmiş bütün genelleşmiş fonksiyonlara (distribisyonlara) Tekil (Singüler) denir.

$$5) F(x)=c=\text{sâbit ise } \int F(x)f(x)dx = c \int f(x)dx = \langle c, f(x) \rangle$$

ile tanımlanan genelleşmiş fonksiyona Genelleşmiş Sâbit Fonksiyon denir. Burada $c=1$ ise Genelleşmiş Birim Fonksiyon elde edilir:

$$\int f(x)dx = c \int f(x)dx = \langle 1, f(x) \rangle$$

6) Bilindiği gibi, $x_0 > 0$ olmak üzere, $F(x-x_0)$ 'a, $F(x)$ 'in x ekseninde x_0 kadar sağa doğru ötelenmesi denir.

$$\int F(x-x_0)f(x)dx = \langle F(x-x_0), f(x) \rangle$$

$u=x-x_0$ alınırsa

$$\int F(u)f(u+x_0)du = \langle F(u), f(u+x_0) \rangle = \langle F(x), f(x+x_0) \rangle$$

bulunur.

7) Genelleşmiş fonksiyonda türev işlemi

$$\int F'(x)f(x)dx = \langle F'(x), f(x) \rangle$$

ile başlar. Bu,

$$\langle F'(x), f(x) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} F'(x)f(x)dx$$

demektir. Burada kısmî entegrasyon yapılırsa

$$\langle F'(x), f(x) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} F'(x)f(x)dx = F(x)f(x)\Big|_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} F(x)f'(x)dx$$

olur. Sağdaki ilk terim, $f(x)$ test fonksiyonunun tanımlı olduğu kapalı aralığın dışında sıfır olması nedeniyle, sıfırdır. Dolayısıyla,

$$\langle F'(x), f(x) \rangle = - \int_{-\infty}^{\infty} F(x)f'(x)dx = \langle F(x), -f'(x) \rangle$$

elde edilir.

8)

$$u(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \text{ için} \\ 1 & x > 0 \text{ için} \end{cases}$$

ile tanımlı olan birim basamak fonksiyonu, $x=0$ 'da süreksiz olduğu için, klasik anlamda bir türeve sâhip değildir. Ama genelleşmiş fonksiyon kavramında bu bir türevi içerir.

$$\langle F'(x), f(x) \rangle = \langle u'(x), f(x) \rangle = - \int_0^{\infty} u(x)f'(x)dx = - \int_0^{\infty} f'(x)dx = -f(x)\Big|_{x=0}^{\infty} = f(0)$$

eder. Sonuç olarak

$$\langle u'(x), -f(x) \rangle = f(0)$$

olur.

$$9) \quad \delta(x) = \begin{cases} 0 & x \neq 0 \text{ için} \\ \infty & x = 0 \text{ için} \end{cases}$$

ile tanımlı olan impuls fonksiyonu da klasik fonksiyonlardan farklıdır. Bu yüzden buna Dirac Fonksiyonu da denir. Görüldüğü gibi bu fonksiyon $x=0$ 'da büyük bir değere ulaşmakta fakat $x=0$ 'ın dışında 0 noktasını çeviren küçük bir aralıkta 0 olmaktadır. Bu yüzden, Dirac $\delta(x)$ fonksiyonunun x 'e bağlılığından ziyâde $x=0$ 'daki değeri önem kazanır. Dolayısıyla $\delta(x)$ fonksiyonu

$$\delta_{\varepsilon}(x) = \begin{cases} 0 & x \neq 0 \text{ için} \\ \frac{1}{\varepsilon} & 0 < x < \varepsilon \text{ için} \\ \infty & \varepsilon < x \text{ için} \end{cases}$$

olarak gösterilirse, bu fonksiyon ε 'nin sıfıra giderkenki limiti olarak düşünülebilir. Bu

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \delta_{\varepsilon}(x) = \delta(x)$$

demektir. Buna göre

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta_{\varepsilon}(x)dx = \int_0^{\infty} \frac{1}{\varepsilon} dx = 1$$

olur. Bu açıklamaların ışığı altında

$$\langle \delta_\varepsilon(x), f(x) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \delta_\varepsilon(x) f(x) dx = \int_0^\varepsilon \delta_\varepsilon(x) f(x) dx = \frac{1}{\varepsilon} \int_0^\varepsilon f(x) dx$$

bulunur. Son entegralde, $0 < \zeta < 1$ arasında olmak üzere, entegral hesâbın ortalama değer teoremi kullanılırsa, yâni

$$\int_0^\varepsilon f(x) dx = f(\varepsilon\zeta) \int_0^\varepsilon dx = \varepsilon f(\varepsilon\zeta)$$

alınır

$$\langle \delta_\varepsilon(x), f(x) \rangle = \frac{1}{\varepsilon} \int_0^\varepsilon f(x) dx = \frac{1}{\varepsilon} \varepsilon f(\varepsilon\zeta) = f(\varepsilon\zeta)$$

elde edilir. Burada $\varepsilon \rightarrow 0$ için limit alınır

$$\langle \delta(x), f(x) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) f(x) dx = f(0)$$

bulunur. Bu sonuç, $\delta(x)$ fonksiyonu ile test fonksiyonunun çarpımının entegralinin $f(0)$ gibi bir sayı verdiğini gösterir. Yâni, Distribisyonun [$\delta(x)$ fonksiyonu] genelleşmiş fonksiyonu bir sayıdır.

10) $x=x_0$ noktasındaki Dirac $\delta(x)$ fonksiyonunu [Distribisyonu] tanımlaya

$$\delta(x) = \begin{cases} 0 & x \neq 0 \text{ için} \\ \infty & x = 0 \text{ için} \end{cases}$$

$$\langle \delta(x), f(x) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) f(x) dx = f(0)$$

ile başlayabiliriz. Bu son ifâdeleri

$$\delta(x-0) = \begin{cases} 0 & x \neq 0 \text{ için} \\ \infty & x = 0 \text{ için} \end{cases}$$

$$\langle \delta(x-0), f(x) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x-0) f(x) dx = f(0)$$

şeklinde yazabiliriz. Sonra $0 \rightarrow x_0$ alınır

$$\delta(x-x_0) = \begin{cases} 0 & x \neq x_0 \text{ için} \\ \infty & x = x_0 \text{ için} \end{cases}$$

$$\langle \delta(x-x_0), f(x) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x-x_0) f(x) dx = f(x_0)$$

elde edilir.

11) Dirac $\delta(x)$ fonksiyonunun türevini bulmak için

$$\langle F'(x), f(x) \rangle = - \int_{-\infty}^{\infty} F(x) f'(x) dx = \langle F(x), -f'(x) \rangle$$

ifadesinden hareket edilir:

$$\langle \delta'(x), f(x) \rangle = - \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) f'(x) dx = \langle \delta(x), -f'(x) \rangle$$

Diğer taraftan

$$\langle \delta(x), f(x) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) f(x) dx = f(0)$$

olduğu için

$$\langle \delta'(x), f(x) \rangle = - \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) f'(x) dx = -f'(0)$$

olur. Buradan hareket ederek

$$\langle \delta'(x - x_0), f(x) \rangle = - \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x - x_0) f'(x) dx = -f'(x_0)$$

olduğu da görülür. $x_0 = a$ ise elde edilen

$$\langle \delta'(x - a), f(x) \rangle = - \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x - a) f'(x) dx = -f'(a)$$

ifâdesinin (79) eşitliğini verdiği görülür.

Ayrıca n . mertebeden türevler için de

$$\langle \delta^{(n)}(x), f(x) \rangle = (-1)^{(n)} f^{(n)}(0)$$

$$\langle \delta^{(n)}(x - a), f(x) \rangle = (-1)^{(n)} f^{(n)}(a)$$

olduğu da gösterilebilir.

12) Sürekli ve ardışık olarak türetilen bir $\alpha(x)$ fonksiyonu ile $\delta(x)$ fonksiyonunun çarpımının türevini bulmak için

$$[\alpha(x)F(x)]' = \alpha' F + \alpha F'$$

türev kâidesinde F yerine $\delta(x)$ yazılırsa

$$[\alpha(x)\delta(x)]' = \alpha' \delta + \alpha \delta'$$

olur.

12) Sürekli ve ardışık olarak türetilen bir $\alpha(x)$ fonksiyonu ile $\delta'(x)$ fonksiyonunun türevinin çarpımını bulunuz.

Burada sağdaki soldan ikinci terimi, $\alpha \delta'$, ele alalım:

$$\alpha \delta' = [\alpha(x)\delta(x)]' - \alpha' \delta$$

Burada $\alpha(x)\delta(x)$ ifâdesi $\delta(x)$ fonksiyonunun ardışık olarak türetilen bir $\alpha(x)$ fonksiyonu ile çarpımını göstermektedir. Yâni,

$$\langle \alpha(x)\delta(x - x_0), f(x) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} [\alpha(x)\delta(x - x_0)] f(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x - x_0) [\alpha(x)f(x)] dx = \alpha(x_0) f(x_0)$$

olur. Burada

$$\langle \delta(x - x_0), f(x) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x - x_0) f(x) dx = f(x_0)$$

olduğundan

$$\alpha(x_0) f(x_0) = \alpha(x_0) \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x - x_0) f(x) dx = \alpha(x_0) \langle \delta(x - x_0), f(x) \rangle$$

ve buradan da

$$\langle \alpha(x)\delta(x-x_0), f(x) \rangle = \alpha(x_0) \langle \delta(x-x_0), f(x) \rangle$$

ya da

$$\alpha(x)\delta(x-x_0) = \alpha(x_0)\delta(x-x_0)$$

veyâ $x_0=0$ için

$$\alpha(x)\delta(x) = \alpha(0)\delta(x)$$

bulunur. $\alpha(x) = x$ alınırsa,

$$x\delta(x) = 0$$

elde edilir.

$$[\alpha(x)\delta(x)]' = \alpha'(x)\delta(x) + \alpha(x)\delta'(x) \rightarrow \alpha(x)\delta'(x) = [\alpha(x)\delta(x)]' - \alpha'(x)\delta(x)$$

$$\alpha(x)\delta(x) = \alpha(0)\delta(x)$$

$$\alpha'(x)\delta(x) = \alpha'(0)\delta(x)$$

$$\alpha(x)\delta'(x) = [\alpha(x)\delta(x)]' - \alpha'(x)\delta(x) = [\alpha(0)\delta(x)]' - \alpha'(0)\delta(x)$$

ya da

$$\alpha(x)\delta'(x) = [\alpha(0)\delta(x)]' - \alpha'(0)\delta(x) = \alpha(0)\delta'(x) - \alpha'(0)\delta(x)$$

veyâ

$$\alpha(x)\delta'(x) = \alpha(0)\delta'(x) - \alpha'(0)\delta(x)$$

elde edilir.

13) Sürekli ve ardışık olarak türetilen bir $\alpha(x)$ fonksiyonu ile $\delta'(x)$ fonksiyonunun türevinin carpımını bulunuz.

14) $x\delta'(x) = -\delta(x)$ olduğunu göstermek için $\alpha(x)\delta'(x) = \alpha(0)\delta'(x) - \alpha'(0)\delta(x)$ ifâdesinden faydalanılır:

$$\alpha(x)\delta'(x) = \alpha(0)\delta'(x) - \alpha'(0)\delta(x) \rightarrow x\delta'(x) = 0\delta'(x) - 1\delta(x) = -\delta(x)$$

olur.

15) Birim basamak fonksiyonunun türevinin $\delta(x)$ 'ya eşit olduğunu gösteriniz.

$$\langle u'(x), -f(x) \rangle = f(0)$$

$$\langle \delta(x), f(x) \rangle = f(0)$$

karşılaştırılırsa

$$u'(x) = \delta(x)$$

elde edilir. Buradan

$$u'(x-x_0) = \delta(x-x_0)$$

bulunabilir.

16) İmpuls fonksiyonunun türevi nasıldır?

$$\langle \delta'(x), f(x) \rangle = - \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) f'(x) dx = -f'(0)$$

Burada $\delta'(x) = \frac{d\delta(x)}{dx}$ ve $f'(0) = \left. \frac{df(x)}{dx} \right|_{x=0}$ olduğundan

$$\langle \delta'(x), f(x) \rangle = \langle \delta(x), f'(x) \rangle = -f'(0)$$

olur.

17 İmpuls fonksiyonunun bir çift fonksiyon olduğunu göstermek için önce, a bir sâbit olmak üzere,

$$\delta(ax) = \frac{1}{|a|} \delta(x)$$

eşitliğini bulalım. Bunun için $\langle \delta(ax), f(x) \rangle$ fonksiyonelinde $ax=v$ dönüşümünü yapalım. a 'nın hem pozitif ve hem de negatif olabileceği düşünülerek, $|a|dx=dv \rightarrow dx = \frac{dv}{|a|}$ olacağı açıktır. Buradan

$$\langle \delta(ax), f(x) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(ax) f(x) dx = \frac{1}{|a|} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(v) f\left(\frac{v}{a}\right) dv$$

elde edilir.

$$\langle \delta(x), f(x) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) f(x) dx = f(0)$$

olduğu dikkate alınarak

$$\langle \delta(ax), f(x) \rangle = \frac{1}{|a|} f\left(\frac{v}{a}\right) \Big|_{v=0} = \frac{1}{|a|} f(0)$$

bulunur. Ya da

$$\langle \delta(ax), f(x) \rangle = \frac{1}{|a|} f\left(\frac{v}{a}\right) \Big|_{v=0} = \frac{1}{|a|} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) f(x) dx$$

veyâ

$$\langle \delta(ax), f(x) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{|a|} \delta(x) f(x) dx = \left\langle \frac{1}{|a|} \delta(x), f(x) \right\rangle$$

ve buradan

$$\delta(ax) = \frac{1}{|a|} \delta(x)$$

elde edilir. $a=-1$ için

$$\delta(-x) = \delta(x)$$

olduğu görülür. Demek ki $\delta(x)$ fonksiyonu çift bir fonksiyondur.

1.11. GAUSS KÂNUNU VE DİVERJANS TEOREMİ

İçinde n tâne nokta şeklinde elektrik yükü bulunan kapalı bir yüzey üzerinden elektrik akısının entegrali, bu kapalı yüzey içinde bulunan net elektrik yüküne eşittir.

$$\varphi = \oiint_S d\phi = \oint_S d\phi = \sum_{i=1}^n Q_i = Q_{net}, \quad i = 1, 2, 3, \dots, \quad Q_{net} = \sum_{i=1}^n Q_i. \quad (82)$$

Eğer kapalı yüzey içindeki elektrik yük dağılımı sürekli ise, o zaman (82) formülü

$$\phi = \oiint_S d\phi = \iiint_V \rho dV = Q_{\text{net}}, \quad i = 1, 2, 3, \dots, \quad . \quad (83)$$

veyâ

$$\phi = \oiint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = \oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = \sum_{i=1}^n Q_i = Q_{\text{net}}, \quad i = 1, 2, 3, \dots, \quad Q_{\text{net}} = \sum_{i=1}^n Q_i. \quad (84)$$

ya da

$$\phi = \oiint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = \iiint_V \rho dV = Q_{\text{net}}, \quad i = 1, 2, 3, \dots, \quad (85)$$

olur. (84) ve (85)'e göre Gauss Kanunu şöyle de tanımlanabilir: Elektrik akı yoğunluğu vektörünün kapalı bir yüzey üzerinden integrali, bu kapalı yüzey içindeki net yükü verir. \mathbf{D} bir vektör olduğu için, (85), (44) formülünde \mathbf{A} vektörü yerine yazılırsa,

$$\lim_{\Delta V \rightarrow 0} \oiint_S \frac{\mathbf{A} \cdot d\mathbf{S}}{\Delta V} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \oiint_S \frac{\mathbf{D} \cdot d\mathbf{S}}{\Delta V} \quad (86)$$

olur. Veyâ

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \oiint_S \frac{\mathbf{D} \cdot d\mathbf{S}}{\Delta V} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{Q_{\text{net}}}{\Delta V} = \rho \quad (87)$$

ya da

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho \quad (88)$$

edilir ki buna *Maxwell Denklemi* denir. (87) ifâdesindeki yük yoğunluğu (85)'de yerine konursa

$$\phi = \oiint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = \iiint_V \nabla \cdot \mathbf{D} dV = Q_{\text{net}} \quad (89)$$

elde bulunur. Buna *Gauss'un Diverjans Teoremi* denir. Bunun anlamı şudur:

Elektrik akı yoğunluğu vektörünün bir kapalı S yüzeyi üzerinden (iki boyutlu) yüzey integrali, bu vektörün diverjansının bu kapalı yüzeyin meydana getirdiği hacim üzerinden (üç katlı) hacim integraline eşittir.

Sorular:

1) *Gauss Kânunu'ndan hareket ederek Q yükü olan bir maddî noktanın elektrik alan formülünü çıkarınız.*

2) ρ_i yük yoğunluğunu taşıyan sonsuz uzun dosdoğru bir hattan r kadar uzaklıklardaki noktalarda meydana gelen elektrik akı yoğunluğu ve elektrik alan şiddetlerinin ve vektörlerinin ifâdelerini bulunuz. Bu elektrik akısı ve elektrik alan şiddetlerinin geometrik yerleri ne olur?

3) Yarıçapı 3 m olan bir kürenin içinde elektrik akı yoğunluğu vektörü, yarıçap doğrultusunda yarıçapa bağlı olarak $\mathbf{D} = (25r^3/4)\mathbf{a}_r$ ve kürenin dışında $\mathbf{D} = (25/4r^2)\mathbf{a}_r$

ile değişmektedir. $0 < r < 3$ ve $r > 3$ bölgelerindeki elektrik yük yoğunluğunu yarıçapın bir fonksiyonu olarak bulunuz.

Cevaplar:

1) (70) formülü ile verilen

$$D = \frac{Q}{4\pi r^2}$$

elektrik akı yoğunluğu, sâbit Q yükü ve sâbit yarıçap için belli bir değerde olup sâbit olduğu için, (69)'da entegral dışına alınabilir:

$$\phi = Q = \oiint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = \iint_S D \mathbf{a}_r \cdot \mathbf{a}_r dS = \iint_S D dS = D \iint_S dS = DS$$

veyâ

$$D = \frac{Q}{S} = \epsilon E \rightarrow E = \frac{Q}{\epsilon S}$$

olur. Q yükünden r kadar uzaklıkta bulunan bir noktadan geçen kürenin yüzey alanı $S = 4\pi r^2$ olduğu için, Q yükü olan bir maddî noktanın elektrik alan şiddetinin ifâdesi,

$$E = \frac{Q}{\epsilon S} = \frac{Q}{4\pi \epsilon r^2}$$

olarak elde edilir. Elektrik alan vektörünün doğrultusu, yarıçap doğrultusundadır. Bu doğrultudaki birim vektör \mathbf{a}_r olarak alınır, elektrik alan vektörünün ifâdesi,

$$\mathbf{E} = \frac{Q}{4\pi \epsilon r^2} \mathbf{a}_r$$

olarak bulunur.

2) ρ_ℓ yük yoğunluğunu taşıyan sonsuz uzun dosdoğru bir hattın üzerinde L uzunluğunu alalım.

Yükü Q olan L uzunluğundaki, S yüzeyindeki ya da V hacmindeki bir cismin yük yoğunlukları sırasıyla ρ_ℓ (C/m), ρ_s (C/m²) ya da ρ (C/m³) ile verilir.

Bu L uzunluğu, r yarıçaplı noktalarla birlikte ele alınan hat eksenli bir silindir tanımlar. Bu silindirin alt ve üst yüzeleriyle birlikte yan yüzü kapalı bir S yüzeyi meydana getirir. Yâni, $\mathbf{S} = \mathbf{S}_{alt} + \mathbf{S}_{üst} + \mathbf{S}_{yan}$ olur. Alt ve üst yüzeylerin birim normal vektörleri, \mathbf{a}_ℓ , eksen doğrultusunda ve birbirlerine ters yöndedirler: $\mathbf{S}_{alt} = S \mathbf{a}_\ell$ ve $\mathbf{S}_{üst} = -S \mathbf{a}_\ell$ olup $\mathbf{S}_{alt} + \mathbf{S}_{üst} = 0$ olur. Dolayısıyla, $\mathbf{S} = \mathbf{S}_{yan}$ olacak şekilde, kapalı S yüzeyi sâdece yan yüzeye indirgenir. Yan yüzeyin birim normal vektörü, \mathbf{a}_r , silindirin eksenini meydana getiren uzun dosdoğru hatta dik olup dışa doğrudur: $\mathbf{S} = \mathbf{S}_{yan} = S \mathbf{a}_r$. Bu silindirin içinde kalan L boyundaki hat parçasında bulunan elektrik yükünün $Q = L \rho_\ell$ olacağı açıktır. Bu yüke Gauss Kanunu uygulanırsa, elektrik akısı için,

$$Q=L\rho_\ell = \oiint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = \mathbf{D} \cdot \oiint_S d\mathbf{S} = \mathbf{D} \cdot \mathbf{S} = D\mathbf{a}_r \cdot \mathbf{a}_r S = DS$$

ve buradan bulunan

$$Q=L\rho_\ell = DS$$

ifâdesinden hareket ederek $D = \frac{L\rho_\ell}{S}$ elde edilir. Burada $S=2\pi rL$ olduğu için yerine konursa, elektrik akı yoğunluğunun şiddeti,

$$D = \frac{L\rho_\ell}{S} = \frac{\rho_\ell}{2\pi r}$$

olarak bulunur. Bu büyüklüğün vektör ifâdesi, silindirin yarıçap doğrultusunda olduğundan,

$$\mathbf{D} = \frac{L\rho_\ell}{S} = \frac{\rho_\ell}{2\pi r} \mathbf{a}_r$$

olarak elde edilir. Bu son iki ifâdeden elektrik alanına âit elektrik alanı şiddeti ve vektörü, sırasıyla

$$E = \frac{L\rho_\ell}{S\varepsilon} = \frac{\rho_\ell}{2\pi\varepsilon r}$$

$$\mathbf{E} = \frac{L\rho_\ell}{S\varepsilon} = \frac{\rho_\ell}{2\pi\varepsilon r} \mathbf{a}_r$$

olur. Gerek elektrik akısının ve gerekse elektrik alanının şiddeti sâbit yük yoğunluğu ve eksenden sâbit uzaklıklar için sâbit değerler verirler. Gerek elektrik akı yoğunluğu ve gerekse elektrik alanına âit bu sâbit değerlerin her birinin geometrik yerleri birer silindirin yan yüzeylerini tanımlarlar.

3) Elektrik akı yoğunluğu vektörü, birinci bölümdeki (48) formülünde yerine konursa,

$$\nabla \cdot \mathbf{D}(r, \theta, \phi) = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 D_r) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (D_\theta \sin \theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial D_\phi}{\partial \phi}$$

bulunur. Bu (88)'e taşınırsa,

$$\rho = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 D_r) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (D_\theta \sin \theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial D_\phi}{\partial \phi}$$

yük yoğunluğunun küresel koordinatlardaki yarıçapa bağlı olan ifâdesi elde edilir. $0 < r < 3$ bölgesindeki elektrik akı yoğunluğu vektörü $\mathbf{D} = (25r^3/4)\mathbf{a}_r$ olarak verildiğine göre, bu uygulamada $0 < r < 3$ bölgesinde $D_r = 25r^3/4D_r$, $D_\theta = 0$ ve $D_\phi = 0$ 'dır. Bu bileşenler yük yoğunluğunun genel ifâdesinde kullanılırsa,

$$\rho = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 D_r) = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 25r^3/4) = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 25r^3/4) = 31.25r^2 \text{ C/m}^2,$$

r)3 bölgesindeki elektrik akı yoğunluğu vektörü $\mathbf{D} = (25/4r^2) \mathbf{a}_r$ olduğuna göre , $D_r = 25/4r^2$ olur ki buradan

$$\rho = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 D_r) = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 25/4r^2) = \frac{\partial}{\partial r} (25/4) = 0$$

elde edilir.

Sorular:

1) Potansiyel fonksiyonu $\phi = 5x + 8y$ V olarak verildiğine göre elektrik alan vektörünü bulunuz.

2) Kenar uzunlukları 4 m olan bir küpün kapalı yüzeyi ve hacmi için $D = 10x^5/7 \mathbf{a}_x$ elektrik akı yoğunluğu vektörüne âit diverjans teoremini gerçekleyiniz.

Cevaplar:

1) Potansiyel fonksiyonu verilince elektrik alan vektörü

$$\mathbf{E} = -\nabla \phi$$

ile hesaplanır:

$$\mathbf{E} = -\nabla \phi = -\nabla(5x + 8y) = -(5\mathbf{a}_x + 8\mathbf{a}_y) \text{ V/m}$$

2) Dik koordinat sisteminin başlangıç noktası, şekilde görüldüğü gibi, küpün merkezinde seçilebilir.

$$\phi = \oiint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = \iiint_V \rho dV = \iiint_V \nabla \cdot \mathbf{D} dV = Q_{net}, \quad i = 1, 2, 3, \dots,$$

Diverjans teoreminin sol tarafını ele alalım. Buna göre x eksenine doğrultusundaki yüzeyler üzerinde $x=2$ m ve $x=-2$ m için

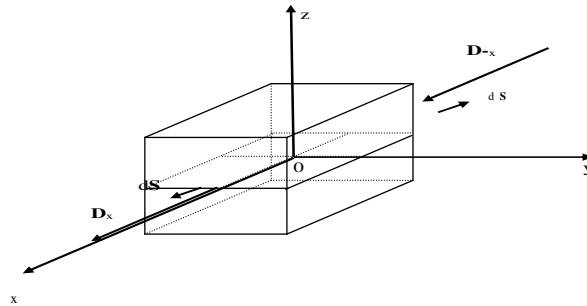
$$\phi = \oiint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = \int_{-2}^2 \int_{-2}^2 \frac{10(2)^5}{7} \mathbf{a}_x dydz \cdot \mathbf{a}_x + \int_{-2}^2 \int_{-2}^2 \frac{10(-2)^5}{7} \mathbf{a}_x dydz \cdot (-\mathbf{a}_x)$$

$$= 731.4285714 + 731.4285714 = 1462.857143 \text{ C}$$

olur. Burada \mathbf{a}_{-x} , -x yönündeki normal birim vektördür. Elektrik akı yoğunluğu vektörünün y ve z bileşenleri sıfır olduğu için, küpün bu yüzlerine ilişkin entegraller ortadan kalkar. Dolayısıyla, kapalı çevrimin sadece küpün x doğrultusundaki yüzeylere indirgendiğine dikkat ediniz.

Teoremin ikinci tarafına gelince:

$$\begin{aligned} \phi &= \iiint_V \rho dV = \iiint_V \nabla \cdot \mathbf{D} dV = \int_{z=-2}^2 \int_{y=-2}^2 \int_{x=-2}^2 \nabla \cdot (10x^5/7 \mathbf{a}_x) dV = \frac{50}{7} \int_{z=-2}^2 \int_{y=-2}^2 \int_{x=-2}^2 x^4 dx dy dz \\ &= \frac{50}{7} \int_{z=-2}^2 \int_{y=-2}^2 \left. \frac{x^5}{5} \right|_{-2}^2 dy dz = \frac{50}{7} (16) \left(\frac{64}{5} \right) = 1462.857143 \text{ C} \end{aligned}$$



BÖLÜM II STATİK ENERJİ

*Âdi insanlar, önemli adamların hatâ ve kusurlarından büyük zevk duyarlar.
Schopenhaver*

Kâfi derecede sevilmiyorsak, bunun sebebini kâfi derecede sevecek kudretimizin olmamasında aramalıyız.

2.1. NOKTA ŞEKLİNDEKİ ELEKTRİK YÜKLERİ VE İŞ

Elektron gibi, nokta şeklinde sabit q yüklü bir elektrik yükü, \mathbf{E} ile verilen bir elektrik alanı içinde bir \mathbf{F} kuvvetine mâruz kalarak bir hareket kazanır. Elektrik yüklü parçacığı sürükleyerek bu parçacığa bir iş yaptırır kuvvet

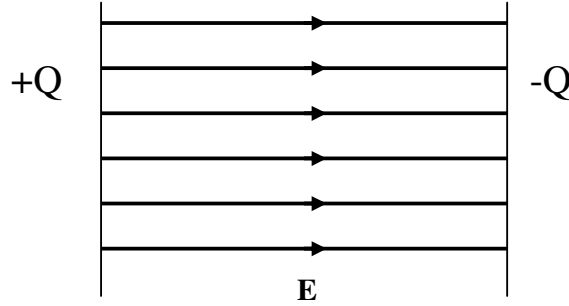
$$\mathbf{F}(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = Q(\mathbf{r}')\mathbf{E}(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \quad (1)$$

veya kısaca

$$\mathbf{F} = QE \quad (2)$$

ile bellidir.

Elektrik alanı, Şekil 1'de görüldüğü gibi, (+Q) ve (-Q) elektrik yükleri ile yüklenmiş kondansatör levhaları arasında meydana getirilebilir. Bu alan, uç etkileri ihmal edilirse, bir düzgün alandır. Elektrik alan vektörleri birbirine paralel olan alana düzgün alan denir. Alanın yönü pozitif yükten negatife yüke doğrudur. Her elektrik alanının yaptığı gibi, bu elektrik alanı da, elektron gibi, elektrik yüklü parçacıklara bir kuvvet uygulayarak onlara birer hareket kazandırır.



Şekil 1 (+Q) ve (-Q) elektrik yükleri ile yüklenmiş kondansatör levhaları arasında meydana gelen elektrik alanı

Formülde görüldüğü gibi, düzgün bir elektrik alanı tarafından elektrik yüklü parçacıklara uygulanan kuvvet, elektrik yükü ile doğru orantılıdır. Elektrik yükü pozitif ise, meydana gelen kuvvet elektrik alanı yönünde, elektrik yükü negatif ise, elektrik alanının ters yönündedir.

Bir kuvvet bir cisme bir hareket kazandırıyorsa, bilindiği gibi, bu kuvvet bu cisim üzerine bir iş yapar. Dolayısıyla, burada kuvveti meydana getiren elektrik alanı olduğuna

göre, Q yükü üzerine işi yapacak olan elektrik kuvveti olur. Yüklü cisimler üzerine iş yapan böyle alanların meydana getirdiği kuvvete *Alan Kuvveti* denir.

Şekildeki elektrik alanı tarafından meydana getirilen alan kuvveti, Q yüküne $\mathbf{d}\ell$ kadar bir hareket kazandırır ise yapılan işin

$$dW = \mathbf{F} \cdot \mathbf{d}\ell = QE \cdot \mathbf{d}\ell \quad (3)$$

olacağı açıktır. Bu, alan kuvveti tarafından yapılan bir iş olur. MKSA birim sisteminde $[\mathbf{d}\ell] = [d\ell] = m$, $[Q] = C$, $[E] = [E] = V/m$ veya $[F] = [F] = N$ olarak alınır ise $[dW] = J$ olarak elde edilir.

Sorular:

1. Dik kartezyen, silindirik ve küresel koordinat sistemlerinde diferansiyel uzunluk eleman formüllerini yazınız.

Cevaplar:

1. Dik kartezyen, silindirik ve küresel koordinat sistemlerinde diferansiyel uzunluk eleman formülleri, sırasıyla, aşağıdadır:

$$\begin{aligned} \mathbf{d}\ell &= dx\mathbf{a}_x + dy\mathbf{a}_y + dz\mathbf{a}_z, & d\ell &= \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}, \text{ (Dik kartezyen)} \\ \mathbf{d}\ell &= dr\mathbf{a}_r + r d\phi\mathbf{a}_\phi + dz\mathbf{a}_z, & d\ell &= \sqrt{dr^2 + r^2 d\phi^2 + dz^2}, \text{ (Silindirik)} \\ \mathbf{d}\ell &= dr\mathbf{a}_r + r d\theta\mathbf{a}_\theta + r \sin\theta d\phi\mathbf{a}_\phi, & d\ell &= \sqrt{dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2\theta d\phi^2}, \text{ (Küresel)} \end{aligned}$$

ile verildiği bilinmektedir.

Böylece elektrik alanı tarafından meydana getirilen alan kuvveti, Q yüküne $\mathbf{d}\ell$ kadar bir hareket kazandırır ise yapılan iş,

$$W = \int \mathbf{F} \cdot \mathbf{d}\ell \quad (4)$$

olur. Kondansatörün levhaları arasındaki düzgün elektrik alanında, alan kuvveti tarafından harekete getirilen elektrik yüklü bir taneciğin hareketini durdurmak için bu taneciğe (2)'de verilen kuvvete eşit ve ters yönde bir kuvvetin uygulanması gerekeceği açıktır. Yâni, hâreket hâlindeki yüke

$$\mathbf{F}_t = -QE \quad (5)$$

kuvveti uygulanır ise, o zaman bu tâneçiğe uygulanan bileşke kuvvet sıfır olur. Taneciğin hareketini durduran ve dışarıdan uygulanan bu kuvvete *Dış Alan Kuvveti* (Dış Kuvvet) denir. Bu kuvvet de tâneçiğin hareketini durdurmak için bir iş yapmak zorundadır. Bunun yaptığı iş ise, dış alan kuvvetinin yaptığı iş adı verilir. Bu işin

$$dW_t = \mathbf{F}_t \cdot \mathbf{d}\ell = -QE \cdot \mathbf{d}\ell \quad (6)$$

veyâ

$$W_t = \int \mathbf{F}_t \cdot \mathbf{d}\ell = - \int \mathbf{F} \cdot \mathbf{d}\ell \quad (7)$$

olacağı açıktır.

*Bir insanın akıllı olmasına bir şey dediğimiz yok...
Yeter ki, aklını başkalarına kabul ettirmeye çalışmasın!..*

Eflâton

2.2. ELEKTRİK GERİLİMİ

Bir alan kuvveti, bir tâneciği bir statik elektrik alanı içindeki bir A noktasından bir B noktasına ℓ kadar bir mesâfe içinde taşıyarak bir iş yapar. Alan kuvvetinin yaptığı bu iş sonunda elektrik yüklü tânecik B noktasına gelir. Bu yükü tekrar B noktasından A noktasına getirmek için parçacığa bir dış alan kuvvetinin uygulanması yeterli olur. ℓ kadar olan bir mesâfe boyunca elektrik alan kuvveti tarafından Q yükü üzerine yapılan iş ifâdesinden hareket ederek birim elektrik yükü üzerine yapılan işin bulunması mümkündür. (3)'den

$$dV = dW/Q = \mathbf{E} \cdot \mathbf{d} \ell \quad (8)$$

elde edilir ki buradan

$$V_{AB} = \int_0^{\ell} \mathbf{E} \cdot \mathbf{d} \ell \quad (9)$$

bulunur. Bu iş, birim elektrik yüklü tâneciği A noktasından bir B noktasına ℓ kadar taşımak için, alan tarafından yapılan iştir. Birim yük başına dış alan kuvvetinin yaptığı iş ise,

$$V_{BA} = \int_0^{\ell} \frac{\mathbf{F}_t}{Q} \cdot \mathbf{d} \ell = - \int_0^{\ell} \mathbf{E} \cdot \mathbf{d} \ell = -V_{AB} \quad (10)$$

bulunur. (9) ifâdesi, birim yük başına statik alanının yaptığı işi, (10) ifâdesi ise, dış elektrik alanının yaptığı işi göstermektedir. Birim yük başına yapılan iş gerilim olarak bilinir. Meselâ, (9) ifâdesi, A ve B noktaları arasındaki potansiyel farkını gösterir. Bu bir gerilimdir¹.

Ev Ödevi:

- 1) Düzgün elektrik alanı nedir?
- 1) Uç etkisi nedir?
- 2) Statik elektrik alanın koruyuculuğu nedir?
- 3) (7)'yi kullanarak nokta şeklindeki bir q yükünün uzayın herhangi iki A ve B noktaları arasındaki gerilim ifâdesini bulunuz.
- 4) Mutlak potansiyel nedir?

Statik elektrik alanında (9) ve (10)'dan görüldüğü gibi, elektrik alanı tarafından yapılan iş ile dış elektrik alanı tarafından yapılan işin büyüklükçe eşit olduğu görülmektedir. Dolayısıyla, iş hesabında bu formüllerden bir tânesi kullanılabilir. Bunlardan (5) kullanılırsa,

$$W_t = - \int_0^{\ell} \mathbf{F} \cdot \mathbf{d} \ell \quad (11)$$

elde edilir ki, bu durum da aşağıdaki tanım esas alınır. (5) formülüne göre:

¹ Edminister, J.A., Electromagnetics, Schaum's Outline Series in Engineering, McGraw-Hill Book Company, 1979.

Yapılan iş pozitif ise, işin dış elektrik alan kuvveti tarafından yapıldığı; yapılan iş negatif ise, işin elektrik alanı kuvveti tarafından yapıldığı söylenir.

Sorular:

1) 8 C'luk bir elektrik yükü, dik kartezyen koordinat sisteminde, $\mathbf{E}=4x\mathbf{a}_x-4y\mathbf{a}_y$ V/m elektrik alanı içinde A(3,0,0) noktasından B(0,4,0) noktasına götürülmektedir.

a) Yapılan işi hesaplayınız.

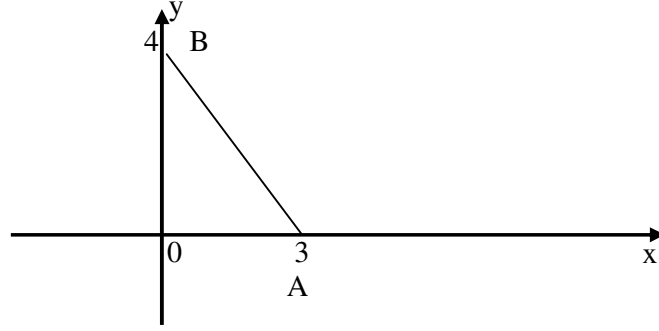
b) Bu işi hangi alan yapmıştır?

2) İç yarıçapı 4 cm ve dış yarıçapı 10 cm olan bir koaksiyal kabloda iki silindir arasındaki elektrik alanı $(100/r)\mathbf{a}_r$ olarak verildiğine göre, bu iki silindir arasındaki gerilimi hesaplayınız.

Cevaplar:

1a) $\mathbf{r}=x\mathbf{a}_x+y\mathbf{a}_y$ olup $d\mathbf{r}=dx\mathbf{a}_x+dy\mathbf{a}_y$

$$dW=-Q\mathbf{E}\cdot d\mathbf{r}=-8(4x\mathbf{a}_x-4y\mathbf{a}_y)\cdot(dx\mathbf{a}_x+dy\mathbf{a}_y)=-8(4xdx-4ydy)=-32(xdx-ydy)$$



İki noktadan geçen bir doğru

$$\frac{y - y_1}{y_1 - y_2} = \frac{x - x_1}{x_1 - x_2}$$

veyâ

$$\frac{y - 4}{4 - 0} = \frac{x - 0}{0 - 3}$$

ya da

$$y = 4 - 4x/3, \quad dy = -4dx/3$$

ve

$$\begin{aligned} dW &= -32 \left[xdx + \left(4 - \frac{4}{3}x\right) \left(\frac{4}{3}dx\right) \right] = -32 \left(xdx + \frac{16}{3}dx - \frac{16}{9}xdx \right) \\ &= -32 \left(xdx + \frac{16}{3}dx - \frac{16}{9}xdx \right) = -32 \left[xdx \left(1 - \frac{16}{9}\right) + \frac{16}{3}dx \right] = -32 \left(-\frac{7}{9}xdx + \frac{16}{3}dx \right) \\ dW &= -32 \left(-\frac{7}{9}xdx + \frac{16}{3}dx \right) \end{aligned}$$

veyâ

$$W = -32 \int_3^0 \left(-\frac{7}{9}xdx + \frac{16}{3} \right) dx = 400J$$

olur.

- 1b) İş dış alan kuvveti tarafından yapılmıştır.
2)

$$V_{AB} = -\int_0^{\ell} \mathbf{E} \cdot d\ell$$

$$d\ell = dr_{\mathbf{r}}$$

$$V_{AB} = -\int_{r_1}^{r_2} \mathbf{E} \cdot dr_{\mathbf{r}} = V_{AB} = -\int_{r_1}^{r_2} \frac{100}{r} dr$$

$$r_2 = 10 \times 10^{-2}$$

$$r_1 = 4 \times 10^{-2}$$

$$= -100 \int_{r_1}^{r_2} \frac{1}{r} dr = -100 \ln r \Big|_{r_1}^{r_2} = -100 (\ln 10 \times 10^{-2} - \ln 4 \times 10^{-2}) = -100 \ln 2.5$$

$$= -91.63 \text{ V}$$

Ev Ödevi:

- 1) Yukarıdaki probleme âit $dW = -8(4xdx - 4ydy) = -32(xdx - ydy)$ ifâdesindeki işi y değişkenine göre hesaplayınız.
- 2) V_{AB} gerilimini bulunuz.
- 3) Yükün hipotenüs üzerinden götürüldüğünü düşünerek yapılan işi hesaplayınız.

"Dokuzuncu asırla 13. asır arasında dünyânın en geniş edebiyat dâirelerinden biri teşekkül etmiştir. Bir çok kültür mahsulleri, kıymetli keşifler, fikrî faaliyetlerin ne derece mükemmel olduğunu göstermektedir. Bu mükemmellik Hıristiyan Avrupa üzerinde de tesirini gösterdi. O kadar ki, bu Müslüman'ların her hususta bizim hocalarımız olduğu hakkındaki görüşe haklılık kazandırmış olabilir."

<http://www.ikrateam.de/avrupalilarin%20itiraflari.html>
Sedillot (1808-1875)*

2.3. STATİK ELEKTRİK ALANINDAKİ ENERJİ

Önce elektrik alanının sıfır olduğu bir G bölgesi ele alalım (Şekil 2). Birinci adımda sonsuzdaki bir Q_1 yükünü 1 noktasına getirelim. Bu durumda G bölgesinde elektrik alanı sıfır ($E=0$) olduğu için bu yük üzerine bir iş yapılmaz. Bunu $W_1=0$ ile gösterelim. G bölgesine getirilen 1 noktasındaki Q_1 yükü, 2 noktasında V_{21} potansiyelini ve E_{21} statik elektrik alanını; 3 noktasında ise, V_{31} potansiyelini ve E_{31} statik elektrik alanını meydana getirir.

İkinci adımda sonsuzdaki bir Q_2 yükünü 2 noktasına getirelim. Bu ikinci durumda G bölgesinde 2 noktasındaki E_{21} statik elektrik alanı Q_2 yükü üzerine bir iş yapar. Bu iş $W_2 = V_{21}Q_2$ 'dir. G bölgesine getirilen Q_2 yükü 1 noktasında V_{12} potansiyelini ve E_{12} statik elektrik alanını; 3 noktasında V_{32} potansiyelini ve E_{32} statik elektrik alanını meydana getirir.

* WEB sayfaları sık sık yenilendiği için, bu sayfalara zamanla ulaşım mümkün olmayabilir.

Üçüncü adımda sonsuzdaki bir Q_3 yükünü 3 noktasına getirelim. Bu durumda G bölgesinde 3 noktasındaki E_{31} ve E_{32} statik elektrik alanları Q_3 yükü üzerine bir iş yaparlar. Bu iş

$$W_3 = V_{31}Q_3 + V_{32}Q_3 \quad (12)$$

olur.

G bölgesindeki toplam iş şöyle özetleyebiliriz:

$$W = W_1 + W_2 + W_3 = 0 + (V_{21}Q_2) + (V_{31}Q_3 + V_{32}Q_3) \quad (13)$$

W işi, 3 tâne nokta şeklindeki statik yükünün G bölgesinde meydana getirdiği toplam enerjiyi verir.

Dördüncü adımda bu sefer yukarıdaki yüklerin bölgeye geliş sıralarını değiştirerek benzer işlemleri tekrar yapalım. O zaman toplam enerji

$$W = W_3 + W_2 + W_1 = 0 + (V_{23}Q_2) + (V_{13}Q_1 + V_{12}Q_1) \quad (14)$$

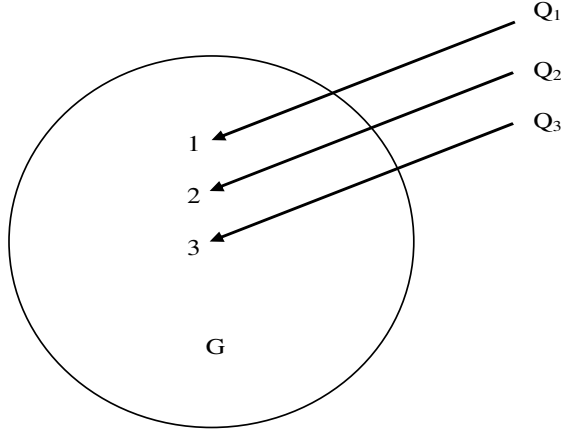
elde edilir. Bu son durumda elde edilen toplam enerji yine aynıdır. (13) ve (14) taraf tarafa toplanırsa,

$$2W = (V_{23}Q_2) + (V_{13}Q_1 + V_{12}Q_1) + (V_{21}Q_2) + (V_{31}Q_3 + V_{32}Q_3) \quad (15)$$

veyâ

$$2W = Q_1(V_{12} + V_{13}) + Q_2(V_{21} + V_{23}) + Q_3(V_{31} + V_{32}) \quad (16)$$

bulunur.



Şekil 2 Ele alınan G bölgesi

Burada $Q_1(V_{12} + V_{13})$ terimi, Q_2 ve Q_3 yüklerinin meydana getirdikleri elektrik alanlarının Q_1 elektrik yükü üzerine yaptıkları işi gösterir. Dolayısıyla, 2 ve 3 yüklerinin 1 noktasında meydana getirdikleri toplam potansiyel $V_1 = V_{12} + V_{13}$ olarak temsil edilebilir. Benzer şekilde $Q_2(V_{21} + V_{23})$ terimi de Q_1 ve Q_3 yüklerinin meydana getirdikleri elektrik alanlarının Q_2 elektrik yükü üzerine yaptıkları işi gösterir ve dolayısıyla 1 ve 3 yüklerinin 2 noktasında meydana getirdikleri toplam potansiyel $V_2 = V_{21} + V_{23}$ olarak gösterilebilir. Yine benzer düşünce tarzı kullanılarak $V_3 = V_{31} + V_{32}$ olur. Bu son ifade de 1 ve 2'deki yüklerin 3 noktasında meydana getirdikleri toplam potansiyeldir. Bu potansiyel tanımları, (16)'da yerine konursa, üç tâne nokta yük için toplam enerji

$$W=[Q_1(V_{12}+V_{13})+Q_2(V_{21}+V_{23})+Q_3(V_{31}+V_{32})]/2 \quad (17)$$

veyâ

$$W=(Q_1V_1+Q_2V_2+Q_3V_3)/2 \quad (18)$$

olarak elde edilir. Bu ifâde G bölgesindeki 3 tâne statik elektrik yüklü noktanın sâhip olduğu toplam enerji ifâdesidir. Buna bakarak G bölgesindeki n tâne yük için toplam statik enerji

$$W = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n Q_i V_i \quad (19)$$

olarak bulunur. (19) ifâdesi, G bölgesindeki n tâne statik elektrik yüklü noktanın sâhip olduğu toplam enerji ifâdesidir. Bu sonuç nokta şeklindeki yükler içindir.

Eğer, ele alınan bölgede yük yoğunluğu ρ olan sürekli bir yük dağılımı varsa, o zaman toplama işâreti entegral olur:

$$W = \frac{1}{2} \int_{\text{Hacim}} \rho V dV \quad (20)$$

Burada V ortamdaki potansiyel fonksiyonu temsil eder. Bu formülün değişik yazılış şekilleri vardır:

$$W = \frac{1}{2} \int_{\text{Hacim}} \mathbf{D} \cdot \mathbf{E} dV \quad (21)$$

veyâ

$$W = \frac{1}{2} \int_{\text{Hacim}} \epsilon E^2 dV \quad (22)$$

ya da

$$W = \frac{1}{2} \int_{\text{Hacim}} \epsilon E^2 dV = \frac{1}{2} \int_{\text{Hacim}} \frac{D^2}{\epsilon} dV \quad (23)$$

(20)-(23) ifâdeleri, elektrik alanında depo edilen aynı elektrik enerjisinin değişik biçimde elde ediliş şekilleridir².

Sorular:

- 1) (20) ifâdesinden hareket ederek (21)-(23) formüllerini çıkarınız.
- 2) Bir kondansatörün elektrik alanında depo edilen elektrik enerjisinin ifâdesini (22)'den faydalanarak elde ediniz.
- 3) Bir kenar uzunluğu 2 m olan bir karenin her bir köşesinde 4 C'luk yük bulunmaktadır. Sistemin toplam enerjisi ne olur?
- 4) Kenar uzunluğu 2 m olan bir karenin karşılıklı iki köşesinde 8 nC'luk yük bulunmaktadır. Sistemin toplam enerjisi ne olur?
- 5) Birbirine eşit iki yük sisteminin enerjisi -810 nJ olduğuna göre, d=0.2 m mesâfede bulunan bu yüklerin değerlerini bulunuz.

² Edminister, J.A., Electromagnetics, Schaum's Outline Series in Engineering, McGraw-Hill Book Company, 1979.

Cevaplar:

$$1) \quad W = \frac{1}{2} \int_{\text{Hacim}} \rho V dv = \frac{1}{2} \int_{\text{Küre hacmi}} \rho V dv = \frac{1}{2} \int_{\text{Küre hacmi}} \nabla \cdot (\mathbf{D}V) dv$$

ifâdesinde söz konusu dv diferansiyel hacim elemanıdır. Formülde, \mathbf{A} herhangi bir vektör ve V bir skaler potansiyel olmak üzere

$$\nabla \cdot (\mathbf{V}\mathbf{A}) = \mathbf{A} \cdot (\nabla V) + V(\nabla \cdot \mathbf{A})$$

açınımı kullanılırsa,

$$W = \frac{1}{2} \int_{\text{Küre hacmi}} (\nabla \cdot \mathbf{D})V dv = \frac{1}{2} \int_{\text{Küre hacmi}} \nabla \cdot (\mathbf{V}\mathbf{D}) dv - \frac{1}{2} \int_{\text{Küre hacmi}} (\mathbf{D} \cdot \nabla V) dv$$

elde edilir. Sağdaki ilk entegral, diverjans teoremine göre,

$$\frac{1}{2} \int_{\text{Küre hacmi}} \nabla \cdot (\mathbf{V}\mathbf{D}) dV = \frac{1}{2} \int_{\text{Küre yüzeyi}} \mathbf{V}\mathbf{D} \cdot d\mathbf{S}$$

şeklinde yüzey cinsinden yazılabilir.

Burada hacimle kuşatılmış olan \mathbf{D} ve V , sırasıyla herhangi bir nokta şeklindeki yüke âit elektrik akı yoğunluğu vektörü ve potansiyelidir. Dolayısıyla, entegralin altındaki elektrik akı yoğunluğu vektörü küre yüzeyi üzerinde $1/R^2$ ile, V potansiyeli $1/R$ ile ve küre yüzeyi R^2 orantılı olup sonuç olarak entegral altındaki terimin tamâmı $1/R$ ile orantılı olur. Bu sebepten,

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \int_{\text{Küre yüzeyi}} \mathbf{V}\mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} \approx \frac{1}{2} \int_{\text{Küre yüzeyi}} \frac{1}{R} = 0$$

sonucu elde edilir. O zaman

$$W = -\frac{1}{2} \int_{\text{Küre hacmi}} (\mathbf{D} \cdot \nabla V) dV$$

neticesine varılır. $\mathbf{E} = -\nabla V$ olduğu göz önüne alınır,

$$W = \frac{1}{2} \int_{\text{Küre hacmi}} (\mathbf{D} \cdot \mathbf{E}) dV$$

veyâ

$$W = \frac{1}{2} \int \epsilon E^2 dV = \frac{1}{2} \int \frac{D^2}{\epsilon} dV$$

bulunur.

2) Kondansatörün bir iletken levhasının yüzeyi A , levhaları arasındaki uzaklığı d ve levhalar arasındaki malzemenin dielektrik sâbiti ϵ olsun. Bu verilere göre kondansatörün kapasitesi $C = \epsilon S/d$ olur. Kondansatörün levhalarına bir V gerilim uygulandığı zaman elektrik alanında meydana gelen elektrik alan vektörü ve şiddeti sırasıyla, \mathbf{n} kondansatörün yüzey birim normal vektörü olmak üzere $\mathbf{E} = (V/d)\mathbf{a}_n$ ve $E = V/d$

olur. Kondansatöre uygulanan gerilim, levhalar arasındaki mesâfe ve dielektrik sâbiti, sâbit oldukları için, görüldüğü gibi, elektrik alanı da sâbit olur. Sâbit olanlar entegral dışına alınabilir. Bu durumda entegral sâdece bir hacim hesabını göstermektedir. Bu yapılırsa, hacmin Ad olduğu görülür.

Buna göre kondansatörün elektrik alanında biriken enerji

$$W = \frac{1}{2} \int \epsilon E^2 dv = \frac{1}{2} \epsilon E^2 \int dv$$

formülünden hesaplanabilir. Yâni,

$$W = \frac{1}{2} \int \epsilon E^2 dv = \frac{1}{2} \epsilon E^2 Ad$$

veya

$$W = \frac{1}{2} \epsilon E^2 Ad = \frac{1}{2} \epsilon \left(\frac{V}{d} \right)^2 Ad = \frac{\epsilon AV^2}{2d} = \frac{1}{2} CV^2$$

olarak kondansatörün elektrik alanında biriken enerji ifâdesi, kondansatörün kapasite parametresi cinsinden bulunur.

3) Statik yüklerin meydana getirdiği toplam enerji, bu dört yük için,

$$2W = Q_1 V_1 + Q_2 V_2 + Q_3 V_3 + Q_4 V_4$$

ifâdesinden hesaplanır.

V_i , $i=1, 2, 3, 4$, potansiyeli, i bir değer aldığımda, (meselâ $i=1$ alındığında diğer üç tâne, Q_2 , Q_3 ve Q_4 yüklerinin 1 noktasında meydana getirdiği potansiyeli göstermesi gibi), diğer üç yükün i noktada meydana getirdiği potansiyeli gösterir.

Q_2 , Q_3 ve Q_4 yüklerinin, bu yüklere sırasıyla, r_{12} , r_{13} , r_{14} uzaklıklarında bulunan 1 noktasındaki V_1 potansiyelini bulmak için,

$$V_1 = \frac{Q_2}{4\pi\epsilon_0 r_{12}} + \frac{Q_3}{4\pi\epsilon_0 r_{13}} + \frac{Q_4}{4\pi\epsilon_0 r_{14}}$$

ifâdesi elde edilir. Benzer şekilde 2 noktasında Q_1 , Q_3 ve Q_4 yüklerinin meydana getirdiği potansiyeli bulmak için,

$$V_2 = \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0 r_{21}} + \frac{Q_3}{4\pi\epsilon_0 r_{23}} + \frac{Q_4}{4\pi\epsilon_0 r_{24}}$$

ve 3 noktasında Q_1 , Q_2 ve Q_4 yüklerinin meydana getirdiği potansiyeli bulmak için,

$$V_3 = \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0 r_{31}} + \frac{Q_2}{4\pi\epsilon_0 r_{32}} + \frac{Q_4}{4\pi\epsilon_0 r_{34}}$$

ve 4 noktasında Q_1 , Q_2 ve Q_3 yüklerinin meydana getirdiği potansiyeli bulmak için,

$$V_4 = \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0 r_{41}} + \frac{Q_2}{4\pi\epsilon_0 r_{42}} + \frac{Q_3}{4\pi\epsilon_0 r_{43}}$$

ifâdeleri elde edilir.

Verilen uygulamada yükler eşit olduğu için, $Q_1=Q_2=Q_3=Q_4=Q$,

$$V_1 = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r_{12}} \left[\frac{1}{1} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{1} \right] = \frac{4}{4\pi\epsilon_0 (10^{-9}/36\pi) \times 2} \left[\frac{1}{1} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{1} \right]$$

$$= 48.727 \times 10^9 \text{ V}$$

Yükler eşit olduğu için köşelerde meydana gelen gerilimler de eşit olacağından, $V=V_1=V_2=V_3=V_4$,

$$2W = Q_1 V_1 + Q_2 V_2 + Q_3 V_3 + Q_4 V_4 = 4QV$$

veyâ

$$W = 2QV = 2 \times 4 \times 48.727 \times 10^9 = 389.816 \times 10^9 \text{ J}$$

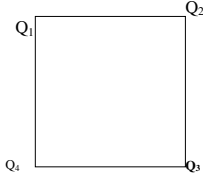
olur.

4) $V=V_1=V_3=V$ olduğu için , $2W=Q_1 V_1 + Q_3 V_3 = 2QV$ veyâ $W=Q_1 V_1 + Q_3 V_3 = QV$ olur. Diğer taraftan

$$V_1 = \frac{Q_3}{4\pi\epsilon_0 r_{13}} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r_{13}}$$

olacağından

$$W = \frac{Q_3 Q_1}{4\pi\epsilon_0 r_{13}} = \frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0 r_{13}} = \frac{(8 \times 10^{-9})^2}{4\pi\epsilon_0 (10^{-9}/36\pi)} \left[\frac{1}{2\sqrt{2}} \right] = 203.646 \times 10^{-9} \text{ J}$$



5)

$$2W_E = Q_1 V_1 + Q_2 V_2 = Q_1 \frac{Q_2}{4\pi\epsilon_0 d} + Q_2 \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0 d}$$

$$W_E = \frac{Q_1 Q_2}{4\pi\epsilon_0 d}, \quad Q_1 = Q_2 = Q$$

$$W_E = \frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0 d} \rightarrow Q = 2\sqrt{\pi\epsilon_0 d W_E} = 2\sqrt{\pi \times \frac{10^{-9}}{36\pi} \times 0.2 \times 810 \times 10^{-9}} = 4.2426 \times 10^{-9} \text{ C} = 4.2426 \text{ nC}$$

Zengin olmanın dört şartı vardır: Bilgi, dürüstlük, çalışmak ve sebât etmek!..

Nâci Kasım

"Roger Bacon ve gerekse adaşı deney metodunu Avrupa'ya sunma şerefini kazanmaya lâyık değildirler. Onlar İslâm ilim ve metodunu Avrupa'ya nakledici olmaktan öteye gidememişlerdir."

"Deney metodunu kimlerin icat ettiği konusunda münâkaşaya girişmek, Avrupa medeniyetinin kaynaklarını inkar etmekten başka bir şey değildir."

"İslâm Medeniyeti'nin modern dünyâya en büyük hediyesi ve yardımı ilimdir. Fakat Avrupa'yı yeniden hayâta kavuşturan şey sâdece ilim de değildi. İslâm Medeniyeti'nden gelen daha başka tesirler de Avrupa hayâtına ilk parlaklığı vermişti. Avrupa'nın ilerlemesinde İslâm Kültürü'nün kesinlikle tesirini göremeyeceğimiz bir basamak yoktur. Bu tesirin bütün açıklık, büyüklük ve devam eden gücüyle kendini gösterdiği, en büyük zaferlerin kazanılışına sebep olduğu alan, tabiat ilimleriyle ilim zihniyeti olmuştur."

<http://www.ikrateam.de/avrupalilarin%20itiraflari.html>

Brifoult

BÖLÜM III HAREKETLİ YÜKLERİN ALANI

Brakın adâlet yerini bulsun; isterse kıyâmet kopsun!..
William Watson

3.1.GİRİŞ

Bundan önceki bölümlerde statik (hareketsiz) yüklerin etkileri incelenmiştir. Bu bölümde ise, hareketli yüklerin etkileri ele alınacaktır.

Hareket eden yüklerin iki durumu olabilir. Birinci durumda yük hareket ederken yükün miktarı sâbit kalabilir. Bu tür yüklerin meydana getirdiği etkilere *Stasyoner Etkiler* ve meydana getirdiği alanlara *Stasyoner Alanlar* diyebiliriz. İkinci durumda ise, yük hareket ederken yük miktarı da zamanla değişebilir. Bu tür yüklere ise, *Değişken Yükler* ve meydana getirdiği alanlara *Değişken Alanlar* demek mümkündür. Her iki tip yükün ayrı ayrı etkileri vardır.

Hareketli yükün miktarı sâbit iken bir iletkenin bir noktasından birim zamanda geçen yük miktarına doğru akım denir, genel olarak I ile gösterilir. Hareketli yükün miktarı zamanla değişirken, bir iletkenin bir noktasındaki kesitinden birim zamanda geçen yük miktarına değişken elektrik akımı denir ve genellikle $i(t)$ ile gösterilir. *SI Sistemi* de denilen *MKSA Birim Sistemi*'nde iletkenin bir noktasından birim zamanda geçen akımın sâbit veya değişken olduğunu da biliyoruz, $I=Q/t$, $i(t)=dq(t)/dt$. Buna göre, $[Q]=1\text{ C}$, $[t]=1\text{ s}$ alınırsa, akım birimi 1 A (Amper) olur. Yâni, amperin boyutu $[I]=C/s$ 'dir. Yük miktarı zamana göre değişiyorsa, ilgili büyüklüklerin küçük harflerle gösterildiği unutulmamalıdır.

Birim yüzeyden geçen akıma akım yoğunluğu denir. Akım yoğunluğunun da stasyoner olabileceği ve bunun J ile gösterilebileceği ya da zamana göre değişken olabileceği ve bunun $j(t)$ ile gösterilebileceği, akım yoğunluğu biriminin ise A/m^2 boyutunda olabileceği açıktır. *Statik Elektrik Alanı*'ndaki *Ohm Kânunu*'nun *Elektromanyetik*'teki hassas ifâdesinin akım yoğunluğu cinsinden bulunabileceğini de hatırlatalım¹.

3.2. HAREKETLİLİK KATSAYISI, YÜK YOĞUNLUĞU VE İLETKENLİK

Boşlukta (vakumda) bir elektrik alanında yüklü bir tâneçiğe uygulanan elektrik kuvvetinin ($F=QE$ Coulomb Kuvveti'nin) tâneçigi bu ortam içinde v hızıyla hareket ettireceği açıktır. Eğer elektrik alanı sâbit (düzgün elektrik alanı) ve ortam homojen ise, v hızı elektrik alanının yönünde olan ve *Sürüklenme Hızı* adını alan ortalama bir hızdır.

Metallerdeki iletim, kristal yapıdaki atomların dış yörüngelerindeki elektronların hareketleri sonunda meydana gelir. Elektron-gaz teorisinin bir sonucu olarak bu elektronlar, likit veyâ gaz ortamlar içinde hareket eden yüklü tâneçiklerde olduğu gibi, çoğu kere ortalama bir sürüklenme hızına ulaşırlar. Söz konusu olan bu sürüklenme hızı, doğrudan doğruya elektrik alanıyla orantılıdır:

$$\mathbf{v} = \mu\mathbf{E}. \quad (1)$$

¹ Akhunlar, A., Elektromagnetik Alan Teorisi, Cilt I, II, İ.T:Ü. Elektrik Fakültesi, 1966.

Buradaki μ 'ye hareketlilik katsayısı denir, birimi m^2/Vs 'dir.

İletkenlerin her bir m^3 'ünde yaklaşık 10^{28} atom vardır. Elektrik alanının uygulanmasıyla iyi bir iletkende her bir atom başına bir veya 2 elektron serbest hâle gelir. Hareketlilik katsayısı, malzemenin kristal yapısı ve sıcaklıkla değişir. Katı cisimlerdeki tâncikler, meselâ elektronlar, sıcaklıkla artan bir titreşime sâhiptirler. Bu titreşim bu yüklü tânciklerin elektrik alanı içindeki hareketlerini güçleştirir. Bu yüzden yüksek sıcaklıklarda hareketlilik katsayısı küçülür. Dolayısıyla, daha yüksek bir sıcaklıkta, verilen bir elektrik alanı için, daha küçük bir sürüklenme hızı meydana gelir. Sürüklenme hızı sıcaklıkla azalan bu olay, her bir malzeme için bir direnç olarak kabul edilir. Yâni, sıcaklık yükseldikçe, genel olarak malzemenin direnci de artar. Bununla beraber, direnci sıcaklığın yükselmesiyle azalan malzemeler de vardır.

Malzemenin birim hacminde bulunan elektronların yükü, yük yoğunluğunu, ρ , meydana getirir:

$$\rho = nq \quad (2)$$

Burada q bir elektronun elektrik yükü ve n , birim hacimdeki elektron sayısıdır. Yük yoğunluğu, daha ziyâde elektronlara mahsus olmak üzere, $\rho = ne$ ile de gösterilir. Yük yoğunluğu, elektronların sürüklenme hızı ile çarpılırsa, akım yoğunluğu (J) ortaya çıkar:

$$J = \rho v = \mu \rho E = \mu ne E = \sigma E \quad (3)$$

olup burada elde edilen

$$\sigma = \mu ne = \mu \rho \quad (4)$$

büyüklüğüne **İletkenlik** denir. Devre Teorisi'nde (3) ifâdesine *Devre Teorisi'nin Ohm Kânunu* denir. ρ ve μ 'nün her biri negatif olduğu için, iletkenlik dâimâ pozitif olur. Dolayısıyla, taşıyıcı cinsine bakmadan, elektrik alanı ile akım yoğunluğunun aynı yönde olan birer vektör büyüklük olduklarını söyleyebiliriz. Ayrıca, pozitif yüklerin, elektrik alanı yönünde ve negatif yüklerin elektrik alanının ters yönünde hareket ettiklerinin kabul edildiğini de hatırlamak gerekir².

İletkenlerde yalnız elektronlara âit bir iletkenlik vardır. Yarıiletkenlerde, ayrıca, bir de pozitif birer elektrik yükü kabul edilen, deliklere âit iletkenlik de bulunur.

Sorular:

1) İletkenliği ve hareketlilik katsayısı, sırasıyla, $\sigma = 5.8 \times 10^7 S/m$, $\mu = 0.0032 m^2/Vs$ olan ve içinden 20 A akım akan 1524 cm uzunluğunda ve 0.102616 cm yarı çapında olan bir iletkende elektrik alan şiddetini, iletkende düşen gerilimi, iletkenin direncini ve sürüklenme hızını hesaplayınız.

2) Alüminyumun iletkenliği $\sigma = 3.82 \times 10^7 S/m$ ve hareketlilik katsayısı $\mu = 0.0014 m^2/Vs$ olduğuna göre, $v = 5.3 \times 10^{-4} m/s$ 'lik bir sürüklenme hızına karşı düşen akım yoğunluğu ve elektrik alan şiddetini bulunuz.

² Edminister, J.A., Electromagnetics, Schaum's Outline Series in Engineering, McGraw-Hill Book Company, 1979.

3) Kesiti dâire şeklinde ve çapı 3.0 mm olan bir bakır iletkenin taşıdığı akım 10 A olduğuna göre, her bir saniye başına iletkenin 10 cm uzunluğunu terkeden iletim elektronlarının yüzdesi nedir (Avogadro Sayısı $N=6.02 \times 10^{26}$ atom/kmol, Bakırın özgül ağırlığı 8.96 g/cm^3 , atom ağırlığı 63.54 kg/kmol)?

4) Özgül ağırlığı $2.7 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$ ve atom ağırlığı 26.98 kg/kmol olan aliminyumun birim hacimdeki iletim elektronlarının sayısını bulunuz. Bu iletkenin 1 cm^3 'deki bu iletim elektronları 2.0 s içinde iletkenin belli bir noktasından geçerse, ne kadar elektrik akımı oluşur (Atom başına bir serbest elektron olduğunu farz ediniz)?

5) Hareketlilik katsayısı $0.0046 \text{ m}^2/\text{Vs}$ ve iletkenliği 29.1 MS/m olan bir iletkendeki serbest elektron yoğunluğu nedir?

6) Bir atom sisteminde elektronun titreşimlerini karakterize eden ikinci dereceden differansiyel denklemi çıkarınız. Bu denklemin özel adı nedir?

7) Yarıçapı 5 mm olan bir iletkenin akan akımın yoğunluğu yarıçapa bağlı olarak $\mathbf{J}(r) = 12(1/r - 5 \times 10^4 e^{-6}) \mathbf{a}_z \text{ A/m}^2$ ile değiştiğine göre, iletkenin akımını bulunuz.

8) Direncin ifâdesini akım yoğunluğu cinsinden bulunuz.

9) Düzgün kesiti A, boyu ℓ olan bir iletken V gerilimi uygulanırsa Ohm Kânunu'nun ifâdesini çıkarınız.

Cevaplar:

1) İletkenin kesit alanı:

$$S = \pi r^2 = 3.14 \times (0.102616 \times 10^{-2})^2 = 3.306 \times 10^{-6} \text{ m}^2$$

Akım yoğunluğu:

$$J = \frac{I}{S} = \frac{20}{3.306 \times 10^{-6}} = 6.05 \times 10^6 \text{ A/m}^2$$

Elektrik alan şiddeti:

$$E = \frac{J}{\sigma} = \frac{6.05 \times 10^6}{5.8 \times 10^7} = 1.04 \times 10^{-1} \frac{\text{V}}{\text{m}}$$

İletkendeki gerilim düşümü:

$$U = El = 0.104 \times 1524 \times 10^{-2} = 1.585 \text{ V}$$

$$R = \frac{U}{I} = 1.585/20 = 0.07925 \Omega$$

Yük yoğunluğu:

$$\rho = \frac{\sigma}{\mu} = \frac{5.8 \times 10^7}{0.0032} = 1.81 \times 10^{10} \text{ C/m}^3$$

Sürüklenme hızı:

$$v = \frac{J}{\rho} = \frac{6.05 \times 10^6}{1.81 \times 10^{10}} = 3.34 \times 10^{-4} \text{ m/s}$$

$$2) \quad J = \rho V = (\sigma/\mu)V = \frac{\sigma}{\mu} V = \frac{3.82 \times 10^7}{0.0014} (5.3 \times 10^{-4}) = 1.45 \times 10^7 \text{ A/m}^2$$

$$E = \frac{J}{\sigma} = \frac{V}{\mu} = \frac{5.3 \times 10^{-4}}{0.0014} = 3.79 \times 10^{-1} \text{ V/m}$$

3) Her atom başına bir tâne iletim elektronunun olduğunu farzederek birim hacimdeki elektronların sayısını bulalım:

$$n = (6.02 \times 10^{26} \frac{\text{atom}}{\text{kmol}}) \left(\frac{1 \text{ kmol}}{63.54 \text{ kg}} \right) (8.96 \times 10^3 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}) \left(1 \frac{\text{elektron}}{\text{atom}} \right)$$

veyâ

$$n = 6.02 \times 10^{26} \times \frac{1}{63.54} \times 8.96 \times 10^3 = 8.49 \times 10^{28} \frac{\text{elektron}}{\text{m}^3}$$

İletkenin 10 cm uzunluğundaki elektron sayısı:

$$N = \pi \left(\frac{3 \times 10^{-3}}{2} \right)^2 (0.10) (8.49 \times 10^{28}) = 6.00 \times 10^{22} \text{ elektron}$$

10 A'lik akımdaki elektron sayısı:

$$\left(10 \frac{\text{C}}{\text{s}} \right) \left(\frac{1}{1.602 \times 10^{-19}} \frac{\text{elektron}}{\text{C}} \right) = 6.25 \times 10^{19} \text{ elektron/s}$$

Bu sonuç, iletkenin sâbit bir noktasından bu kadar hızda bir elektron geçişi olduğunu gösterir. O zaman bu geçen elektronların 10 cm uzunluğundaki iletkende bulunan toplam iletim elektronlarına oranı istenen cevâbı verir. Yâni 10 cm uzunluğundaki iletkeni sâniyede terkeden elektronların yüzdesi:

$$\text{Elektron Yüzdesi} = \frac{6.25 \times 10^{19}}{6.00 \times 10^{22}} (100) = \%0.104 \frac{1}{\text{s}}$$

$$4) \quad n = (6.02 \times 10^{26}) \times \left(\frac{1}{26.98} \right) \times (2.70 \times 10^3) = 6.02 \times 10^{28} \text{ elektron/m}^3$$

$$I = \frac{\Delta Q}{\Delta t} = \frac{(6.02 \times 10^{28} \text{ elektron/m}^3) (10^{-2} \text{ m})^3 (1.602 \times 10^{-19} \text{ C/elektron})}{2 \text{ s}}$$

$$= 4.82 \text{ kA}$$

5)

$$\rho = \sigma / \mu = \frac{29.1 \times 10^6}{0.0046} = 6.33 \times 10^9 \text{ C/m}^3, \quad n = \frac{6.33 \times 10^9}{1.602 \times 10^{-19}} = 3.951 \times 10^{28} \text{ elektron/m}^3$$

6) Basitlik için R yarıçaplı bir küre şeklinde düşünülen bir atomun merkezindeki pozitif yük, Z proton sayısı olmak üzere, Ze; **r**, elektronun, atomun merkezi ile çıkan küresel bir koordinat sistemindeki yer vektörü olsun. \mathbf{r} = r yarıçaplı küre içindeki yükler, **r** yer vektörü ile gösterilen bir elektron üzerine

$$\mathbf{F} = - \frac{e}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{4\pi}{3} |r^3| \rho \right] \frac{\mathbf{r}}{|r^3|}$$

kuvvetini uygular. Burada

$$\rho = \frac{Ze}{(4\pi/3)R^3}$$

yük yoğunluğu olup ifâdedeki yerine konursa, elektronun üzerine etkiyen kuvvet

$$\mathbf{F} = -\frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_o} \frac{\mathbf{r}}{R^3}$$

şeklinde elde edilir. Elektronun kütlesi m olduğuna göre, elektronun hareket denklemi,

$$\mathbf{F} + \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_o} \frac{\mathbf{r}}{R^3} = 0$$

veyâ

$$m \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} + \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_o} \mathbf{r} = 0$$

olarak bulunur. Burada

$$\omega_o^2 = \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_o m R^3}$$

kısaltması sonunda

$$\frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} + \omega_o^2 \mathbf{r} = 0$$

elde edilir. **Öz Frekansı** $f_o = \omega_o/2\pi$ olan bu son ifâdeye **Harmonik Osilatör Denklemi** denir³.

Burada, titreşim frekansı bilinirse, atomun R yarıçapı da hesaplanabilir:

$$R = \left[\frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_o m \omega_o^2} \right]^{1/3}$$

7)

$$\begin{aligned} I &= \int \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} = \iint_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S}_z = \iint_S \mathbf{J} a_z \cdot \mathbf{a}_z dS = \iint_S J dS = \int_{r=0}^{0.005} \int_{\phi=0}^{2\pi} \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} = \int_{r=0}^{0.005} \int_{\phi=0}^{2\pi} 12(1 - 5 \times 10^4 e^{-6r}) \mathbf{a}_z \cdot d\mathbf{S} a_z \\ &= \int_{r=0}^{0.005} \int_{\phi=0}^{2\pi} 12(1/r - 5 \times 10^4 e^{-6r}) r dr d\phi = 24\pi \left(\int_{r=0}^{0.005} (1/r - 5 \times 10^4 e^{-6r}) r dr \right) \\ &= 24\pi \left[r - 5 \times 10^4 \times 0.5 r^2 e^{-6r} \right]_{r=0}^{r=0.005} = 0.260292 \text{ A} \end{aligned}$$

8) Ohm Kânunu'na göre direnç $R = V/I$ olduğu için burada akım yerine $\mathbf{I} = \iint_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S}$,

gerilim yerine

³ Çağdaş Fiziğe Giriş Ders Kitabı; İTÜ Elek. Fak. Yay. ve İst. Üniv. Fen Fak. Yay. 198 sayfa, (3 baskı).

konabilir:

$$R = \frac{\int_0^{\ell} \mathbf{E} d\ell}{\iint_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S}}$$

9) Böyle bir durumda iletkenin içindeki bir noktada elektrik alanı $E=V/\ell$ olur. Bunun her iki tarafı iletkenlikle çarpılırsa, $E\sigma = \frac{\sigma V}{\ell} = J$ elde edilir. Bunun her iki tarafı

kesit alanı ile çarpılırsa, $I = AE\sigma = \frac{A\sigma V}{\ell} = AJ$

şeklinde akım bulunur. Buradan gerilim çekilirse, bulunan $V = \frac{I\ell}{A\sigma}$ ifâdesinde iletkenin

iletkenliği cinsinden $R = \frac{\ell}{A\sigma}$ konur. Böylece $V=RI$ elde edilir ki bu Ohm Kânunu'dur.

"Birâzcık bilim bizi Tanrı'dan uzaklaştırıyor. Fakat bilim bizi Tanrı'ya tekrar götürüyor."

"Çok bilmeyen bir kişi, bilimin dinin hakkından geldiği inancındadır. Ama çok bilen ve bilgili olanlar, bilgide attıkları her adımda dine daha da yaklaşmaktadırlar.

"Ben bu nedenle gelecekte araştırmaların dinin içini oymaktan ziyâde onu tasdik edeceğine inanıyorum. Artık duâ edilen kilise mekânında aranan gerçek ile laboratuvarında, mikroskop altında aranan gerçekler arasında bir savaş yok... Duâ mekânı ve laboratuvar giderek birbirine yaklaşıyor" (Jean Guittou'nun 'Tanrı ve Bilim' adlı kitabından).

Louis Pasteur

Ev Ödevi:

1) Hidrojen atomunda çekirdeği meydana getiren proton ile onun etrafında dolanan elektron arasında 0.5 Å'lük bir uzaklık bulunduğuna göre, bu iki tâneçik arasındaki elektrik çekim kuvvetini, gravitasyon (Yer çekimi) kuvvetini ve bu iki kuvvetin oranını araştırınız.

$$(C:0.92 \times 10^{-7} \text{ N}, 0.49 \times 10^{-49} \text{ N}, 1.9 \times 10^{39})$$

2) Yarıçapı 2 mm olan bir iletkenin akan akımın yoğunluğu yarıçapa bağlı olarak $\mathbf{J}(r) = 30(1 - e^{-1000r}) \mathbf{a}_z \text{ A/m}^2$ ile değiştiğine göre, iletkenin akımını bulunuz.

$$(C:0.266 \text{ mA})$$

Başkası yüzünden öfkelenmek, başkasının kabâhatinden dolayı kendimize cezâ vermek olur.

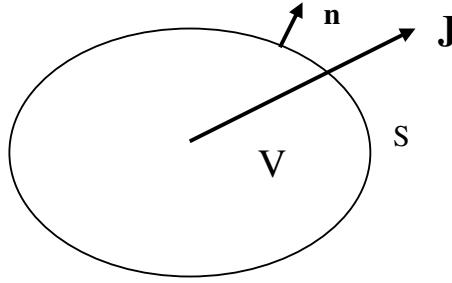
L. Bochme

3.3. SÜREKLİLİK DENKLEMİ

Şekil 1’de görüldüğü gibi, kapalı bir S yüzeyi üzerindeki noktalara âit akım yoğunluğu vektörü verilirse, kapalı S yüzeyinden dışarı çıkan toplam akım

$$I = \iint_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} \quad (5)$$

olur.



Şekil 1 V hacimli kapalı S yüzeyi

Burada akımın tanımını $I(t) = \frac{dQ(t)}{dt}$ kullanılırsa,

$$I(t) = \iint_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} = \frac{dQ(t)}{dt} \quad (6)$$

yazılabilir. Burada $Q(t)$, zamana bağlı elektrik yükünü göstermektedir. Bu ifâdeye göre, akım kapalı yüzeyden dışarı doğru aktığı için, kapalı yüzeyin meydana getirdiği hacim içindeki elektrik yüklerinin miktarında bir azalmanın meydana geleceği açıktır. Bu azalmayı göstermek üzere, denklemde (-) işareti kullanılır. O zaman (6) ifâdesi

$$I = \iint_S \mathbf{J}(t) \cdot d\mathbf{S} = -\frac{dQ(t)}{dt} \quad (7)$$

olur. Burada Q yükü, yük yoğunluğu cinsinden

$$Q = \int_V \rho dV \quad (8)$$

olarak bilindiğine göre, (7)’de yerine konarak bulunan

$$I = \iint_S \mathbf{J}(t) \cdot d\mathbf{S} = -\frac{\partial}{\partial t} \left(\int_V \rho(t) dV \right) \quad (9)$$

ifâdesinin her iki tarafı yüzey tarafından meydana getirilen V hamine bölünür ve sonra $V \rightarrow 0$ için limit alınır,

$$\lim_{V \rightarrow 0} \frac{\iint_S \mathbf{J}(t) \cdot d\mathbf{S}}{V} = -\frac{1}{V} \frac{\partial}{\partial t} \left(\int_V \rho(t) dV \right) \quad (9)$$

bulunur. İfâdenin sol tarafının akım yoğunluğu vektörünün diverjansını ve sağ tarafı ise yük yoğunluğunun kısmî türevini verir:

$$\nabla \cdot \mathbf{J}(t) = -\frac{\partial \rho(t)}{\partial t} \quad (10)$$

Bulunan bu son ifâdeye *Süreklilik Denklemi* denir. Görüldüğü gibi, ele alınan kapalı yüzeyden elektrik yükleri dışarı çıkarken, kapalı yüzeyin meydana getirdiği hacim içindeki elektrik yükleri zaman geçtikçe azalacağı için yüzey üzerindeki akım yoğunluğunun diverjansının da zamana bağlı olacağı açık olarak görülmektedir. Eğer, yüzeyden yük geçişi durursa, hâliyle, hacim içindeki yük değişimi de duracağı için, yük yoğunluğu sâbit kalır. O zaman

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = 0 \quad (11)$$

olur ki bu statik yüklere âit süreklilik denkleminin ifâdesini oluşturur. Böyle bir durumda ortamda ne kaynak ve ne de kuyu olacağı için yük akışı yok demektir. Bu, ortamda statik durumun oluştuğunu gösterir. Ayrıca, (11) formülü, Devreler Teorisi'nde *Kirchhoff Akımlar Kânunu*'nu da ifâde eder:

Bir kaç iletkenin birleştiği düğüm adı verilen bir jonksiyonda net akım sıfırdır.

3.4. RÖLAKSASYON ZAMANI

İletim işleminde iletken malzemenin valans elektronları, elektrik alanının uygulanmasıyla son yörüngelerinden koparak serbest hâle gelirler. Böylece, elektrik alanının etkisi ile statik durum ortadan kalkar, serbest olan elektronlar çoğalır, ortamda devamlı bir yük hareketi doğar. Böyle bir durumda bile iletkenin birim hacmindeki net yük yine sıfırdır. Çünkü, alan sıfır yapılırsa (ortadan kaldırılırsa), iletken yine dışarıya karşı nötr bir durum gösterir.

Statik durumun ortadan kalkmasıyla, yük hareketlerinin $t=0$ anında başladığını ve tam bu anda malzemedeki elektrik yük yoğunluğunun ρ_0 olduğunu farz edelim. Bu duruma *Sistemin Başlangıç Şartları* denir. $t>0$ hâlinde (zaman geçerken) yük hareketi, (10) ile verilen süreklilik denkleminde göre değişir ve (3) ile $\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho$ Maxwell denkleminin (10)'da kullanılmasıyla elde edilen

$$\frac{\partial \rho(t)}{\partial t} = -\frac{\rho \sigma}{\epsilon} \quad (12)$$

sâbit katsayılı diferansiyel denklemi tarafından tasvir edilir. Bu denklem, hem iletkenliği ve hem de yalıtkanlığı olan bir malzemede serbest elektronların dağılımını belirler. Denklem çözümlü,

$$\rho(t) = \rho_0 e^{-\frac{\sigma}{\epsilon} t} = \rho_0 e^{-\frac{t}{\tau}} \quad (13)$$

veyâ

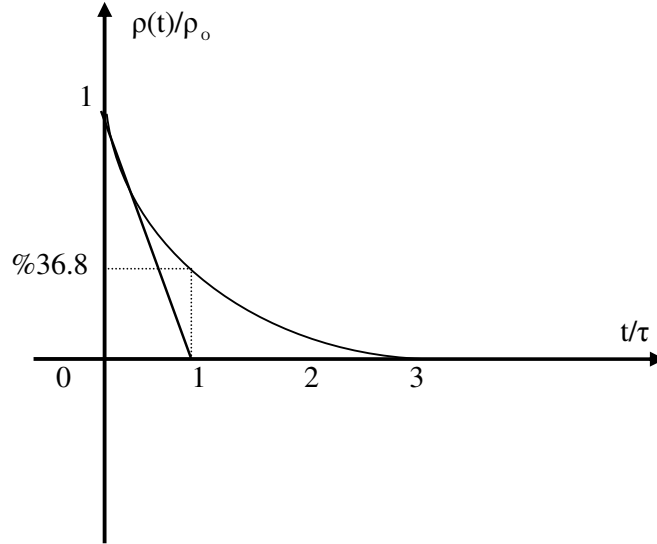
$$\frac{\rho(t)}{\rho_0} = e^{-\frac{\sigma}{\epsilon} t} = e^{-\frac{t}{\tau}} \quad (14)$$

şeklindedir. Bu son ifâde normalize edilmiş değişimi göstermektedir. Gerçekten, $t=0$ için denklem başlangıç şartını sağlamaktadır. Burada τ 'ya *Rölaksasyon Zamanı* (relaxation time) denir.

Yük hareketinin başlamasıyla yük dağılımını tasvir eden (12) diferansiyel denkleminin (13) ile verilen çözümü, görüldüğü gibi, zamana göre üstel olarak değişir (Şekil 1). Şekilde görüldüğü gibi normalize eğrinin zamana göre türevi alınır,

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\rho(t)}{\rho_0} \right) = -\frac{1}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau}}$$

olur ki bu, başlangıç noktasındaki teğetin zaman eksenini $t=\tau$ noktasında kestiğini gösterir.



Şekil 9 Yük yoğunluğunun üstel değişimi

Rölaksasyon zamanı, $\tau = \epsilon / \sigma$, elektrik malzemelerinin iletkenlikleri hakkında bir fikir edinmede kullanışlı bir yol olmuştur. $\tau = \epsilon / \sigma$ 'ya iletkenin zaman sâbiti de denir. Meselâ, bakırın iletkenliği hakkında bir fikir elde etmek için, bunun rölaksasyon zamanına bakmak yeterlidir. Bakırın iletkenliği $\sigma = 6.17 \times 10^7$ S/m olup $\epsilon = \epsilon_0 = 10^{-9} / 36\pi$ F/m alınır. O zaman $\tau = 1.44 \times 10^{-19}$ s elde edilir. Bunun anlamı şudur: $t=0$ anında yük hareketi başladıktan sonra, rölaksasyon zamanı kadar bir zamanın geçmesiyle, bakırın yük

yoğunluğu, %100'den %36.8 \cong %37'ye düşmektedir. Yâni, $\tau = 1.44 \times 10^{-19}$ s gibi çok küçük bir zamanda elektrik yük yoğunluğunun %63.2 \cong %63 zayıflaması, elektrik yükünün bakırın içindeki hızlı hareketinin bir ölçüsünü belirtmektedir. Bu örnek, bakırın iletkenliğinin ne derece iyi olduğu hakkında güzel bir fikir vermektedir.

(14)'den hareket ederek kararlı hâle geçişin zamana bağlı değişimi de elde edilebilir: Yâni,

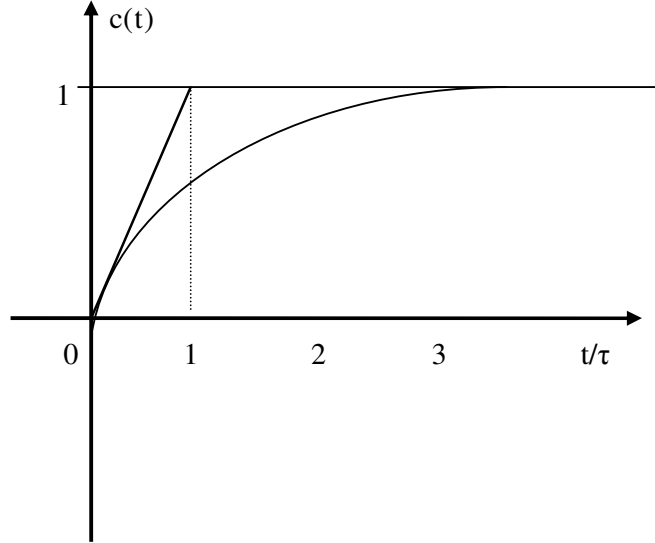
$$c(t) = 1 - \frac{\rho(t)}{\rho_0} = 1 - e^{-\frac{t}{\tau}} = 1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \quad (15)$$

elde edilir. Bunun zamana göre türevi alınırsa,

$$c'(t) = \frac{1}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau}}$$

olur ki bu, başlangıçtaki teğetin dâimî rejim asimtotunu $t = \tau$ zamanında kestiğini gösterir (Şekil 2).

Zaman sâbiti, adından da anlaşılacağı gibi, zaman boyutundadır, geçici rejimi tek başına karakterize eder.



Şekil 2 Kararlı hal durumu

$c(t)$ çıkışı için $t \rightarrow \infty$ için genel çözüm ortadan kalkmış, sistem kararlı duruma geçmiştir. Buna göre, zamanın çeşitli değerleri için çıkış aşağıdaki şekilde hesaplanabilir:

$$\begin{aligned} t = \tau \text{ için } c(t) &= \text{Genliğin (Dâimî rejim değeri) } \%63.2 \rho_0 \\ t = 2\tau \text{ için } c(t) &= \text{Genliğin (Dâimî rejim değeri) } \%86.5 \rho_0 \\ t = 3\tau \text{ için } c(t) &= \text{Genliğin (Dâimî rejim değeri) } \%95.0 \rho_0 \\ t = 4\tau \text{ için } c(t) &= \text{Dâimî rejim değeri } \%98.2 \rho_0 \end{aligned}$$

Pratikte, bütün düzenlerde, çalışma başlangıcından itibaren dört zaman sâbiti sonunda sistemin kararlı rejime geçtiği kabul edilir⁴.

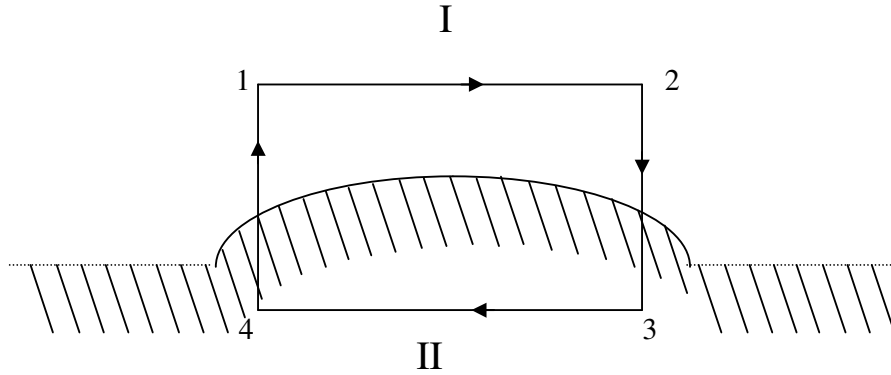
Ev Ödevi:

- 1) Geçici rejim nedir?
- 2) Kararlı hal nedir?
- 3) (12) denklemini sınır şartlarını kullanarak çözünüz.
- 4) Normalize denklem ne demektir?
- 5) Rölaksasyon zamanının zaman boyutunda olduğunu gösteriniz.

3.5. DİELEKTRİK-İLETKEN ARAYÜZEYİNDE ELEKTRİK ALANINA ÂİT SINIR ŞARTLARI

Bakır gibi iletkenlerle, boşluk, hava gibi yalıtkan veyâ meselâ, cam gibi dielektrik ortamların birbirlerine temas ettikleri ortak sınırlar veyâ yüzeyler vardır. Bu yüzeylere *Arayüzey* veyâ *Ortak Sınır Yüzeyleri* diyebiliriz. Büyüklüklerin, ortamın birinden diğer ortama geçerken, bu arayüzeylerdeki davranışlarının da bilinmesi gerekmektedir.

Şekil 3’de böyle bir arayüzey görülmektedir. Burada (II) numaralı taralı kısım, bir iletken ortamı; (I) numaralı kısım bir dielektrik (yalıtkan) ortamı temsil etmektedir. Şekilde görüldüğü gibi, her iki ortamın birer kısmını içine alan kapalı bir çevrim alınmıştır. Çevrimin kapalı olması asıl olduğundan, gelişigüzel bir kapalı çevrim yerine, ele alınacak sonuçların kolay izah edilebilmesi için, buradaki kapalı çevrimin, bir dikdörtgen şeklinde olması düşünülmüştür.



Şekil 3 İletken-dielektrik (yalıtkan) ortamın arayüzeyi (sınır yüzeyi)

İletkene verilen elektronlar iletken içinde ilerlerken, *Coulomb Kânunu*'na göre, birbirlerini itererek iletkenin en uç noktalarına kadar giderler. Sonunda statik kuvvet dengesi kurulunca, her bir elektronun hareket edeceği bir durum ortadan kalkar. Statik dengedeki elektronlar, iletkenin dış yüzeyini tercih ederek birbirlerine en uzak olma durumunu seçerler. İletkenin dış yüzeyinden başka hiçbir noktasının "*birbirlerine en uzak olma*" durumunu sağlayamayacağı açıktır. Elektronlar tarafından oluşturulan elektrik alanı

⁴ Temiz, M., Otomatik Kontrol, Mühendislik Fakültesi Matbaası, 1996, Denizli.

hareketsiz yüklerden meydana getirildiği için, bu bir statik elektrik alanıdır ve dolayısıyla, statik denge durumunda konservatiftir. Yani

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\boldsymbol{\ell} = 0 \quad (16)$$

denklemine göre, bu alanın kapalı bir çevrim için alınan integrali sıfır olur. Kapalı çevrimin her bir kenarı için elektrik alanının bir boyutlu integrali alınır, (16) ifadesi elde edilir:

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\boldsymbol{\ell} = \int_1^2 \mathbf{E} \cdot d\boldsymbol{\ell} + \int_2^3 \mathbf{E} \cdot d\boldsymbol{\ell} + \int_3^4 \mathbf{E} \cdot d\boldsymbol{\ell} + \int_4^1 \mathbf{E} \cdot d\boldsymbol{\ell} = 0 \quad (17)$$

Kapalı çevrim dikdörtgen şeklinde seçildiği için, burada her bir integral kolayca yapılabilir. Yapılırsa, bunlardan iki integral toplamı

$$\int_2^3 \mathbf{E} \cdot d\boldsymbol{\ell} + \int_4^1 \mathbf{E} \cdot d\boldsymbol{\ell} = 0 \quad (18)$$

olur. Çünkü, bu entegrallerin her biri eşit ve ters değerler verirler. Diğer taraftan, iletkenin içinde elektrik alanı sıfır, $\mathbf{E}=0$, olduğu için

$$\int_3^4 \mathbf{E} \cdot d\boldsymbol{\ell} = 0 \quad (19)$$

sonucu da geçerlidir. Geriye, dielektrik ortam içindeki integral kalır ki, bu da sıfırdır:

$$\int_1^2 \mathbf{E} \cdot d\boldsymbol{\ell} = 0 \quad (20)$$

Bu son integraldeki elektrik alan vektörü ile diferansiyel $d\boldsymbol{\ell}$ vektörünün skaler çarpımı, \mathbf{a}_t , iletkene teğet olan birim bir vektör olmak üzere, elektrik alanının iletkenin yüzeyine teğet olan $d\boldsymbol{\ell} = d\boldsymbol{\ell} \mathbf{a}_t$ vektörü üzerindeki izdüşümü veyâ elektrik alanın teğet bileşenini verir:

$$\int_1^2 \mathbf{E} \cdot d\boldsymbol{\ell} = \int_1^2 \mathbf{E} \cdot \mathbf{a}_t d\ell = \int_1^2 E_t d\ell = 0 \quad (21)$$

Bu integralin sıfır olması için, integral altındaki ifadenin sıfır olması gerekir, $E_t d\ell = 0$. Bu çarpımın sıfır olması için, $d\ell \neq 0$ olduğundan dolayı, $E_t = 0$ olması gerekir.

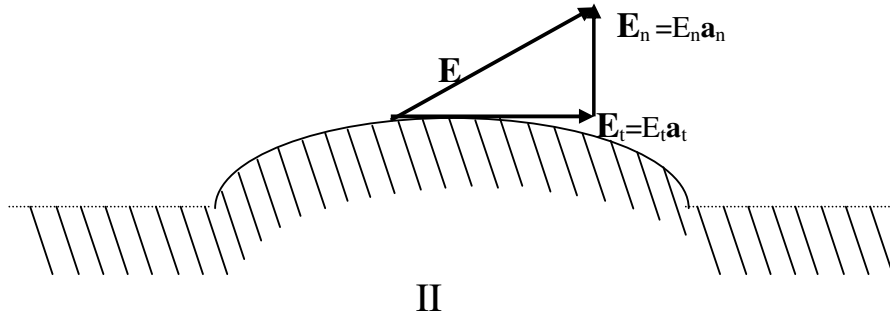
İletkendeki yük hareketlerinin sona ermesiyle oluşan statik elektrik yükleri tarafından meydana getirilen statik elektrik alanı açısından, dielektrik-iletken arayüzeyinde bulunan sonucu şu şekilde ifade edebiliriz:

İletken yüzeyindeki statik elektrik alanının iletken yüzeyine teğet olan bileşeni sıfırdır. Bu, statik dengenin kurulması sebebiyle, yüzey üzerindeki yük hareketinin sona ermesinin bir sonucudur.

İletken yüzeyindeki bir noktada meydana gelen elektrik alanı, genel olarak,

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_n + \mathbf{E}_t = E_n \mathbf{a}_n + E_t \mathbf{a}_t \quad (22)$$

olarak düşünülürse, burada $\mathbf{E}_n = E_n \mathbf{a}_n$ alanı, elektrik alanının yüzeye dik olan normal vektörünü; $\mathbf{E}_t = E_t \mathbf{a}_t$ alanı, elektrik alanının yüzeye teğet olan teğet vektörünü, E_n , vektörün normal bileşeninin değerini, E_t , vektörün teğet bileşeninin değerini, E_t , gösterir (Şekil 4).



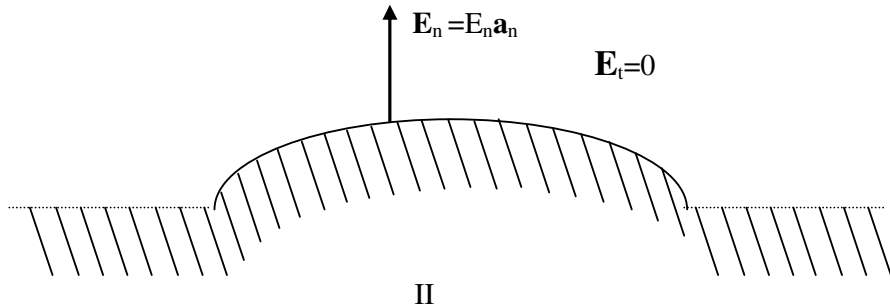
Şekil 4 Dielektrik-iletken arayüzeyinde yük hareketi esnasında elektrik alanı

Elektrik alanının teğet bileşeni sıfırdan farklı olduğu müddetçe, iletken üzerindeki elektronların hareketi, yalıtkan ortama geçemeyeceklerinden dolayı, sâdece iletken üzerinde devam eder. Statik denge kurulduğunda elektronların hareketleri sıfır olacağı için, alanın teğet bileşeni de sıfır olur, $E_t=0$. O zaman, (22)'den,

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_n = E_n \mathbf{a}_n, \quad \mathbf{D} = \mathbf{D}_n = \epsilon_0 E_n \mathbf{a}_n \quad (23)$$

elde edilir ki, statik denge durumunda elektrik alanının ve elektrik akı yoğunluğu vektörlerinin sâdece normal bileşenlerinin olduğu görülür (Şekil 5). Bunu da şöyle özetleyebiliriz:

Statik denge durumunda elektrik alanı iletkenin yüzeyine diktir. İletken yüzeyinde statik denge oluştuğu zaman $E_t=0$ 'dan dolayı yüzeyin her bir noktasında $D_t=0$ olur⁵.



Şekil 5 Statik durumda dielektrik-iletken arayüzeyinde elektrik alanı

⁵ Akhunlar, A., *Elektrik Alanlarına Giriş, I, Statik Elektrik Alanı*, Arkadaşlar Matbaası, 1967, İstanbul.

Hayatta arzû edilecek iki şey vardır: İstenileni elde etmek; elde edilen zevkini çıkarmak... Bu ikincisine pek olgun insanlar erişebilir.

3.6. DİELEKTRİK-İLETKEN ARAYÜZEYİNDE ELEKTRİK AKI YOĞUNLUĞU VEKTÖRÜNE ÂİT SINIR ŞARTLARI

Şekil 6'de görüldüğü gibi kapalı bir yüzey alalım. Bu kapalı yüzey, kolaylık için, bir kısmı dielektrik ortam içinde, diğer bir kısmı ise iletken ortam içinde olan bir dikdörtgenler prizması olsun. İletkenin üzerinde statik elektrik yükü olduğu kabul edildiğinden dolayı, statik elektrik durumunda iletkenin herhangi bir noktasında elektrik alanının sâdece normal bileşeni olacağı için, buna bağlı olarak elektrik akı yoğunluğunun da normal bileşeni bulunur. Ele alınan bu kapalı yüzey için Gauss Kânunu yazılırsa

$$\varphi = \oiint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = Q_{\text{net}} \quad (24)$$

olur. Buradaki S yüzeyi, dikdörtgenler prizmasının bütün kapalı yüzeyini, Q_{net} ise, dikdörtgenler prizmasının kapalı yüzeyi içindeki net yükü göstermektedir. Statik durum meydana geldiği için bu yük iletkenin yüzeyinde bulunur. Statik durum devam ederken iletkenin yüzeyindeki yüzey yük yoğunluğu ρ_s olarak alınır, kapalı yüzeyi içindeki net yükün $Q_{\text{net}} = \rho_s dS$ olduğu görülür. $d\mathbf{S} = \mathbf{a}_n dS$ olduğu dikkate alınarak, (24) ifâdesi bütün yüzler için yazılırsa,

$$\psi = \oiint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = \oiint_S \mathbf{D} \cdot \mathbf{a}_n dS = \oiint_S D dS = \iint_S \rho_s dS \quad (25)$$

veyâ

$$\oiint_S D dS = \int_{\text{Yan yüzler}} D dS + \int_{\text{Üst yüz}} D dS + \int_{\text{Alt yüz}} D dS = \iint_S \rho_s dS \quad (26)$$

olur. Statik dengede teğet bileşen $D_t = 0$ olduğu için, yan yüzlere âit entegral terimi ile, iletkenin malzemesinin içindeki elektrik alanı sıfır olduğu için, alt yüzeye âit entegral terimi ortadan kalkar. Geriye

$$\int_{\text{Üst yüz}} D dS = \iint_S \rho_s dS \quad (27)$$

kalır. Buradan

$$\int_{\text{Üst yüz}} (D - \rho_s) dS = 0 \quad (28)$$

elde edilir. Bunun sıfır olması entegral altındaki terimin sıfır olması ile mümkündür. $(D - \rho_s) dS = 0$ $dS \neq 0$ olduğundan $D - \rho_s = 0$ veyâ

$$D = D_n = \rho_s \quad (29)$$

bulunur. Bunun anlamı şudur:

Bir iletken-yalıtkan arayüzeyinde iletken üzerindeki elektrik akı yoğunluğu vektörünün normal bileşeni, statik dengede iken, iletken yüzeyine diktir ve iletken üzerindeki yüzey yük yoğunluğuna eşittir.

Bu sonuç (22) ile karşılaştırılırsa,

$$\mathbf{D}_n = \epsilon_0 E_n \mathbf{a}_n \quad (30)$$

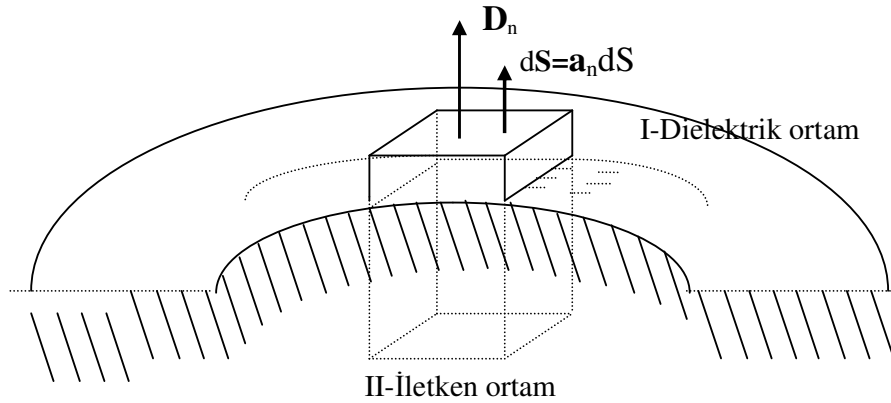
olur ki, buradan

$$E_n = \frac{D_n}{\epsilon_0} \mathbf{a}_n = \frac{\rho_s}{\epsilon_0} \mathbf{a}_n \quad (31)$$

veyâ

$$E_n = \frac{\rho_s}{\epsilon_0} \quad (32)$$

sonucu çıkar ki bu, bir iletken-yalıtkan arayüzeyinde oluşan bir statik denge durumunda, iletkenin hemen yakınındaki dielektrik ortam içindeki bir noktada elektrik alanının normal bileşeninin nasıl hesaplanacağını vermektedir⁶.



Şekil 6 İletken-yalıtkan arayüzeyinde statik dengede elektrik akı yoğunluğu vektörüne âit sınır şartları

Sorular:

1) Bir iletkenin yüzeyindeki elektrik alanının normal bileşeni statik denge durumunda 12 V/m olduğuna göre, iletkenin yüzey yük yoğunluğu ne olur?

2) İç yarıçapı 2 cm , dış yarıçapı 10 cm olan eş merkezli iki iletken silindirin iç yüzey yük yoğunluğu $\rho_{s1} = 44 \text{ pC/m}^2$ olarak veriliyor. Silindirler arasındaki bölgede yük yoğunluğu sıfır ve elektrik alanı ve elektrik akı yoğunluğu mevcuttur. Dış silindirin ρ_{s2} yüzey yük yoğunluğu ile silindirler arasındaki elektrik alan ve elektrik akı yoğunluğu vektörünü bulunuz.

Cevaplar:

$$1) \rho_s = \epsilon_0 E_n = 12 \times 8.85 \times 10^{-12} = 0.1062 \times 10^{-9} \text{ C/m}^2$$

⁶ Akhunlar, A., *Elektrik Alanlarına Giriş, I, Statik Elektrik Alanı*, Arkadaşlar Matbaası, 1967, İstanbul.

2) Silindirin iç yarıçapı $r_1 = 2 \times 10^{-2} \text{ m}$ ve dış yarıçapı $r_2 = 10 \times 10^{-2} \text{ m}$ silindirler arasındaki bölgede yük yoğunluğu sıfır olduğu için $r_1 < r < r_2$ bölgesinde elektrik akısı için

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \frac{1}{r} \frac{d}{dr} (r D_r) = 0 \rightarrow r D_r = \text{sabit} = K = \rho_s$$

olur. İç silindirin yüzeyinde $r=r_1$ için $D_n = D_r = \rho_{s1} = 44 \text{ pC/m}^2$ olduğundan $K = r D_r = 2 \times 10^{-2} \times 44 \text{ pC/m}^2 = 88 \times 10^{-14} \text{ C/m}$ bulunur. İki silindir arasındaki elektrik akı yoğunluğu vektörü ve elektrik alan vektörü

$$\mathbf{D}_r = \frac{88 \times 10^{-14}}{r} \mathbf{a}_r \text{ C/m}^2,$$

$$\mathbf{E}_r = \frac{88 \times 10^{-14}}{10^{-9} / 36\pi r} \mathbf{a}_r \text{ C/m}^2 = \frac{0.9960}{r} \mathbf{a}_r \text{ V/m}$$

Dış silindirin iç yüzeyinde $r=r_1$ için

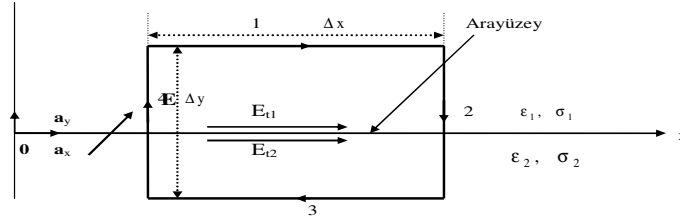
$$D_n = -D_r = \rho_{s2} = -K/r_2 = -\frac{88 \times 10^{-14}}{10 \times 10^{-2}} = -88 \times 10^{-13} \text{ C/m}^2$$

Ev Ödevi:

1) İletkenden yapılmış bir kürenin merkezine bir $+Q$ yükü konduğunda, başlangıçta net yükü sıfır olan iletken kürenin iç ve dış yüzeylerinde, tesirle elektriklenme sebebiyle sırasıyla, $-Q$ ve $+Q$ yükleri meydana gelir. Tesirle elektriklenmenin mekanizmasını anlatınız. İletkenin malzemesinin (etin) içinde elektrik alanı nasıl olur?

3.7. STATİK ELEKTRİK ALANINDA FARKLI İKİ MALZEMENİN ARAYÜZEYİNDEKİ SINIR ŞARTLARI

İletkenliği ve dielektrik sâbiti, sırasıyla, σ_1, ϵ_1 ve σ_2, ϵ_2 olan farklı iki malzemenin meydana getirdiği arayüzey Şekil 8'de görülmektedir. Her iki ortamı içine alan bir kapalı çevrim alalım. Kolaylık olsun diye kapalı çevrimi dikdörtgen olarak seçelim. Elektrik alan vektörü şekilde görüldüğü gibi, ikinci ortamdan birinci ortama doğru yatayla bir açı yapacak şekilde bulunmaktadır.



Şekil 8 İletkenliği ve dielektrik sâbiti, sırasıyla, σ_1, ϵ_1 ve σ_2, ϵ_2 olan farklı ikimalzeme ve arayüzeyi

Şekil 8'deki kapalı çevrim için elektrik alanın bir boyutlu entegralini alalım. Bilindiği gibi, statik elektrik alanının koruyuculuk özelliğinden dolayı, bunun sonucu sıfırdır ($\oint \mathbf{E} \cdot d\ell = 0$):

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\ell = \int_1 \mathbf{E} \cdot d\ell + \int_2 \mathbf{E} \cdot d\ell + \int_3 \mathbf{E} \cdot d\ell + \int_4 \mathbf{E} \cdot d\ell = 0 \quad (33)$$

Burada 2 ve 4 yollarına âit entegraller y eksenine göre zıt yönlü olup ortadan kalkarlar. Geriye 1 ve 3 yollarına âit entegraller kalır:

$$\int_1 \mathbf{E} \cdot d\ell + \int_3 \mathbf{E} \cdot d\ell = 0 \quad (34)$$

Şekil 8'de x yönündeki birim vektör \mathbf{a}_x olarak alınır, o zaman $d\ell = d\ell \mathbf{a}_x$ olur. Bu, (34)'e taşınırsa,

$$\int_1 \mathbf{E} \cdot \mathbf{a}_x d\ell - \int_3 \mathbf{E} \cdot \mathbf{a}_x d\ell = 0 \quad (35)$$

veyâ

$$\int_1 E_{t1} d\ell - \int_3 E_{t2} d\ell = 0 \quad (36)$$

ya da

$$\int (E_{t1} - E_{t2}) d\ell = 0 \quad (37)$$

olur. Bu entegralin sıfır olması entegral altındaki terimin sıfır olmasına bağlıdır. Burada $d\ell \neq 0$ olduğu için $E_{t1} - E_{t2} = 0$ olmak zorundadır. Buradan

$$E_{t1} = E_{t2} \quad (38)$$

sonucu elde edilir ki, bunun anlamı şudur:

Statik elektrik alanında iki ortamı ayıran bir arayüzeyde elektrik alanının bu ortamlara âit teğet bileşenleri birbirlerine eşittir. Başka bir ifadeyle arayüzeyde elektrik alanının teğet bileşenleri süreklidir.

Elektrik akı yoğunlukları arasındaki ilişkiler de bulunabilir. (38)'dan

$$E_{t1} = E_{t2} \quad \frac{D_{t1}}{\epsilon_{r1}} = \frac{D_{t2}}{\epsilon_{r2}} \quad (39)$$

ilişkisi elde edilir. Şekil 8'deki arayüzey üzerinde ρ_s yük yoğunluğu varsa, y doğrultusundaki birim vektörlerin yönleri dikkate alındığında görülür ki,

$$D_{n1} - D_{n2} = -\rho_s \rightarrow \epsilon_{r1} E_{n1} - \epsilon_{r2} E_{n2} = -\frac{\rho_s}{\epsilon_0} \quad (40)$$

bulunur. Genel olarak ara yüzeyde yük yoğunluğu olmadığı için

$$\epsilon_{r1} E_{n1} = \epsilon_{r2} E_{n2} \rightarrow D_{n1} = D_{n2} \quad (41)$$

olur ki, bu iki ortamın ara yüzeyinde elektrik akı yoğunluğu vektörünün ortamlara âit normal bileşenlerinin sürekli olduğunu gösterir.

İkinci ortama âit iletkenlik sıfırdan farklı olursa Yâni, ikinci ortam bir iletken olursa, 6. madde de görüldüğü gibi, dielektrik-iletken arayüzeyi elde edilir ki, o zaman $E_{t2}=0$ olacağından $E_{t1}=0$ elde edilir. Bu durum 6. maddede bulunan sonuç ile uyuşmaktadır⁷.

*Kara gün dostu!.. O acabâ nerede? Gençliğimde,
ışığa üşüşen pervâneler gibi, ak günlerin dostlarına rastladım.
Hulki Onaran*

⁷ Edminister, J.A., Electromagnetics, Schaum's Outline Series in Engineering, McGraw-Hill Book Company, 1979.

BÖLÜM IV DİELEKTRİK ORTAMLAR VE KAPASİTE

*Çocuğuna dilini tutmasını öğret;
konuşmasını nasıl olsa vakti gelince öğrenir.*

Franklin

4.1. GİRİŞ

Bir iletkende atomun dış elektronları bir elektrik alanının uygulanmasıyla atomdan kolayca ayrılarak serbest hâle gelirler. Diğer taraftan bir dielektrik malzemede ise, elektronlar atomlara çok kuvvetli bir şekilde bağlı oldukları için, elektrik alanı uygulansa bile, bunlar atomdan ayrılamazlar. Serbest elektronlar meydana gelmediği için parafin, cam ve mika gibi, dielektrik malzemelerinde elektrik iletimi olmaz.

Dielektrik malzemeleri, elektrik özellikleri açısından, temsil eden en önemli sâbit dielektrik sâbitidir, ϵ . Genel olarak bu malzemelerin îzâfî dielektrik sâbitleri, ϵ_r , boşluğun 1 olan değerinden büyüktürler. Îzâfî dielektrik sâbitleri, ϵ_r ,

$$\epsilon_r = \frac{\epsilon}{\epsilon_0}, \quad \epsilon_0 = 10^{-9} / 36\pi \text{ F/m} \quad (1)$$

formülünden kolayca hesaplanırlar. Kuartzın îzâfî dielektrik sâbiti 5, mikanın 6, saf suyun 81, naylonun 3.8, parafinin 2.1'dir¹.

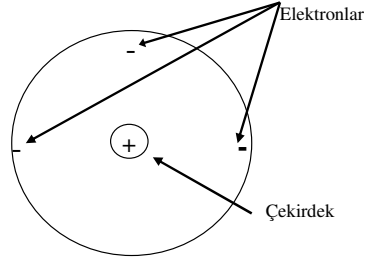
4.2. KUTUPLANMA (POLARİZASYON)

Dielektrik malzemeler, elektrik alanında polarize olurlar (kutuplanırlar). Bu yüzden, bu malzemeler içindeki elektrik akı yoğunluğu, aynı elektrik alanı altında boşluktakine göre daha büyük olur.

Bir dielektrik malzemeye bir elektrik alanı uygulandığında, atomların elektronları, atomları terk ederek serbest hâle gelemezler ama malzemedeki bu atomlar birer dipol davranışı, iki kutupluluk gösterirler.

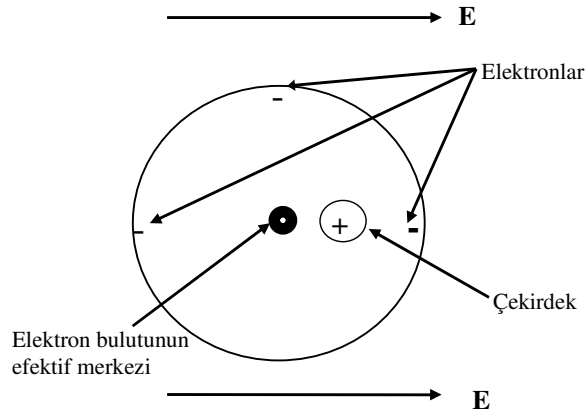
Bir atom bilindiği gibi, merkezdeki bir çekirdek etrafında dönen elektronlardan meydana gelir. Malzeme bir elektrik alanı içinde değilse, çekirdeğin etrafında dönen negatif yüklü elektronlar, çekirdeğe göre simetrik pozisyonludurlar. Yâni, gerek elektronların ve gerekse pozitif elektrik yüklü çekirdeğin normal pozisyonları devam eder. Bu durumda elektronların çekirdeğin etrafında dolandığı kürelerin merkezleri, çekirdekteki pozitif yükü üst üste getirirler, yâni çakışır (Şekil 1).

¹ Kraus, J.D., Carver, K.R., *Electromagnetics* (second Edition), McGraw-Hill Book Company, 1966.



Şekil 1 Elektrik alanında bulunmayan kutuplanmamış (polarize olmamış) dielektrik malzemeye âit bir atom

Dielektrik malzemeye E elektrik alanı uygulandığında, atomların çekirdekleri, normal yerlerinden ayrılarak, yer değiştirirler. Dolayısıyla, bu durumda elektronların çekirdeğe göre olan simetri durumları bozulur bir asimetri ortaya çıkar (Şekil 2).

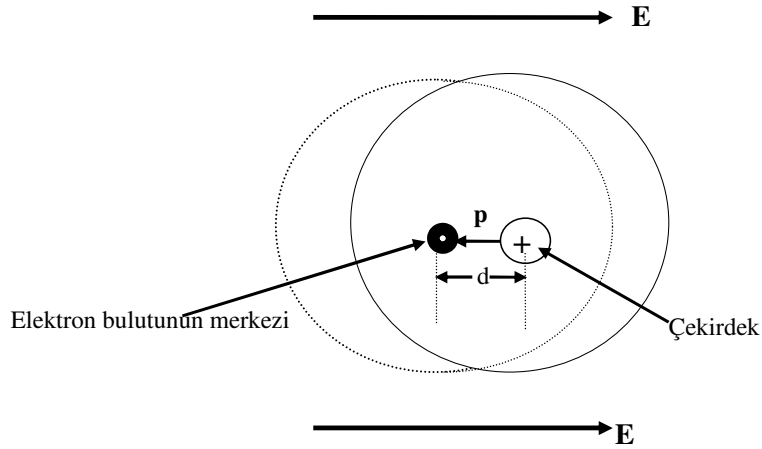


Şekil 2 Elektrik alanında bulunan kutuplanmış (polarize olmuş) dielektrik malzemeye âit bir atom

Görüldüğü gibi, elektrik alanı uygulandığında pozitif yük bölgesi, elektrik alanı yok iken, bulunduğu normal yerinden elektrik alanı doğrultusunda d kadar yer değiştirir (Şekil 3). Dolayısıyla, dielektrik malzemedeki her atom, elektrik alanı uygulandığında, sanki, d kadar uzaklıkta bulunan $+q$ ve $-q$ yüklerinden oluşan bir elektrik dipol gibi davranır (Şekil 4). Buradaki q çekirdeğin yükünü göstermektedir².

Elektrik alanı kaldırıldığında merkezden d kadar uzaklaşan çekirdeklerin tekrar merkeze geleceğini ve kutuplanmanın ortadan kalkacağını düşünebilirsiniz. Demek ki, kutuplanmanın elektrik alanı tarafından meydana getirildiği bir kere daha anlaşılacaktır.

² Kraus, J.D., Carver, K.R., *Electromagnetics* (second Edition), McGraw-Hill Book Company, 1966.

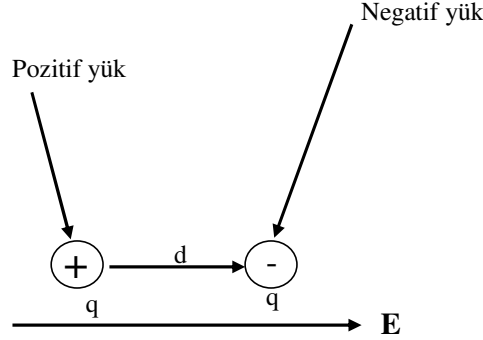


Şekil 3 Dipolün oluş mekanizması

Şekil 3'deki yapı Şekil 4'deki gibi bir elektrik dipol momentini tanımlar. Bu bir vektör büyüklüğü olup \mathbf{p} ile gösterilirse,

$$\mathbf{p} = q\mathbf{d} \quad (2)$$

ile tanımlanır. Bu vektörün yönü pozitif yükten negatif yüke doğrudur.



Şekil 4 +Q ve -Q yüklerinden oluşan bir dipol momentini

Ev Ödevi:

- 1) Yasak bant nedir?
- 2) Dipol nedir?

Kutuplanmış çoğu dielektrik malzemelerde elektrik alanı ortadan kalktığı anda, elektron bulutunun merkezi ile pozitif yüklü çekirdek, eski durumunda olduğu gibi, tekrar üst üste gelerek çakışır, kutuplanma da ortadan kalkar. Böylece, çakışma hâlinde, pozitif ve negatif yükler birbirini yok eder. Elektrik alanının uygulanması ve sonra kaldırılması durumu, *Hook Kânunu*'na uyan bir yay davranışına sâhiptir.

Bir dielektrik malzemenin V hacmi içinde Şekil 5'deki gibi n tâne elektrik dipol momentini varsa,

$$\mathbf{P} = \lim_{V \rightarrow 0} \frac{n\mathbf{p}}{V} \quad (3)$$

ile tanımlanan büyüklüğe *Polarizasyon Vektörü* veyâ kısaca *Polarizasyon* denir, birimi C/m^2 'dir. (3) ifâdesi

$$\mathbf{P} = \frac{n\mathbf{p}}{V} = \frac{nq\mathbf{d}}{V} \quad (4)$$

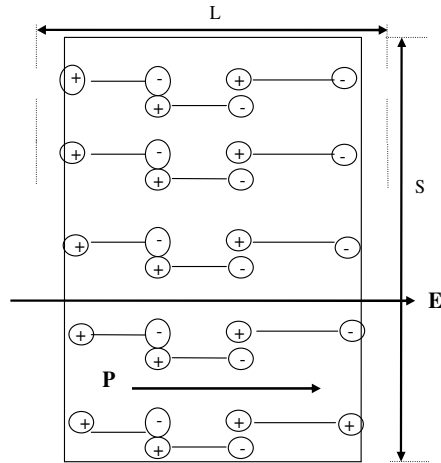
olarak basitleştirilebilir.

Aslında şekilde görülen kutuplanmış malzemenin içindeki yüklerin birbirlerini nötrleştirdikleri, sâdece sağ ve sol yüzeylere teğet olan yüklerin kaldığı görülmektedir. Buna göre, Şekil 5 Şekil 6'ya denktir. Şekil 6'ya göre, dipol momentini $P=QL$, $nq=Q$ olup ve Polarizasyonun değeri

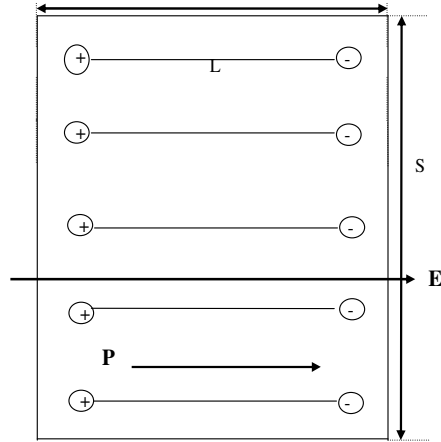
$$P = \frac{np}{V} = \frac{nqd}{V} = \frac{QL}{V} = \frac{QL}{SL} = \frac{Q}{S} = \rho_s \quad (5)$$

olur ki bu, yüzey yük yoğunluğunu verir. Burada dielektrik bir malzemeye elektrik alanı uygulandığında meydana gelen polarizasyon vektörünün değeri, dielektrik malzemenin yüzeyinde oluşan ρ_s yüzey yük yoğunluğundan ibârettir.

Sonuç olarak, diyebiliriz ki, polarizasyon vektörünün değeri, yüzey yük yoğunluğuna eşittir. Diğer taraftan, yüzey yük yoğunluğunun elektrik akı yoğunluğu vektörünün büyüklüğüne eşit olduğu bilinmektedir. Dolayısıyla, polarizasyon vektörü, elektrik akı yoğunluğu vektörü ile aynıdır ve aynı boyut ve birime sâhiptir. Şekil 6'dan da görüldüğü gibi, polarizasyon vektörünün yönü elektrik alan vektörünün yönündedir.



Şekil 5 Hacmi V , kesiti S ve kalınlığı L olan bir dielektrik malzemede kutuplanma



Şekil 6 Hacmi V, kesiti S ve kalınlığı L olan bir dielektrik malzemede elektrik alanı altında sağ ve sol yüzeylerde meydana gelen net yük ve polarizasyon vektörü

*Güzel kitaplar, gün ışığına açılmış pencerelerdir.
Bundan faydalanmamak karanlığın ezeli esiri olmak demektir.*

“Ey Millet!.. Allah birdir. Şânu büyüktür. Allah'ın selâmeti, atfeti ve hayrı üzerinize olsun. Peygamberimiz Efendimiz Hazretleri, Cenâb-ı Hak tarafından insanlara dîni hakikatleri tebliğe, memur ve Resul olmuştur. Koyduğu esas kânunlar cümlemizce mâlumdur ki, Kurân-ı Azîmüşşan'daki âyetlerdir. İnsanlara feyz rûhunu vermiş olan dinimiz son dindir. Ekmel dindir. Çünkü dinimiz akla, mantığa, hakikate uymamış olsaydı, bununla diğer ilâhî ve tabii kânunlar arasında aykırılıklar olması gerekirdi. Çünkü bütün ilâhî kânunları yapan Cenâb-ı Hak'tur.”

M. KEMAL ATATÜRK

(Atatürk'ün Balıkesir'de Zağanos Paşa Câmii'nde 7 Şubat 1923 târihinde vermiş olduğu hutbeden)

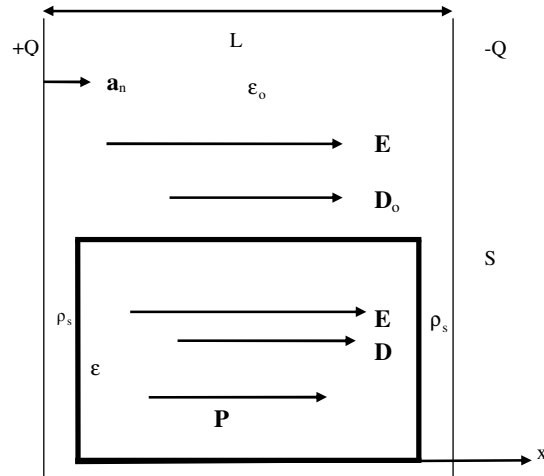
4.3. DİELEKTRİK MALZEMELERDE ELEKTRİK AKI YOĞUNLUĞU VEKTÖRÜ

Şekil 7'de görüldüğü gibi, bir kondansatörün iki iletken levhası arasındaki dielektrik malzeme boşluk (hava) olsun. Bu takdirde elektrik akı yoğunluğu için bilindiği gibi

$$\mathbf{D}_0 = \epsilon_0 \mathbf{E} \quad (6)$$

yazabiliriz.

İkinci bir işlem olarak Şekil 7'deki kondansatörün alt kısmına ayrıca dielektrik sâbiti ϵ olan bir malzeme koyalım. Bu malzeme kondansatörün elektrik alanı tarafından kutuplanarak yüzey üzerinde ρ_s yüzey yük yoğunluğu oluşur. Yâni, elektrik alanı bu malzemeye de uygulanacağından dolayı malzemede Şekil 6'daki gibi bir kutuplanma ortaya çıkar.



Şekil 7’de kondansatörün içine konan dielektrik malzeme ve meydana gelen polarizasyonun elektrik akı yoğunluğuna etkisi

Malzemede \mathbf{D}_0 elektrik akı yoğunluğuna ayrıca malzeme yüzeyindeki yük yoğunluğu ilâve olur. Buna göre, büyüklükler arasında

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \rho_s \quad (7)$$

veyâ

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P} \quad (8)$$

ya da

$$\mathbf{D} = \mathbf{D}_0 + \mathbf{P} \quad (9)$$

İt ilişkisi bulunur. Kutuplanmış malzemeye âit bu son ifâdedeki elektrik akı yoğunluğu, elektrik alanı her iki halde de aynı olmasına rağmen, görüldüğü gibi, ilk duruma göre polarizasyon kadar artmıştır. Bu artışın sonradan levhalar arasına sokulan dielektrik malzemenin bir katkısı olduğu açıktır. Sonuç olarak, dielektrik malzeme, elektrik alanında polarize olduğu için malzeme içindeki elektrik akı yoğunluğu, aynı elektrik alanı altında boşluktakine göre polarizasyon kadar daha büyük olur.

Elektrik alan vektörü (8)’de kullanılırsa

$$\mathbf{E} \epsilon = \mathbf{E} \epsilon_0 + \mathbf{P} \quad (10)$$

ya da

$$\epsilon = \epsilon_0 + \frac{\mathbf{P}}{\mathbf{E}} \quad (11)$$

veyâ dielektrik sâbitindeki artış

$$\frac{\mathbf{P}}{\mathbf{E}} = \epsilon - \epsilon_0 \quad (12)$$

olur. Burada P/E oranı bâzen

$$P/E = \chi \epsilon_0 \quad (13)$$

ile gösterilmekte ve χ 'ya elektrik süseptibilite (elektrik duyarlılık) denmektedir ve bu boyutsuzdur. (12) ve (13) formüllerinden

$$\chi = \epsilon_r - 1 \quad (14)$$

bulunur. Görüldüğü gibi boşluk için elektrik süseptibilite sıfır olmaktadır³.

Sorular:

1) Şekil 7 kondansatör levhaları arasına konan malzemenin izâfi dielektrik sâbiti 7/3 ve uygulanan elektrik alanı 3 V/m olduğuna göre

- Elektrik süseptibiliteyi (duyarlılığı),
- Polarizasyonu,
- Elektrik akı yoğunluğunu

bulunuz.

- Elektrik alan vektörünü yazınız.
- Polarizasyon vektörünü yazınız.
- Yüzey yük yoğunluğunu yazınız.

Cevaplar:

a) Elektrik duyarlılık:

$$\chi = \epsilon_r - 1 = 7/3 - 1 = 4/3$$

b) Polarizasyon:

$$P = \chi \epsilon_0 E = (4/3) \times 8.85 \times 10^{-12} \times 3 = 35.4 \times 10^{-12} \text{ C/m}^2$$

c) Elektrik akı yoğunluğu:

$$D = \epsilon_0 E + P = 8.85 \times 10^{-12} \times 3 + 35.4 \times 10^{-12} \text{ C/m}^2 \\ = 61.95 \times 10^{-12} \text{ C/m}^2$$

d) $E = 3 \mathbf{a}_n$ V/m

e) $P = P \mathbf{a}_n = 35.4 \times 10^{-12} \mathbf{a}_n \text{ C/m}^2$

f) $\rho_s = 35.4 \times 10^{-12} \text{ C/m}^2$

4.4. KONDANSATÖRLERDE SÂBİT GERİLİM ALTINDA ELEKTRİK ALANI VE ELEKTRİK AKI YOĞUNLUĞU VEKTÖRÜ

Levhalar arası uzaklığı d, bir levhasının yüzey alanı S ve levhalar arasındaki dielektrik sâbiti ϵ_0 olan bir kondansatörün levhaları arasına sâbit bir V gerilimi uygulandığında, kondansatörün levhaları arasındaki alanda

$$\mathbf{E} = \frac{V}{d} \mathbf{a}_n \quad (15)$$

elektrik alan vektörü meydana gelir. Burada \mathbf{a}_n , pozitif yüklü levhanın yüzey birim normalini göstermektedir (Şekil 7). Elektrik akı yoğunluğu vektörü ise,

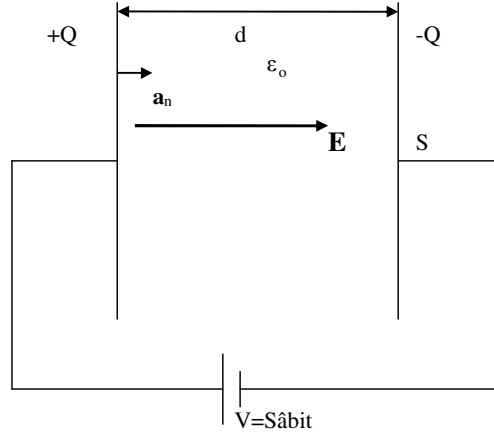
³ Edminister, J.A., Electromagnetics, Schaum's Outline Series in Engineering, McGraw-Hill Book Company, 1979.

$$\mathbf{D}_o = \epsilon_o \mathbf{E} = \epsilon_o \frac{V}{d} \mathbf{a}_n \quad (16)$$

olur. Diğer taraftan

$$\mathbf{D}_o = \rho_s = Q/S \quad (17)$$

olduğu da açıktır. Burada Q, kondansatör levhalarından bir tânesindeki toplam elektrik yüküdür (Şekil 8).



Şekil 8 sâbit gerilim altında bir kondansatör

Şekil 8’de görüldüğü gibi, V gerilimi aynı (sâbit) kaldığı için elektrik alanının da aynı (sâbit) kaldığı bu durumda, levhaları arasına dielektrik sâbiti ϵ olan bir dielektrik malzeme koyalım (Şekil 8’e bakınız). Bu durumda da elektrik alanı yine (15) ile aynıdır. Çünkü V/d oranı değişmemiştir. Ancak Elektrik akı yoğunluğu vektörüne bu 2. durumda, dielektrik malzemenin kutuplanmasından dolayı, ortaya çıkan polarizasyon vektörü

$$\mathbf{D} = \epsilon_o \mathbf{E} + \mathbf{P} = \epsilon_o \frac{V}{d} \mathbf{a}_n + \mathbf{P} \quad (18)$$

olacak şekilde eklenir. Burada

$$\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E} \quad (19)$$

Sonuç: Sâbit gerilim altında bulunan bir kondansatörün levhaları arasında bulunan dielektrik malzeme ne olursa olsun, elektrik alanının büyüklüğü değişmez fakat elektrik akı yoğunluğu araya giren malzemeye bağlı olarak değişir.

Hiç kimsenin hatâsını yüzüne vurmayınız. O hatâyı işleyene, hatâsını başka birini misâl getirerek anlatınız.
Hz. Ali

4.5. KONDANSATÖRLERDE SÂBİT YÜK ALTINDA ELEKTRİK ALANI VE ELEKTRİK AKI YOĞUNLUĞU VEKTÖRÜ

Levhalar arası uzaklığı d , bir levhasının yüzey alanı S ve levhalar arasındaki dielektrik sâbiti ϵ_0 olan bir kondansatörün levhaları sâbit $+Q$ ve $-Q$ ile yüklensin. Kondansatörün levhaları arasındaki elektrik akı yoğunluğunun değeri

$$D_o = \frac{Q}{S} = \rho_s \quad (20)$$

ve elektrik alan vektörü

$$\mathbf{E}_o = \frac{D_o}{\epsilon_0} \mathbf{a}_n \quad (21)$$

olur. Bundan sonra, levhalar arasına dielektrik sâbiti ϵ olan bir dielektrik malzeme koyalım. O zaman elektrik akı yoğunluğu, Q yükü değişmediği için, aynı kalacak yâni $\mathbf{D} = \mathbf{D}_o$ olacak fakat elektrik alanı, malzemenin izâfî dielektrik sâbiti oranında azalacaktır:

$$\mathbf{E} = \frac{\mathbf{D}}{\epsilon} = \frac{\mathbf{D}_o}{\epsilon} = \frac{\mathbf{E}_o}{\epsilon_r} \quad (22)$$

Elektrik akı yoğunluğu aynı kaldığı için (18)'e göre, elektrik alanındaki azalmayı polarizasyon vektörü tamamlayacaktır. Yâni,

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P} \quad (23)$$

olacaktır⁴.

Sonuç: Sâbit yük altında bulunan bir kondansatörün levhaları arasındaki malzeme ne olursa olsun, kondansatörün levhaları arasındaki elektrik akı yoğunluğunun büyüklüğü değişmez fakat elektrik alanının büyüklüğü araya giren malzemeye bağlı olarak değişir. (23)'ün korunumu için, elektrik alanındaki bu azalmayı polarizasyon vektörü karşılayacaktır.

Ev Ödevi:

1) İzâfî dielektrik sâbiti ϵ_r olan homogen bir dielektrik ortamdaki Coulomb kuvvetinin serbest uzaydaki Coulomb kuvvetine oranı nedir?

4.6. KONDANSATÖRÜN ELEKTRİK ALANINDA BİRİKEN ENERJİ

Bir kondansatörün elektrik alanında elektrik alanında biriken enerji

$$W = \frac{1}{2} \int_V \mathbf{D} \cdot \mathbf{E} dV \quad (24)$$

veya

⁴ Edminister, J.A., Electromagnetics, Schaum's Outline Series in Engineering, McGraw-Hill Book Company, 1979.

$$W = \frac{1}{2} \int_V \epsilon E^2 dV = \frac{1}{2} \int_V \frac{D^2}{\epsilon} dV \quad (25)$$

formüllerinden bir tanesi ile hesaplanabilir. Burada elektrik akı yoğunluğu vektörü

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P} = \epsilon_r \epsilon_0 \mathbf{E} \quad (26)$$

ile verilir.

Kondansatörün bir iletken levhasının yüzeyi S , levhaları arasındaki uzaklığı d ve levhalar arasındaki malzemenin dielektrik sâbiti ϵ olsun. Bu verilere göre kondansatörün kapasitesi $C = \epsilon S/d$ olur. Kondansatörün levhalarına bir V gerilim uygulandığı zaman elektrik alanında meydana gelen elektrik alan vektörü ve şiddeti sırasıyla, \mathbf{a}_n kondansatörün yüzey birim normal vektörü olmak üzere, $\mathbf{E} = (V/d)\mathbf{a}_n$ ve $E = V/d$ olur. Buna göre kondansatörün elektrik alanında biriken enerji

$$W = \frac{1}{2} \int_V \epsilon E^2 dv = \frac{1}{2} \epsilon E^2 \int_V dV \quad (27)$$

formülünden hesaplanabilir. Kondansatöre uygulanan gerilim, levhalar arasındaki mesâfe ve dielektrik sâbiti, sâbit oldukları için, görüldüğü gibi bunlar entegral dışına alınmıştır. Bu durumda entegral sâdece bir hacim hesabını göstermektedir. Bu yapılsa, hacmin Ad olduğu görülür. Yâni,

$$W = \frac{1}{2} \int_V \epsilon E^2 dv = \frac{1}{2} \epsilon E^2 Sd \quad (28)$$

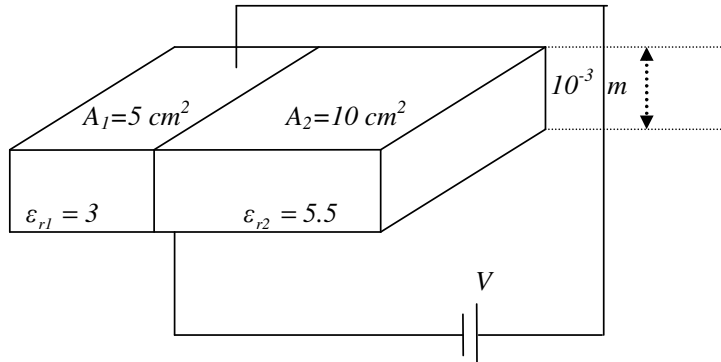
veya

$$W = \frac{1}{2} \epsilon E^2 Sd = \frac{1}{2} \epsilon \left(\frac{V}{d} \right)^2 Sd = \frac{\epsilon S V^2}{2d} = \frac{1}{2} C V^2 \quad (29)$$

olarak kondansatörün elektrik alanında biriken enerji ifâdesi, kondansatörün kapasite parametresi cinsinden bulunur.

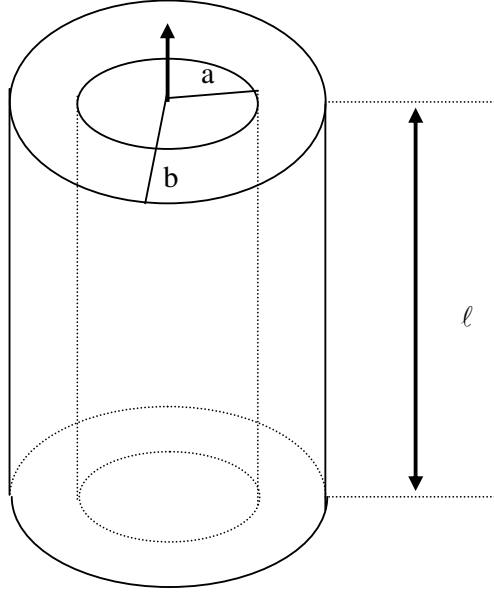
Sorular:

- 1) Bir silindirik kondansatörün kapasite ifâdesini ve birim uzunluk başına düşen kapasiteyi bulunuz.
- 2) Şekildeki paralel levhaların kapasitesini hesaplayınız.



Cevaplar:

1) İç yarı çapı a ve dış yarı çapı b olan bir koaksiyal kablo şeklindeki bir yapı bir silindirik kondansatör olarak kullanılabilir.



Silindirler arasındaki malzemenin izâfî dielektrik sâbiti ϵ_r olsun. Elektrik akı yoğunluğu vektörü iki silindir arasında yarı çapa bağlı olarak

$$\mathbf{D} = \rho_s \frac{a}{r} \mathbf{a}_r$$

olarak değişir ve $r=a$ 'da elektrik akısı, yüzey yük yoğunluğuna, ρ_s , eşittir. Bu bölgedeki elektrik alan vektörü ise,

$$\mathbf{E} = \frac{\rho_s}{\epsilon} \frac{a}{r} \mathbf{a}_r$$

olur. İki silindir arasındaki gerilim

$$\varphi_{ab} = - \int_{r=a}^b \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = - \int_{r=a}^b \left(\frac{\rho_s}{\epsilon} \frac{a}{r} \mathbf{a}_r \right) \cdot \mathbf{a}_r dr = a \frac{\rho_s}{\epsilon} \ln \frac{a}{b}$$

ve kapasite iki silindir arasındaki toplam yük $Q = \rho_s (2\pi aL)$ olduğu dikkate alındığında silindirik kondansatörün kapasitesi

$$C = \frac{Q}{\varphi_{ab}} = \frac{2\pi\epsilon L}{\ln \frac{b}{a}}$$

olarak elde edilir. Birim uzunluk başına düşen kapasite ise:

$$\bar{C} = \frac{Q}{\varphi_{ab}} = \frac{2\pi\epsilon}{\ln \frac{b}{a}}$$

olur.

2)Şekilde iki kapasitenin birbirine paralel olduğu görülmektedir.

$$C_1 = \frac{\epsilon_1 A_1}{d_1} = \frac{\epsilon_o \epsilon_{r1} A_1}{d_1} = \frac{8.85 \times 10^{-12} \times 3 \times 5 \times 10^{-4}}{10^{-5}} = 132.750 \times 10^{-11} \text{ F}$$

$$C_2 = \frac{\epsilon_2 A_2}{d_2} = \frac{\epsilon_o \epsilon_{r2} A_2}{d_2} = \frac{8.85 \times 10^{-12} \times 5.5 \times 10 \times 10^{-4}}{10^{-5}} = 48.6750 \times 10^{-11} \text{ F}$$

$$C = C_1 + C_2 = 132.750 \times 10^{-11} + 48.6750 \times 10^{-11} = 181.425 \times 10^{-11} \text{ F}$$

Okumuş bir budala câhil bir budaladan daha aptaldır.

Molire

BÖLÜM V LAPLACE DENKLEMİ VE ÇÖZÜMLERİ

*Haksızlık yapanın sefâleti, haksızlığa uğrayanın sefâletinden dâimâ daha fecidir.
Plato*

5.1. GİRİŞ

Bir skaler ϕ potansiyel fonksiyonunun gradyantının diverjansının Laplace denklemini verdiğini biliyoruz. Laplace denklemi, iletkenler arası sınır şartlarına âit konularda skaler fonksiyonun bulunmasına ilişkin bir metot sunmaktadır.

Maxwell denklemlerinden bir tânesinin

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho \quad (1)$$

olduğunu biliyoruz. Burada elektrik alanı skaler potansiyel cinsinden

$$\mathbf{E} = -\nabla\phi \quad (2)$$

olarak verilir. (1) ve (2) ifâdeleri

$$\nabla^2\phi = -\frac{\rho}{\epsilon} \quad (3)$$

denklemini verir ki buna *Poisson Denklemi* denir. Eğer ortamda yük yoğunluğu yoksa

$$\nabla^2\phi = -\frac{\rho}{\epsilon} \quad (4)$$

$$\nabla^2\phi = 0 \quad (5)$$

şeklinde *Laplace Denklemi* bulunur¹:

Bir skaler ϕ potansiyel fonksiyonunun gradyantının diverjansı Laplace denklemini verdiğine göre, bu fonksiyonun dik koordinat sistemlerindeki Laplace denklemleri bulunabilir. ϕ fonksiyonunun gradyanti dik kartezyen koordinat sisteminde

$$\nabla\phi = \frac{\partial\phi}{\partial x}\mathbf{a}_x + \frac{\partial\phi}{\partial y}\mathbf{a}_y + \frac{\partial\phi}{\partial z}\mathbf{a}_z, \quad (6)$$

silindirik koordinat sisteminde

$$\nabla\phi = \frac{\partial\phi}{\partial r}\mathbf{a}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial\phi}{\partial\phi}\mathbf{a}_\phi + \frac{\partial\phi}{\partial z}\mathbf{a}_z \quad (7)$$

ve küresel koordinat sisteminde

$$\nabla\phi = \frac{\partial\phi}{\partial r}\mathbf{a}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial\phi}{\partial\theta}\mathbf{a}_\theta + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial\phi}{\partial\phi}\mathbf{a}_\phi \quad (8)$$

¹ Edminister, J.A., Electromagnetics, Schaum's Outline Series in Engineering, McGraw-Hill Book Company, 1979.

olarak verilir. Bunların her biri bir vektör özelliğindedir ve bir \mathbf{A} vektörü ile temsil edilebilir. Herhangi bir \mathbf{A} vektörünün diverjansının ise, dik kartezyen koordinat sisteminde

$$\nabla \cdot \mathbf{A}(x, y, z) = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \quad (9)$$

silindirik koordinat sisteminde

$$\nabla \cdot \mathbf{A}(r, \phi, z) = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r A_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial A_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \quad (10)$$

ve küresel koordinat sisteminde

$$\nabla \cdot \mathbf{A}(r, \theta, \phi) = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 A_r) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (A_\theta \sin \theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial A_\phi}{\partial \phi} \quad (11)$$

olduğunu biliyoruz.

Bu açıklamaların ışığı altında skaler ϕ fonksiyonunun gradyantının diverjansı alınırsa ϕ fonksiyonunun Laplacian'ı, kartezyen koordinat sisteminde

$$\nabla^2 \phi = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = 0 \quad (12)$$

silindirik koordinat sisteminde

$$\nabla^2 \phi = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \phi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = 0 \quad (13)$$

ve küresel koordinat sisteminde

$$\nabla^2 \phi = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \phi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \phi^2} = 0 \quad (14)$$

olarak elde edilir.

Sınır şartları verildiğinde Laplace veyâ Poisson denkleminin çözümü tek olur.

5.2. LAPLACE DENKLEMİNİN BİR BOYUTLU KARTEZYEN KOORDİNAT SİSTEMİNDEKİ ÇÖZÜMÜ

Şekil 1'de görüldüğü gibi, iki iletken levha dik kartezyen koordinat sisteminde z eksenini dik kesecek şekilde $z=0$ ve $z=d$ noktalarından geçmek üzere birbirine paralel olarak yerleştirilsin. Başlangıçtan geçen levha topraklansın ve diğerine ise $V=500$ V'luk bir gerilim uygulansın. $V=0$ ve $V=500$ V değerleri, ele alınan bu sistemin sınır değerlerini meydana getirmektedir. Levhalar arasında yük yoğunluğu $\rho = 0$ olsun.

Böyle bir durumda levhalar arasındaki gerilim değişiminin nasıl olduğu sorulabilir. İşte sınır değerlerinin verildiği fakat yük dağılımının olmadığı böyle bir durumda levhalar arasındaki potansiyel dağılımı Laplace denklemi ile çözülebilir.

Burada hemen şunu belirtmekte fayda vardır ki, levhalar arasında yük yoğunluğunun verilmesi hâlinde Poisson denkleminin kullanılacağı açıktır. Ele alınan bu sistemde ise, yük yoğunluğu sıfır olarak alındığından Laplace denklemi kullanılacaktır.

Verilen sistemin geometrisinden görüldüğü gibi, uç etkilerinin ihmal edilmesi halinde, x ve y yönlerinde bir potansiyel değişimi yoktur. Potansiyel değişimi sâdece z doğrultusunda vardır. Böyle bir durumda (12)'deki denklem ele alınan bu sistem için

$$\nabla^2 \varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0 \quad (15)$$

olur. Buradaki φ fonksiyonu levhalar arasındaki potansiyel dağılımını gösteren potansiyel fonksiyonudur. (15), bir değişkenli bir diferansiyel denklemdir. Bunun, verilen sınır şartları için çözülmesi gerekir. Bu münâsebetle, (15)'in iki kere entegrali alınırsa,

$$\varphi = Az + B \quad (16)$$

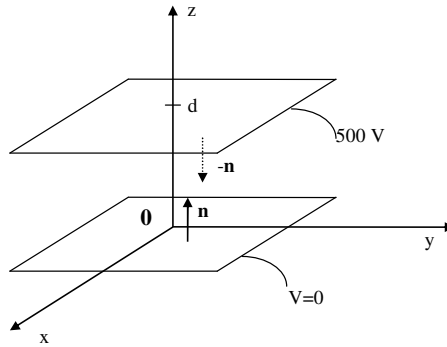
gibi bir çözüm elde edilir. Buradaki A ve B sâbitleri verilen sınır şartlarına göre belirlenirse, o zaman verilen bu sisteme âit tek çözüm elde edilmiş olur. Bu belirleme (16) denklemine sınır şartları uygulanarak kolayca yapılabilir: (13)'de $z=0$ için $V=0$ alınırsa $B=0$ bulunur. Bu takdirde denklem

$$\varphi = Az \quad (17)$$

olur. Bundan sonra bu denkleme diğer sınır şartı uygulanır: Yânî, (17)'te $z=d$ için $V=500$ V kullanılırsa, $A=500/d$ bulunur, A'nın değeri ifadede yerine yazılırsa,

$$\varphi = \frac{500}{d} z \quad (18)$$

bulunur ki, verilen bu sisteme âit istenen tek çözümdür. Bu çözüm, potansiyel fonksiyonunun levhalar arasında z değişkenine bağlı olarak değişimini vermektedir. Bu çözümden sınır şartlarının da sağlandığını hemen görmek mümkündür.



Şekil 1 Paralel iki iletken levhada sınır şartları

Ele alınan sistemde potansiyel fonksiyonu bulunduğundan sonra elektrik alan vektörü, elektrik akı yoğunluğu vektörü ve levhalardaki yüzey yük yoğunlukları da kolayca bulunabilir. Nitekim

$$\mathbf{E} = -\nabla\phi = -\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{500}{d} z \right) \mathbf{a}_z$$

veyâ

$$\mathbf{E} = -\nabla\phi = -\frac{500}{d} \mathbf{a}_z \quad \text{V/m} \quad (19)$$

olarak elektrik alan vektörü

$$\mathbf{D} = \mathbf{D}\mathbf{a}_z = \epsilon_0 \mathbf{E} = -\epsilon_0 \frac{500}{d} \mathbf{a}_z \quad \text{C/m}^2 \quad (20)$$

olarak elektrik akı yoğunluğu vektörü ve üst levha için $D_{n\ddot{u}} = -\mathbf{D} \cdot \mathbf{a}_z = -\mathbf{D}\mathbf{a}_z \cdot \mathbf{a}_z = \rho_{\ddot{u}st}$ ve alt levha için $D_{na} = \mathbf{D}\mathbf{a}_z = \rho_{alt}$ olduğu düşünülürse,

$$\rho_{\ddot{u}st} = \epsilon_0 \frac{500}{d} \quad \text{C/m}^2 \quad (21)$$

$$\rho_{alt} = -\epsilon_0 \frac{500}{d} \quad \text{C/m}^2 \quad (22)$$

bulunur².

5.3. LAPLACE DENKLEMİNİN KARTEZYEN KOORDİNAT SİSTEMİNDE İKİ BOYUTLU ÇÖZÜMÜ-KARTEZYEN ÇARPIM ÇÖZÜMÜ

Kartezyen koordinatlarda birden fazla koordinat değişkenine ilişkin Laplace denkleminin çözümü, bir değişkenli çözüm gibi, doğrudan doğruya yapılamaz. Bunun için *Seperasyon Metodu* ya da *Çarpımlar Çözümü* adı verilen bir metot kullanılır.

Farzedelim ki, skaler fonksiyon, $\phi = \phi(x, y)$ gibi, x ve y değişkenlerinin fonksiyonu olsun. Bu fonksiyonun, $\phi = X(x)Y(y)$ şeklindeki çözümünün, x ve y değişkenlerinin ayrı ayrı fonksiyonu olan iki ayrı X(x) ve Y(y) fonksiyonlarının çarpımı olarak, belli olduğunu kabul edelim. $\phi = X(x)Y(y)$ çözüm fonksiyonu, Laplace denkleminin kartezyen koordinat sistemindeki (12) ifâdesine taşınırsa,

$$\nabla^2 \phi = \frac{\partial^2 [X(x)Y(y)]}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 [X(x)Y(y)]}{\partial y^2} = 0 \quad (23)$$

veyâ

$$\frac{1}{X(x)} \frac{\partial^2 X(x)}{\partial x^2} + \frac{1}{Y(y)} \frac{\partial^2 Y(y)}{\partial y^2} = 0 \quad (24)$$

bulunur. Burada dikkat edilirse görülür ki, bu ifâde, değişkenler bakımından, birbirinden bağımsız olan iki terimin toplamından oluşmakta ve bu toplam da sıfır etmektedir. Bundan dolayı terimlerden bir tânesi, meselâ ilk terim,

² Edminister, J.A., Electromagnetics, Schaum's Outline Series in Engineering, McGraw-Hill Book Company, 1979.

$$\frac{1}{X(x)} \frac{\partial^2 X(x)}{\partial x^2} = a^2 \quad (25)$$

şeklinde a^2 gibi bir sâbite eşit yapılırsa, o zaman ikinci terimin $(-a^2)$ 'ye eşit olacağı aşikâr olarak görülür. Burada a 'ya *Seperasyon Sâbiti* denir.

Demek oluyor ki, (24) ifâdesi, aşağıdaki sâbit katsayılı iki ayrı diferansiyel denklemden meydana gelmektedir:

$$\frac{1}{X(x)} \frac{\partial^2 X(x)}{\partial x^2} = a^2 \quad (26)$$

$$\frac{1}{Y(y)} \frac{\partial^2 Y(y)}{\partial y^2} = -a^2 \quad (27)$$

Bundan sonra bu iki denklem ayrı ayrı çözülür ve çözümler çarpılırsa, iki değişkenli Laplace denkleminin kartezyen koordinat sistemindeki çarpım çözümü $\varphi = X(x)Y(y)$ şeklinde elde edilir. Şimdi bu çözümleri araştıralım:

Matematik derslerinde görülen differansiyel denklem bahislerinden bilinmektedir ki, sâbit katsayılı bir diferansiyel denklemin çözümü bir üstel fonksiyondur. O zaman (26)'nin çözümünün, $A, B, A_1, B_1, C, D, C_1$ ve D_1 birer sâbiti göstermek üzere,

$$X_1(x) = Ae^{ax} \quad (28)$$

$$X_2(x) = Be^{-ax} \quad (29)$$

ya da

$$X(x) = X_1(x) + X_2(x) = Ae^{ax} + Be^{-ax} \quad (30)$$

şeklinde olacağı açıktır.

Laplace denklemi lineer ve homojen bir denklem olduğu için, görüldüğü gibi, iki ayrı çözümün toplamı (süperpozisyonu) da bir çözüm olarak alınabilmektedir. Bu çözüm ikinci bir şekil olarak da

$$X(x) = A_1 \cosh(ax) + B_1 \sinh(ax) \quad (31)$$

yazılabilir. (23) denkleminin çözümü ise,

$$Y(y) = Ce^{jay} + De^{-jay} \quad (32)$$

veyâ

$$Y(y) = C_1 \cos(ay) + D_1 \sin(ay) \quad (33)$$

olur. Çözümlerdeki sâbitler, ele alınan sistemin sınır şartlarından elde edilir. Bu iki çözümünün çarpımının, iki değişkenli Laplace denkleminin dik kartezyen koordinat sistemindeki $\varphi = X(x)Y(y)$ fonksiyonunu vereceği açık olarak görülmektedir:

$$\varphi = X(x)Y(y) = [Ae^{ax} + Be^{-ax}] [A_1 \cosh(ay) + B_1 \sinh(ay)] \quad (34)$$

ya da

$$\varphi = X(x)Y(y) = [Ce^{jax} + De^{-jax}] [C_1 \cos(ay) + D_1 \sin(ay)] \quad (35)$$

Buradaki sâbitler, verilen sınır şartlarından bulunur. Laplace denkleminin dik kartezyen koordinat sistemindeki üç değişkenli çarpım çözümü de, yine peşin çözümün $\varphi = X(x)Y(y)Z(z)$ şeklinde kabul edilmesi ile benzer şekilde bulunabilir. Ancak burada seperasyon sâbiti bir değil iki tâne olur.

Kuvvete dayanmayan adâlet âciz, adâlete dayanmayan kuvvet zâlimdir.
Pascal

Sorular: 1) $\frac{1}{T(t)} \frac{\partial^2 T(t)}{\partial t^2} = 36$ diferansiyel denklemini çözünüz.

2) Bir potansiyelin diferansiyel denklemini $\frac{\partial^2 V(x)}{\partial x^2} = 9V(x)$ olarak veriliyor. Bu potansiyel $x=0$ için 0 V ve $x=1/3$ için $1/e$ V olmaktadır (Burada e tabii log tabanıdır). V potansiyelinin ifâdesini bulunuz.

Cevaplar:

1) Denklemin çözümü üsteldir:

$$T(t) = Ae^{6t}$$

$$T(t) = Be^{-6t}$$

ya da

$$T(t) = Ae^{6t} + Be^{-6t}$$

şeklinde olacağı gibi

$$T(t) = A_1 \cosh 6t + B_1 \sinh 6t$$

olarak da verilir.

2) $\frac{\partial^2 V(x)}{\partial x^2} = 9V(x) \rightarrow \frac{1}{V(x)} \frac{\partial^2 V(x)}{\partial x^2} = 9$ Denklemin çözümü üsteldir:

$$V(x) = Ae^{3x} + Be^{-3x}$$

1) $x=0$ için $V=0$ 'dır. Buradan $A=-B$ çıkar.

2) $x=1/3$ için $V=1/e$ olur.

$$V(x) = Ae + Be^{-1} = 1/e \rightarrow Ae^2 + B = 1$$

Buradan

$$Ae^2 - A = 1 \rightarrow A = \frac{1}{e^2 - 1} = -B \rightarrow B = \frac{1}{1 - e^2}$$

$$A = 0.1576$$

$$B = -0.1576$$

$$\frac{2}{e^2 - 1} = 0.3153$$

$$V(x) = Ae^{3x} + Be^{-3x} = \frac{1}{e^2 - 1}(e^{3x} - e^{-3x}) = \frac{2j}{e^2 - 1} \frac{(e^{3x} - e^{-3x})}{2j}$$

$$= \frac{2j}{e^2 - 1} \sin 3x = j0.3153 \sin 3x$$

veyâ

$$V(x) = 0.1576e^{3x} - 0.1576e^{-3x} = 0.3152j \frac{e^{3x} - e^{-3x}}{2j}$$

$$V(x) = j \sin 3x$$

Ev Ödevi:

1) Laplace denkleminin dik kartezyen koordinat sistemindeki üç değişkenli çarpım çözümünü araştırınız.

*Başa gelen felâketten başkasını sorumlu tutmak câhillik âlâmetidir.
Epiktotes*

"Milletimiz din gibi kuvvetli bir fâzilete sâhiptir. Bu fâzileti hiçbir kuvvet, milletimizin kalp ve vicdânından çekip alamamıştır ve alamaz."
(Atatürk'ün Söylev ve Demeçleri, II, s.66-67.)

M. KEMAL ATATÜRK

"Bilhassâ bizim dinimiz için herkesin elinde bir ölçü vardır. Bu ölçü ile hangi şeyin bu dine uygun olup olmadığını kolayca takdir edebilirsiniz. Hangi şey ki akla, mantığa halkın menfaatine uygundur; biliniz ki o bizim dinimize de uygundur. Bir şey akıl ve mantığa, milletin menfaatine, İslâm'ın menfaatine uygunsu kimseye sormayın. O şey dînidir. Eğer bizim dinimiz aklın mantığın uyduğu bir din olmasaydı mükemmel olmazdı, son din olmazdı" (Atatürk'ün Söylev ve Demeçleri, II, 1923, s. 127.)

M. KEMAL ATATÜRK

5.4. LAPLACE DENKLEMİNİN SİLİNDİRİK KOORDİNAT SİSTEMİNDEKİ ÇÖZÜMÜ

Laplace denkleminin dik silindirik koordinat sistemindeki çözümünü bulmak için yine seperasyon metodu kullanılır. Yine peşin çözüm, değişkenlerin birer fonksiyonu olarak $\varphi = R(r) \Phi(\phi) Z(z)$ şeklinde alınır ve bu çözüm

$$\nabla^2 \varphi = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0$$

denklemini sağlamalıdır:

$$\nabla^2 \varphi = \frac{R(r)Z(z)}{r} \frac{d}{dr} \left[r \frac{dR(r)}{dr} \right] + \frac{R(r)Z(z)}{r^2} \frac{d^2 \Phi(\phi)}{d\phi^2} + R(r)\Phi(\phi) \frac{d^2 Z(z)}{dz^2} = 0 \quad (36)$$

ya da

$$\nabla^2 \varphi = \frac{1}{R(r)} \frac{d^2 R(r)}{dr^2} + \frac{1}{rR(r)} \frac{dR(r)}{dr} + \frac{1}{\Phi(\phi)r^2} \frac{d^2 \Phi(\phi)}{d\phi^2} + \frac{1}{Z(z)} \frac{d^2 Z(z)}{dz^2} = 0 \quad (37)$$

bulunur. Görüldüğü gibi denklemde $R(r)$ ve $\Phi(\phi)$ değişkenlerini içeren soldan iki terim z değişkeni içermediği için en sağdaki terim diğerlerinden bağımsızdır. Bunun eşitliğin sağına alınmasıyla

$$\frac{1}{R(r)} \frac{d^2 R(r)}{dr^2} + \frac{1}{rR(r)} \frac{dR(r)}{dr} + \frac{1}{\Phi(\phi)r^2} \frac{d^2 \Phi(\phi)}{d\phi^2} = -\frac{1}{Z(z)} \frac{d^2 Z(z)}{dz^2} \quad (38)$$

elde edilir. Bu sebepten, b bir seperasyon sâbiti olmak üzere, sağdaki terim $-b^2$ 'ye eşit alınırsa, ilk plânda

$$\frac{1}{Z(z)} \frac{d^2 Z(z)}{dz^2} = b^2 \quad (39)$$

$$\frac{1}{R(r)} \frac{d^2 R(r)}{dr^2} + \frac{1}{rR(r)} \frac{dR(r)}{dr} + \frac{1}{\Phi(\phi)r^2} \frac{d^2 \Phi(\phi)}{d\phi^2} = -\frac{1}{Z(z)} \frac{d^2 Z(z)}{dz^2} = -b^2 \quad (40)$$

denklemleri bulunur. Bu son denklem yeniden düzenlenirse,

$$\frac{1}{R(r)} \frac{d^2 R(r)}{dr^2} + \frac{1}{rR(r)} \frac{dR(r)}{dr} + b^2 = -\frac{1}{\Phi(\phi)r^2} \frac{d^2 \Phi(\phi)}{d\phi^2} \quad (41)$$

elde edilir. Dikkat edilirse, burada da eşitliğin solundaki iki terim ile sağdaki terim arasında bir bağlantı olmadığı için, eşitliğin sağdaki terim bağımsızdır, m yeni bir seperasyon sâbiti olmak üzere, m^2 'ye eşit alınabilir. (41), yeniden düzenlenirse,

$$\frac{r^2}{R(r)} \frac{d^2 R(r)}{dr^2} + \frac{r}{R(r)} \frac{dR(r)}{dr} + r^2 b^2 = -\frac{1}{\Phi(\phi)} \frac{d^2 \Phi(\phi)}{d\phi^2} = m^2 \quad (42)$$

olur.

Sonuç olarak Laplace denkleminin dik silindirik koordinat sisteminde aşağıdaki diferansiyel denklemlerine varılır:

$$\frac{1}{Z(z)} \frac{d^2 Z(z)}{dz^2} = b^2 \quad (43)$$

$$\frac{1}{\Phi(\phi)} \frac{d^2 \Phi(\phi)}{d\phi^2} = -m^2 \quad (44)$$

$$\frac{d^2 R(r)}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dR(r)}{dr} + (b^2 - \frac{m^2}{r^2})R(r) = 0 \quad (45)$$

Görüldüğü gibi, seperasyon metodunda her değişken için bir diferansiyel denklem elde edilmektedir.

Bundan sonra bu 3 denklemler ayrı ayrı çözülür. (43) ve (44)'ün çözümleri (26) ve (27)'nin çözümler gibi olup

$$Z(z) = He^{bz} + Ge^{-bz} \quad (46)$$

ya da

$$Z(z) = H_1 \cosh(bz) + G_1 \sinh(bz) \quad (47)$$

ve

$$\Phi(\varphi) = Ce^{jm\varphi} + De^{-jm\varphi} \quad (48)$$

veyâ

$$\Phi(\varphi) = C_1 \cos(m\varphi) + D_1 \sin(m\varphi) \quad (49)$$

elde edilir. (45) denkleminde *Bessel Differansiyel Denklemi* denir. Bunun çözümü *Bessel Fonksiyonları* denilen kuvvet serileri şeklindedir:

$$R(r) = PJ_m(br) + QN_m(br) \quad (50)$$

$$J_m(br) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i (br/2)^{m+2i}}{i! \Gamma(m+i+1)} \quad (51)$$

$$N_m(br) = \frac{\cos(m\pi)J_m(br) - J_{-m}(br)}{\sin(m\pi)} \quad (52)$$

Burada P ve Q entegral sâbitleridirler. $J_m(br)$ ve $N_m(br)$ serileri, sırasıyla, *Birinci* ve *İkinci Tip Bessel Fonksiyonları* adını alırlar. $\Gamma(m+i+1)$ 'e gama fonksiyonu denir. Eğer n bir tam sayı olmak üzere $m=n$ alınır, güç serisindeki gama fonksiyonu $(n+i)!$ ile yer değiştirebilir. n, $m=n$ alındığında, (52)'deki $N_{m=n}(br)$ fonksiyonu, $m \rightarrow n$ limiti olarak tanımlanır.

Sonuç olarak çözüm, Laplace denkleminin dik silindirik koordinat sistemindeki çözümü

$$\varphi = R(r) \Phi(\varphi) Z(z) = [He^{bz} + Ge^{-bz}] [Ce^{jm\varphi} + De^{-jm\varphi}] [PJ_m(br) + QN_m(br)] \quad (53)$$

veyâ

$$\begin{aligned} \varphi &= R(r) \Phi(\varphi) Z(z) \\ &= [H_1 \cosh(bz) + G_1 \sinh(bz)] [C_1 \cos(m\varphi) + D_1 \sin(m\varphi)] [PJ_m(br) + QN_m(br)] \end{aligned} \quad (54)$$

olarak ortaya çıkar. İfâdelerdeki sâbitler, verilen fizikî sistemin sınır şartlarından tâyin edilirler.

5.5. LAPLACE DENKLEMİNİN KÜRESEL KOORDİNAT SİSTEMİNDEKİ ÇÖZÜMÜ

Laplace denkleminin küresel koordinatlardaki bulunan çözümlerinden özellikle φ değişkeninden ziyâde r ve θ değişkenlerine göre bulunan çözümleri daha çok kullanılmaktadır.

Laplace denkleminin küresel koordinatlardaki çözümünü bulmak için kabul edilen $\phi = R(r) \Theta(\theta)$ peşin çözümü, (11) denklemine taşırırsa

$$\nabla^2 \phi = \frac{r^2}{R} \frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{2r}{R} \frac{dR}{dr} + \frac{1}{\Theta(\theta)} \frac{d^2 \Theta(\theta)}{d\theta^2} + \frac{1}{\Theta(\theta) \tan \theta} \frac{d\Theta(\theta)}{d\theta} = 0 \quad (55)$$

bulunur. n bir tam sayı olmak üzere, bir seperasyon sâbiti olarak $n(n+1)$ seçilirse,

$$r^2 \frac{d^2 R}{dr^2} + 2r \frac{dR}{dr} - n(n+1)R = 0 \quad (56)$$

$$\frac{d^2 \Theta(\theta)}{d\theta^2} + \frac{1}{\tan \theta} \frac{d\Theta(\theta)}{d\theta} + n(n+1)\Theta(\theta) = 0 \quad (57)$$

denklemleri elde edilir. (56)'nin çözümü

$$R(r) = K_1 r^n + K_2 r^{-(n+1)} \quad (59)$$

formundadır. (58)'ün çözümünü bulmak için $\zeta = \cos \theta$ dönüşümü yapılırsa,

$$P_n(\zeta) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{d\zeta^n} (\zeta^2 - 1)^n, n=0, 1, 2, 3, \dots \quad (60)$$

elde edilir. $P_n(\zeta)$ polinomuna n . mertebeden *Legendre Polinomu* denir.

Sorular:

1) Ortak eksenli iki silindirin, şekilde görüldüğü gibi, içteki topraklanmış olup dış silindir 225 V'luk bir gerilime bağlıdır. İç silindirin yarıçapı 0.5 mm ve dış silindirin yarıçapı 1.5 mm olduğuna göre, silindirler arasındaki elektrik alan vektörünü bulunuz.

2) Eş merkezli $a=25$ cm ve $b=120$ cm yarı çaplı iki küreden içteki küre topraklanmış ve dıştaki küre -250 V'luk bir gerilime bağlanmıştır. Küreler üzerindeki elektrik yük yoğunluklarını bulunuz.

Cevaplar:

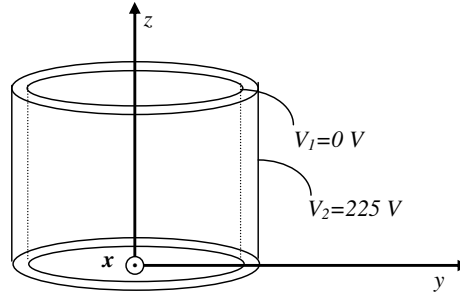
1) Bu alıştırmada potansiyel sâdece r değişkenine bağlıdır. O zaman $\phi = V$ olarak

$$\nabla^2 \phi = \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{d\phi}{dr} \right) = 0$$

veyâ A ve B birer sâbit olmak üzere

$$r \frac{d\phi}{dr} = A \rightarrow d\phi = \frac{dr}{r} A \rightarrow \phi = A \ln r + B$$

bulunur. Sınır şartları aşağıdaki gibi uygulanır



$$a) r=0.5 \times 10^{-3} \text{ m için } \varphi = 0 \rightarrow \varphi = A \ln 0.5 \times 10^{-3} + B = 0$$

$$b) r=1.5 \times 10^{-3} \text{ m için } \varphi = 225 \rightarrow \varphi = A \ln 1.5 \times 10^{-3} + B = 225$$

Bu iki bilinmeyenli denklemler çözülerek, sabitler bulunur:

$$225 = A \ln 1.5 \times 10^{-3} - A \ln 0.5 \times 10^{-3} \rightarrow 225 = A \ln 1.5 / 0.5 \rightarrow 225 = A \ln 3$$

$$A = 225 / \ln 3 = 225 / 1.0986 = 204.8$$

$$B = -A \ln(0.5 \times 10^{-3}) = 1556.66$$

Potansiyel fonksiyonu ve elektrik alanı:

$$\varphi = A \ln r + B = 204.8 \ln r + 1556.66$$

$$\mathbf{E} = -\frac{d\varphi}{dr} = -\frac{204.8}{r} \mathbf{a}_r$$

2) Küresel koordinat sisteminde potansiyel fonksiyonu değişimi

$$\nabla^2 \varphi = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \phi^2} = 0$$

olup yarı çap doğrultusu için

$$\nabla^2 \varphi = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) = 0$$

olur. Bu entegre edilirse

$$r^2 \frac{\partial \varphi}{\partial r} = A$$

ya da

$$\varphi = -\frac{A}{r} + B$$

bulunur. A ve B sabitlerinin bulunması için sınır değerleri uygulanır:

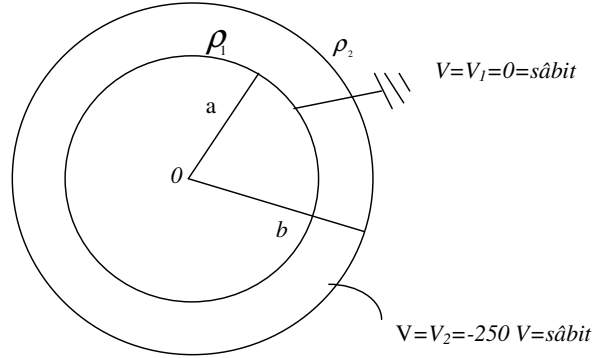
$$r=a=25 \text{ cm için } \varphi = 0 \rightarrow 0 = -\frac{A}{0.25} + B \rightarrow B = \frac{A}{0.25} = 4A$$

$$r=b=120 \text{ cm için } \varphi=0 \rightarrow -250 = -\frac{A}{1.2} + B \rightarrow -250 = -\frac{A}{1.2} + 4A$$

$$A=-78.9 \cong -79, B=-315.8 \cong -316$$

$$\varphi = -\frac{A}{r} + B = \frac{79}{r} - 316 \text{ V}$$

$$\mathbf{E} = -\nabla \varphi = -\frac{d\varphi}{dr} \mathbf{a}_r = \frac{79}{r^2} \mathbf{a}_r \text{ V/m}$$



$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} = \epsilon_0 \frac{79}{r^2} \mathbf{a}_r = 8.85 \times 10^{-12} \frac{79}{r^2} = \frac{699.15}{r^2} \times 10^{-12} \mathbf{a}_r = D_n \mathbf{a}_r \text{ C/m}^2$$

İç kürenin iç yüzeyindeki elektrik yük yoğunluğu

$$\rho_{s1} = D_n \mathbf{a}_r \cdot (\mathbf{a}_r) = D_n \Big|_{r=0.25} = \frac{699.15}{0.25^2} = 11.1864 \times 10^{-9} \text{ C/m}^2$$

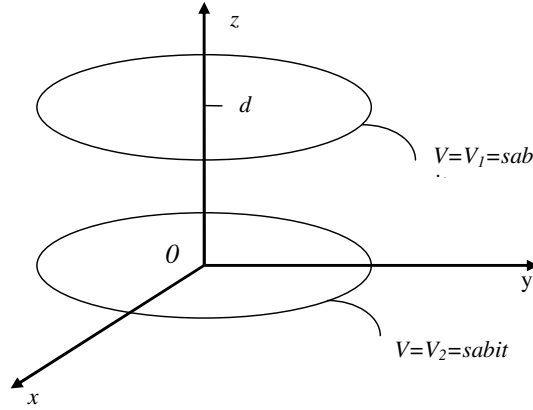
ve dış kürenin iç yüzeyindeki elektrik yük yoğunluğu

$$\rho_{s2} = D_n \mathbf{a}_r \cdot (-\mathbf{a}_r) = -D_n \Big|_{r=1.2} = -\frac{699.15}{1.2^2} = -485.5208 \times 10^{-12} \text{ C/m}^2$$

olarak bulunur.

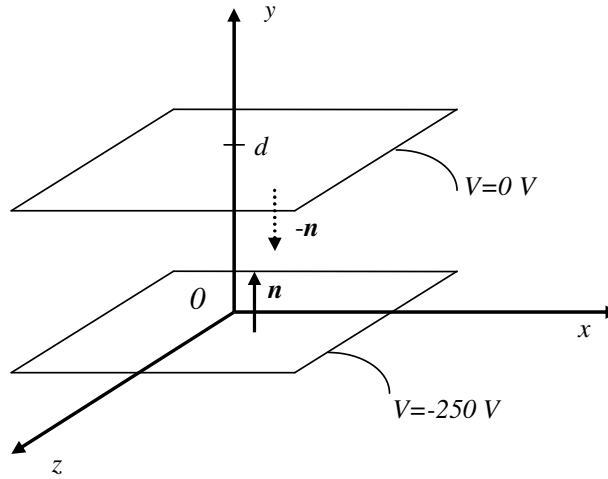
Sorular:

1a) Kenar etkilerini ihmal ederek şekilde 2 paralel iletken diskler arasındaki potansiyel fonksiyonunun dağılımını V_1 ve V_2 cinsinden bulunuz..



b) $d=5 \text{ mm}$, $V_1=350 \text{ V}$ ve $V_2=150 \text{ V}$ olduğuna göre, iletken diskler üzerindeki yük yoğunluklarını hesaplayınız.

2) Serbest uzayda iki iletken paralel dik koordinat sisteminde levhalar $y=0$ ve $y=d=0.0025 \text{ m}$ bulunduğuna göre, iletken yüzeyinin yük yoğunluklarını bulunuz.



Cevaplar:

1a) x ve y yönlerinde bir potansiyel değişimi yoktur. Potansiyel değişimi sâdece z doğrultusunda vardır. Böyle bir durumda Laplace denklem ele alınan bu sistem için

$$\nabla^2 \varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0$$

olur. Buradaki φ fonksiyonu levhalar arasındaki potansiyel dağılımını gösteren potansiyel fonksiyonudur. (1), bir değişkenli bir diferansiyel denklemdir. Bunun, verilen sınır şartlar için çözülmesi gerekir. Bu münâsebetle, (1)'in iki kere entegrali alınırsa,

$$\varphi = Az + B$$

gibi bir çözüm elde edilir. Buradaki A ve B sâbitleri verilen sınır şartlarına göre belirlenirse, o zaman verilen bu sisteme âit tek çözüm elde edilmiş olur. Bu belirleme kolayca yapılabilir: (1)'de $z=0$ için $V=V_2$ alınırsa $B=V_2$ bulunur. Bu taktirde denklem

$$\varphi = Az + V_2$$

olur. Bundan sonra bu denkleme diğer sınır şartı uygulanır: Yâni, (3)'te $z=d$ için $V=V_1$ kullanılırsa, $A = \frac{V_1 - V_2}{d}$ bulunur, A 'nın değeri ifadede yerine yazılırsa,

$$\varphi = \frac{V_1 - V_2}{d} z + V_2$$

bulunur.

1b) $d=5$ mm, $V_1=350$ V ve $V_2=150$ V olduğuna göre $\varphi = \frac{V_1 - V_2}{d} z + V_2 = \frac{350 - 150}{5 \times 10^{-3}} z + 150 = 40000z + 150$ V

$$2) \varphi = \frac{V_1 - V_2}{d} z + V_2 = \frac{0 - 250}{0.0025} z + 250 = 1000z + 250$$
 V

Kendinizi ne derece iyi anlarsanız, kendinizi sevmek için o kadar az sebep bulursunuz.

Thomas a Kempis

BÖLÜM VI MANYETİK ALANLAR

*Saatler kanatlıdır, zamanın yaratıcısına, "Allah'a", uçarlar;
onların nasıl ve hangi şekilde kullandığımızın haberini götürürler.
Milton*

6.1. GİRİŞ

Buraya kadar, statik yük ve statik elektrik alanının etkileri ve sınır şartları ele alınmıştır. Bu bölümde ise manyetostatik ve etkileri incelenecektir. Serbest elektrik yükü adında fizikî bir büyüklüğün olmasına rağmen, serbest manyetik yük yoktur. Ancak manyetik yük teorik düşünülebilir. Bu sebepten dolayı, bir manyetik olay, elektrik olayından tamâmen farklıdır.

Hareketli elektrik yükü korunumunun akım yoğunluğuyla ilişkisinin $\nabla \cdot \mathbf{J} = -\frac{\partial \rho(t)}{\partial t}$ süreklilik denklemiyle sağlandığını biliyoruz. Uzayın her hangi bir yerinde kararlı (stasyoner) manyetik olay, net akım yoğunluğunun sâbit olmasıyla sağlanır. Manyetostatikğin gerçekleşmesi $\nabla \cdot \mathbf{J} = 0$ şartı ile oluşur.

Elektrik alanının, elektrik yüklerinin bir sonucu olduğu gibi, manyetik alan da aslında elektrik yüklerinin bir sonucudur.

Elektrik alanında malzemeleri dielektrik sâbitinin temsil etmesine karşı, manyetik alanda malzemeleri manyetik geçirgenlik sâbiti temsil etmektedir. $\mu = \mu_r \mu_0$ ile verilen manyetik geçirgenlik sâbitindeki μ_r , izâfî manyetik geçirgenlik sâbiti ve μ_0 ise, boşluğun manyetik geçirgenlik sâbiti olarak bilinmektedir ve h/m boyutundadır. MKSA birim sisteminde boşluğun izâfî manyetik geçirgenlik sâbiti 1'dir ve birimsizdir. Boşluğun μ_0 manyetik geçirgenlik sâbiti ise evrensel bir sabittir, $4\pi \times 10^{-7}$ h/m değerindedir. μ_r 'in birden büyük olduğu malzemelere *Paramanyetik Malzemeler*, birden küçük olduğu malzemelere *Diyamanyetik Malzemeler* denir. Eğer izâfî manyetik geçirgenlik sâbiti birden çok büyük ise, bu tür malzemeler *Ferromanyetik Malzemeler* adını alırlar.

Elektrikteki elektrik yüküne karşı manyetik sahâda da teorik olarak skaler bir manyetik kütle tanımlanmıştır. Yâni, kutup şiddeti adı da verilen manyetik kütle, manyetik sahâda çevresinde bir manyetik tesir meydana getiren bir büyüklüktür. Bu tesir sahâsına *Manyetik Alan* denir. Manyetik alan, manyetik kütleden uzaklaştıkça tıpkı elektrik alanında olduğu gibi, alanın etkisi azalır.

Bir manyetik alan içinde manyetik alan şiddeti, +1 Wb'lik bir manyetik kütleyle etki eden kuvvet olarak tanımlanır. Bu sebeple \mathbf{H} ile gösterilebilecek olan manyetik alan, \mathbf{F} kuvvet olmak üzere, $\mathbf{H} = \mathbf{F}/m$ ile târif edilebilir. Bir m manyetik kütleden R kadar uzaklıkta bulunan her hangi bir uzay noktasında meydana gelen manyetik alan, elektrik alanına benzer bir şekilde, tanımlanabilir: $\mathbf{H} = \frac{m}{4\pi\mu R^2} \mathbf{a}_r = \frac{m}{4\pi\mu R^3} \mathbf{R}$. Burada \mathbf{a}_r , \mathbf{R} vektörü doğrultusundaki birim vektördür.

Işığın hızı c ile gösterilmek üzere, malzemelerin dielektrik sâbitleri ile manyetik geçirgenlik sâbitleri arasında *Özel Rölativite Teorisi*'nin bir sonucu olarak bulunan $\mu_0 \epsilon_0 = \frac{1}{c^2}$ ilişkisinin de bulunduğunu zikretmekte fayda vardır.

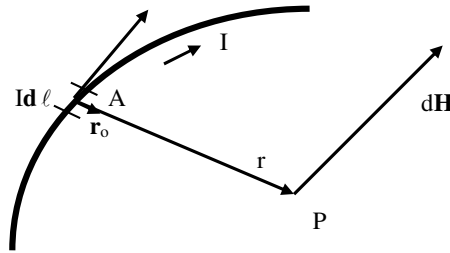
6.2. BIOT-SAVART KÂNUNU VE MANYETİK ALANIN KAYNAĞI

1819'da *Oersted*, ilk defâ içinden elektrik akımı akan bir iletken civârında bir manyetik alanın varlığını görmüştür. Bu etki, 1820'de *Biot-Savart*'ın çalışmalarının sonucunda aşağıdaki şekilde ifâde edilmiştir:

“İçinden akım akan bir iletkenin civârında bir etki meydana gelir ki buna manyetik alan, \mathbf{H} , denir.”

Şekil 1'de, içinden akım akan bir iletkenin A noktasından r kadar uzaklıkta bulunan bir P noktası görülmektedir. A noktasındaki $\mathbf{Id} \ell$ akım elemanı P noktasında bir $d\mathbf{H}$ vektör manyetik alanı meydana getirir. Burada \mathbf{r}_0 , $\mathbf{r}_0 = \mathbf{r}/|\mathbf{r}|$ ile verilen birim vektördür. Bu alan, birim vektör ile A noktasında iletkene teğet olan doğrunun meydana getirdiği düzleme diktir. Alanın yönü sağ el kuralına göre bulunur.

Sağ elin baş parmağı akım yönü ile çakışacak şekilde sağ el iletkeni kavradığında, diğer dört parmak, birim vektör ile A noktasında iletkene teğet olan doğrunun meydana getirdiği düzlemin birim normalinin yönünü gösterir. Yönü birim normalin yönü ile çakışan akımların yönü pozitif alınır.



Şekil 1 İçinden akım akan iletken ve P noktasında meydana gelen manyetik alan

Ev Ödevi:

- 1) Duran bir statik elektrik yükünün civârında meydana gelen etkiye ne denir?
- 2) Hareketli bir elektrik yükünün civârında meydana gelen etkiye ne denir?

$\mathbf{Id} \ell$ akım elemanının, A noktasından r kadar uzaklıkta bulunan P noktasında meydana getirdiği $d\mathbf{H}$ diferansiyel manyetik alan

$$d\mathbf{H} = \frac{I}{4\pi} \frac{\mathbf{d}\ell \wedge \mathbf{r}_0}{r^2} \quad (1)$$

veyâ manyetik alan

$$\mathbf{H} = \int_{\ell} \frac{I}{4\pi} \frac{\mathbf{d}\ell \wedge \mathbf{r}_0}{r^2} \quad (2)$$

olarak elde edilir. $d\mathbf{B}$ diferansiyel manyetik akı yoğunluğu vektörü (indüksiyon vektörü) ise

$$d\mathbf{B} = \mu \frac{I}{4\pi} \frac{d\boldsymbol{\ell} \wedge \mathbf{r}_o}{r^2} \quad (3)$$

ya da manyetik akı yoğunluğu vektörü

$$\mathbf{B} = \int_{\ell} \mu \frac{I}{4\pi} \frac{d\boldsymbol{\ell} \wedge \mathbf{r}_o}{r^2} \quad (4)$$

ile verilir. (3) ve (4) arasında

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H} \quad (5)$$

ilişisini olduğu kolayca görülebilir. Bunun birimi Wb/m^2 'dir. Manyetik alan, manyetik enerjiyi sağlar. Bu enerji manyetik alanda depo edilir.

Sorular

1) Şekilde görüldüğü gibi, yarıçapı a olan çember şeklindeki bir iletken I akımı aktığına göre,

a) Çemberin merkezinden L kadar uzaklıkta eksen üzerindeki bir noktada meydana gelen manyetik alanı bulunuz.

b) Çemberin merkezinde meydana gelen manyetik alanı bulunuz.

Cevap:

1a) Çember üzerinde alınan $Id\boldsymbol{\ell} = Iad\varphi\mathbf{a}_\varphi$ akım elemanının P noktasında meydana getirdiği manyetik alan

$$d\mathbf{H} = \int_{\ell} \frac{I}{4\pi} \frac{d\boldsymbol{\ell} \wedge \mathbf{R}_o}{R^2}$$

ile verilir. Burada

$$\mathbf{R}_o = \frac{\mathbf{R}}{|\mathbf{R}|} = \frac{\mathbf{R}}{R} = \frac{L\mathbf{a}_z - a\mathbf{a}_r}{\sqrt{a^2 + L^2}}$$

ile verilen birim vektördür.

$$d\mathbf{H} = \frac{I}{4\pi} \frac{d\boldsymbol{\ell} \wedge \mathbf{R}_o}{R^2} = \frac{I}{4\pi} \frac{Iad\varphi\mathbf{a}_\varphi \wedge (L\mathbf{a}_z - a\mathbf{a}_r)}{R^3} = \frac{I}{4\pi} \frac{Iad\varphi\mathbf{a}_\varphi \wedge L\mathbf{a}_z - Iad\varphi\mathbf{a}_\varphi \wedge a\mathbf{a}_r}{R^3} = \frac{I}{4\pi} \frac{Iad\varphi L\mathbf{a}_r + Ia^2 d\varphi\mathbf{a}_z}{R^3}$$

Burada z eksenine göre bir simetri olduğundan, r 'ye bağlılık yoktur. Dolayısıyla birinci terim ortadan kalkar:

$$d\mathbf{H} = \frac{I}{4\pi} \frac{d\boldsymbol{\ell} \wedge \mathbf{R}_o}{R^2} = \frac{I}{4\pi} \frac{Ia^2 d\varphi\mathbf{a}_z}{R^3}$$

ya da

$$d\mathbf{H} = \frac{I}{4\pi} \frac{d\boldsymbol{\ell} \wedge \mathbf{R}_o}{R^2} = \frac{Ia^2 d\varphi\mathbf{a}_z}{4\pi R^3} = \frac{Ia^2 d\varphi\mathbf{a}_z}{4\pi(L^2 + a^2)^{3/2}}$$

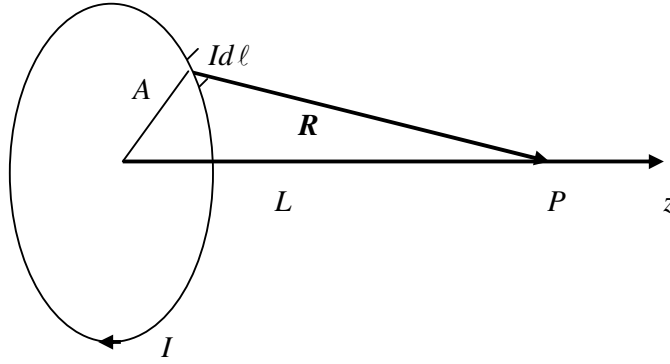
veyâ

$$\mathbf{H} = \int_{\varphi=0}^{2\pi} \frac{Ia^2 d\varphi \mathbf{a}_z}{4\pi(L^2 + a^2)^{3/2}} = \frac{Ia^2}{2(L^2 + a^2)^{3/2}} \mathbf{a}_z$$

bulunur.

b) Çemberin merkezinde meydana gelen manyetik alanı bulmak için $L=0$ alınır:

$$\mathbf{H} = \frac{Ia^2}{2(L^2 + a^2)^{3/2}} \mathbf{a}_z = \frac{I}{2a} \mathbf{a}_z$$



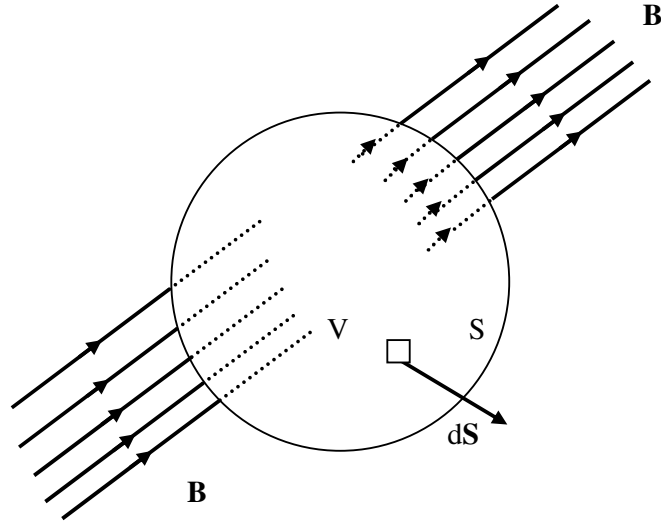
Manyetik akı yoğunluğu vektörü bir yüzeyden manyetik akı geçirir. Bu, skalerdir ve Wb/m^2 birimine sâhiptir, Buna Tesla (T) da denir:

$$\psi = \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} \quad (6)$$

Hacmi V olan kapalı bir S yüzeyinin içine giren manyetik akı, o kapalı yüzeyden tamâmen dışarı çıkar (Şekil 2). Dolayısıyla, V hacim bölgesinde ne kaynak ve ne de kuyu vardır ve

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad \psi = \oint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0 \quad (7)$$

Sonuç olarak, (3)'den görüldüğü gibi, manyetik alan, hareketli elektrik yüklerinden oluşan elektrik akımının, dolayısıyla, elektrik yüklerinin bir sonucudur. Yük hareketi ortadan kalkarsa, manyetik alan da yok olur. Bunun yerine, hareketsiz yüklerden dolayı, statik elektrik alanı ortaya çıkar.



Şekil 2 Hacmi V olan Kapalı bir S yüzeyinin içine giren ve çıkan manyetik akı

6.3. MANYETİK ALAN KUVVETİ

Düzgün bir manyetik akı yoğunluğunun bulunduğu bir ortama, manyetik akı yoğunluğu vektörü ile θ açısı yaparak \mathbf{v} hızı ile giren bir Q elektrik yüklü cisme manyetik alan tarafından bir kuvvet uygulanır (Şekil 3). Bu kuvvetin doğrultusu indüksiyon vektörü ile hız vektörünün belirttiği düzleme diktir.

Şekil 2'deki manyetik alan kuvvetinin ifâdesi

$$\mathbf{F} = Q(\mathbf{v} \wedge \mathbf{B}) \quad (8)$$

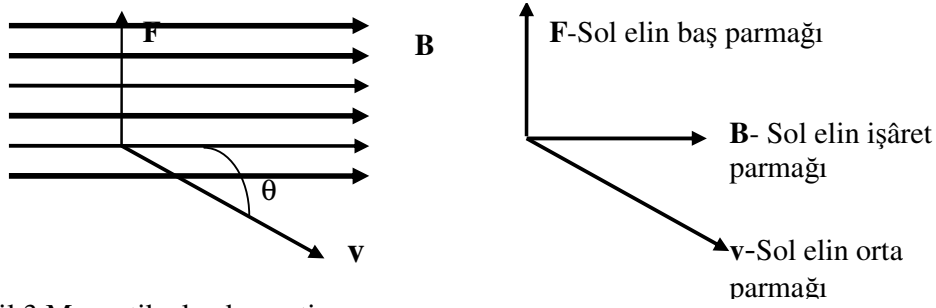
ile verilir. Bu formüle göre, hareket halindeki bir tâneçğin doğrultusu manyetik alan tarafından değiştirilebilir. İfâdedeki \mathbf{v} hızı ve bunun sonucu olan tâneçğin kinetik enerji değişmez. Bu, elektrik alanına âit sâbit cinsinden bir büyüklüktür ve tâneçiğe uygulanan $\mathbf{F} = Q\mathbf{E}$ kuvvetinden ileri gelir. (8)'in büyüklüğü

$$|\mathbf{F}| = F = Q|\mathbf{v}||\mathbf{B}|\sin\theta \quad (9)$$

olur.

Ev Ödevi:

- 1) Düzgün manyetik alanı tarif ediniz
- 2) Şekil 2'deki manyetik alan kuvvetinin yönü nasıl bulunur?

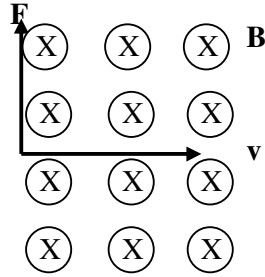


Şekil 3 Manyetik alan kuvveti

Tâneçik düzgün \mathbf{B} alanına dik olarak girerse, Yâni $\theta = 90^\circ$ ise, o zaman

$$\mathbf{F} = Q\mathbf{v} \wedge \mathbf{B} \quad (10)$$

olur ki, burada yükün pozitif olduğu farzıyla, kütlesi m ile gösterilen tâneçik dâire şeklinde bir dönmeye zorlanır (Şekil 4). Yâni, \mathbf{B} alanına dik olarak v hızı ile giren tâneçik yukarı doğru bir kuvvete maruz kalacağından bir dönme hareketine zorlanır. Dönme hareketi bir merkez kaç kuvveti doğurur. Tanecik iki kuvvetin bileşkesi doğrultusunda hareket ederek bir daire çizer.



Şekil 4 Yörüngesi bir dâire olan taneciğin hareketi

Bileşke kuvvet iki kuvvetin eşitliğinden doğar:

$$QvB = m \frac{v^2}{r} \quad (11)$$

Buradan tâneçik çizdiği dâirenin yarı çapı

$$r = \frac{mv}{|QB|} = \frac{p}{|QB|} \quad (12)$$

olarak elde edilir. İfâdedeki p tâneçik lineer momentumudur.

Eğer ortamda aynı zamanda bir de elektrik alanı varsa tâneçik elektrik alan kuvveti ile manyetik alan kuvvetinin her ikisinin birden etkisi altına girer. Tâneçiğe etki eden toplam kuvvet

$$\mathbf{F} = Q\mathbf{E} + Q(\mathbf{v} \wedge \mathbf{B}) = Q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \wedge \mathbf{B}) \quad (13)$$

olur.

Bir manyetik alan içinde bulunan ve içinden akım akan bir iletkene (8)'den dolayı bir kuvvet uygulanır. Çünkü (8)'de bulunan q yükü, aslında iletkenin akımını meydana getiren yüklerdir. Bu yüzden $Q=It$ yazılırsa

$$\mathbf{F} = Q(\mathbf{v} \wedge \mathbf{B}) = It(\mathbf{v} \wedge \mathbf{B}) = I(\mathbf{L} \wedge \mathbf{B}) \quad (14)$$

elde edilir ki $L=vt$ olup iletkenin boyunu gösterir. (14) formülünün anlamı şudur:

Bir manyetik alan içinde bulunan ve akım akıtan bir iletkenin manyetik alan içindeki L uzunluğuna bir F kuvveti uygulanır. Bu elektrik motorlarının çalışma prensibini verir.

Manyetik alanın doğurduğu manyetik kuvvet tarafından endüklenen elektrik alanı E_m ile gösterilirse,

$$\mathbf{E}_m = \frac{\mathbf{F}}{Q} = \mathbf{v} \wedge \mathbf{B} = \frac{\mathbf{U}}{\mathbf{L}} \quad (15)$$

bulunur. Burada U , iletkenin uçları arasında oluşan elektrik gerilimidir. Bu da jeneratörün çalışma prensibidir.

Ev Ödevi:

- 1) Mekanik enerji nedir? Nasıl elde edilir?
- 2) Jeneratör nedir?

Sorular:

1) Şekilde görüldüğü gibi 5 ve 65 A'lık iki akım uzunlukları 8 ve 18 metre olan paralel iki iletken farklı yönde akmaktadır. Aralarındaki uzaklık 7 m olan bu iki akım sisteminin birbirine uyguladığı kuvveti hesaplayınız.

Cevaplar:

1) İletkenlerin uzunlukları L_1, L_2 , aralarındaki uzaklık r ve içinden akan akımlar sırasıyla I_1, I_2 olsun. Birini iletkenin I_1 akımı r kadar uzaklıkta bulunan L_2 iletkeninin bulunduğu noktalarda boşluk ortamında B_1 indüksiyon alanını meydana getirir:

$$B_1 = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi r}$$

Bu alan içinden I_2 akımı akan L_2 iletkenine

$$\mathbf{F}_1 = I_2(\mathbf{L}_2 \wedge \mathbf{B}_1) = I_2(L_2 \mathbf{a}_z \wedge B_1 \mathbf{a}_\phi)$$

kuvvetini uygular. Burada $\mathbf{a}_z \wedge \mathbf{a}_\phi = -\mathbf{a}_r$ olduğu için bu kuvvet

$$\mathbf{F}_1 = -I_2 L_2 B_1 \mathbf{a}_r = -I_2 L_2 \frac{\mu_0 I_1}{2\pi r} \mathbf{a}_r$$

olur.

İkinci iletkenin akan I_2 akımı da r kadar uzaklıkta bulunan L_1 iletkeninin bulunduğu noktalarda boşluk ortamında aşağıdaki B_2 indüksiyon alanını meydana getirir:

$$B_2 = \frac{\mu_0 I_2}{2\pi r}$$

Bu alan içinden I_1 akımı akan L_1 iletkenine

$$\mathbf{F}_2 = I_1 (L_1 \wedge B_2) = I_1 (L_1 \mathbf{a}_z \wedge B_2 \mathbf{a}_\phi)$$

kuvvetini uygular. Burada $\mathbf{a}_z \wedge \mathbf{a}_\phi = -\mathbf{a}_r$ olduğu için bu kuvvet

$$\mathbf{F}_2 = -I_1 L_1 B_2 \mathbf{a}_r = -I_1 L_1 \frac{\mu_0 I_2}{2\pi r} \mathbf{a}_r$$

olur.

Sonuç olarak görülmektedir ki, $I_{1-2} = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi r}$ olmak üzere birini iletkenin akan I_1 akımı r kadar uzaklıkta bulunan L_2 iletkenine

$$\mathbf{F}_1 = -I_2 L_2 B_1 \mathbf{a}_r = -L_2 I_{1-2} \mathbf{a}_r$$

kuvvetini ve ikinci iletkenin akan I_2 akımı r kadar uzaklıkta bulunan L_1 iletkenine

$$\mathbf{F}_2 = -I_2 L_2 B_1 \mathbf{a}_r = -L_1 I_{1-2} \mathbf{a}_r$$

kuvvetini uygular.

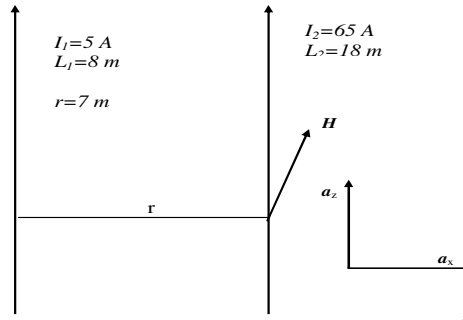
Akımlar iletkenlerden ters yönde akarlarsa o zaman bu kuvvetler pozitif olur. Şimdi alıştırmada verilen değerler

$$\mathbf{F}_1 = I_2 L_2 B_1 \mathbf{a}_r = I_2 L_2 \frac{\mu_0 I_1}{2\pi r} \mathbf{a}_r$$

formülünde kullanılırsa istenen kuvvet hesaplanmış olur:

$$\mathbf{F}_1 = I_2 L_2 \frac{\mu_0 I_1}{2\pi r} \mathbf{a}_r = 5 \times 65 \times 18 \frac{4\pi \times 10^{-7}}{2\pi \times 7} \mathbf{a}_r = 1.67 \times 10^{-4} \mathbf{a}_r \text{ N}$$

Verilen iletkenler birbirlerini yarı çap doğrultusunda bu kuvvetle iterler.



6.4. AMPER KÂNUNU VE MANYETOMOTOR KUVVETİ

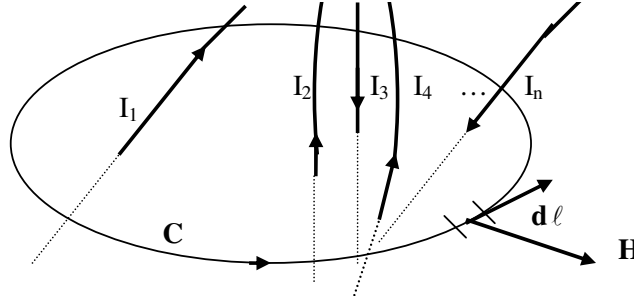
Bir manyetik alan vektörünün bir kapalı çevre boyunca bir boyutlu entegrali o çevre içinden geçen akımların cebrik toplamına eşittir. Şekil 5’de \mathbf{H} manyetik alanı içinde $I_1, I_2, I_3, \dots, I_n$ akımları C kapalı çevrimi ile çevrelenmiştir. Manyetik alanın bu kapalı çevrim boyunca entegralinin değeri, adı geçen bu akımların cebrik toplamına eşit olur. Yâni, $i=1, 2, 3, \dots, n$ olmak üzere

$$\oint_C \mathbf{H} \cdot d\boldsymbol{\ell} = \sum_{i=1}^n I_i \quad (15)$$

elde edilir. Bu ifâde indüksiyon vektörü için

$$\oint_C \mathbf{B} \cdot d\boldsymbol{\ell} = \mu \sum_{i=1}^n I_i \quad (16)$$

olur. Cebrik toplam için akımların aktığı yönlerden biri pozitif seçilir. Bunun için sağ el kâidesi kullanılabilir. Sağ elin baş parmağı seçilen kapalı çevrimin yönü ile çakışacak şekilde çevrim el ayası ile kavrandığında sağ elin diğer 4 parmağı kapalı çevrimin meydana getirdiği düzlemin birim normal vektörünün yönünü gösterir. Yönleri birim normal vektörün yönü ile uyuşan akımlar cebrik toplamda pozitif, diğer akımlar negatif alınır.



Şekil 5 Amper kânunu

Nokta şeklindeki m manyetik kütesinin R kadar uzaklıktaki herhangi bir noktada meydana getirdiği manyetik potansiyel $V_m = \frac{m}{4\pi\mu R}$ olup $H = \frac{m}{4\pi\mu R^2} = V/R$ elde edilir ki, buradan şu sonucu elde edebiliriz:

Burada nokta şeklindeki m manyetik kütesinin V_m manyetik potansiyeli, sonsuzun referans (sonsuzun potansiyeli sıfır) alınmasıyla hesaplanan manyetik potansiyel farkını (gerilimini) gösterir. Buna mutlak manyetik potansiyel denebilir. Buna göre, manyetik potansiyel, birim manyetik kütle başına yapılan iş olarak tanımlanır.

Yani potansiyel farkı birim yükün, $R=\ell$ kadar götürülmesinden olayı yapılan manyetik işe eşittir. Dolayısıyla genel olarak

$$\varphi = V = H \ell \quad (17)$$

yazılabilir. Başka bir ifadeyle, bu manyetik potansiyel farkı, stasyonery manyetik alanının, pozitif birim manyetik kütle, meselâ herhangi bir A noktasından herhangi bir B noktasına götürmek için bu pozitif birim manyetik kütle üzerine yaptığı iştir ve

$$\varphi = V_{AB} = \int_A^B \mathbf{H} \cdot \mathbf{d} \ell \quad (18)$$

Elektrikte tanımlanan elektromotor kuvvetine benzer şekilde, manyetik alanla alınan yolun çarpımına *Manyetomotor Kuvveti* veyâ *Manyetik Gerilim* denmektedir. Buna göre manyetik gerilim

$$\varphi = \varphi_a - \varphi_b = V_{ab} = \int_a^b \mathbf{H} \cdot \mathbf{d} \ell \quad (19)$$

olur. Bunun birimi A'dir.

Kapalı bir çevrime âit manyetik gerilimin, statik elektrik alanında kapalı bir çevrime âit elektrik gerilimi gibi, her zaman sıfır olmadığı kolayca görülebilir. Bu bakımdan, statik elektrik alanın koruyuculuk özelliği gibi, stasyonery manyetik alana âit bir koruyuculuk özelliğinden bahsedilemez.

Tatbikatta aynı yönde N tâne sarımdan geçen stasyonery I akımı kapalı bir eğri ile zincirlenirse, o zaman meydana gelen NI manyetomotor kuvvetinin birimi Amper-sarım, AS, olur. Magnetik devrelerde çok kullanılan manyetomotor kuvveti τ ile gösterilebilir:

$$\tau = \int_a^b \mathbf{H} \cdot \mathbf{d} \ell = \sum_i I_i = NI \quad (20)$$

Uzayın manyetik potansiyelleri eşit değerde olan noktalar tarafından meydana getirilen yüzeye eş manyetik yüzey denir. Meselâ, doğru şeklinde çok uzun bir iletkenin eş manyetik alan yüzeyleri, ortak merkezli silindir yüzeyleri olduğundan dolayı, eş potansiyel yüzeyler, Şekil 6'de görüldüğü gibi, bunlara dik olan düzlemler şeklindedirler. Burada $\theta=0$ düzleminin manyetik potansiyeli $V_0=0$ olarak alınsın. Buna göre manyetik alanı gösteren silindir kesitinin her hangi bir P noktasından geçen manyetik potansiyel $V_{0P} = V_0 - V_P = -V_P$ olur. Diğer taraftan, $Hdl = dV_{0P} = Id\theta / 2\pi \rightarrow V_{0P} = I\theta / 2\pi$ olacağı için

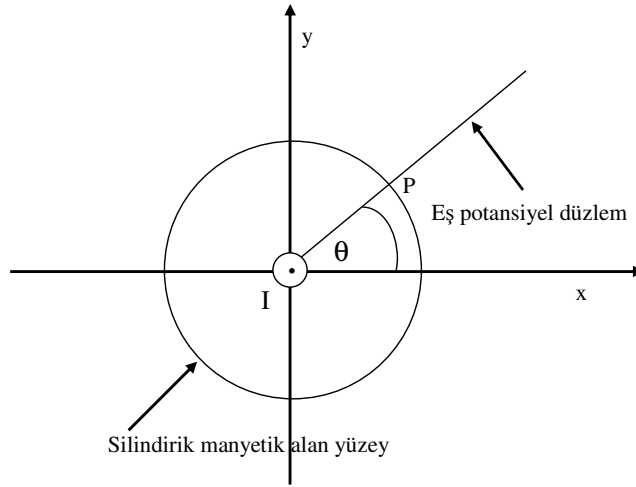
$$V_P = -I\theta / 2\pi \quad (21)$$

olarak iletkenin z-ekseni boyunca uzanan manyetik potansiyeli elde edilir. Eğer akım yönü okuyucudan kağıt düzlemine doğru alınırsa manyetik potansiyel

$$V_p = I\theta / 2\pi \quad (22)$$

olur.

Sonuç olarak manyetik eş potansiyel yüzeylerin $\theta = \text{sabit}$ düzlemlerinden meydana geldiği görülmektedir. Bu düzlemlerin x-y düzlemindeki izdüşümleri yarı çap doğrultusundaki manyetik eş potansiyel çizgileri verir. Görüldüğü gibi, eş manyetik potansiyel düzlemi üzerindeki manyetik potansiyel değerleri, her bir turda ($\theta = 0$ düzlemini geçer geçmez) I kadar katlama gösterir.



Şekil 6 Eş manyetik düzlemler

Sâbit bir Q yükünün, yükün değerlerine göre meydana gelen, elektrik alan vektörlerinin (çizgilerinin), yük merkezli yarı çap doğrultusunda ve eş potansiyel yüzeylerinin elektrik alan vektörlerine (çizgilerine), dik olan yük merkezli küre yüzeyleri olmasına karşılık, içinden stasyoner I akımı akan çok uzun bir iletkenin, akımın değerine bağlı olarak meydana gelen, manyetik alan çizgilerinin, Şekil 6'de görüldüğü gibi, merkezleri bir birer silindir yüzeyleri ve eş manyetik potansiyel yüzeylerinin ise, eksenden geçerek silindir yüzeylerini dik olarak kesen birer düzlemler olduğu ortaya çıkar.

Ev Ödevi:

- 1) İçinden I akımı akan doğru şekilde sonsuz uzun bir iletkenden r kadar uzaklıkta bulunan manyetik alanın geometrik yeri nedir?
- 2) Manyetik alanın yönü nasıl bulunur.

Sorular:

- 1) Sonsuz uzun bir iletkenden akan I akımının iletkenden r kadar uzaklıktaki P noktasında meydana getirdiği manyetik alanın ifâdesini bulunuz.

Cevaplar:

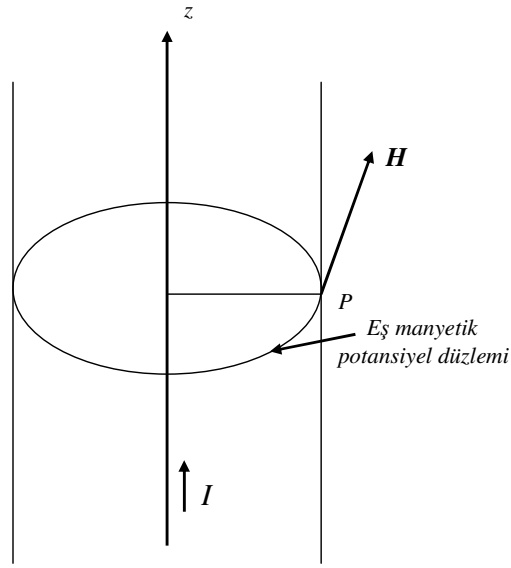
1) Verilen sisteme Amper kânunu uygulanır: P noktasından geçen r yarıçaplı bir çember kapalı bir eğri oluşturur ve akımı çevreler.

$$\oint_C \mathbf{H} \cdot d\boldsymbol{\ell} = \sum_{i=1}^n I_i = I$$

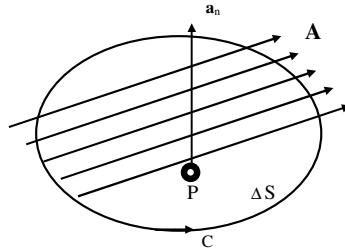
P noktasındaki manyetik alan, akım sâbit olduğundan, sâbittir, entegral dışına alınabilir. O zaman entegral hesaplanırsa, bu $2\pi r$ eder. Buradan

$$H(2\pi r) = I \rightarrow H = \frac{I}{2\pi r} \rightarrow \mathbf{H} = \frac{I}{2\pi r} \mathbf{a}_\varphi$$

bulunur.

**6.5. BİR VEKTÖRÜN ROTASYONU**

Bir vektör alanının diverjans özelliğinden başka bir de rotasyon özelliği vardır. Şekil 7'de bir \mathbf{A} vektör alanı içinde herhangi bir kapalı C eğrisi ile sınırlanmış bir S yüzeyi ele alalım. \mathbf{a}_n birim vektörünün yönü sağ el kuralı ile belirlenebilir. Sağ elin baş parmağı kapalı çevrimin yönünde olacak şekilde kapalı eğri sağ el ile kavrandığında, diğer dört parmak birim normal vektörün yönünü gösterir.



Şekil 7 \mathbf{A} vektör alanında C kapalı çevrimi

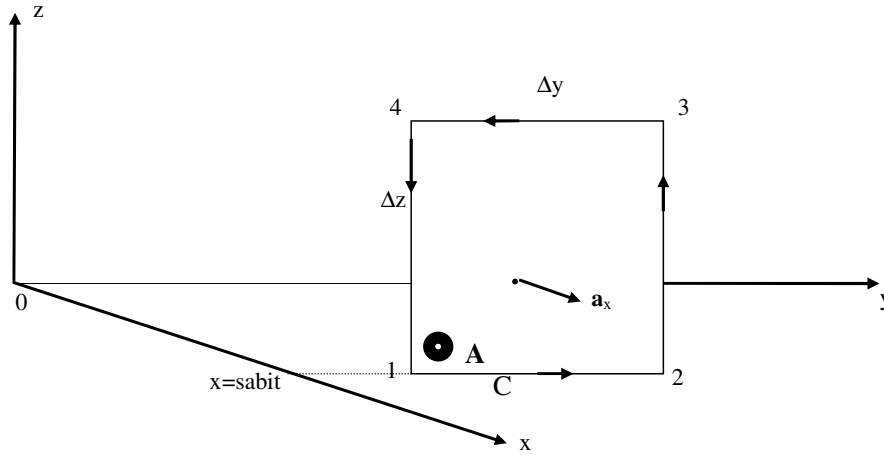
\mathbf{A} vektörünün rotasyonelinin \mathbf{a}_n birim vektörü doğrultusundaki izdüşümü

$$(\nabla \wedge \mathbf{A}) \cdot \mathbf{a}_n = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\oint \mathbf{A} \cdot d\boldsymbol{\ell}}{\Delta S} \quad (23)$$

olarak tanımlanır.

Koordinat sistemlerinde rot $\mathbf{A} = \nabla \wedge \mathbf{A}$ tamamen koordinat eksenleri doğrultusundaki üç bileşen tarafından belirlenir. Meselâ, kartezyen koordinat sisteminde rotasyonun x-bileşeni aşağıdaki şekilde tanımlanır:

$$(\nabla \wedge \mathbf{A}) \cdot \mathbf{a}_x = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\oint \mathbf{A} \cdot d\boldsymbol{\ell}}{\Delta S} \quad (24)$$



Şekil 8 \mathbf{A} vektörü çevreleyen bir kapalı çevrim

Şekil 8'deki kapalı çevrim meselâ, kare ya da dikdörtgen olsun Eğer kartezyen koordinat sistemindeki \mathbf{A} vektörü

$$\mathbf{A} = A_x \mathbf{a}_x + A_y \mathbf{a}_y + A_z \mathbf{a}_z \quad (25)$$

1 köşesine çok yakın olarak alınır, o zaman ΔS kapalı yüzeyinin içinden geçen vektörün bu kapalı yüzey üzerinden entegrali

$$\oint_{\Delta S} \mathbf{A} \cdot d\boldsymbol{\ell} = \int_1^2 \mathbf{A} \cdot d\boldsymbol{\ell} + \int_2^3 \mathbf{A} \cdot d\boldsymbol{\ell} + \int_3^4 \mathbf{A} \cdot d\boldsymbol{\ell} + \int_4^1 \mathbf{A} \cdot d\boldsymbol{\ell} \quad (26)$$

veyâ kabaca

$$\oint_{\Delta S} \mathbf{A} \cdot d\boldsymbol{\ell} = A_y \Delta y + (A_z + \frac{\partial A_z}{\partial y} \Delta y) \Delta z + (A_y + \frac{\partial A_y}{\partial z} \Delta z) (-\Delta y) + A_z (-\Delta z) \quad (27)$$

ya da

$$\oint_{\Delta S} \mathbf{A} \cdot d\ell = \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) \Delta y \Delta z \quad (28)$$

olur. (23)'den $\text{rot } \mathbf{A} = \nabla \wedge \mathbf{A}$ 'nun kartezyen koordinat sistemindeki x-bileşeni

$$(\nabla \wedge \mathbf{A}) \cdot \mathbf{a}_x = \lim_{\Delta y \Delta z \rightarrow 0} \frac{\oint_{\Delta S} \mathbf{A} \cdot d\ell}{\Delta S} = \lim_{\Delta y \Delta z \rightarrow 0} \frac{\oint_{\Delta y \Delta z} \mathbf{A} \cdot d\ell}{\Delta y \Delta z} = \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \quad (29)$$

olarak elde edilir. Dâirevî dönüşümle diğer bileşenler de aşağıdaki şekilde elde edilebilir:

$$(\nabla \wedge \mathbf{A}) \cdot \mathbf{a}_y = \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \quad (30)$$

$$(\nabla \wedge \mathbf{A}) \cdot \mathbf{a}_z = \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \quad (31)$$

Buradan

$$\begin{aligned} & [(\nabla \wedge \mathbf{A}) \cdot \mathbf{a}_x] \mathbf{a}_x + [(\nabla \wedge \mathbf{A}) \cdot \mathbf{a}_y] \mathbf{a}_y + [(\nabla \wedge \mathbf{A}) \cdot \mathbf{a}_z] \mathbf{a}_z \\ &= \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) \mathbf{a}_x + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) \mathbf{a}_y + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) \mathbf{a}_z \end{aligned} \quad (32)$$

ya da

$$\nabla \wedge \mathbf{A} = \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) \mathbf{a}_x + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) \mathbf{a}_y + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) \mathbf{a}_z \quad (33)$$

bulunur. Üç değişkenli bir vektörün rotasyonelinin daha önce

$$\text{rot } \mathbf{A} = \nabla \wedge \mathbf{A} = \begin{vmatrix} \mathbf{a}_x & \mathbf{a}_y & \mathbf{a}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix} \quad (34)$$

olduğunu biliyoruz. Bunun açılımının (33)'ü verdiğine dikkat ediniz. (33) veyâ (34) vektörün dik kartezyen koordinat sistemindeki ifâdesidir.

Bir \mathbf{A} vektörünün silindirik ve küresel koordinat sistemindeki ifâdeleri ise, sırasıyla aşağıda verilmiştir:

$$\nabla \wedge \mathbf{A} = \frac{1}{r} \left(\frac{\partial A_z}{\partial \phi} - \frac{\partial A_\phi}{\partial z} \right) \mathbf{a}_r + \left(\frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r} \right) \mathbf{a}_\phi + \left(\frac{1}{r} \left[\frac{\partial(rA_\phi)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial \phi} \right] \right) \mathbf{a}_z \quad (35)$$

$$\nabla \wedge \mathbf{A} = \frac{1}{r \sin \theta} \left[\frac{\partial A_\phi \sin \theta}{\partial \theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial \phi} \right] \mathbf{a}_r + \frac{1}{r} \left[\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial A_r}{\partial \phi} - \frac{\partial(rA_\phi)}{\partial r} \right] \mathbf{a}_\theta + \left(\frac{1}{r} \left[\frac{\partial(rA_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \right] \right) \mathbf{a}_\phi \quad (36)$$

Ev Ödevi:

- 1) Bir \mathbf{A} vektörünün dik koordinat sistemindeki rotasyonelinin diverjansını bulunuz.
- 2) Bir skaler fonksiyonun dik koordinat sistemindeki gradyantının rotasyonelini bulunuz.
- 3) Statik alanda elektrik alan vektörü $\mathbf{E} = -\nabla V$ olduğuna göre bunun rotasyoneli alanın hangi özelliğini verir?

6.6. MANYETİK ALANIN ROTASYONELİ VE MAXWELL DENKLEMİ

Dik koordinat sisteminde (29) formülünde \mathbf{A} vektörü yerine özel olarak \mathbf{H} manyetik alan vektörü konursa,

$$(\nabla \wedge \mathbf{H}) \cdot \mathbf{a}_x = \lim_{\Delta y \Delta z \rightarrow 0} \frac{\oint_{\Delta S} \mathbf{H} \cdot d\boldsymbol{\ell}}{\Delta S} \quad (37)$$

elde edilir. Buradaki ΔS düzlemi x eksenine dik olan bir düzlemdir. \mathbf{H} manyetik alan vektörü, bu düzlem ile çevrelenmektedir. Dolayısıyla, Amper kânununa göre, $\oint_{\Delta S} \mathbf{H} \cdot d\boldsymbol{\ell}$ kapalı çevrim integrali \mathbf{a}_x birim vektör doğrultusunda akan bir akıma denk olur ki bu akımın x bileşenidir. Bu, (37)'de yerine konduğunda, manyetik alan vektörünün x bileşeni, akım yoğunluğu vektörünün x bileşenini verir. Yani,

$$(\nabla \wedge \mathbf{H}) \cdot \mathbf{a}_x = \lim_{\Delta y \Delta z \rightarrow 0} \frac{\oint_{\Delta S} \mathbf{H} \cdot d\boldsymbol{\ell}}{\Delta S} = \lim_{\Delta y \Delta z \rightarrow 0} \frac{I_x}{\Delta S} = J_x \quad (38)$$

olur. Buradan kolayca

$$\nabla \wedge \mathbf{H} = \mathbf{J} \quad (39)$$

elde edilir. Bu, stasyoner alana âit Maxwell denklemlerinden bir tânesini meydana getirir.

6.7. MANYETİK VEKTÖR POTANSİYEL

E statik elektrik alanının ve V elektrik potansiyelinin bir yük dağılımının bir sonucu olduğunu ve

$$\mathbf{E} = -\nabla V \quad (40)$$

ilişkisinin varlığını biliyoruz. Laplace denkleminin iletkenlerin sınırlarında $\phi = V$ fonksiyonundan sağlanan bir metot sunduğunu da biliyoruz.

Benzer şekilde

$$\mathbf{B} = \nabla \wedge \mathbf{A} \quad (41)$$

ile bir \mathbf{A} manyetik vektör potansiyel tanımlanabilir. Bundan da \mathbf{H} manyetik alan bulunur. (41)'in (7)'yi sağladığına dikkat ediniz. Yani, $\nabla \cdot (\nabla \wedge \mathbf{A}) = \nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ olur. Burada \mathbf{A} manyetik vektör potansiyelin birimi Wb/m ya da Tm 'dir.

Eğer \mathbf{A} manyetik vektör potansiyel $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$ şeklindeki ilâve bir şartı daha gerçekleştirir ise, o zaman bu potansiyel ilgilenilen bölgedeki akım cinsinden tek olarak elde edilir:

$$\mathbf{A} = \int \frac{\mu \mathbf{I} d\ell}{4\pi R} \quad ,(\text{I, fitil akımı}) \quad (42)$$

$$\mathbf{A} = \int_S \frac{\mu \mathbf{K} dS}{4\pi R} \quad ,(\text{K, yaprak akımı}) \quad (43)$$

$$\mathbf{A} = \int_V \frac{\mu \mathbf{J} dv}{4\pi R} \quad ,(\text{J, hacme âit akım yoğunluğu}) \quad (44)$$

Burada R, akım elemanından manyetik vektör potansiyelin hesaplandığı noktaya kadar olan mesâfedir.

6.8. MANYETİK AKI

Manyetik akı

$$\psi = \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}$$

olarak tanımlanır. (40) ifâdesi bu tanımda kullanılırsa,

$$\psi = \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = \int_S (\nabla \wedge \mathbf{A}) \cdot d\mathbf{S} \quad (45)$$

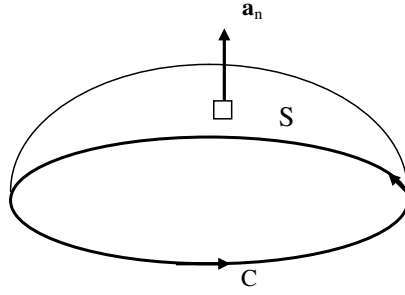
olur. *Stokes* teoremine göre, bir vektörün bir kapalı çevrim üzerinden alınan bir boyutlu entegrali, bu vektörün rotasyonelinin bu kapalı çevrimden geçen bir yüzey üzerinden alınan entegraline eşittir. Dolayısıyla, (45) ifâdesi

$$\int_S (\nabla \wedge \mathbf{A}) \cdot d\mathbf{S} = \oint_C \mathbf{A} \cdot d\boldsymbol{\ell} \quad (46)$$

ya da

$$\psi = \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = \int_S (\nabla \wedge \mathbf{A}) \cdot d\mathbf{S} = \oint_C \mathbf{A} \cdot d\boldsymbol{\ell} \quad (47)$$

olur (Şekil 9). Böylece, manyetik akı manyetik vektör potansiyelinden elde edilir.



Şekil 9 Kapalı C içinden geçen akı aynı zamanda kapalı yüzeyden de geçer,

Ev Ödevi:

- 1) Nokta şeklindeki bir dQ yükünün elektrik potansiyeli nasıldır?
- 2) ρ yük yoğunluğuna sâhip hacme âit bir yük dağılımının potansiyeli nasıldır?
- 3) Stokes teoremini sözle ifâde ediniz.

6.9. MANYETİK İNDÜKSİYON VE FARADAY İNDÜKSİYON KÂNUNU

Şekil 10'daki gibi her hangi bir bobin tarafından halkalanan manyetik $\psi(t)$ akısı değişirse, bobinin uçları arasında bir $e(t)=v(t)$ indüksiyon elektromotor kuvveti (indüksiyon gerilimi) meydana gelir. Buna *Faraday İndüksiyon Kânunu* denir.

Manyetik akı, $\psi(t)$, adı geçen bobine bir mıknatısın yaklaşıp uzaklaşmasıyla, bobinin, içinden akım akan başka bir devreye yaklaşıp uzaklaşmasıyla, bobine yakın olan başka bir devredeki akımın değişmesiyle (Transformatörün çalışma prensibi), bobinin bir manyetik alan içinde hareket etmesiyle (Elektrik motorunun çalışma prensibi) ve bobinin içinden geçen akımın değişmesi (Self endüktans oluşumu) değişir.

İndüksiyon gerilimi, manyetik akının değişmesini önleyecek yönde bir değişim gösterir. Bunun için, indüksiyon gerilimi devreden bir indüksiyon akımı akıtır. Bu akım her akım gibi bir indüksiyon manyetik akısı doğurur. Bu akı, asıl akı artıyorsa, onunla ters yönde, asıl akı azalıyorsa onunla aynı yöndedir. Buna *Lenz kânunu* denir. Bu kânun formüle (-) işâreti ile taşınır.

Bu sûretle, indüksiyon geriliminin, değişmekte olan akımın değişmesine engel olma işlemi tahakkuk eder.

Manyetik akımın değişmesiyle meydana gelen elektromotor kuvveti (indüksiyon gerilimi)

$$v(t) = - \frac{d\psi}{dt} \quad 48)$$

ile verilir.

Elektrik ve manyetik alanların zamana bağlı değişimleriyle ilgili bu çalışmalara Faraday tarafından 1831 yılında gerçekleştirilmiştir. (45), (47) ve (48)'den

$$v(t) = \oint_C \mathbf{E}(t, \mathbf{r}) \cdot d\boldsymbol{\ell} = - \frac{d}{dt} \oint_S \mathbf{B}(t, \mathbf{r}) \cdot d\mathbf{S} \quad (49)$$

olur. Stokes teoremi

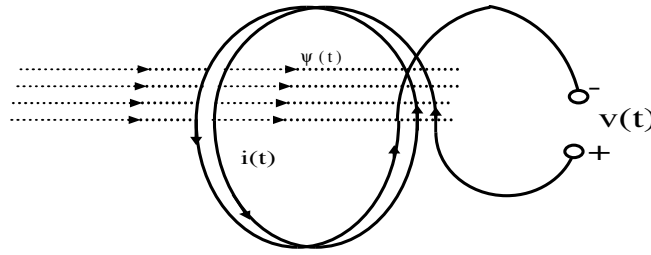
$$v(t) = \oint_S \nabla \wedge \mathbf{E}(t, \mathbf{r}) \cdot d\mathbf{S} = - \frac{d}{dt} \oint_S \mathbf{B}(t, \mathbf{r}) \cdot d\mathbf{S}$$

ya da

$$\nabla \wedge \mathbf{E}(t, \mathbf{r}) = - \frac{\partial \mathbf{B}(t, \mathbf{r})}{\partial t} \quad (50)$$

ifâdesini verir ki değişen alanlar ait *Maxwell Denklemi*'dir. Manyetik indüksiyon zamana bağlı değilse, statik (stasyoner) alana âit Maxwell Denklemi elde edilir:

$$\nabla \wedge \mathbf{E}(t, \mathbf{r}) = 0 \quad (51)$$



Şekil 10 İndüksiyon bobini ve indüksiyon elektromotor kuvveti

Eğer manyetik akı hem zamanın ve hem de pozisyonun (x gibi öteleme ya da ω açısal hızı ile dönme) bir fonksiyonu ise, o zaman indüksiyon elektromotor kuvveti

$$v(t) = - \frac{d\psi(t, x)}{dt} = - \frac{\partial(t, x)}{\partial t} - \frac{\partial(t, x)}{\partial x} \frac{dx}{dt} = - \frac{\partial(t, x)}{\partial t} - \frac{\partial(t, x)}{\partial x} v \quad (52)$$

ya da

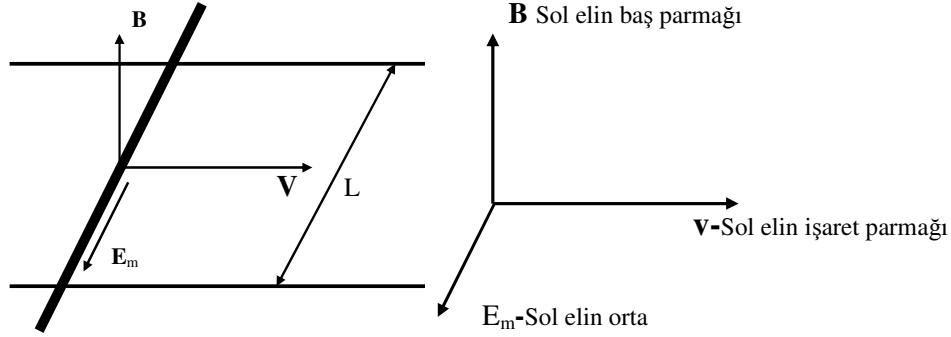
$$v(t) = - \frac{d\psi(t, \theta)}{dt} = - \frac{\partial(t, \theta)}{\partial t} - \frac{\partial(t, \theta)}{\partial \theta} \frac{d\theta}{dt} = - \frac{\partial(t, \theta)}{\partial t} - \frac{\partial(t, \theta)}{\partial \theta} \omega \quad (53)$$

olur ki burada sağdaki soldan birinci terimler transformatör gerilimini, ikinci terimler hareket gerilimini ve v öteleme hızını, ω açısal hızı, θ dönme açısını verir.

Hareket geriliminin diğer bir ifâdesi de Şekil 11'deki düzenden elde edilebilir. Burada bir manyetik indüksiyon alanı içinde bulunan ve iki iletkenli bir ray üzerinde sağ tarafa doğru v hızı ile hareket ettirilen L uzunluğundaki bir iletkende indüklenen E gerilimi görülmektedir. İndüklenen hareket gerilimi

$$U = \mathbf{L} \cdot (\mathbf{V} \wedge \mathbf{B}) = \mathbf{L} \cdot \mathbf{E}_m = LE_m \quad (54)$$

ile verilir.



Şekil 11 Hareket gerilimi ve manyetik akı yoğunluğu vektörü ile hareket eden iletkenin hızı ve indüklenen gerilimin yönü

6.10. STATİK ELEKTRİK ALANINA ÂİT MAXWELL DENKLEMLERİ

Maxwell Denklemleri 4 tânedir. Şimdiye kadar MKSA birim sisteminde statik (stasyoner) alanlara âit Maxwell denklemleri elde edilmiştir:

$$\nabla \wedge \mathbf{E} = 0 \quad (55)$$

$$\nabla \wedge \mathbf{H} = \mathbf{J}_c \quad (56)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (57)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho \quad (58)$$

Burada \mathbf{J}_c 'ye iletim akım yoğunluğu denir. Bu büyüklükler, zamâna bağlı olmadıklarından stasyoner büyüklüklerdir. Dolayısıyla bu denklemlere *Statik Alanın Maxwell Denklemleri* denir.

6.11. ELEKTRİK AKI YOĞUNLUĞU AKIMI-DEPLASMAN AKIMI

Statik alanlarda manyetik alanın rotasyonelinin iletim akım yoğunluğu vektörüne eşit olduğu ve akım yoğunluğunun da hareketli yüklerden oluştuğu bilinmektedir:

$$\nabla \wedge \mathbf{H} = \mathbf{J} = \mathbf{J}_c \quad (59)$$

Burada \mathbf{J}_c ile verilen iletim akım yoğunluğudur. Bir vektörün rotasyonelinin diverjansının matematik olarak her zaman sıfır ettiği bilinmektedir. Diğer taraftan statik alanlar için süreklilik denklemi sıfırdır:

$$\nabla \cdot \mathbf{J}_c = 0 \quad (60)$$

Gerçekten, (59) ve (60) ifadelerinin stasyoner alanlar için

$$\nabla \cdot \nabla \wedge \mathbf{H} = \nabla \cdot \mathbf{J}_c = 0 \quad (61)$$

sonucunu vereceği de açıktır. Stasyoner alanlar için bunun sağlanmasına karşı zamanla değişen süreklilik denklemi,

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = -\frac{\partial \rho(t)}{\partial t} \quad (62)$$

bu duruma uymamaktadır. Yani, (62)'in sağ tarafının sıfır olmadığı görülmektedir. Zamanla değişen ve değişmeyen akım yoğunluklarına âit bu farklı sonucun, bir eksikliğe işaret ettiği açıktır.

Bu sonuç, *James Clerk Maxwell* tarafından düzeltilmiştir. Maxwell, iletim akımı yoğunluğundan başka bir de deplasman akım yoğunluğu, \mathbf{J}_D , denen başka bir akım yoğunluğunun varlığını kabul etmiştir. Bu kabul ile bu akım yoğunluğunun

$$\mathbf{J} = \mathbf{J}_c + \mathbf{J}_D \quad (63)$$

şeklinde olduğunu ileri sürmüştür. O zaman,

$$\nabla \wedge \mathbf{H} = \mathbf{J}_c + \mathbf{J}_D = \mathbf{J} \quad (64)$$

olarak yazılabilir. Burada

$$\mathbf{J}_D = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \quad (65)$$

ile tanımlanmaktadır. Bu durumda (65)'in (61)'ri sağlandığı görülür:

$$\nabla \cdot \nabla \wedge \mathbf{H} = \nabla \cdot [\mathbf{J}_c + \mathbf{J}_D] = \nabla \cdot \mathbf{J} = 0 \quad (66)$$

olmalıdır. Buradan

$$\nabla \cdot [\mathbf{J}_c + \mathbf{J}_D] = \nabla \cdot \mathbf{J} = 0 = 0 \rightarrow \nabla \cdot \mathbf{J}_c = -\nabla \cdot \mathbf{J}_D \rightarrow -\nabla \cdot (\mathbf{J} - \mathbf{J}_c) = 0 \rightarrow \nabla \cdot \mathbf{J} = \nabla \cdot \mathbf{J}_c$$

ya da

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = \nabla \cdot \mathbf{J}_c = -\nabla \cdot \mathbf{J}_D = -\nabla \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial t} (\nabla \cdot \mathbf{D}) = -\frac{\partial \rho}{\partial t} \quad (67)$$

Görüldüğü gibi, *Deplasman Akım Yoğunluğu Vektörü* adı ile yeni bir büyüklüğün tanımıyla düzeltilmiş Maxwell Denklemi'nin matematik kuralı sağlaması aynı zamanda süreklilik denklemini de vermektedir. (67)'nin stasyoner alanda (60)'ı sağladığına da dikkat ediniz.

6.12. ZAMANA BAĞLI MAXWELL DENKLEMLERİ

Zamâna bağlı Maxwell denklemlerinde t zaman parametresi, büyüklükler arasında bir ilişki (kuplaj) meydana getirir. Bu ilişki, bilhassâ Faraday Kanunu'nda açıkça görülür. Dolayısıyla, bu zaman bağlantısı sebebiyle elektrik alanı ile manyetik alan birbirine bağlanır. Bu ilişki (49)'da verilmiştir. Dolayısıyla, zamana bağlı değişim hâlinde (54) denklemi yerine (49) alınır.

Diğer taraftan, (55) denklemindeki akım yoğunluğu vektörü stasyoner halde sâdece, $\mathbf{J} = \mathbf{J}_c$ olarak, iletim akımını temsil etmektedir. Zamana bağlı değişim hâlinde (56)'in

sağ tarafına bir de deplasman akım yoğunluğu gelir. Bu açıklamaların ışığı altında zamana bağlı Maxwell Denklemleri aşağıdaki şekilleri alırlar:

$$\nabla \wedge \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = - \frac{\partial \mathbf{B}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} \quad (68)$$

$$\nabla \wedge \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{J}_c(\mathbf{r}, t) + \frac{\partial \mathbf{D}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} \quad (69)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = 0. \quad (70)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D}(\mathbf{r}, t) = \rho(\mathbf{r}, t). \quad (71)$$

Bunlara *Nokta Biçimli Maxwell Denklemleri* denir. Görüldüğü gibi, zaman (parametresi) bu denklemler arasında bir ilişki (kuplaj) meydana getirmekte, manyetik alanı elektrik alanına, elektrik alanı manyetik alanına dönüştürmektedir. Yâni, elektrik alanı zamanın bir fonksiyonu olarak değişirse, $\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$ ve $\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}$ vektörleri de zamanın birer fonksiyonu olurlar ve dolayısıyla (68) formülüne göre, elektrik alanı manyetik akı yoğunluğu büyüklüğünün türevine bağlı olarak meydana gelir. Elektrik alanı ile manyetik alan arasındaki bu ilişkinin statik alanda olmadığına dikkat ediniz.

Benzer olarak, manyetik alan da zamanın bir fonksiyonu olarak değişirse, $\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$ vektörü de zamanın bir fonksiyonu olur ve dolayısıyla, iletim akım yoğunluğunun sıfır olduğu, $\mathbf{J}_c(\mathbf{r}, t) = 0$, serbest uzayda bile (69) formülüne göre, manyetik alan elektrik akı yoğunluğu büyüklüğünün türevine bağlı olarak meydana gelir. Elektrik alanı ile manyetik alan arasındaki bu ilişkinin de statik alanda olmadığına dikkat ediniz.

Elektrik alanı ile manyetik alan arasındaki bu ilişki zamana bağlı olarak ortam içinde noktadan noktaya değişir, ve böylece ortam içindeki elektrik alanı ile manyetik alan, birbirlerini üreterek ortamda yayılımlarının gerçekleşmesini mümkün kılarlar. Maxwell Denklemleri'nin bir de entegral formları vardır. Bunlar (68) ve (69)'a Stokes teoremi; (70) ve (71)'e diverjans teoremi uygulanarak elde edilir:

$$\oint_S \nabla \wedge \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \cdot d\mathbf{S} = \oint_\ell \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \cdot d\boldsymbol{\ell} = - \oint_S \frac{\partial \mathbf{B}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} \cdot d\mathbf{S}$$

veyâ

$$\oint_\ell \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \cdot d\boldsymbol{\ell} = - \oint_S \frac{\partial \mathbf{B}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} \cdot d\mathbf{S}$$

$$\oint_S \nabla \wedge \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) \cdot d\mathbf{S} = \oint_\ell \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) \cdot d\boldsymbol{\ell} = \oint_S \left(\mathbf{J}_c(\mathbf{r}, t) + \frac{\partial \mathbf{D}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} \right) \cdot d\mathbf{S}$$

ya da

$$\oint_\ell \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) \cdot d\boldsymbol{\ell} = \oint_S \left(\mathbf{J}_c(\mathbf{r}, t) + \frac{\partial \mathbf{D}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} \right) \cdot d\mathbf{S}$$

$$\oint_V \nabla \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) dV = \oint_S \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) \cdot d\mathbf{S} = 0 \rightarrow \oint_S \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) \cdot d\mathbf{S} = 0.$$

$$\oint_V \nabla \cdot \mathbf{D}(\mathbf{r}, t) dV = \oint_S \mathbf{D}(\mathbf{r}, t) \cdot d\mathbf{S} = \int_V \rho(\mathbf{r}, t) dV \rightarrow \oint_S \mathbf{D}(\mathbf{r}, t) \cdot d\mathbf{S} = \int_V \rho(\mathbf{r}, t) dV$$

ya da böylece *Entegral Biçimli Maxwell Denklemleri*

$$\oint_{\ell} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \cdot d\boldsymbol{\ell} = - \oint_S \frac{\partial \mathbf{B}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} \cdot d\mathbf{S} \quad (72)$$

$$\oint_{\ell} \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) \cdot d\boldsymbol{\ell} = \oint_S \left(\mathbf{J}_c(t) + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right) \cdot d\mathbf{S} \quad (73)$$

$$\oint_S \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) \cdot d\mathbf{S} = 0 \quad (74)$$

$$\oint_S \mathbf{D}(\mathbf{r}, t) \cdot d\mathbf{S} = \int_V \rho(\mathbf{r}, t) dV \quad (75)$$

olarak elde edilir. (72) denklemi Faraday Kânun'u, (73) denklemi Ampere Kânun'u, (75) denklemi Gauss Kânun'u verir.

Sorular:

1) Bir kondansatörün levhaları arasında yalıtkan ortamdaki değişken akım bir deplasman akımı olduğuna göre, bunun levhalar dışındaki iletim akımına eşit olduğunu gösteriniz.

2) İletkenliği 2 S/m ve izâfi dielektrik sâbiti 1 olan bir malzemede elektrik alanı zamana bağlı olarak $E(t) = 100 \sin 10^5 t$ V/m olarak veriliyor.

a) İletim akım yoğunluğunu bulunuz.

b) Deplasman akım yoğunluğunu bulunuz.

c) Hangi frekansta iletim akım yoğunluğu ile deplasman akım yoğunluğu eşit olur?

3) İç yarı çapı 6 mm ve dış yarı çapı 10 mm olan bir koaksiyal kablunun izâfi dielektrik sâbiti 8 olarak veriliyor. Uygulanan gerilim $V(t) = 100 \sin 377t$ V olduğuna göre,

a) İç yarı çap ile dış yarı çap arasındaki bölgede meydana gelen potansiyel değişimini yarı çapın fonksiyonu olarak bulunuz.

b) İç yarı çap ile dış yarı çap arasındaki bölgede meydana gelen elektrik alan değişimini yarı çapın fonksiyonu olarak bulunuz.

c) Deplasman vektörünü yarı çapın fonksiyonu olarak bulunuz.

d) Kablunun boyu 50 cm olduğuna göre teşekkül eden kapasiteyi bulunuz.

e) Deplasman akımını bulunuz.

f) İletim akımını bulunuz.

Cevaplar:

1) Tanım gereğince iletim akımı $I_i(t) = \int_S \mathbf{J}_c \cdot d\mathbf{S}$ ve deplasman akımı

$I_D(t) = \int_S \mathbf{J}_D \cdot d\mathbf{S}$ ile verilmektedir. Diverjans teoremi $\oint_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} = \iiint_V \nabla \cdot \mathbf{A} dV$

gereğince

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \nabla \wedge \mathbf{H} &= 0 \\ \int_{S_i} \nabla \cdot \nabla \wedge \mathbf{H} &= \int_{S_{ii}} \nabla \cdot \nabla \wedge \mathbf{H} \rightarrow \int_{S_i} \nabla \wedge \mathbf{H} \cdot d\mathbf{S} = \int_{S_{ii}} \nabla \wedge \mathbf{H} \cdot d\mathbf{S} \end{aligned}$$

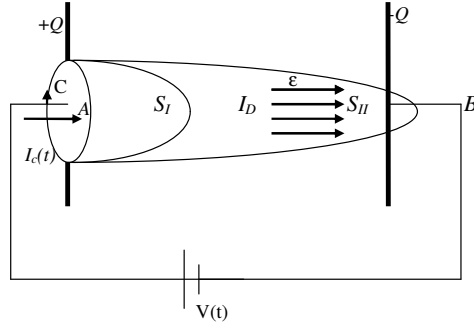
ya da

$$\int_{S_i} \left(\mathbf{J}_c + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right) \cdot d\mathbf{S} = \int_{S_{ii}} \left(\mathbf{J}_c + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right) \cdot d\mathbf{S}$$

yazılabilir. Levhalar arasındaki dielektrik bölgede $J_c=0$ olduğu için $S_{III}=S_{II}-S_I$ bölgesi için

$$\int_{S_I} \mathbf{J}_c \cdot d\mathbf{S} = \int_{S_{III}} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S}$$

geçerlidir. Bu demektir ki, A noktasına gelen I_c akımı, levhalar arasındaki dielektrik ortamda A ve B noktaları arasını I_D akımı olarak geçmektedir. Başka bir ifadeyle $I_c(t)=I_D(t)$ olmaktadır.



Kondansatörün tanım bağıntısına göre akımı

$$I_c(t) = C \frac{dv(t)}{dt}$$

olup burada $v(t)$ levhalar arasındaki gerilim ve $C = \frac{\epsilon S}{d}$ ise kondansatörün kapasitesidir. S levhalardan bir tânesinin yüz ölçümü, d levhalar arasındaki uzaklıktır. O zaman

$$I_c(t) = \frac{\epsilon S}{d} \frac{dv(t)}{dt}$$

olur.

Diğer taraftan $D = \epsilon E = \epsilon V/d$ olduğu bilinmektedir. Dolayısıyla

$$J_D(t) = \frac{\partial}{\partial t} (D) = \frac{\partial}{\partial t} (\epsilon E) = \frac{\epsilon}{d} \frac{dv(t)}{dt} \rightarrow I_D(t) = \int \frac{\epsilon}{d} \frac{dv(t)}{dt} dS = \frac{\epsilon S}{d} \frac{dv(t)}{dt} = I_c(t)$$

bulunur.

2a) İletim akım yoğunluğu

$$J_c(t) = \sigma E(t) = 200 \sin 10^5 t \text{ A/m}^2$$

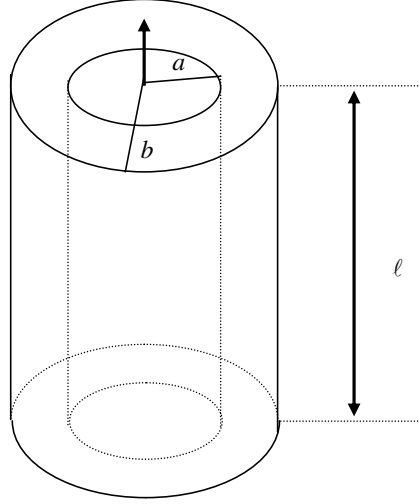
olur.

b) Deplasman akım yoğunluğu

$$\begin{aligned} I_D(t) &= \frac{\partial D(t)}{\partial t} = \epsilon_o \frac{\partial E(t)}{\partial t} = 100 \epsilon_o \times 10^5 \cos 10^5 t \\ &= 100 \times 8.85 \times 10^{-12} \times 10^5 \cos 10^5 t = 8.85 \times 10^{-5} \cos 10^5 t \text{ A/m}^2 \end{aligned}$$

c) Elektrik alanı $E(t)=E_m \sin \omega t$ olarak alınrsa $I_c(t)=\sigma E(t)=\sigma E_m \sin \omega t$ olur. Buna göre, $I_D(t)=\epsilon_o \frac{\partial E(t)}{\partial t}=\epsilon_o \omega E_m \cos \omega t$ bulunur. $|J_c(t)|=|J_D(t)|$ olması için $\sigma=\epsilon_o \omega$ bulunur. Buradan $f=\frac{\sigma}{2\pi\epsilon_o}$ elde edilir. Bu ise verilen alıştırmada $f=0.0360 \times 10^{12}$ Hz $=36 \times 10^9$ Hz $=36$ GHz eder.

3a) İç yarı çap ile dış yarı çap arasındaki bölgede meydana gelen potansiyel:.



Silindirler arasındaki malzemenin izâfî dielektrik sâbiti ϵ_r olsun. Elektrik akı yoğunluğu vektörü iki silindir arasında yarı çapa bağlı olarak

$$\mathbf{D}=\rho_s \frac{a}{r} \mathbf{a}_r$$

olarak değişir ve $r=a$ 'da elektrik akısı, yüzey yük yoğunluğuna, ρ_s , eşittir. Bu bölgedeki elektrik alan vektörü ise,

$$\mathbf{E}=\frac{\rho_s}{\epsilon} \frac{a}{r} \mathbf{a}_r$$

olur. İki silindir arasındaki gerilim

$$\varphi_{ab}=-\int_{r=a}^b \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r}=-\int_{r=a}^b \left(\frac{\rho_s}{\epsilon} \frac{a}{r} \mathbf{a}_r\right) \cdot \mathbf{a}_r dr = a \frac{\rho_s}{\epsilon} \ln \frac{b}{a}$$

ve kapasite iki silindir arasındaki toplam yük $Q=\rho_s(2\pi aL)$ olduğu dikkate alındığında silindirik kondansatörün kapasitesi

$$C = \frac{Q}{\varphi_{ab}} = \frac{2\pi\epsilon L}{\ln \frac{b}{a}}$$

olarak elde edilir. Birim uzunluk başına düşen kapasite ise:

$$\bar{C} = \frac{Q}{\varphi_{ab}} = \frac{2\pi\epsilon}{\ln \frac{b}{a}}$$

olur.

Görüldüğü gibi elektrik potansiyeli logaritmik olarak değişmektedir. Belirsiz bir entegral söz konusu olduğunda bu değişim

$$\varphi = A \ln r + B$$

olarak yazılabilir. Buradaki A ve B sâbitleri sınır değerlerinden tâyin edilir:

Sınır şartı I) $r=6 \text{ mm}$ için $\varphi = V_1(t) = 0$:

$$\varphi = 0 \rightarrow \varphi = A \ln r_a + B = A \ln 6 \times 10^{-2} + B = 0$$

Sınır şartı II) $r=10 \text{ mm}$ için $\varphi = V(t) = 100 \sin 377t$:

$$\varphi = V_2(t) \rightarrow A \ln r_b + B = A \ln 10 \times 10^{-2} + B = V_2(t)$$

Bu iki denklem çözümlenerek A ve B sâbitleri

$$A = \frac{V(t) - V_1(t)}{\ln \frac{r_b}{r_a}}, B = V_1 - \frac{V(t) - V_1}{\ln \frac{r_b}{r_a}} \ln r_a$$

olarak elde edilir. Verilen değerler için Sınır şartı I ve II kullanılırsa

$$B = -\frac{V_2(t)}{\ln \frac{r_b}{r_a}} \ln r_a = -\frac{100 \sin 377t}{\ln \frac{10}{6}} \ln 6 = 1002 \sin 377t$$

$$A = \frac{V(t)}{\ln \frac{r_b}{r_a}} = \frac{100 \sin 377t}{\ln \frac{10}{6}} = 196 \sin 377t$$

bulunur. Buna göre iki silindir arasındaki potansiyel dağılımı

$$\varphi = (196 \sin 377t) \ln r - 196 \times \ln 6 \sin 377t = (196 \sin 377t) \ln r + 1002 \sin 377t$$

$$= (196 \sin 377t) \ln \frac{r}{6}$$

olur.

b) İç yarı çap ile dış yarı çap arasındaki bölgede meydana gelen elektrik alan değişimi:

$$E = -\nabla \varphi = -\nabla \left[(196 \sin 377t) \ln \frac{r}{6} \right]$$

ya da

$$E = -\frac{196}{r} \sin 377t \mathbf{a}_r, \quad \text{V/m}$$

c) Deplasman vektörü:

$$\begin{aligned} \mathbf{D} &= \epsilon \mathbf{E} = -\epsilon \frac{196}{r} \sin 377t \mathbf{a}_r = -\frac{196 \times 8 \times 8.85 \times 10^{-12}}{r} \sin 377t \mathbf{a}_r \\ &= -\frac{13876.8 \times 10^{-12}}{r} \sin 377t \mathbf{a}_r, \quad \text{C/m}^2 \end{aligned}$$

d) Teşekkül eden kapasite:

$$\begin{aligned} C &= \frac{Q}{\varphi_{ab}} = \frac{2\pi\epsilon L}{\ln \frac{b}{a}} = \frac{6.28 \times 8 \times 8.85 \times 10^{-12} \times 0.5}{0.51} = 1.96 \times 6.28 \times 8 \times 8.85 \times 10^{-12} \times 0.5 \times 10^{-12} \\ &= 435.2 \times 10^{-12} \text{ F} = 435.2 \text{ pF} \end{aligned}$$

e) Deplasman akımı:

$$\begin{aligned} J_D(t) &= \frac{\partial D(t)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \left(-\epsilon \frac{196}{r} \sin 377t \mathbf{a}_r \right) = -8 \times 8.85 \times 10^{-12} \frac{196 \times 377}{r} \cos 377t \mathbf{a}_r \\ &= -\frac{5231553.6 \times 10^{-12}}{r} \cos 377t \mathbf{a}_r = -\frac{5.23 \times 10^{-6}}{r} \cos 377t \mathbf{a}_r \\ I_D(t) &= J_D(t) \mathbf{a}_r \cdot (2\pi r L \mathbf{a}_r) \\ &= \left(\frac{5.2315536 \times 10^{-6}}{r} \cos 377t \right) (6.28 \times r \times 0.5) = 5.23 \times 10^{-6} \cos 377t \text{ (3.14)} \\ &= 16.4 \times 10^{-6} \cos 377t \text{ A} \end{aligned}$$

f) İletim akımı:

$$\begin{aligned} I_C(t) &= C \frac{dV(t)}{dt} = 435.2 \times 10^{-12} \frac{d}{dt} (100 \sin 377t) \\ &= 435.2 \times 10^{-10} \times 377 \cos 377t = 164070. \cos 377t = 16.4 \times 10^{-6} \cos 377t \end{aligned}$$

Kondansatörlerde iletim akımı ile deplasman akımının birbirine eşit olduğuna dikkat ediniz.

6.13. İKİ ORTAMI AYIRAN BİR ARAYÜZEYDE MANYETİK ALANA ÂİT SINIR ŞARTLARI

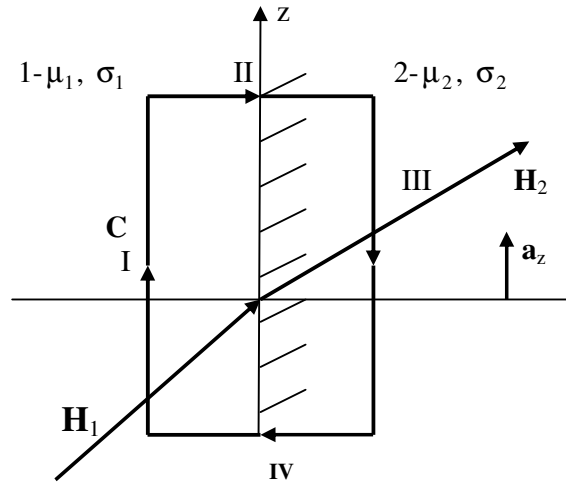
Manyetik alan I malzemesinden II malzemesine geçerken bu iki malzemenin ara yüzünde nasıl davranır?

Şekil 12'de görüldüğü gibi, manyetik geçirgenlikleri ve iletkenlikleri, sırasıyla, μ_1, σ_1 ve μ_2, σ_2 olan iki malzemenin arakesitini içine alacak şekilde bir kapalı çevrim oluşturulmuş. Şart olmamakla birlikte kolaylık olması için bu kapalı çevrimi dikdörtgen olarak seçelim.

Kapalı çevrimin halkaladığı bir akım olmadığı için bu kapalı çevrime âit manyetik gerilim sıfırdır. Yâni,

$$\oint_C \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = 0 \quad (76)$$

olur.



Şekil 12 İki malzemenin ara yüzeyinde manyetik alan

(76) ifâdesi

$$\int_I \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} + \int_{II} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} + \int_{III} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} + \int_{IV} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = 0 \quad (77)$$

olur. II ve IV kenarlarına âit entegrallerin sonuçları eşit ve birbirlerine zıt yöndedir. Dolayısıyla,

$$\int_{II} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} + \int_{IV} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = 0 \quad (78)$$

olur. Geriye I ve III kenarlarına âit entegraller kalır:

$$\int_I \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} + \int_{III} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = 0 \quad (79)$$

ya da

$$\int_I \mathbf{H} \cdot \mathbf{a}_z d\mathbf{l} - \int_{III} \mathbf{H} \cdot \mathbf{a}_z d\mathbf{l} = 0 \quad (80)$$

veyâ

$$\int_I H_{It} d\mathbf{l} - \int_{III} H_{III t} d\mathbf{l} = 0 \quad \int (H_{It} - H_{III t}) d\mathbf{l} = 0 \quad (81)$$

bulunur. Bu entegralin sıfır olması için entegralin altındaki terimin sıfır olması gerekir. $d\ell$ sıfır olamayacağına göre $H_{It} = H_{III t}$ olur ki, bu şu şekilde yorumlanır:

Manyetik alan 1 malzemesinden 2 malzemesine geçerken bu iki malzemenin ara yüzeyinde manyetik alanın bu iki bölgeye âit teğet bileşenleri birbirine eşit olur. Başka bir ifadeyle, iki bölgeye âit teğet bileşenleri ara yüzeyde süreklidir.

"Rönesans'ın ilk kekeleme anları öyle bir devreye rastladı ki, barbarlıktan uyanmakta olan Avrupa, İslâm Medeniyeti'ne bitkin bir hürmetle bakmaktaydı. Taklidi imkansız bir örnek karşısında cesâretini kaybeden Batı'nın kolları sarkıyordu. Yalnız Cebiri değil, diğer matematik ilimlerini de Avrupa kültür dâiresi, Müslüman'lardan almış olduğu gibi, bu günkü Batı Matematiği gerçekten İslâm Matematiği'nden başka bir şey değildir."

(<http://www.ikrateam.de/avrupalilarin%20itiraflari.html>)

Prof. E. F. Gautier

6.14. İKİ ORTAMI AYIRAN BİR ARAYÜZEYDE MANYETİK AKI YOĞUNLUĞU VEKTÖRÜNE ÂİT SINIR ŞARTLARI

Şekil 13'de görüldüğü gibi, 1 ve 2 bölgeleri içinde kalacak şekilde L boyundaki bir silindir kapalı bir yüzey meydana getirmektedir. I ve II silindirin alt ve üst yüzeylerini ve III ise silindirin yan yüzeyini göstermektedir. Bu kapalı yüzeye $\psi = \oint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0$ entegrali uygulanırsa,

$$\int_I \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} + \int_{II} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} + \int_{III} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0 \quad (82)$$

olur. Silindirin boyunun $L \rightarrow 0$ olacak şekilde limiti alınır, III yüzeyine âit entegral ortadan kalkar ve geriye

$$\int_I \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} + \int_{II} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0 \quad (83)$$

entegralleri kalır bunlar

$$-\int \mathbf{B}_1 \cdot \mathbf{a}_x dS + \int \mathbf{B}_2 \cdot \mathbf{a}_x dS = 0$$

ya da

$$\int B_{1n} dS - \int B_{2n} dS = 0 \quad (84)$$

veyâ

$$\int B_{1n} dS = \int B_{2n} dS \quad (85)$$

bulunur. Bu

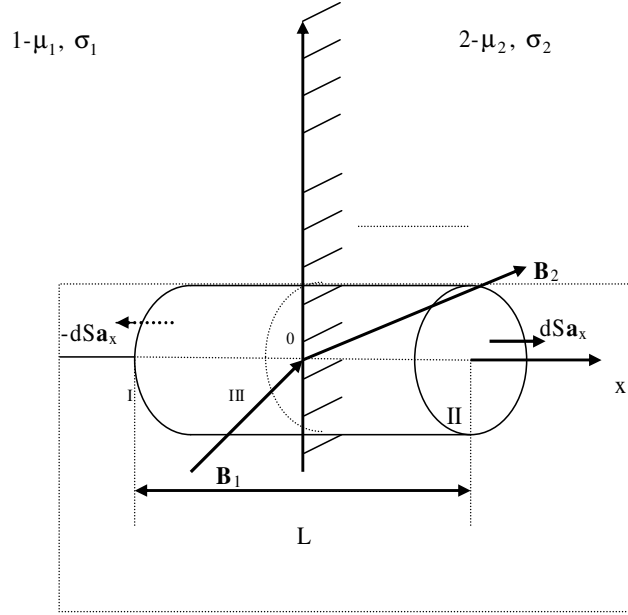
$$\int (B_{1n} - B_{2n}) dS = 0 \quad (86)$$

olur ki $dS \neq 0$ için

$$B_{1n} = B_{2n} \quad (87)$$

elde edilir. Bu sonucun yorumu şudur:

Manyetik akı yoğunluğu vektörü 1 malzemesinden 2 malzemesine geçerken bu iki malzemenin ara yüzeyinde bu vektörün bu iki bölgeye âit normal bileşenleri birbirine eşittir. Başka bir ifadeyle, manyetik akı yoğunluğu vektörünün iki bölgeye âit normal bileşenleri ara yüzeyde süreklidir.



Şekil 13 İki malzemenin ara yüzeyinde manyetik akı yoğunluğu vektörü

Sorular:

1) Şekilde görüldüğü gibi, boşlukla bir ara yüzey oluşturan ve izâfi manyetik geçirgenlik sâbiti 20 olan bir malzeme verilmiştir. Malzeme içinde manyetik akı yoğunluğu vektörü \mathbf{B}_1 olarak veriliyor. Boşluk içindeki manyetik alan vektörünü, manyetik akı yoğunluğu vektörünü ve \mathbf{B}_1 vektörünün normal ile yaptığı açığı bulunuz.

- 2) Aşağıdaki şekilde z eksenine paralel normalini gösterdiğine göre,
a) Boşlukta bulunan \mathbf{B}_2 vektörünün normal ile yaptığı açığı
b) Birinci ortamın manyetik geçirgenlik sâbitini bulunuz.

Cevaplar:

$\mu_{r1} = 20$ olduğu için malzeme içindeki manyetik alan bulunabilir:

$$H_1 = \frac{B_1}{\mu_1} = \frac{B_1}{\mu_{r1}\mu_0} = \frac{1}{20\mu_0} (2.4\mathbf{a}_x + 1.6\mathbf{a}_y + 0.8\mathbf{a}_z) \text{ A/m}$$

Burada z eksenine malzemenin yüzeyine dik olduğu için, büyüklüklerin z bileşenleri normal bileşenler, x ya da y bileşenleri teğet bileşenleri oluşturur. Buna göre 1 ve 2

bölgeleri için manyetik alanların teğet bileşenlerinin ve elektrik akı yoğunluğu vektörlerinin normal bileşenlerinin eşitliklerinden dolayı:

$$H_{2t} = H_{1t} \rightarrow \mathbf{H}_2 = \frac{1}{20\mu_0} (2.4\mathbf{a}_x + 1.6\mathbf{a}_y + H_{2z}\mathbf{a}_z) \text{ A/m}$$

olur.

$$\mathbf{B}_{2n} = \mathbf{B}_{1n} \rightarrow \mathbf{B}_2 = B_{2x}\mathbf{a}_x + B_{2y}\mathbf{a}_y + 0.8\mathbf{a}_z$$

$$\mathbf{B}_{2z} = \mu_{r2}\mu_0 \mathbf{H}_{2z} \rightarrow 0.8\mathbf{a}_z = \mu_r\mu_0 H_{2z}\mathbf{a}_z \rightarrow 0.8 = \mu_r\mu_0 H_{2z}$$

$$H_{2z} = 0.8 / \mu_{r2}\mu_0 = \frac{0.8}{\mu_{r2}\mu_0} = \frac{0.8}{\mu_0} \text{ A/m} = \frac{16}{20\mu_0} \text{ A/m}$$

$$\mathbf{B}_{2x} = \mu_{r2}\mu_0 \mathbf{H}_{2x} = \mu_{r2}\mu_0 \frac{1}{20\mu_0} (2.4) = \mu_{r2} \frac{1}{20} (2.4) = \frac{1}{20} (2.4) = 0.12 \text{ T}$$

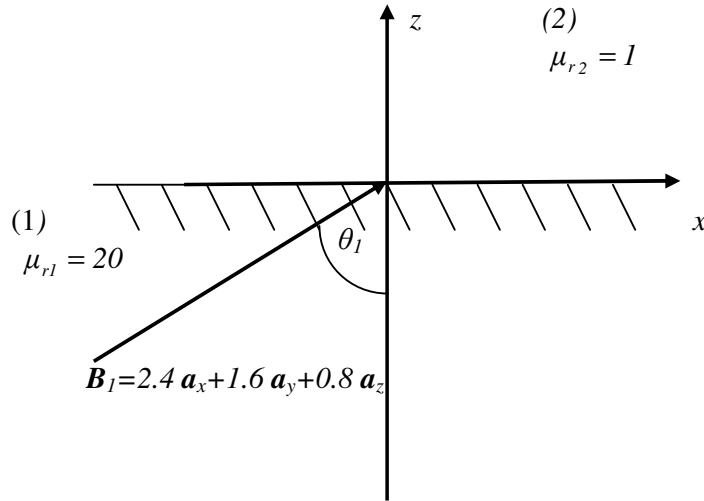
$$B_{2y} = \mu_{r2}\mu_0 \mathbf{H}_{2y} = \mu_0 \frac{1}{20\mu_0} 1.6 = \frac{1}{20} 1.6 = 0.08 \text{ T}$$

$$\mathbf{H}_2 = \frac{1}{20\mu_0} (2.4\mathbf{a}_x + 1.6\mathbf{a}_y + 16\mathbf{a}_z) \text{ A/m}$$

$$\mathbf{B}_2 = 0.12\mathbf{a}_x + 0.08\mathbf{a}_y + 0.8\mathbf{a}_z$$

$$\cos\theta_1 = \frac{\mathbf{B}_1 \cdot \mathbf{a}_z}{|\mathbf{B}_1|} = \frac{0.8}{\sqrt{(2.4)^2 + (1.6)^2 + (0.8)^2}} = 0.2673$$

$$\theta_1 = 74.5^\circ$$



2a) \mathbf{B}_2 vektörünün normal ile yaptığı açısı:

$$\cos \theta_2 = \frac{B_2 \cdot a_z}{|B_2|} = \frac{B_z}{\sqrt{25 + 64 + 9}} = \frac{3}{9.8995} = 0.3030 \rightarrow \theta_2 = 72.4^\circ$$

b) Birinci ortamın manyetik geçirgenlik sâbiti:

Manyetik alanların teğet bileşenleri eşittir. Burada teğet bileşenler x ya da y bileşenleridir. Meselâ, $H_{1x} = H_{2x}$ alınabilir.

$$H_{1x} = B_{1x} / \mu_1, \quad H_{2x} = B_{2x} / \mu_2, \quad B_{1x} / \mu_1 = B_{2x} / \mu_2 = B_{2x} / \mu_0, \quad B_{1x} / \mu_1 = B_{2x} / \mu_0$$

$$\mu_1 = \mu_0 (B_{1x} / B_{2x}) = \left(\frac{1.2}{5}\right) \times 4\pi \times 10^{-7} = 3.0159 \times 10^{-7} \text{ h/m}$$

Sorular:

1) Serbest uzayda elektrik alanı zamana bağlı olarak $\mathbf{E}(z,t) = E_m \sin(\omega t - \beta z) \mathbf{a}_y$ şeklinde değiştiğine göre, elektrik akı yoğunluğu vektörünü ve manyetik akı yoğunluğu vektörünü bulunuz.

a) Manyetik dalgayı bulunuz.

b) Düzlem elektromanyetik dalgayı tanımlayınız.

c) Bir düzlem elektromanyetik dalganın elektrik ve manyetik alan dalgalarının birbirlerine dik olduklarını gösteriniz..

d) Elektrik alan vektörünün manyetik alan vektörüne oranının mutlak değerini bulunuz.

Cevaplar:

1) Elektrik akı yoğunluğu vektörü

$$\mathbf{D}(\mathbf{r}, t) = \epsilon \mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$$

olup burada $\mathbf{r} = x\mathbf{a}_x + y\mathbf{a}_y + z\mathbf{a}_z$ 'dir. Elektrik alanı $\mathbf{E}(z,t)$ olarak verildiğine göre, $x=y=0$ alınmış demektir. Yâni, elektrik alanı bir dalga olarak sâdece z doğrultusunda z değişkeninin fonksiyonu olarak verilmiştir. Ayrıca t parametresi dalganın zamana da bağlı olduğunu göstermektedir. Buna göre, elektrik akı yoğunluğu vektörü boşlukta $\mathbf{D}(z,t) = \epsilon_0 \mathbf{E}(z,t) = \epsilon_0 E_m \sin(\omega t - \beta z) \mathbf{a}_z$ olur.

Manyetik alanı bulmak için (67) kullanılır:

$$\Delta \wedge \mathbf{E}(t, \mathbf{r}) = -\frac{\partial \mathbf{B}(t, \mathbf{r})}{\partial t}$$

$$\begin{vmatrix} \mathbf{a}_x & \mathbf{a}_y & \mathbf{a}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial x} \\ 0 & E_m \sin(\omega t - \beta z) & 0 \end{vmatrix} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

veyâ

$$\beta E_m \cos(\omega t - \beta z) \mathbf{a}_x = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

ya da buradan manyetik akı yoğunluğu vektörü

$$\mathbf{B} = -\int \beta E_m \cos(\omega t - \beta z) dt \mathbf{a}_x = -\frac{\beta E_m}{\omega} \sin(\omega t - \beta z) \mathbf{a}_x \text{ Wb/m}$$

olur.

a) Manyetik alan vektörü

b)

$$\mathbf{H} = -\frac{\beta E_m}{\mu_0 \omega} \sin(\omega t - \beta z) \mathbf{a}_x = -H_m \sin(\omega t - \beta z) \mathbf{a}_x \text{ A/m}$$

$$H_m = \frac{\beta E_m}{\mu_0 \omega}$$

olur. Bu manyetik dalgayı meydana getirir.

b)

$$\mathbf{E}(z, t) = E_m \sin(\omega t - \beta z) \mathbf{a}_y$$

$$\mathbf{H} = H_m \sin(\omega t - \beta z) \mathbf{a}_x$$

şeklinde, Maxwell denklemlerini sağlayan elektrik ve manyetik alan dalgalarının meydana getirdiği müşterek dalgaya düzlem elektromanyetik dalga denir.

Görüldüğü gibi bir düzlem elektromanyetik dalganın iki alan bileşeni vardır. Bunlardan bir tânesi elektrik alanı (dalgası) ikincisi manyetik alandır (dalgadır). Düzlem elektromanyetik dalganın bu alan dalgaları her zaman birbirine diktir.

c)

$$\mathbf{E}(z, t) = E_m \sin(\omega t - \beta z) \mathbf{a}_y$$

$$\mathbf{H} = H_m \sin(\omega t - \beta z) \mathbf{a}_x$$

formüllerinden görüldüğü gibi, düzlem elektromanyetik alanın elektrik alanı dik kartezyen koordinat sisteminde y eksenini doğrultusunda ve manyetik alanı x eksenini doğrultusunda olduğu için, düzlem elektromanyetik alanın bu alan dalgaları her zaman birbirlerine dik kalırlar.

d)

$$\left| \frac{\mathbf{E}}{\mathbf{H}} \right| = \left| \frac{E_m}{H_m} \right| = \frac{E_m}{\beta E_m} \mu_o \omega = \frac{\mu_o \omega}{\beta} = \mu_o c = \mu_o \frac{I}{\sqrt{\mu_o \epsilon_o}} = \sqrt{\frac{\mu_o}{\epsilon_o}} = Z_o = 120\pi \Omega = 377 \Omega$$

$$\beta = \frac{\omega}{c}, \quad c = \frac{I}{\sqrt{\mu_o \epsilon_o}}$$

Görüldüğü gibi, elektrik alan vektörünün manyetik alan vektörüne oranının mutlak değeri sâbittir ve ohm boyutundadır. Buna elektromanyetik dalganın boşluktaki empedansı denir.

6.15. BİR KUVVETİN MOMENTİ

Bir kuvvetin bir noktaya göre momenti, bu kuvvetin bu noktaya olan uzaklığı ile bu kuvvetin vektör çarpımı olarak tanımlanır ve \mathbf{T} vektörü ile gösterilir (Şekil 14). Şekilde, dik kartezyen koordinat sisteminde P noktasındaki bir \mathbf{F} kuvveti ve bunun başlangıç noktasına olan r uzaklığı görülmektedir.

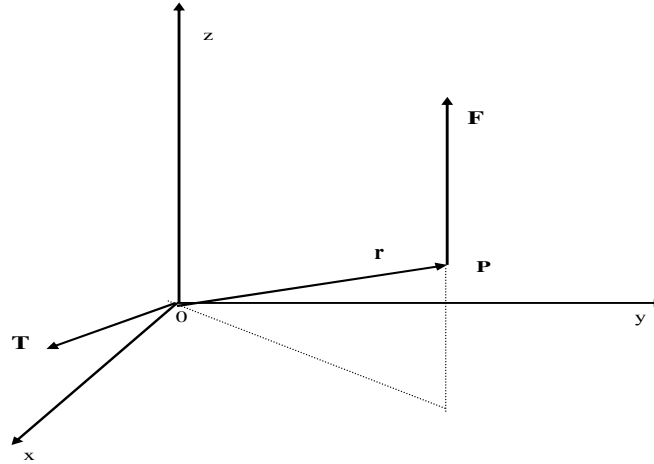
\mathbf{F} kuvvetinin r kadar uzaklıkta bulunan O başlangıç noktasına göre momenti

$$\mathbf{T} = \mathbf{r} \wedge \mathbf{F} \quad (88)$$

olarak tanımlanır. Moment vektör bir büyüklüktür, birimi Nm'dir, başlangıçtan geçen xy düzlemi içinde olup \mathbf{r} vektörü ile \mathbf{F} kuvvetinin meydana getirdiği düzleme diktir.

Sağ elin baş parmağı vektör yönünü gösterecek şekilde elin dört parmağı vektörü kavradığında dört parmağın yönü, \mathbf{r} vektörü ile \mathbf{F} kuvvetinin meydana getirdiği düzlemin birim normal vektörünün yönünü verir.

Moment vektörünün yönü, elde edilen bu birim normal vektörün yönündedir.



Şekil 14 Dik kartezyen koordinat sisteminde bir \mathbf{F} kuvveti ve bunun başlangıç noktasına olan r uzaklığı

6.16. BİR BOBİNİN MANYETİK MOMENTİ

Şekil 15'te görüldüğü gibi, bir \mathbf{B} indüksiyon alanı içinde, y doğrultusunda L boyunda ve x doğrultusunda w genişliğinde olan dikdörtgen şeklinde N sarımlı bir bobinden I akımı aksın.

$$\mathbf{F} = Q(\mathbf{v} \wedge \mathbf{B}) = It(\mathbf{v} \wedge \mathbf{B}) = I(\mathbf{L} \wedge \mathbf{B}) \quad (89)$$

Bobinin (II) ve (IV) kenarlarına uygulanan kuvvetler, indüksiyon vektörünün bu kenarlara paralel olmaları yüzünden, sıfırdır. (I) ve (III) kenarlarına uygulanan kuvvetleri bulalım:

$$\mathbf{F}_I = I(\mathbf{L} \wedge \mathbf{B}) = I(\mathbf{L}a_y \wedge \mathbf{B}a_x) = -LIBa_z \quad (90)$$

$$\mathbf{F}_{III} = I(-\mathbf{L} \wedge \mathbf{B}) = I(-\mathbf{L}a_y \wedge \mathbf{B}a_x) = LIBa_z \quad (91)$$

Şiddetleri eşit ve yönleri zıt olan iki kuvvete *Kuvvet Çifti* denir. Bu iki kuvvet bir kuvvet çifti meydana getirir. Bir kuvvet çifti, uygulandığı bir cismi, eksenî etrafında bir dönmeye zorlar. Buna göre, \mathbf{F}_I , bobinin (I) kenârını aşağı doğru; \mathbf{F}_{III} , bobinin (III) kenârını yukarıya doğru çekerek bobine başlangıç noktası civârında bir dönme kazandırır. Dolayısıyla bu kuvvetlerin başlangıç noktasına göre döndürme momentleri hesaplanabilir.

(I) kenârının başlangıç noktasına olan uzaklığı $\mathbf{r}_I = -(w/2)\mathbf{a}_x$, \mathbf{F}_I kuvvetinin bu noktaya göre momentini

$$\mathbf{T}_I = -\frac{w}{2}\mathbf{a}_x \wedge (-LIBa_z) \quad (92)$$

ve (III) kenarının başlangıç noktasına olan uzaklığı $\mathbf{r}_{III} = (w/2)\mathbf{a}_x$, \mathbf{F}_{III} kuvvetinin bu noktaya göre momentini

$$\mathbf{T}_{III} = \frac{w}{2}\mathbf{a}_x \wedge (LIBa_z) \quad (93)$$

olup toplam döndürme momentini

$$\mathbf{T} = \mathbf{T}_I + \mathbf{T}_{III} = -\frac{w}{2}\mathbf{a}_x \wedge (-LIBa_z) + \frac{w}{2}\mathbf{a}_x \wedge (LIBa_z)$$

ya da

$$\mathbf{T} = -\frac{w}{2}LIBa_y - \frac{w}{2}LIBa_y = -wLIBa_y \quad (94)$$

bulunur. Bu moment $-y$ doğrultusundadır. Burada $S = wL$ alınırsa $\mathbf{m} = S\mathbf{I}a_n$ olarak tanımlanan vektöre içinden I akımı akan bir sarımlı ve S yüzey alanlı bir çevrimin manyetik momentini denir, birimi Am^2 'dir. Manyetik momentin yönü \mathbf{a}_n yüzeyin birim normal vektörü yönündedir. Şekil 15'te \mathbf{a}_n yüzeyin birim normalinin yönü $-\mathbf{a}_z$ yönündedir, $\mathbf{a}_n = -\mathbf{a}_z$. Buna göre döndürme momentini manyetik moment cinsinden

$$\mathbf{T} = (\mathbf{m} \wedge \mathbf{B}) \quad (95)$$

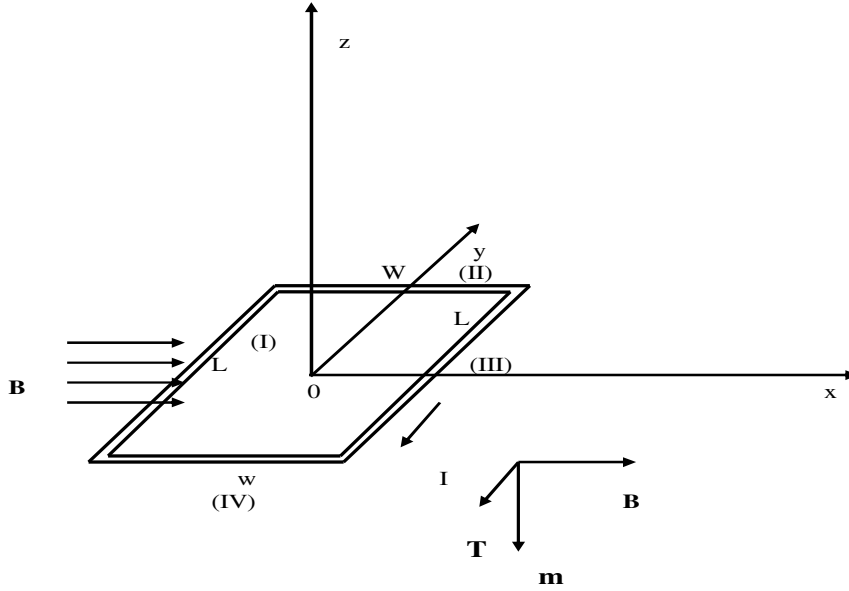
olarak ifade edilebilir. \mathbf{m} vektörü \mathbf{B} vektörüne dik ise momentin değeri $T = mB = ISB$ olur. Döndürme momentini, \mathbf{m} vektörü \mathbf{B} vektörü ile üst üste geldiğinde sıfır olur.

Sonuç olarak diyebiliriz ki, içinden I akımı akan S yüzey alanlı bir bobinin içinde bulunduğu bir **B** indüksiyon alanında öyle bir **T** döndürme momenti vardır ki, bu moment kendisini sıfırlamak için **m** vektörünü **B** vektörü ile üst üste gelmeye zorlar. Bu ise bobini döndürür, bu iki büyüklük hiçbir zaman üst üste gelemez. Çünkü, **m** vektörü kovalar, **B** vektörü devamlı kaçır, dolayısıyla bobin dönmesini sürdürür.

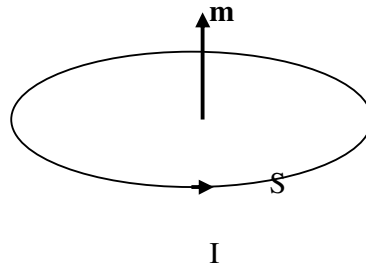
Manyetik moment kavramı, yüklü parçacıkların yörünge davranışlarının anlaşılmasında da önemli bir kullanım alanına sahiptir. Örneğin, dâire şeklindeki bir yörüngede ω açısal hızı ile dönmekte olan q yüklü bir parçacığın (meselâ çekirdek etrafında dönen elektronun)

$$I = \frac{q}{T} = \frac{q}{\frac{2\pi}{\omega}} = \frac{q\omega}{2\pi} \quad (96)$$

akımından dolayı, Şekil 16'da görüldüğü gibi, parçacığın yörünge düzlemine dik olan bir manyetik moment ortaya çıkar. Bunun yönü yörünge düzleminin birim normal vektörü yönündedir.



Şekil 15 Bir **B** indüksiyon alanı içinde, y doğrultusunda L boyunda ve x doğrultusunda w genişliğinde olan dikdörtgen şeklinde içinden I akımı akan N sarımlı bir bobin



Şekil 16 Bir parçacığın manyetik momentini

Sorular:

1) Bir elektronun çekirdek etrafındaki açısal hızı $\omega = 6.28 \times 10^{18}$ r/s olduğuna göre, 10 \AA 'lık bir yörünge yarıçapına sahip olan bu elektronun meydana getirdiği akımı ve manyetik momentin değerini bulunuz.

2) $E(t) = 10 \sin(10^8 t - \beta z)$ V/m olarak verildiğine göre,

a) Serbest uzayda yayılan manyetik alanı,

b) Yukarıda verilen elektrik alanı kırılma indisi 9 olan bir ortam içinde bulursa, yayılma hızı ne olur?

c) Boşlukta β faz sâbiti ne olur?

d) Adı geçen bu ortam içinde β faz sâbiti ne olur?

3) $z=0$ düzlemi içinde yarı çapı 45 cm olan dâire şeklindeki bir iletkenin direnci 25 ohm olup bu $5 \sin^3 t \text{ a}_z$ T alanı içinde bulunduğuna göre,

a) İletkenin sınırladığı yüzeyden geçen manyetik akıyı,

b) İletkende indüklenen gerilimi,

c) İndükleme akımını bulunuz.

4) Hidrojen çekirdeğinin etrafındaki r yarı çaplı yörüngede dönen bir elektronun çekirdek üzerinde meydana getirdiği manyetik alanın ifâdesini çıkarınız.

Cevaplar:

1) $\omega = 6.28 \times 10^{18}$ r/s

$$r = 10 \times 10^{-10} \text{ m}$$

$$I = \frac{q\omega}{2\pi} = \frac{6.28 \times 10^{18} \times 1.602 \times 10^{-19}}{6.28} = 160.2 \text{ mA}$$

$$m = SI = \pi r^2 I = 3.14 \times (10 \times 10^{-10})^2 \times 160.2 \times 10^{-3} = 5 \times 10^{-19} \text{ Am}^2$$

$$2a) \quad \left| \frac{\mathbf{E}}{\mathbf{H}} \right| = \left| \frac{E_m}{H_m} \right| = 377 \text{ } \Omega \rightarrow H_m = E_m / 377 = 0.027$$

$$H(t) = 0.027 \sin(10^8 t - \beta z)$$

$$b) \quad v = c/n = \omega / \beta = 3 \times 10^8 / 9 = 0.333 \times 10^8 \text{ m/s}$$

$$c) \quad \beta = \omega / c = 10^8 / 3 \times 10^8 = 0.333 \text{ m}^{-1}$$

$$d) \quad v = c/n = \omega / \beta \rightarrow \beta = 9\omega / c = 9 \frac{1}{3} = 3 \text{ m}^{-1}$$

$$3a) S = \pi r^2 = 3.14 \times (45 \times 10^{-2})^2 = 0.6359 \text{ m}^2$$

$$\psi = \mathbf{B} \cdot \mathbf{S}$$

$$= B a_z \cdot S a_z = BS = 5 \sin^3 t \times 0.6359 = 3.1795 \sin^3 t \text{ Wb}$$

$$(b) \quad e = - \frac{d\psi}{dt} = - \frac{d}{dt} (3.1795 \sin^3 t) = - 3 \times 3.1795 \sin^2 t \cos t$$

$$= 9.5385 \sin^2 t \cos t \text{ V}$$

$$c) I(t) = e/25 = 9.5385/25 \sin^2 t \cos t \\ = 0.3815 \sin^2 t \cos t \text{ A}$$

4) Hidrojen çekirdeğinde bir proton olup bunun yükü q ile gösterebileceğimiz elektron yükünün büyüklüğüne eşit ve zıt işaretlidir. Dolayısıyla, elektronun q yükü protonun bulunduğu yerde

$$E = -\frac{q}{4\pi\epsilon r^2}$$

elektrik alanını meydana getirir. (-) işareti, negatif işaretli elektronun yükünün peşin olarak kullanılmasından ileri gelmektedir. Bu elektrik alanı proton üzerine $F=qE$ ya da

$$F = -\frac{q^2}{4\pi\epsilon r^2}$$

kuvvetini uygular. (-) işareti, yüklerin birbirini çektiğini gösterir. Bu çekimle elektronun çekirdek üzerine düşmemesi için, elektrona dâire şeklindeki bir dönme yapması emredilmiştir. Bu dönme ona merkezden dışa doğru yönlü bir merkez kaç kuvveti kazandırır, f :

$$f = \frac{mv^2}{r}$$

Böylece çekim ve merkez kaç kuvvetlerinin etkileri altında kalan elektronun dâire şeklindeki bir dönme yapması ancak bu iki kuvvetin eşit olmasıyla sağlanır:

$$\frac{q^2}{4\pi\epsilon r^2} = m \frac{v^2}{r} = m\omega^2 r, \quad \omega^2 = \frac{q^2}{4\pi\epsilon mr^3}$$

Elektronun meydana getirdiği akım

$$I = \frac{q\omega}{2\pi}$$

olup

$$B = \mu H = \mu \frac{I}{2r} = \mu \frac{I}{2r} \frac{\omega q}{2\pi} = \frac{\mu\omega q}{4\pi r} = \frac{\mu q^2}{8\pi r^2 \sqrt{\pi\epsilon mr}} \rightarrow H = \frac{q^2}{8\pi r^2 \sqrt{\pi\epsilon mr}}$$

6.17. ÖZ ENDÜKTANS

Şekil 10'da verilen N sarımlı bir bobinin içinden geçen akım $i(t)$ ve halkaladığı manyetik akı $\psi(t)$ olduğuna göre,

$$L = \frac{d\psi(t)}{di(t)} = N \frac{d\phi(t)}{di(t)} \quad (97)$$

ile tanımlanan büyüklüğe *Öz Endüktans* denir, boyutu Wb/A, birimi Henry, h,'dir. Burada $\phi(t)$, bir sarıma âit akıyı göstermektedir. Buna göre (97) formülü

$$v(t) = -\frac{d\psi}{dt} = -N \frac{d\phi(t)}{dt} = -N \frac{d\phi(t)}{di(t)} \frac{di(t)}{dt} = -L \frac{di(t)}{dt} \quad (98)$$

olur. Eğer akım stasyoner ise o zaman öz indüktans

$$L = \frac{\psi}{I} = N \frac{\phi}{I} \quad (99)$$

ile verilir.

Bobinin etrafında oluşan manyetik alan içinde depo edilen enerji

$$W = \frac{1}{2} LI^2 \quad (100)$$

ile verilir. Elektrik alanında biriken enerji

$$W = \frac{1}{2} \int \epsilon E^2 dV = \frac{1}{2} \int \frac{D^2}{\epsilon} dV = \frac{1}{2} \int (\mathbf{D} \cdot \mathbf{E}) dV \quad (101)$$

olup buna benzer şekilde manyetik alanda depo edilen enerji için

$$W = \frac{1}{2} \int (\mathbf{B} \cdot \mathbf{H}) dV \quad (102)$$

yazılabilir. (99) ve (101)'den öz indüktans

$$L = \frac{\int (\mathbf{B} \cdot \mathbf{H}) dV}{I^2} \quad (103)$$

bulunur ki bu görüldüğü gibi manyetik alan büyüklükleri cinsindedir.

Sorular:

- 1) İç yarı çapı a ve dış yarı çapı b olan bir koaksiyal kablo içinden I akımı geçmektedir. Kablonun birim uzunluk başına düşen öz indüktansını bulunuz.
- 2) (1)'deki sonucu (102)'den hareket ederek bulunuz.

Cevap:1) Yarıçap doğrultusundaki değişken r olmak üzere I akımının manyetik alanı

$$\mathbf{H} = \frac{I}{2\pi r} \mathbf{a}_\phi$$

ve manyetik indüksiyon

$$\mathbf{B} = \mu \frac{I}{2\pi r} \mathbf{a}_\phi$$

olur. İç ve dış iletken arasında dolaşan manyetik akı

$$\psi = \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = \int_S B dS = \int_{z=0}^{\ell} \int_{r=a}^b \frac{\mu I}{2\pi r} dr dz = \frac{\mu I \ell}{2\pi} \ln \frac{b}{a}$$

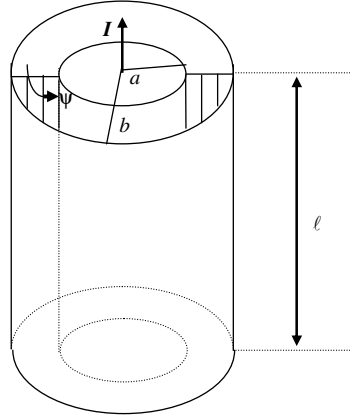
olarak elde edilir. (91)'den

$$L = \frac{\psi}{I} = \frac{\mu \ell}{2\pi} \ln \frac{b}{a}$$

olarak öz indüktans bulunur. Birim uzunluk başına düşen öz indüktans ise

$$\bar{L} = \frac{L}{\ell} = \frac{\mu}{2\pi} \ln \frac{b}{a}$$

olur.



$$2) \quad L = \frac{\int_V (\mathbf{B} \cdot \mathbf{H}) dV}{I^2}, \quad \mathbf{H} = \frac{I}{2\pi r} \mathbf{a}_\phi, \quad \mathbf{B} = \mu \frac{I}{2\pi r} \mathbf{a}_\phi$$

$$L = \frac{\int_V (\mathbf{B} \cdot \mathbf{H}) dV}{I^2} = \int_V \frac{\frac{\mu I}{2\pi r} \mathbf{a}_\phi \cdot \frac{I}{2\pi r} \mathbf{a}_\phi}{I^2} dV = \int_{z=0}^{\ell} \int_{r=a}^b \int_{\phi=0}^{2\pi} \frac{\mu}{4\pi^2 r^2} r d\phi dr dz = \frac{\mu \ell}{2\pi} \ln \frac{b}{a}$$

$$\bar{L} = \frac{L}{\ell} = \frac{\mu}{2\pi} \ln \frac{b}{a}$$

Gözler, ruhun aynasıdır derler... Boş lafl..
Ne mûnis bakışların arkasında ne fırtınalar gizlidir.

"Türkler İslâm oldukları halde, bozulmaya, yoksulluğa, gerilemeye mâruz kaldılar, geçmişin bâtil alışkanlık ve inançlarıyla İslâmiyet'i karıştırdıkları ve bu sûretle gerçek İslâmiyet'ten uzaklaştıkları için, kendilerini düşmanlarının esiri yaptılar. Gerçek İslâm'ın çok yüce, çok

kıymetli gerçeklerini olduğu gibi almamakta inatçı bulundular. İşte gerilememizin belli başlı sebeplerini bu nokta teşkil ediyor...”

M. KEMAL ATATÜRK

Borak, Atatürk ve Din, s. 36-37 (Rönesans, Aralık 1991, s. 61).

BÖLÜM VII MANYETİK DEVRELER

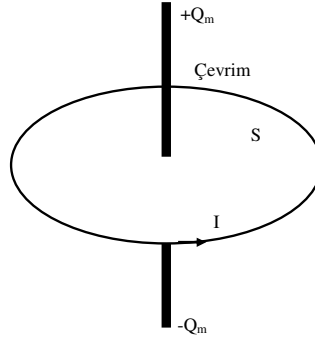
7.1. GİRİŞ

Akım taşıyan bir iletkenin çevresinde bir manyetik alan vardır. Kezâ mıknatıslı demirin civarında da bir alan bulunur. Mıknatıslı bu tür malzemelerin izâfî manyetik geçirgenlik sâbitleri, 600, 1000, 1500 gibi, birden çok büyüktür. Böyle malzemelere *Ferromanyetik Malzemeler* denir. Kobaltın izâfî manyetik geçirgenlik sâbitleri 250, nikelin 600 ve %2 katkılı çeliğin 5000 ve mumetalin 1000 000'dir.

Manyetik kutup şiddeti Q_m olan L uzunluğunda bir mıknatıs çubuğunun çevresinde bir S yüzeyi oluşturan bir kapalı çevrimde I çevre akımı varsa, bu büyüklükler

$$P_m = Q_m L = SI \quad (1)$$

şeklinde bir manyetik dipol momenti tanımlarlar ve bu P_m mıknatıs çubuğundaki net manyetik momenti gösterir (Şekil 1). Bu büyüklük mıknatıslanmanın tanımında kullanılabilir.



Şekil 1 Mıknatıs çubuğu ve bir kapalı çevrim

Birim hacimde bulunan manyetik dipol momentine *Mıknatıslanma* denir ve

$$M = \frac{P_m}{V} = \frac{Q_m L}{V} = \frac{SI}{V} = \frac{I}{L} \quad (2)$$

olarak tanımlanır ki, buradan mıknatıslanmanın boyutunun (biriminin) A/m olduğu kolayca görülebilir. M 'nin değeri V hacmi için ortalama bir değerdir.

Sürekli bir mıknatıslanmanın kast edilmesi hâlinde, ΔV hacmindeki net dipol momentini P_m olmak üzere, herhangi bir noktadaki mıknatıslanma

$$M = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{P_m}{\Delta V}, A/m \quad (2)$$

olarak tanımlanır.

Eğer mıknatıslanma, düzgün şekilde mıknatıslı olmayan bir mıknatıs çubuğundaki pozisyonun bir fonksiyonu olarak biliniyorsa, o zaman çubuğun toplam manyetik momenti

$$P_m = \int_v M dV, \text{ Am}^2 \quad (3)$$

olur ki, burada entegrasyon çubuğun hacmi üzerinden yapılır.

Hayatın en büyük hedefi bilgi değil, (insanlara fayda ve yarar getiren) harekettir.

*İlimsiz din kör, dinsiz ilim topaldır.
Einstein*

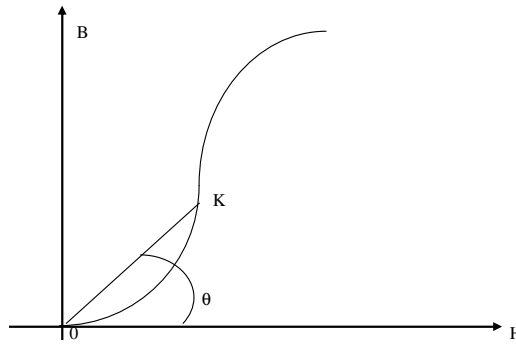
7.2. DEMİRİN MANYETİK ÖZELLİKLERİ

Elektrik makinelerinde, transformatörlerde ve bir çok ölçü âletlerinde en önemli parçaların demir ve demir alaşımlarından olduğu bilinen bir gerçektir. Bunun sebebi, ferromanyetik bir malzeme olan demirin mıknatıslığının bazı özel durumlarının olmasıdır.

Demirde verilen

$$B = \mu_0 \mu_r H = \mu H \quad (4)$$

ifâdesindeki $\mu = B/H$ değişimi lineer değildir (Şekil 2). Bu yüzden uygulamada μ ile H arasındaki bağıntıyı cetvel veyâ eğri ile gösterecek yerde, bunun B ile H arasındaki ilişki cetvel veyâ eğri ile gösterilir. Bu eğrilere B-H ya da mıknatıslanma eğrisi denir. Şekil 2, başlangıçta mıknatıslanmamış, B-H eğrisini göstermektedir.



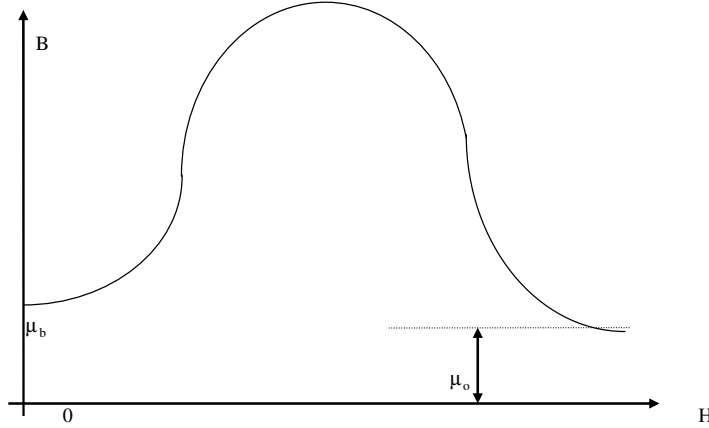
Şekil 2 İlk mıknatıslanma eğrisi

Şekil 2'deki eğriyi çizmek için, meselâ başlangıçta mıknatıslanmamış halka şeklinde hazırlanmış bir malzeme üstüne yerleştirilen ve uyarma sargısı denilen N sarımlı bir bobinden I akımı geçirilir, ve mıknatıslanma sağlanır. Halkanın ortalama uzunluğu $L = 2\pi R$ ise, meydana gelen manyetik alan

$$H = NI/L \quad (5)$$

olur ki, burada R halkanın ortalama yarıçapıdır. Halkada meydana gelen manyetik akı yoğunluğu B, ölçerek bulunur.

Başlangıçta $H=0$ ve $B=0$ olduğu kabul edildiği için Şekil 2'ye ilk mıknatıslanma eğrisi denir. Her ferromanyetik malzemenin, Şekil 3'deki gibi, kendine özel bir mıknatıslanma eğrisi vardır



Şekil 3 Mıknatıslanma eğrisi

Mıknatıslanma eğrisinden görülmektedir ki, başlangıçta B'deki artışın küçük olduğu ve sonra kuvvetlenerek eğrinin kıvrıldığı noktadan sonra azalmaya başladığı görülmektedir. μ_b , başlangıç anındaki manyetik geçirgenliktir.

Şekil 3'de görüldüğü gibi, manyetik alanın belli bir değeri için boşluk içindeki indüksiyon

$$B_o = \mu_o H \quad (5)$$

olmaktadır. Eğer boşluk yerine bir ferromanyetik malzeme gelirse, B yükselerek,

$$B = \mu H \quad (6)$$

olur.

Endüksiyondaki bu $B-B_o$ artışa malzemenin *Manyetik Polarizasyonu* denir ve bu fark $\mu_o M$ ile gösterilir.

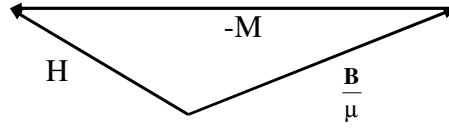
Aşağıdaki ilişkileri inceleyiniz:

$$B - B_o = \mu_o M$$

$$B = B_o + \mu_o M \quad (7)$$

$$B = \mu_o H + \mu_o M = \mu_o (H + M) \quad (8)$$

Burada üç vektör ilişkisi Şekil 4'te görülmektedir.



Şekil 4 Vektörlerin ilişkisi

Vektörler arasındaki ilişkilere devam edilirse,

$$B = \mu_0 \mu_r H$$

$$B = \mu \mu_r H = \mu_0 H + \mu_0 M = \mu_0 (H + M)$$

$$\mu = \mu_0 \left(1 + \frac{M}{H}\right) \quad (9)$$

$$\frac{M}{H} = \mu_r - 1 \quad (10)$$

$$M = (\mu_r - 1)H \quad (11)$$

$$M = \chi_m H \quad (12)$$

$$\chi_m = \mu_r - 1 \quad (13)$$

bulunur. Burada $\chi_m = M/H$ büyüklüğüne *Manyetik Süseptibilite* denir.

İzotropik malzemelerde \mathbf{M} ve \mathbf{H} vektörleri aynı yöndedir ve çalışma noktası ve μ skaldır. İzotrop olmayan malzemelerde, meselâ kristallerde \mathbf{M} ve \mathbf{H} vektörleri, genel olarak, aynı yönde değildir ve μ de skalar değildir. (7) ifâdesi, Maxwell denklemini sağlar ve

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \rightarrow \nabla \cdot \mathbf{H} = \nabla \cdot \mathbf{M}, \quad A/m^2 \quad (14)$$

olur.

Bir vektör alanın diverjansı sıfırdan farklı ise, bu alan bir kaynak, ya da bir başlangıç yeri içerir. Buna göre, (14)'ün yorumu şudur:

Çubuğun her iki ucunda mıknatıslanmanın bittiği yerde manyetik alan, manyetik alanın bittiği yerde mıknatıslanma başlar. Bu hiç durmadan devam eder. Ya da:

Mıknatıs çubuğunda devamlı bir kara nokta (Big Bang)-ak nokta (kıyâmet) yaratılışı vardır. Bu iki nokta mıknatıs içinde birleşerek her defâsında bir döngü tamamlanır. $\nabla \cdot \mathbf{H}$ ve $\nabla \cdot \mathbf{M}$ 'nin sıfır olmadığı yerlere mıknatıslı malzemenin manyetik kutuplarının olduğu yerler olarak bakılır. Dolayısıyla, düzgün mıknatıslı bir çubuğun kutupları, uç noktalarında bulunur.

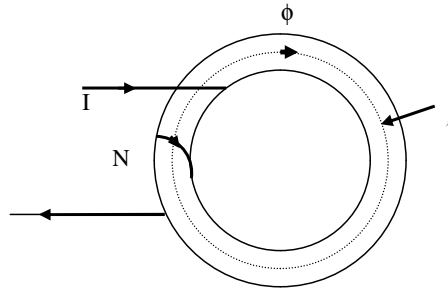
7.3. MANYETİK DEVRELER

Elektrik akımını taşıyan malzemeye iletken dendiğini biliyoruz. Manyetik akının da bir iletkeni vardır ki, bu bir ferromanyetik malzemedir. Nasıl bir akım iletkenden

ayrılmıyorsa, ona benzer şekilde bir manyetik akı da ferromanyetik malzemeden ayrılamaz. Manyetik akının malzemeler içinden geçtiği bir düzene manyetik devre denir.

Elektrik akımının pozitif ve negatif kutuplarda birleşerek bir kapalı devre oluşturması gibi, bir manyetik devredeki manyetik akı da kapalı bir devre oluşturur. Şekil 5'de basit bir manyetik devre görülmektedir. Burada ferromanyetik bir malzemeden yapılan halkanın iç yarıçapı R_1 , dış yarıçapı R_2 ise ortalama yarıçap $\ell = \frac{R_1 + R_2}{2}$ olur.

Halkaya sol taraftan N sarımlı bir bobin sarılmış ve içinden d.c. I akımı akmaktadır. Sağ elin 4 parmağı bobini akım yönünde kavradığında baş parmak ferromanyetik malzemenin içinden geçen Φ akısının yönünü verir.



Şekil 5 Basit bir manyetik devre

Manyetik devreyi besleyen manyetomotor kuvveti

$$\tau = NI \quad (15)$$

olur ki bu devreden

$$\Phi = BS \quad (16)$$

akısını akıtır. Burada S , manyetik devreyi meydana getiren halkanın dik kesitini gösterir. B büyüklüğü ise manyetik akı yoğunluğu olup $H\ell = NI$ ilişkisi yardımıyla

$$B = \mu H = \mu NI / \ell = \mu \tau / \ell \quad (17)$$

olur ki (16)'dan

$$\Phi = \frac{\mu \tau}{\ell} S = \frac{\tau}{\ell / \mu S} \quad (18)$$

elde edilir. Burada

$$R_m = \ell / \mu S \quad (19)$$

ile tanımlanan büyüklüğe manyetik devrenin direnci ya da relüktans denir, birimi $1/h$ 'dir. Bunun tersi manyetik devrenin iletkenliğini, $G_m = 1/R_m$, ya da permeansı verir, birimi h 'dir.

Sorular:

- 1) Bir demir yüzüğün kesiti 2 mm^2 ve ortalama uzunluğu 500 mm 'dir. 1 T 'lık bir manyetik akı yoğunluğu elde etmek için gerekli manyetomotor kuvvetini bulunuz.
- 2) Bobin 1000 ise akım ne olur?
- 3) Bu değerlere karşı düşen magnetik geçirgenlik ne olur?
- 4) İzaft magnetik geçirgenlik ne olur?
- 5) Relüktansın değerini bulunuz.
- 6) Relüktansı kullanarak manyetomotor kuvvetini bulunuz.

Cevaplar:

1) Malzemeye âit B - H eğrisinden 1 T için $H=1000 \text{ A/m}$ bulunur. Dolayısıyla,
 $\tau = NI = H\ell = 1000 \times 0.5 = 500 \text{ AS}$ (Amper-sarım)
 bulunur.

2) $N=1000$ ise $I=500/1000=0.5 \text{ A}=500 \text{ mA}$
 elde edilir.

$$3) \mu = B/H = 1/1000 = 10^{-3} \text{ h/m}$$

$$4) \mu_r = \mu / \mu_o = 10^{-3} / 4\pi \times 10^{-7} = 795$$

$$5) R_m = \frac{\ell}{BS} = \frac{0.5}{10^{-3} \times 2 \times 10^{-6}} = 2.5 \times 10^8 \text{ h}^{-1}, NI = R_m SB = 10^{-6} \times 2 \times 1 \times 2.5 \times 10^8 = 500 \text{ AS}$$

Manyetik devre ile elektrik devresine âit büyüklükler arasında şekil bakımından benzerlikler vardır:

Elektrik devresini besleyen elektromotor kuvvetinin manyetik devredeki karşılığı manyetomotor kuvveti; elektrik akının karşılığı manyetik akı ve direncin karşılığı relüktanstır. Bu benzerliklerden faydalanarak, elektrik devre çözümüne benzer şekilde, manyetik devre çözümleri yapılabilir.

7.4. HAVA ARALIKLI MANYETİK DEVRE

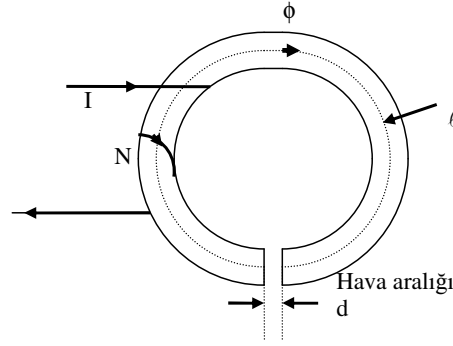
Şekil 6'da hava aralıklı basit bir manyetik devre görülmektedir. Hava aralığının genişliği d 'dir. Devrede dolaşan manyetik akıyı meydana getiren manyetik akı yoğunluğu vektörü ile uç etkileri ihmal edilirse, aralıktaki aralık yüzeyine dik olan manyetik akı yoğunluğu vektörü aynı olur. Şekil 7'de görüldüğü gibi, \mathbf{H}_i , demir içindeki manyetik alanı, \mathbf{B}_d , aralık içindeki manyetik akı yoğunluğu vektörünü göstermektedir.

Yukarıdaki açıklamaların ışığı altında uç etkileri ihmal edilirse,

$$\mathbf{H}_i = \mathbf{B} / \mu = \mathbf{B} / \mu_r \mu_o \quad (20)$$

$$\mathbf{H}_d = \mathbf{B} / \mu_o = \mathbf{H}_i \mu_r \quad (21)$$

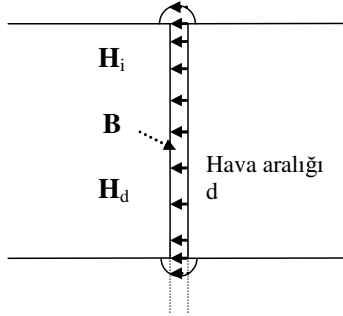
olur.



Şekil 6 Hava aralıklı bir basit manyetik devre

Çözülmesi gerekli olan problem yarığı olan bir manyetik devrede belli bir manyetik akıyı meydana getirmek için gerekli olan amper-sarımın tespit edilmesidir. (15)'den

$$\begin{aligned} NI=HL=H_i(\ell -d)+H_d d=H_i(\ell -d)+H_i \mu_r d \\ =H_i[(\ell -d)+\mu_r d] \end{aligned} \quad (22)$$



Şekil 7 Detaylandırılmış hava aralığı

Hava aralığında ve malzeme içindeki relüktanslar, sırasıyla

$$R_{md} = d/\mu S \quad (23)$$

$$R_{mm} = (\ell - d)/\mu S \quad (24)$$

manyetomotor kuvveti bunlar cinsinden

$$NI=BS(R_{md}+R_{mm})$$

olarak elde edilir.

Sorular:

1) Yukarıdaki problemde 2 mm aralık için amper-sarımı hesaplayınız.
1000 A/m

Cevaplar:

1)

$$\begin{aligned} H_i &= 1000 \text{ A/m} \\ d &= 2 \text{ mm} = 2 \times 10^{-3} \text{ m} \\ \ell &= 0.5 \text{ m} \\ \mu_r &= 795 \end{aligned}$$

$$NI = HL = H_i[\ell - d] + \mu_r d] = 1000[(0.5 - 2 \times 10^{-3}) + 795 \times 2 \times 10^{-3}] = 2088 \text{ AS}$$

7.5 MANYETİK ARALIK KUVVETİ

Şekil 7'deki aralıkta karşı yüzeyler mıknatısın zıt kutuplarını meydana getirdiği bu iki kutup birbirini bir kuvvetle çekerler. Bir çok elektromekanik cihazlarda bu özellikten faydalanılır. Aralıkta depo edilen manyetik enerji

$$w_m = \frac{1}{2} \frac{B^2}{\mu}, \quad (\text{J/m}^3) \quad (25)$$

ile verilir. Aralık ne kadar dar olursa alan da o kadar düzgün olur. Aralıkta bulunan toplam enerji

$$W_m = w_m S d = \frac{1}{2} \frac{B^2}{\mu} S d, \quad \text{J} \quad (26)$$

olur. Aralık uzunluğu sonsuz küçük δ kadar artarsa, enerjide δW_m kadar artar. Yâni,

$$\delta W_m = w_m S \delta = \frac{1}{2} \frac{B^2}{\mu} S \delta, \quad (\text{J}) \quad (27)$$

olur. Bu enerji artışı, δ mesafedeki kutuplara uygulanan kuvvet tarafından kazanılan enerjiye eşittir:

$$F \delta = \frac{1}{2} \frac{B^2}{\mu} S \delta, \quad (28)$$

Buradan kuvvet çekilirse,

$$F = \frac{1}{2} \frac{B^2}{\mu} S, \quad (\text{N}) \quad (29)$$

elde edilir. Basınç, P, adı verilen birim yüzeye düşen kuvvet ise

$$P = \frac{1}{2} \frac{B^2}{\mu}, \quad (\text{N/m}^2) \quad (30)$$

olur.

Herkesin mizâcına uygun bir lisan vardır. Alçak ruhlu bir insana âşinâsı olmadığı yumuşak bir dille muamele edersek kibri, kabalığı ve serkeşliği artar.

*Makâmımız âlâ karlı dağ olsa,
Etrafı hep lâle sümbül bağ olsa,
Her ne kadar paşa olsa bey olsa,
Yakasız gömleğe sarılır bir gün.*

Seyrânî

KILAVUZ (İNDEKS)

B
Bessel Diffransiyel Denklemi 86

Ç
Çarpımlar Çözümü 81

D
Dâimî Rejim 57
Del operatörü 4
Dirac Delta Fonksiyonu 24
Distribisyon (Distribution) Teorisi 23
Dış Alan Kuvveti 38
Diyamanyetik Malzemeler 92
Diverjans Teoremi 33

E
Elektrik *Süseptibilite* (Elektrik Duyarlılık) 72
Eşpotansiyel Yüzey 12
Elektrik Dipol Momenti 68
Entegral Biçimli Maxwell Denklemleri 112

F
Ferromanyetik Malzemeler 92, 132

H
Hareketlilik Katsayısı 49
Harmonik Osilatör Denklemi 52

G
Geçici Rejimi 57
Genelleştirilmiş Fonksiyonlar 23
Green Fonksiyonu 24

İ
İletkenlik 49, 53, 56, 65

K
Koruyuculuk (Konsarvatiflik) 20, 21

L
Laplace Denklemi 78, 80, 82
Legendre Polinomu 87
Lenz Kânunu 108

M
Manyetik Gerilim 118, 101, 132
Manyetomotor Kuvveti 101, 136, 138
Maxwell Denklemleri 110

N
Nabla 10
Nokta Biçimli Maxwell Denklemleri 112

Ö
Öz Frekansı 52

P
Paramanyetik Malzemeler 92
Poisson Denklemi 78
Potansiyel Farkı 19, 20

S
Skaler fonksiyon 4, 11
Skaler potansiyel 10
Seperasyon Metodu 81
Seperasyon Sâbiti 81, 84
Skaler Potansiyel Fonksiyonu 10
Stasyonere Alanlar 48
Stokes teoremi 107
Sürüklenme Hızı 48,49