

**T.C.
PAMUKKALE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI**

BÖLÜNTÜLÜ OKTONYON CEBİRİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

ADNAN KARATAŞ

DENİZLİ, HAZİRAN - 2016

T.C.
PAMUKKALE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI



BÖLÜNTÜLÜ OKTONYON CEBİRİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

ADNAN KARATAŞ

DENİZLİ, HAZİRAN - 2016

KABUL VE ONAY SAYFASI

ADNAN KARATAŞ tarafından hazırlanan “BÖLÜNTÜLÜ OKTONYON CEBİRİ” adlı tez çalışmasının savunma sınavı 03.06.2016 tarihinde yapılmış olup aşağıda verilen jüri tarafından oy birliği / ~~oy çokluğu~~ ile Pamukkale Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı Yüksek Lisans Tezi olarak kabul edilmiştir.

Jüri Üyeleri

İmza

Danışman
Doç. Dr. Serpil HALICI

Üye
Prof. Dr. Halim ÖZDEMİR

Üye
Doç. Dr. Hasan Hüseyin KART


.....

.....

.....

Pamukkale Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun 15.06.2016. tarih ve 24/21..... sayılı kararıyla onaylanmıştır.


.....

Prof. Dr. Orhan KARABULUT

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

Bu tezin tasarımı, hazırlanması, yürütülmesi, araştırmalarının yapılması ve bulgularının analizlerinde bilimsel etiğe ve akademik kurallara özenle riayet edildiğini; bu çalışmanın doğrudan birincil ürünü olmayan bulguların, verilerin ve materyallerin bilimsel etiğe uygun olarak kaynak gösterildiğini ve alıntı yapılan çalışmalara atfedildiğine beyan ederim.

ADNAN KARATAŞ



ÖZET

BÖLÜNTÜLÜ OKTONYON CEBİRİ
YÜKSEK LİSANS TEZİ
ADNAN KARATAŞ
PAMUKKALE ÜNİVERSİTESİ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

(TEZ DANIŞMANI:DOÇ. DR. SERPİL HALICI)

DENİZLİ, HAZİRAN 2016

Bu tezde amacımız, oktonyon ve bölüntülü (split) oktonyon cebirini detaylı olarak incelemek ve split oktonyon cebirinin elemanlarının matris temsillerini çalışmaktır. Ayrıca, split Fibonacci oktonyonları ve split Lucas oktonyonları incelemektir. Bu amaca yönelik olarak;

Bölüm 1 de, çalışma boyunca kullanılacak kavramlar verilmiştir.

Bölüm 2 de, önce kuaterniyonlar daha sonra oktonyonlar ayrıntılı bir şekilde incelenmiştir. Oktonyon cebirinin özel bir durumu olan split oktonyon cebiri incelenerek, bu cebirlerin genelleştirilmiş durumları ele alınmıştır.

Bölüm 3 te, split oktonyon cebiri için, Zorn tarafından tanımlanmış olan vektör matris gösterimi incelenmiştir. Ayrıca, yine bu bölümde Zorn matris gösteriminin reel oktonyon cebirine uygulanması ile ilgili tanım ve örneklere de yer verilmiştir.

Bölüm 4 te, split Fibonacci ve Lucas oktonyonları incelenmiş ve ilk kez tarafımızdan bu oktonyonların Zorn matris gösterimleri verilmiştir.

Son olarak Bölüm 5 da, tez çalışmamızdan çıkan sonuçlar belirtilmiştir.

ANAHTAR KELİMELEER: Kuaterniyon Cebiri, Oktonyon Cebiri, Split Oktonyon Cebiri, Zorn Matris Gösterimi, Split Fibonacci Oktonyonları

ABSTRACT

**SPLIT OCTONION ALGEBRA
MSC THESIS
ADNAN KARATAŞ
PAMUKKALE UNIVERSITY INSTITUTE OF SCIENCE
MATHEMATICS**

(SUPERVISOR: ASSOC. PROF. DR. SERPİL HALICI)

DENİZLİ, JUNE 2016

In this thesis, our aim is to investigate octonion and split octonion algebras detailly and give matrix representations for split octonion algebra. In addition, we investigate split Fibonacci octonions and split Lucas octonions. In this manner;

In Chapter 1, notations are given that will be used throughout the study.

In Chapter 2, firstly quaternions then octonions are investigated detailly. Split octonion algebra, which is a special case of octonion algebra, is investigated and generalized cases for these algebras are considered.

In Chapter 3, for split octonion algebra, vector matrix representation which defined by Zorn is investigated. Also, definition and examples of Zorn matrix representation for real octonion algebra are given in this chapter.

In Chapter 4, split Fibonacci and Lucas octonions are investigated. Zorn matrix representation for these octonions is used by us for the first time.

Finally in Chapter 5, the results obtained from our thesis are remarked.

KEYWORDS: Quaternion Algebra, Octonion Algebra, Split Octonion Algebra, Zorn Matrix Representation, Split Fibonacci Octonions

İÇİNDEKİLER

Sayfa

ÖZET.....	i
ABSTRACT	ii
İÇİNDEKİLER	iii
ŞEKİL LİSTESİ.....	iv
TABLO LİSTESİ.....	v
SEMBOL LİSTESİ.....	vi
ÖNSÖZ.....	vii
1. GİRİŞ.....	1
1.1 Tarihçe	1
1.2 Temel Tanım ve Kavramlar.....	3
2. OKTONYONLAR VE SPLIT OKTONYONLAR	11
3. OKTONYONLAR VE MATRİS GÖSTERİMLERİ	26
3.1 Kuaterniyonların Matris Gösterimleri	26
3.2 Oktonyonların Matris Gösterimleri	29
4. SPLIT FİBONACCİ VE LUCAS OKTONYONLARI VE BUNLARIN MATRİS GÖSTERİMLERİ.....	36
4.1 Split Fibonacci Oktonyonları ve Bunların Matris Gösterimleri	36
4.2 Split Lucas Oktonyonları ve Bunların Matris Gösterimleri	40
5. SONUÇ VE ÖNERİLER	45
6. KAYNAKLAR.....	46
7. ÖZGEÇMİŞ	50

ŞEKİL LİSTESİ

	<u>Sayfa</u>
Şekil 2.1: Kuaterniyonlar İçin Fano Düzlem Gösterimi	13
Şekil 2.2: Oktonyonlar İçin Fano Düzlem Gösterimi	13
Şekil 2.3: Oktonyonlar İçin Fano Düzlem Gösterimi	14

TABLO LİSTESİ

	<u>Sayfa</u>
Tablo 1.1: Kuaterniyon Çarpım Tablosu.....	8
Tablo 1.2: Genelleştirilmiş Kuaterniyon Çarpım Tablosu	8
Tablo 2.1: Oktonyon Çarpım Tablosu	11
Tablo 2.2: Kuaterniyon Çarpım Tablosu	12
Tablo 2.3: Oktonyon Çarpım Tablosu	15
Tablo 2.4: Genelleştirilmiş Oktonyon Çarpım Tablosu	21
Tablo 3.1: Split Oktonyon Çarpım Tablosu	31

SEMBOL LİSTESİ

- δ_{ij} : Kronecker delta tensörü
- ε_{ijk} : Levi-Civita tensörü
- \mathbb{H} : Reel kuaterniyon cebiri
- \mathbb{O} : Reel oktonyon cebiri
- \mathcal{O}_{F_n} : n. split Fibonacci oktonyonu
- \mathbf{K}_n : n. split Fibonacci oktonyonunun Zorn matris gösterimi
- \mathcal{O}_{L_n} : n. split Lucas oktonyonu
- \mathbf{T}_n : n. split Lucas oktonyonunun Zorn matris gösterimi

ÖNSÖZ

Tezimin konusunu seçmemde bana yardımcı olan ve bugüne kadar benden hiçbir yardımımı esirgemeyen, bilgi ve tecrübelerini benimle paylaşan, sayın hocam Doç. Dr. Serpil HALICI ya teşekkür ederim.

Ayrıca, ömrü boyunca çevresini olumlu yönde etkileyen herkese, huzur ve mutluluk dolu güzel bir yaşam dilerim.

Adnan KARATAŞ

1. GİRİŞ

1.1 Tarihçe

Cebir ile ilgili bilinen en eski yazılı kaynaklardan birisi 9. yüzyılda yaşamış olan Ebû Cafer Muhammed bin Mûsâ el-Hârizmî nin, “El’Kitab’ül-Muhtasar fi Hıساب’il Cebri ve’l-Mukabele” (Cebir ve Denklem Hesabı Üzerine Özet Kitap) kitabıdır. Bu kitap, bugünkü cebirin temellerini atmakla birlikte, cebirsel hesaplamalarda kolaylık sunmuştur. Ayrıca bu kitap, sonuçları her zaman pozitif çıkacak şekildeki, lineer kuadratik denklemlerin çözümü ile ilgili bilgileri de içerir.

Cebir, Hârizmî nin 12. yüzyılda Latinceye çevrilen kitabı ile birlikte Avrupa ya yayılmaya başlamıştır. Gerolamo Cardano, 16 yüzyılda yazdığı “Ars Magna” (Büyük Sanat) adlı kitabına başlarken “Bu sanat Arap Musa’nın oğlu Muhammed (Hârizmî) ile başladı. Bu ifademın güvenilir bir şahidi Pisa’lı Leonardo’dur.” der. Ayrıca Ars Magna daki denklem çözümü ile ilgili bilgileri, Tartaglia ve Ferro dan öğrendiğini de yazar (Sertöz 2015). Cardano, lineer kübik denklemlerin çözümü ile ilgili bu kitabında “toplamları 10 çarpımları 40 olan iki sayı bulunuz” sorusunun cevabı olarak bu iki sayının $5 + \sqrt{-15}$ ve $5 - \sqrt{-15}$ sayıları olduğunu söyler (Merino 2006). Dolayısıyla iki boyutlu karmaşık sayı cebirinin ilk karşılaştığı kaynaklardan birisi bu kitaptır.

Dört boyutlu kuarterniyon cebirini tanımlayan Hamilton, karmaşık sayılar ile, iki boyutlu düzlemin ilişkisini çok iyi bildiği için üç boyutlu uzaylarla ilişkilendirmek amacıyla üç boyutlu bir cebirsel yapı aramıştır. Bu arayışını oğluna yazdığı bir mektupta şu şekilde ifade etmiştir. “1843 yılının Kasım ayının ilk günlerinde, her sabah kahvaltıya gelirken, kardeşin William Edwin ve sen, bana hep aynı soruyu sorardınız. ‘Baba, üçlülere çarpabildin mi ?’. Ben ise üzgün bir kafa sallama ile birlikte cevap vermek zorunda kalırdım, ‘hayır, onları sadece toplayıp, çıkarabiliyorum’.” Hamilton ın mektubunda belirttiği üçlü çarpım için, karmaşık sayılara benzer şekilde iki sanal birim ve bir reel birim kullanarak, bir çarpım kuralı oluşturmaya çalışmıştır. Bu durumda oluşacak problemlerden birini ifade edelim.

$$\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}, \quad i^2 = -1, \quad j^2 = -1, \quad -i(ij) = -i^2j = j,$$

$$ij = \alpha + i\beta + j\gamma,$$

$$j = \beta - i\alpha - ij\gamma = i\alpha - \beta - (\alpha + i\beta + j\gamma)\gamma.$$

Dolayısıyla, yukarıda reel olarak tanımlanan γ için, $\gamma^2 = -1$ elde edilir ki bu bir çelişkidir. Hamilton, bu durumun üstesinden dört boyutlu kuaterniyon cebirini tanımlayarak gelmiştir. Hamilton'ın bulduğu ve aklına geldiği an üzerinde bulunduğu köprünün üzerine kazıdığı çarpma kuralı ise aşağıdaki gibidir;

$$i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1.$$

Hamilton yukarıdaki eşitliği farkettiği anı, yaptığı bir konuşmasında, şu şekilde ifade eder, “O yer ve zamanda, düşüncelerimin oluşturduğu devrenin kapandığını hissettim. O devreden düşen kıvılcıklar i, j, k arasındaki temel bağıntıydı ve bu bağıntı benim onları her zaman kullandığım gibiydi.”

Kuaterniyonların fark edilmesinden sonra, bu sayı kümesi Dublin'de zorunlu ders olarak verilmiştir ve bilim çevrelerince çok dikkat çekmiştir. 1848 yılında ise konumuzla da ilgili olan bölüntülü (split) kuaterniyonlar, J. Cockle tarafından tanımlanmıştır. Bu tanımda bazı elemanlarının bir birleri ile ilişkisi aşağıdaki gibidir,

$$i^2 = -1 \text{ ve } j^2 = k^2 = 1.$$

Çalışma boyunca bölüntülü yerine daha çok kullanılan split ifadesini kullanacağız.

Hamilton bu keşfi sonrasında, yakın arkadaşı John T. Graves'e yazdığı bir mektubunda kuaterniyonlardan bahseder. Graves, kuaterniyonları keşfederek sanal elemanların sayısını, birden üçe çıkararak Hamilton'a iltifatlarda bulduktan sonra şöyle bir soru yöneltir, “Simyan ile 3 poundluk altın üretebiliyorsan, neden durasın ki?” Bir boyutlu, iki boyutlu, dört boyutlu cebirler arasındaki ilişkiyi fark eden Graves, sekiz boyutlu oktonyon cebirini tanımlamıştır. Bu durumu daha da genelleştirmeye çalışmış ve 2^n , n pozitif tamsayı olmak üzere, boyutlu cebirleri genel olarak tanımlamaya çalışmıştır. On altı boyutlu cebirde karşılaştığı, sıfır bölenler sebebiyle 2^n boyutlu cebirlerin tanımlanabileceğinden şüpheye düşmüştür. $n = 0, 1, 2, 3$ olan cebirlerle daha çok ilgilenilmesinin sebebi, sıfır bölen içermemeleridir. Oktonyon ve kuaterniyon cebirleri arasındaki farkları inceleyen Hamilton, oktonyonların şu an

birleşme özelliği olarak adlandırılan " $A \cdot BC = AB \cdot C = ABC$ ", özelliğini sağlamadığını, mektubunda Graves'e yazmıştır. Birleşme özelliğinin ilk tanımı ise o an yapılmış olur. Hamilton, arkadaşı Graves'in tanımladığı oktonyonları yayınlamayı teklif etmiş fakat unutmuştur. 1845 yılında, başka bir konu ile ilgili makalenin ek kısmında, Cayley oktonyonları tanımlamıştır. Bu sebeple oktonyonlar, bazı kaynaklarda Cayley sayıları olarak isimlendirilir.

Kuaterniyonlar bulunduğu zaman bilim dünyasında çok büyük bir etkisi olmuştur. Fakat oktonyonlar kısa süreli olarak dikkatleri çekmiştir. (Baez 2001). Oktonyonlar, bugün atom altı fiziğin gelişmesiyle ve diğer kullanım alanları sayesinde tekrar gündeme gelmeye başlamıştır. Ülkemizin önemli bilim adamlarından Prof. Dr. Feza Gürsey'in, oktonyonları kullanarak parçacık fiziğine yaptığı katkıları vurgulamak gerekir (Günaydın ve Gürsey 1973). Diğer kullanım alanlarından bazıları ise Bott periodicity (Baez 2001), süpersimetri ve Lie grupları olarak sıralanabilir (Gürsey ve Tze 1996).

1.2 Temel Tanım ve Kavramlar

Tanım 1.2.1: $R \neq \emptyset$ olmak üzere, $(R, +, \cdot)$ cebirsel yapısı, aşağıda belirtilen şartları sağlıyorsa, bu yapıya bir halka denir. Bu yapıda kullanılan ikili işlemlere, sırası ile, toplama ve çarpma denir (Akkaş ve diğ. 1998).

R_1) $(R, +)$ değişmeli gruptur.

R_2) Çarpma işlemi birleşmelidir.

R_3) Her $x, y, z \in R$ için

$$x \cdot (y + z) = (x \cdot y) + (x \cdot z) \text{ ve } (x + y) \cdot z = (x \cdot z) + (y \cdot z) \text{ dir.}$$

Kolaylık olması açısından bazı yerlerde $(R, +, \cdot)$ halkasını sadece R harfi ile göstereceğiz.

Tanım 1.2.2: $(R, +, \cdot)$ ve $(R', *, \times)$ iki halka olmak üzere $f: R \rightarrow R'$ fonksiyonu verilmiş olsun. Her $x, y \in R$ için

$$f(x + y) = f(x) * f(y)$$

$$f(x \cdot y) = f(x) \times f(y)$$

şartı sağlanıyorsa f fonksiyonuna halka homomorfizması adı verilir. Birebir ve örten homomorfizmaya ise, izomorfizma denir (Akkaş ve diğ. 1998).

Tanım 1.2.3: x ve y R halkasının iki elemanı olsun. $x \neq 0$ iken $x \cdot y = 0$ olacak şekilde $y \neq 0$ elemanı varsa, x elemanına sol sıfır bölen, y elemanına sağ sıfır bölen denir. Sağ sıfır bölen, sol sıfır bölene eşit olduğunda sadece sıfır bölen olarak adlandırılır (Akkaş ve diğ. 1998).

Tanım 1.2.4: R halkası ikinci işleme göre değişme özelliğine sahipse, bu halkaya değişmeli halka denir. Aynı şekilde R halkasında ikinci işlem birim elemana sahipse bu halkaya birimli halka denir (Akkaş ve diğ. 1998).

Tanım 1.2.5: R birimli ve değişmeli bir halka olsun. R halkasında sıfır bölen yoksa bu halkaya tamlık bölgesi denir (Akkaş ve diğ. 1998).

Tanım 1.2.6: R halkasında, sıfırdan farklı her elemanın tersi varsa, bu halkaya bölme (division) halkası denir (Akkaş ve diğ. 1998).

Tanım 1.2.7: R halkası, sıfır elemanı hariç, ikinci işleme göre değişmeli grup ise bu halkaya cisim denir (Akkaş ve diğ. 1998).

Tanım 1.2.8: (V, \oplus) değişmeli grup, $(\mathbb{F}, +, \cdot)$ ise bir cisim olsun. V üzerinde

$$\odot: \mathbb{F} \times V \rightarrow V$$

$$(a, v) \rightarrow a \odot v$$

işlemi aşağıdaki şartları sağlıyorsa, V ye $(\mathbb{F}, +, \cdot)$ cismi üzerinde, vektör uzayı denir.

- | | | |
|------|--|---|
| i. | $\forall a \in \mathbb{F}$ ve $\forall v \in V$ için; | $a \odot v \in V$ |
| ii. | $\forall a \in \mathbb{F}$ ve $\forall u, v \in V$ için; | $a \odot (u \oplus v) = (a \odot u) \oplus (a \odot v)$ |
| iii. | $\forall a, b \in \mathbb{F}$ ve $\forall v \in V$ için; | $(a + b) \odot v = (a \odot v) \oplus (b \odot v)$ |
| iv. | $\forall a, b \in \mathbb{F}$ ve $\forall v \in V$ için; | $(ab) \odot v = a \odot (b \odot v)$ |
| v. | $1 \in \mathbb{F}$ ve $\forall v \in V$ için; | $1 \odot v = v$ |

ve $(\mathbb{F}, +, \cdot)$ cismi üzerindeki V vektör uzayı, $((V, \oplus), (\mathbb{F}, +, \cdot), \odot)$ biçiminde gösterilir (Akkaş ve diğ. 1998).

Tanım 1.2.9: V vektör uzayı olsun. V üzerinde aşağıdaki ikili işlemi tanımlayalım.

$$\otimes: V \times V \rightarrow V$$

$$(u, v) \rightarrow u \otimes v$$

Bu işlem, aşağıdaki şartları sağlıyorsa V uzayına, \mathbb{F} cismi üzerinde bir cebir denir.

- i. $\forall a \in \mathbb{F}$ ve $\forall u, v \in V$ için; $(a \odot u) \otimes v = a \odot (u \otimes v)$
- ii. $\forall u, v, w \in V$ için; $u \otimes (v \oplus w) = (u \otimes v) \oplus (u \otimes w)$
- iii. $\forall u, v, w \in V$ için; $(u \oplus v) \otimes w = (u \otimes w) \oplus (v \otimes w)$

ve \mathbb{F} cismi üzerindeki V cebiri $((V, \oplus), (\mathbb{F}, +, \cdot), \odot, \otimes)$ biçiminde gösterilir (Akkaş ve diğ. 1998).

Dikkat edilmelidir ki, cebir tanımında bilinenin aksine, birleşme özelliğini bir şart olarak belirtmedik.

Tanım 1.2.10: n -kuadratik form, n değişkenli 2. dereceden homojen bir polinomdur ve \mathbb{F} cismi üzerinde tanımlı n -kuadratik form aşağıdaki gibi gösterilir,

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = f(x) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} x_i x_j; \quad a_{ij} \in \mathbb{F}.$$

\mathbb{F} cisim olduğundan, $x_i x_j = x_j x_i$ olur. Bu nedenle

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{1}{2} (a_{ij} + a_{ji}) x_i x_j$$

olur. Ayrıca, f ile gösterilen kuadratik formun matris gösterimi $(M_f)_{ij} = \frac{1}{2} (a_{ij} + a_{ji})$ biçiminde yazılabilir (Sham 2008).

Tanım 1.2.11: Kuadratik dönüşüm, $Q_f(x)$ olarak gösterilir ve aşağıdaki gibi tanımlanır, $x \in \mathbb{F}$ olmak üzere,

$$Q_f(x): \mathbb{F}^n \rightarrow \mathbb{F}, \quad Q_f(x) = x^t M_f x$$

dir (Sham 2008).

Tanım 1.2.12: Bilineer form,

$$B_f: \mathbb{F}^n \times \mathbb{F}^n \rightarrow \mathbb{F}$$

$$B_f(x, y) = \frac{[Q_f(x + y) - Q_f(x) - Q_f(y)]}{2}$$

olarak tanımlanır. n -kuadratik form ile tanımlı kuadratik dönüşüm ve bilineer form arasındaki ilişki aşağıdaki gibidir,

$$B_f(x, x) = \frac{[Q_f(x + x) - Q_f(x) - Q_f(x)]}{2} = Q_f(x)$$

Ayrıca, \mathbb{F}^n vektör uzayı ile B_f bilineer formu ile oluşan (\mathbb{F}^n, B_f) ikilisine, kuadratik uzay denir (Lam 2004).

Tanım 1.2.13: $Q_f(x)$ Kuadratik dönüşümü üzerinde, $x \neq 0$ için $Q_f(x) = 0$ oluyorsa bu kuadratik forma, izotropik form denir. $x \neq 0$ ve her $x \in \mathbb{F}$ için $Q_f(x) \neq 0$ durumunda ise, bu forma anizotropik form denir (Springer ve Veldkamp 2000).

Tanım 1.2.14: Q_f ile ilişkili B_f bilineer formu için, her $y \in \mathbb{F}$ ve $B_f(x, y) = 0$ olması, $x = 0$ olmasını gerektiriyorsa, bu Q_f kuadratik forma bozulmamış form denir (Springer ve Veldkamp 2000).

Tanım 1.2.15: A bir cebir olsun ve bu cebir üzerinde bozulmamış kuadratik form $N(k)$ olsun. $\forall k_1, k_2 \in A$ için,

$$N(k_1 k_2) = N(k_1)N(k_2)$$

eşitliğini sağlayan cebire, kompozisyon cebiri denir (Springer ve Velkamp 2000).

Tanım 1.2.16: Herhangi bir A cebiri üzerinde tanımlı bir involüsyon aşağıdaki gibi tanımlı bir fonksiyondur (Lewis 2006).

A nın her x ve y elemanı için, $\sigma: A \rightarrow A$

i) $\sigma(x + y) = \sigma(x) + \sigma(y)$,

ii) $\sigma(xy) = \sigma(y)\sigma(x)$,

iii) $\sigma(\sigma(x)) = x$.

Tanım 1.2.17: V boş olmayan bir küme olsun. $d: V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu için aşağıdaki şartlar sağlanıyorsa d ye V üzerinde bir metrik denir. Ayrıca (V, d) ye bir metrik uzay denir (Bayraktar 2000).

$$i) d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y,$$

$$ii) d(x, y) = d(y, x),$$

$$iii) d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y).$$

Tanım 1.2.18: (V, d) ve (V', d') iki metrik uzay olsun. $f: V \rightarrow V'$ dönüşümü uzaklıkları koruyorsa yani

$$d(x, y) = d'(f(x), f(y))$$

eşitliği sağlanıyorsa, f ye izometri denir. Ayrıca, tanımlanan f izometrisi aynı zamanda üzerine ise, f ye izometrik izomorfi denir. (V, d) ve (V', d') uzayları arasında izometrik izomorfi varsa, bu uzaylara izometrik uzaylar denir (Bayraktar 2000).

Tanım 1.2.19: Kronecker delta tensörü, iki indisli ve iki değerlikli olup aşağıdaki gibi tanımlanır (Öztürk 2012).

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i \neq j \text{ ise} \\ 0 & i = j \text{ ise} \end{cases}$$

Tanım 1.2.20: Levi-Civita tensörü, üç indisli ve üç değerlikli olup aşağıdaki gibi tanımlanır (Öztürk 2012).

$$(i, j, k) \text{ sıralaması } (1, 2, 3) \text{ diziliminin çift permütasyonu ise, } \varepsilon_{ijk} = 1,$$

$$(i, j, k) \text{ sıralaması } (1, 2, 3) \text{ diziliminin tek permütasyonu ise, } \varepsilon_{ijk} = -1,$$

$$(i, j, k) \text{ sıralamasında herhangi iki indis aynı ise, } \varepsilon_{ijk} = 0 \text{ yazılır.}$$

Tanım 1.2.21: 4 boyutlu reel kuaternion cebirini tanımlamak için, taban elemanlarının çarpım tablosunu verelim. Reel kuaterniyon cebirinin taban elemanları $\{1, i, j, k\}$ kümesidir. Taban elemanlarının çarpım tablosu ise aşağıdaki gibi düzenlenebilir;

	1	i	j	k
1	1	i	j	k
i	i	-1	k	$-j$
j	j	$-k$	-1	i
k	k	j	$-i$	-1

Tablo 1.1: Kuaterniyon Çarpım Tablosu

Tablo 1.1 den açıkça görülebileceği gibi

$$i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1, \quad ij = -ji, \quad jk = -kj, \quad ki = -ik$$

dır. Herhangi bir reel q kuaternionu, $a_i \in \mathbb{R}$ olmak üzere taban elemanları yardımı ile

$$q = a_0 1 + a_1 i + a_2 j + a_3 k$$

olarak yazılır (Sham 2008).

Tanım 1.2.22: Genelleştirilmiş kuaterniyon cebirinin taban elemanlarının $\{1, i, j, k\}$ kareleri;

$$i^2 = \alpha, \quad j^2 = \beta, \quad (ij)^2 = -\alpha\beta$$

olmak üzere, genelleştirilmiş q kuaterniyonu $q = a_0 1 + a_1 i + a_2 j + a_3 k$ olarak yazılabilir ve bu kuaterniyonlar için çarpım tablosu aşağıdaki gibi düzenlenebilir;

	1	i	j	k
1	1	i	j	k
i	i	α	k	αj
j	j	$-k$	β	$-\beta i$
k	k	$-\alpha j$	βi	$-\alpha\beta$

Tablo 1.2: Genelleştirilmiş Kuaterniyon Çarpım Tablosu

Genelleştirilmiş kuaterniyon cebirinin tanımlandığı cisimi ve α, β değerlerini ifade etmek için aşağıdaki gösterim kullanılabilir

$$\left(\frac{\alpha, \beta}{\mathbb{F}}\right).$$

Bu yazıma göre reel kuaternion cebiri ise

$$\left(\frac{-1, -1}{\mathbb{R}}\right)$$

olarak yazılabilir (Lewis 2006).

Tanım 1.2.23: $\left(\frac{\alpha, \beta}{\mathbb{F}}\right)$ cebirinin, herhangi bir q elemanı, $q = b_01 + b_1i + b_2j + b_3k$ olup, q elemanının eşleniği \bar{q} aşağıdaki gibi tanımlanır (Sham 2008);

$$\bar{q} = b_01 - b_1i - b_2j - b_3k.$$

Tanım 1.2.24: $\left(\frac{\alpha, \beta}{\mathbb{F}}\right)$ cebirinin herhangi bir q elemanının normu;

$$N(q) = q\bar{q} = \bar{q}q = b_0^2 - \alpha b_1^2 - \beta b_2^2 + \alpha\beta b_3^2$$

olarak tanımlanır. Aslında norm b_0, b_1, b_2 ve b_3 değişkenlerine göre bir kuadratik formdur. Dolayısıyla

$$\langle 1, -\alpha, -\beta, \alpha\beta \rangle$$

biçiminde gösterilir (Sham 2008).

Genelleştirilmiş kuaterniyon cebirin yapısı ile ilgili aşağıdaki teoremleri verelim.

Teorem 1.2.1: $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ ve $\alpha < 0$, $\beta < 0$ olarak seçildiğinde elde edilen kuaterniyon cebiri, reel kuaterniyon cebiri olan \mathbb{H} ya izomorftur. α ve β sıfırdan ve önceki durumdan farklı olacak şekilde seçildiğinde oluşan cebir split kuaterniyon cebiridir (Lewis 2006).

Örnek 1.2.1: $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ olarak seçildiğinde ve $\alpha = -1$, $\beta = -1$ seçildiğinde oluşan cebir, reel kuaterniyon cebiridir. Ancak, $\alpha = -1$, $\beta = 1$ olarak seçilirse oluşan cebir, Cockle tarafından tanımlanan, split kuaterniyon cebiridir.

Teorem 1.2.2: $\mathbb{F} = \mathbb{C}$ olarak seçildiğinde ve sıfırdan farklı α ve β değerleri için elde edilen cebir, split kuaterniyon cebirine izomorftur (Lewis 2006).

Örnek 1.2.2: $\left(\frac{-1,-1}{\mathbb{C}}\right)$ olarak gösterilebilen kuaterniyon cebirinde, $q = z_1 + z_2e_1$ elemanında skalerler karmaşık sayı cimidendir ve $\alpha = -1$, $\beta = -1$ dir. Belirtilen q elemanı için $N(q) = q\bar{q} = (z_1 + z_2e_1)(z_1 - z_2e_1)$ dir. $z_1 = 1$ ve $z_2 = -i$ seçilirse, $N(q) = 0$ olur. Bu durum ise belirtilen cebirin izotropik forma sahip olduğunu gösterir, yani $\left(\frac{-1,-1}{\mathbb{C}}\right)$ cebiri split bir cebirdir.

Teorem 1.2.3: \mathbb{F} cismi, sonlu cisim olarak seçilirse oluşan cebir, split kuaterniyon cebirine izomorftur (Lewis 2006).

Örnek 1.2.3: $\mathbb{F} = \mathbb{Z}_3$ olarak seçilirse yani $\left(\frac{-1,-1}{\mathbb{Z}_3}\right)$ kuaterniyon cebiri seçilirse, bu cebirde $q_1 = 1 + 2j + k$ ve $q_2 = 2i + j + k$ olarak alınan iki kuaterniyonun çarpımı $q_1q_2 = 0$ dir. Dolayısıyla, seçilen cebir sıfır bölen içerir, yani split kuaterniyon cebir olur.

2. OKTONYONLAR VE SPLIT OKTONYONLAR

Oktonyon cebiri, reel sayılar üzerinde tanımlı, birleşmeli olmayan fakat alternatif, flexible, kuadratik, kompozisyon cebiri olan, 8 boyutlu bölüm cebiridir. Dolayısıyla her x, y oktonyonu için

$$(xx)y = x(xy), \quad (xy)x = x(yx), \quad (yx)x = y(xx)$$

$$x^{-1} = \frac{\bar{x}}{|x|^2}, \quad x^2 - 2\text{Re}(x)x + |x|^2 = 0, \quad |xy| = |x||y|$$

eşitlikleri geçerlidir.

Oktonyon cebirinin taban elemanları $\{e_0 = 1, e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7\}$ şeklindedir. Bu taban elemanlarının çarpım kuralları Tablo 2.1'de verilmiştir.

	e_0	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7
e_0	1	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7
e_1	e_1	-1	e_3	$-e_2$	e_5	$-e_4$	$-e_7$	e_6
e_2	e_2	$-e_3$	-1	e_1	e_6	e_7	$-e_4$	$-e_5$
e_3	e_3	e_2	$-e_1$	-1	e_7	$-e_6$	e_5	$-e_4$
e_4	e_4	$-e_5$	$-e_6$	$-e_7$	-1	e_1	e_2	e_3
e_5	e_5	e_4	$-e_7$	e_6	$-e_1$	-1	$-e_3$	e_2
e_6	e_6	e_7	e_4	$-e_5$	$-e_2$	e_3	-1	$-e_1$
e_7	e_7	$-e_6$	e_5	e_4	$-e_3$	$-e_2$	e_1	-1

Tablo 2.1: Oktonyon Çarpım Tablosu

Tablodan da açıkça görülebileceği gibi oktonyon cebirinin taban elemanları aşağıdaki şartları sağlar.

$\forall i, j \in \{1, 2, \dots, 7\}$ için

- $e_i^2 = -1$ ve $e_0^2 = 1$,

- $e_i e_0 = e_0 e_i = e_i$,
- $i \neq j$ iken e_i ve e_j tabanları ters değişmelidir; $e_i e_j = -e_j e_i$.

Dolayısıyla, bu tanımdaki $\{1, e_1, e_2, e_3\}$ taban elemanlarından oluşan küme, kuaterniyon cebirinde taban olan $\{1, i, j, k\}$ kümesinin tüm özelliklerine sahip olur, yani, oktonyon cebiri, kuaterniyon cebirini kapsar. Ayrıca $\{1, e_1, e_2, e_3\}$ taban elemanları kümesi ile kuaterniyon cebirinde taban olan $\{1, i, j, k\}$ kümesi arasındaki ilişkiye, $\{1, e_1, e_4, e_5\}$, $\{1, e_1, e_7, e_6\}$, $\{1, e_2, e_4, e_6\}$, $\{1, e_2, e_5, e_7\}$, $\{1, e_3, e_4, e_7\}$ ve $\{1, e_3, e_6, e_5\}$ taban elemanları kümesi de sahiptir. Yukarıda belirtilen taban elemanlarından oluşan 7 taban kümesi ile kuaterniyon cebiri oluşturulabilir (Sorgsepp ve Löhmus 1978).

Oktonyon cebirinin baz elemanlarının çarpımının başka bir şekilde ifadesini Kronecker delta ve Levi-Civita tensörleri yardımıyla verelim.

$$e_i e_j = -\delta_{ij} e_0 + \sum_{k=1}^7 f_{ijk} e_k, \quad 1 \leq i, j \leq 7.$$

Burada kullanılan f_{ijk} , Levi-Civita tensörünün benzeri bir tensördür. f_{ijk} tensörü, (1, 2, 3) sayılarının dizilimi yanısıra (1, 4, 5), (1, 7, 6), (2, 4, 6), (2, 5, 7), (3, 4, 7) ve (3, 6, 5) sayılarının dizilimine göre de 1, -1, 0 değerlerinden birini alır.

Fano düzlemi yardımıyla oktonyonları tanımlamak için, önce oktonyonların alt cebiri olan kuaterniyon cebiri incelenir. Kuaterniyon cebiri bilindiği gibi $\{1, i, j, k\}$ taban elemanları ile kurulan bir cebirdir ve çarpım tablosu Tablo 2.2 deki gibidir.

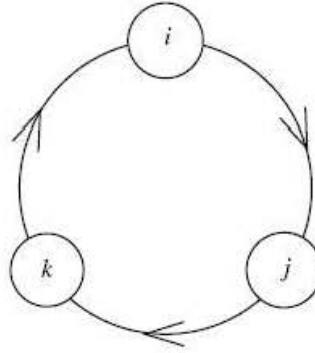
	1	i	j	k
1	1	i	j	k
i	i	-1	k	$-j$
j	j	$-k$	-1	i
k	k	j	$-i$	-1

Tablo 2.2: Kuaterniyon Çarpım Tablosu

Oktonyonlara benzer olarak, kuaterniyon taban elemanlarının çarpımını Kronecker delta ve Levi- Civita tensörleri yardımıyla verelim.

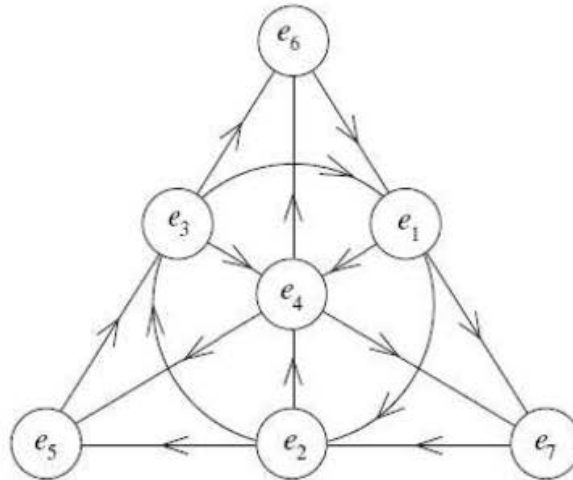
$$e_i e_j = -\delta_{ij} e_0 + \sum_{k=1}^3 \epsilon_{ijk} e_k, \quad 1 \leq i, j \leq 3.$$

Kuaterniyon taban elemanlarının çarpımı için, Fano düzlem gösterimi Şekil 2.1 deki gibidir.



Şekil 2.1: Kuaterniyonlar İçin Fano Düzlem Gösterimi

Oktonyonlar için Fano gösterimi, Şekil 2.2 de verilmiştir ve her bir doğru parçasındaki veya çemberdeki 3 eleman, kuaterniyon cebirinin Şekil 2.1 deki Fano gösterimini oluşturur. Yani, $\{i, j, k\}$ kümesinin elemanları yerine, sırasıyla $\{e_7, e_2, e_5\}$ kümesinin elemanları alınarak Şekil 2.1 oluşturulabilir.

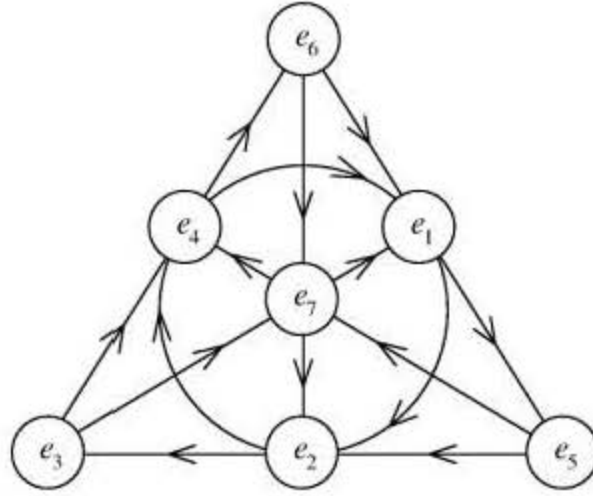


Şekil 2.2: Oktonyonlar İçin Fano Düzlem Gösterimi

Şekil 2.2 deki Fano düzlem gösterimi ile oluşan, oktonyon cebirinin oluşturduğu çarpım tablosu, Tablo 2.1 deki çarpım tablosu ile aynıdır. Oktonyon cebiri için oluşturulan Fano düzlem gösterimi, üç taban elemanına sahip çizgiler ve üç taban elemanına sahip çemberden oluşur. Bu gösterim, seçilen çizgi veya çember üzerindeki taban elemanlarının birbirlerine göre durumunu aralarındaki ok işareti yardımı ile verir. Fano düzlem gösterimi, oktonyon çarpım tablosundaki birçok bilgiyi içerdiğinden ve kolay hatırlanabildiğinden kullanışlı bir gösterimdir.

Oktonyon cebiri için oluşturulan, Şekil 2.2 deki, Fano düzlem gösterimi tek değildir. Dolayısıyla, çarpım tablosu da tek değildir. Ancak, izomorfizma yardımıyla reel oktonyon çarpımının tek olduğu gösterilebilir.

Şimdi, farklı bir Fano düzlem gösterimi ve bu gösterime karşılık gelen çarpım tablosu örneği verelim.



Şekil 2.3: Oktonyonlar İçin Fano Düzlem Gösterimi

Şekil 2.3 te verilen Fano düzlem gösterimi yardımıyla oluşturulabilen çarpım tablosu aşağıdaki gibidir.

	e_0	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7
e_0	1	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7
e_1	e_1	-1	e_4	e_7	$-e_2$	e_6	$-e_5$	$-e_3$
e_2	e_2	$-e_4$	-1	e_5	e_1	$-e_3$	e_7	$-e_6$
e_3	e_3	$-e_7$	$-e_5$	-1	e_6	e_2	$-e_4$	e_1
e_4	e_4	e_2	$-e_1$	$-e_6$	-1	e_7	e_3	$-e_5$
e_5	e_5	$-e_6$	e_3	$-e_2$	$-e_7$	-1	e_1	e_4
e_6	e_6	e_5	$-e_7$	e_4	$-e_3$	$-e_1$	-1	e_2
e_7	e_7	e_6	$-e_1$	e_5	$-e_4$	$-e_2$	$-e_2$	-1

Tablo 2.3: Oktonyon Çarpım Tablosu

Şimdiye kadar oktonyon çarpımını hesaplayabilmek için birkaç farklı yöntem verdik. Şimdi ise Cayley-Dickson yöntemini tanıtır ve bu yöntem yardımıyla oktonyon çarpımını farklı bir şekilde ifade edelim.

Hamilton, kuaterniyonları karmaşık sayılardan oluşan sıralı ikililer olarak düşünmüştür, bu düşünce genelleştirilerek Cayley-Dickson yöntemi oluşturulmuştur. Bu yöntemde, toplama işlemi taraf tarafa yapılır ve çarpma işlemi ise aşağıdaki gibi tanımlanır;

$$(a, b)(c, d) = (ac - d\bar{b}, \bar{a}d + cb).$$

\bar{b} ve \bar{a} sırasıyla b ve a sayılarının eşleniğidir.

Cayley-Dickson yöntemi yardımıyla 1 boyutlu reel sayılardan, n pozitif tamsayı olmak üzere, 2^n boyutlu cebirler oluşturulabilir. Yani, reel sayılardan başlanarak, sırası ile karmaşık sayılar, kuaterniyonlar ve oktonyonlar oluşturulabilir.

Aşağıdaki işlemler yardımıyla, reel sayılardan oluşan sıralı ikililerden karmaşık sayılar oluşturulabilir. Her z karmaşık sayısı ve r_i reel sayıları için

$$z = (r_1, r_2)$$

sıralı ikilisinin çarpma işlemi

$$(r_1, r_2)(r_3, r_4) = (r_1r_3 - r_4r_2, r_1r_4 + r_3r_2)$$

biçiminde tanımlanır. Dikkat edilirse bu çarpımda eşlenik yoktur, çünkü sıralı ikilideki elemanlar reel sayılardır.

Karmaşık sayılardan oluşan sıralı ikililer yardımıyla, kuaterniyonlar aşağıdaki gibi oluşturulabilir. Her q kuaterniyon, z_i karmaşık sayıları ve

$$q = (z_1, z_2)$$

sıralı ikilisi için

$$(z_1, z_2)(z_3, z_4) = (z_1z_3 - z_4\bar{z}_2, \bar{z}_1z_4 + z_3z_2)$$

eşitliği çarpma işlemi olarak tanımlanır. Oktonyonlar ise, kuaterniyonlar yardımıyla aşağıdaki gibi tanımlanabilir; k oktonyonu,

$$k = (q_1, q_2); q_1, q_2 \in \mathbb{H}$$

sıralı ikilisi için

$$(q_1, q_2)(q_3, q_4) = (q_1q_3 - q_4\bar{q}_2, \bar{q}_1q_4 + q_3q_2)$$

eşitliği çarpma işlemi olarak tanımlanır.

Böylece reel sayılardan karmaşık sayılar, karmaşık sayılardan kuaterniyonlar ve kuaterniyonlardan oktonyonlar elde edilmiş olur. Cayley-Dickson yönteminde dikkat edilmesi gereken birkaç önemli nokta vardır. Bunlardan ilki, sıralı ikili yazımı ile yeni bir sanal kısım oluşturulmasıdır, dolayısıyla Cayley-Dickson yöntemi ile bir üst cebire geçerken yeni bir sanal eleman elde edilmiş olur. Dikkat edilmesi gereken başka bir durum ise, çarpımdaki elemanların sırasıdır, çünkü kuaterniyonlar değişmeli değildir ve daha sonra oluşturulabilecek cebirler de değişmeli olamaz. Dolayısıyla, oktonyon cebiri, Tablo 2.1 deki çarpım tablosuna sahip olur.

Aksi belirtilmedikçe, oktonyon cebiri veya sadece oktonyon yazıldığında, Tablo 2.1 de çarpım tablosu verilen reel oktonyon cebiri belirtilecektir.

Aşağıda, oktonyon cebirinde kullanılan bazı temel kavramlar verilecektir.

Oktonyon cebirinin elemanları $\sum_{i=0}^7 a_i e_i$, $a_i \in \mathbb{R}$ olup, bu cebride toplama işlemi, $k = \sum_{i=0}^7 a_i e_i$, $m = \sum_{i=0}^7 b_i e_i$ olmak üzere,

$$k + m = \sum_{i=0}^7 a_i e_i + b_i e_i$$

biçiminde yapılır.

Skalerle çarpma işlemi ise aşağıdaki gibi tanımlanır;

$$\forall k \in \mathbb{O}, \forall s \in \mathbb{R} \text{ için } \cdot : \mathbb{O} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{O}$$

$$k \cdot s = s \cdot k = \sum_{i=0}^7 s a_i e_i.$$

Bu iki işlem yardımıyla, oktonyonların kümesinin bir vektör uzayı olduğu görülebilir. Herhangi iki oktonyonun çarpımı ise, Tablo 2.1 yardımıyla yapılabilir. Bu çarpım ile birlikte oktonyonların kümesi bir cebir oluşturur. Oktonyon cebirinin herhangi bir elemanı, iki kısma ayrılarak incelenebilir; $k = a_0 e_0 + \sum_{i=1}^7 a_i e_i$ için

$$k = S(k) + V(k),$$

eşitliğinde, $S(k)$ ya k oktonyonunun skaler kısmı, $V(k)$ ya ise vektörel kısım denir. Skaler kısmı sifıra eşit olan oktonyonlara saf (pure) oktonyonlar denir. Saf oktonyonlar, sadece vektörel kısımdan oluşan oktonyonlar olarak da tanımlanırlar (Ward 1997).

Eşlenik tanımı skaler ve vektörel kısımlar yardımıyla aşağıdaki gibi verilebilir.

$$\bar{k} = S(k) - V(k) = a_0 e_0 - a_1 e_1 - a_2 e_2 - \dots - a_7 e_7$$

Dolayısıyla, birinci tip involüsyon olan eşlenik alma işleminin aşağıdaki özellikleri vardır:

Her k, m oktonyonu ve her s, t reel sayısı için,

- i. $\overline{sk + tm} = s\bar{k} + t\bar{m}$.
- ii. $\overline{kt} = \bar{t}\bar{k}, \forall k, t \in \mathbb{O}$.
- iii. $\bar{\bar{k}} = k, \forall k \in \mathbb{O}$.

Norm tanımı, eşlenik yardımıyla aşağıdaki gibi verilir.

$$N(k) = k\bar{k} = \bar{k}k = a_0^2 + a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2 + a_5^2 + a_6^2 + a_7^2.$$

Norm işlemi ise, aşağıdaki özelliklere sahiptir: $\forall k, m \in \mathbb{O}$ ve $\forall s \in \mathbb{R}$ için

- i. $N(km) = N(k)N(m)$,
- ii. $N(sk) = s^2N(k)$.

Normun yukarıdaki ilk özelliğinin kompozisyon cebirlerinde olması gereken önemli bir özellik olduğunu belirtelim.

Norm yardımıyla $k \neq 0, k \in \mathbb{O}$ için ters eleman tanımı verilebilir.

$$k^{-1} = \frac{\bar{k}}{N(k)}.$$

Ters alma işlemi aşağıdaki eşitlikleri sağlar;

- i. Sıfırdan farklı her k, m oktonyonu için

$$(km)^{-1} = m^{-1}k^{-1}$$

dir.

- ii. Her sıfırdan farklı k oktonyonu ve sıfırdan farklı her s skaleri için

$$(sk)^{-1} = \frac{1}{s}k^{-1}$$

dir.

Norm kavramı yardımıyla, oktonyonlarda açı kavramı ve De Moivre formülü verilebilir.

$N_V(k) = a_0^2 + a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2 + a_5^2 + a_6^2 + a_7^2$ olmak üzere,

$$k = \sqrt{N(k)} \left(\frac{S(k)}{\sqrt{N(k)}} + \frac{V(k)}{\sqrt{N(k)}} \right),$$
$$k = \sqrt{N(k)} \left(\cos(\theta) + \frac{V(k)}{\sqrt{N_V(k)}} \sin(\theta) \right)$$

Yazılabilir (Ward 1997). Burada

$$\cos(\theta) = \left(\frac{S(k)}{\sqrt{N(k)}} \right), \quad \sin(\theta) = \left(\frac{\sqrt{N_V(k)}}{\sqrt{N(k)}} \right)$$

dır.

$N(k) = 1$ olacak şekilde seçilen herhangi bir oktonyonun, De Moivre formülü aşağıdaki gibidir (Flaut ve Shpasivskiyi 2015).

$$k^n = \left(\cos(\theta) + \frac{V(k)}{\sqrt{N_V(k)}} \sin(\theta) \right)^n = \cos(n\theta) + \frac{V(k)}{\sqrt{N_V(k)}} \sin(n\theta).$$

Karmaşık sayı cebirine benzer olarak, oktonyonlarda açı ve kutupsal gösterim kavramları, oktonyon cebirinin geometrik özelliklerini incelemek için kullanılır. Oktonyon cebirinin geometrik özellikleri ve uygulama alanları için Ward (1997) ve split kuaterniyon cebirinin geometrik özellikleri için Kula (2003) kaynakları incelenebilir.

Aşağıda, oktonyon cebirinin diğer normlu ve bölümlü cebirler ile karşılaştırılması yapılacaktır.

Teorem 2.1: Normlu bölümlü cebirler, yalnızca \mathbb{R} , \mathbb{C} , \mathbb{H} ve \mathbb{O} dur (Schafer 1966).

Yukarıdaki teorem, Hurwitz in 1898 yılında yayınladığı makalesinde ispatlanmıştır. Ayrıca bu teorem Brahmagupta, Euler, F. Degen, Lebesgue gibi birçok matematikçinin üzerinde çalıştığı, kareler toplamı özdeşliğinin oluşmasında önemlidir. İstenirse, Dickson (1919) tarafından derlenen ve teoremin ispatlandığı makale incelenebilir. Şimdi, bu normlu ve bölümlü cebirlerin cebirsel farklılıklarından bazılarını inceleyelim.

Gerçel sayılar cebiri ile karmaşık sayılar cebiri arasındaki fark, ilk kez sanal tabanın tanımlanması ile oluşan eşlenik olma durumudur. Karmaşık sayılar cebiri ile kuaterniyon cebiri arasındaki fark ise, çarpma işlemindeki değişme özelliğinin kuaterniyonlarda olmamasıdır. Kuaterniyon cebiri ile oktonyon cebiri arasındaki fark ise, oktonyon cebirinin birleşme özelliğini kaybetmesidir. Bu farklılıkları ayrıntılı bir şekilde incelemek için, Cayley-Dickson işlemi ile oluşturulan cebirler arasındaki

ilişkiye bakılabilir. Burada belirtilen cebirler, sırasıyla gerçel sayı cebirinden başlayarak Cayley-Dickson işlemi yardımıyla elde edilebilir (Baez 2001).

Oktonyon cebirinin birleşme özelliğinden önce birleşme özelliğinin seviyelerinin tanımlarını verelim.

Tanım 2.1: A bir cebir olmak üzere; $\forall x \in A$ için x^2, x^3, x^4 gibi cebirin bir elemanının kuvvetleri tanımlanırken dikkatli davranılmalıdır, çünkü cebir tanımı yaparken birleşme özelliğinin olmayabileceğine dikkat çekilmiştir. Birleşme özelliği olmayan bir yapıda,

$$(xx)x = x(xx),$$

benzeri bir eşitliğin sağlanmasının garantisi yoktur. Kuvvet birleşmeli cebirlerde aşağıdaki şart sağlanır; her $n, m \in \mathbb{Z}$ için

$$x^n x^m = x^{n+m}$$

olur. Bu şartı sağlayan cebire kuvvet birleşmeli cebir denir. Başka bir kuvvet birleşmeli cebir tanımı ise aşağıdaki gibi yapılabilir.

A cebirinin, tek eleman tarafından üretilen bir alt cebiri birleşmeli ise bu A cebirine kuvvet birleşmeli cebir denir.

Kuvvet cebirlerinin sağladığı başka bir özellik ise,

$$x^2 x = x x^2, \quad x^3 x = x^2 x^2$$

dir (Okubo 1995).

Şimdi, birleşme özelliğinin başka bir seviyesi olan alternatifliğin tanımını verelim.

Tanım 2.2: İlk kez Emil Artin tarafından yapılan tanım aşağıdaki gibidir:

A cebirinin iki eleman ile üretilen bir alt cebiri birleşmeli ise, bu A cebirine alternatif cebir denir. Herhangi bir A cebirinin alternatif olup olmadığını test etmek için,

$$\forall x, y \in A \text{ için; } (xx)y = x(xy), (xy)x = x(yx), (yx)x = y(xx)$$

eşitliklerinden herhangi ikisinin sağlanması yeterlidir. Bu tanımdan anlaşılacağı üzere, her alternatif cebir bir kuvvet birleşmeli cebirdir (Okubo 1995).

Tanım 2.3: Her $x, y, z \in A$ için $(xy)z = x(yz)$ özelliğini sağlayan cebirlere birleşmeli cebir denir. Bu bilinen birleşmeli cebir tanımının yanı sıra, birleşmenin diğer seviyelerine benzer şekilde bir tanımını verelim.

A cebirinin, üç eleman ile üretilen bir alt cebiri birleşmeli ise bu A cebirine birleşmeli cebir denir.

Bu tanım yardımıyla, her birleşmeli cebirin alternatif cebir olduğu açıktır. Dolayısıyla, her birleşmeli cebir kuvvet birleşmelidir (Okubo 1995).

Alternatif bir cebir olan oktonyon cebirinin yapısını incelemeye cebirin kuadratik formunu ve norm formunu inceleyerek devam edelim.

Tanım 2.4: $N(k) = k\bar{k} = \bar{k}k$ biçiminde tanımlanan $N: \mathbb{O} \rightarrow \mathbb{F}$ fonksiyonuna norm fonksiyonu denir. Dikkat edilirse $N(k)$

$$N(k) = k\bar{k} = \bar{k}k = a_0^2 + a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2 + a_5^2 + a_6^2 + a_7^2$$

olarak hesaplanır.

Norm form, a_i değişkenlerine göre aşağıdaki gibi gösterilen kuadratik form oluşturur,

$$\langle 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1 \rangle$$

Bu tanımda sanal birimlerin kareleri;

$$a_1^2 = a_2^2 = \dots = a_7^2 = -1$$

dir.

Buraya kadar yapılan tanımlamalarda, oktonyon cebirinin genel özelliklerini inceledik. Şimdi ise, genelleştirilmiş oktonyon cebirinin tanımını verelim.

	e_0	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7
e_0	1	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7
e_1	e_1	α	e_3	αe_2	e_5	αe_4	$-e_7$	$-\alpha e_6$
e_2	e_2	$-e_3$	β	$-\beta e_1$	e_6	e_7	βe_4	βe_5
e_3	e_3	$-\alpha e_2$	βe_1	$-\alpha\beta$	e_7	αe_6	$-\beta e_5$	$-\alpha\beta e_4$
e_4	e_4	$-e_5$	$-e_6$	$-e_7$	π	$-\pi e_1$	$-\pi e_2$	$-\pi e_3$
e_5	e_5	$-\alpha e_4$	$-e_7$	$-\alpha e_6$	πe_1	$-\alpha\pi$	πe_3	$\alpha\pi e_2$
e_6	e_6	e_7	$-\beta e_4$	βe_5	πe_2	$-\pi e_3$	$-\beta\pi$	$-\beta\pi e_1$
e_7	e_7	αe_6	$-\beta e_5$	$\alpha\beta e_4$	πe_3	$-\alpha\pi e_2$	$\beta\pi e_1$	$\alpha\beta\pi$

Tablo 2.4: Genelleştirilmiş Oktonyon Çarpım Tablosu

Yukarıdaki çarpım tablosunda sanal elemanların kareleri aşağıdaki gibi seçilip genelleştirilmiştir (Flaut ve Shpakivskiyi 2015)

$$e_1^2 = \alpha, e_2^2 = \beta, e_4^2 = \pi.$$

Kuaterniyon cebirinin üzerinde tanımlandığı cismi ve sanal birimlerinin özelliklerini açıkça belirtebildiğimiz gösterim olan $\left(\frac{\alpha, \beta}{\mathbb{R}}\right)$ gösterimini oktonyonlara genişletelim (Lewis 2006).

Herhangi bir \mathbb{F} cismi üzerinde tanımlanmış oktonyon elemanı için $e_1^2 = \alpha, e_2^2 = \beta, e_4^2 = \pi$ seçilirse bu oktonyon cebirinin gösterimi aşağıdaki gibidir.

$$\left(\frac{\alpha, \beta, \pi}{\mathbb{F}}\right)$$

Genel durum için norm form aşağıdaki gibi ifade edilir.

$$N(k) = k\bar{k} = \bar{k}k = a_0^2 - \alpha a_1^2 - \beta a_2^2 + \alpha\beta a_3^2 - \pi a_4^2 + \alpha\pi a_5^2 + \beta\pi a_6^2 - \alpha\beta\pi a_7^2.$$

Bu norm forma karşılık gelen kuadratik form ise aşağıdaki gibidir.

$$\langle 1, -\alpha, -\beta, \alpha\beta, -\pi, \alpha\pi, \beta\pi, -\alpha\beta\pi \rangle$$

α, β ve π nin farklı değerleriyle oluşan oktonyon cebirinin yapısı da değişebilir. Bu durumu daha iyi açıklayabilmek adına aşağıdaki teoremi verelim.

Teorem 2.2: $A = \left(\frac{\alpha, \beta, \pi}{\mathbb{F}}\right)$ ve $A' = \left(\frac{\alpha', \beta', \pi'}{\mathbb{F}}\right)$ olarak tanımlı iki cebir olsun, aşağıdaki ifadeler denktir.

i) A ve A' cebirleri, izomorfik \mathbb{F} cebirlerdir.

ii) A ve A' cebirleri, izometrik kuadratik uzaylardır (Sham 2008).

Yukarıdaki teorem, α, β, π değişse dahi izometrik kuadratik uzaylara sahip cebirlerin izomorfik cebirler olduğunu belirtir. Şimdi ise oktonyon cebirine izomorfik olmayan bir cebir örneği verelim.

Örnek 2.1: $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ ve $\alpha = -1, \beta = 1, \pi = -1$ olarak seçilirse, $k \in \left(\frac{-1, 1, -1}{\mathbb{R}}\right)$ için $k = 1 + e_2$ olsun.

$$N(k) = \bar{k}k = (1 + e_2)(1 - e_2) = 0$$

$k \neq 0$ iken $N(k) = 0$ olur. Bu durumda $\left(\frac{-1, 1, -1}{\mathbb{R}}\right)$ yapısı bilinen oktonyon cebiriyle eş yapılı değildir.

Sekiz boyutlu ancak reel oktonyon cebirine eş yapılı olmayan bu yapıyı incelemek için bazı tanım ve teoremleri verelim.

Split kuaterniyon cebirinin ilk tanımı J. Cockle tarafından 1848 tarihinde yapılmıştır. Hamilton'ın kuaterniyon cebirini tanımlamasından sonra Cockle sanal birimlerin karelerinin aldığı değerleri değiştirerek ilk bölünmüş (split) cebir tanımını vermiştir. Bu tanım aşağıdaki gibidir.

Tanım 2.5: Kuaterniyon cebirinin sanal birimlerinin kareleri $i = -1, j = 1, k = 1$ olarak seçildiğinde oluşan cebire split kuaterniyon cebir denir (Cockle 1848).

Bu tanımdan sonra diğer cebirlerde sanal birimlerin karelerinin sıfırdan farklı sayılar ile değişmesi sonucu oluşan ve bölümlü cebir olmayan cebirlere split cebir adı verildi.

Şimdi ise, hangi durumlarda split oktonyon cebiri oluştuğunu inceleyelim. Bu incelemeyi oktonyon cebirinin norm formu yardımıyla ve üzerinde tanımlandığı cismi inceleyerek yapabiliriz. Genel oktonyon cebiri aşağıdaki gibi gösterilir.

$$\left(\frac{\alpha, \beta, \pi}{\mathbb{F}} \right)$$

Bu cebirin norm form gösterimi ise daha önce değinildiği gibi

$$\langle 1, -\alpha, -\beta, \alpha\beta, -\pi, \alpha\pi, \beta\pi, -\alpha\beta\pi \rangle$$

şeklinindedir. Bu tanımlamalardan sonra split cebirin özelliklerini inceleyen teoremleri verelim.

Teorem 2.3: Herhangi bir kompozisyon cebirinin norm formu ya izotropiktir yada anizotropiktir (Springer ve Veldkamp 2000).

İzotropik norm formu olan bir cebir sıfır bölendir yani $x \in A$ ve $x \neq 0$ iken $N(x) = 0$ 'dır, anizotropik norm forma sahip bir cebirin ise sıfırdan farklı her elemanın tersi vardır. İzotropik norm formu olan cebirlere split cebir, anizotropik norm formu cebirlere bölümlü cebir denir.

Teorem 2.4: Herhangi bir \mathbb{F} cismi üzerinde tanımlanmış, 8 boyutlu kompozisyon cebirlerinde, izomorfizmaya göre yalnız bir split cebir vardır (Springer ve Veldkamp 2000).

Bu iki teorem yardımıyla, herhangi bir cisim üzerinde tanımlı oktonyon cebirinde split cebir varsa izomorfizmaya göre bir tanedir ve norm formu izotropiktir, diyebiliriz.

Dolayısıyla split cebirleri incelemek için üzerinde tanımlandıkları cisimleri ve norm formlarını incelemek yeterlidir.

Teorem 2.5: $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ seçilirse ve $\alpha < 0$, $\beta < 0$, $\pi < 0$ durumunda, reel oktonyon cebiri oluşur, α, β ve π sıfırdan ve belirtilen durumdan farklı seçilirse split oktonyon cebiri oluşur (Springer ve Veldkamp 2000).

Örnek 2.2 $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ seçilirse ve $\alpha = -1, \beta = 1, \pi = -1$ olarak alındığında teoremin belirttiği şartlara göre split oktonyon cebiri oluşur, yani oluşan cebir, sıfır böleni olan izotropik norm forma sahip bir cebirdir ve

$$\left(\frac{-1, 1, -1}{\mathbb{R}} \right)$$

olarak gösterilebilir. Sıfır bölen örneği olarak $k = 1 + e_2$ ve $\bar{k} = 1 - e_2$ sayıları alınabilir.

Teorem 2.6: \mathbb{F} cismi cebirsel kapalı seçilirse, oluşan cebir split cebirdir (Springer ve Veldkamp 2000).

Örnek 2.3: Cebirsel kapalılık, \mathbb{F} cisminin sabit dışındaki tüm $\mathbb{F}[X]$ polinomları için kök barındırdığını ifade eder. \mathbb{F} ile gösterilen cisim yerine, cebirsel kapalı olan \mathbb{C} kompleks sayılar cismi seçildiğinde oluşan cebir, split oktonyon cebiridir ve

$$\left(\frac{\alpha, \beta, \pi}{\mathbb{C}} \right)$$

olarak gösterilebilir. $\alpha = -1$, $\beta = -1$, $\pi = -1$ alınarak oluşturulan cebirde

$$k = z_1 + z_2 e_1, \quad z_1, z_2 \in \mathbb{C}$$

olarak tanımlansın. Skaler olan, $z_1 = 1$ ve $z_2 = -i$ seçilirse $N(k) = 0$ olur.

Teorem 2.7: \mathbb{F} cismi sonlu bir cisim olarak seçilirse, oluşan cebir split cebirdir (Springer ve Veldkamp 2000).

Örnek 2.4: p asal bir sayı olmak üzere, $(\mathbb{Z}_p, +, \cdot)$ olarak gösterilen cisim ile oluşturulan cebir, split cebirdir ve

$$\left(\frac{\alpha, \beta, \pi}{\mathbb{Z}_p} \right)$$

olarak gösterilir. $p = 3$ alınrsa oluşan

$$\left(\frac{-1, -1, -1}{\mathbb{Z}_3} \right)$$

cebirinde, $k = e_2 + e_3 + e_4 + e_5 + e_6 + e_7$ sayısı için $k^2 = 0$ olarak hesaplanır. $k \neq 0$ iken $k^2 = 0$ olduğundan sıfır bölendir. Bu durum ise cebirin, split cebir olduğunu gösterir.

3. OKTONYONLAR VE MATRİS GÖSTERİMLERİ

Bu bölümde, oktonyon ve split oktonyon cebirlerinin matris gösterimlerini inceleyeceğiz. Bilindiği gibi keyfi bir cisim üzerindeki herhangi sonlu boyutlu birleşmeli bir cebir, cebirsel olarak matris cebirinin bir alt cebirine izomorftur. Yani, \mathbb{F} cismi üzerinde sonlu boyutlu birleşmeli bir cebirdeki bir eleman, matrisler ile ifade edilebilir. Dolayısıyla her bir kuaterniyon reel yada kompleks matris gösterimine sahiptir. Ancak, oktonyon cebiri birleşmeli olmadığından bilinen matris cebirine izomorf olamaz. Kuaterniyonlar yardımı ile, oktonyon cebirinin Cayley-Dickson yöntemine benzer olarak oluşturulan 8×8 lik sol matris gösterimini ve Zorn tarafından tanımlanan vektör matris gösterimini inceleyeceğiz.

Oktonyonların, 8×8 lik reel matris gösterimini tanımlayabilmek için, öncelikle kuaterniyon cebirinin matris gösterimlerini inceleyelim.

3.1 Kuaterniyonların Matris Gösterimleri

Kuaterniyon cebirinin, karmaşık elemanlardan oluşan 2×2 lik matrislerle gösterimini inceleyelim. Kuaterniyon cebirinin

$$q = a_0 1 + a_1 i + a_2 j + a_3 k,$$

biçiminde tanımlanan elemanı, matrisler yardımıyla aşağıdaki gibi ifade edilebilir;

$$Q = a_0 I + a_1 A + a_2 B + a_3 C,$$

bu gösterimde kullanılan I , birim matris olup A, B ve C matrisleri aşağıdaki gibidir;

$$A = \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{bmatrix}.$$

A, B ve C matrisleri yardımıyla aşağıdaki gibi bir Q matrisi yazılabilir;

$$Q = \begin{bmatrix} a_0 + a_1i & -a_2 - a_3i \\ a_2 - a_3i & a_0 - a_1i \end{bmatrix}.$$

Kuaterniyon cebirinin, 4×4 lük reel matrisler ile gösterimini tanımlamak için kuaterniyon cebirinin elemanlarını ve kullanılacak matrisleri tanımlım.

Herhangi bir reel kuaterniyon q elemanı, taban elemanları $\{1, i, j, k\}$ olmak üzere, $q = a_01 + a_1i + a_2j + a_3k$ olarak tanımlanır

Belirtilen q kuaterniyonu, 4×4 lük reel matrisler yardımı ile aşağıdaki gibi gösterilebilir,

$$Q = a_0I + a_1A + a_2B + a_3C.$$

Bu gösterimde kullanılan I, A, B, C matrisleri “Hamilton şartları” olarak da bilinen aşağıdaki eşitlikleri sağlar.

$$AA = -I, \quad BB = -I, \quad CC = -I,$$

$$AB = C, \quad BC = A, \quad CA = B,$$

$$BA = -C, \quad CB = -A, \quad AC = -B.$$

Dolayısıyla, yukarıda belirtilen şartları sağlayabilecek 48 farklı A, B, C üçlüsü yazılabilir (Farebrother ve diğ. 2003).

A, B, C matrisleri için yazılabilecek 48 farklı gösterimden ikisi aşağıdaki gibi A, B, C isimlendirmesine uygun olarak verilebilir.

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, B_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, C_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

ve

$$A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, B_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, C_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Verilen matrislere göre, $Q_1 = a_0I + a_1A_1 + a_2B_1 + a_3C_1$ olacak şekilde seçilen bir kuaterniyonun gösterimi aşağıdaki gibi olur.

$$Q_1 = \begin{bmatrix} a_0 & -a_1 & -a_2 & -a_3 \\ a_1 & a_0 & -a_3 & a_2 \\ a_2 & a_3 & a_0 & -a_1 \\ a_3 & -a_2 & a_1 & a_0 \end{bmatrix}.$$

$Q_2 = a_0I + a_1A_2 + a_2B_2 + a_3C_2$ elemanı için A_2, B_2, C_2 matrislerine göre yazılan gösterim ise aşağıdaki gibidir.

$$Q_2 = \begin{bmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \\ -a_1 & a_0 & -a_3 & a_2 \\ -a_2 & a_3 & a_0 & -a_1 \\ -a_3 & -a_2 & a_1 & a_0 \end{bmatrix}.$$

Şimdi ise, $\left(\frac{-1,1}{\mathbb{R}}\right)$ split kuaterniyon cebiri için matris gösterimi tanımını verelim. Split kuaterniyon cebirinin elemanı olan q , aşağıdaki gibi ifade edilir,

$$q = a_01 + a_1i + a_2j + a_3k.$$

Bu elemanın 2×2 lik matrisler yardımı ile gösterimi, I birim matris olmak üzere, $Q = a_0I + a_1A + a_2B + a_3C$ dir. Tanımlanan A, B, C matrislerinin açık ifadesi aşağıdaki gibidir.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Bu matris gösterimi split cebirin özelliklerine sahiptir. Bu özelliklerden en temel olanı, birimlerin karelerinin aldığı değerdir ve bu özellik matrisler ile aşağıdaki gibi ifade edilebilir;

$$AA = -I, \quad BB = I, \quad CC = I.$$

O zaman, $Q = a_0I + a_1A + a_2B + a_3C$ olarak seçilen elamanın belirtilen matrislerle gösterimi aşağıdaki gibidir.

$$Q = \begin{bmatrix} a_0 + a_3 & a_1 + a_2 \\ a_1 - a_2 & a_0 - a_3 \end{bmatrix}.$$

Bu bölümde, reel ve split kuaterniyon cebirlerinin karmaşık ve reel matris gösterimlerini verdik. Bir sonraki bölümde oktonyon cebirinin sol matris gösterimini vereceğiz. Bu gösterim için, reel kuaterniyon cebirinin matris gösteriminden faydalanacağız.

3.2 Oktonyonların Matris Gösterimleri

Bu bölümde reel ve split oktonyon cebirleri için matris gösterimlerini inceleyeceğiz. Bölüm 3.1 de verilen kuaterniyon cebirinin 4×4 lük matris gösterimi yardımıyla, oktonyon cebirinin 8×8 lik reel elemanlı sol matris gösterimini ve bu matris gösteriminin bazı özelliklerini inceleyeceğiz. Oktonyon cebirinde, kuaterniyonlardan farklı olarak sadece sol matris gösteriminden bahsetmemizin sebebi, oktonyon cebirinin birleşme özelliğine sahip olmamasıdır. Ancak sol matris gösterimi, oktonyon cebirinin sahip olduğu bazı özelliklere sahip olması sebebiyle dikkate değer bir gösterimdir. Ayrıca, sol matris gösterimine benzer şekilde sağ matris gösterimi de yazılabilir (Tian 2000).

k reel oktonyonu q' ve q'' reel kuaterniyonları yardımıyla, $k = q' + q''e_4$ olarak tanımlanır. q' ve q'' reel kuaterniyonları, $q' = a_0e_0 + a_1e_1 + a_2e_2 + a_3e_3$, $q'' = a_4e_0 + a_5e_1 + a_6e_2 + a_7e_3$ olarak yazılabilir. Oktonyon cebirinin sol matris gösterimini tanımlamak için, kuaterniyon cebirinin reel matris gösterimi kullanılabilir.

q' kuaterniyonu Bölüm 3.1 deki Q_1 gösterimine göre aşağıdaki gibi yazılabilir;

$$Q'_1 = \begin{bmatrix} a_0 & -a_1 & -a_2 & -a_3 \\ a_1 & a_0 & -a_3 & a_2 \\ a_2 & a_3 & a_0 & -a_1 \\ a_3 & -a_2 & a_1 & a_0 \end{bmatrix}$$

Bu gösterimde kullanılacak olan matris, Q'_A matrisi, q' kuaterniyonuna ait Q'_1 matris gösterimi yardımıyla aşağıdaki gibi hesaplanabilir.

$$Q'_A = K_4 Q'_1 K_4$$

Yukarıdaki denklemde kullanılan K_4 matrisi aşağıdaki gibi tanımlıdır.

$$K_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Belirtilen matrislerden yararlanılarak oluşturulan $M(k)$ matris gösterimi aşağıdaki gibidir.

$$M(k) = \begin{bmatrix} Q'_1 & -Q''_A \\ Q''_1 & Q'_A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_0 & -a_1 & -a_2 & -a_3 & -a_4 & -a_5 & -a_6 & -a_7 \\ a_1 & a_0 & -a_3 & a_2 & -a_5 & a_4 & a_7 & -a_6 \\ a_2 & a_3 & a_0 & -a_1 & -a_6 & -a_7 & a_4 & a_5 \\ a_3 & -a_2 & a_1 & a_0 & -a_7 & a_6 & -a_5 & a_4 \\ a_4 & a_5 & a_6 & a_7 & a_0 & -a_1 & -a_2 & -a_3 \\ a_5 & -a_4 & a_7 & -a_6 & a_1 & a_0 & a_3 & -a_2 \\ a_6 & -a_7 & -a_4 & a_5 & a_2 & -a_3 & a_0 & a_1 \\ a_7 & a_6 & -a_5 & -a_4 & a_3 & a_2 & -a_1 & a_0 \end{bmatrix}$$

$M(k)$ matrisi yardımıyla gösterilen k oktonyonunun sol matris gösterimi aşağıdaki özellikleri sağlar;

k, m oktonyonları ve r reel sayısı için,

- i. $k = m \Leftrightarrow M(k) = M(m)$
- ii. $M(k + m) = M(k) + M(m)$
- iii. $rM(k) = M(rk)$
- iv. $M(1) = I_8$
- v. $M^T(k) = M(\bar{k})$
- vi. $M^2(k) = M(k^2)$
- vii. $M(k^{-1}) = M^{-1}(k)$
- viii. $M(kmk) = M(k)M(m)M(k)$
- ix. $M(km) + M(mk) = M(k)M(m) + M(m)M(k)$

k oktonyonunun sol matris gösterimi olarak tanımlanan $M(k)$, Yongge Tian (2000) tarafından yazılan “Matrix representations of octonions and their applications” adlı çalışmasında detaylı bir şekilde incelenmiştir.

Zorn (1933), skalerler ve vektörler yardımıyla, split oktonyon cebirinin matris gösterimini tanımlamıştır. Bu tanım, bilinen matris gösteriminden farklı olduğundan iki Zorn matrisinin çarpımı da bilinen matris çarpımından farklıdır ve birleşme özelliğine sahip değildir. Şimdi, split oktonyon cebiri için tanımlanan Zorn matris gösteriminin tanımını verelim.

Tanım 3.2.1: Köşegendeki elemanları skalerler ve diğer elemanları üç boyutlu vektörler olan 2×2 lik Zorn matris gösterimi, k split oktonyonunun bileşenleri kullanılarak aşağıdaki gibi ifade edilebilir.

$$k = a_0 e_0 + a_1 e_1 + \dots + a_7 e_7, \quad a_0, a_1, \dots, a_7 \in \mathbb{R}$$

$$A = \begin{bmatrix} & a_0 + a_4 & & [a_1 + a_5 & a_2 + a_6 & a_3 + a_7] \\ [-a_1 + a_5 & -a_2 + a_6 & -a_3 + a_7] & & a_0 - a_4 & \end{bmatrix}.$$

k split oktonyonu için oluşturulan Zorn matris gösteriminin, A , tanımında kullanılan skalerlerin ve vektörlerin açık ifadesi aşağıdaki gibi olur.

$$a = a_0 + a_4, \quad b = a_0 - a_4$$

$$x = [a_1 + a_5 \quad a_2 + a_6 \quad a_3 + a_7], \quad y = [-a_1 + a_5 \quad -a_2 + a_6 \quad -a_3 + a_7]$$

Bu matris gösteriminde iki matrisin çarpması, bilinen matris çarpımından farklıdır. Bu gösterimdeki matris çarpımının tanımı aşağıdaki gibi verilir (Zorn 1933).

$$\begin{bmatrix} a & x \\ y & b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c & z \\ t & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ac + x \cdot t & az + dx + y \circledast t \\ cy + by - x \circledast z & bd + z \cdot y \end{bmatrix}.$$

Yukarıda verilen matris gösterimi için bir örnek oluşturmadan önce, split oktonyon cebirinin çarpım tablosunu verelim. Zorn matris gösterimi ve bu gösterime bağlı tanımlanan çarpma işlemine göre oluşan çarpım tablosu Tablo 3.1 de verilmiştir.

	e_0	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7
e_0	1	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7
e_1	e_1	-1	e_3	$-e_2$	$-e_5$	e_4	$-e_7$	e_6
e_2	e_2	$-e_3$	-1	e_1	$-e_6$	e_7	e_4	$-e_5$
e_3	e_3	e_2	$-e_1$	-1	$-e_7$	$-e_6$	e_5	e_4
e_4	e_4	e_5	e_6	e_7	1	e_1	e_2	e_3
e_5	e_5	$-e_4$	$-e_7$	e_6	$-e_1$	1	e_3	$-e_2$
e_6	e_6	e_7	$-e_4$	$-e_5$	$-e_2$	$-e_3$	1	e_1
e_7	e_7	$-e_6$	e_5	$-e_4$	$-e_3$	e_2	$-e_1$	1

Tablo 3.1: Split Oktonyon Çarpım Tablosu

Daha açık bir ifade ile Tablo 3.1 deki birimler, Zorn çarpımının oluşturduğu cebirin birimlerine izomorftur.

Örnek 3.2.1: Zorn matris gösteriminin daha açık olması için iki oktonyon seçelim;

$$k_1 = 1e_0 - 2e_1 + 8e_2 + 5e_3 + 2e_4 - 7e_5 - 5e_6 + 9e_7$$

ve

$$k_2 = 5e_0 - 4e_1 + 7e_2 - 6e_3 + 1e_4 + 2e_5 - 3e_6 + 8e_7$$

oktonyonlarını alalım. Tablo 3.1 ile verilen çarpım tablosu kullanılırsa, k_1k_2 oktonyonu aşağıdaki gibi hesaplanır.

$$k_1k_2 = 46e_0 - 99e_1 + 88e_2 + 75e_3 + 84e_4 - 85e_5 + 30e_6 + 115e_7.$$

Şimdi ise, Zorn matris gösterimini ve çarpımını kullanarak k_1k_2 çarpımını hesaplayalım. k_1 ve k_2 oktonyonlarının matris gösterimi aşağıda verilmiştir.

$$k_1 = \begin{bmatrix} 3 & & [-9 & 3 & 14] \\ [-5 & -13 & 4] & & -1 \end{bmatrix}$$

$$k_2 = \begin{bmatrix} 6 & & [-2 & 4 & 2] \\ [6 & -10 & 14] & & 4 \end{bmatrix}$$

Bu iki matris, belirtilen çarpma tanımını kullanılarak çarpma yapıldığında aşağıdaki matris elde edilir;

$$k_1 k_2 = \begin{bmatrix} & 130 & & [-184 & 118 & 190] \\ [14 & -58 & 40] & & -38 & \end{bmatrix}.$$

k_1 ile k_2 nin çarpımı $k_1 k_2 = a_0 e_0 + a_1 e_1 + a_2 e_2 + a_3 e_3 + a_4 e_4 + a_5 e_5 + a_6 e_6 + a_7 e_7$ olmak üzere

$$\begin{bmatrix} & a_0 + a_4 & & [a_1 + a_5 & a_2 + a_6 & a_3 + a_7] \\ [-a_1 + a_5 & -a_2 + a_6 & -a_3 + a_7] & & a_0 - a_4 & \end{bmatrix}$$

matrisi yardımıyla hesaplanabilir. Yani,

$$a_0 + a_4 = 130, \quad a_0 - a_4 = -38$$

olup $a_0 = 46$ ve $a_4 = 84$ değerleri bulunmuş olur. O zaman vektörel değerler,

$$[a_1 + a_5 \quad a_2 + a_6 \quad a_3 + a_7] = [14 \quad -58 \quad 40]$$

ve

$$[-a_1 + a_5 \quad -a_2 + a_6 \quad -a_3 + a_7] = [-184 \quad 118 \quad 190]$$

yardımı ile $a_1 = -99$, $a_2 = 88$, $a_3 = 75$, $a_5 = -85$, $a_6 = 30$, $a_7 = 115$ olarak hesaplanır. Bulunan değerler, çarpım tablosuna göre yapılan çarpma ile aynıdır.

Zorn matris gösterimi ve çarpımı, split oktonyonları göstermede ve işlem yapmada bazı kolaylıklar getirmiştir. Split oktonyon çarpım tablosunu bilmeyen bir kişi, sadece nokta çarpım ve vektörel çarpım eklenmiş Zorn matris gösteriminin çarpma işlemini kullanarak, split oktonyon çarpımını hesaplayabilir. İlk olarak split oktonyon cebiri gösterimi için tanımlanan Zorn matris gösterimi, bazı değişiklikler sonrasında reel oktonyon cebirinin gösteriminde de kullanılabilir (Daboul ve Delbourgo 1999). Reel oktonyon cebiri için Zorn matris gösterimi aşağıdaki gibi tanımlanır (Smith 2006).

Tanım 3.2.2: k reel oktonyonunun Zorn matris gösterimi aşağıdaki gibi verilebilir.

$$O = \begin{bmatrix} z_1 & v_1 \\ v_2 & z_2 \end{bmatrix} \quad z_1, z_2 \in \mathbb{C}, \quad v_1, v_2 \in \mathbb{C}^3.$$

Örnek 3.2.2: Önceki örnekte kullanılan oktonyonları, bu örnek için kullanarak iki çarpım sonucu arasındaki farkı ortaya çıkaralım.

$$k_1 = 1e_0 - 2e_1 + 8e_2 + 5e_3 + 2e_4 - 7e_5 - 5e_6 + 9e_7$$

ve

$$k_2 = 5e_0 - 4e_1 + 7e_2 - 6e_3 + 1e_4 + 2e_5 - 3e_6 + 8e_7$$

olmak üzere, Tablo 3.1 yardımıyla $k_1 k_2$,

$$k_1 k_2 = -104e_0 - 73e_1 - 60e_2 + 13e_3 - 62e_4 - 73e_5 + 18e_6 + 149e_7$$

olarak bulunur. Şimdi ise, verilen matris tanımına göre k_1 elemanı için O_1 ve k_2 elemanı için O_2 matris gösterimlerini bulalım.

$$O_1 = \begin{bmatrix} 1 + 2i & [2 - 7i & -8 - 5i & -5 + 9i] \\ [-2 - 7i & 8 - 5i & 5 + 9i] & 1 - 2i \end{bmatrix},$$

$$O_2 = \begin{bmatrix} 5 + 1i & [4 + 1i & -7 + 2i & 6 - 3i] \\ [-4 + 1i & 7 + 2i & -6 - 3i] & 5 - 1i \end{bmatrix}.$$

Bu iki matrisin çarpımı, reel oktonyonlar için tanımlanan Zorn matris çarpma işlemine göre hesaplandığında aşağıdaki matris elde edilir.

$$O_1 O_2 = \begin{bmatrix} -104 - 62i & [73 - 73i & 60 + 18i & -13 + 149i] \\ [-73 - 73i & -60 + 18i & 13 + 149i] & -104 + 62i \end{bmatrix}$$

$O_1 O_2$ nin matris gösterimi $\{e_0, e_1, \dots, e_7\}$ bazlarına göre yazılırsa;

$$k_1 k_2 = -104e_0 - 73e_1 - 60e_2 + 13e_3 - 62e_4 - 73e_5 + 18e_6 + 149e_7$$

bulunur. Elde edilen sonuç, çarpım tablosu kullanılarak elde edilen sonuçla aynıdır.

4. SPLIT FİBONACCİ VE LUCAS OKTONYONLARI VE BUNLARIN MATRİS GÖSTERİMLERİ

Leonardo Fibonacci Arap sayılarını, ondalık sayı sistemini ve tavşan problemini Avrupa ya taşıyan ilk bilim insanıdır. Yazdığı Liber Abaci adlı kitap, Arap sayı sisteminden öğrendiklerini anlattığı bir eserdir (Koshy 2001).

Fibonacci sayı dizisi, başlangıç değerleri $f_0 = 0$, $f_1 = 1$ olarak alınan ve

$$f_{n+1} = f_n + f_{n-1}$$

olarak ifade edilen bir sayı dizisidir. Fibonacci sayı dizisinin kullanıldığı, kuaterniyon ve oktonyon cebirlerinde bir çok çalışma vardır. Bu çalışmalardan bazıları Halıcı (2012), Halıcı (2013), Halıcı (2015), Keçilioğlu ve Akkuş (2015), Akkuş ve Keçilioğlu (2015), Flaut ve Savin (2015) dır.

Fibonacci sayılarının başlangıç değerleri olan 0 ve 1 sayıları yerine, 2 ve 1 sayılarının alınması ile oluşan sayı dizisine Lucas sayı dizisi, kısaca Lucas sayıları denir. François Edouard Anatole Lucas, başlangıç değerlerini değiştirerek elde ettiği ve adının verildiği Lucas sayılarını çalışmış ve çok sayıda özdeşlikler elde etmiştir. Lucas sayı dizisi ile Fibonacci sayı dizisi arasında bulunan bağıntılardan bazıları

$$l_n = f_{n-1} + f_{n+1},$$

$$l_n = f_n + 2f_{n-1},$$

$$l_n = f_{n+2} - f_{n-2}.$$

dır

4.1 Split Fibonacci Oktonyonları ve Bunların Matris Gösterimleri

f_n ler Fibonacci sayılarını ifade etmek üzere,

$$O_{F_n} = f_n e_0 + f_{n+1} e_1 + f_{n+2} e_2 + \cdots + f_{n+7} e_7$$

olsun. O_{F_n} e, n . split Fibonacci oktonyonu denir. Bu tanımda kullanılacak olan split oktonyon cebirinin çarpma işlemi, Tablo 3.1 de belirtilen çarpım tablosunun işlemi ile aynı olacak şekilde seçilmiştir.

Split Fibonacci oktonyonlarının bazı özelliklerini inceleyelim.

O_{F_n} n . split Fibonacci oktonyonunun eşleniği $\overline{O_{F_n}}$ aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$\overline{O_{F_n}} = O_{F_n} - \sum_1^7 f_{n+s} e_s$$

O_{F_n} n . split Fibonacci oktonyonu için norm,

$$N(O_{F_n}) = O_{F_n} \overline{O_{F_n}} = \overline{O_{F_n}} O_{F_n} = f_n^2 + f_{n+1}^2 + f_{n+2}^2 + f_{n+3}^2 - f_{n+4}^2 - f_{n+5}^2 - f_{n+6}^2 - f_{n+7}^2$$

olarak tanımlanır.

Split Fibonacci oktonyonları için, Fibonacci sayıları için geçerli olan önemli bir özdeşliği (Cassini özdeşliği) hesaplayalım. Bilindiği gibi, Cassini özdeşliğinin ifadesi aşağıdaki gibidir (Koshy 2001).

$$f_{n+1}f_{n-1} - f_n^2 = (-1)^n$$

Oktonyon cebirinde değişme özelliği olmadığından Cassini özdeşliği aşağıdaki şekilde de ifade edilebilir.

$$f_{n-1}f_{n+1} - f_n^2 = (-1)^n$$

Şimdi, split oktonyon cebirinde bu iki farklı Cassini özdeşliğini hesaplayalım.

Teorem 4.1.1 Split oktonyon cebirinde, Cassini özdeşliği aşağıdaki gibidir.

$$i) \quad O_{F_{n+1}} O_{F_{n-1}} - O_{F_n}^2 = (-1)^{n+1} A_1$$

$$A_1 = 2 - 2e_1 + 4e_3 + 10e_4 + 16e_5 + 26e_6 + 21e_7.$$

$$ii) \quad O_{F_{n-1}} O_{F_{n+1}} - O_{F_n}^2 = (-1)^{n+1} A_2$$

$$A_2 = 2 + 4e_1 + 6e_2 + 4e_3 + 4e_4 + 6e_5 + 10e_6 + 37e_7.$$

İspat 4.1.1 i) İspat tümevarım ile yapılmak istenirse;

$n = 1$ için,

$$O_{F_2}O_{F_0} - O_{F_1}^2 = 2 - 2e_1 + 4e_3 + 10e_4 + 16e_5 + 26e_6 + 21e_7.$$

olarak bulunur.

$n = k$ için doğru olduğunu varsayarsak,

$$O_{F_{k+1}}O_{F_{k-1}} - O_{F_k}^2 = (-1)^{k+1}A_1$$

elde edilir.

$n = k + 1$ için doğru olduğu aşağıdaki gibi gösterilebilir.

$$\begin{aligned} O_{F_{k+2}}O_{F_k} - O_{F_{k+1}}^2 &= (O_{F_{k+1}} + O_{F_k})(O_{F_{k+1}} - O_{F_{k-1}}) - O_{F_{k+1}}^2 \\ &= O_{F_{k+1}}^2 - O_{F_{k+1}}O_{F_{k-1}} + O_{F_k}O_{F_{k+1}} - O_{F_k}O_{F_{k-1}} - O_{F_{k+1}}^2 \\ &= O_{F_k}O_{F_{k+1}} - O_{F_k}O_{F_{k-1}} - O_{F_k}^2 - (-1)^{k+1}A_1 \\ &= O_{F_k}O_{F_{k+1}} - O_{F_k}(O_{F_{k-1}} + O_{F_k}) + (-1)^{k+2}A_1 \\ &= O_{F_k}O_{F_{k+1}} - O_{F_k}O_{F_{k+1}} + (-1)^{k+2}A_1 \\ &= (-1)^{k+2}A_1 \end{aligned}$$

ii) Tümevarım kullanalım;

$n = 1$ için,

$$F_0F_2 - F_1^2 = -2 - 4e_1 - 6e_2 - 4e_3 - 4e_4 - 6e_5 - 10e_6 - 37e_7.$$

olur.

$n = k$ için doğru olduğunu varsayarsak, yani

$$F_{k-1}F_{k+1} - F_k^2 = (-1)^{k+1}A_2$$

doğru olsun. O zaman, $n = k + 1$ için

$$\begin{aligned} O_{F_k}O_{F_{k+2}} - O_{F_{k+1}}^2 &= (O_{F_{k+1}} - O_{F_{k-1}})(O_{F_{k+1}} + O_{F_k}) - O_{F_{k+1}}^2 \\ &= O_{F_{k+1}}^2 + O_{F_{k+1}}O_{F_k} - O_{F_{k-1}}O_{F_{k+1}} - O_{F_{k-1}}O_{F_k} - O_{F_{k+1}}^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= O_{F_{k+1}} O_{F_k} - O_{F_{k-1}} O_{F_k} - O_{F_k}^2 - (-1)^{k+1} A_2 \\
&= O_{F_{k+1}} O_{F_k} - (O_{F_{k-1}} O_{F_k}) O_{F_k} + (-1)^{k+2} A_2 \\
&= O_{F_{k+1}} O_{F_k} - O_{F_{k+1}} O_{F_k} + (-1)^{k+2} A_2 \\
&= (-1)^{k+2} A_2
\end{aligned}$$

bulunur.

Böylece, split oktonyonlar için iki farklı Cassini özdeşliği tümevarım ile ispatlanmış olur.

Bölüm 3.2 de anlatılan Zorn matris gösterimi yardımıyla, split Fibonacci oktonyonlarının gösterimini tanımlayarak bazı özdeşlikleri bu matris gösterimi ile hesaplayalım.

$$O_{F_n} = f_n e_0 + f_{n+1} e_1 + f_{n+2} e_2 + \cdots + f_{n+7} e_7$$

olarak tanımlanan split Fibonacci oktonyonunun Zorn matris gösterimi aşağıdaki gibidir. O_{F_n} nin matris temsilini K_n ile gösterelim.

$$K_n = \begin{bmatrix} f_n + f_{n+4} & G_{n+1} \\ g_{n+1} & f_n - f_{n+4} \end{bmatrix}.$$

Tanımda kullanılan G_n ve g_n aşağıdaki gibi tanımlıdır;

$$G_{n+1} = [f_{n+1} + f_{n+5} \quad f_{n+2} + f_{n+6} \quad f_{n+3} + f_{n+7}],$$

$$g_{n+1} = [-f_{n+1} + f_{n+5} \quad -f_{n+2} + f_{n+6} \quad -f_{n+3} + f_{n+7}].$$

Yazımda kolaylık olması açısından kullandığımız G_n ve g_n vektörlerini gerektiğinde hesaplayarak yazacağız.

Teorem 4.1.2: O_{F_n} nin matris gösterimi olan K_n nin determinanı O_{F_n} nin normuna eşittir.

İspat 4.1.2: $\det(K_n) = (f_n + f_{n+4})(f_n - f_{n+4}) - G_{n+1} \cdot g_{n+1}$

olup, gerekli hesaplamalar yapılırsa,

$$\det(K_n) = f_n^2 + f_{n+1}^2 + f_{n+2}^2 + f_{n+3}^2 - f_{n+4}^2 - f_{n+5}^2 - f_{n+6}^2 - f_{n+7}^2$$

bulunur. Böylece teorem ispatlanmış olur.

Örnek 4.1.1: Cassini özdeşliğinin matrislerle ifadesini verelim.

$$O_{F_{n+1}} O_{F_{n-1}} - O_{F_n}^2 = (-1)^{n+1} A_1$$

$$A_1 = 2 - 2e_1 + 4e_3 + 10e_4 + 16e_5 + 26e_6 + 21e_7.$$

Bu özdeşliğin matrislerle ifadesi aşağıdaki gibidir;

$$K_{n+1}K_{n-1} - K_n^2 = (-1)^{n+1} \begin{bmatrix} 12 & [14 & 26 & 31] \\ [18 & 26 & 11] & -8 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} f_{n+1} + f_{n+5} & G_{n+2} \\ g_{n+2} & f_{n+1} - f_{n+5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_{n-1} + f_{n+3} & G_{n-1} \\ g_{n-1} & f_{n-1} - f_{n+3} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} f_n + f_{n+4} & G_{n+1} \\ g_{n+1} & f_n - f_{n+4} \end{bmatrix}^2 = \\ & = (-1)^{n+1} \begin{bmatrix} 12 & [14 & 26 & 31] \\ [18 & 26 & 11] & -8 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

4.2 Split Lucas Oktonyonları ve Bunların Matris Gösterimleri

L_n ler Lucas sayılarını ifade etmek üzere, n . split Lucas oktonyonu

$$O_{L_n} = L_n e_0 + L_{n+1} e_1 + \dots + L_{n+7} e_7$$

olarak tanımlanır. Bu tanım için kullanılacak olan split oktonyon cebirinin çarpma işlemi Tablo 3.1 de belirtilen çarpım tablosuyla aynı olacak şekilde seçilmiştir.

Şimdi, split Fibonacci oktonyonlarına benzer olarak split Lucas oktonyonlarının bazı özelliklerini inceleyelim.

O_{L_n} n . split Lucas oktonyonu için eşlenik, aşağıdaki gibi tanımlanabilir;

$$\overline{O_{L_n}} = O_{L_n} - \sum_{s=1}^7 L_{n+s} e_s.$$

O_{L_n} n . split Lucas oktonyonları için norm,

$$N(O_{L_n}) = O_{L_n} \overline{O_{L_n}} = \overline{O_{L_n}} O_{L_n} = L_n^2 + L_{n+1}^2 + L_{n+2}^2 + L_{n+3}^2 - L_{n+4}^2 - L_{n+5}^2 - L_{n+6}^2 - L_{n+7}^2$$

olarak tanımlanır.

Fibonacci sayıları için önemli bir özdeşlik olan Cassini özdeşliğine benzer bir özdeşliği, Lucas sayıları için verelim. Lucas sayıları için bu özdeşlik aşağıdaki gibidir (Voll 2010).

$$L_{n+1}L_{n-1} - L_n^2 = 5(-1)^n.$$

Oktonyon çarpımının değişme özelliği olmadığından, özdeşlik ayrıca

$$L_{n-1}L_{n+1} - L_n^2 = 5(-1)^n$$

olarak da verilebilir.

Şimdi, aşağıdaki teoremden split oktonyon cebirinde bu iki farklı özdeşliği verelim.

Teorem 4.2.1: Split oktonyon cebirinde, aşağıdaki özdeşlikler sağlanır.

$$i) O_{L_{n+1}} O_{L_{n-1}} - O_{L_n}^2 = (-1)^{n+1} B_1$$

$$B_1 = 10 - 10e_1 + 20e_3 + 50e_4 + 80e_5 + 130e_6 + 105e_7.$$

$$ii) O_{L_{n-1}} O_{L_{n+1}} - O_{L_n}^2 = (-1)^{n+1} B_2$$

$$B_2 = 10 + 20e_1 + 30e_2 + 20e_3 + 20e_4 + 30e_5 + 50e_6 + 185e_7.$$

İspat 4.2.1: i) Tümevarım yöntemini uygulayalım.

$n = 1$ için,

$$O_{L_2} O_{L_0} - O_{L_1}^2 = 10 - 10e_1 + 20e_3 + 50e_4 + 80e_5 + 130e_6 + 105e_7.$$

olarak hesaplanır.

$n = k$ için doğru olduğunu varsayılırsa;

$$O_{L_{k+1}} O_{L_{k-1}} - O_{L_k}^2 = (-1)^{k+1} B_1$$

elde edilir.

$n = k + 1$ için doğru olduğu aşağıdaki gibi gösterilebilir;

$$\begin{aligned} O_{L_{k+2}} O_{L_k} - O_{L_{k+1}}^2 &= (O_{L_{k+1}} + O_{L_k})(O_{L_{k+1}} - O_{L_{k-1}}) - O_{L_{k+1}}^2 \\ &= O_{L_{k+1}}^2 - O_{L_{k+1}} O_{L_{k-1}} + O_{L_k} O_{L_{k+1}} - O_{L_k} O_{L_{k-1}} - O_{L_{k+1}}^2 \\ &= O_{L_k} O_{L_{k+1}} - O_{L_k} O_{L_{k-1}} - O_{L_k}^2 - (-1)^{k+1} B_1 \\ &= O_{L_k} O_{L_{k+1}} - O_{L_k} (O_{L_{k-1}} + O_{L_k}) + (-1)^{k+2} B_1 \\ &= O_{L_k} O_{L_{k+1}} - O_{L_k} O_{L_{k+1}} + (-1)^{k+2} B_1 \\ &= (-1)^{k+2} B_1 \end{aligned}$$

ii) İspat tümevarım ile yapılmak istenirse;

$n = 1$ için,

$$O_{L_0} O_{L_2} - O_{L_1}^2 = 10 + 20e_1 + 30e_2 + 20e_3 + 20e_4 + 30e_5 + 50e_6 + 185e_7.$$

olur.

$n = k$ için doğru olduğunu varsayılırsa, yani

$$O_{L_{k-1}} O_{L_{k+1}} - O_{L_k}^2 = (-1)^{k+1} B_2$$

yazılır. O zaman,

$n = k + 1$ için

$$\begin{aligned} O_{L_k} O_{L_{k+2}} - O_{L_{k+1}}^2 &= (O_{L_{k+1}} - O_{L_{k-1}})(O_{L_{k+1}} + O_{L_k}) - O_{L_k}^2 \\ &= O_{L_{k+1}}^2 + O_{L_{k+1}} O_{L_k} - O_{L_{k-1}} O_{L_{k+1}} - O_{L_{k-1}} O_{L_k} - O_{L_{k+1}}^2 \\ &= O_{L_{k+1}} O_{L_k} - O_{L_{k-1}} O_{L_k} - O_{L_k}^2 - (-1)^{k+1} B_2 \\ &= O_{L_{k+1}} O_{L_k} - (O_{L_{k-1}} + O_{L_k}) O_{L_k} + (-1)^{k+2} B_2 \\ &= O_{L_{k+1}} O_{L_k} - O_{L_{k+1}} O_{L_k} + (-1)^{k+2} B_2 \\ &= (-1)^{k+2} B_2. \end{aligned}$$

bulunur.

Böylece, bahsedilen iki özdeşlik, tümevarım ile ispatlanmış olur.

Şimdi, Bölüm 4 te anlatılan Zorn matris gösterimi yardımıyla, split Lucas oktonyonlarının gösterimini tanıtarak, bazı özdeşlikleri bu gösterim yardımıyla hesaplayalım.

$$O_{L_n} = L_n e_0 + L_{n+1} e_1 + \dots + L_{n+7} e_7$$

olarak tanımlanan split Lucas oktonyonunun Zorn matris gösterimi aşağıdaki gibidir.

O_{L_n} nin matris gösterimini T_n olarak gösterelim,

$$T_n = \begin{bmatrix} l_n + l_{n+4} & H_{n+1} \\ h_{n+1} & l_n - l_{n+4} \end{bmatrix}.$$

Yukarıda kullanılan H_n ve h_n vektörel değerleri aşağıdaki gibidir;

$$H_{n+1} = [l_{n+1} + l_{n+5} \quad l_{n+2} + l_{n+6} \quad l_{n+3} + l_{n+7}],$$

$$h_{n+1} = [-l_{n+1} + l_{n+5} \quad -l_{n+2} + l_{n+6} \quad -l_{n+3} + l_{n+7}].$$

Yazımda kolaylık olması açısından kullandığımız H_n ve h_n değerlerini gerektiğinde hesaplayarak yazacağız.

Teorem 4.2.2 O_{L_n} nin matris gösterimi olan T_n nin determinanı O_{L_n} nin normuna eşittir.

İspat 4.2.2: $\det(T_n) = (L_n + L_{n+4})(L_n + L_{n+4}) - H_{n+1} \cdot h_{n+1}$

olup, gerekli hesaplamalar yapıldığında

$$\det(T_n) = L_n^2 + L_{n+1}^2 + L_{n+2}^2 + L_{n+3}^2 - L_{n+4}^2 - L_{n+5}^2 - L_{n+6}^2 - L_{n+7}^2$$

olarak bulunur. Böylelikle determinantın norma eşit olduğu görülür.

Örnek 4.2.1: Bu örnekte, split Lucas oktonyonlarında Cassini benzeri özdeşliğin matrislerle ifadesini verelim.

$$O_{L_{n+1}}O_{L_{n-1}} - O_{L_n}^2 = (-1)^{n+1}B_1$$

$$B_1 = 10 - 10e_1 + 20e_3 + 50e_4 + 80e_5 + 130e_6 + 105e_7.$$

Bu özdeşliğin matrislerle ifadesi aşağıdaki gibidir;

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} L_{n+1} + L_{n+5} & H_{n+2} \\ h_{n+2} & L_{n+1} - L_{n+5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L_{n-1} + L_{n+3} & H_{n-1} \\ h_{n-1} & L_{n-1} - L_{n+3} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} L_n + L_{n+4} & H_{n+1} \\ h_{n+1} & L_n - L_{n+4} \end{bmatrix}^2 = \\ & = (-1)^{n+1} \begin{bmatrix} 12 & [14 & 26 & 31] \\ [18 & 26 & 11] & -8 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

5. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu çalışmada, normlu bölümlü cebirler ile ilgili kısa bir tarihçe verilmiştir. Sonrasında, diğer bölümlerde kullanılacak bazı temel tanım ve kavramlara yer verilmiştir.

İkinci bölümde, oktonyon cebiri ve split oktonyon cebiri ile ilgili tanım ve teoremlere yer verildikten sonra, üçüncü bölümde oktonyon cebiri için matris gösterimi yapılabilmesi için kuaterniyon cebirine ait bazı matris gösterimlerine yer verilmiştir. Ayrıca, Zorn tarafından split oktonyon cebirini ifade etmek için tanımlanan matris gösterimi ve çarpımı incelenmiştir.

Son olarak, split oktonyon cebirinde Fibonacci ve Lucas sayıları çalışılmış ve bu sayıların, üçüncü bölümde bahsedilen Zorn matris gösterimleri ilk kez tarafımızdan verilmiştir (Halıcı ve Karataş 2016).

Bu çalışma sekiz boyutlu oktonyon ve split oktonyon cebirleri ile ilgili bilgi edinmek isteyenlere, temel bilgileri sağlayan bir çalışmadır.

6. KAYNAKLAR

Akkaş, S. Hacısalihoğlu, H. H. Özel, Z. Sabuncuoğlu, A., “*Soyut Matematik*”, Ankara, (1998).

Akkuş, İ., Keçilioğlu, O., “Split Fibonacci and Lucas octonions” *Adv. Appl. Clifford Algebr.* (25), 517-525, (2015).

Baez, J. C., “The octonions”, *Bull. Amer. Math. Soc.*, (39), 145-205, (2005).

Bayraktar, M., “Fonksiyonel Analiz”, Ankara, (2000).

Cockle, J. ve Davies, T. S., “LXIV. On certain functions resembling quaternions, and on a new imaginary in algebra”, 435-439, (1848).

Daboul, J. ve Delbourgo, R., “Matrix representation of octonions and generalizations”, *Journal of Mathematical Physics*, (40.8), 4134-4150, (1999).

Dickson, L. E., “On quaternions and their generalization and the history of the eight square theorem”, *Annals of Mathematics*, 155-171, (1919).

Farebrother, R., Groß, J. ve Troschke, S. O., “Matrix representation of quaternions”, *Linear Algebra and its Applications*, (362), 251-255, (2003).

Flaut, C., Savin, D., “Quaternion algebras and generalized Fibonacci-Lucas quaternions”, *Adv. Appl. Clifford Algebr.* (25), 853-862, (2015).

Flaut, C. ve Shpakivskiy, V., “An efficient method for solving equations in generalized quaternion and octonion algebras”, *Advances in Applied Clifford Algebras*, (25.2), 337-350, (2015).

Farebrother, R., Groß, J. ve Troschke, S. O., “Matrix representation of quaternions”, *Linear Algebra and its Applications*, (362), 251-255, (2003).

Günaydın, M. ve Gürsey, F., “Quark structure and octonions”, *Journal of Mathematical Physics*, (14.11), 1651-1667, (1973).

Gürsey, F. Tze, C. H., “On the role of division, Jordan and related algebras in particle physics” World Scientific, (1996).

Halıcı, S., “On Fibonacci quaternions”, *Adv. Appl. Clifford Algebr.* (22), 321-327, (2012).

Halıcı, S., “On dual Fibonacci octonions” *Adv. Appl. Clifford Algebr.* (25), 905-914, (2015).

Halıcı, S., "On complex Fibonacci quaternions", *Adv. Appl. Clifford Algebr.* (23.1), 105-112 (2013).

Halıcı, S., Karataş, A., “Some Matrix Representations of Fibonacci Quaternions and Octonions”, *Adv. Appl. Clifford Algebr.*, doi: 10.1007/s00006-016-0661-2, (2016).

Keçilioğlu, O., Akkus, İ., “The Fibonacci octonions”, *Adv. Appl. Clifford Algebr.* (25), 151-158, (2015).

Koshy, T., “*Fibonacci and Lucas numbers with applications*”, 51, John Wiley & Sons, (2001).

Kula, L.,”Bölünmüş Kuaterniyonlar ve Geometrik Uygulamaları”, Doktora, Ankara Üniversitesi, Ankara, (2003).

Lam, T. Y., “*Introduction to quadratic forms over fields*”, 67, Rhode Island: American Mathematical Society, (2005).

Lewis, D. W., “Quaternion algebras and the algebraic legacy of Hamilton’s quaternions”, *Irish Math. Soc. Bull.*, (57), 41-64, (2006).

Merino, O., A short history of complex numbers [online], (23 Şubat 2016), <http://www.math.uri.edu/~merino/spring06/mth562/ShortHistoryComplexNumbers2006.pdf>, (2006).

Okubo, S., “*Introduction to Octonion and Other Non-Associative Algebras in Physics*”, 5, Australia : Press Syndicate of the University of Cambridge, (1995).

Öztürk, E., “Fizik ve Mühendislikte Matematik Yöntemler”, Seçkin Yayıncılık, (2012)

Schafer, R. D., “*An introduction to nonassociative algebras*”, 22, Courier Corporation, (1966).

Sertöz, A. S., “Cebir tarlada başladı”, *Bilim Teknik*, (576), 60-65, (2015).

Sham, Z. Y., “Quaternion Algebras and Quadratic Forms”, Yüksek Lisans, *University of Waterloo, Waterloo*, (2008).

Smith, J. D. H., “*An introduction to quasigroups and their representations*”, CRC Press, (2006).

Sorgsepp, L. Lyhmus, J. “About nonassociativity in physics and Cayley-Graves’ octonions”, AN Ehstonskoj SSR, (1978).

Springer, T. A. Veldkamp, F. D., “*Octonions, Jordan Algebras and Exceptional Groups*”, Springer, (2000).

Tian, Y., “Matrix representations of octonions and their applications”, *Advances in Applied Clifford Algebras*, (10.1), 61-90, (2000).

Voll, N. G., “The Cassini Identity and Its Relatives”, *The Fibonacci Quarterly*, (48.3), 197-201, (2010).

Ward, J. P., “*Quaternions and Cayley numbers: Algebra and applications*”, 403, Springer Science & Business Media, (2012).

Zorn, M., “Alternativkörper und quadratische Systeme”, *Abhandlungen aus dem Mathematischen Seminar der Universität Hamburg.*, (9.1), Springer Berlin/Heidelberg, 395-402, (1933).

7. ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı : Adnan KARATAŞ

Doğum Yılı ve Yeri : 1990, Elazığ

Elektronik posta : Adnank@pau.edu.tr

Elektronik posta : Adnankaratas@outlook.com

Öğrenim Yeri ve Yılı

İlkokul : İsmet Paşa İlköğretim Okulu (1995 - 2000)

Ortaokul : Seyranbağları İlköğretim Okulu (2000 - 2003)

Lise : Ankara Atatürk Lisesi (2004 - 2007)

Lisans : TOBB Ekonomi ve Teknoloji Üniversitesi (2007 - 2013)