

**T.C.  
PAMUKKALE ÜNİVERSİTESİ  
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ  
MATEMATİK ANABİLİM DALI**

**CHEBYSHEV TÜREVLEME MATRİSLERİ VE BAZI  
UYGULAMALARI**

**YÜKSEK LİSANS TEZİ**

**MERVE UZUNBOY**

**DENİZLİ, HAZİRAN - 2016**

**T.C.  
PAMUKKALE ÜNİVERSİTESİ  
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ  
MATEMATİK ANABİLİM DALI**



**CHEBYSHEV TÜREVLEME MATRİSLERİ VE BAZI  
UYGULAMALARI**

**YÜKSEK LİSANS TEZİ**

**MERVE UZUNBOY**

**DENİZLİ, HAZİRAN - 2016**

## KABUL VE ONAY SAYFASI

MERVE UZUNBOY tarafından hazırlanan "CHEBYSHEV TÜREVLEME MATRİSLERİ VE BAZI UYGULAMALARI" adlı tez çalışmasının savunma sınavı 03.06.2016 tarihinde yapılmış olup aşağıda verilen jüri tarafından oy birliği ile Pamukkale Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı Yüksek Lisans Tezi olarak kabul edilmiştir.

Jüri Üyeleri

İmza

Danışman  
Prof. Dr. Uğur YÜCEL

Üye  
Doç. Dr. Özcan SERT  
Pamukkale Üniversitesi

Üye  
Doç. Dr. Murat SARI  
Yıldız Teknik Üniversitesi

Pamukkale Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun 15.06.2016 tarih ve 24/20.... sayılı kararıyla onaylanmıştır.

Prof. Dr. Orhan KARABULUT

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

**Bu tezin tasarımı, hazırlanması, yürütülmesi, araştırmalarının yapılması ve bulgularının analizlerinde bilimsel etiğe ve akademik kurallara özenle riayet edildiğini; bu çalışmanın doğrudan birincil ürünü olmayan bulguların, verilerin ve materyallerin bilimsel etiğe uygun olarak kaynak gösterildiğini ve alıntı yapılan çalışmalara atfedildiğine beyan ederim.**

**MERVE UZUNBOY**



## ÖZET

**CHEBYSHEV TÜREVLEME MATRİSLERİ VE BAZI UYGULAMALARI**  
**YÜKSEK LİSANS TEZİ**  
**MERVE UZUNBOY**  
**PAMUKKALE ÜNİVERSİTESİ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**  
**MATEMATİK ANABİLİM DALI**  
**(TEZ DANIŞMANI: PROF. DR. UĞUR YÜCEL)**

**DENİZLİ, HAZİRAN - 2016**

Bu tezde, spektral metotların temel özellikleri ve Kısmi Diferansiyel Denklemler (KDD) in sayısal çözümlerine uygulamaları verilmektedir. Spektral metotların temel özelliği, deneme fonksiyonları olarak sonsuz diferansiyellenebilir global fonksiyonların farklı ortogonal sistemlerini kullanmasıdır. Farklı deneme fonksiyonlarının kullanımı farklı spektral yaklaşımlara yol açmaktadır. Biz burada sadece periyodik olmayan problemler için tercih edilen Chebyshev polinomlarını ele almaktayız. Bu duruma karşı gelen türevleme matrisleri Chebyshev noktaları kullanılarak oluşturulmuş ve bu matrislerin KDD ler için başlangıç ve sınır değer problemlerini çözüme nasıl kullanıldığı örneklerle açıklanmıştır. Kartezyen koordinatlarda iki boyutlu Poisson ve Helmholtz denklemleri, bir ve iki boyutlu dalga denklemleri ve iki boyutlu Laplace denklemi için özdeğer problemleri gibi çeşitli denklemler sayısal olarak çözülmüş ve sonuçlar grafik formunda verilmiştir.

**ANAHTAR KELİMELEER:**Ortogonal polinomlar, Spektral metotlar, Chebyshev noktaları, Yaklaşık çözümler

## **ABSTRACT**

### **Chebyshev Differentiation Matrices and Some of Its Applications**

**MSC Thesis**

**Merve Uzunboy**

**Pamukkale University Institute of Science**

**Mathematics**

**(Supervisor: Prof. Dr. Uğur Yücel)**

**Denizli, June 2016**

In this thesis, the essential aspects of spectral methods and their applications to the numerical solution of Partial Differential Equations (PDEs) are presented. The main feature of the spectral methods is to take various orthogonal systems of infinitely differentiable global functions as trial functions. Different trial functions lead to different spectral approximations. We only consider here Chebyshev polynomials which are used for non-periodic problems. Differentiation matrices corresponding to this case are constructed using the Chebyshev points. It is illustrated how such matrices can be used to solve initial and boundary value problems for PDEs. Several equations like Poisson and Helmholtz in 2D Cartesian coordinates, wave equation in one and two spatial dimensions, and eigenvalue problems for Laplace equation in 2D domain are solved numerically and the results are presented in graphical forms.

**KEYWORDS:** Orthogonal polynomials, Spectral methods, Chebyshev points, Approximate solutions

# İÇİNDEKİLER

Sayfa

ÖZET.....	i
ABSTRACT .....	ii
İÇİNDEKİLER.....	iii
ŞEKİL LİSTESİ.....	iv
TABLO LİSTESİ.....	v
ÖNSÖZ.....	vi
1. GİRİŞ.....	1
2. SPEKTRAL METOTLAR.....	3
2.1 Ağırlıklı Kalanlar Yöntemi .....	4
2.1.1 Test (Ağırlık) Fonksiyonlarının Seçimi.....	5
2.1.2 Temel Fonksiyonların Seçimi .....	6
2.1.2.1 Fourier Serileri.....	6
2.1.2.2 Chebyshev Polinomları .....	9
3. CHEBYSHEV TÜREVLEME MATRİSİ.....	12
3.1 Teorem (Chebyshev Türevleme Matrisi).....	14
3.2 Örnek.....	15
4. KISMİ DİFERANSİYEL DENKLER İÇİN SINIR-DEĞER PROBLEMLERİ .....	16
4.1 İki Boyutlu Poisson Problemi ( $-1 \leq x, y \leq 1$ ).....	16
4.2 İki Boyutlu Poisson Problemi ( $0 \leq x, y \leq \pi$ ) .....	20
4.3 İki Boyutlu Helmholtz Denklemi .....	23
5. CHEBYSHEV SERİLERİ VE HIZLI FOURIER DÖNÜŞÜMÜ.....	27
5.1 Bir ve İki Boyutlu Dalga Denklemleri.....	30
5.1.1 Bir Boyutlu Dalga Denklemi .....	30
5.1.2 İki Boyutlu Dalga Denklemi .....	32
5.2 İki Boyutlu Laplace Özdeğer Problemi .....	36
6. SONUÇ VE ÖNERİLER .....	42
7. KAYNAKLAR .....	43
8. EKLER .....	46
9. ÖZGEÇMİŞ.....	47

## ŞEKİL LİSTESİ

### Sayfa

Şekil 2.1: Fourier fonksiyonları ( $\alpha = 1$ ) .....	7
Şekil 2.2: Chebyshev polinomları.....	9
Şekil 3.3: $u(x) = e^x \sin(5x)$ in Chebyshev türevlemesi .....	15
Şekil 4.4: Kartezyen koordinat sisteminde problem (4.1).....	17
Şekil 4.5: Tensör çarpımı düğüm noktaları.....	17
Şekil 4.6: İç düğüm noktalarında numaralama.....	18
Şekil 4.7: İki boyutlu Poisson probleminin sayısal çözümü ( $-1 \leq x, y \leq 1$ ).....	21
Şekil 4.8: İki boyutlu Poisson probleminin sayısal çözümü ( $0 \leq x, y \leq \pi$ ) .....	23
Şekil 4.9: İç düğüm noktalarında problem (4.13) için numaralama .....	25
Şekil 4.10: Helmholtz probleminin çözümü (Problem (4.13)).....	26
Şekil 5.11: $x$ , $z$ ve $\theta$ arasındaki ilişki .....	28
Şekil 5.12: Bir boyutlu dalga denkleminin (Denklemler 5.11) çözümü .....	32
Şekil 5.13: Kare bölgede (5.15)-(5.16) probleminin $t=0$ için grafiği .....	34
Şekil 5.14: Kare bölgede (5.15)-(5.16) probleminin çözümünün $t=0.33333$ için grafiği.....	34
Şekil 5.15: Kare bölgede (5.15)-(5.16) probleminin çözümünün $t=0.66667$ için grafiği.....	35
Şekil 5.16: Kare bölgede (5.15)-(5.16) probleminin çözümünün $t=1.00000$ için grafiği.....	35
Şekil 5.17: Problem (5.21) için birinci özdeğer ve normal mod .....	39
Şekil 5.18: Problem (5.21) için ikinci özdeğer ve normal mod .....	39
Şekil 5.19: Problem (5.21) için üçüncü özdeğer ve normal mod .....	40
Şekil 5.20: Problem (5.21) için dördüncü özdeğer ve normal mod.....	40
Şekil 5.21: Problem (5.21) de $f(x, y) = e^{25(y-x-1)}$ için ilk dört özdeğer ve normal mod .....	41



## TABLO LİSTESİ

### Sayfa

Tablo 5.1 Problem (5.22) nin bazı özdeğerleri.....	37
--	----

## ÖNSÖZ

Bu çalışmam süresince her türlü yardım ve fedakarlığı sağlayan, bilgi ve tecrübesi ile çalışmama ışık tutan, ayrıca bana bu çalışmayı vererek kendimi geliştirmeye yönelik de birkaç adım ileride olmamı sağlayan, çalışmamın yöneticisi Sayın Hocam Prof. Dr. Uğur YÜCEL'e ve her zaman maddi ve manevi desteklerini esirgemeyen aileme sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

# 1. GİRİŞ

Fen ve mühendislik alanlarında matematiksel modellemeler sonucu ortaya çıkan denklemlerin (cebirsal veya diferansiyel) çoğu analitik olarak çözülememektedir. Bu sebeple analitik çözümünü bulamadığımız bu denklemleri çözmek için nümerik yöntemler geliştirilmiştir. Spektral metotlar, bazı diferansiyel denklemleri (adi diferansiyel denklem, kısmi diferansiyel denklem ve diferansiyel denklem içeren özdeğer problemleri) sayısal olarak çözmek için uygulamalı matematikte ve bilimsel hesaplamalarda kullanılan güçlü tekniklerden biridir. 1950'li yıllarda geliştirilen "Sonlu Farklar Metodu" ve 1960'lı yıllarda geliştirilen "Sonlu Elemanlar Metodu" na alternatif olarak 1970'li yıllarda Orszag (1969) tarafından ortaya atılmıştır. Daha sonra Orszag (1971) ve diğer bilim insanlarının, alan dönüşümünü akışkanlar mekaniği ve meteoroloji problemleri üzerine uygulamalarıyla metot ün kazanmıştır. Modern spektral metotlar için literatürde dönüm noktası olarak kabul gören ilk yayınlar Gottlieb ve Orszag (1977) tarafından yazılan kısa kitap, Gottlieb ve diğ. (1984) tarafından yapılan inceleme ve Canuto ve diğ. (1988) tarafından yazılan monografidir. Daha sonraları Mercier (1989), Boyd (2000), Funaro (1992), Bernardi ve Maday (1992), Fornberg (1996), and Karniadakis ve Sherwin (1999) tarafından yayınlanan kitaplarla alana katkılar yapılmıştır.

Spektral metotlar günümüzde de diferansiyel denklemlerin sayısal çözümleri için "Sonlu Farklar Metodu" ve "Sonlu Elemanlar Metodu" nun yanında güçlü bir araç olarak kullanılmaktadır. Bu metotlar sonlu elemanlar metoduyla yakından ilişkilidir ve aynı fikir üzerine kurulmuştur. İkisi arasındaki temel fark ise spektral metotlar tüm bölge üzerinde sıfırdan farklı temel fonksiyonları kullanırken, sonlu elemanlar metodu sadece küçük alt bölgeler üzerinde sıfırdan farklı temel fonksiyonları kullanır. Diğer bir deyişle, spektral metotlar global yaklaşımları kullanırken sonlu elemanlar metodu lokal yaklaşımlar kullanır. Benzer şekilde sonlu farklar metodu ile karşılaştırıldığında, bu metodun aksine, spektral metotlar verilen herhangi bir noktadaki hesaplamada, sadece bu noktaya komşu noktadaki bilgileri değil, tüm bölge üzerindeki bilgileri kullanan global metotlardır. Spektral metotları

lokal metotlardan daha iyi yapan üstel yakınsamadır. Bu yüzden çözüm, uzay veya zamanda önemli ölçüde değiştiğinde, uzay değişkeninde çok fazla ayrık nokta kullanma gerekliliğinde veya uzun zaman integrasyonuna ihtiyaç duyulduğunda global metotlar lokal metotlara tercih edilmektedir.

Bu tezde, spektral metotların literatürde mevcut bazı temel teorik sonuçları sunulacak ve kısmi diferansiyel denklemlere bazı uygulamaları çalışılacaktır.

## 2. SPEKTRAL METOTLAR

Spektral metotlar çeşitli alanlardaki (ısı iletimi, akışkanlar mekaniği, kuantum mekaniği, vb.) nümerik simülasyonlara başarılı olarak uygulanmıştır. Günümüzde de adi veya kısmi diferansiyel denklemlerin sayısal (nümerik) çözümleri için sonlu fark metotları ve sonlu eleman metotlarının yanında güçlü bir araç olarak yerini almaktadır.

Spektral metotların temel özelliği, sonsuz diferansiyellenebilen global fonksiyonların çeşitli ortogonal (dik) sistemlerini deneme fonksiyonları olarak almasıdır. Farklı deneme fonksiyonları farklı spektral yaklaşımları beraberinde getirmektedir. Örneğin, periyodik problemler için trigonometrik polinomlar, periyodik olmayan problemler için Legendre polinomları ve Chebyshev polinomları, yarı sonsuz aralıkta tanımlı problemler için Laguerre polinomları ve reel eksen üzerinde tanımlı problemler için Hermite polinomları (Ben-Yu 1998).

Önceki bölümde belirtildiği gibi, spektral metotlar adi diferansiyel denklemleri, kısmi diferansiyel denklemleri ve diferansiyel denklem içeren özdeğer problemlerini çözmeye kullanılabilir. Zamana bağlı kısmi diferansiyel denklemlere spektral metotlar uygulandığında çözüm genellikle zamana bağlı katsayılarla sahip temel fonksiyonların toplamı olarak yazılır. Bu çözüm formu ele alınan kısmi diferansiyel denklemde yerine yazıldığında, katsayılarda bir adi diferansiyel denklem sistemi elde edilir ve bu sistem uygun bir sayısal yöntem kullanılarak çözülebilir. Adi diferansiyel denklemler için özdeğer problemleri de benzer şekilde matris özdeğer problemlerine indirgenir.

Spektral metotlar, önerilen yeni alt metotlarıyla birlikte çok geniş kapsamlıdır ve günümüzde de aktif olarak kullanılmaktadırlar. Spektral metodun uygulaması kollokasyon, Galerkin, Petrov-Galerkin veya Tau yaklaşımından biri kullanılarak tamamlanır. Bu nedenle bu bölümde spektral metotlar konusu temel düzeyde ele alınacak ve bahsi geçen yaklaşımlardan bazıları tartışılacaktır.

## 2.1 Ağırlıklı Kalanlar Yöntemi

Spektral metotlar ağırlıklı kalanlar metodu genel sınıfına aittir (Finlayson 1972). Bir fonksiyonun, çeşitli değerler karşılığında elde edilen yaklaşık çözümü ile gerçek çözümü arasındaki farkların bir ağırlık fonksiyonu ile çarpılarak toplamlarını minimize etme işlemine ‘ağırlıklı kalanlar yöntemi’ denir. Şimdi, ele alacağımız bir problem için (bir kısmi diferansiyel denklem için başlangıç-sınır-değer problemi) bu yöntemi temel prensipleriyle açıklamaya çalışalım.

Bir  $D$  bölgesi üzerinde bir  $u(x,t)$  fonksiyonu için

$$\begin{cases} P(u) = 0 \text{ (kısmi diferansiyel denklem)} \\ B(u) = 0 \text{ (sınır koşulu)} \\ u(x,0) = u^0(x) \text{ (başlangıç koşulu)} \end{cases} \quad (2.1)$$

şeklindeki başlangıç-sınır-değer problemini ele alalım. Bu problemin bilinen fonksiyonların sonlu toplamları olarak

$$u_N(x,t) = u_B(x,t) + \sum_{k=0}^N a_k(t) \cdot \phi_k(x) \quad (2.2)$$

şeklinde yaklaşık çözümünün olduğunu kabul edelim. Burada  $\phi_k(x)$  ler “deneme fonksiyonları” veya “temel fonksiyonlar” olarak adlandırılmakta ve zamandan bağımsızdırlar.  $a_k(t)$  ler de bunlara karşı gelen zamana bağlı katsayılardır. Genelde  $\phi_k(x)$  ler verilen homojen sınır koşullarını sağlar ve özel çözüm olan  $u_B(x,t)$  de homojen olmayan sınır koşullarını (muhtemelen zamana bağlı) sağlamak için kullanılmalıdır.

Denklem (2.2) formunda seçilen yaklaşık çözümün avantajı, zamana ve uzaya bağımlılığı ve dolayısıyla kısmi türevleri ayrıklaştırmasıdır. Buradan uzay türevleri ( $u_B = 0$  kabulüyle)

$$\frac{\partial^p u_N}{\partial x^p} = \sum_{k=0}^N a_k(t) \cdot \frac{d^p}{dx^p} \phi_k(x) = \sum_{k=0}^{N'} a_k^p(t) \cdot \phi_k(x) \quad (2.3)$$

şeklinde yazılabilir. Burada  $\phi_k$  lara bağlı olarak (örneğin polinomlar için)  $N$  ve  $N'$  farklı olabilir.

Denklem (2.2) ile verilen seriyi (2.1) denklemindeki kısmi diferansiyel denkleme yerine yazarsak kalan

$$R(x,t) := P(u_N(x,t)) \quad (2.4)$$

şeklinde tanımlanır. Bilinmeyen  $(N+1)$  tane  $a_k(t)$  katsayılarını tanımlamak için ağırlıklı kalanlar yöntemi,  $w_j(x)$  ler  $(N+1)$  tane “test fonksiyonları” veya “ağırlık fonksiyonları” olarak adlandırılan fonksiyonlar olmak üzere

$$\int_D w_j(x) \cdot R(x,t) dx = 0, \quad j = 0, \dots, N \quad (2.5)$$

şeklindeki veya  $(f, g) \equiv \int_D f \cdot g dx$  ile tanımlanan skaler (iç) çarpımı kullanarak

$$(R, w_j) = 0, \quad j = 0, \dots, N \quad (2.6)$$

şeklindeki koşulun sağlanmasını şart koşmaktadır. Bunun anlamı, kalanın ( $R$ ) tüm ağırlık fonksiyonları ( $w_j$ ) ile ortogonal (dik) olmasıdır. Bu nedenle de metot “ağırlıklı kalanlar yöntemi” olarak adlandırılmaktadır.

### 2.1.1 Test (Ağırlık) Fonksiyonlarının Seçimi

Test fonksiyonunun seçimi için çeşitli metotlar vardır. Biz burada sadece Galerkin ve kollokasyon metotlarından bahsedeceğiz. Diğer iki önemli metot olarak da Petrov-Galerkin ve Tau metodu verilebilir.

**Galerkin Metodu:** Bu metot için, test fonksiyonları ( $w_j(x)$ ) (2.2) denklemindeki temel fonksiyonlar ( $\phi_k(x)$ ) ile aynı seçilmektedir. Yani

$$w_j = \phi_j, \quad j = 0, \dots, N. \quad (2.7)$$

**Kollokasyon Metodu:** Bu metot için, D bölgesinde  $(N+1)$  tane kollokasyon noktasından  $(x_j)$  oluşan küme

$$R(x_j) = 0, \quad j = 0, \dots, N \quad (2.8)$$

olacak şekilde seçilir. Bu ifadenin sonucu, Denklem (2.1) deki orijinal kısmi diferansiyel denklem kollokasyon noktalarında tam olarak sağlanır, yani  $P(u_N)|_{x=x_j} = 0$ . Bu durumda test fonksiyonları,  $\delta$

$$\delta(x) = \begin{cases} \infty, & x = 0 \\ 0, & x \neq 0 \end{cases} \quad (2.9)$$

şeklinde tanımlı Dirac delta fonksiyonu olmak üzere

$$w_j = \delta(x - x_j), \quad j = 0, \dots, N. \quad (2.10)$$

şeklinde olurlar.

## 2.1.2 Temel Fonksiyonların Seçimi

Temel fonksiyonlar genelde problemin tanımlı olduğu bölgede desteklenen düzgün fonksiyonlardır. Bu nedenle mümkün olan birçok farklı temel fonksiyonlar bulunabilir. Bunlardan bazıları: trigonometrik (Fourier) fonksiyonlar, Chebyshev, Legendre ve Lagrange polinomları olarak sıralanabilir. Fakat biz burada sadece trigonometrik (Fourier) fonksiyonlar ve Chebyshev polinomları üzerinde duracağız.

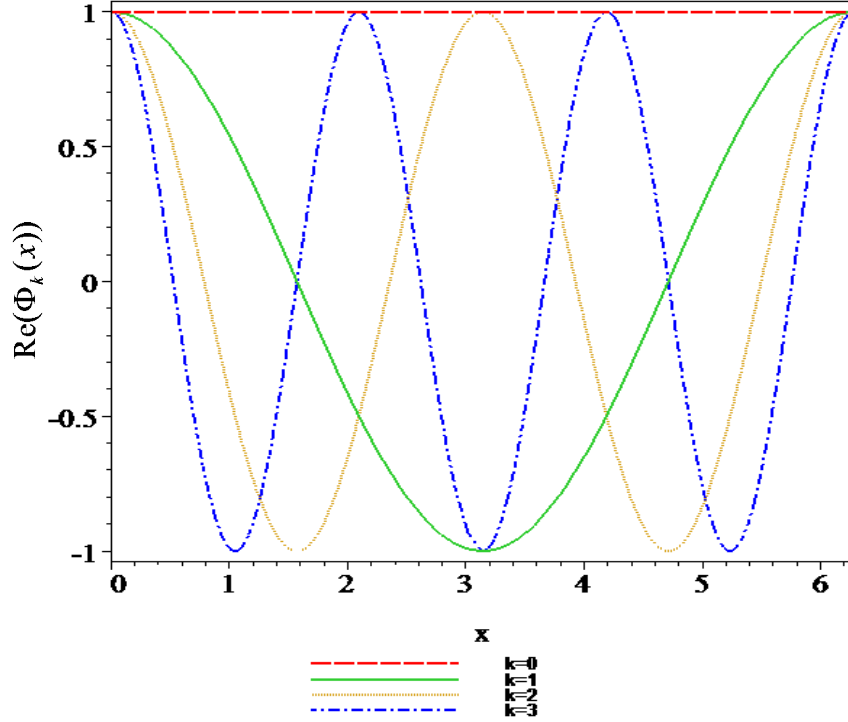
### 2.1.2.1 Fourier Serileri

Fourier serileri daha çok periyodik fonksiyonları  $(u(x) = u(x + L))$  ayrıştırma için uygundur. Periyodu  $L$  olan bir bölge için esas dalga sayısını  $\alpha = 2\pi/L$  olarak tanımladığımızda Fourier fonksiyonu



$$u_N(x) = \sum_{|k| \leq N/2} c_k e^{ik\alpha x} = \sum_{|k| \leq N/2} c_k \Phi_k, \quad c_k \in \mathbb{C} \quad (2.11)$$

olur. Burada  $c_k$  lar  $((N+1)$  tane)  $\Phi_k(x) = e^{iakx}$  Fourier modu (bkz. Şekil 2.1) için kompleks Fourier katsayılarıdır.



Şekil 2.1: Fourier fonksiyonları ( $\alpha = 1$ )

Katsayıların genliği  $|c_k|$  üstel olarak azaldığından dolayı düzgün bir fonksiyonun Fourier serisi artan  $N$  ye paralel olarak hızla yakınsar. Bu durum “spektral yakınsaklık” olarak adlandırılır. Fakat orijinal fonksiyonun ( $u(x)$ ) en azından türevlerinden biri ( $u^{(p)}(x)$ ) süreksiz olduğunda yakınsaklık oranı sertçe  $p$  –inci mertebeye düşer, yani

$$\|u_N - u\| = O(N^{-p}) \quad , \quad N \rightarrow \infty. \quad (2.12)$$

Bu da sonlu fark metotlarında olduğu gibi “*cebirsel yakınsaklık*” a karşı gelir. Bu durum genelde “*Gibbs olayı*” olarak anılır.

Fourier serilerinin diğer önemli özellikleri aşağıda verilmektedir:

- Ortogonalite Özelliği:

$\bar{\Phi}_n(x)$ ,  $\Phi_n(x)$  in kompleks eşleniğini ve  $\delta_{mn}$  Kronecker sembolü göstermek üzere

$$(\Phi_m, \Phi_n) = \frac{1}{L} \int_0^L \Phi_m(x) \bar{\Phi}_n(x) dx = \frac{1}{L} \int_0^L \Phi_m(x) \Phi_{-n}(x) dx = \delta_{mn} \quad (2.13)$$

- Çarpım Kuralı:

$$\Phi_m \cdot \Phi_n = \Phi_{m+n} \quad (2.14)$$

- Diferansiyel:

$$\Phi'_m(x) = ik\alpha \Phi_m(x) \quad (2.15)$$

- Ayrık Fourier Dönüşümü:

$|k|, |m| \leq \frac{N-1}{2}$  olmak üzere

$$\sum_{j=1}^N e^{ikx_j} e^{imx_j} = \sum_{j=1}^N \Phi_k \Phi_m = N\delta_{k,-m} \quad (2.16)$$

şeklindeki ayrık ortogonalite özelliğinden hareketle, fiziksel ve spektral uzay arasındaki ilişkinin

$$u_N(x_j) = \sum_{|k| \leq \frac{N-1}{2}} c_k \Phi_k(x_j), \quad c_k = N \sum_{j=1}^N u_N(x) \Phi_{-k} \quad (2.17)$$

şeklinde olduğu kolayca gösterilebilir. Bu eşitlikler fiziksel ve spektral uzay arasındaki dönüşümlerde kullanılabilir ve “*ayrık Fourier dönüşümü*” olarak adlandırılmaktadır.

### 2.1.2.2 Chebyshev Polinomları

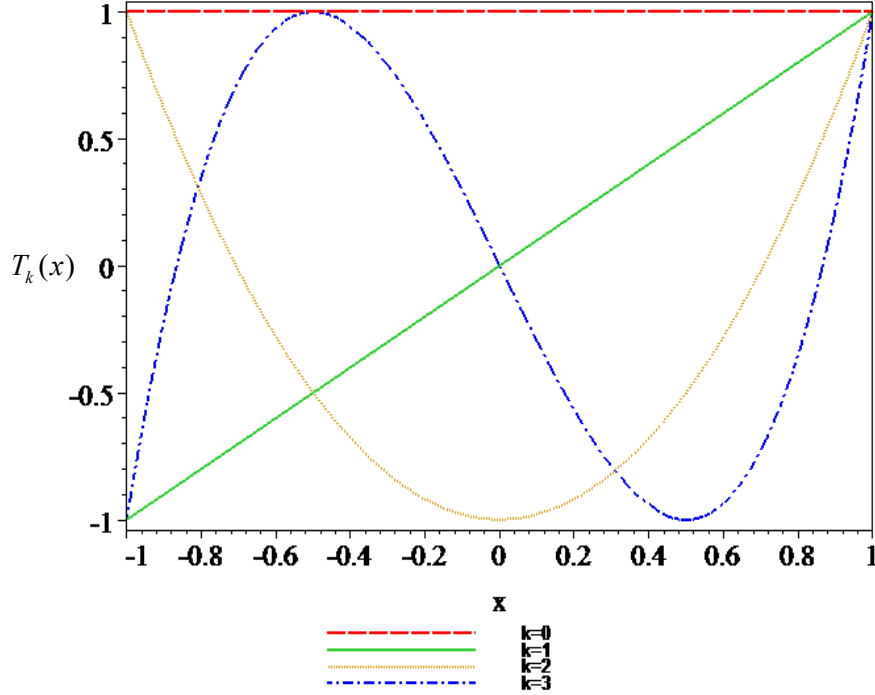
Daha önce de belirtildiği gibi Fourier serileri sadece periyodik fonksiyonlar için iyi bir seçimdir. Periyodik olmayan sınır koşullarına sahip problemler için ortogonal polinom tabanlı temel fonksiyonlar tercih edilmektedir. En popüler seçimlerden biri de Chebyshev polinomlarıdır ve

$$T_k(x) = \cos[k \cos^{-1}(x)] \quad , \quad -1 \leq x \leq 1 \quad , \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (2.18)$$

şeklinde tanımlıdır. Buradan, ilk dört Chebyshev polinomunun

$$\begin{aligned} T_0(x) &= 1 \\ T_1(x) &= x \\ T_2(x) &= 2x^2 - 1 \\ T_3(x) &= 4x^3 - 3x \end{aligned} \quad (2.19)$$

şeklinde olduğu kolayca görülebilir (bkz. Şekil 2.2).



Şekil 2.2: Chebyshev polinomları

Chebyshev polinomları aşağıdaki şekilde yineleme formülüne sahiptir:

$$T_{k+1}(x) + T_{k-1}(x) = 2xT_k(x) \quad , \quad k \geq 1 \quad (2.20)$$

Bir  $u(x)$  fonksiyonu Chebyshev polinomlarının bir sonlu serisi olarak

$$u_N(x) = \sum_{k=0}^N a_k T_k(x) \quad (2.21)$$

şeklinde yazılabilir. Burada  $a_k$  lar Chebyshev katsayılarıdır. Dikkat edilirse yukarıdaki toplam 0 dan  $N$  ye kadar gitmektedir. Bu da  $N+1$  tane katsayının olması anlamına gelir. Dolayısıyla polinom yaklaşımı en yüksek  $N$  – inci mertebededir.

Yüksek mertebeden polinomlarla bir fonksiyonun yüksek mertebeden interpolasyonundaki genel problem Fourier serilerinde “Gibbs olayı” na benzer olarak “Runge olayı”dır. Eğer verilen bir fonksiyon eşit aralıklı düğüm (ızgara) noktalarında interpolate ediliyorsa hata  $2^N$  şeklinde büyür. Ancak nokta yoğunluğu yaklaşık olarak  $N(\sqrt{1-x^2})^{-1}$  ile orantılı olduğunda (bölgenin sınırlarına yaklaştıkça artan) interpolasyon hatalarının eksponansiyel olarak azaldığı gösterilebilir. Özellikle Chebyshev polinomları için yaygın olarak kullanılan nokta dağılımı

$$x_j = \cos\left(\frac{\pi j}{N}\right) \quad , \quad j = 0, 1, 2, \dots, N \quad (2.22)$$

şeklinde tanımlı *Gauss-Lobatto* noktalarıdır. Bu  $N+1$  tane  $x_j$  noktası  $T_N$  in  $-1 \leq x \leq 1$  aralığında maksimum ve minimumlarını aldığı lokasyonlardır.

Chebyshev polinomlarının diğer önemli özellikleri aşağıda verilmektedir:

- Alternatif tek ve çift fonksiyonlar:

$$T_k(-x) = (-1)^k T_k(x) \quad (2.23)$$

- Ortogonalite:

$c_0 = 2$ ,  $k \geq 1$  için  $c_k = 1$  ve  $\delta_{kl}$  Kronecker sembolü göstermek üzere

$$(T_k, T_l) = \int_{-1}^1 \frac{T_k(x)T_l(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx = \frac{\pi}{2} c_k \delta_{kl}. \quad (2.24)$$

- Sınır Koşulları:

$$T_k(1) = 1 \quad \text{ve} \quad T_k(-1) = (-1)^k \quad (2.25)$$

- Denklem (2.21) deki sonlu Chebyshev serisini hesaplamak için aşağıdaki geri dönüşümlü algoritma kullanılır:

$$\begin{aligned} B_{N+1} &= 0, \quad B_N = a_N \\ B_k &= a_k + 2xB_{k+1} - B_{k+2}, \quad k = N-1, \dots, 1 \\ u_N(x) &= a_0 - B_2 + B_1x \end{aligned} \quad (2.26)$$

- Gauss-Lobatto düğüm noktalarında Chebyshev polinomunun değerleri:

$$T_k(x_j) = \cos\left(\frac{kj\pi}{N}\right), \quad j, k = 0, 1, 2, \dots, N \quad (2.27)$$

Fiziksel uzay  $u_N$  ve spektral (Chebyshev) uzay  $a_k$  arasındaki dönüşüm Chebyshev dönüşümü olarak adlandırılan dönüşümle yapılır. Chebyshev polinomları dönüştürülmüş koordinatlarda aslında kosinüs fonksiyonları olduklarından FFT tabanlı bir hızlı dönüşüm mevcuttur.

Eğer Denklem (2.22) ile verilen Gauss-Lobatto düğüm noktalarında kollokasyon metodu kullanılırsa ayrıklaştırılmış  $u_N$  fonksiyonunun türevi

$$u'_N(x_i) = \sum_{j=0}^N D_{ij} u_N(x_j) \quad (2.28)$$

şeklinde matris çarpımı olarak yazılabilir. Burada  $[D_{ij}]$  matrisi Chebyshev türevleme matrisi olarak bilinmekte ve spektral uzay, spektral türev ve geri-dönüşüm dönüşümlerini temsil etmektedir.

### 3. CHEBYSHEV TÜREVLEME MATRİSİ

İkinci bölümün sonunda karşımıza çıkan Chebyshev türevleme matrisini bu bölümde daha ayrıntılı olarak ele alacağız.

Birinci tür Chebyshev polinomları ( $T_n(x)$ ,  $n \geq 1$ )  $[-1,1]$  aralığında daha önce de belirtildiği gibi  $n+1$  tane ekstremuma sahiptir ve bunlar

$$x_j = \cos(j\pi/N) \quad , \quad j = 0,1,\dots,N \quad (3.1)$$

formülüyle bulunabilirler. Bu bölümde bu noktaları kullanarak Chebyshev türevleme matrisleri oluşturulacak ve daha sonra da bu matrisler bazı fonksiyonların türevlenmesine uygulanacaktır.

Chebyshev noktalarında tanımlı bir  $v$  düğüm noktası fonksiyonu verildiğinde  $w$  ayrık türevini aşağıdaki iki adımda hesaplayabiliriz.

- $p(x_j) = v_j$ ,  $0 \leq j \leq N$  olacak şekilde derecesi  $N$  ye eşit ya da daha küçük polinom  $p$  olsun.
- $w_j = p'(x_j)$  alalım.

Bu işlem lineer olduğundan dolayı  $(N+1) \times (N+1)$  tipinde  $\mathbf{D}_N$  ile göstereceğimiz bir matris ile çarpma olarak

$$\mathbf{w} = \mathbf{D}_N \mathbf{v}$$

şeklinde temsil edilebilir. Buradaki  $N$  çift ya da tek keyfi bir pozitif tamsayıdır. İnterpolasyon işlemi için genel bir fikir oluşturmada  $N=1$  ve  $N=2$  durumlarına bakmamız faydalı olacaktır.

İlk olarak  $N=1$  durumunu göz önüne alalım. Bu durumda interpolasyon noktaları  $x_0=1$  ve  $x_1=-1$ .  $v_0$  ve  $v_1$  'leri kullanarak Lagrange formunda yazılan interpolasyon polinomu

$$p(x) = \frac{1}{2}(1+x)v_0 + \frac{1}{2}(1-x)v_1$$

olur. Bu ifadenin türevi alınırsa

$$p'(x) = \frac{1}{2}v_0 - \frac{1}{2}v_1$$

elde edilir. Bu formül  $2 \times 2$  tipinde aşağıdaki  $\mathbf{D}_1$  matrisini verir:

$$\mathbf{D}_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Şimdi de  $N=2$  yi göz önüne alalım. İnterpolasyon noktaları  $x_0 = 1$ ,  $x_1 = 0$  ve  $x_2 = -1$  dir ve interpolant

$$p(x) = \frac{1}{2}x(1+x)v_0 + (1+x)(1-x)v_1 + \frac{1}{2}x(1-x)v_2$$

ikinci dereceden bir denklemdir. Türevi

$$p'(x) = \left(x + \frac{1}{2}\right)v_0 - 2xv_1 + \left(x - \frac{1}{2}\right)v_2$$

şeklinde lineer bir polinomdur. Türevleme matrisi  $3 \times 3$  tipindeki  $\mathbf{D}_2$  matrisidir ve bu matris yukarıdaki ifadede sırasıyla  $x = 1, 0$  ve  $-1$  konulduğunda

$$\mathbf{D}_2 = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & -2 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 2 & -\frac{3}{2} \end{pmatrix} \quad (3.2)$$

şeklinde bulunur. Şimdi keyfi  $N$  için  $\mathbf{D}_N$  matrisinin formülünü bulalım.

### 3.1 Teorem (Chebyshev Türevleme Matrisi)

Herhangi  $N \geq 1$  için,  $(N+1) \times (N+1)$  tipindeki Chebyshev spektral türevleme matrisi  $\mathbf{D}_N$  'nin satır ve sütunları 0 'dan  $N$  'ye kadar indekslenir. Bu matrisin elemanları

$$c_i = \begin{cases} 2 & , i = 0 \text{ ya da } N \\ 1 & , \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

olmak üzere

$$(\mathbf{D}_N)_{00} = \frac{2N^2 + 1}{6} \quad , \quad (\mathbf{D}_N)_{NN} = -\frac{2N^2 + 1}{6} \quad , \quad (3.3)$$

$$(\mathbf{D}_N)_{jj} = \frac{-x_j}{2(1-x_j^2)} \quad , \quad j = 1, \dots, N-1, \quad (3.4)$$

$$(\mathbf{D}_N)_{ij} = \frac{c_i}{c_j} \frac{(-1)^{i+j}}{(x_i - x_j)} \quad , \quad i \neq j \quad i, j = 0, \dots, N, \quad (3.5)$$

şeklindedir. Aşağıdaki şekil bu durumu daha açık olarak göstermektedir.

$$\mathbf{D}_N = \begin{array}{|c|c|c|} \hline \frac{2N^2 + 1}{6} & & \frac{1}{2}(-1)^N \\ \hline & \frac{2(-1)^j}{1-x_j} & \\ \hline \frac{1}{2} \frac{(-1)^i}{1-x_i} & \frac{(-1)^{i+j}}{x_i - x_j} & \frac{1}{2} \frac{(-1)^{N+i}}{1+x_i} \\ \hline & \frac{-x_j}{2(1-x_j^2)} & \\ \hline & \frac{(-1)^{i+j}}{x_i - x_j} & \\ \hline -\frac{1}{2}(-1)^N & -2 \frac{(-1)^{N+j}}{1+x_j} & -\frac{2N^2 + 1}{6} \\ \hline \end{array}$$



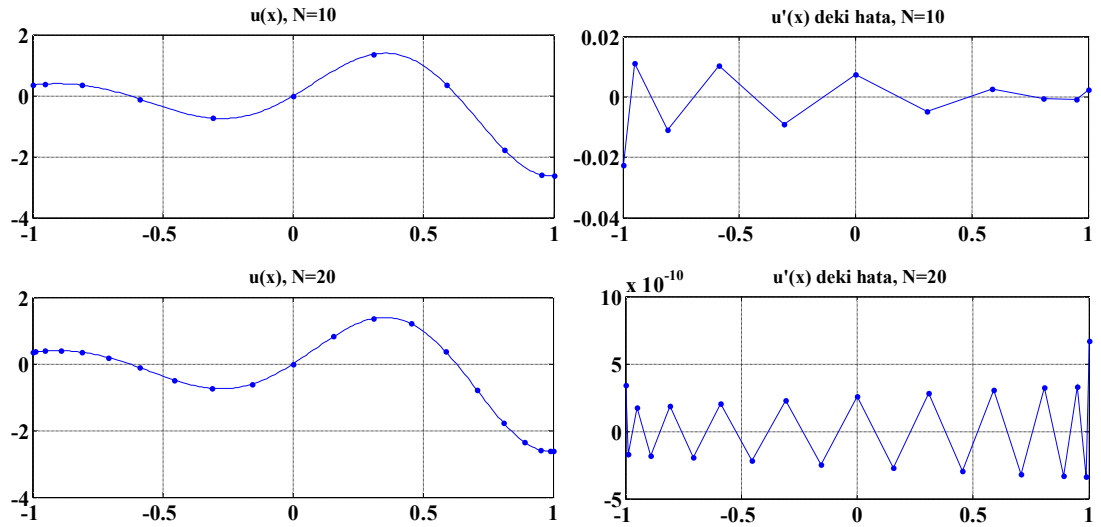
Chebyshev spektral türevleme matrisi  $\mathbf{D}_N$  'yi hesaplamak için program yazılırken (3.3)-(3.5) formüllerini tam anlamıyla kullanmak yerine; ilk önce matrisin köşegen elemanları dışındaki diğer elemanlarını (3.5) formülüyle hesaplamak, daha sonra da (3.3) ve (3.4) formülleri ile verilen köşegen elemanlarını

$$(\mathbf{D}_N)_{ii} = -\sum_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^N (\mathbf{D}_N)_{ij}, \quad (3.6)$$

özdeşliğini kullanarak hesaplamak daha uygun olacaktır.

### 3.2 Örnek

$u(x) = e^x \sin(5x)$  şeklindeki periyodik olmayan düzgün fonksiyonun türevini Chebyshev spektral türevleme matrisi  $\mathbf{D}_N$  'yi kullanarak hesaplayalım. Şekil 3.3 de sırasıyla  $N=10$  ve  $N=20$  kullanarak elde edilen  $u(x)$  in grafiği ve  $u'(x)$  teki hatanın grafiği verilmiştir.



Şekil 3.3:  $u(x) = e^x \sin(5x)$  in Chebyshev türevlemesi

## 4. KISMİ DİFERANSİYEL DENKLER İÇİN SINIR-DEĞER PROBLEMLERİ

Bölüm 3'te  $\mathbf{D}_N$  Chebyshev türevleme matrisi tanımlanmıştı. Bu bölümde  $\mathbf{D}_N$  matrisini kullanarak kısmi diferansiyel denklemler için bazı sınır değer problemlerinin çözümleri üzerinde duracağız.

### 4.1 İki Boyutlu Poisson Problemi ( $-1 \leq x, y \leq 1$ )

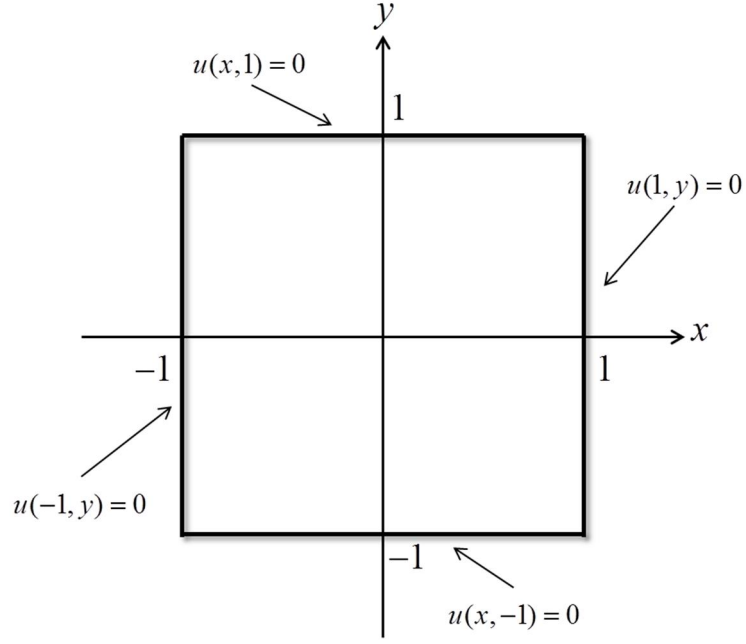
Poisson denklemi, eliptik tipte en basit ve en ünlü kısmi diferansiyel denklemdir. Elektrostatik, makine mühendisliği ve teorik fizik gibi alanlarda farklı maksatlara hizmet etmektedir. Örneğin, verilen bir enerji yükünün veya kütle yoğunluk dağılımının sebep olduğu potansiyel enerji alanını tanımlamada kullanılır. Özel olarak aşağıdaki iki boyutlu Poisson problemini ele alalım.

$$\begin{aligned} u_{xx} + u_{yy} &= -1, & -1 < x, y < 1 \\ u(-1, y) = u(1, y) &= 0, & -1 \leq y \leq 1 \\ u(x, -1) = u(x, 1) &= 0, & -1 \leq x \leq 1 \end{aligned} \quad (4.1)$$

Bu problem  $xy$ -düzleminde Şekil 4.4 te geometrik olarak gösterilmiştir. Kısmi diferansiyel denklemin sağ tarafında bulunan terim kaynak veya yük fonksiyonu olarak bilinmektedir. Bu sınır değer probleminin değişkenlerine ayırma metodunu kullanarak elde edilen analitik çözümü

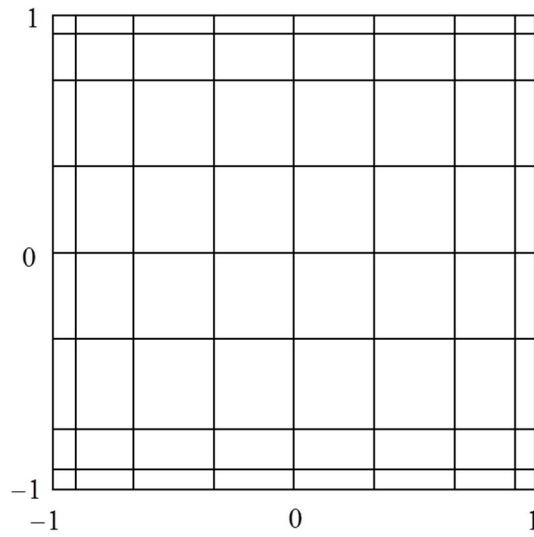
$$u(x, y) = \frac{(1-x^2)}{2} - \frac{16}{\pi^3} \sum_{\substack{k=1 \\ k \text{ tek}}}^{\infty} \left\{ \frac{\sin\left(\frac{k\pi(1+x)}{2}\right)}{k^3 \sinh k\pi} \left( \sinh\left(\frac{k\pi(1+y)}{2}\right) + \sinh\left(\frac{k\pi(1-y)}{2}\right) \right) \right\} \quad (4.2)$$

şeklindedir.



Şekil 4.4: Kartezyen koordinat sisteminde problem (4.1)

Şimdi bu problemi  $\mathbf{D}_N$  Chebyshev türevleme matrisini kullanarak çözeceğiz. Bu tür problemler için doğal olarak “*tensör çarpım düğüm noktaları*” şeklinde adlandırılan ve her bir yönde bağımsız Chebyshev noktaları tabanlı düğüm noktaları oluşturulur (bkz. Şekil 4.5). Bu şekilden de görüldüğü gibi düğüm noktalarının çoğu sınırlara yakın bulunmaktadır.

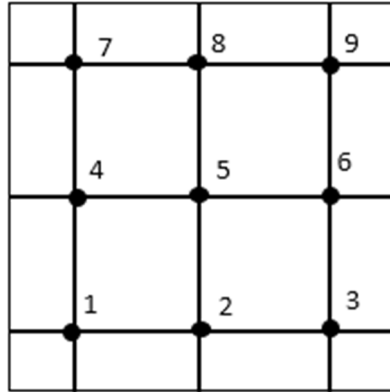


Şekil 4.5: Tensör çarpımı düğüm noktaları

Spektral düğüm noktaları üzerinde bir problemi çözmek için en kolay yol lineer cebirdeki tensör çarpımını (aynı zamanda Kronecker çarpım olarak ta bilinmekte) kullanmaktır.  $A$  ve  $B$  gibi iki matrisin Kronecker çarpımı  $A \otimes B$  ile gösterilir ve MATLAB de  $kron(A,B)$  komutuyla hesaplanabilir. Eğer  $A$  ve  $B$  sırasıyla  $p \times q$  ve  $r \times s$  boyutlarındaysa,  $A \otimes B$  de  $i, j$  blokları  $a_{ij}B$  olmak üzere  $p \times q$  blok formunda  $pr \times qs$  boyutunda bir matris olur. Örneğin,

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \left( \begin{array}{cc|cc} a & b & 2a & 2b \\ c & d & 2c & 2d \\ \hline 3a & 3b & 4a & 4b \\ 3c & 3d & 4c & 4d \end{array} \right).$$

Kronecker çarpımın spektral metotlarda nasıl kullanılacağını açıklamak için  $N=4$  durumunu ele alalım. İç düğüm noktalarında numaralama Şekil 4.6'da gösterildiği gibi olsun.



Şekil 4.6: İç düğüm noktalarında numaralama

Bu düğüm noktalarında bilinmeyenler vektörü  $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_9)^T$  olsun. Şimdi  $x$  ve  $y$  yönlerinde bağımsız olarak spektral diferansiyelleme ile *Laplasyan*'a,  $L = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ , yaklaşım yapabiliriz. İkinci mertebeden türevler için  $\mathbf{D}_N$  nin karesi  $\mathbf{D}_N^2$  ile yaklaşım yapılabilir. Bu durumda  $N=4$  için bir boyutta  $3 \times 3$  tipindeki türevleme matrisi ( $\mathbf{D}_N^2$  nin ilk ve son satır ve sütunları atılarak)



şeklinde bir lineer denklem sistemini çözme problemine indirgenmiş olur. Denklem (4.4) ün sağ tarafındaki  $9 \times 1$  boyutlu  $\mathbf{f}$  vektörü iç düğüm noktalarında (4.1) problemindeki kısmi diferansiyel denklemin sağ tarafındaki fonksiyonu (burada bir sabit) göstermektedir. Bu lineer denklem sistemi de uygun bir yöntemle  $u$  nun yaklaşım vektörü  $\mathbf{u}$  için kolayca çözülebilir.

Denklem (4.4) ile verilen sistem herhangi bir  $N$  değeri için

$$\mathbf{L}_N \mathbf{u} = (\mathbf{I} \otimes \tilde{\mathbf{D}}_N^2 + \tilde{\mathbf{D}}_N^2 \otimes \mathbf{I}) \mathbf{u} = \mathbf{f} \quad (4.5)$$

olarak genel formda yazılabilir. Burada  $\mathbf{I}$ ,  $(N-1) \times (N-1)$  boyutlu birim matris,  $\mathbf{u}$  ve  $\mathbf{f}$  de elemanları sırasıyla  $u_j$  ve  $f_j = -1$  ( $j=1,2,\dots,(N-1)^2$ ) olan sütun vektörleridir. Ayrıca  $\mathbf{L}_N$ ,  $(N-1)^2 \times (N-1)^2$  boyutlu bir matristir.

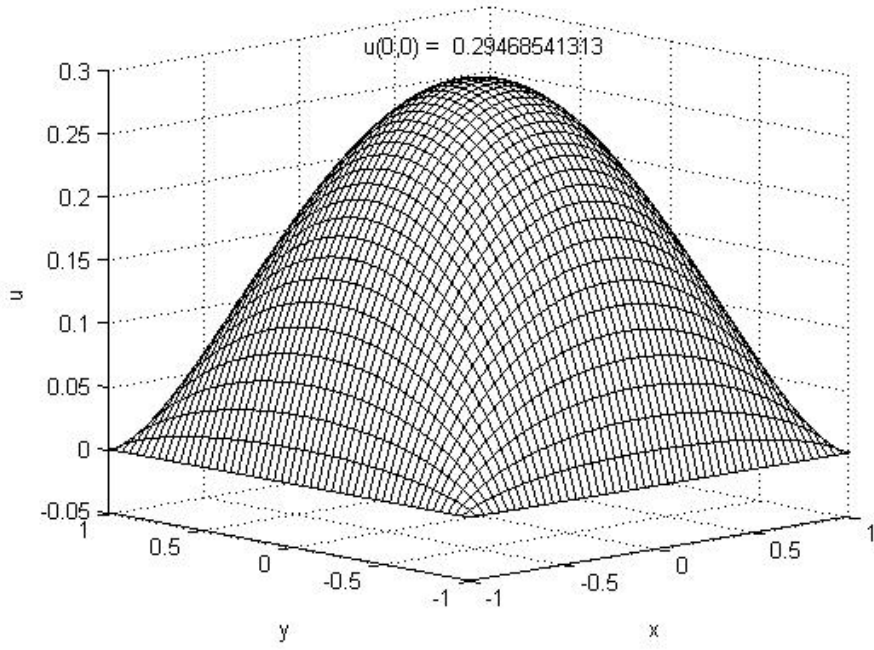
İki boyutlu Poisson probleminin sayısal çözümü  $N=24$  için Şekil 4.7 de verilmektedir. Şekil üzerinde ayrıca  $u(0,0)$  değeri de belirtilmiştir. Problemin analitik çözümünde (bkz. Denklem (4.2))  $k=20$  alınarak elde edilen sonuç  $u(0,0)=0.2946854131$  dir. Buradan da anlaşılacağı üzere analitik ve sayısal çözümler mükemmel bir uyum içerisindedirler.

## 4.2 İki Boyutlu Poisson Problemi ( $0 \leq x, y \leq \pi$ )

Denklem (4.1) ile verilen Poisson probleminde  $-1 \leq x, y \leq 1$  idi. Şimdi de

$$\begin{aligned} u_{xx} + u_{yy} &= 1, & 0 < x, y < \pi \\ u(0, y) &= u(\pi, y) = 0, & 0 \leq y \leq \pi \\ u(x, 0) &= u(x, \pi) = 0, & 0 \leq x \leq \pi \end{aligned} \quad (4.6)$$

şeklindeki  $0 \leq x, y \leq \pi$  aralığında tanımlı iki boyutlu Poisson problemini ele alalım.



Şekil 4.7: İki boyutlu Poisson probleminin sayısal çözümü ( $-1 \leq x, y \leq 1$ )

Bu problemin analitik çözümü

$$u(x, y) = -\frac{4}{\pi^2} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} U_{mn} \sin(mx) \sin(ny), \quad U_{mn} = \frac{[1 - (-1)^m][1 - (-1)^n]}{(m^2 + n^2)mn} \quad (4.7)$$

şeklinindedir. Bu çözüm daha açık olarak

$$u(x, y) = -\frac{8}{\pi^2} \left[ \sin x \sin y + \frac{1}{15} \sin x \sin 3y + \frac{1}{15} \sin 3x \sin y + \frac{1}{81} \sin 3x \sin 3y + \dots \right]$$

şeklinde yazılabilir.

Problemin sayısal çözümü için bir önceki problemin çözümünde kullandığımız aşamaları tekrar edeceğiz. Fakat onları yapabilmemiz için problemin tanımlı olduğu aralığın  $[-1, 1]$  olması gerekmektedir. Dolayısıyla ilk önce  $[0, \pi]$  aralığını  $[-1, 1]$  aralığına dönüştürmeliyiz. Herhangi  $[a, b]$  aralığı

$$x = \left(\frac{b-a}{2}\right)\bar{x} + \left(\frac{b+a}{2}\right), \quad y = \left(\frac{b-a}{2}\right)\bar{y} + \left(\frac{b+a}{2}\right), \quad a \leq x, y \leq b \quad (4.8)$$

dönüşümleri yapılarak kolayca  $[-1,1]$  aralığına getirilebilir. O halde (4.6) denkleminde

$$x = \frac{\pi}{2}(\bar{x} + 1) \quad , \quad y = \frac{\pi}{2}(\bar{y} + 1) \quad (4.9)$$

dönüşümlerini yaparsak yeni bağımsız değişkenlerimiz  $-1 \leq \bar{x}, \bar{y} \leq 1$  koşulunu sağlarlar. Denklem (4.6) yı yeni bağımsız değişkenler cinsinden tekrar yazmak istersek, zincir kuralından, birinci mertebeden kısmi türevler

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial \bar{x}} \frac{\partial \bar{x}}{\partial x} = \frac{2}{\pi} \frac{\partial u}{\partial \bar{x}} \quad , \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial \bar{y}} \frac{\partial \bar{y}}{\partial y} = \frac{2}{\pi} \frac{\partial u}{\partial \bar{y}}$$

ve ikinci mertebeden kısmi türevler

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right) = \frac{4}{\pi^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \bar{x}^2} \quad , \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right) = \frac{4}{\pi^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \bar{y}^2}$$

olarak elde edilirler. Bulunan bu ifadeleri (4.6) probleminde yerine yazarsak, yeni bağımsız değişkenler cinsinden

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \bar{y}^2} &= \frac{\pi^2}{4} \quad , \quad -1 < \bar{x}, \bar{y} < 1 \\ u(-1, \bar{y}) &= u(1, \bar{y}) = 0, \quad -1 \leq \bar{y} \leq 1 \\ u(\bar{x}, -1) &= u(\bar{x}, 1) = 0, \quad -1 \leq \bar{x} \leq 1 \end{aligned} \quad (4.10)$$

problemini elde ederiz. Bu problemi  $\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_{N-1}$  ve  $\bar{y}_1, \dots, \bar{y}_{N-1}$  şeklindeki iç Chebyshev noktalarında

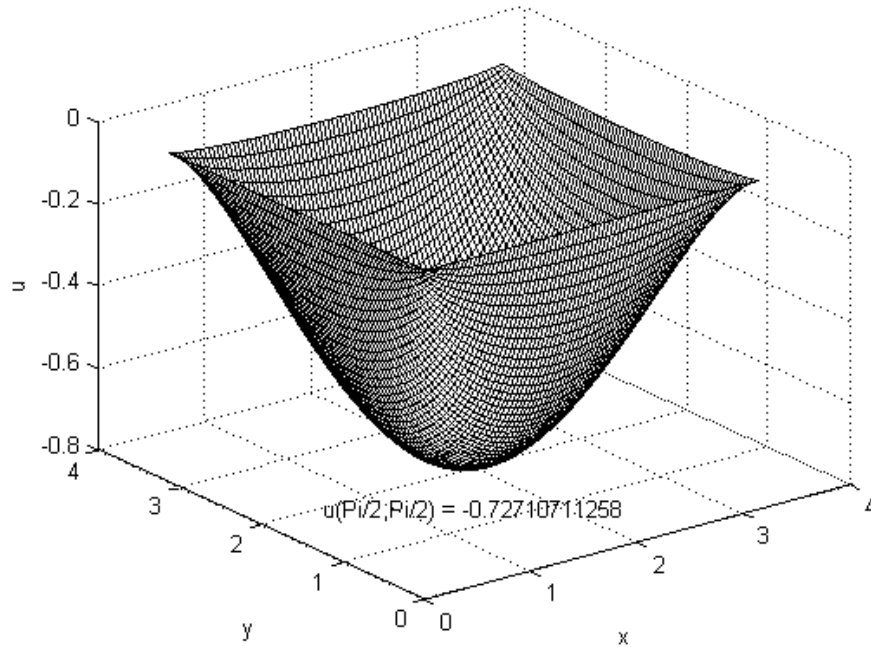
$$\mathbf{L}_N \mathbf{u} = \left( \mathbf{I} \otimes \tilde{\mathbf{D}}_N^2 + \tilde{\mathbf{D}}_N^2 \otimes \mathbf{I} \right) \mathbf{u} = \mathbf{f} \quad (4.11)$$

olarak lineer denklem sistemi formunda yazabiliriz. Burada  $\mathbf{I}$  ,  $(N-1) \times (N-1)$  boyutlu birim matris ve  $\mathbf{f}$  de elemanları  $f_j = \frac{\pi^2}{4}$  ,  $j=1,2,\dots,(N-1)^2$  olan sütun vektörüdür. Bu sistem bilinmeyen  $\mathbf{u}$  vektörü için kolayca çözümlenerek iç Chebyshev noktalarında  $u_j$  değerleri bulunur. Daha sonra da yapılan dönüşümlerde yerine



koyma işlemleri gerçekleştirilerek ele alınan asıl (4.6) probleminin yaklaşık çözümüne ulaşılmış olunur.

Probleminin sayısal çözümü  $N = 24$  için Şekil 4.8 de verilmektedir. Şekil üzerinde ayrıca  $u(\pi/2, \pi/2)$  değeri de belirtilmiştir. Problemin analitik çözümünde (bkz. Denklem (4.7))  $m = n = 30$  alınarak elde edilen sonuç  $u(\pi/2, \pi/2) = -0.7271542080$  dir. Buradan da görüldüğü gibi analitik ve sayısal çözümlerden elde edilen sonuçlar dört ondalık basamakta doğruluğa sahiptir.



Şekil 4.8: İki boyutlu Poisson probleminin sayısal çözümü ( $0 \leq x, y \leq \pi$ )

### 4.3 İki Boyutlu Helmholtz Denklemi

Poisson denkleminin bir varyasyonu olan Helmholtz denklemi, kararlı durum salınımlarla (mekanik, akustik, termal, elektromanyetik) ilişkili birçok problemin matematiksel modeli olarak karşımıza çıkar. Ayrıca, iki boyutlu dalga denklemi

uygun bir değişkenlerine ayırma ile Helmholtz denkleminde indirgenebilir. Bu nedenle Helmholtz denklemini aynı zamanda indirgenmiş dalga denklemini olarak tanımlar ve  $k$  bir reel parametre olmak üzere, iki bağımsız değişkende

$$u_{xx} + u_{yy} + k^2u = f(x, y) \quad (4.12)$$

şeklinde bir kısmi diferansiyel denklemdir. Bu bölümde,  $-1 \leq x, y \leq 1$  için

$$\begin{aligned} u_{xx} + u_{yy} + k^2u &= f(x, y), \quad -1 < x, y < 1 \\ u(-1, y) = u(1, y) &= 0, \quad -1 \leq y \leq 1 \\ u(x, -1) = u(x, 1) &= 0, \quad -1 \leq x \leq 1 \end{aligned} \quad (4.13)$$

formunda verilen Helmholtz denklemini için sınır-değer problemini ele alacağız. Bu problemin sayısal çözümünü Chebyshev türevleme matrisini kullanarak

$$k = 9, \quad f(x, y) = \exp \left\{ -10 \left[ (y-1)^2 + \left( x - \frac{1}{2} \right)^2 \right] \right\} \quad (4.14)$$

şeklinde bir özel seçim için yapacağız.

Bölüm 4.1 deki yol takip edildiğinde, Denklem (4.13) ve (4.14) ile verilen Helmholtz problemi iç düğüm noktalarında

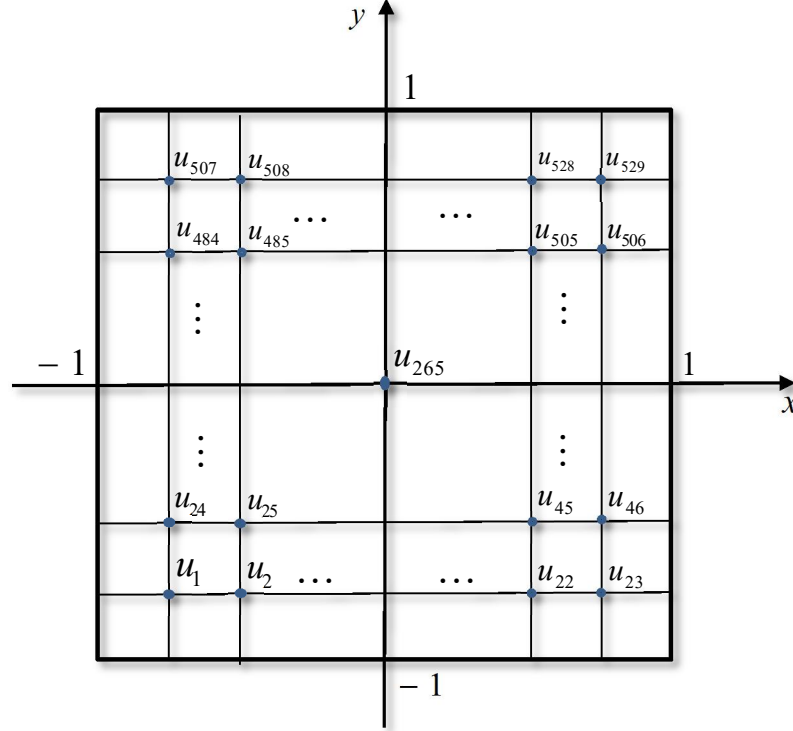
$$(\mathbf{I} \otimes \tilde{\mathbf{D}}_N^2 + \tilde{\mathbf{D}}_N^2 \otimes \mathbf{I} + k^2 \tilde{\mathbf{I}}) \mathbf{u} = \mathbf{f} \quad (4.15)$$

şeklinde  $(N-1)^2$  bilinmeyenli  $(N-1)^2$  sayıda denkleme sahip doğrusal denklem sistemi olarak yazılabilir. Burada  $\tilde{\mathbf{I}}$ ,  $(N-1)^2 \times (N-1)^2$  boyutlu birim matris ve  $\mathbf{f}$  de elemanları

$$f_j = \exp \left( -10 \left[ (y_j - 1)^2 + \left( x_j - \frac{1}{2} \right)^2 \right] \right), \quad j = 1, 2, \dots, (N-1)^2$$

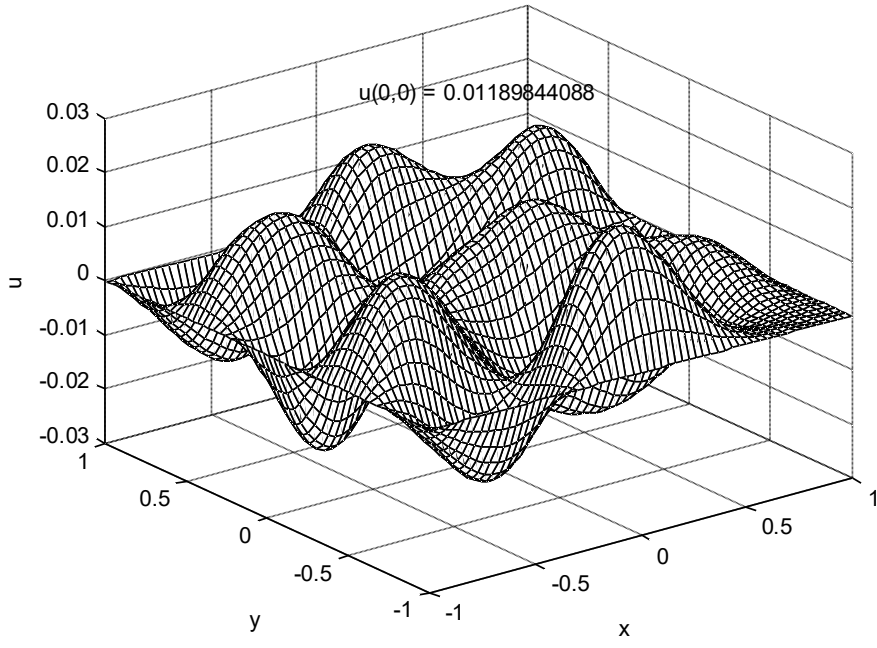
olan sütun vektörüdür. Bu sistem  $(N-1)^2$  sayıda bilinmeyene sahip  $\mathbf{u}$  vektörü için kolayca çözülebilir.

Problemin sayısal çözümü  $N = 24$  alınarak Şekil 4.9 da gösterilen iç düğüm noktaları için yapılmış ve sonuçlar Şekil 4.10 da grafik olarak verilmiştir. Bu grafik üzerinde ayrıca  $u(0,0)$  değeri de belirtilmiştir.



Şekil 4.9: İç düğüm noktalarında problem (4.13) için numaralama

Elde edilen sonuçları test etmek için aynı problemi FORTRAN'ın IMSL Math Kütüphanesi'nde bulunan FPS2H adlı bir hazır alt program kullanarak çözdük. Bu alt program, bir dikdörtgen bölge üzerinde Poisson veya Helmholtz denklemini, eşit aralıklı düğüm noktaları kullanarak, Hodge sonlu fark şeması tabanlı bir hızlı Poisson çözümcüsü ile çözmektedir. Problemin tanımlı olduğu kare bölgenin orta noktası için buradan elde edilen sonuç ise  $u(0,0) = 0.01172313$  dir. Bu sonuç diğeriyle karşılaştırıldığında üç ondalık basamakta doğruluğa sahip olduğu görülmektedir.



Şekil 4.10: Helmholtz probleminin çözümü (Problem (4.13))

## 5. CHEBYSHEV SERİLERİ VE HIZLI FOURİER DÖNÜŞÜMÜ

Bu bölümde Chebyshev spektral metotlarının hızlı Fourier dönüşü (FFT) kullanılarak nasıl uygulanabileceğini inceleyeceğiz (Trefethen 2000). Bu durum bazı hesaplamalar için önemli hızlanma sağlamaktadır. FFT'nin geri dönüşü aşağıdakilerin eşdeğerliğine göredir:

- $x \in [-1,1]$  de Chebyshev serisi
- $\theta \in \mathbb{R}$  de Fourier serisi
- $|z|=1$  çemberi üzerinde Laurent serisi.

$\theta \in \mathbb{R}$ ,  $x \in [-1,1]$  ve  $z \in S$  ( $S = \{z : |z|=1\}$ ) bağımsız değişkenlerini göz önüne alalım. Bunlar arasındaki ilişki

$$z = e^{i\theta}, \quad x = \Re e(z) = \frac{1}{2}(z + z^{-1}) = \cos(\theta) \in [-1,1] \quad (5.1)$$

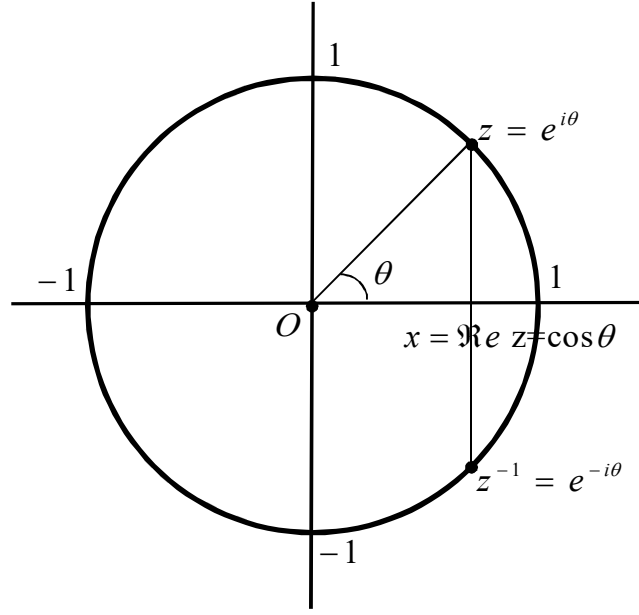
şeklindedir ve bu da

$$\frac{dx}{d\theta} = -\sin \theta = -\sqrt{1-x^2} \quad (5.2)$$

olduğunu belirtir (bkz. Şekil 5.11). Görüldüğü gibi her bir  $x \in (-1,1)$  için birbirinin eşleniği iki adet  $z \in S$  vardır ve sonsuz sayıda  $\theta \in \mathbb{R}$  seçimi mümkündür. Buradan  $\Re e(z) = x$  ve  $\Re e(z^n) = T_n(x)$ ,  $n \geq 0$  dir. Bu ifade,  $x, z$  ve  $\theta$  (5.1) denklemindeki gibi ilişkili olmak kaydıyla,

$$T_n(x) = \Re e z^n = \frac{1}{2}(z^n + z^{-n}) = \cos n\theta \quad (5.3)$$

şeklinde Chebyshev polinomlarının tanımı olarak alınabilir.



Şekil 5.11:  $x$ ,  $z$  ve  $\theta$  arasındaki ilişki

Bu formülden  $T_n(x)$  in  $x$  in bir polinomu olduğu açık değildir. Fakat  $n = 0, 1, 2$  ve  $3$  için formül aşağıdaki gibi açıldığında bu durum açıklığa kavuşmaktadır.

$$\begin{aligned}
 \Re z^0 = 1 &\Rightarrow T_0(x) = 1, \\
 \Re z^1 = \frac{1}{2}(z + z^{-1}) &\Rightarrow T_1(x) = x, \\
 \Re z^2 = \frac{1}{2}(z^2 + z^{-2}) = \frac{1}{2}(z + z^{-1})^2 - 1 &\Rightarrow T_2(x) = 2x^2 - 1, \\
 \Re z^3 = \frac{1}{2}(z^3 + z^{-3}) = \frac{1}{2}(z + z^{-1})^3 - \frac{3}{2}(z + z^{-1}) &\Rightarrow T_3(x) = 4x^3 - 3x,
 \end{aligned}$$

Genel olarak Chebyshev polinomları üç terim tekrarlı bağıntısıyla ilişkilendirilir:

$$\begin{aligned}
 T_{n+1}(x) &= \frac{1}{2}(z^{n+1} + z^{-n-1}) \\
 &= \frac{1}{2}(z^n + z^{-n})(z + z^{-1}) - \frac{1}{2}(z^{n-1} + z^{1-n}) \\
 &= 2xT_n(x) - T_{n-1}(x)
 \end{aligned} \tag{5.4}$$

Denklem (5.2) ve (5.3) ten,  $T_n(x)$  in türevi

$$T'_n(x) = -n \sin n\theta \frac{dx}{d\theta} = \frac{n \sin n\theta}{\sin \theta} \quad (5.5)$$

olarak bulunur. Dolayısıyla, nasıl  $x, z$  ve  $\theta$  denk iseler  $T_n(x)$ ,  $z^n$  ve  $\cos n\theta$  da denklemdir. Bunların lineer birleşimleri alınarak birbirine denk üç tip polinom elde edilebilir. Bunlardan ilki, Chebyshev polinomlarının lineer birleşimlerinin alınmasıyla elde edilen

$$p_c(x) = \sum_{n=0}^N a_n T_n(x), \quad x \in [-1, 1] \quad (5.6)$$

şeklinde bir **cebirsal polinom**, ikincisi

$$p_L(z) = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^N a_n (z^n + z^{-n}), \quad |z|=1 \quad (5.7)$$

şeklinde **Laurent polinomu** ve sonuncusu da çift ( $P(\theta) = P(-\theta)$ ),  $2\pi$  periyotlu,  $N$ . dereceden

$$p_t(\theta) = \sum_{n=0}^N a_n \cos n\theta, \quad \theta \in \mathbb{R} \quad (5.8)$$

şeklinde bir **trigonometrik polinom** dur.

$x, z$  ve  $\theta$  Şekil 5.11 deki gibi ilişkili olduğunda  $p_c(x) = p_L(z) = p_t(\theta)$  elde edilir.  $x \in [-1, 1]$  için tanımlı bir  $f_c(x)$  fonksiyonundan kendi-ters  $f_L(z)$  ( $|z|=1$ ) ve  $f_t(\theta)$  ( $\theta \in \mathbb{R}$ ) fonksiyonlarını oluşturabiliriz:

$$f_L(z) = f_c\left(\frac{z+z^{-1}}{2}\right), \quad f_t(\theta) = f_c(\cos \theta) \quad (5.9)$$

Spektral metotlar için,  $f_c, f_L$  ve  $f_t$  fonksiyonlarının interpolantları olarak Chebyshev, Laurent ve trigonometrik polinomlar,

$$\theta_j = \frac{j\pi}{N}, \quad z_j = e^{i\theta_j}, \quad x_j = \cos \theta_j = \operatorname{Re} z_j, \quad 0 \leq j \leq N \quad (5.10)$$

şeklinde verilen interpolasyon noktalarıyla birlikte kullanılmaktadır. Dolayısıyla, aşağıdaki denklik bağıntıları mevcuttur:

$$\begin{aligned}
 p_t(\theta), \text{ eşit aralıklı } \{\theta_j\} \text{ noktalarında } f_t(\theta) \text{ (çift ve } 2\pi \text{ - periyotlu) yı interpolate eder} \\
 \Downarrow \\
 p_L(z), \text{ birimin kökleri olan } \{z_j\} \text{ noktalarında } f_L(z) \text{ yi interpolate eder} \\
 \Downarrow \\
 p_c(x), \{x_j\} \text{ Chebyshev noktalarında } f_c(x) \text{ i interpolate eder}
 \end{aligned}$$

Şimdiye kadar anlatılanlardan yola çıkarak Chebyshev Spektral türevleme için hızlı Fourier dönüşümü algoritmasını tanımlayabiliriz. Burada önemli nokta,  $f(x)$  in  $q_c(x)$  polinom interpolantının,  $f_t(\theta)$  nın  $q_t(\theta)$  gibi bir trigonometrik interpolantı bulunarak Fourier uzayında türevlenmesi ve  $x$  değişkenine geri dönülmesiyle, türevlenebilmesidir. Periyodik eşit aralıklı ızgara noktalarıyla çalışıldığında hızlı Fourier dönüşümünün avantajları kullanılabilir. Ek A da hızlı Fourier dönüşümüyle Chebyshev spektral türevlemenin algoritması verilmektedir.

Aşağıda bu metodun nasıl çalıştığı ile ilgili uygulamalar verilecektir.

## 5.1 Bir ve İki Boyutlu Dalga Denklemleri

Dalga denklemi uygulamalı matematikte çok önemli yere sahip bir kısmi diferansiyel denklemdir. Akustik, akışkanlar mekaniği ve elektromanyetikte oldukça yaygın olarak kullanılmaktadır. Dalga denkleminin çözümlerinden ses, su ve ışık dalgalarının hareketlerini betimleyen fiziksel nicelikler çıkar.

### 5.1.1 Bir Boyutlu Dalga Denklemi

İlk olarak,



$$\begin{aligned} u_{tt} &= u_{xx}, \quad -1 < x < 1, \quad t > 0 \\ u(-1, t) &= 0, \quad u(1, t) = 0 \end{aligned} \quad (5.11)$$

şeklindeki bir boyutlu problemi ele alalım. Bu problemi nümerik olarak çözmek için zaman değişkeninde sonlu fark leap frog formülünü ve uzay değişkeninde de Chebyshev spektral türevlemeyi kullanacağız (Trefethen 2000). Kullanılacak nümerik yöntemin formüllendirilmesini tamamlamak için iki tane başlangıç koşulu belirlemeliyiz. Kısmi diferansiyel denklem için bu koşullar  $u(x, 0)$  ve  $u_t(x, 0)$  ın verilmesi olurdu. Kullanacağımız sonlu fark algoritması içinse  $u$  üzerindeki koşulların  $t = 0$  ve  $t = -\Delta t$  (önceki zaman adımı) de belirlenmesi gereklidir. Biz burada

$$\begin{aligned} u(x, 0) &= e^{-150x^2} \\ u(x, -\Delta t) &= e^{-150(x-\Delta t)^2} \end{aligned} \quad (5.12)$$

şeklindeki koşulları kullanacağız. Bunlardan ikincisi sola-hareketli Gaussian darbe olarak bilinmektedir.

Şimdi,  $\mathbf{v}^{(n)}$  i,  $n$ . zaman adımında  $u(x_j, n\Delta t)$ ,  $j = 1, 2, 3, \dots, N$  nin yaklaşım vektörü olarak alalım. Bu durumda (5.11) deki dalga denklemini

$$\frac{\mathbf{v}^{(n+1)} - 2\mathbf{v}^{(n)} + \mathbf{v}^{(n-1)}}{(\Delta t)^2} = \mathbf{w} \quad (5.13)$$

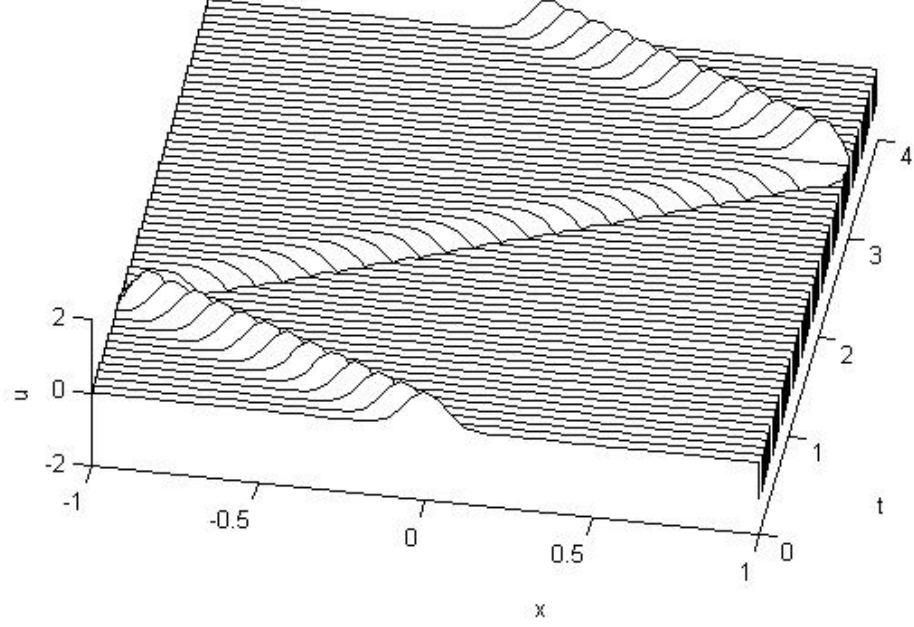
şeklinde ayrık formda yazabiliriz. Bu denklemde  $\mathbf{w}$ , uzay değişkeninde ikinci mertebeden türev için FFT kullanılarak bulunan spektral türevi göstermektedir. Buradan da yaklaşık çözüm

$$\mathbf{v}^{(n+1)} = 2\mathbf{v}^{(n)} - \mathbf{v}^{(n-1)} + (\Delta t)^2 \mathbf{w} \quad (5.14)$$

olarak kolayca bulunur.

Probleminin sayısal çözümü  $N = 80$  ve  $\Delta t \approx 0.0013$  için yapılmış ve sonuçlar Şekil 5.12 de grafik olarak verilmiştir. Zaman adımının bu şekilde küçük

alınması sayısal kararlılık için gereklidir. Bu durum Trefethen (2000) de ayrıntılı olarak açıklanmıştır.



Şekil 5.12: Bir boyutlu dalga denkleminin (Denklemler 5.11) çözümü

### 5.1.2 İki Boyutlu Dalga Denklemi

İkinci olarak, aşağıdaki şekilde verilen iki boyutlu problemi ele alalım:

$$\begin{aligned}
 u_{tt} &= u_{xx} + u_{yy}, & -1 < x, y < 1, & \quad t > 0 \\
 u(-1, y, t) &= 0, & u(1, y, t) &= 0 \\
 u(x, -1, t) &= 0, & u(x, 1, t) &= 0
 \end{aligned}
 \tag{5.15}$$

Bu problem için kullanacağımız başlangıç koşulları

$$\begin{aligned}
 u(x, y, 0) &= e^{-10(x^2+y^2)} \\
 u_t(x, y, 0) &= 0
 \end{aligned}
 \tag{5.16}$$

şeklinde olsun.

Bu problemi nümerik olarak çözmek için zaman değişkeninde yine sonlu fark leap frog formülünü ve uzay değişkenlerinde  $(x, y)$  de tensör çarpım düğüm noktaları üzerinde Chebyshev spektral metodu kullanacağız.

Eğer  $W_j$  ve  $W_j^{(2)}$  eşit aralıklı düğüm noktaları üzerinde sırasıyla 1. ve 2. mertebeden türevler ise bu durumda  $x$  yönündeki Chebyshev düğüm noktaları üzerinde 2. mertebeden türev

$$w_{xj}^{(2)} = \frac{-x_j}{\sqrt{(1-x_j^2)^3}} W_j + \frac{1}{1-x_j^2} W_j^{(2)}, \quad 1 \leq j \leq N-1 \quad (5.17)$$

şeklinde ve  $y$  yönündeki Chebyshev düğüm noktaları üzerinde 2. mertebeden türev

$$w_{yj}^{(2)} = \frac{-y_j}{\sqrt{(1-y_j^2)^3}} W_j + \frac{1}{1-y_j^2} W_j^{(2)}, \quad 1 \leq j \leq N-1 \quad (5.18)$$

şeklinde olur.

Şimdi, bir boyutlu dalga denkleminin çözümünde yaptığımız gibi,  $\mathbf{v}^{(n)}$  i,  $n$ . zaman adımında  $u(x_j, y_j, n\Delta t)$ ,  $j = 1, 2, 3, \dots, N$  nin yaklaşım vektörü olarak alalım. Bu durumda (5.15) deki dalga denklemini

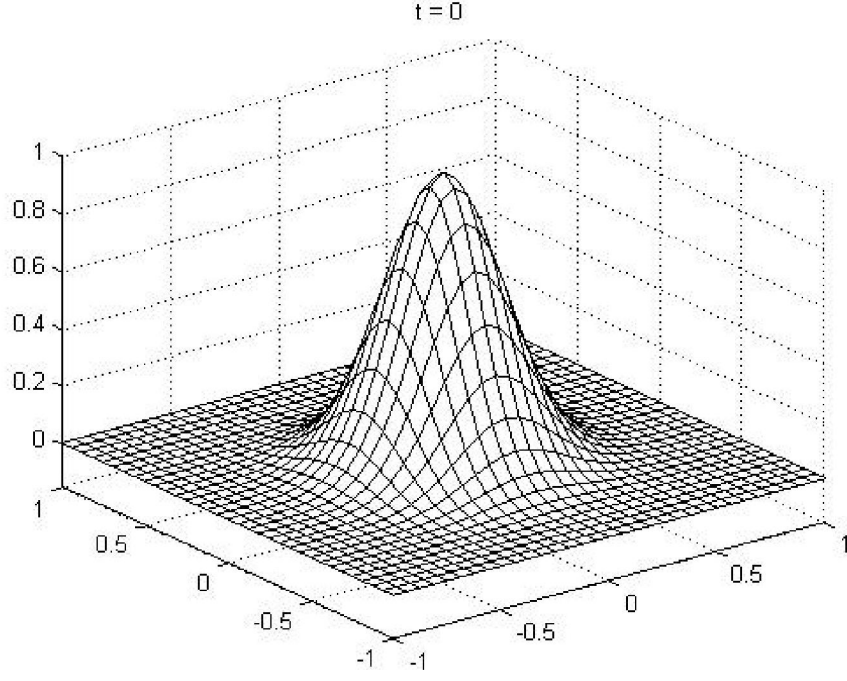
$$\frac{\mathbf{v}^{(n+1)} - 2\mathbf{v}^{(n)} + \mathbf{v}^{(n-1)}}{(\Delta t)^2} = \mathbf{w}_x + \mathbf{w}_y \quad (5.19)$$

şeklinde ayrık formda yazabiliriz. Burada  $\mathbf{w}_x$  ve  $\mathbf{w}_y$  elemanları (5.17) ve (5.18) denklemleriyle verilen vektörlerdir. Buradan da yaklaşık çözüm

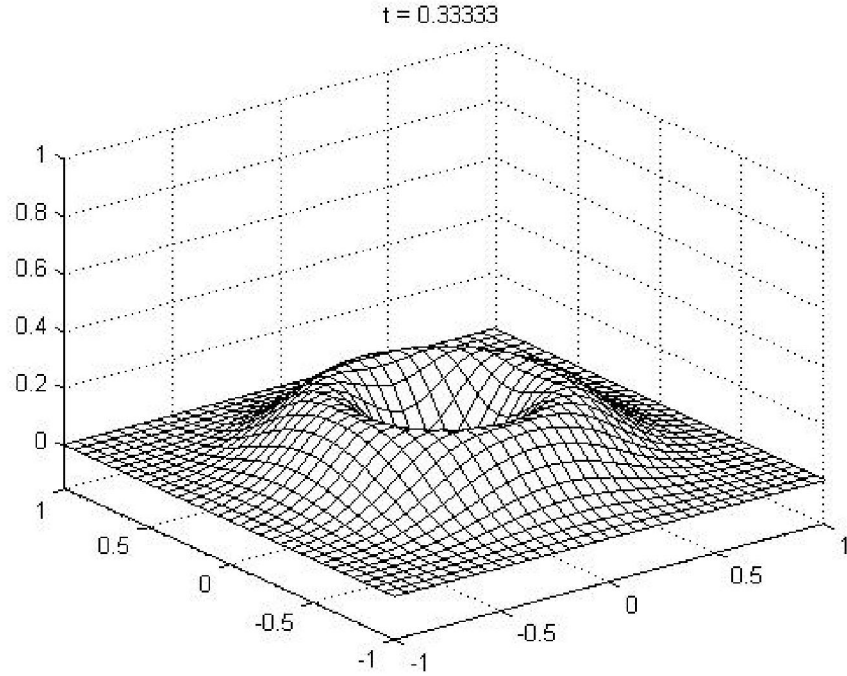
$$\mathbf{v}^{(n+1)} = 2\mathbf{v}^{(n)} - \mathbf{v}^{(n-1)} + (\Delta t)^2 (\mathbf{w}_x + \mathbf{w}_y) \quad (5.20)$$

olarak bulunur.

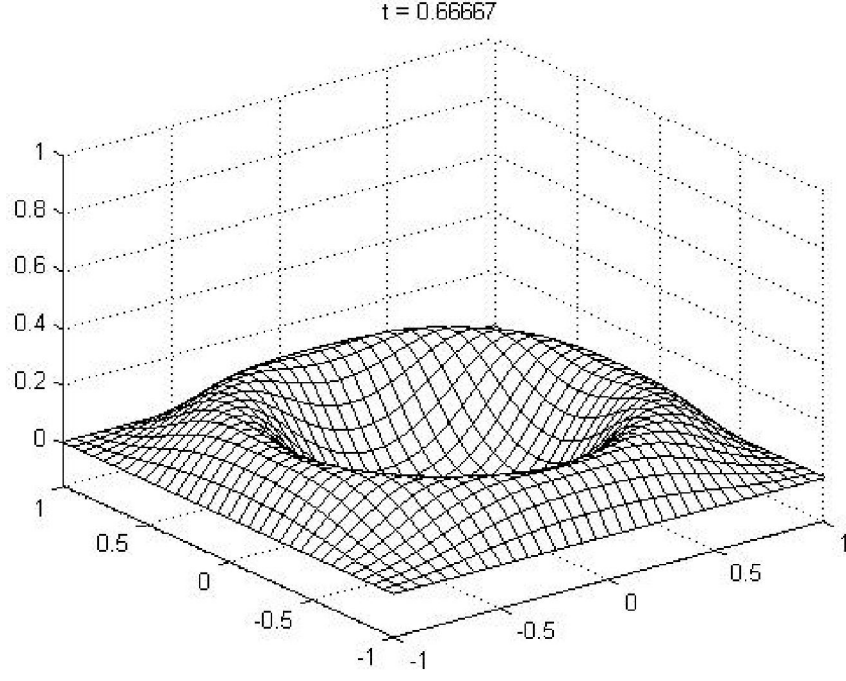
Probleminin sayısal çözümü  $N = 24$  ve  $\Delta t \approx 0.0104$  için yapılmış ve sonuçlar Şekil 5.13-5.16 da grafik olarak verilmiştir.



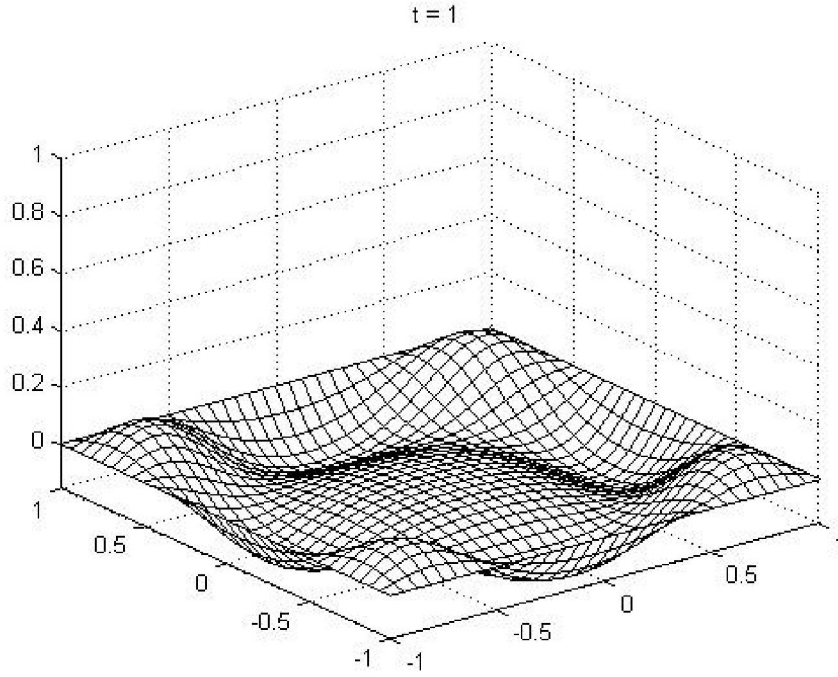
Şekil 5.13: Kare bölgede (5.15)-(5.16) probleminin  $t=0$  için grafiği



Şekil 5.14: Kare bölgede (5.15)-(5.16) probleminin çözümünün  $t=0.33333$  için grafiği



Şekil 5.15: Kare bölgede (5.15)-(5.16) probleminin çözümünün  $t=0.66667$  için grafiği



Şekil 5.16: Kare bölgede (5.15)-(5.16) probleminin çözümünün  $t=1.00000$  için grafiği

## 5.2 İki Boyutlu Laplace Özdeğer Problemi

İki boyutlu Laplace operatörü için özdeğer problemi matematik ve fiziğin klasiklerindedir. Özellikle akustik ve elektromanyetik dalga kılavuzları uygulamalarında, özdeğerlerin tahmini için literatürde mevcut ve yeni önerilen hesaplamalı metotlar araştırmacıların ilgisini çekmektedir.

Bu bölümde ilk olarak kare bölgede aşağıdaki şekilde verilen iki boyutlu Laplace özdeğer problemini ele alacağız:

$$\begin{aligned} -u_{xx} - u_{yy} + f(x, y)u &= \lambda u, \quad -1 < x, y < 1 \\ u(-1, y) &= 0, \quad u(1, y) = 0 \\ u(x, -1) &= 0, \quad u(x, 1) = 0 \end{aligned} \quad (5.21)$$

Bu problemi  $f(x, y)$  nin bazı özel seçimleri haricinde analitik olarak çözmek genelde mümkün değildir. Analitik çözüme olanak tanıyan seçimlerden birisi  $f(x, y) = 0$  olması durumudur. Bu durumda yukarıdaki problem

$$\begin{aligned} u_{xx} + u_{yy} + \lambda u &= 0, \quad -1 < x, y < 1 \\ u(-1, y) &= 0, \quad u(1, y) = 0 \\ u(x, -1) &= 0, \quad u(x, 1) = 0 \end{aligned} \quad (5.22)$$

şeklindeki probleme indirgenir. Bunu da “Değişkenlerine Ayırma Metodu” nu kullanarak kolayca çözebiliriz. Bu durumda (5.22) probleminin özdeğerleri ve özfonksiyonları (normal modları) sırasıyla

$$\lambda_{nm} = \frac{\pi^2}{4} (n^2 + m^2), \quad n, m = 1, 2, 3, \dots, \quad (5.23)$$

$$u_{nm}(x, y) = \sin\left(\frac{n\pi}{2}(x+1)\right) \sin\left(\frac{m\pi}{2}(y+1)\right), \quad n, m = 1, 2, 3, \dots, \quad (5.24)$$

formunda olurlar. Burada dikkat edilirse  $n \neq m$  olduğunda özdeğerler çakışık olmaktadır. Bu duruma özdeğerler dejeneredir denir. Genelde çakışık özdeğerler için hesaplanan normal modlar bu özdeğerlere karşı gelen öz uzayın lineer bağımsız

elemanlarıdır. Örneğin,  $\lambda_{12} = \lambda_{21} = 5\frac{\pi^2}{4}$  özdeğerine karşı gelen normal modlar  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  olmak üzere

$$\alpha \sin\left(\frac{\pi}{2}(x+1)\right)\sin(\pi(y+1)) + \beta \sin(\pi(x+1))\sin\left(\frac{\pi}{2}(y+1)\right) \quad (5.25)$$

şeklinde dirler. Tablo 5.1’de (5.22) probleminin (5.23) ile verilen bazı özdeğerleri görülmektedir.

**Tablo 5.1:** Problem (5.22) nin bazı özdeğerleri

$i$	$j$	$\lambda_{ij}$
1	1	$\frac{\pi^2}{2} \approx 4.9348022005446793096$
1	2	$5\frac{\pi^2}{4} \approx 12.337005501361698274$
2	1	$5\frac{\pi^2}{4} \approx 12.337005501361698274$
2	2	$8\frac{\pi^2}{4} \approx 19.739208802178717238$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

Problem (5.21) i bir spektral metot kullanarak nümerik olarak çözmek için Bölüm 4.2 de iki boyutlu Poisson problemini çözmek için kullandığımız yolu takip edebiliriz (Trefethen 2000). Burada ilk olarak  $(N-1)^2 \times (N-1)^2$  boyutlu ayırık Laplasyan’ı Kronecker toplam olarak aşağıdaki şekilde yazarız:

$$\mathbf{L}_N = -\mathbf{I} \otimes \tilde{\mathbf{D}}_N^2 - \tilde{\mathbf{D}}_N^2 \otimes \mathbf{I}. \quad (5.26)$$

Bu denklemde  $\mathbf{I}$ ,  $(N-1) \times (N-1)$  boyutlu birim matris ve  $\mathbf{L}_N$  de  $(N-1)^2 \times (N-1)^2$  boyutlu bir kare matristir. Daha sonra buna köşegen elemanları, her bir  $(N-1)^2$  iç düğüm noktasında Şekil 4.6 daki sıralamaya göre hesaplanan  $f(x, y)$  değerleri olan köşegen matrisi ekleriz:

$$\hat{\mathbf{L}}_N = -\mathbf{I} \otimes \tilde{\mathbf{D}}_N^2 - \tilde{\mathbf{D}}_N^2 \otimes \mathbf{I} + \mathbf{F}. \quad (5.27)$$

En sonunda da (5.21) problemi

$$\hat{\mathbf{L}}_N \mathbf{u} = \lambda \mathbf{u} \quad (5.28)$$

şeklinde özdeğer problemi olarak yazılır. Buradaki  $\hat{\mathbf{L}}_N$  matrisinin özdeğerleri standart teknikler kullanılarak kolayca bulunabilir. Biz burada bu büyük matrisin özdeğerlerini bulmak için MATLAB in *eig* komutunu kullanıyoruz.

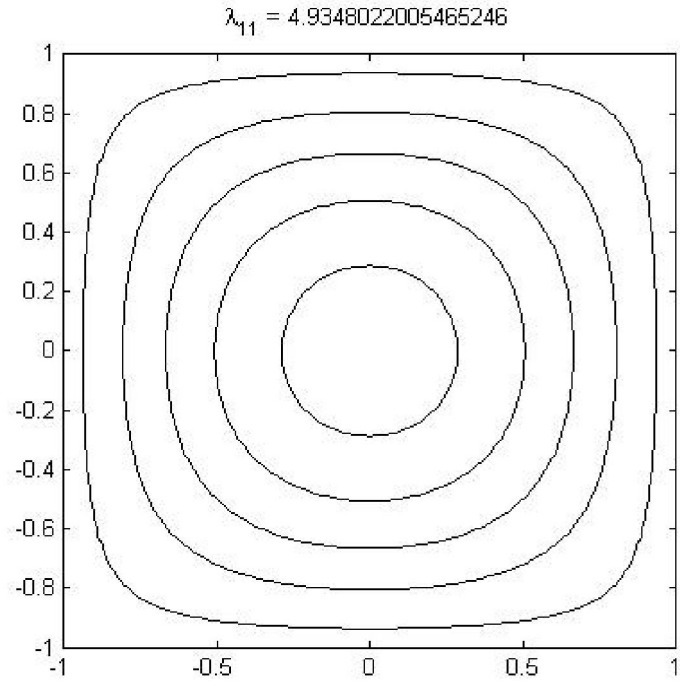
Problem (5.21) in sayısal çözümünü ilk önce  $f(x, y) = 0$  için yaparak elde edilen sonuçları yukarıda verdiğimiz analitik çözüm sonuçlarıyla karşılaştırma imkânı buluyoruz. Şekil 5.17-5.20 de  $N=16$  kullanılarak elde edilen nümerik sonuçlar kontur grafikler olarak verilmiştir. Bu kontur grafikler problemin ilk dört özdeğerini ve bunlara karşı gelen ilk dört normal modu göstermektedir. Bu grafiklerde verilen özdeğerler ile Tablo 5.1’de verilen analitik sonuçlar karşılaştırıldığında, sadece  $16 \times 16$  büyüklüğünde ayrık nokta kullanılmış olmasına rağmen 12 hanelik doğruluğa ulaşıldığı gözlemlenmektedir.

$f(x, y) \neq 0$  olduğunda artık (5.21) problemini analitik olarak çözmek mümkün olmayacaktır. Bu nedenle analitik çözümünü bildiğimiz durumla test edilen nümerik yöntemi

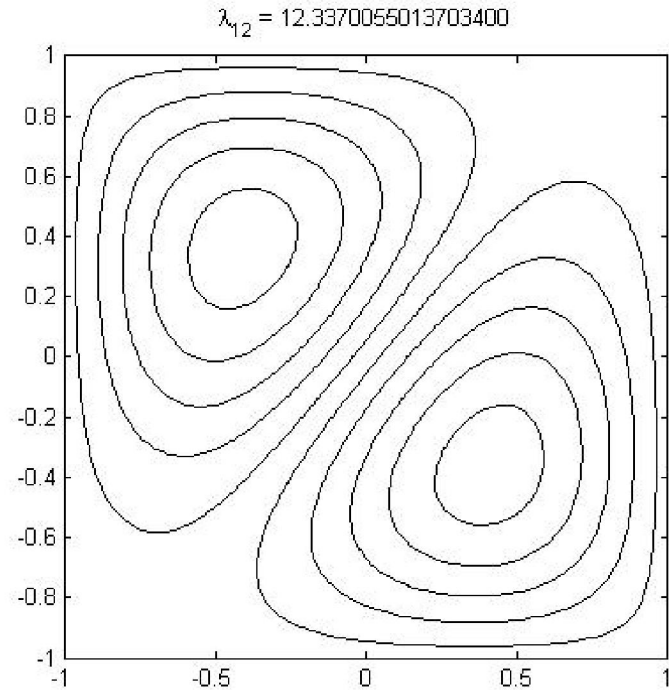
$$f(x, y) = e^{25(y-x-1)} \quad (5.29)$$

olması durumu için uyguladığımızda elde edilen sonuçları ilk duruma benzer şekilde Şekil 5.21 de veriyoruz.

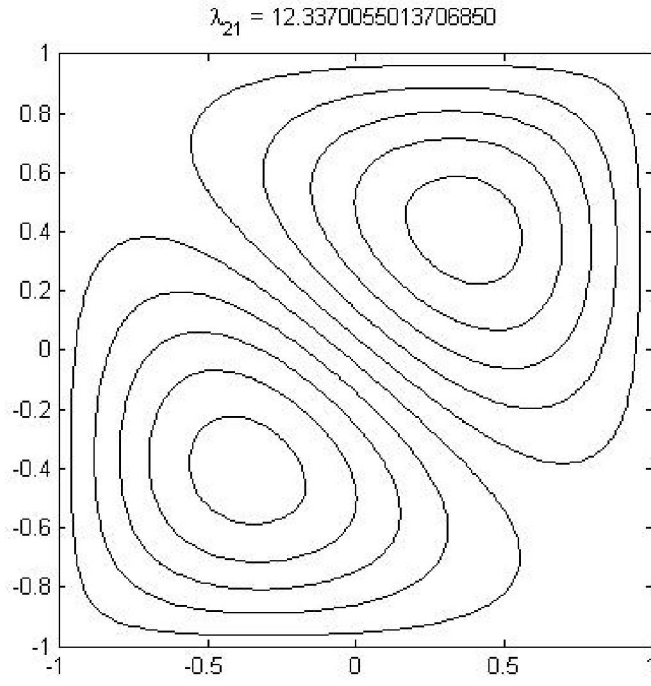




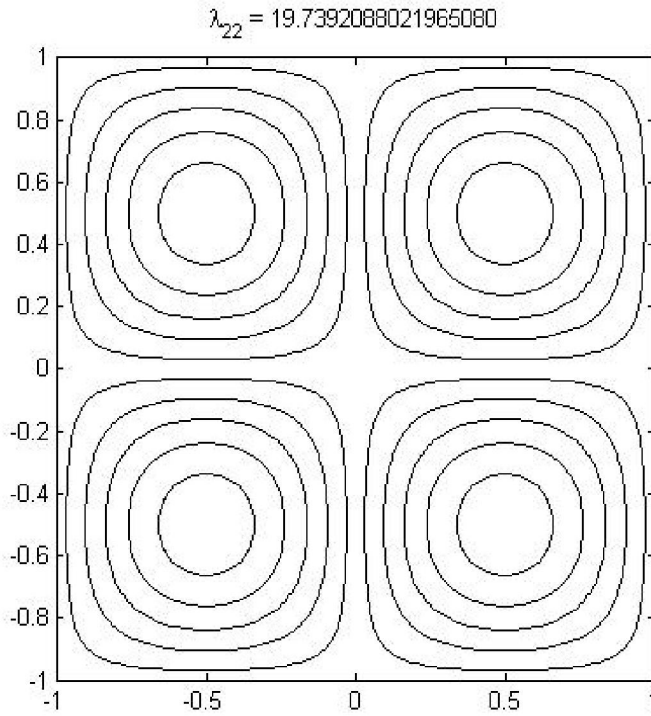
**Şekil 5.17:** Problem (5.21) için birinci özdeğer ve normal mod



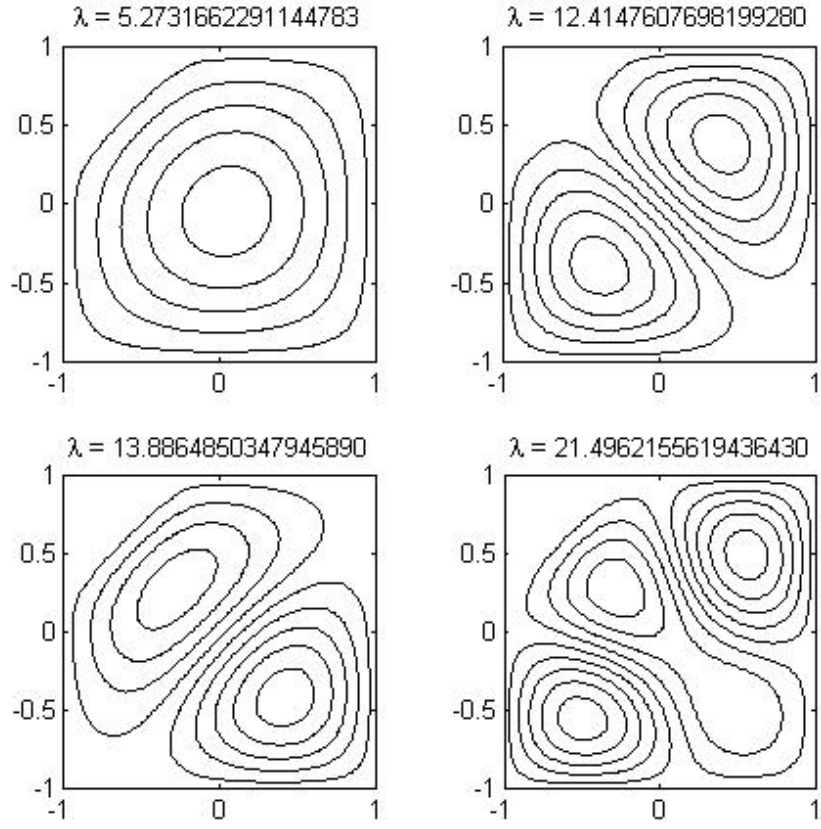
**Şekil 5.18:** Problem (5.21) için ikinci özdeğer ve normal mod



**Şekil 5.19:** Problem (5.21) için üçüncü özdeğer ve normal mod



**Şekil 5.20:** Problem (5.21) için dördüncü özdeğer ve normal mod



Şekil 5.21: Problem (5.21) de  $f(x, y) = e^{25(y-x-1)}$  için ilk dört özdeğer ve normal mod

## 6. SONUÇ VE ÖNERİLER

Spektral metotlar, adi diferansiyel denklem, kısmi diferansiyel denklem ve diferansiyel denklem içeren özdeğer problemlerini sayısal olarak çözmek için sık kullanılan sonlu farklar metodu ve sonlu elemanlar metoduna alternatif metotlardan birisidir. Bu metotların temel özelliği, deneme fonksiyonları olarak sonsuz diferansiyellenebilir global fonksiyonların farklı ortogonal sistemlerini kullanmasıdır. Bunun avantajı, ele alınan problemin tanımlı olduğu bölgenin herhangi bir noktasındaki hesaplamanın, sadece bu noktaya komşu noktalardaki bilgiye (sonlu farklar metodunda olduğu gibi) bağlı olmayıp tüm bölgenin bilgisine bağlı olmasıdır. Farklı deneme fonksiyonlarının kullanımı farklı spektral yaklaşımları beraberinde getirmektedir. Bunlardan bazıları Chebyshev spektral metot, Fourier spektral metot ve Jacobi spektral metot olarak sıralanabilir. Spektral metotlar üstel yakınsak olduklarından lokal metotlara göre daha kesin (az hatalı) sonuçlar vermektedir. Global metotlar, zamanda veya uzayda çözümün önemli ölçüde değişiklik gösterdiği, çok yüksek sayıda ızgara noktalarının kullanılmasının gerekli olduğu ve ayrıca uzun zaman integrasyonuna ihtiyaç duyulduğu durumlarda lokal metotlara tercih edilmektedir.

Bu tezde, deneme fonksiyonları olarak Chebyshev polinomlarının kullanılmasıyla elde edilen Chebyshev spektral metot ele alınmış ve bazı uygulamaları verilmiştir. İlk önce Chebyshev polinomlarının kullanılması durumuna karşı gelen türevleme matrislerinin Chebyshev noktaları kullanılarak oluşturulması özetlenmiş ve daha sonrada bu matrislerin KDD ler için başlangıç ve sınır değer problemlerini çözmede nasıl kullanıldığı örneklerle açıklanmıştır.

## 7. KAYNAKLAR

Ben-Yu, G., *Spectral Methods and Their Applications*, World Scientific, Singapore, (1998).

Bernardi, C. and Maday, Y., *Approximations spectrales de problèmes aux limites elliptiques*, Berlin: Springer-Verlag, (1992).

Boyd, J. P., *Chebyshev and Fourier Spectral Methods*, 2nd ed., New York, (2000).

Canuto, C. Hussaini, M. Y. Quarteroni, A. and Zang, T. A., *Spectral Methods in Fluid Dynamics*, Berlin: Springer-Verlag, (1988).

Finlayson, B. A., *Method of Weighted Residuals and Variational Principles*, Academic Press, New York (1972).

Fornberg, B., *A practical guide to pseudospectral methods*, UK: Cambridge University Press, Cambridge, (1996).

Funaro, D., *Polynomial Approximation of Differential Equations*, Berlin Heidelberg: Springer-Verlag, 1-26, (1992).

Gottlieb, D. and Orszag, S. A., *Numerical Analysis of Spectral Methods: Theory and Applications*, SIAM, Philadelphia, (1977).

Gottlieb, D., Hussaini, M. Y., and Orszag, S. A., *Introduction: Theory and Applications of Spectral Methods*, in Voight, R. G., Gottlieb, D., and Hussaini, M. Y., eds., *Spectral Methods for Partial Differential Equations*, SIAM, Philadelphia, (1984).

Horn R. A. and Johnson C. R., *Topics in Matrix Analysis*, Cambridge University Press, Cambridge, UK, (1991).

Karniadakis, G. E. and Sherwin, S. J., *Spectral/hp element method for CFD*, UK: Oxford University Press, Oxford, (1999).

Mercier, B., *An Introduction to the Numerical Analysis of Spectral Methods*, New York: Springer-Verlag, (1989).

Orszag, S. A., "Numerical Methods for the Simulation of Turbulence", *Phys. Fluids Supp. II*, 12, 250-257, (1969).

Orszag, S. A., "Accurate solution of the orr-sommerfeld stability equation", *J. Fluid Mech.*, 50, 689-703, (1971).

Trefethen, L. N., *Spectral Methods in Matlab*, England: Oxford University, Oxford, (2000).

# **EKLER**

## 8. EKLER

### EK A Algoritma (FFT-Tabanlı Chebyshev Spektral Türevleme)

- $x_0 = 1, \dots, x_N = -1$  Chebyshev noktalarında  $\{v_0, \dots, v_N\}$  verilsin. Bu verileri  $V_{2N-j} = v_j, j = 1, 2, \dots, N-1$  olmak üzere  $2N$  uzunluğunda bir  $V$  vektörüne genişlet.
- FFT kullanarak aşağıdakini hesapla:

$$\hat{V}_k = \frac{\pi}{N} \sum_{j=1}^{2N} e^{-ik\theta_j} V_j, \quad k = -N+1, \dots, N$$

- $\hat{W}_N = 0$  dışında  $\hat{W}_k = ik\hat{V}_k$  olarak tanımla.
- Trigonometrik interpolantın türevini

$$W_j = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-N+1}^N e^{ik\theta_j} \hat{W}_k, \quad j = 1, \dots, 2N$$

şeklindeki ters FFT yi kullanarak hesapla.

- İç ayırık noktalarda cebirsel interpolant  $q_c(x)$  in türevini

$$w_j = -\frac{W_j}{\sqrt{1-x_j^2}}, \quad j = 1, \dots, N-1$$

formülünü kullanarak hesapla. Burada, uç noktalar ( $j = 0, N$ ) için

$$w_0 = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=0}^N b_n n^2 \hat{v}_n, \quad w_N = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=0}^N b_n (-1)^{n+1} n^2 \hat{v}_n$$
$$b_n = \begin{cases} \frac{1}{2}, & n = 0, N \\ 1, & n \neq 0, N \end{cases}$$

formüllerini kullan.



## 9. ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı : Merve UZUNBOY

Doğum Yeri ve Tarihi : Finike / 18.01.1992

Lisans Üniversite : Hacettepe Üniversitesi

Elektronik posta : merveuzunboy@hotmail.com

İletişim Adresi : Turunçova Mah. Yelice Sok. No:91  
Finike / ANTALYA