T.C.
PAMUKKALE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

KESİRSEL TÜREV VE UYGULAMALARI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

SİBEL GÜL

DENİZLİ, HAZİRAN - 2016

T.C.
PAMUKKALE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

KESİRSEL TÜREV VE UYGULAMALARI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

SİBEL GÜL

DENİZLİ, HAZİRAN - 2016

KABUL VE ONAY SAYFASI

Sibel GÜL tarafından hazırlanan **"KESİRSEL TÜREV VE UYGULAMALARI"** adlı tez çalışmasının savunma sınavı 03.06.2016 tarihinde yapılmış olup aşağıda verilen jüri tarafından oy birliği ile Pamukkale Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı Yüksek Lisans Tezi olarak kabul edilmiştir.

Jüri Üyeleri	İmza
Danışman Doç. Dr. Serpil HALICI	....
Üye Prof. Dr. Halim Özdemir Sakarya Üniversitesi	....
Üye Doç. Dr. Mustafa Aşçı Pamukkale Üniversitesi	....

Pamukkale Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun 29.06.2016 tarih ve ..26/14.... sayılı kararıyla onaylanmıştır.

....

Prof. Dr. Orhan KARABULUT

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

Bu tezin tasarımı, hazırlanması, yürütülmesi, araştırmalarının yapılması ve bulgularının analizlerinde bilimsel etiğe ve akademik kurallara özenle riayet edildiğini; bu çalışmanın doğrudan birincil ürünü olmayan bulguların, verilerin ve materyallerin bilimsel etiğe uygun olarak kaynak gösterildiğini ve alıntı yapılan çalışmalara atfedildiğine beyan ederim.

SİBEL GÜL

ÖZET

KESİRLİ TÜREV VE UYGULAMALARI
YÜKSEK LİSANS TEZİ

PAMUKKALE ÜNİVERSİTESİ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

(TEZ DANIŞMANI:DOÇ. DR. SERPİL HALICI)

DENİZLİ, HAZİRAN – 2016

17. yy. dan itibaren Leibniz, Euler, Lacroix ve Abel, kesirli türev ve integrallerle ilgili yaklaşımlar sunmuştur.

Dört bölüm olarak hazırlanan bu çalışmanın ilk bölümünde; kesirli integral ve kesirli türevin tarihi gelişimi ele alındı. İkinci bölümde; daha sonraki bölümlerde kullanacağımız bazı tanım ve teoremlere yer verildi. Üçüncü bölümde ise kesirli mertebeden türevin tanımı, özellikleri, elde edilişi ve bazı örneklere yer verildi. Son bölüm olan dördüncü bölümde ise kesirli mertebeden türevin fiziksel ve geometrik yorumu incelendi.

ANAHTAR KELİMELER:Kesirli türev, Gama fonksiyonu, Beta fonksiyonu, Hata fonksiyonu

ABSTRACT

FRACTIONAL DERIVATIVE AND APPLICATIONS
MSC THESIS

PAMUKKALE UNIVERSITY INSTITUTE OF SCIENCE
MATHEMATİCS

(SUPERVISOR:ASSOC. PROF. DR. SEPİL HALICI)

DENİZLİ, JUNE 2016

Starting from 17th century, taking up fractional derivative and integral, Leibniz, Euler, Lacroix, Abel, Liouville and many other mathematicians suggested various ideas and approaches.

At the first part of this study consisting of four sections, the historical development of fractional integral and fractional type have been discussed. We included some definitions and theorems in the second part, which are to be used in the subsequent parts. In the third part, the definition and the properties of the kind of fractional order have been obtained and then exemplified.

In the fourth and the last part has been examined physical and geometrical interpretation of the kind of fractional order

KEYWORDS:Fractional derivative, Gama function, Beta function, Error function

İÇİNDEKİLER

Sayfa

ÖZET ... i
ABSTRACT ... ii
İÇİNDEKİLER ... iii
ŞEKİL LİSTESİ ... iv
TABLO LİSTESİ ... v
SEMBOL LİSTESİ ... vi
ÖNSÖZ ... vii
1. GİRİŞ ... 1
2. BAZI TEMEL KAVRAMLAR ... 2
2.1 Bazı Tanımlar ... 2
2.2 Gama Fonksiyonu ... 5
2.3 Beta Fonksiyonu ... 8
2.4 Gama ve Beta Fonksiyonları Arasındaki İlişki ... 9
2.5 Genişletilmiş Gama Fonksiyonu ... 10
2.6 Kompleks Değişkenli Gama Fonksiyonu ... 11
2.7 Hata Fonksiyonu ... 11
2.8 Mittag-Lefler Fonksiyonu ... 12
2.9 Mellin Ross Fonksiyonu ... 13
2.10 Riemann-Liouville Kesirli Türevin Laplace Dönüşümü ... 13
2.11 Caputo Türevinin Laplace Dönüşümü ... 14
2.12 Grünwald Letnikov Kesirli Türevinin Laplace Dönüşümü ... 14
3. BAZI TEMEL KAVRAMLAR ... 15
3.1 Kesirli Türevlerin Elde Edilişi ... 15
3.2 Kesirli Türevin Özellikleri ... 18
3.2.1 Lineerlik Özelliği ... 18
3.2.2 Homojen Olma Özelliği ... 19
3.2.3 Kesirli Türevlerin Leibniz Kuralı ... 19
3.2.4 Kesirli Türevlerin Bileşkesi ... 19
3.2.5 Birleşme özelliği ... 20
3.3 Kesirli Türev ve Adi Türev Arasındaki Farklar ... 20
3.4 Bazı Pratik Kesirli Türev Alma Kuralları ... 29
3.4.1 Polinom Fonksiyonların Kesirli Türevleri ... 30
3.4.2 Üslü Fonksiyonların Kesirli Türevleri ... 31
3.4.3 Bazı Trigonometrik Fonksiyonların Kesirli Türevleri ... 31
4. KESİRLİ TÜREVİN GEOMETRİK VE FİZİKSEL YORUMU ... 36
5. SONUÇ VE ÖNERİLER ... 41
6. KAYNAKLAR ... 42
1. ÖZGEÇMİŞ ... 44

ŞEKİL LİSTESİ

Sayfa

Şekil 2.1: Gama Fonksiyonu..8
Şekil 3.1: $f(x) = x$ fonksiyonunun Riemann-Liouville kesirli türevi 21
Şekil 3.2: $f(x) = 1$ fonksiyonun Riemann-Liouville kesir dereceli türevleri .22
Şekil 4.1: $f(x) = x^3$ fonksiyonunun grafiği 37
Şekil 4.2: $g(x) = x^3 + x^4$ fonksiyonunun grafiği 38

TABLO LİSTESİ

Sayfa

Tablo 4.1: $f(x)$ fonksiyonun oluşturduğu üçgenlerin alanları........................39
Tablo 4.2: $g(x)$ fonksiyonun oluşturduğu üçgenlerin alanları.......................39

SEMBOL LİSTESİ

Γ: Gama fonksiyonu

β**:** Beta fonksiyonu

$Erf(x)$: Hata fonksiyonu

$E_{\alpha,\beta}(x)$: Mittag-Lefler Fonksiyonu

$\boldsymbol{\frac{d^n}{dt^n}}$: $n.$ mertebeden adi türev gösterimi

${}_{a}^{GL}D_t^p$: Grünwald-Letnikov Kesirsel Türevi

${}_{a}^{RL}D_t^p$: Riemann-Liouville Kesirsel Türevi

${}_{a}^{C}D_t^p$: Caputo Kesirsel Türevi

ÖNSÖZ

Bu tez, Pamukkale Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü Öğretim üyesi Doç. Dr. Serpil Halıcı danışmanlığında hazırlanarak Pamukkale Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsüne Matematik Ana Bilim Dalında Yüksek Lisans Tez Çalışması olarak sunulmuştur.

Yapılan çalışmada Kesirli Türev çözüm yöntemleri, uygulama alanları ve geometrik yorumundan bahsedilmiştir.

Yüksek lisans çalışması olarak bu tezin hazırlanmasında beni yönlendirerek değerli tecrübe ve bilgi birikimlerini benimle paylaşan çok değerli danışmanım Doç. Dr. Serpil Halıcı'ya sonsuz teşekkürlerimi ve saygılarımı sunarım. Ayrıca bu süreçte bana maddi ve manevi destek veren aileme de teşekkürlerimi sunarım.

SİBEL GÜL

1. GİRİŞ

Uygulamalı alanlarda kesirli türev ve kesirli integral kavramları hakkında fiziksel şekillerin matematiksel modelinin oluşturulmasında, çoğu zaman türev kavramına ihtiyaç duyulur. Çünkü sistemlerdeki değişimleri ifade edebilmek için türeve ihtiyaç vardır. Eğer bir sistemde değişim söz konusu değilse, o sistemle ilgili çok bir şey yapmaya gerek yoktur. Analizi ve analiz sonuçları önemli olan sistemler çoğu zaman kendisinin hali hazırdaki durumu ve değişimi ile beraber ifade edilebilir. Bu amaçla ilk çalışmalar, L'Hospital, Abel, Euler, Riemann tarafından yapılmıştır. Kısaca matematikçiler, sistemlerin modelini oluşturan bağıntıların (fonksiyonların)asimptotik davranışlarını incelemek için bağımsız değişkenlerde meydana gelen en küçük değişikliklere karşı bağıntının (fonksiyonun) davranışını incelemek isterler.

Türev kavramını ilk kullanan bilim adamı Isaac Newton'dur. Newton, klasik mekaniğin temellerini tanımlarken, bağımsız parametrelerde meydana gelen değişikliklere karşılık bağımlı parametrenin cevabını incelemek için ilk olarak türev kavramına başvuran bilim adamlarından biridir.

Newton bu çalışmalarını "Philosophie Naturalis Principia Mathematica" adlı kitapta toplamıştır ve bu kitapta Newton'un geometrik ispatları, yerçekimi kuvvetikanunu ve kütle çekimi kuvvetleri ile ilgili konular bulunmaktadır.

Newton'dan sonra başka bilim adamları da türev kavramı ile ilgilenmişlerdir. (Karcı 2015).

2. BAZI TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde, kesirli türev almak için bilmemiz gereken genel kavram ve tanımları verdik.

2.1 Bazı Tanımlar

Tanım 2.1.1: Bir veya daha çok bağımlı değişkenin bir veya daha çok bağımsız değişkene göre türevlerini veya diferansiyellerini içeren bağıntıya diferansiyel denklem denir (Başar 1996).

Tanım 2.1.2: Bir diferansiyel denklem içinde bulunan en yüksek mertebeli türevinmertebesine, diferansiyel denklemin mertebesi; en yüksek mertebeli türevin derecesine de, yani kuvvetine, diferansiyel denklemin derecesi denir. Diferansiyel denklemin derecesi hesaplanırken, denklem türevlerine göre polinom olarak yazılmalıdır (Başar 1996).

Tanım 2.1.3: $A \subset \mathbb{R}$, $x_0 \in A$, A nın bir yığılma noktası ve f ise A dan $\mathbb{R}$ ye bir fonksiyon olsun. Eğer,

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_{0)}}{x - x_0}$$

limiti veya $x = x_0 + h$ koymakla elde edilen

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

limiti varsa, f fonksiyonu x_0 noktasında türevlenebilirdir denir ve bu limit değeri f nin x_0 noktasındaki türevi adını alır. Bu türev,

$$f'(x_0), \quad \frac{df(x_0)}{dx}, \quad Df(x_0)$$

sembollerinden birisi ile gösterilir (Balcı 2003).

Tanım 2.1.4: Türevi $f(x)$ veya diferansiyeli olan $f(x)dx$ olan F(x) ifadesine, $f(x)$ in belirsiz integrali denir ve

$$\int f(x)dx = F(x)$$

biçiminde gösterilir. Bu ise,

$$F(x) = \int f(x)dx \Leftrightarrow \frac{d}{dx}F(x) = f(x) \tag{2.1}$$

olması demektir. Diğer taraftan, bir sabitin türevi sıfır olduğundan

$$\frac{d}{dx}[F(x) + c] = f(x)$$

yazılabilir ki bu da $f(x)$ in integralinin $F(x) + c$ şeklinde de yazılabileceğini gösterir. Tamamen keyfi olan bu c sabitine integrasyon sabiti denir, O halde, (2.1) ifadesi

$$\int f(x)dx = F(x) + c \Leftrightarrow \frac{d}{dx}F(x) = f(x)$$

biçiminde yazılabilir. Demek ki, $\int f(x)dx$ hesaplamak demek; türevi $f(x)$ olan fonksiyonu bulmak demektir (Balcı 2003).

Tanım 2.1.5: $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu sınırlı olsun. Eğer;

$$\int_a^{\bar{b}} f(x)dx = \int_{\bar{a}}^{b} f(x)dx = I$$

ise, f fonksiyonu $[a, b]$ aralığında Riemann anlamında integrallenebilirdir denir ve fonksiyonun bu integrali

$$\int_a^b f(x)dx$$

biçiminde gösterilir. Bu tanım kullanılarak bir fonksiyonun integralini hesaplamak çok zordur. Şimdi integrali aşağıdaki gibi tanımlayacağız (Ünlü 2011).

Tanım 2.1.6: $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ fonksiyonu sınırlı olsun. $[a,b]$ aralığının $P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ parçalanışı için

$$M_k = sup\{f(x)\colon x_{k-1} \le x \le x_k\}, \qquad m_k = inf\{f(x)\colon x_{k-1} \le x \le x_k\}$$

olsun.

$$\text{Ü}(f,P) = \sum_{k=1}^{n} M_k\, \Delta x_k$$

ve

$$A(f,P) = \sum_{k=1}^{n} m_k \Delta\, x_k$$

toplamlarına, sırası ile f fonksiyonunun P parçalanmasına karşılık gelen üst darboux toplamı ve alt darboux toplamı denir. Yani parçalanmalar sonsuza ıraksarken artıkların toplamı sıfıra yakınsar (Balcı 2003).

Tanım 2.1.7: $f(x,y)$ fonksiyonu $-\infty \le a < b \le \infty$, $-\infty \le c < d \le \infty$ aralıklar üzerinde ölçülebilir bir fonksiyon olmak üzere ;

$$\int_a^b \left(\int_a^x f(x,y)\, dy \right) dx = \int_a^b \left(\int_y^b f(x,y) dx \right) dy$$

eşitliğine Dirichlet formülü denir (Balcı 2003).

Tanım 2.1.8: $f\colon X \to \mathbb{R}^n$ bir fonksiyon ve A bir ölçülebilir uzay olsun. Bu durumda $\alpha > 0$ için

$$f^{-1}(-\infty, \infty) = \{x \in X : f(x) > \alpha\} \in A$$

oluyorsa, f fonksiyonuna ölçülebilir fonksiyon denir (Balcı 2003).

Tanım 2.1.9: 0$< a < 1$ olmak üzere

$$f(x) = \frac{1}{\Gamma(a)} \int_0^x (x-\tau)^{a-1} \varphi(\tau) d\tau, \qquad x > 0$$

ifadesine Abel integral denklemi denir (Miller 1974).

Tanım (Fourier serisi) 2.1.10: Periyodik bir $f(t)$ fonksiyonunun cosinüs ve sinüslerinin sonsuz toplamı biçiminde bir açılımıdır.

$$f(t) = \frac{a_o}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\, cosnwt + b_n sinnwt) \text{ olup}$$

$$w = \frac{2\pi}{T} \qquad \text{(temel frekans)}$$

dir.

2.2 Gama Fonksiyonu

Euler, $\Gamma(n)$ gama fonksiyonunu

$$\Gamma(n) = \int_0^{\infty} x^{n-1}\, e^{-x} dx; n > 0 \tag{2.2}$$

olarak tanımladı (Lavoie and diğ1976). Bu belirli integral, n nin pozitif değerleri için yakınsar; dolayısıyla n nin bir fonksiyonudur. Şimdi (2.2) formülünde $n = 1$ alınırsa

$$\Gamma(1) = \int_0^{\infty} x^0\, e^{-x} dx;\;\; n > 0 \tag{2.3}$$

elde edilir. Eğer, (2.2) formülünde n yerine $n + 1$ alınırsa

$$\Gamma(n+1) = \int_0^{\infty} x^n\, e^{-x} dx \tag{2.4}$$

olup bu integralde kısmi integrasyon metodunu kullanarak

$$u = x^n, dv = e^{-x} dx \quad ; \quad du = nx^{n-1} dx\;,\;\; v = -e^{-x}$$

olur ve bulunan değerler

$$\int udv = uv - \int vdu \tag{2.5}$$

formülünde yerine konulursa

$$\Gamma(n+1) = \int_0^{\infty} x^n\, e^{-x} dx = n\int_0^{\infty} x^{n-1} e^{-x} dx$$

olur.

Bu son eşitlikten

$$\Gamma(n+1)= n\Gamma(n)$$

elde edilir. Bu eşitlik, gama fonksiyonu için rekürsiyon formülüdür.

(2.5) formülünden

$$\Gamma(n) = \frac{\Gamma(n+1)}{n} \tag{2.6}$$

elde edilir. Eğer

$$-1 < n < 0 \tag{2.7}$$

ise $n+1$ pozitif olacağından $\Gamma(n)$ hesaplanabilir. (2.5) ve (2.2) den aşağıdaki eşitlikler yazılabilir.

n=1 için, $\Gamma(2)=1\Gamma(1)=1$

n=2 için, $\Gamma(3)=2\,\Gamma(2)=2.1$

n=3 için, $\Gamma(4)=3\,\Gamma(3)=3.2.1$

bu şekilde devam edilirse,

$$n = n \text{ için}, \quad \Gamma(n+1) = n! \tag{2.8}$$

elde edilir. Bu eşitlikte , n=0 yazılarak

$$0!= \Gamma(1)=1 \tag{2.9}$$

bulunur.

$$\pi(n) = \Gamma(\mathrm{n}+1) = n! \tag{2.10}$$

eşitliğine Gauss Pi fonksiyonu denir (Başar 1996). (2.6) dan ve yukardan $n = 0$ koyarak

$$\Gamma(0) = \frac{\Gamma(1)}{0} = \frac{1}{0} \tag{2.11}$$

$$\Gamma(-1) = \frac{\Gamma(0)}{-1} = \frac{\infty}{-1} = -\infty \tag{ 2.12}$$

bulunur. Eğer n=-1 ise (2.6) ve (2.11) den

$$\Gamma(-1) = \frac{\Gamma(0)}{-1} = \frac{\infty}{-1} = -\infty$$

bulunur.

(2.2) integralinde $x = y^2$ koyalım. ($dx = 2ydy$):

$$\Gamma(\mathrm{n}) = \int_0^\infty y^{2n-2}\, e^{-y^2} 2ydy = 2\int_0^\infty y^{2n-1}\, e^{-y^2} dy \qquad (2.13)$$

Bu ifadede $n = {}^{1}\!/_{2}$ koyalım :

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = 2\int_0^\infty e^{-y^2}\, dy = 2\,\frac{\sqrt{\pi}}{2} = \sqrt{\pi} \qquad (2.14)$$

$$\Gamma\left(-\frac{1}{2} + 1\right) = \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$$

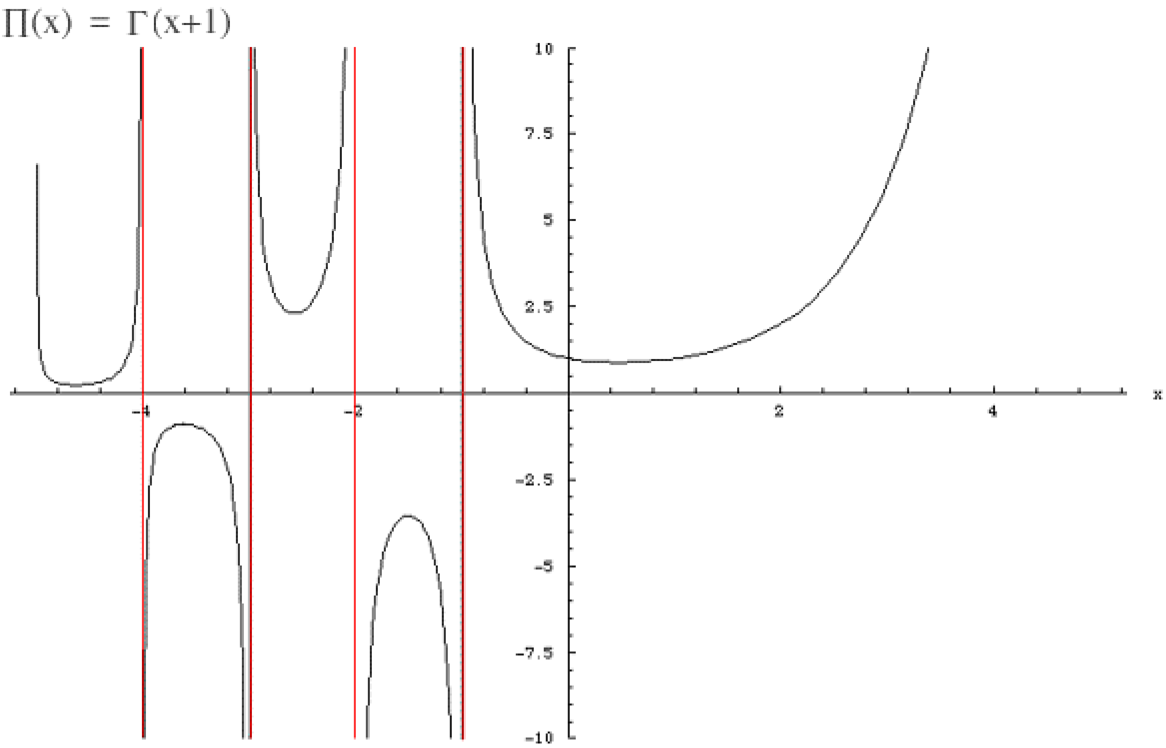
olduğundan

$$n = \frac{-1}{2} \;:\; \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{-1/2} = -2\,\Gamma(1/2) = -2\sqrt{\pi} \qquad (2.15)$$

ve (2.15) den

$$n = \frac{-3}{2} \;:\; \Gamma\left(\theta - \frac{3}{2}\right) = \frac{\Gamma\left(-\frac{1}{2}\right)}{-3/2} = -\frac{2}{3}(-2\sqrt{\pi}) = \frac{4\sqrt{\pi}}{3}$$

elde edilir; bu işleme böyle devam edilebilir.



Şekil 2.1: Gama fonksiyonu (Karcı 2015).

Şekil 2.1 de, gama fonksiyonunun sıfır civarındaki durumu gözükmektedir. Negatif tam sayı değerleri için gama fonksiyonu sonsuza gider. Tam sayı olmayan değerler için ise tanımlanmamıştır (Başar 1996).

2.3 Beta Fonksiyonu

$B(m,n)$ beta fonksiyonu aşağıdaki belirli integralle tanımlanır (Başar 1996).

$$B(m,n) = \int_0^1 x^{m-1}(1-x)^{n-1}dx \qquad m > 0\,,\ \ n > 0 \tag{2.16}$$

İntegralde

$$x = 1 - y\,, (dx = -dy) \tag{2.17}$$

koyalım.($x = 0$ $için$ $y = 1$, $x = 1$ $için$ $y = 0$):

$$B(m,n) = -\int_0^1 (1-y)^{m-1} y^{n-1} dy = \int_0^1 y^{n-1}(1-y)^{n-1}dy = B(n,m) \tag{2.18}$$

Yani B fonksiyonunda m yerine n ,n yerine m gelebilir.

(2.16) ifadesinde $x = sin^2\theta$ koyalım. ($dx = 2sin\theta\cos\theta d\theta$):

$$B(m,n) = 2\int_0^{\pi/2} (sin\theta)^{2m-1}\,(cos\theta)^{2n-1} d\theta \tag{2.19}$$

Burada $x = 0$ için $\theta = 0$, $x = 1$ için $\theta = \pi/2$ yazılmıştır.

Bu defa (2.16) formülünde $x = y/a$ yazalım.($dx = dy/a$):

$$B(m,n) = \frac{1}{a^{m+n-1}}\int_0^a y^{m-1}(a-y)^{n-1}\,dy \tag{2.20}$$

Şimdi de (2.16) ifadesinde $x = y/(1+y)$ koyalım. ($dx = dy/(1+y)^2$):

$$B(m,n) = \int_0^\infty (\frac{y}{1+y})^{m-1}(1-\frac{y}{1+y})^{n-1}\frac{dy}{(1+y)^2}$$

$$= \int_0^\infty \frac{y^{m-1}}{(1+y)^{m-1}}\frac{1}{(1+y)^{n-1}}\frac{dy}{(1+y)^2}$$

$$B(m,n) = \int_0^\infty \frac{y^{m-1}}{(1+y)^{m+n}}dy \tag{2.21}$$

dir (Kalın 2012).

2.4 Gama ve Beta Fonksiyonları Arasındaki İlişki

(2.12) formülünü tekrar yazalım.

$$\Gamma(n) = 2\int_0^\infty y^{2n-1}\,e^{-y^2}dy \tag{2.22}$$

şu ifadeyi de yazalım:

$$\Gamma(\mathrm{m}) = 2\int_0^\infty x^{2n-1}\,e^{-x^2}dx \tag{2.23}$$

Bu iki ifadeyi taraf tarafa çarpalım:

$$\Gamma(m)\,\Gamma(n) = 4\int_0^\infty\int_0^\infty x^{2m-1}y^{2n-1}\,e^{-(x^2}+y^{2)}dxdy \tag{2.24}$$

xy düzleminde polar koordinatlardaki elemanını yazalım.

$$x = rcos\theta \quad , \quad y = rsin\theta \quad , \quad dxdy = rdrd\theta$$

Bunları yerlerine koyalım ($x^2 + y^2 = r^2(cos^2\theta + sin^2\theta) = r^2$ ve $y/x = tan\theta$ dan $y = 0$ için $\theta = \pi/2$ yazarak):

$$\Gamma(m)\Gamma(n) = 4\int_0^{\pi/2}\int_0^{\infty} r^{2(m+n-1)} cos\theta^{2m-1} sin\theta^{2n-1}\, e^{-r^2} rdrd\theta$$

$$= \int_0^{\pi/2} cos\theta^{2m-1}\, sin\theta^{2n-1} d\theta \int_0^{\infty} r^{2(m+n-1)}\, e^{-r^2} dr$$

(2.20) yi kullanalım (m ile n yer değiştirebilir):

$$\Gamma(m)\,\Gamma(n) = B(m,n).2)\int_0^{\infty} r^{2(m+n-1)}\, e^{-r^2} dr$$

(2.24)'e göre

$$2\int_0^{\infty} r^{2(m+n-1)}\, e^{-r^2} dr = \Gamma(\mathrm{m+n})$$

elde edilir. (2.24) de ki m yerine burada $m + n$ geldi). Bunu yerine koyalım: Buradan

$$B(m,n) = \frac{\Gamma(m) + \Gamma(n)}{\Gamma(m+n)} \tag{2.25}$$

elde edilir. Bu ifade bazı belirli integrallerin kullanılmasında çok faydalıdır (Rainville 1973).

2.5 Genişletilmiş Gama Fonksiyonu

x in pozitif değerleri için tanımlanan gama fonksiyonu negatif x değerleri için de tanımlanabilmektedir. Yani $r(x)$, tüm reel sayılara genişletilebilir.

$$r(x + 1) = xr(x)$$

özelliğini kullanarak negatif x değerleri için $r(x)$ değeri $-n < x < -n + 1$ ise $0 < x + n < 1$ olmak üzere

$$r(x) = \frac{r(x+n)}{x(x+1)(x+2)\dots(x+n-1)}$$

eşitliğinden hesaplanabilir. Buradan görülmektedir ki gama fonksiyonu sıfır ve negatif tamsayılar için sınırsızdır. Yani, değeri sonsuzdur.

Faktöriyel özelliği tüm pozitif x değerleri için bir anlam ifade etmektedir.Ancak negatif x ler için aynı şey söylenemez. Çünkü x in negatif tamsayılara yakın değerleri için $r(x)$ ler pozitif ve negatif değerler alarak sınırsız şekilde büyümektedir (Lavoie and diğ. 1976).

2.6 Kompleks Değişkenli Gama Fonksiyonu

Gama fonksiyonunun tanımındaki genelleştirilmiş integral ifadesinde x yerine z alarak, bu fonksiyon kompleks düzleme genişletilebilir. Yani $z \in C$ olmak üzere,

$$r(z) = \int_0^\infty t^{z-1}e^{-t}dt \quad ; \qquad \mathcal{R}ez > 0$$

için yakınsaktır. $r(z+1) = zr(z)$ ve

$$r(z) = \frac{r(z+1)}{z} = \frac{r(z+m)}{z(z+1)(z+2)\dots(z+m-1)}, \qquad m = 1,2,3,\dots$$

özellikleri burada da geçerliliğini korumaktadır. Bu son eşitlikten görülmektedirki, gama fonksiyonu kompleks düzlemin negatif tamsayılara karşılık gelen noktalarında ve $z = 0$ da birer kutuba sahiptir (Rainville 1973).

2.7 Hata Fonksiyonu

$x \in \mathbb{R}$ için

$$Erf(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x e^{-t^2}dt \qquad (2.26)$$

olarak tanımlanır. Hata fonksiyonu tümleyeni

$$Erf_c(x) = 1 - Erf(x)$$

ile gösterilir. (2.26) nın bir sonucu olarak $Erf(0) = 0$ ve $Erf(\infty) = 1$ dir (Rainville 1973).

2.8 Mittag-Lefler Fonksiyonu

Mittag-Lefler fonksiyonu e^x üstel fonksiyonunu bir genelleştirmesi olup kesirli türevlerin hesap edilmesi için önemlidir. Bir ve iki parametreli Mittag-Lefler fonksiyonunun gösterimi

$$E_\alpha(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)} \ , \ \ \alpha > 0 \tag{2.27}$$

$$E_{\alpha,\beta}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{(\Gamma \alpha k + \beta)} \quad \alpha > 0, \qquad \beta > 0 \tag{2.28}$$

kuvvet serisi olarak tanımlanır. (2.27) de ki seri (2.28) deki serinin bir genelleştirmesidir. (2.28) de verilen bir tanımın sonucu olarak,

$$E_{\alpha,\beta}(x) = \frac{1}{\Gamma(\beta)} + xE_{\alpha,\alpha+\beta}(x) \tag{2.29}$$

$$E_{\alpha,\beta}(x) = \beta E_{\alpha,\beta+1}(x) + \alpha x \frac{d}{dx} E_{\alpha,\beta+1}(x) \tag{2.30}$$

yazılır. (2.30) eşitliğinden

$$\frac{d}{dx} E_{\alpha,\beta+1}(x) = \frac{1}{\alpha x}\left[E_{\alpha,\beta}(x)\right] - \beta E_{\alpha,\beta+1}(x)$$

dır. β yerine $\beta - 1$ alınırsa

$$\frac{d}{dx} E_{\alpha,\beta}(x) = \frac{1}{\alpha x}\left[E_{\alpha,\beta-1}(x) - (\beta - 1)\right]E_{\alpha,\beta}(x) \tag{2.31}$$

olur. Şimdi (2.29) eşitliğinin ispatını yapalım. Bunun için (2.28) yardımıyla

$$E_{\alpha,\beta}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)} = \sum_{k=-1}^{\infty} \frac{x^{k+1}}{\Gamma(\alpha k(\alpha + \beta))}$$

$$= \sum_{k=-1}^{\infty} x \frac{x^k}{\Gamma\big(\alpha k(\alpha+\beta)\big)} = \frac{1}{\Gamma(\beta)} + x \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{\Gamma\big(\alpha k(\alpha+\beta)\big)}$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\beta)} + xE_{\alpha,\alpha+\beta}(x)$$

elde edilir. Burada $E_{\alpha,\beta}(0) = 1$ dir. α ve β nın bazı özel değerleri için Mittag-Lefler fonksiyonu bilinen bazı özel fonksiyonlara indirgenir. Örneğin;

$$E_{1,1}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{\Gamma(k+1)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = e^x$$

$$E_{1,\frac{1}{2}}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{\Gamma(\frac{k}{2}+1)} = e^{x^2} Erf_c(-x)$$

$$E_{1,2}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{\Gamma(k+2)} = \frac{1}{x} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{k+1}}{(k+1)!} = \frac{e^x - 1}{x}$$

dır (Lavoie 1976).

2.9 Mellin-Ross Fonksiyonu

Mellin-Ross fonksiyonu e^{at} nin kesirli integrali bulunduğu zaman ortaya çıkmıştır.

Bu fonksiyon tam olmayan gama ve Mittag-Lefler fonksiyonların ikisi ile ilişkilidir. Mellin-Ross fonksiyonu

$$E_t(v,a) = t^v e^{at} \Gamma^*(v,t)$$

şeklinde tanımlanır.

$$E_t(v,a) = t^v \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(at)^v}{\Gamma(k+v+1)} = t^v E_{1,v+1}(at)$$

olarak da yazabiliriz (Miller 1974).

2.10 Riemann-Liouville Kesirli Türevin Laplace Dönüşümü

Riemann-Liouville kesirli türevlerinin laplace dönüşümü, $a > 0$ olmak üzere

$$\mathcal{L}\{{}_{0}^{RL}D_t^{a} f(t); s\} = s^a F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^k [{}_{0}^{RL}D_t^{a-k-1} f(t)]_{t=0} \ , (n-1 < a < n)$$

ile verilir. Bununla birlikte $t = 0$ alt limitinde kesirli türevlerin limit değerlerinin fiziksel gösteriminin bulunmaması nedeniyle pratik olarak uygulanabilirliği sınırlıdır (Miller 1974).

2.11 Caputo Türevinin Laplace Dönüşümü

Caputo kesirsel türevinin laplace dönüşümü

$$\mathcal{L}\{{}_{0}^{C}D_t^{a} f(t); s\} = s^a F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{a-k-1} f^{(k)}(0), (n-1 < a < n)$$

ile verilir. Caputo kesirsel türevinin laplace dönüşümünün bu ifadesi $f(t)$ ve onun türevlerini içermektedir. Bu haliyle bazı fiziksel süreçlere uygulanması çok daha kolaydır. Örneğin, $f(0)$ başlangıç durumu, $f'(0)$ başlangıç hızı ve $f''(0)$ başlangıç ivmesi olabilir. Bununla birlikte lineer kesirli diferansiyel denklemlerin çözümünde de kullanışlı bir ifadedir (Lavoie ve diğ 1976).

2.12 Grünwald Letnikov Kesirli Türevinin Laplace Dönüşümü

$$0 < a < 1, \mathcal{L}\{{}_{0}^{GL}D_t^{a} f(t); s\} = s^a F(s)$$

ile verilen bağıntı Grünwald-Letnikov kesirli türevinin laplace dönüşümü olarak adlandırılır (Podlubny 1999).

3. BAZI TEMEL KAVRAMLAR

Şimdi n. mertebeden türevlerin

$$f(t), \frac{df(t)}{dt}, \frac{d^2f(t)}{dt^2}, \frac{d^3f(t)}{dt^3} \dots$$

sonsuz dizisini göz önüne alalım. Keyfi mertebeli diferansiyel düşüncesi, aslında tekrarlanan diferansiyelin bir genelleştirmesidir. Burada temel amaç, $\frac{d^n}{dt^n}$ sembolü ile gösterilen operatörün n tam sayı değerli parametresini, tam sayı olmayan bir p parametresi ile yer değiştirmektir. Dolayısıyla, kesirli türevlerin tanım ve özelliklerini incelemek gerekir (Dalir 2010).

3.1 Kesirli Türevlerin Elde Edilişi

$0 < a < 1$ olmak üzere $x > a$

$$f(x) = \frac{1}{\Gamma(a)} \int_a^x \varphi(t)(x-t)^a \tag{3.1}$$

şeklindeki Abel integral denklemi ele alınsın. Buradaki (3.1) de x yerine t, t yerine s yazılırsa

$$f(x) = \frac{1}{\Gamma(a)} \int_a^x \varphi(s)(t-s)^{a-1}\, ds \tag{3.2}$$

bulunur. Elde edilen bu (3.2) integralinin her iki yanı $(x-t)^{-a}$ ile çarpılarak a dan x e kadar integrali alındığında,

$$\int_a^x (x-t)^{-a} f(t)dt = \frac{1}{\Gamma(a)} \int_a^x \left[\int_a^t \varphi(s)(t-s)^{a-1} ds \right] (x-t)^{-a} ds$$

$$= \frac{1}{\Gamma(a)} \int_a^x \left[\int_a^t \varphi(s)(t-s)^{a-1}(x-t)^{-a} ds \right] dt$$

bulunur elde edilen bu eşitlikte Dirichlet formülü olarak bilinen

$$\int_a^b \int_a^x (f(x,y)dy)dx = \int_a^b \int_y^b (f(x,y)dx)dy \qquad (3.3)$$

eşitliği kullanılırsa;

$$\int_a^x (x-t)^{-a} f(t)dt = \frac{1}{\Gamma(a)} \int_a^x \varphi(s) \left[\int_s^x (t-s)^{a-1}(x-t)^{-a} dt \right] ds \qquad (3.4)$$

elde edilir. (3.4) ifadesinin sağ integralinin iç kısmında

$$t = s + \tau(x-s) \qquad , \qquad dt = (x-s)d\tau$$

değişken değiştirmesi yapılırsa;

$$\int_s^x (t-s)^{-a}(x-t)^{-a}\, dt = \int_0^1 (s+\tau(x-s)-s)^{a-1}\big(x-s-\tau(x-s)\big)^{-a}(x-s)d\tau$$

$$\int_0^1 \tau^{a-1}(1-\tau)^{-a} d\tau = \beta(a, 1-a) = \frac{\Gamma(a)\Gamma(1-a)}{\Gamma(1)}$$

olduğu görülür. Bu ifade (3.4) de yerine yazıldığında;

$$\int_a^x (x-t)^{-a} f(t)dt = \Gamma(1-a) \int_a^x \varphi(s)ds$$

$$\int_a^x \varphi(s)ds = \frac{1}{\Gamma(1-a)} \int_a^x (x-t)^{-a} f(t)dt$$

olur. Bu iki ifadenin her iki yanının x e göre türevi alınırsa;

$$\varphi(x) = \frac{1}{\Gamma(1-a)} \frac{d}{dx} \int_a^x (x-t)^{-a} \qquad (3.5)$$

bulunur. Elde edilen (3.5) ifadesine a ıncı mertebeden fractional ya da kesirli türev denir (Özen ve Öztürk 2004). Bu türeve Riemann-Liouville türevi de denir.

Tanım 3.1.1: $m, m < p < m+1$ şartını sağlayan bir tamsayı, f sürekli bir fonksiyon, $f^k(t)$, (k=1,2,…,m+1) türevleri ile $[a,t]$ kapalı aralığında sürekli olsun bu takdirde f fonksiyonunun $p.$ mertebeden Grünwald-Letnikov kesirsel türevi

$$ {}_{a}^{GL}D_t^p = \sum_{k=0}^{m} \frac{f^{(k)}(a)(t-a)^{-p+k}}{\Gamma(-p+k+1)} + \frac{1}{\Gamma(-p+k+1)} \int_a^t (t-\tau)^{m-p} f^{(m+1)}(\tau)d\tau \quad (3.6) $$

dır (Özen ve Öztürk 2004).

Tanım 3.1.2: f fonksiyonu her sonlu (a,t) aralığında sürekli ve integrallenebilir olsun. $m \in N, m-1 \leq p < m$ olmak üzere $t > a$ için reel bir f fonsiyonunun $p.$ mertebeden Riemann-Liouville kesirsel türevi

$$ {}_{a}^{RL}D_t^p = \frac{1}{\Gamma(m-p)} \frac{d^m}{dt^m} \int_a^t (t-\tau)^{m-p-1} f(\tau)d\tau \quad (3.7) $$

şeklinde tanımlanır (Özen ve Öztürk 2004).

Tanım 3.1.3: $m, m-1 < p < m$ olacak şekilde pozitif bir tamsayı, p herhangi bir pozitif sayı ve f fonksiyonu da m defa sürekli diferansiyellenebilir olsun. Bu takdirde f fonksiyonunun $p.$ mertebeden Caputo kesirsel türevi

$$ {}_{a}^{C}D_t^p = \frac{1}{\Gamma(m-p)} \int_a^t \frac{f^m(\tau)d\tau}{(t-\tau)^{p+1-m}} \quad (3.8) $$

ile tanımlanır.

$t \geq 0$ için $m+1$ sürekli türeve sahip $f(t)$ fonksiyonlarının bir sınıfı ele alınırsa bu takdirde tanım3.1.1 ile verilen Grünwald- Letnikov kesirsel türevi,Tanım 3.1.2 ile verilen Riemann-Liouville kesirsel türevine eşittir. Bununla birlikte aynı şartlar altında Caputo kesirsel türevi ile diğer iki yaklaşım arasında böyle bireşitlik söz konusu değildir. Şimdi Grünwald-Letnikov ve Riemann-Liouvilleyaklaşımlarının hangi şartlar altında eşit olduklarını gösteren bir teorem ifade edelim (Özen ve Öztürk 2004).

Teorem 3.1.4: $f(t)$ fonksiyonu $[a,\tau]$ aralığında $(n-1)$ defa sürekli diferansiyellenebilir ve $f^{(n)}(t)$ türevleri de $[a,\tau]$ aralığında integrallenebilir olsun. Bu takdirde her p $(0 < p < n)$ için ${}_{a}^{RL}D_t^p f(t)$ Riemann-Liouville türevi mevcuttur ve ${}^{GL}_{a}D^{p}_{t}f(t)$ Grünwald-Letnikov türevine eşittir.

Eğer $0 \leq m-1 \leq p < m \leq n$ ise bu takdirde $a < 1 < \tau$ için

$$ {}^{RL}_{a}D^{p}_{t} = {}^{GL}_{a}D^{p}_{t} = \sum_{j=0}^{m-1} \frac{f^{(j)}(a)(t-a)^{j-p}}{\Gamma(1+j-p)} + \frac{1}{\Gamma(m-p)} \int_{a}^{t} (t-\tau)^{m-p-1} f^{(m)}(\tau) d\tau $$

eşitliği sağlanır (Özen ve Öztürk 2004).

3.2 Kesirli Türevin Özellikleri

Kesirli türev alırken kullanacağımız özelliklerden bahsedelim.

3.2.1 Lineerlik Özelliği

Kesirli türevlerde tamsayı türevlere benzer bir lineer özelliğe sahiptir.

$$ D^{P}(af(t)) + bD^{P}g(t) = aD^{P}f(t) + bD^{P}g(t) $$

Bu özellik doğrudan Grünwald-Letnikov tanımından

$$ D^{P}(af(t)) + bD^{P}g(t) = \lim_{\substack{h \to 0 \\ nh = t-a}} h^{-p} \sum_{r=0}^{n} (-1)^{r} \binom{p}{r} (af(t-rh) + bg(t-rh)) $$

$$ = a \lim_{\substack{h \to 0 \\ nh = t-a}} h^{-p} \sum_{r=0}^{n} (-1)^{r} \binom{p}{r} f(t-rh) + $$

$$ b \lim_{\substack{h \to 0 \\ nh = t-a}} h^{-p} \sum_{r=0}^{n} (-1)^{r} \binom{p}{r} f(t-rh) $$

$$ = a\,{}^{GL}_{a}D^{p}_{t}f(t) + b\,{}^{GL}_{a}D^{p}_{t}g(t) $$

olduğu görülebilir. Aynı şekilde p. dereceden $(k-1 < p < k)$ Riemann-Liouville kesirli türevleri için

$$ D^{P}\big(af(t)\big) + bD^{P}g(t) = \frac{1}{\Gamma(k-p)} \frac{d^{k}}{dt^{k}} \int_{a}^{t} (k-\tau)^{k-p-1} (af(\tau) + bg(\tau)) d\tau $$

$$= \frac{\mathrm{a}}{\Gamma(\mathrm{k-p})}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt^k}}\int_a^t (k-\tau)^{k-p-1} f(\tau)d\tau +$$

$$\frac{\mathrm{b}}{\Gamma(\mathrm{k-p})}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt^k}}\int_a^t (k-\tau)^{k-p-1} g(\tau)d\tau$$

$$= a\,{}_{a}^{RL}D_t^p f(t) + b\,{}_{a}^{RL}D_t^p g(t)$$

lineerlik özelliği doğrulanabilir (Miller ve Ross 1974).

3.2.2 Homojen Olma Özelliği

Differintegrallerin homojen olma özelliği

$${}_{a}^{RL}D_t^p C[f(t)] = C\left[{}_{a}^{RL}D_t^p f(t)\right]$$

ile verilir. Burada C herhangi bir sabittir (Miller and Ross 1974).

3.2.3 Kesirli Türevlerin Leibniz Kuralı

Eğer $f(t)$ ve $g(t)$ fonksiyonlarının türevi $[a, t]$ aralığında sürekliyseler

$${}_{a}^{RL}D_t^p\big(g(t)f(t)\big) = \sum_{k=0}^{\infty} g^k t_{\propto} \tbinom{p}{r}\ {}_{a}^{RL}D_t^p$$

ifadesi Leibniz kuralı olarak adlandırılır. Leibniz kuralı özellikle kesirli türevi bilinen bir fonksiyon ile polinomun çarpımının kesirli türevini hesaplamada çok kullanışlıdır (Podlubny 1999).

3.2.4 Kesirli Türevlerin Bileşkesi

Tam sayı mertebeden türevler ile kesirli türevlerin bileşkesi; $\frac{d^n}{dt^n}$ tam sayı mertebeden türev, ${}_{a}^{RL}D_t^p$ kesirli türev ve $f^k(a)$=0 ($k = 0, 1, 2, \ldots$) olmak üzere

$$\frac{d^n}{dt^n} = {}_{a}^{RL}D_t^p\ \left(\frac{d^n}{dt^n}\right) = {}_{a}^{RL}D_t^{p+n} f(t)$$

eşitliği sağlanır.

3.2.5 Birleşme özelliği

İki kesirli türevin birleşimi; $0 \le m \le p \le m+1$ ve $0 \le n \le q \le n+1$ ve $f(t); f^n(a) = 0,\ (k = 0, 1, 2, \dots)$ olmak üzere ${}_a^{RL}D_t^p$ ve ${}_a^{RL}D_t^q$ kesirli türevlerinin birleşimi

$$ {}_a^{RL}D_t^q\left({}_a^{RL}D_t^p\, f(t)\right) = {}_a^{RL}D_t^p\left({}_a^{RL}D_t^q f(t)\right) = {}_a^{RL}D_t^{p+q} f(t) $$

dir.

Bir fonksiyonun kesirli türevi: $\propto=\propto_1+\propto_2+\propto_3+\cdots+\propto_n$ olmak üzere $D^{\propto} = D^{\propto_1+\propto_2+\propto_3+\cdots+\propto_n} f(t) = D^{\propto_1} D^{\propto_2} D^{\propto_3} \dots D^{\propto_n} f(t)$ dir (Miller and Ross 1974).

3.3 Kesirli Türev ve Adi Türev Arasındaki Farklar

1) Kesirli türevi adi türevden ayıran en belirgin özellik, kesirli türev alırken özel fonksiyonlardan (Gama, Beta, Mittag- Lefler, Mellin-Ross, hata fonksiyonu…) yararlanırız.

2) Adi türevde sabitin türevi her zaman sıfırdır fakat kesirli türevde sabitin türevi sıfırdan farklı yani bire yakın bir değer olarak bulunur.

ÖRNEK 3.3.1: $f(x) = x$ fonksiyonunun 1/2. mertebeden kesirli türevini bulalım.

$0 \le \frac{1}{2} \le 1 \quad n = 1$

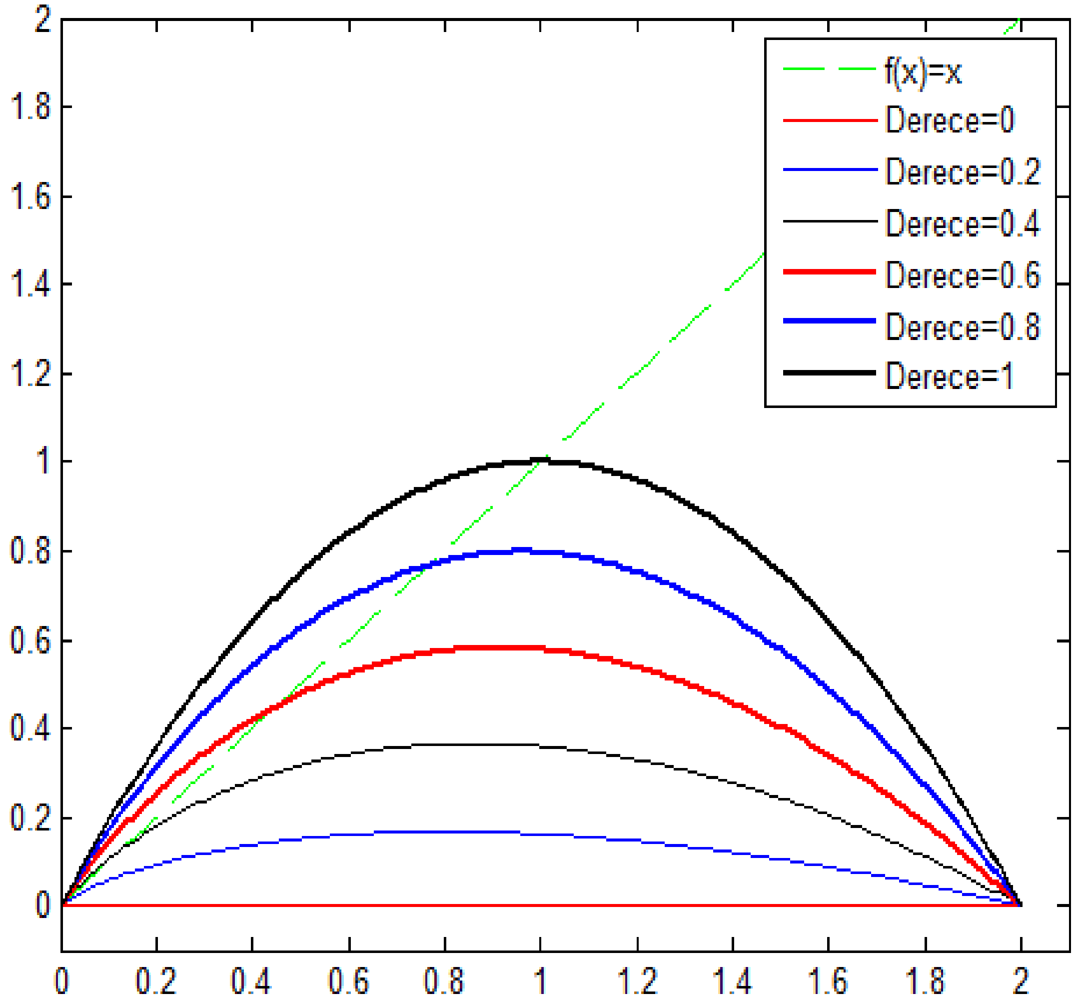
$$ \frac{d^{\frac{1}{2}}x}{dx^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{\Gamma(1-\frac{1}{2})} \frac{d}{dx} \int_0^x \frac{t dt}{(x-t)^{1-1+\frac{1}{2}}} $$

$$ \frac{d^{\frac{1}{2}}x}{dx^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{\Gamma(1-\frac{1}{2})} = \int_0^x \frac{t dt}{(x-t)^{\frac{1}{2}}} $$

$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}$ olduğunu biliyoruz.

$$ \frac{d^{\frac{1}{2}}x}{dx^{\frac{1}{2}}} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} x^{\frac{1}{2}} $$

elde ederiz.

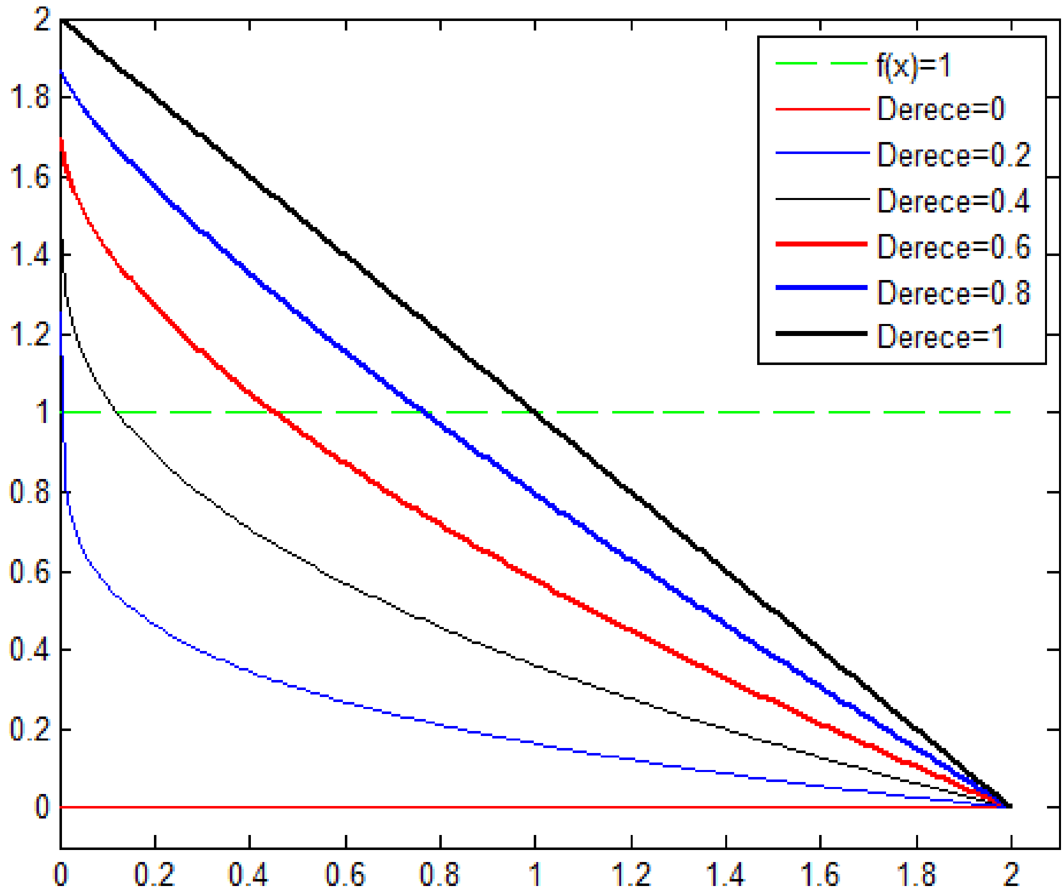


Şekil 3.1: $f(x) = x$ fonksiyonunun grafiği (Karcı 2015).

ÖRNEK 3.3.2: $f(x) = 1$ fonksiyonun 2/3. mertebeden kesirli türevini hesaplayalım. Riemann-Liouville tanımına göre

$$ {}_{a}^{RL}D_t^{\propto} = \frac{1}{\Gamma(n-\propto)}(\frac{d}{dt})^n \int_a^t \frac{f(\gamma)}{(t-\gamma)^{\propto-n+1}} = {}_{a}^{RL}D_t^{\frac{2}{3}} f(t) $$

$$ = \frac{1}{\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)}(\frac{d}{dt})^n \int_a^t \frac{c d\gamma}{(t-\gamma)^{2/3}} = \frac{1}{\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)}\left(-\frac{1}{(t-a)^{2/3}}\right) \neq 0 $$



Şekil 3.2: $f(x) = 1$ fonksiyonunun Riemann-Liouville kesir dereceli türevleri (Karcı 2015).

ÖRNEK 3.3.3: $f(t) = t^2$ fonsiyonunu göz önüne alalım. $p = \frac{1}{2}$ ve $p = \frac{3}{2}$ için

(p mertebe) bu fonksiyonun Grünvald-Letnikov kesirsel türevlerini hesaplayalım.

a) $p = \frac{1}{2}$ için Tanım 3.1.1 dikkate alınırsa $m = 0$, $m < p < p + 1$ şartını bir tam sayı olmalıdır. Ayrıca $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$ olduğundan

$$ {}_a^{GL}D_t^p = \sum_{k=0}^{m} \frac{f^{(k)}(a)(t-a)^{-p+k}}{\Gamma(-p+k+1)} + \frac{1}{\Gamma(-p+k+1)} \int_a^t (t-\tau)^{m-p} f^{(m+1)}(\tau) d\tau $$

$$ = \frac{f^{(0)}(a)(t-a)^{\frac{-1}{2}}}{\Gamma(\frac{-1}{2}+1)} + \frac{1}{\Gamma\left(\frac{-1}{2}+1\right)} \int_a^t (t-\tau)^{\frac{-1}{2}} f'(\tau) d\tau $$

$$ = \frac{a^2(t-a)^{\frac{-1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} + \frac{1}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} \int_a^t (t-\tau)^{\frac{-1}{2}} 2\tau d\tau $$

$$= \frac{a^2 (t-a)^{\frac{-1}{2}}}{\sqrt{\pi}} + \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{t-a} u^{\frac{-1}{2}} (t-u) du$$

$$= \frac{a^2 (t-a)^{\frac{-1}{2}}}{\sqrt{\pi}} + \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left[2t(t-a)^{\frac{1}{2}} - \frac{2}{3} (t-a)^{\frac{3}{2}} \right]$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left[a^2 (t-a)^{\frac{-1}{2}} + 4t(t-a)^{\frac{1}{2}} - \frac{4}{3} (t-a)^{\frac{3}{2}} \right]$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left[\frac{a^2}{(t-a)^{\frac{1}{2}}} + 4t(t-a)^{\frac{1}{2}} - \frac{4}{3} (t-a)^{\frac{3}{2}} \right]$$

$$= \frac{3a^2 + 12t(t-a) - 4(t-a)^2}{3(t-a)^{\frac{1}{2}} \sqrt{\pi}} = \frac{8t^2 - a^2 - 4at}{3(t-a)^{\frac{1}{2}} \sqrt{\pi}}$$

$p = \frac{3}{2}$ olsun $m, , m < p < p+1$ şartını sağlayacağından $m = 1$ dir.

$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$ ve $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$ olduğu dikkate alınırsa

$${}_{a}^{GL}D_t^p = \sum_{k=0}^{m} \frac{f^{(k)}(a)(t-a)^{-p+k}}{\Gamma(-p+k+1)} + \frac{1}{\Gamma(-p+k+1)} \int_a^t (t-\tau)^{m-p} f^{(m+1)}(\tau) d\tau$$

$$= \sum_{k=0}^{1} \frac{f^{(k)}(a)(t-a)^{-\frac{3}{2}+k}}{\Gamma\left(-\frac{3}{2}+k+1\right)} + \frac{1}{\Gamma\left(-\frac{3}{2}+k+1\right)} \int_a^t (t-\tau)^{1-\frac{3}{2}} f''(\tau) d\tau$$

$$= \frac{f^{(0)}(a)(t-a)^{\frac{-3}{2}}}{\Gamma\left(-\frac{1}{2}\right)} + \frac{f'(a)(t-a)^{\frac{-1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} + \frac{1}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} \int_a^t (t-\tau)^{\frac{-1}{2}} 2 d\tau$$

$$= \frac{a^2 (t-a)^{\frac{-3}{2}}}{-2\sqrt{\pi}} + \frac{2a(t-a)^{\frac{-1}{2}}}{\sqrt{\pi}} + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left[4(t-a)^{\frac{1}{2}} \right]$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left[\frac{-a^2 (t-a)^{\frac{-3}{2}}}{2} + 2a(t-a)^{\frac{-1}{2}} + 4(t-a)^{\frac{1}{2}} \right]$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}}\left[\frac{-a^2}{2(t-a)^{\frac{3}{2}}} + \frac{2a}{(t-a)^{\frac{1}{2}}} + 4(t-a)^{\frac{1}{2}}\right]$$

$$= \frac{-a^2 + 4a(t-a) + 8(t-a)^2}{2(t-a)^{\frac{3}{2}}\sqrt{\pi}} = \frac{8t^2 + 3a^2 - 12at}{2(t-a)^{\frac{3}{2}}\sqrt{\pi}}$$

elde edilir (Özen ve Öztürk 2004).

ÖRNEK 3.3.4: $f(t) = t^2$ fonksiyonu göz önüne alınırsa $p = \frac{1}{2}$ ve $p = \frac{3}{2}$ için Riemann-Liouville kesirsel türevlerini hesaplayalım.

a)$p = \frac{1}{2}$ için Tanım 3.1.1 dikkate alınırsa $m, m-1 \leq p \leq m$ şartını sağlayan bir tam sayı olacağından $m = 1$ dir.

Böylece $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$ olduğu gözönüne alınarak

$${}^{RL}_{a}D^{p}_{t} = \frac{1}{\Gamma(m-p)}\frac{d^m}{dt^m}\int_a^t (t-\tau)^{m-p-1} f(\tau)d\tau$$

$$= \frac{1}{\Gamma\left(1-\frac{1}{2}\right)}\frac{d}{dt}\int_a^t (t-\tau)^{1-\frac{1}{2}-1}\tau^2 d\tau$$

$$= \frac{1}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}\frac{d}{dt}\int_a^t (t-\tau)^{-\frac{1}{2}}\tau^2 d\tau = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\frac{d}{dt} = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\frac{d}{dt}\int_0^{t-a} u^{-\frac{1}{2}}(t-u)^2 du$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}}\frac{d}{dt}\int_0^{t-a} (t^2 u^{-\frac{1}{2}} - 2tu^{\frac{1}{2}} + u^{\frac{3}{2}})du$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}}\frac{d}{dt}\int_0^{t-a} (2t^2(t-a)^{\frac{1}{2}} - \frac{4t}{3}(t-a)^{\frac{3}{2}} + \frac{2}{5}(t-a)^{\frac{5}{2}})du$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}}\left[2t(t-a)^{\frac{1}{2}} + t^2(t-a)^{\frac{-1}{2}} - \frac{1}{3}(t-a)^{\frac{3}{2}}\right]$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}}\left[2t(t-a)^{\frac{1}{2}} + \frac{t^2}{(t-a)^{\frac{1}{2}}} - \frac{1}{3}(t-a)^{\frac{3}{2}}\right]$$

$$= \frac{6t(t-a) + 3t^2 - (t-a)^2}{3(t-a)^{\frac{1}{2}}\sqrt{\pi}} = \frac{8t^2 - a^2 - 4at}{3(t-a)^{\frac{1}{2}}\sqrt{\pi}}$$

bulunur.

b) $p = \frac{3}{2}$ alınırsa Tanım 3.1.2 den $m = 2$ olduğu görülür. Buradan fonksiyonun $p = \frac{3}{2}$ mertebeli Riemann-Liouville kesirsel türevi

$$ {}_{a}^{RL}D_t^p = \frac{1}{\Gamma(m-p)} \frac{d^m}{dt^m} \int_a^t (t-\tau)^{m-p-1} f(\tau) d\tau $$

$$ = \frac{1}{\Gamma\left(2-\frac{3}{2}\right)} \frac{d^2}{dt^2} = \frac{1}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} \frac{d^2}{dt^2} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{d^2}{dt^2} \int_a^{t-a} u^{\frac{-1}{2}} (t-u)^2 du $$

$$ = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{d^2}{dt^2} \left[2t^2 (t-a)^{\frac{1}{2}} - \frac{4t}{3} (t-a)^{\frac{3}{2}} + \frac{2}{5} (t-a)^{\frac{5}{2}} \right] $$

$$ = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{d^2}{dt^2} \left[t^2 (t-a)^{\frac{-1}{2}} - 2t (t-a)^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{3} (t-a)^{\frac{3}{2}} \right] $$

$$ = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{d^2}{dt^2} \left[t^2 (t-a)^{\frac{-1}{2}} - 2t (t-a)^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{3} (t-a)^{\frac{3}{2}} \right] $$

$$ = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{d^2}{dt^2} \left[-\frac{t^2}{2} (t-a)^{\frac{3}{2}} + 3t (t-a)^{\frac{-1}{2}} + \frac{3}{2} (t-a)^{\frac{1}{2}} \right] $$

$$ = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left[-\frac{t^2}{2(t-a)^{\frac{3}{2}}} + \frac{3t}{(t-a)^{\frac{1}{2}}} + \frac{3}{2} (t-a)^{\frac{1}{2}} \right] $$

$$ = \left[\frac{3(t-a)^2 + 6t(t-a)^{\frac{1}{2}} - t^2}{2(t-a)^{\frac{3}{2}} \sqrt{\pi}} \right] $$

$$ = \frac{8t^2 - a^2 - 12at}{3(t-a)^{\frac{3}{2}} \sqrt{\pi}} $$

olarak hesaplanır (Özen ve Öztürk 2004).

ÖRNEK 3.3.5: $f(t) = t^2$ fonksiyonunu gözönüne alalım. $p = \frac{1}{2}$ ve $p = \frac{3}{2}$ alalım ve fonksiyonun Caputo kesirsel türevlerini hesaplayalım.

a) Tanım 3.3.3 dikkate alınırsa $m = 1$ dir. Çünkü $m, m-1 < p < m$ şartını sağlayan bir tamsayı olmalıdır. O halde $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$ olduğu dikkate alınarak

$$ {}_a^C D_t^p = \frac{1}{\Gamma(m-p)} \int_a^t \frac{f^m(\tau)d\tau}{(t-\tau)^{p+1-m}} = \frac{1}{\Gamma\left(1-\frac{1}{2}\right)} = \frac{2}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} $$

$$ = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\left[2t(t-a)^{\frac{1}{2}} - \frac{2}{3}(t-a)^{\frac{3}{2}}\right] = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\left[2t(t-a)^{\frac{1}{2}} - \frac{2}{3}(t-a)^{\frac{3}{2}}\right]\frac{(t-a)^{\frac{1}{2}}}{(t-a)^{\frac{1}{2}}} $$

$$ = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\left[\frac{6t(t-a) - 2t(t-a)^2}{3(t-a)^{\frac{1}{2}}}\right] = \frac{8t^2 - 4at - 4a^2}{3(t-a)^{\frac{1}{2}}\sqrt{\pi}} $$

elde edilir.

b) $p = \frac{3}{2}$ için Tanım 3.3.3 den $m = 2$ olduğu görülebilir. Burada $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$ olduğu gözönüne alınırsa

$$ {}_a^C D_t^p = \frac{1}{\Gamma(m-p)} \int_a^t \frac{f^m(\tau)d\tau}{(t-\tau)^{p+1-m}} $$

$$ = \frac{1}{\Gamma\left(1-\frac{3}{2}\right)} \int_a^t (t-\tau)^{2-\frac{3}{2}-1} f''(\tau)dt = \frac{1}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} \int_a^t (t-\tau)^{-\frac{1}{2}} 2\tau dt $$

$$ = \frac{4}{\sqrt{\pi}}(t-\tau)^{\frac{1}{2}} = \frac{8t^2 - 4at - 4a^2}{3(t-a)^{\frac{1}{2}}\sqrt{\pi}} $$

Örnek 3.3.1 ve Örnek 3.3.3 den hareketle Grünwald –Letnikov ve Riemann-Liouville kesirsel türevlerinin belirli şartlarda aynı sonuçları verdiğini söyleyebiliriz.Örnek 3.3.2 teoremin bir uygulaması olarak karşımıza çıkar. Örnek 3.1.1, Örnek 3.1.2 ve Örnek 3.3.3 ile birlikte değerlendirilirse Caputo kesirsel türevinin Grünwald-Letnikov ve Riemann-Liouville kesirsel türevlerinden farklı olduğunu görebiliriz. Şimdi de Riemann-Liouville ve Caputo kesirsel türevlerinin hangi şartlarda eşit olduğuna bakalım (Özen ve Öztürk 2004).

TEOREM 3.7.10: f fonksiyonu her sonlu (a,t) aralığında sürekli ve integrallenebilir, $m, m-1<p<m$ olacak şekilde pozitif bir tamsayı ve p herhangi bir pozitif sayı olmak üzere $f^{(k)}(t), (k=0,1,2,\ldots,m-1)$ türevleri de $[a,t]$ kapalı aralığında sürekli ve integrallenebilir olsun. Bu takdirde eğer $k=0,1,2,\ldots,m-1$ için $f^{(k)}(a)=0$ şartları sağlanırsa

$$ {}_{a}^{RL}D_t^{p} = {}_{a}^{C}D_t^{p} $$

dir (Özen ve Öztürk 2004).

ÖRNEK 3.7.11: $f(x)=x$ fonksiyonu için,

$\frac{d}{dx}\left({}_{a}^{RL}D_t^{\frac{1}{2}} f(x)\right) = {}_{a}^{RL}D_t^{1+\frac{1}{2}} f(x) = {}_{a}^{RL}D_t^{\frac{3}{2}} f(x)$ eşitliğinin doğruluğunu gösterelim.

ÇÖZÜM: $f(x)=x$ olduğuna göre önce $\frac{d}{dx}\left({}_{a}^{RL}D_t^{\frac{1}{2}} f(x)\right)$ hesaplanırsa,

$$ \frac{d^{\frac{1}{2}}x}{dx^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} \frac{d}{dx} \int_0^{\infty} \frac{tdt}{(x-t)^{\frac{1}{2}}} $$

$$ = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{d}{dx}\left[\frac{4}{3} x^{\frac{3}{2}}\right] = \frac{1}{\sqrt{\pi}} 2\sqrt{x} = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\sqrt{x} \frac{d}{dx}\left[\frac{2}{\sqrt{\pi}}\sqrt{x}\right] = \frac{1}{\sqrt{\pi x}} $$

buradan

$$ \frac{d}{dx}\left({}_{a}^{RL}D_t^{\frac{1}{2}} f(x)\right) = \frac{1}{\sqrt{\pi x}} $$

olarak elde edilir.

Diğer taraftan ${}_{a}^{RL}D_t^{\frac{3}{2}} f(x)$ hesaplanırsa

$$ \frac{d^{\frac{3}{2}}x}{dx^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} \frac{d^2}{dx^2} \int_0^{\infty} \frac{tdt}{(x-t)^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{d^2}{dx^2}\left[\frac{4}{3} x^{\frac{3}{2}}\right] = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{d}{dx}\left[\frac{1}{\sqrt{\pi}} 2\sqrt{x}\right] $$

ve böylece

$$ \frac{d^{\frac{3}{2}}x}{dx^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{\pi x}} $$

iki türevde de sonuç birbirine eşit oldu.

ÖRNEK 3.7.12: $f(t)=(t-a)^2$ fonksiyonu ele alalım. $p=\frac{1}{2}$ ve $p=\frac{3}{2}$ için bu fonksiyonun Riemann-Liouville kesirsel türevini hesaplayalım.

a) $p=\frac{1}{2}$ alınırsa Tanım 3.1.2 den $m=1$ olduğu görülür. Buradan fonksiyonun $p=\frac{1}{2}$ mertebeli kesirsel türevi alınırsa

$$
\begin{aligned}
{}_{a}^{RL}D_t^p f(t) &= \frac{1}{\Gamma(m-p)}\frac{d^m}{dt^m}\int_a^t (t-\tau)^{m-p-1} f(\tau)d\tau \\
&= \frac{1}{\Gamma\left(1-\frac{1}{2}\right)}\frac{d^m}{dt^m} = \frac{1}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}\frac{d}{dt} \\
&= \frac{1}{\sqrt{\pi}}\frac{d}{dt}\int_0^{t-a} u^{\frac{-1}{2}}(t-a-u)^2 du \\
&= \frac{1}{\sqrt{\pi}}\frac{d}{dt} = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\frac{d}{dt} = \frac{8}{3\sqrt{\pi}}(t-a)^{\frac{5}{2}}
\end{aligned}
$$

olarak hesaplanır.

b) $p=\frac{3}{2}$ için Tanım 3.3.2 dikkate alınırsa $m,\ m-1\le p<m$ şartını sağlayacağından $m=2$ dir. Böylece $p=\frac{3}{2}$ mertebeli Riemann-Liouville kesirsel türevi

$$
\begin{aligned}
{}_{a}^{RL}D_t^p f(t) &= \frac{1}{\Gamma(m-p)}\frac{d^m}{dt^m}\int_a^t (t-\tau)^{m-p-1} f(\tau)d\tau \\
&= \frac{1}{\Gamma\left(1-\frac{3}{2}\right)}\frac{d^2}{dt^2}\int_a^t (t-\tau)^{2-\frac{3}{2}-1}(\tau-a)^2 d\tau \\
&= \frac{1}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}\frac{d^2}{dt^2}\int_a^t (t-\tau)^{\frac{-1}{2}}(\tau-a)^2 d\tau \\
&= \frac{d^2}{dt^2}\int_0^{t-a} u^{\frac{-1}{2}}(t-a-u)^2 du \\
&= \frac{d^2}{dt^2}\int_0^{t-a} \left[u^{\frac{-1}{2}}(t-a)^2 - 2(t-a)u^{\frac{1}{2}} + u^{\frac{3}{2}}\right] du
\end{aligned}
$$

$= \frac{1}{\sqrt{\pi}}\frac{d^2}{dt^2} = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\frac{d^2}{dt^2}\left[\frac{16}{5}(t-a)^{\frac{5}{2}}\right] = \frac{4}{\sqrt{\pi}}(t-a)^{\frac{1}{2}}$ sonucuna ulaşılır

(Özen ve Öztürk 2004).

ÖRNEK 3.7.13: $f(t) = (t-a)^2$ fonksiyonu ele alalım. $p = \frac{1}{2}$ ve $p = \frac{3}{2}$ için bu fonksiyonun Caputo kesirsel türevini hesaplayalım.

a) $p = \frac{1}{2}$ alınırsa Tanım 3.3.3 den $m = 1$ olduğu görülür. O halde fonksiyonu $p = \frac{1}{2}$ mertebeli kesirsel türevi;

$$ {}_a^C D_t^p = \frac{1}{\Gamma(m-p)} \int_a^t \frac{f^m(\tau)d\tau}{(t-\tau)^{p+1-m}} = \frac{1}{\Gamma\left(1-\frac{1}{2}\right)} \int_a^t \frac{f'(\tau)d\tau}{(t-\tau)^{\frac{1}{2}+1-1}} $$

$$ = \frac{1}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} \int_a^t (t-\tau)^{\frac{-1}{2}} 2\ (\tau-a)d\tau $$

$$ = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_a^t (t-\tau)^{\frac{-1}{2}} 2\ (\tau-a)d\tau $$

$$ = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_a^{t-a} u^{\frac{-1}{2}} 2\ (t-a-u)du $$

$$ = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_a^{t-a} \left[u^{\frac{-1}{2}}(t-a) - u^{\frac{1}{2}}\right] du $$

$$ = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left[2(t-a)^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{3}(t-a)^{\frac{3}{2}}\right] = \frac{8}{3\sqrt{\pi}}(t-a)^{\frac{3}{2}} $$

b) Tanım 3.3.3 den $p = \frac{3}{2}$ için $m = 2$ olduğu dikkate alınırsa

$$ {}_a^C D_t^p = \frac{1}{\Gamma(m-p)} \int_a^t \frac{f^m(\tau)d\tau}{(t-\tau)^{p+1-m}} = \frac{1}{\Gamma\left(2-\frac{3}{2}\right)} \int_a^t \frac{f''(\tau)d\tau}{(t-\tau)^{\frac{3}{2}+1-2}} $$

$$ = \frac{1}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} \int_a^t (t-\tau)^{\frac{-1}{2}} 2\ (t-\tau)d\tau = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_a^t (t-\tau)^{\frac{-1}{2}} 2\ d\tau $$

$$ = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left[2(t-a)^{\frac{1}{2}}\right] = \frac{4}{\sqrt{\pi}}(t-a)^{\frac{1}{2}} $$

bulunur (Özen ve Öztürk 2004).

3.4 Bazı Pratik Kesirli Türev Alma Kuralları

Bazı fonksiyonların pratik türev alma kuralları vardır. Örneğin $f(x) = x^2$ nin türevi $f'(x) = 2x$ dir. Bu kuralları çoğaltabiliriz, bizim merak ettiğimiz acaba kesirli türevlerde de böyle pratik kurallar var mıdır? Adi türevde olduğu kadar olmasa da bazı fonksiyonların kesirli türevlerinin pratik kuralları vardır. Şimdi kesirli türev hakkındaki pratik kuralları gösterelim.

3.4.1 Polinom Fonksiyonların Kesirli Türevleri

Öncelikle x^p nin kesirli türevine bakalım daha sonra diğer polinomlara genelleyelim, daha önceden bildiğimiz gibi.

$$D^0(x^p) = x^p \ , \qquad D^1(x^p) = px^{p-1} \ , \qquad D^2(x^p) = p(p-1)x^{p-2} \ldots$$

$D^n(x^p) = p(p-1)(p-2)\ldots(p-n+1)x^{p-n}$ dir. Burada pay ve paydasını

$(p-n)!$ ile çarpar ve gerekli düzenlemeleri yaparsak.

$$D^n x^p = \frac{p(p-1)(p-2)\ldots(p-n+1)(p-n)(p-n-1)\ldots 1}{(p-n)(p-n-1)} x^{p-n}$$

$$= \frac{p!}{(p-n)!} x^{p-n}$$

sonucunu verir. Acaba kesirli türevlerde durum nasıl? Burada kesirli sayılar olduğu için Γ fonksiyonuna ihtiyacımız vardır. $\Gamma(p+1) = p!$ değerini gama daha önceden gama fonksiyonunun özelliklerinden bilindiği için yukarıdaki kuralı şu şekilde yazabiliriz.

$$D^n x^p = \frac{\Gamma(p+1)x^{p-n}}{\Gamma(p-n+1)}$$

Bu ifadenin kesirli formunu aşağıdaki biçimde yazılabilir.

$$D^{\propto} x^p = \frac{\Gamma(p+1)x^{p-a}}{\Gamma(p-a+1)}$$

Burada

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

fonksiyonuna genişletip terim terim türev alınırsa

$$D^{\propto} f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n D^{\propto} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(p-a+1)} x^{n-a}$$

bağıntısı elde edilir (Dalir 2010).

3.4.2 Üslü Fonksiyonların Kesirli Türevleri

$D^{\propto}$ kesirli türevi göstermek üzere a $D^{\propto}(e^{ax}) = a^{\propto}e^{ax}$ dir. Daha önceden bilindiği üzere $D^1(e^{ax}) = ae^{ax}$, $D^2(e^{ax}) = a^2e^{ax}$, $D^3(e^{ax}) = a^3e^{ax}$ ... dir. Demek ki fazla bir değişiklik yok bunu üstel bir Fourier serisinde $f(x)$ i genişletilebilir halegetirelim. Bu durumda

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$$

olur. Terim terim türevlendirme yaparsak

$$D^{\propto}f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (in)^{\propto} e^{inx}$$

ifadesi elde edilir (Dalir 2010).

3.4.3 Bazı Trigonometrik Fonksiyonların Kesirli Türevleri

Adi türevden bildiğimiz üzere her türev aldığımızda $sinx$ in grafiği $\frac{\pi}{2}$ kadar sola kayar böylece $sinx$ 'in n defa türevlendirilmesi $sinx$ in grafiğinin $n\frac{\pi}{2}$ sola kaymasına neden olur. Yani $D^n sinx = \sin(x + n\frac{\pi}{2})$ olur. Burada kesirli türev olursa da sonuç değişmez. $D^{\propto}sinx = \sin\left(x + \propto\frac{\pi}{2}\right), D^{\propto}cosx = cos\left(x + \propto\frac{\pi}{2}\right)$ olur. Daha önce verilen üstel fonksiyonlarla ilgili kurallardan şu çıkarılabilir.Euler'in $e^{ix} = cosx + isinx$ ifadesini kullanarak,

$$D^{\propto}e^{ix} = i^{\propto}e^{ix} = e^{i\pi\propto/2}e^{ix} = e^{i(x+(\pi/2)\propto)} = cos\left(x + \propto\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(x + \propto\frac{\pi}{2}\right)$$

olduğu görülür. Böylece bu kurallar sayesinde kesirli türev daha pratik hale gelebilir (Miller and Ross 1974).

ÖRNEK 3.4.4: $f(t) = t^5 - t^4 + 3t^2 + 2$ polinomunu ele alalım.

Bu polinomun $\frac{1}{2}$. mertebeden türevini hesaplarken kesirli türevin lineerlik özelliğinden yararlanarak fonksiyonların ayrı ayrı türevini alıp, bulduktan sonratoplama yapılarak sonuç elde edilir.

ÇÖZÜM: $f(t) = t^5$ alalım

$$D^{\alpha} t^{\mu} = \frac{\Gamma(\mu+1)}{\Gamma(\nu+\mu-m+1)} t^{\nu+\mu-m} \tag{3.9}$$

Yukarıdaki tanımdan $\mu = 5$, $\alpha = \frac{1}{2}$ dir. Kesirli türev tanımından $\nu = m - \alpha$ dır. Dolayısıyla (3.9) da bulduğumuz sonuç yerine

$$D^{\alpha} t^{\mu} = \frac{\Gamma(\mu+1)}{\Gamma(\mu-\alpha+1)} t^{\mu-\alpha}$$

yazılabilir. Burada $\mu = 5$ ve $\alpha = \frac{1}{2}$ yazılarak

$$D^{1/2} t^5 = \frac{\Gamma(5+1)}{\Gamma(5-\frac{1}{2}+1)} t^{5-\frac{1}{2}}$$

bulunur. Düzenlersek ve gamanın $\Gamma(n) = (n-1)!$ özelliğine göre Γ(6)=5! dir.

Gama tanımından $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$ dir.

$$\Gamma\left(\frac{9}{2}\right) = \frac{7}{2}\Gamma\left(\frac{7}{2}\right) = \frac{7}{2}\frac{5}{2}\Gamma\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{7}{2}\frac{5}{2}\frac{3}{2}\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{7}{2}\frac{5}{2}\frac{3}{2}\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$\Gamma\left(\frac{9}{2}\right) = \frac{135}{16}\sqrt{\pi}$$

$$D^{1/2} t^5 = \frac{5!}{\frac{9}{2}\frac{135}{16}} \sqrt{\pi} t^{9/2}$$

$$D^{1/2} t^5 = \frac{256}{63\sqrt{\pi}} t^{9/2}$$

sonucu elde edilir.

Şimdi $f(t) = t^4$ alalım $\mu = 5$ ve $\alpha = \frac{1}{2}$ dir. Buna göre,

$$D^{1/2} t^4 = \frac{\Gamma(5)}{\Gamma(\frac{7}{2}+1)} t^{4-\frac{1}{2}} = \frac{4!}{\frac{7}{2}\Gamma(\frac{7}{2})} = \frac{4!}{\frac{7}{2}\frac{5}{2}\frac{3}{2}\frac{1}{2}\sqrt{\pi}} t^{\frac{7}{2}}$$

$$D^{1/2} t^4 = \frac{128}{35\sqrt{\pi}}$$

bulunur.

$f(t) = t^2$ alalım. $\mu = 2$ ve $\alpha = \frac{1}{2}$ dir.

$$t^2 = \frac{\Gamma(3)}{\Gamma\left(\frac{3}{2}+1\right)} t^{2-\frac{1}{2}} = \frac{2!}{\frac{3}{2}\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)} t^{\frac{3}{2}} = \frac{2!}{\frac{3}{2}\frac{1}{2}\sqrt{\pi}} t^{\frac{3}{2}}$$

$$D^{1/2}t^2 = \frac{128}{3\sqrt{\pi}}t^{\frac{3}{2}}$$

bulunur.

$f(t) = 2$ ele alalım. $\mu = 0$ seçilirse (3.9) denkleminden

$$D^{\alpha}K = \frac{\Gamma(1)}{\Gamma(\nu - m + 1)}t^{\nu - m} \quad (\Gamma(1) = 0!)$$

$$D^{\alpha}K = \frac{K}{\Gamma(\nu - m + 1)}t^{\nu - m} \quad (3.10)$$

(3.10) a göre $K = 2$ dir. $\alpha = \frac{1}{2}$ dir.

(3.10) ı $\nu = m - \alpha$ ya göre düzenlersek

$$D^{\alpha}K = \frac{K}{\Gamma(-\alpha + 1)}t^{-\alpha}$$

olur. Buradan

$$D^{1/2}2 = \frac{2}{\Gamma(\frac{-1}{2} + 1)}t^{-1/2} = \frac{2}{\Gamma(\frac{1}{2})}t^{-1/2} = \frac{2}{\sqrt{\pi}}t^{-1/2}$$

bulunur. Böylece kesirli türevlerin lineerlik özelliğini kullanarak;

$$f(t) = t^5 - t^4 + 3t^2 + 2$$

polinomunun $1/2$. mertebeden kesirli türevi

$$\begin{aligned} D^{1/2} &= (t^5 - t^4 + 3t^2 + 2) \\ &= \frac{256}{63\sqrt{\pi}}t^{9/2} - \frac{128}{35\sqrt{\pi}}t^{7/2} + 3\frac{8}{3\sqrt{\pi}}t^{3/2} + \frac{2}{\sqrt{\pi}}t^{-1/2} \\ &= \frac{256}{63\sqrt{\pi}}t^{9/2} - \frac{128}{35\sqrt{\pi}}t^{7/2} + \frac{8}{\sqrt{\pi}}t^{3/2} + \frac{2}{\sqrt{\pi}}t^{-1/2} \end{aligned}$$

olarak elde edilir.

ÖRNEK 3.4.5: $3x^3 + 2x + e^x$ fonksiyonunun $1/2$. mertebeden türevini hesaplayınız.

ÇÖZÜM: Riemann-Liouville kesirli türev tanımına göre;

$$D^{1/2}(3x^3 + 2x + e^x) = 3D^{1/2}x^3 + 2D^{1/2}X + D^{1/2}e^x$$

Kesirli türevin lineerlik özelliğini kullanarak çözüm yapılırsa;

$$3D^{1/2}x^3 = 3\left(\frac{1}{\Gamma(n-q)}\frac{d^n}{dx^n}\int_0^x \frac{f(t)dt}{(x-t)^{1-n+q}}\right)$$

elde edilir.

$q = \frac{1}{2}$; $n = 1$ değerleri yerine yazılırsa;

$$= 3\left(\frac{1}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}\frac{d}{dx}\int_0^x \frac{tdt}{(x-t)^{1-1+\frac{1}{2}}}\right)$$

$$= 3\left(\frac{1}{\Gamma(\frac{1}{2})}\frac{d}{dx}\int_0^x \frac{tdt}{(x-t)^{\frac{1}{2}}}\right)$$

$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$ olduğundan;

$$= 3\frac{2}{\sqrt{\pi}}x^{1/2} = \frac{6}{\sqrt{\pi}}x^{1/2}$$

$$2D^{1/2}x = \frac{1}{\Gamma\left(1-\frac{1}{2}\right)}\frac{d}{dx}\int_0^x \frac{tdt}{(x-t)^{1-1+\frac{1}{2}}}$$

$$= 2\left(\frac{1}{\Gamma(\frac{1}{2})}\frac{d}{dx}\int_0^x \frac{tdt}{(x-t)^{\frac{1}{2}}}\right) = \frac{4}{\sqrt{\pi}}x^{1/2}$$

$$2D^{1/2}x = \frac{1}{\Gamma(n-q)}\frac{d^n}{dx^n}\int_0^x \frac{tdt}{(x-t)^{1-1+\frac{1}{2}}}$$

$n-1 < q < n$ olduğundan burada

$$f(t) = e^t\ , \qquad n = 1\ , \qquad q = \frac{1}{2}$$

bu veriler yerine yazılırsa;

$$\frac{d^{1/2}e^x}{dx^{1/2}} = \frac{1}{\Gamma(1-\frac{1}{2})}\frac{d}{dx}\int_0^x \frac{e^t dt}{(x-t)^{1-1+\frac{1}{2}}} = \frac{1}{\Gamma(\frac{1}{2})}\frac{d}{dx}\int_0^x \frac{e^t dt}{(x-t)^{\frac{1}{2}}}$$

olur.

$$\int_0^x \frac{e^t dt}{(x-t)^{\frac{1}{2}}} = e^x\sqrt{x}\operatorname{erf}(\sqrt{x})$$

dir. Bunun x e göre türevi alınırsa

$$\frac{d}{dx}e^x\sqrt{x}erf\sqrt{x} = \frac{1}{\sqrt{x}} + e^x\sqrt{\pi}erf\left(\sqrt{x}\right)$$

$$\frac{d^{1/2}e^x}{dx^{1/2}} = \frac{1}{\sqrt{x\pi}} + e^x erf\left(\sqrt{x}\right)$$

olarak bulunur. Kesirli türevin lineerlik özelliğinden yararlanarak ayrı ayrı türevini aldığımız fonksiyonları toplanır:

$$= \frac{24}{\sqrt{\pi}}x^{3/2} + \frac{4}{\sqrt{\pi}}x^{1/2} + \frac{1}{\sqrt{x\pi}} + e^x\operatorname{erf}(x)$$

böylece istenilen sonuç elde edilir.

4. KESİRLİ TÜREVİN GEOMETRİK VE FİZİKSEL YORUMU

Tamsayı mertebeden türev ve integralin geometrik yorumu basit bir şekilde tanımlanır. Fakat kesirsel mertebeden türev ve integralin geometrik yorumu kolay değildir. Bu çalışmada kesirsel mertebeden türev ve integralin basit bir yorumunu verdik ki bu yorum konunun uygulamasında kullanışlı olacaktır.

Bir polinom fonksiyonunun kesirli mertebeden türevleri aşağıdaki (4.1) formülü ile hesaplanabilir.

$$D^{\propto}\left[x^{\beta}\right] = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta+1-\propto)}\, x^{\beta-\propto} \tag{4.1}$$

ki burada $\propto$ türevin mertebesini gösterir ve $o < \propto < 1$ dir. (4.1) de ve kesirsel mertebeden türevin lineerlik özelliğinden,

$$f(x) = x^3 \text{ ve } g\,(x) = x^4 + x^3$$

fonksiyonunun $x = 2$ deki kesirsel türev degerlerini aşağıdaki (4.1) ve (4.2) de sırasıyla hesapladık.

Bu tanımları $f\,(x) = x^3$ fonksiyonunun türevlerine uygulayalım. Öncelikle $D^{1.0}f(x)$= 12 olduğunu belirtelim şimdi A_1 de x ekseninden geçen ve $B(2{,}0)$ da $P(2{,}8)$ noktasından x eksenine dik olarak çizilen $f_{1,0}$ teğetiyle Δ alanını buluruz. Bu Δ alanı P, A, B üçgeniyle sınırlıdır ve $\Delta P(\,A, B) = 2.6667$ dir.

$\propto = 1/2$ ve $x = 2$ için türevini hesaplayalım.

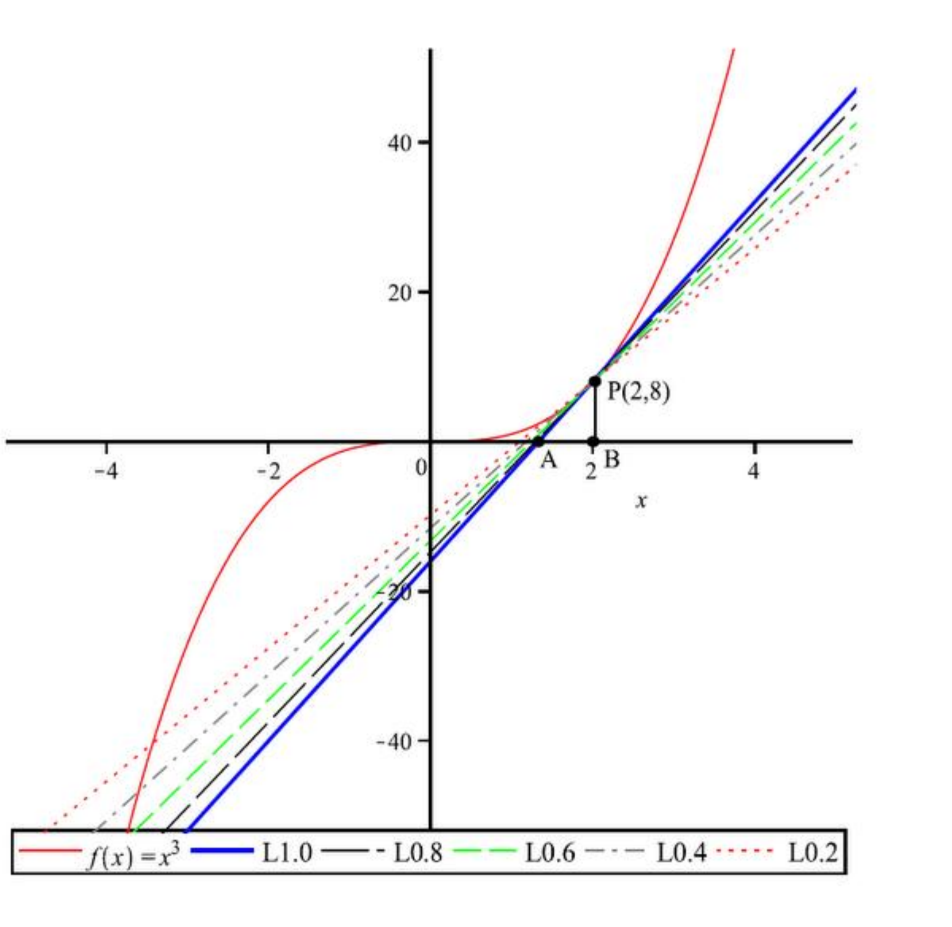
$$D^{\alpha}x^{\beta} = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta+1-\propto)}x^{\beta-\propto} \qquad 0 < \propto < 1$$

$$D^{1/2}x^3 = \frac{\Gamma(3+1)}{\Gamma(3+1-\frac{1}{2})}x^{3-1/2}$$

$$= \frac{3!}{\Gamma\left(\frac{7}{2}\right)} x^{5/2} = \frac{3!}{\Gamma\left(\frac{5}{2}+1\right)} x^{5/2} = \frac{3!}{\frac{5}{2}\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)} x^{5/2} = \frac{3!}{\frac{5}{2}\Gamma\left(\frac{3}{2}+1\right)} x^{5/2} = \frac{3!}{\frac{5}{2}\frac{3}{2}\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)} x^{5/2}$$

$$= \frac{3!}{\frac{5}{2}\frac{3}{2}\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)} x^{5/2} = \frac{6}{18\sqrt{\pi}} 2^{5/2} = 10{,}2228$$

elde edilir.



Şekil 4.1: $f(x) = x^3$ fonksiyonunun grafiği (Tavassoli 2013).

Benzer şekilde $P(2,8)$ den geçen $f_{0.1}$, $f_{0.2}$, ………….. $f_{0.9}$ teğetleriyle a $m_{0.1}$, $m_{0.2}$, ………, $m_{0.9}$ kesirsel türev değerlerini kullanarak bütün üçgenler oluşturulabilir.

Bu üçgenlerin alanı hesaplandı ve sonuçlar tablo (4.1) de gösterildi. Benzer şekilde $P(2,24)$ noktasında $g(x) = x^4 + x^3$ fonksiyonu için üçgenlerin alanları hesaplandı ve tablo 4.2 de verildi. Şimdi $g(x) = x^4 + x^3$ fonksiyonunun kesirli türevini inceleyelim.

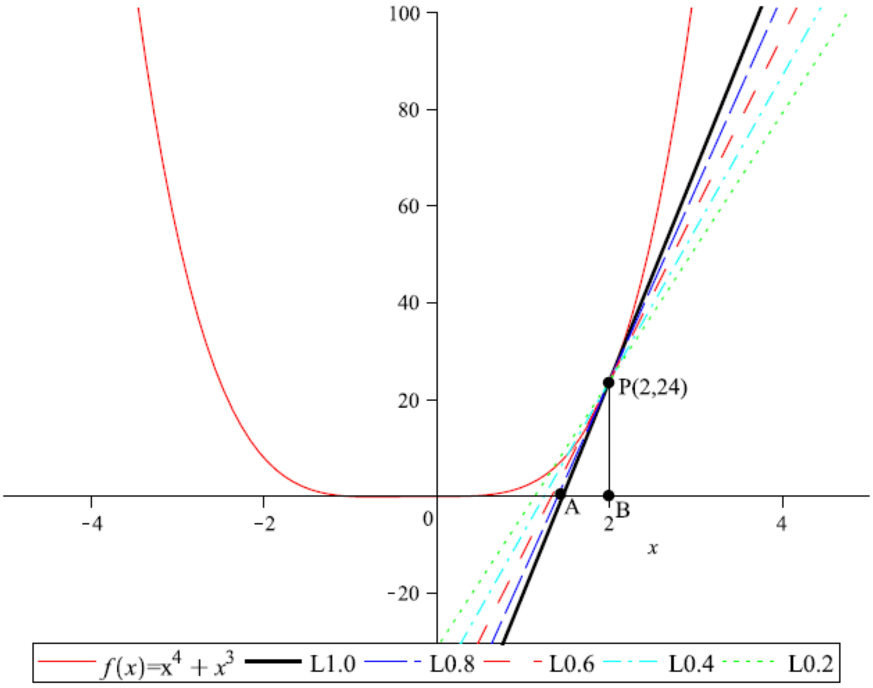
$$D^{\alpha}x^{\beta} = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta+1-\propto)}x^{\beta-\propto} \qquad 0 <\propto< 1$$

$$D^{1/2}x^4 = \frac{\Gamma(4+1)}{\Gamma\left(4+1-\frac{1}{2}\right)}x^{4-1/2} = \frac{4!}{\Gamma\left(\frac{9}{2}\right)}x^{7/2} = \frac{4!}{\Gamma\left(\frac{7}{2}+1\right)}x^{7/2}$$

$$= \frac{4!}{\frac{7}{2}\Gamma\left(\frac{7}{2}\right)}x^{7/2} = \frac{3!}{\frac{7}{2}\Gamma\left(\frac{5}{2}+1\right)}x^{7/2} = \frac{3!}{\frac{7}{2}\frac{5}{2}\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)}x^{7/2} = \frac{3!}{\frac{5}{2}\frac{3}{2}\frac{3}{2}\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}x^{7/2}$$

$$= \frac{6}{18\sqrt{\pi}}2^{7/2} = 10,2228$$

elde edilir.



Şekil 4.2: $g(x) = x^3 + x^4$ fonksiyonunun grafiği (Tavassoli 2013).

Şekil 4.1 ve 4.2 şunu gösterir 0.2, 0.4, 0.6 ve 0.8 mertebeden kesirli türevlerle oluşturulan üçgenlerle birlikte $f(x)$ ve $g(x)$ fonksiyonların grafiklerini gösterir.

Tablo 4.1 ve Tablo 4.2 $f(x)$ ve $g(x)$ fonksiyonlarının grafiklerinden şunu görürüz. Eğer kesirsel mertebeden türevin değeri artarsa o zaman üçgenlerin alanıazalır. Eğer kesirsel mertebeden türevlerin değeri azalırsa o zaman üçgenlerin alanı artar. Bu nedenle kesirsel mertebeden türev değerleri ile üçgenlerin alanlar ters orantılıdır.

	$x = 2$ $m = \tan 0$	θ=$\tan^{-1} m$	(Δ)
$D^{0.1}[f(x)]$	$m_{0.1} = 1.4530$	$\theta_{0.1} = 1.4530$	$\Delta PA_{0.1}B = 3.7865$
$D^{0.2}[f(x)]$	$m_{0.2} = 1.4589$	$\theta_{0.2} = 1.4589$	$\Delta PA_{0.2}B = 3.5948$
$D^{0.3}[f(x)]$	$m_{0.3} = 1.4642$	$\theta_{0.3} = 1.4642$	$\Delta PA_{0.3}B = 3.4231$
$D^{0.4}[f(x)]$	$m_{0.4} = 1.4690$	$\theta_{0.4} = 1.4690$	$\Delta PA_{0.4}B = 3.2698$
$D^{0.5}[f(x)]$	$m_{0.5} = 1.4732$	$\theta_{0.5} = 1.4732$	$\Delta PA_{0.5}B = 3.1333$
$D^{0.6}[f(x)]$	$m_{0.6} = 1.4769$	$\theta_{0.6} = 1.4769$	$\Delta PA_{0.6}B = 3.0124$
$D^{0.7}[f(x)]$	$m_{0.7} = 1.4802$	$\theta_{0.7} = 1.4802$	$\Delta PA_{0.7}B = 2.9062$
$D^{0.8}[f(x)]$	$m_{0.8} = 1.4831$	$\theta_{0.8} = 1.4831$	$\Delta PA_{0.8}B = 2.8136$
$D^{0.9}[f(x)]$	$m_{0.9} = 1.4856$	$\theta_{0.9} = 1.4856$	$\Delta PA_{0.9}B = 2.7339$
$D^{1.0}[f(x)]$	$m_{1.0} = 1.4877$	$\theta_{1.0} = 1.4877$	$\Delta PA_{0.1}B = 2.6667$

Tablo 4.1: $f(x)$ fonksiyonunun oluşturduğu üçgenlerin alanları (Tavassoli 2013)

Benzer şekilde $P(2,24)$ noktasında $g(x) = x^4 + x^3$ fonksiyonu için üçgenlerin alanları hesaplandı ve tablo 4.2 de verildi.

Kesirli Mertebeden Türevler	$x = 2$ $m = \tan 0$	θ=$\tan^{-1} m$	(Δ)
$D^{0.1}[g(x)]$	$m_{0.1} = 25.787$	$\theta_{0.1} = 1.5320$	$\Delta PA_{0.1}B = 11.1684$
$D^{0.2}[g(x)]$	$m_{0.2} = 27.642$	$\theta_{0.2} = 1.5346$	$\Delta PA_{0.2}B = 10.4185$
$D^{0.3}[g(x)]$	$m_{0.3} = 29.561$	$\theta_{0.3} = 1.5370$	$\Delta PA_{0.3}B = 9.7427$
$D^{0.4}[g(x)]$	$m_{0.4} = 31.535$	$\theta_{0.4} = 1.5391$	$\Delta PA_{0.4}B = 9.1328$
$D^{0.5}[g(x)]$	$m_{0.5} = 33.557$	$\theta_{0.5} = 1.5410$	$\Delta PA_{0.5}B = 8.5825$
$D^{0.6}[g(x)]$	$m_{0.6} = 35.617$	$\theta_{0.6} = 1.5427$	$\Delta PA_{0.6}B = 8.0860$
$D^{0.7}[g(x)]$	$m_{0.7} = 37.705$	$\theta_{0.7} = 1.5443$	$\Delta PA_{0.7}B = 7.6383$
$D^{0.8}[g(x)]$	$m_{0.8} = 39.807$	$\theta_{0.8} = 1.5457$	$\Delta PA_{0.8}B = 7.2349$
$D^{0.9}[g(x)]$	$m_{0.9} = 41.911$	$\theta_{0.9} = 1.5469$	$\Delta PA_{0.9}B = 6.8718$
$D^{1.0}[g(x)]$	$m_{1.0} = 44.000$	$\theta_{1.0} = 1.5481$	$\Delta PA_{0.1}B = 6.5455$

Tablo 4.2: $g(x)$ fonksiyonunun oluşturduğu üçgenlerin alanları (Tavassoli 2013).

Şekil 4.1 ve 4.2 şunu gösterir 0.2 , 0.4, 0.6 ve 0.8 mertebeden kesirli türevlerle oluşturulan üçgenlerle birlikte $f(x)$ ve $g(x)$ fonksiyonların grafiklerini gösterir. Tablo 4.1 ve Tablo 4.2 $f(x)$ ve $g(x)$ fonksiyonların grafiklerinden şunu görürüz.

Eğer kesirsel mertebeden türevlerin değeri azalırsa o zaman üçgenleri alanları artar. Bu nedenle kesirsel mertebeden türev değerleri ile üçgenlerin alanları ters orantılıdır.

$$D^{\propto}[f(x)] \propto \frac{1}{\Delta}$$

$$D^{\propto}[g(x)] \propto \frac{1}{\Delta}$$

$$D^{\propto}[f(x)]\Delta \propto D^{\propto}[g(x)]\Delta = sabit$$

Sonuç olarak kesirsel mertebeden türev ile karşılık gelen alanın çarpımı sabittir. Bu yüzden kesirsel mertebeden türev , özel bir noktadaki teğet doğrusuyla ve bu noktadan geçen dik doğruyla ve yukarıdan x ekseniyle çevrelenen üçgenin alanındaki değişimi verir. Alandaki değişim fiziksel bir özelliktir, bundan dolayı kesirli türevler ; ısıda , basınçta , gradiyent , divergence ve curl vs. gibi miktarlardaki değişimi ölçmek için kullanılır (Tavassoli 2013).

5. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu çalışmada kesirli türevin mevcut dört tanımından, özelliklerinden ve bu tanımların uygulama alanları karşılaştırılmalı olarak incelendi. Kesirli türev uygulamalarında kullanışlı ve sonuca daha kolay götüren kesirli türev tanımının hangisi olabileceği örneklerle açıklanmaya çalışıldı. Özel fonksiyonların kesirli türevdeki işlevleri anlatıldı.

Son bölüm olan dördüncü bölümde ise polinom fonksiyonlarında kesirli türevinin fiziksel geometrik ve yorumundan bahsedildi. Trigonometrik, üstel ,logaritmik vb. fonksiyonlarının da geometrik yorumu incelenerek farklı sonuçlar elde edilebilir.

6. KAYNAKLAR

Başar E., *Yüksek Matematik Cilt 2,* İstanbul: Birsen Yayınevi, 316-322, (1996).

Dalir M., "Applications of fractional calculus" *Applied Mathematical Sciences*, 4 (21), 1021-1032, (2010).

Erdoğan A., *Ortogonal Polinomlar ve Uygulama Alanları*, Nobel Yayıncılık, 74-109, (2011).

Kalın N., "Genelleştirilmiş Kesirli Türevler ve Kesirli İntegraller", Yüksek Lisans Tezi, *Afyon Kocatepe Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü*, Matematik Anabilim Dalı, Afyon, (2012).

Karcı A., "Kesir Dereceli Türevin Yeni Yaklaşım Özellikleri", *Müh. Mim. Fak. Der.*, 30 (3), 487-501, (2015).

Lavoie J. L., Osler T. J. and Tremblay R., "Fractional Derivatives and Special Functions", *SIAM Review*, 18 (2), 240-268, (1976).

Miller, K.S., Ross, B., *"An Introduction to the Fractional Calculus and Fractional Diferential Equations"*, New York :John Wiley & Sons, (1974).

Özen S. ve Öztürk İ., "Grünwald-Letnikov, Riemann-Liouville ve Caputo Kesirsel Türevleri Üzerine*", Kayseri Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Dergisi*, 20, 1-2, (2004).

Podlubny I., "Fractional Differential Equations", *Mathematics in Science and Engineering*, , 198, 1-2, (1999).

Rainville, E. D., *"Special Functions*", New York: The Macmillan Company, (1973).

Tavassoli, M.H., "The geometric and physical interpretation of fractional order derivatives of polynomial functions", *Differential Geometry-Dynamical Balkan*, 15,93-104, (2013)

Ünlü E., "Kesirli Türevler-İntegraller ve Hipergeometrik Fonksiyonlar", Yüksek Lisans Tezi, *Ankara Üniversitesi Fen bilimleri Enstitüsü*, Matematik Anabilim Dalı, Balıkesir, (2011).

Yurt Y., “Kesirli Türevler ve Kesirli İntegral Operatörler”, Yüksek Lisans Tezi, *Afyon Kocatepe Üniversitesi Fen bilimleri Enstitüsü*, Matematik Anabilim Dalı, Balıkesir, (2010).

1. ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı	: SİBEL GÜL
Doğum Yeri ve Tarihi	: MANİSA/17.06.1990
İköğretim	: ORUÇOĞLU İlköğretim (2004)
Lise	: CUMHURİYET LİSESİ (2008)
Lisans Üniversite	: PAMUKKALE ÜNİVERSİTESİ (2014)
Elektronik posta	: sibelll20@outlook.com
İletişim Adresi	: Asmalıevler Mah. 6649 Sok. No:3 Kınıklı/DENİZLİ