T. C.
PAMUKKALE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

ASAL HALKALAR ÜZERİNDE TÜREVLER

Mustafa AŞCI

Yüksek Lisans Tezi

DENİZLİ – 2004

ASAL HALKALAR ÜZERİNDE TÜREVLER

Pamukkale Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Tarafından Kabul Edilen
Matematik Anabilim Dalı
Yüksek Lisans Tezi

Mustafa AŞCI

Tez Savunma Sınavı Tarihi: 23.06.2004

DENİZLİ – 2004

TEZ SINAV SONUÇ FORMU

Bu tez tarafımızdan okunmuş, kapsamı ve niteliği açısından Yüksek Lisans Tezi olarak kabul edilmiştir.

Yrd. Doç. Dr. Şahin CERAN
(Danışman)

Prof. Dr. M.Ali SARIGÖL
(Jüri Üyesi)

Prof. Dr. Hatice KANDAMAR
(Jüri Üyesi)

Pamukkale Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu' nun .... tarih ve .... sayılı kararıyla onaylanmıştır.

Prof. Dr. M.Ali SARIGÖL
Müdür
Fen Bilimleri Enstitüsü

TEŞEKKÜR

Bu çalışmayı hazırlarken , değerli vakitlerini ve yardımlarını esirgemeyen , her safhasında bilgi ve tecrübelerine başvurduğum Sayın Hocam Yrd. Doç. Dr. Şahin CERAN'a en içten teşekkürlerimi sunarım. Ayrıca ilk eğitimime başladığım günden bugüne kadar bana maddi manevi her türlü desteği veren babam Mehmet Emin Aşcı, annem Ümran Aşcı'ya, kardeşim Hakan Aşcı ve eşim Emel Aşcı 'ya teşekkürü bir borç bilirim.

Mustafa AŞCI

ÖZET

Bu tezde asal halkalarda ve asal gamma halkalarda tanımlanmış olan türevlerin tanımları verilip türevler hakkında detaylı bilgiler ele alınmıştır.

Birinci bölümde diğer bölümlerde kullanılan temel tanım ve teoremler verilmiş, ikinci bölümde, asal halkalarda ve asal gamma halkalarda bazı türevlerin tanımları ve o türevlerle ilgili daha önceden yapılan çalışmalar ispatsız olarak verilmiştir.

Üçüncü bölümde ise; asal halkalar ve asal gamma halkalarda simetrik – bi-türev üzerinde detaylı olarak durulmuş olup üçüncü bölümün son kısmında ise yapılan çalışmalardan elde ettiğimiz bulgular üzerinde durulmuştur.

ABSTRACT

In this thesis the definitions of derivations which are defined in prime rings and in prime gamma rings are given. About these derivations, detailed informations are also given.

In the first chapter the definitions and some basic theorems are given which will be used in the other chapters.

In the second chapter the definitions, some properties and theorems of the derivations in prime and semi - prime gamma rings are given without proof.

In the last chapter the definitions of symmetric - bi derivations in prime rings and in prime gamma rings are given. About these derivations detailed informations are given. Finally in the last part of the thesis some conclusions from these researches are given that we have proved.

İÇİNDEKİLER

Birinci Bölüm

GİRİŞ

İkinci Bölüm

ÖNCEKİ ÇALIŞMALAR

Üçüncü Bölüm

Asal Halkalar ve Asal Gamma Halkalarda Simetrik-Bi-Türevler

BİRİNCİ BÖLÜM
GİRİŞ

Bu bölümde ikinci ve üçüncü bölümlerde kullanılan temel tanım ve teoremler verilmektedir.

1. Temel Tanım ve Teoremler

Tanım 1.1: G boş olmayan bir küme olsun. Her a, b$\in$ G için,

$$\ast : GxG \rightarrow G$$

$(a , b) \rightarrow a\ast b$ ile tanımlı fonksiyona G üzerinde bir *ikili işlem* denir.

$\ast$, G kümesi üzerinde bir ikili işlem olsun.

(a) $\forall$ a, b, c$\in$ G için $a\ast (b\ast c) = (a\ast b) \ast c$ ise $\ast$ işleminin *birleşme özelliği* vardır denir.

(b) $\forall$ a$\in$ G için $a \ast e = e \ast a$ olacak biçimde bir tek e$\in$ G elemanı varsa bu e elemanına G kümesinin $\ast$ işlemine göre *birim elemanı* denir.

(c) $\forall$ a$\in$ G için $a\ast a^{-1} = a^{-1} \ast a$ olacak biçimde bir $a^{-1} \in G$ elemanı varsa bu a^{-1} elemanına a nın $\ast$ işlemine göre *tersi* denir.

Bir G kümesi üzerinde tanımlı $\ast$ işlemi (a) koşulunu sağlarsa (G, $\ast$) cebirsel yapısına *yarı grup* denir. Bir yarı grup (b) koşulunu sağlarsa , bu yarı gruba *monoid* denir. (c) koşulunu sağlayan bir monoide *grup* denir.

(G, $\ast$) bir grup olsun. Her a, b$\in$ G için $a\ast b = b\ast a$ eşitliği sağlanırsa G ye *değişmeli grup* denir.

Tanım 1.2: R boş olmayan bir küme, “+” ve “**.**” R üzerinde tanımlı iki işlem olsun. (R,+) değişmeli bir grup, (R,**.**) yarı grup ve “**.**” işleminin “+” işlemi üzerine soldan ve sağdan dağılma özellikleri varsa, yani $\forall$ r_1, r_2, s$\in$ R için,

$$s(r_1 + r_2) = s\,r_1 + s\,r_2 \quad ve \quad (r_1 + r_2)s = r_1 s + r_2 s$$

özelliği sağlanırsa R ye *halka* denir.

(R,.) monoid ise halkaya *birimli* ve "**.**" işlemi değişmeli ise halkaya *değişmeli halka* denir.

Tanım 1.3: R bir halka ve S, R nin boş kümeden farklı bir alt kümesi olsun. S kümesi R deki işlemlere göre halka yapısını oluşturuyorsa S ye R nin bir *alt halkası* denir.

Tanım 1.4: R bir halka olsun. $Z = \{ r \in R \mid \forall s \in R$ için $rs = sr \} \subseteq R$ ye R halkasının *merkezi* denir.

Bir $x \in R$ için $Z_R(x) = \{ r \in R \mid rx = xr \} \subseteq R$ kümesine x in R deki *merkezleyeni* denir.

Tanım 1.5: R bir halka ve $a \in R - \{0\}$ olsun. $ab = 0$ ($ba = 0$) olacak şekilde bir $b \in R - \{0\}$ bulunabiliyorsa a ya *sol (sağ) sıfır bölen* denir. $a \in R$ elemanı hem sağ hem de sol sıfır bölen ise a ya *sıfır bölen* denir. $0 \neq a \in R$ için $ab = 0$ ($ba = 0$) olduğunda $b = 0$ koşulu sağlanırsa a ya *sol(sağ) sıfır bölensiz* denir.

Tanım 1.6: R en az iki elemanı olan bir halka olsun. R komütatif, birimli ve sıfır bölensiz ise o zaman R halkasına *Tamlık bölgesi* denir.

Tanım 1.7: R bir halka olsun. $\forall a \in R$ için $na = 0$ olacak şekilde bir en küçük pozitif n tamsayısı varsa buna R nin *karakteristiği* denir ve $\text{char}R = n$ ile gösterilir. Eğer böyle bir n tamsayısı bulunamazsa $\text{char}R = 0$ dır.

Tanım 1.8: R bir halka ve $n \in Z^+$ olsun. $\forall x \in R$ için $nx = 0$ olması $x = 0$ olmasını gerektiriyorsa R ye *n – torsion free* denir. Örneğin, $x \in R$ için $2x = 0$ olması $x = 0$ olmasını gerektirdiği için R ye *2-torsion free* denir.

Tanım 1.9: (R,+,.) ve (S,∗,o) iki halka olsun. $f : R \to S$ fonksiyonu $\forall a, b \in R$ için,

$$f(a+b) = f(a) * f(b) \quad ve \quad f(a.b) = f(a) \, o \, f(b)$$

şartları sağlanıyorsa f ye bir *halka homomorfizması* denir.

Eğer $f : R \to S$ halka homomorfizmi , birebir ise f fonksiyonuna *halka monomorfizmi,* $f : R \to S$ halka homomorfizmi , örten ise f fonksiyonuna *halka epimorfizmi,* $f : R \to S$ halka homomorfizmi , birebir ve örten ise f fonksiyonuna *halka izomorfizmi* denir.

Eğer $f : R \to R$ fonksiyonu, bir halka homomorfizmi ise f ye *halka endemorfizmi,* $f : R \to R$ fonksiyonu , bir halka izomorfizmi ise f ye *halka otomorfizmi* denir.

Tanım 1.10: R ve S birer halka ve $f : R \to S$ bir homomorfizm olsun.

$$\text{Ker } f = \{ x \in R \mid f(x) = 0 \}$$

kümesine f nin *çekirdeği* denir.

Tanım 1.11: U kümesi R halkasının bir alt halkası olsun. $\forall r \in R$ ve $\forall u \in U$ için;

$r\,u \in U$ ($RU \subseteq U$) ise U ya R nin *sol ideali,*

$u\,r \in U$ ($UR \subseteq U$) ise U ya R nin *sağ ideali* denir.

Hem sağ hem de sol ideal olan alt halkaya *ideal* denir.

U bir sol (sağ) ideal olsun. $A_R(U) = \{ r \in R \mid \forall u \in U$ için $ru = 0$ $(ur = 0)$ $\} \subseteq R$ idealine U nun R deki *sol (sağ) sıfırlayanı* denir.

Tanım 1.12: R bir halka olsun. $0 \neq u \in R$ için $u^n = 0$ olacak şekilde bir n pozitif tamsayısı varsa u elemanına *nilpotent eleman* denir.

Tanım 1.13: U, R nin bir ideali olsun. Bir $n \in Z^+$ için $U^n = 0$ eşitliği sağlanıyorsa U ya R nin *nilpotent ideali* denir.

U , R nin bir ideali olsun. U nun her elemanı nilpotent ise U ya *nil ideal* denir. Her nilpotent ideal nil ideal olduğu halde nil olup nilpotent olmayan idealler vardır.

Önerme 1.1: R sıfırdan farklı nilpotent ideali olmayan 2 – torsion free halka olsun. $a \in R$ ve $\forall x \in R$ için $a(ax - xa) = (ax - xa)a$ olacak biçimde ise $a \in Z$ dir.

Tanım 1.14: R bir halka, $P \neq R$, R nin bir ideali olsun. R nin $UV \subseteq P$ koşulunu sağlayan her bir U ve V idealleri için $U \subseteq P$ veya $V \subseteq P$ sağlanıyorsa P ye *asal ideal* denir.

Teorem 1.1: R bir halka ve P R nin ideali olsun. Buna göre aşağıdakiler denktir.

(i) P asal idealdir.

(ii) $\forall\, a, b \in R$ için $aRb \subseteq P$ ise $a \in P$ veya $b \in P$ dir.

(iii) $\forall\, a, b \in R$ için $(a)(b) \subseteq P$ ise $a \in P$ veya $b \in P$ dir.

(iv) U ve V , R nin iki sol (sağ) ideali olmak üzere $UV \subseteq P$ ise $U \subseteq P$ veya $V \subseteq P$ dir.

Tanım 1.15: R halkasının (0) ideali asal ideal ise halkaya *asal halka* denir.

Teorem 1.2: R bir halka olsun. Aşağıdaki ifadeler denktir.

(i) R asal halkadır.

(ii) $\forall\, a, b \in R$ için $aRb = 0 \Rightarrow a = 0$ veya $b = 0$ dır.

(iii) U ve V, R nin idealleri olmak üzere $UV = 0$ ise $U = 0$ veya $V = 0$ dır.

(iv) R nin sıfırdan farklı sol (sağ) idealinin sol (sağ) sıfırlayanı sıfırdır.

Tanım 1.16: R bir halka ve P R nin ideali olsun. R nin herhangi bir U ideali için, $U^2 \subseteq P$ olduğunda $U \subseteq P$ oluyorsa P ye R nin *yarı-asal ideali* denir.

Teorem 1.3: R bir halka ve P R nin ideali olsun. Buna göre aşağıdakiler denktir.

(i) P yarı-asal idealdir.

(ii) $\forall\, a \in R$ için $aRa \subseteq P$ ise $a \in P$ dir.

(iii) (a), R de bir esas ideal ve $(a)^2 \subseteq P$ ise $a \in P$ dir.

(iv) U, R de bir sol (sağ) ideal ve $U^2 \subseteq P$ ise $U \subseteq P$ dir.

Tanım 1.17: R bir halka olsun. R nin tüm asal ideallerinin arakesitine R nin *asal radikali* denir ve P(R) ile gösterilir. Bir R halkasında $P(R) = 0$ ise, halkaya *yarı-asal halka* denir.

Bir R halkasının yarı-asal olması için gerekli ve yeterli koşul, $a \in R$ için ,

$aRa = 0$ olduğunda $a = 0$ olmasıdır.

Her asal halka bir *yarı - asal* halkadır ama tersi daima doğru değildir.

Önerme 1.2: R asal halka olsun. $a \in R$, R nin sıfırdan farklı bir sağ idealini merkezleştiriyorsa $a \in Z$ dir.

Teorem 1.4: R asal halka ve U, R nin sıfırdan farklı sol ideali olsun. U değişmeli ise R değişmelidir.

Tanım 1.18: Bir birleşmeli halka üzerinde yeni iki tanım şöyle verilebilir.

$a, b \in R$ için $[a,b] = ab - ba$ ve $(a,b) = ab + ba$ ifadelerine komütatörler denir.

Komütatörlerin bazı özellikleri aşağıdaki gibi verilebilir. $a, b, c \in R$ için ;

(i) $[a,b] = - [b,a]$

(ii) $[a+b, c] = [a,c] + [b,c]$

(iii) $[a, b+c] = [a,b] + [a,c]$

(iv) $[ab, c] = a[b,c] + [a,c]b$

(v) $[a, bc] = [a,b]c + b [a, c]$

(vi) $[[a,b] , c] + [[b,c] , a] + [[c,a] , b] = 0$ (Jacobi özdeşliği)

Önerme 1.3: R asal halka ve $a, b \in R$ olsun. Her $r \in R$ için $b[a, r] = 0$ ise $b = 0$ veya $a \in Z$ dir.

Önerme 1.4: R bir asal halka olsun. x, y$\in$ R ve 0$\neq$ x$\in$Z için xy = 0 ise y = 0 dır. **Önerme 1.5:** R bir yarı–asal halka ve a$\in$ R olsun. $\forall$x, y$\in$ R için a[x , y] = [x , y]a ise a$\in$ Z dir.

Önerme 1.6: R bir asal halka Z, R nin merkezi ve 0 $\neq$ c $\in$ Z olsun. Bir a$\in$ R için ac$\in$ Z ise a$\in$ Z dir.

Tanım 1.20: M = { a, b, c, ….. } ve $\Gamma = \{\alpha, \beta, \gamma......\}$ Abel gruplar olsun.

$\forall a,b,c \in M$ ve $\forall \alpha, \beta \in \Gamma$ için

(i) $a\alpha b \in M$

$(a+b)\alpha c = a\alpha c + b\alpha c$

(ii) $a(\alpha+\beta)b = a\alpha b + a\beta b$

$a\alpha(b+c) = a\alpha b + a\alpha c$

(iii) $(a\alpha b)\beta c = a\alpha(b\beta c)$ şartlar sağlanıyorsa M ye *Barnes anlamında gamma halkası* denir.

Eğer ;

(i) $a\alpha b \in M$ ve $\alpha a\beta \in \Gamma$

$(a+b)\alpha c = a\alpha c + b\alpha c$

(ii) $a(\alpha+\beta)b = a\alpha b + a\beta b$

$a\alpha(b+c) = a\alpha b + a\alpha c$

(iii) $(a\alpha b)\beta c = a(\alpha b\beta)c = a\alpha(b\beta c)$

(iv) $a,b \in M$ için $a\alpha b = 0$ iken $\alpha = 0$ dır.

O zaman M ye *Nobusawa anlamında gamma halkası* denir.

Tanım 1.21: M gamma halkasının bir A alt kümesi M nin bir *sol idealidir* ancak ve ancak A, M nin bir alt grubudur ve $A\Gamma M = \{a\alpha c : a \in A, \alpha \in \Gamma\} \subseteq$A dır. Aynı şekilde *sağ ideal* de tanımlanabilir. Eğer A hem sağ hem de sol ideal ise A ya *ideal* denir.

Tanım 1.22: Eğer $a \in M$ ise a tarafından üretilmiş ideale *temel ideal* denir ve (a) ile gösterilir. Bu ideal a yı içeren tüm ideallerin kesişimidir.

Tanım 1.23: A ve B M nin sağ(sol) idealleri ise o zaman

$A + B = \{a + b : a \in A, b \in B\}$ de M nin bir idealidir ve bu kümeye *A ile B nin toplamı kümesi* denir. M nin herhangi bir sayıda idealinin kesişimi de yine bir idealdir.

Tanım 1.24: Eğer A, M nin bir sağ ve B, M nin bir sol ideali ise ayrıca S, M nin boş kümeden farklı bir alt kümesi ise

$SA=\{\sum_{i=1}^{n} s_i\alpha_i a_i \quad : s_i \in S, \alpha_i \in \Gamma, a_i \in A\}$ kümesi M nin bir sağ idealidir. Benzer şekilde tanımlanan BS, M nin bir sol idealidir. BA da M nin çift yönlü idealdir.

Tanım 1.25: A çift yönlü ideal olduğunda $M/A = \{x + A : x \in M\}$ kümesi A nın denklik sınıfları kümesidir ve bir gamma halkasıdır. Burada tanımlanan işlemler

+ : (x + A) + (y + A) = (x + y) + A

. : (x + A)α(y + A) = (xαy) + A dır.

Tanım 1.26: R bir halka olsun. A toplamsal Abel gurubu $RxA \to A$ fonksiyonu ile birlikte $\forall r, s \in R, a, b \in A$ için aşağıdaki şartları sağlıyorsa bir *sol R-modüldür*.

i) r(a + b) = ra + rb

ii) (r + s)a = ra + sa

iii) r(sa) = (rs)a

Benzer şekilde sağ R-modül tanımı da yapılabilir. Hem sağ hem de sol R-modüle *R-modül* denir. Eğer R, birim elemana sahipse A birimli R- modül olarak adlandırılır.

İKİNCİ BÖLÜM
ÖNCEKİ ÇALIŞMALAR

Bu bölümde çalıştığımız konuyla ilgili, daha önceden yayınlanan makalelerin özetleri, yazar adı ve yayınlandığı yıl belirtilerek uygun bir sıra içinde ispatsız olarak verilmektedir.

2.1 Asal Halkalarda Türevler

R bir halka ve d : R $\to$ R bir dönüşüm olsun. Aşağıdaki koşullar varsa d ye R de bir *türev* denir. $\forall$ x , y $\in$ R için,

(a) d (x + y) = d (x) + d (y)

(b) d (x y) = d (x) y + x d (y)

Türevli halkalarda ilk çalışma 1957 de Posner, E. C. tarafından başlatılmıştır.

2.1.1 Posner, E. C., 1957

Tanım 2.1.1.1: R asal halka olması için gerek ve yeter şart $\forall$ a $\in$ R için xay = 0 ise x = 0 veya y = 0 dır.

Lemma 2.1.1.1: R bir asal halka d, R nin bir türevi ve a$\in$ R olsun. Buna göre $\forall$x$\in$ R için ad(x) = 0 ise a = 0 veya d = 0 dır.

Lemma 2.1.1.2: R bir asal halka ve R nin p, q, r elemanları $\forall$a $\in$ R için paqar = 0 şeklinde olsun. Bu takdirde p, q, r elemanlarından en az biri sıfırdır.

Teorem 2.1.1.1: R, charR $\neq$ 2 olan bir asal halka, d_1 ile d_2, R nin türevleri ve $d_1 d_2$ yine bir türev olsun. Bu taktirde d_1 ve d_2 den en az biri sıfırdır.

Lemma 2.1.1.3: R bir asal halka ve d , $\forall$ a $\in$ R için [a,d(a)] = 0 olacak biçimde R nin bir türevi olsun. Bu durumda, R değişmeli veya d sıfırdır.

2.1.2 Herstein, I. N., 1978

Teorem 2.1.2.1: R bir halka, d, R halkasının $d^3 \neq 0$ koşulunu sağlayacak şekilde bir türevi olsun. Bu durumda A, $\forall$ r$\in$R için d(r) tarafından üretilen R nin alt halkası , R nin sıfırdan farklı bir idealini kapsar.

Teorem 2.1.2.2: R bir asal halka, d sıfırdan farklı $\forall$ x, y $\in$ R için [d(x) ,d(y)] = 0 olacak biçimde R nin bir türevi olsun. Bu durumda eğer char R $\neq$ 2 ise R değişmeli tamlık bölgesidir

R bir halka ve a, R nin sabit bir elemanı olmak üzere $d_a : R \rightarrow R$ dönüşümü

$\forall$x$\in$ R için $d_a(x)$ = [a,x] olarak tanımlansın. Bu d_a dönüşümüne, R nin a elemanı tarafından belirlenmiş bir *iç-türevi* denir.

2.1.3 Herstein, I. N., 1979

Teorem 2.1.3.1: R bir asal halka ve d, R nin sıfırdan farklı türevi ve $\forall x \in R$ için $[a,d(x)] = 0$ olacak şekilde $a \in R$ olsun.

(i) Eğer char $R \neq 2$ ise $a \in Z$ dir.

(ii) Eğer char $R = 2$ ise bu durumda $a^2 \in Z$ dir.

Üstelik $a \notin Z$ olduğunda λ, R nin genişletilmiş merkezinde olmak üzere d, $\forall x \in R$ için $d(x) = (\lambda a)x - x(\lambda a)$ ile tanımlanan bir iç - türevdir.

2.1.4 Lee, P. H. and Lee, T. K., 1981

Teorem 2.1.4.1: d sıfırdan farklı R asal halkasının bir türevi , char $R \neq 2$ ve $[a, d(R)] \subseteq Z$ olacak şekilde $a \in R$ olsun . Bu durumda $a \in Z$ dir.

Teorem 2.1.4.2: d sıfırdan farklı R asal halkasının bir türevi ve char $R \neq 2$ olsun.Eğer $[d(R), d(R)] \subseteq Z$ ise R değişmelidir.

Teorem 2.1.4.3: d sıfırdan farklı R asal halkasının bir türevi ve char $R \neq 2$ olsun. Eğer $d^2(R) \subseteq Z$ ise R değişmelidir.

Teorem 2.1.4.4: d_1 ve d_2 char $R \neq 2$ olan R asal halkasının iki türevi olsun. Eğer $d_1 d_2(R) \subseteq Z$ ise R değişmelidir.

Teorem 2.1.4.5: d sıfırdan farklı R asal halkasının bir türevi ve char $R \neq 2$ olsun. Eğer $\forall x \in R$ için $[x, d(x)] \in Z$ ise R değişmelidir.

2.2 Asal Halkalarda Yarı – Türevler

Bu kısımda Bergen, J. tarafından tanıtılan yarı-türevin tanımı verildikten sonra bu konuda yapılan çalışmaların bir özeti sunulacaktır.

R bir halka olsun. $f: R \to R$ toplamsal fonksiyonu, $g : R \to R$ fonksiyonu ile birlikte göz önünde bulundurulduğunda aşağıdaki şartlar sağlanıyor ise bir *yarı- türev* olarak adlandırılır. $\forall x, y \in R$ için ,

(a) $f(xy) = f(x)g(y) + xf(y) = f(x)y + g(x)f(y)$

(b) $f(g(x)) = g(f(x))$

Her türev bir yarı-türevdir ama tersi daima doğru değildir. Örneğin , $g \neq 1$ olacak şekilde R nin bir homomorfizmi ise o zaman $f = g - 1$ bir yarı-türevdir fakat bir türev değildir.

Chang, J. C. türevli halkalardaki çok iyi bilinen bazı özellikleri yarı-türeve şöyle genelleştirmiştir .

2.2.1 Chang, J. C., 1984

Lemma 2.2.1.1: R bir asal halka, $a \in R$ ve f sıfırdan farklı yarı türev olsun. Eğer $\forall x \in R$ için $af(x) = 0$ $(f(x)a = 0)$ ise $a = 0$ dır.

Teorem 2.2.1.1: f sıfırdan farklı, g (örten olması gerekmeyen) fonksiyonu ile birlikte R asal halkasının yarı-türevi olsun. Bu durumda g, R nin homomorfizmidir.

Lemma 2.2.1.2: R bir asal halka olsun. Eğer f sıfırdan farklı ve $f(R) \subset Z$ ise bu durumda R bir değişmeli tamlık bölgesidir.

Teorem 2.2.1.2: R bir asal halka olsun. Kabul edelim ki, f sıfırdan farklı ve $[f(R),f(R)] = 0$ olsun. Bu durumda $\mathrm{char}R \neq 2$ ise R değişmeli tamlık bölgesidir.

Teorem 2.2.1.3: R bir asal halka, f sıfırdan farklı ve $a \in R$ için $af(R) \subset Z$ olsun. Bu durumda $a = 0$ veya R değişmelidir.

Sonuç 2.2.1.1: d, R asal halkasının sıfırdan farklı bir türevi ve $ad(R) \subset Z$ olacak şekilde $a \in R$ olsun. Bu durumda $a = 0$ veya R değişmelidir.

Sonuç 2.2.1.2: R bir asal halka, $g \neq 1$ epimorfizm olsun. Eğer $\forall x \in R$ için $a(g(x) - x) \in Z$ olacak şekilde $a \in R$ varsa $a = 0$ veya R değişmelidir.

Teorem 2.2.1.4: f sıfırdan farklı ve $[a, f(R)] = 0$ olacak şekilde $a \in R$ var olsun. Bu durumda $a \in Z$ dir.

Teorem 2.2.1.5: f sıfırdan farklı ve $[a, f(R)] \subset Z$ olacak şekilde $a \in R$ olsun. Bu durumda $a \in Z$ dir.

Teorem 2.2.1.6: Eğer f, $[f(R), f(R)] \subset Z$ olacak şekilde sıfırdan farklı ise bu durumda R değişmelidir.

Teorem 2.2.1.7: f sıfırdan farklı olsun. Eğer $f^2(R) \subset Z$ ise R değişmelidir.

Teorem 2.2.1.8: R bir asal halka olsun. f_1, f_2 R nin g_1 , g_2 epimorfizmleri ile birlikte sıfırdan farklı R de iki yarı-türev olsun. Eğer $f_1 f_2(R) \subset Z$ ise bu durumda R değişmelidir.

Teorem 2.2.1.9: R, $charR \neq 2$ olan bir asal halka, f sıfırdan farklı , g epimorfizmi ile birlikte R nin yarı-türevi olsun. Eğer $\forall a \in R$ için $[a , f(a)] \in Z$ ise R değişmelidir.

Sonuç 2.2.1.3: $g \neq 1$, $charR \neq 2$ olan R asal halkasının epimorfizmi olsun. Eğer $\forall x \in R$ için $[x , g(x)] \in Z$ ise R değişmelidir.

2.3 Asal Halkalarda (σ,τ) – Türevler

Bu kısımda Hirano, Y. ve Tominaga, H. tarafından ilk kez verilen (σ,τ)-türevin tanımı ve bazı gösterimler tanıtıldıktan sonra bu konuda yapılan çalışmaların bir özeti verilecektir.

R bir halka olsun. σ ve τ, R nin halka otomorfizmleri olmak üzere $d : R \to R$ dönüşümü aşağıdaki koşulları sağlıyorsa d ye R nin bir *(σ,τ)-türevi* denir.

$\forall x,y \in R$ için,

(a) $d(x + y) = d(x) + d(y)$,

(b) $d(xy) = d(x)\,\sigma(y) + \tau(x)\,d(y)$.

R bir halka olmak üzere $C_{\sigma,\tau} = \{c \in R \mid c\sigma(x) = \tau(x)c , \forall x \in R \}$ kümesine R nin (σ,τ)-*merkezi* denir. x , y $\in$ R olmak üzere,

$$[x,y]_{\sigma,\tau} = x\sigma(y) - \tau(y)x \quad \text{ve} \quad (x,y)_{\sigma,\tau} = x\sigma(y) + \tau(y)x$$

olsun. Buna göre $1:R \to R$ birim dönüşüm olmak üzere $C_{1,1} = C$,

$$[x,y]_{1,1} = xy - yx = [x,y] \qquad \text{ve}$$

$$(x,y)_{1,1} = xy + yx = (x,y)$$

olduğu açıktır.

2.3.1 Aydın, N., Kaya, K., 1992

R bir asal halka d, R nin bir (σ,τ)- türevi ve U, R nin sıfırdan farklı bir ideali olsun.

Lemma 2.3.1.1: Eğer $d(U) \subset Z$ ise R değişmelidir **.**

Lemma 2.3.1.2: Eğer $a \in R$ için $ad(U) = 0$ ($d(U)a = 0$) ise $a = 0$ veya $d = 0$ dır.

Lemma 2.3.1.3: Eğer $d(U) = 0$ ise $d = 0$ dır.

Teorem 2.3.1.1: Eğer char $R \neq 2$ ve d sıfırdan farklı olmak üzere $a \in R$ için $[d(U), a]_{\sigma,\tau} = 0$ ise $a \in Z$ dir.

Lemma 2.3.1.4: Eğer char $R \neq 2$ ve d sıfırdan farklı olmak üzere $a \in R$ için $ad(U) \subset C_{\sigma,\tau}$ ise $a = 0$ veya R değişmelidir

Lemma 2.3.1.5: Eğer char $R \neq 2$ ve d sıfırdan farklı olmak üzere $a \in R$ için $[d(R), a]_{\sigma,\tau} \subset C_{\sigma,\tau}$ ise $a \in Z$ dir.

2.3.2 Ashraf, M., 2003

Lemma 2.3.2.1 : R bir asal halka ve I, R nin sıfırdan farklı ideali, $a \in R$ ve d, (σ,τ)-türev olsun. Eğer $ad(I) = 0$ $\{d(I)a = 0\}$ise o zaman $a = 0$ veya $d = 0$ dır.

Lemma 2.3.2.2 : R 2-torsion asal halka ve I, R nin sıfırdan farklı ideali ve d, (σ,τ)-türev olsun. Eğer $d^2(I) = 0$ ve d, σ ve τ ile komute edilebiliyorsa o zaman $d = 0$ dır.

Teorem 2.3.2.1 : R 2-torsion asal halka olsun.Eğer $\forall x \in R$ için $[d(x),x]_{\sigma,\tau} = 0$ olacak şekilde d, (σ,τ)-türevi varsa o zaman $d = 0$ veya R değişmelidir.

Teorem 2.3.2.2 : R 2-torsion asal halka, I, R nin sıfırdan farklı ideali olsun. Eğer $\forall x, y \in I$ için $[d(x),d(y)] = 0$ olacak şekilde bir d (σ,τ)-türevi var ve bu d, σ ve τ ile komute edilebiliyorsa o zaman $d = 0$ veya R değişmelidir.

Teorem 2.3.2.3 : R 2-torsion asal halka, I, R nin sıfırdan farklı ideali olsun. $\forall x, y \in I$ için
$d(xy) = d(yx)$ olacak şekilde d (σ,τ)-türevi var ve bu d, τ ile komute edilebiliyorsa o zaman R değişmelidir **.**

Teorem 2.3.2.4 : R 2-torsion asal halka, σ ve τ R nin otomorfizmaları olsun. d_1 ve d_2 σ ve τ ile komute edilebilen (σ,τ)-türevler olsun. Eğer $d_1 d_2(R) = 0$ ise o zaman $d_1 = 0$ veya $d_2 = 0$ dır.

2.4 Asal Halkalarda α - Türevler

Bu kısımda Chang, J.C. tarafından tanıtılan α -türevin tanımı ve geçecek olan gösterimler verildikten sonra bu konuda yapılan çalışmaların bir özeti sunulacaktır.

R bir halka ve α R nin sıfırdan farklı bir dönüşümü olsun. d: R $\to$ R toplamsal fonksiyonu $\forall$ x, y$\in$ R için, d(xy) = d(x)α(y) + xd(y) koşulunu sağlıyorsa d ye R nin bir *zayıf-*α*-türevi* denir. Üstelik α R nin bir endomorfizmi ise bu takdirde d ye
α *-türev* denir.

Her türev bir α - türevdir ve dolayısıyla bir zayıf -α -türevdir. σ ve τ R nin halka otomorfizmleri olmak üzere d: R $\to$ R toplamsal fonksiyonu bir (σ,τ) -türev ise bu durumda $\tau^{-1}d$, R nin bir $\alpha = \tau^{-1}\sigma$ türevidir.

Örnek : Eğer I, tamsayılar kümesi olmak üzere; R=$\left\{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} : a,b,c,d \in I\right\}$ bir halka,

α: R $\to$ R d: R $\to$ R

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \to \alpha\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \to d\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d-a & -c \\ -c & 0 \end{pmatrix}$$

dönüşümler olmak üzere d bir α -türevdir.

Bu kısım boyunca α sıfırdan farklı R de bir örten fonksiyon, C halkanın merkezi,

$C_\alpha = \{c\in R \mid c\alpha(x) = xc ,\ \forall x\in R\}$ ve $[x,y]_\alpha = x\alpha(y) - yx$ olarak alınacaktır. Buna göre 1: R$\to$R birim dönüşüm olmak üzere $C_1 = C$ ve $[x,y]_1 = xy - yx = [x,y]$ olduğu açıktır. Ayrıca,

(a) $[x,yz]_\alpha = [x,y]_\alpha\,\alpha(z) + y[x,z]_\alpha$

(b) $[xy,z]_\alpha = x\,[y,z]_\alpha + [x,z]y$ bağıntıları sık sık kullanılacaktır

2.4.1 Kaya, K., 1988

Teorem 2.4.1.1: R , char R $\neq$ 2 olan bir asal halka , d, R nin sıfırdan farklı bir zayıf -α - türevi, $d\alpha = \alpha d$ ve U sıfırdan farklı R nin bir ideali olsun. Buna göre,

$[d(U), d(U)]_{\alpha} = 0$ ise R değişmelidir.

Teorem 2.4.1.2: R , char R$\neq$ 2 olan bir asal halka , d, R nin sıfırdan farklı bir zayıf -α - türevi ve $d\alpha = \alpha d$ olsun. Buna göre, bir $0 \neq a \in R$ için $ad(R) \subset C_{\alpha}$ ise R değişmelidir.

Şimdi bir asal halkada α -türev ve zayıf -α -türevin denkliğini veren aşağıdaki lemma ile başlayalım.

Lemma 2.4.1.1: R bir asal halka olsun. R halkasında sıfırdan farklı her zayıf-α - türevi aynı zamanda bir α - türevdir.

Lemma 2.4.1.2: R bir asal halka, d: R $\rightarrow$ R bir α -türev ve $a \in R$ olsun. Buna göre,

(i) U sıfırdan farklı, R nin bir sağ ideali ve $d(U) = 0$ ise $d = 0$ dır.

(ii) U sıfırdan farklı, R nin bir ideali ve $a \in R$ için $ad(U) = 0$ ise $a = 0$ veya $d = 0$ dır.

(iii) $d(R)\, a = 0 \Rightarrow a = 0$ veya $d = 0$ dır.

(iv) U sıfırdan farklı, R nin bir sağ ideali ve $\forall u \in U$ için $[a,u]_{\alpha} = 0$ ise $[a,x]_{\alpha} = 0$ dır.

(v) $a \in C_{\alpha}$ ve $ab \in C_{\alpha}$, $b \in R \Rightarrow a = 0$ veya $b \in C$ dir.

Bundan sonraki kısımda R bir asal halka ve α, R de sıfırdan farklı örten homomorfizm olmak üzere d, R nin sıfırdan farklı bir zayıf -α - türevi olarak alınacaktır.

Lemma 2.4.1.3: U sıfırdan farklı R nin bir sağ ideali ve $d(U) \subset C_{\alpha}$ ise R değişmelidir.

Lemma 2.4.1.4: U sıfırdan farklı R nin bir ideali, $\alpha(U) \neq 0$, char R $\neq$ 2 ve $d\alpha = \alpha d$ olsun. $a \in R$ için $[a, d(U)]_{\alpha} = 0$ ise $a \in C_{\alpha}$ dır.

Teorem 2.4.1.3: U sıfırdan farklı, R nin bir ideali, char $R \neq 2$ ve $d\alpha = \alpha d$ olsun. Buna göre $[d(U), d(U)]_{\alpha} = 0$ ise R değişmelidir**.**

Lemma 2.4.1.5: $d_1 : R \rightarrow R$ bir g-türev $d_2 : R \rightarrow R$ bir α -türev, $d_2\, \alpha = \alpha\, d_2$ ve char $R \neq 2$ olsun. Buna göre $d_1 d_2 = 0$ ise $d_1 = 0$ veya $d_2 = 0$ dır.

Lemma 2.4.1.6: Her $y \in R$ için $d(y)y = yd(y)$ ise R değişmelidir.

Teorem 2.4.1.4: char $R \neq 2$ ve $d\alpha = \alpha d$ olsun. Buna göre $a \in R$ için $ad(R) \subset C_{\alpha}$ ise

$a = 0$ veya R değişmelidir.

2.5 Asal Gamma Near Halkalarda Γ-Türevler

2.5.1 Jun, Y.B., 2003

Near halka, $+: NxN \rightarrow N$ ve $.: NxN \rightarrow N$ ikili işlemleriyle tanımlı boş kümeden farklı bir N kümesidir ve aşağıdaki şartları sağlar.

i) a + (b + c) = (a + b) + c ve (a.b).c = a.(b.c)

ii) a + 0 = 0 + a olan $0 \in N$ elemanı vardır.

iii) a + b = b +a = 0 olan ters eleman vardır.

iv) (a + b).c = a.c + b.c sağdan dağılma özelliği.

Near halkalar toplamaya göre değişmeli olmak zorunda değildir ve çarpmanın toplama üzerine tek taraflı dağılma özelliği vardır.

Γ -Near halkası ise aşağıdaki şartları sağlayan $(M,+, \Gamma)$ üçlüsüdür.

i) Γ boştan farklı ikili işlemler kümesidir öyle ki $(M,+,\gamma)$ bir Near halkadır.

ii) $\forall x, y, z \in M$ ve $\gamma, \mu \in \Gamma$ için $x\gamma(y\mu z) = (x\gamma y)\mu z$

Tanım 2.5.1.1: Bir M Γ- Near halkası için $M_0 = \{x \in M : 0\gamma x = 0, \quad \forall \gamma \in \Gamma\}$ kümesine

M nin *sıfır simetrik kısmı* denir.

Tanım 2.5.1.2: Eğer $M = M_0$ ise M ye *sıfır simetrik* denir.

Tanım 2.5.1.3: M Γ-Near halkasının U alt kümesinde $\forall a \in U, \gamma \in \Gamma, x \in M$ için $x\gamma a \in U$ oluyorsa U ya *sol invaryant* denir.Aynı şekilde $a\gamma x \in U$ oluyorsa U ya *sağ invaryant* denir. U, hem sol hem de sağ invaryant ise o zaman U ya *invaryant* denir.

Tanım 2.5.1.4: M ve M$'$ iki Γ-Near halkası ise o zaman f : M$\rightarrow$ M$'$

f(x + y) = f(x) + f(y) ve f(xγy) = f(x)γf(y)

şartlarını sağlayan bir dönüşüm ise f ye Γ- *Near halka homomorfizmi* denir.

Tanım 2.5.1.5: Eğer xΓMΓy = 0 iken x = 0 veya y = 0 ise o zaman Γ-Near halkasına *asal* denir.

Tanım 2.5.1.6: C = { $x \in M : x\gamma m = m\gamma x \quad \forall m \in M, \gamma \in \Gamma$ } kümesine M nin *çarpımsal merkezi* denir.

Tanım 2.5.1.7: $x, y \in M, \gamma \in \Gamma$ için $[x,y]_\gamma$ ile $x\gamma y - y\gamma x$ komutatörünü göstereceğiz.

Tanım 2.5.1.8: (x,y) ile x + y - x – y toplamsal komütatörünü göstereceğiz.

Tanım 2.5.1.9: Eğer $d(x\gamma y) = d(x)\gamma d(y)$ ise o zaman d Γ-*homomorfizmi olarak etkir* denir.

Tanım 2.5.1.10: M üzerinde Γ- türev

$$d(x\gamma y) = x\gamma d(y) + d(x)\gamma y$$

şartını sağlayan toplamsal endomorfizmadır.

Lemma 2.5.1.1 : M asal gamma Near halka ve 2 – torsion free ve d Γ- türev olsun. Eğer
$d^2 = 0$ ise d = 0 dır.

Lemma 2.5.1.2 : d, M de bir Γ- türev olsun ve u $\in$ M sol sıfır bölen olmasın. Eğer $\forall \gamma \in \Gamma$ için $[u,d(u)]_\gamma = 0$ ise o zaman (x,u), x,u$\in$M için bir sabittir.

Teorem 2.5.1.1 : d sıfırdan farklı Γ-türev olsun ve M nin sıfır böleni olmasın. $\forall x \in M, \gamma \in \Gamma$ için $[x,d(x)]_\gamma = 0$ ise o zaman (M,+) Abeldir.

Teorem 2.5.1.2 : M asal ve d Γ-türev olsun. $\forall x \in M$ için d(x)$\in$C ise (M,+) Abeldir. Ayrıca M 2-torsion free ise o zaman M değişmelidir.

Lemma 2.5.1.3 : M asal ve x,y$\in$M olsun. x$\in$C ve xΓy = 0 ise o zaman x = 0 veya y = 0 dır.

Teorem 2.5.1.3 : M asal ve d sıfırdan farklı Γ-türev olsun. $\forall x, y \in M, \gamma \in \Gamma$ için $[d(x),d(y)]_\gamma = 0$ ise o zaman (M,+) değişmelidir .

Eğer M, 2-torsion free, d, gamma-homomorfizmi olarak etkir ve $d^2(x) \in C$ ise o zaman M değişmelidir.

Lemma 2.5.1.4 : M asal ve $U \neq 0$ M nin sol (sağ) invaryantı olsun. Eğer $U \subseteq C$ ise o zaman M değişmelidir **.**

Teorem 2.5.1.4 : M asal ve 2-torsion free ve $U \neq 0$ M nin sol (sağ) invaryantı ve d, M de

Γ-türev olsun. Eğer d(U) $\subseteq C \setminus \{0\}$ ise o zaman M değişmelidir.

2.5.2 Jun.Y.B, Öztürk, M.A., 2003

Önerme 2.5.2.1 : Eğer d M üzerinde Γ-türev ise o zaman $\forall x, y \in M, \gamma \in \Gamma$ için

$d(x\gamma y) = d(x)\gamma y + x\gamma d(y)$ dir.

Önerme 2.5.2.2 : $\forall x, y \in M, \gamma \in \Gamma$ için $d(x\gamma y) = d(x)\gamma y + x\gamma d(y)$ şartını sağlayan her toplamsal d endomorfizmi bir Γ**-**türevdir.

Önerme 2.5.2.3 : $\forall x, y, z \in M$ ve $\gamma, \mu \in \Gamma$ için M üzerindeki her d Γ**-**türevi için aşağıdakiler sağlanır.

i) $(x\gamma d(y) + d(x)\gamma y)\mu z = x\gamma d(y)\mu z + d(x)\gamma y\mu z$

ii) $(d(x)\gamma y + x\gamma d(y))\mu z = d(x)\gamma y\mu z + x\gamma d(y)\mu z$

Önerme 2.5.2.4 : M asal Γ**-N**ear halka ve U $\neq 0$ M nin sağ (sol) invaryantı olsun. Eğer $U\Gamma x = 0$ ise ($x\Gamma U = 0$) o zaman x = 0 dır.

Önerme 2.5.2.5 : M asal ve U $\neq 0$ M nin invaryantı olsun.Eğer $d \neq 0$ Γ-türev ise $\forall x, y \in M$ için aşağıdakiler sağlanır.

i) $x\Gamma U\Gamma y = 0$ ise x = 0 veya y = 0 dır.

ii) $d(U)\Gamma y = 0$ ise y = 0 dır.

iii) M sıfır simetrik ve $x\Gamma d(U) = 0$ ise x = 0 dır.

Önerme 2.5.2.6 : M sıfır simetrik ve asal U $\neq 0$ M nin invaryantı olsun. d Γ-türev ve $d^2(U) = 0$ ise o zaman d = 0 dır.

Önerme 2.5.2.7 : M sıfır simetrik ve asal gamma near halka, $0 \neq x \in$ M olsun. $\forall y \in M, \gamma \in \Gamma$ için $x\gamma d(y) = 0$ şartını sağlayan her Γ**-**türevi sıfırdır.

Önerme 2.5.2.8 : M asal ve 2 –torsion free, d_1 ve d_2 de M nin aşağıdaki şartları sağlayan

Γ -türevleri olsun.

i) d_1d_2 M de Γ -türevdir.

ii) $d_1(x)\gamma d_2(y) = d_2(y)\gamma d_1(x) \quad \forall x, y \in M, \gamma \in \Gamma$

O zaman $d_1 = 0$ veya $d_2 = 0$ dır.

2.6 Gamma Halkalarda k-Türev

2.6.1 Kandamar, H., 2000

Tanım 2.6.1.1 : M bir Γ halkası olsun. d : M$\rightarrow$M ve k : $\Gamma \rightarrow \Gamma$ toplamsal dönüşümler olmak üzere $\forall a, b \in M, \beta \in \Gamma$ için

$$d(a\beta b) = d(a)\beta b + ak(\beta)b + a\beta d(b)$$

koşulu sağlanıyor ise d, M nin k-türevidir.Bu bölümde şu iki sonuç verildi.

1) R, charR $\neq 2$ olan halka olsun.Eğer $\forall x, y \in R$ için xry = 0 ise r = 0 dır.

Eğer d, R de k = d olan (R =) gamma halkasının türevi ise o zaman d, R nin sıradan bir türevidir.

2) M $\neq 0$, charM $\neq 2$ asal gamma halkası olsun. $\gamma \in \Gamma$ ve $a \in M$ ise $\forall x \in M$ için $[[x, a]_\gamma, a]_\gamma = 0$ ise bu durumda $a\gamma a = 0$ veya $a \in C_\gamma$ dır.

3) M, charM $\neq 2$ asal gamma halkası, d$\neq 0$, M nin k- türevi, $0 \neq \gamma \in \Gamma$ ve $k(\gamma) \neq 0$ olsun.

Eğer d(M)$\subseteq C_\gamma$ ise o zaman M değişmeli gamma halkasıdır.

Lemma 2.6.1.3: M bir Nobusava anlamında gamma halkası olsun. Eğer d, M gamma halkasının bir k türevi ise bu durumda $\forall a \in M, \alpha, \beta \in \Gamma$ için

$$k(\alpha a\beta) = k(\alpha)a\beta + \alpha d(a)\beta + \alpha ak(\beta) \text{ dır.}$$

Lemma 2.6.1.4: M bir Nobusava anlamında gamma halkası olsun. Eğer d, M gamma halkasının hem k_1, hem de k_2 - türevi ise bu durumda $k_1 = k_2$ dir.

Teorem 2.6.1.5: R, charR$\neq$ 2 ve N3 özelliğini sağlayan bir gamma halkası olmak üzere d, R,

gamma halkasının k-türevi olsun. d = k dır ancak ve ancak d, R halkasının basit türevidir.

Lemma 2.6.1.6: M, gamma halkası ve d, M nin k-türevi olsun. O zaman $\forall a,b,c,x \in M, \alpha,\beta,\gamma \in \Gamma$ için aşağıdaki ifadeler sağlanır.

(i) $[a,b]_\beta = -[b,a]_\beta$, $[\alpha,\beta]_a = -[\beta,\alpha]_a$

(ii) $[a+b,c]_\beta = [a,c]_\beta + [b,c]_\beta$, $[\alpha+\beta,\gamma]_a = [\alpha,\gamma]_a + [\beta,\gamma]_a$

(iii) $[a\alpha b, x]_\beta = [a,x]_\beta \alpha b + a[\alpha,\beta]_x b + a\alpha[b,x]_\beta$

(iv) $[\alpha b\beta,\gamma]_a = [a,\gamma]_a b\beta + \alpha[b,a]_\gamma \beta + \alpha b[\beta,\gamma]_a$

(v) $[[\alpha,\beta]_a,\gamma]_a = [[\gamma,\alpha]_a,\beta]_a + [[\beta,\gamma]_a,\alpha]_a = 0$

(vi) $[[a,b]_\beta,c]_\beta + [[c,a]_\beta,b]_\beta + [[b,c]_\beta,a]_\beta = 0$

(vii) $d([a,b]_\beta) = [d(a),b]_\beta + [a,b]_{k(\beta)} + [a,d(b)]_\beta$

(viii) $k([\alpha,\beta]_a) = [k(\alpha),\beta]_a + [\alpha,\beta]_{d(a)} + [\alpha,k(\beta)]_a$

Lemma 2.6.1.7: M asal gamma halkası, U ve Ω sırasıyla M nin ve Γ nın sıfırdan farklı idealleri olsun. O zaman $\forall a,b \in M, \alpha,\beta \in \Gamma$ için aşağıdaki şartlar sağlanır.

(i) $a\Omega b = 0 \Rightarrow a = 0$ veya $b = 0$

(ii) $\alpha U\beta = 0 \Rightarrow \alpha = 0$ veya $\beta = 0$

(iii) $a\Gamma U\Gamma b = 0 \Rightarrow a = 0$ veya $b = 0$

(iv) $\alpha M\Omega M\beta = 0 \Rightarrow \alpha = 0$ veya $\beta = 0$

(v) $u\alpha v = 0 \Rightarrow \alpha = 0$ dır.

(vi) $C_\Gamma = 0 \Leftrightarrow C_M = 0$

(vii) $C_\Gamma \neq 0$ veya $C_M \neq 0$ ise M değişmeli gamma halkasıdır.

(viii) $0 \neq \gamma \in \Gamma$ için $U \subseteq C_\Gamma$ ise o zaman M değişmeli gamma halkasıdır.

(ix) $0 \neq \gamma \in \Gamma$ ve $u,v \in U$ için $[u,v]_\gamma = 0$ ise M değişmeli gamma halkasıdır.

Teorem 2.6.1.6: M, sıfırdan farklı charM$\neq 2$ asal gamma halkası ve $0 \neq \gamma \in \Gamma$ olsun.Eğer $\forall x \in M$ için $[[x,a]_\gamma,a]_\gamma = 0$ ise $a\gamma a = 0$ veya $a \in C_\gamma$ dır.

Lemma 2.6.1.8: M asal gamma halkası ve $0 \neq \gamma \in \Gamma$ ve $0 \neq a \in C_\gamma$ olsun.

Her bir $x,y \in M, \beta \in \Gamma$ için aşağıdaki özellikler sağlanır.

(i) $[\gamma,\beta]_a = 0$

(ii) $[a\gamma x, y]_\beta = a\gamma[x, y]_\beta$, $[x\gamma a, y]_\beta = [x, y]_\beta \gamma a$

(iii) $[a\beta x, y]_\gamma = [a, y]_\beta \gamma x + a\beta[x, y]_\gamma$

(iv) $b \in C_\gamma$ ise o zaman $[a\gamma b, x]_\beta = [a\beta b, x]_\gamma = a\gamma[b, x]_\beta = a[\beta, \gamma]_x b$

(v) $b \in C_\gamma$ ve $a\Gamma b \subseteq C_\gamma$ ise o zaman $b = 0$ veya M değişmeli gamma halkasıdır.

Lemma 2.6.1.9: M asal gamma halkası, U $\neq 0$ ve V $\neq 0$ M gamma halkasının sol(sağ) idealleri ve $\Omega \neq 0$ M gamma halkasının sol(sağ) ideali olsun. $\forall$ a$\in$M ve $\gamma \in \Gamma$ için aşağıdaki eşitlikler sağlanır.

(i) $\gamma U\Gamma = 0 \Rightarrow \gamma = 0$ ($\Gamma U\gamma = 0 \Rightarrow \gamma = 0$)

(ii) $a\Omega M = 0 \Rightarrow a = 0$ dır. ($M\Omega a = 0 \Rightarrow a = 0$)

Lemma 2.6.1.10: M asal gamma halkası, U $\neq 0$ M gamma halkasının sol(sağ) ideali ve $0 \neq \gamma \in \Gamma$ olsun.Eğer U$\subseteq C_\gamma$ ise o zaman M değişmelidir **.**

Lemma 2.6.1.11: M asal gamma halkası, d $\neq 0$ M gamma halkasının k- türevi, $0 \neq \gamma \in \Gamma$ ve d(M), C_γ tarafından kapsansın. Eğer $a \in C_\gamma$ ise o zaman $a \in C_{k(\gamma)}$ dır.

Lemma 2.6.1.12: M asal gamma halkası, d $\neq 0$ M gamma halkasının k- türevi, $0 \neq \gamma \in \Gamma$ olsun. $\forall x, y \in M$ için d(x)γ d(y) = 0 ise bu durumda d(M), M nin sol ve sağ idealidir.

Teorem 2.6.1.7: M, charM$\neq$2 olan asal gamma halkası, d $\neq 0$ M gamma halkasının k- türevi, $0 \neq \gamma \in \Gamma$ ve $k(\gamma) \neq 0$ olsun. Eğer d(M)$\subset C_\gamma$ ise bu durumda M değişmeli gamma halkasıdır.

2.7 Türevli Gamma Halkalarda Değişmelilik

2.7.1 Soytürk,M.

Bu çalışmada M asal gamma halkası olacak, Z, M nin merkezi ve $0 \neq$ d : M$\rightarrow$M türev (yani d(x + y) = d(x) + d(y)) ve $d(x\gamma y) = d(x)\gamma y + x\gamma d(y), x, y \in M, \gamma \in \Gamma$

ve $[x, y]_\gamma = x\gamma y - y\gamma x, x, y \in M, \gamma \in \Gamma$ olarak alınacaktır.

Lemma 2.7.1.1: $a,b,c \in M, \beta,\gamma \in \Gamma$ için

i) $[a\gamma b,c]_\beta = a\gamma[b,c]\beta + [a,c]_\beta \gamma b + a\gamma(c\beta b) - a\beta(c\gamma b)$

ii) $a \in Z$ ise o zaman $[a\gamma b,c]_\beta = a\gamma[b,c]_\beta$ dır.

iii) $a \in Z$ ise o zaman $a\gamma[b,c]_\beta = a\beta[b,c]_\gamma$ dır.

iv) $a \in Z, a\Gamma b = 0$ ise o zaman a = 0 veya b = 0 dır.

v) $a \in Z, a\Gamma b \subset 0$ ise o zaman a = 0 veya b = 0 dır.

vi) $a \in Z, a\gamma[b,c]_\gamma = 0$ ise o zaman a = 0 veya $[b,c]_\gamma = 0$ dır.

Lemma 2.7.1.2 :

i) U, M nin sıfırdan farklı sağ ideali olsun. Eğer U$\subset$ Z ise o zaman M değişmelidir.

ii) U, M nin sıfırdan farklı sağ(sol) ideali ve a$\in$M olsun. Eğer UΓa = 0 (aΓU = 0) ise o zaman a = 0 dır.

iii) U, M nin sıfırdan farklı ideali ve a,b$\in$M olsun.Eğer aΓUΓb = 0 ise a = 0 veya

b = 0 dır.

Lemma 2.7.1.3: U, M nin sıfırdan farklı bir sağ ideali olsun.

i) d(U) = 0 ise d = 0 dır.

ii) U, M nin sıfırdan farklı ideali ve a$\in$M olsun. Eğer $a\Gamma d(U) = 0$ ise a = 0 veya d = 0 dır.

iii) U, M nin sıfırdan farklı ideali ve charM$\neq$2 olsun.Eğer $d^2(U) = 0$ ise d = 0 dır.

iv) U, M nin sıfırdan farklı ideali, charM$\neq$2 ve d_1,d_2 türevler olsun.

Eğer $d_2(U) \subset U$ ve $d_1(d_2(U)) = 0$ ise o zaman $d_1 = 0$ veya $d_2 = 0$ dır.

Bu çalışmanın geri kalanında U, M gamma halkasının sıfırdan farklı ideali olarak alınacaktır.

Lemma 2.7.1.4: d, M nin sıfırdan farklı türevi ve charM$\neq$2 olsun. Eğer $d(U) \subset Z$ ise o zaman M değişmelidir

Teorem 2.7.1.1 : 0$\neq$d : M$\to$M türev ve charM$\neq$2,3 olsun. Eğer $d^2(U) \subset Z$ ve $d(U) \subset U$ ise M değişmelidir

Lemma 2.7.1.5: $a \in M$ ve $Z \neq 0$ olsun. $\forall \gamma \in \Gamma$ için $[U,a]_\gamma = 0$ ise $a \in Z$ dir.

Lemma 2.7.1.6: charM$\neq 2$ ve d_1,d_2 $d_1 d_2(U) \subset Z$ ve $d_2(U) \subset U$ olan M nin türevleri olsun. O zaman M değişmelidir.

Lemma 2.7.1.7: charM$\neq 2$ ve d_1,d_2 $d_1 d_2(U) \subset Z$ ve $d_2(U) \subset U$ olan M nin sıfırdan farklı türevleri olsun Eğer $[d_1(U), a]_\gamma = 0$ ise o zaman $[d_2(U), a]_\gamma = 0$ dır

Lemma 2.7.1.8 : d_1,d_2 $d_1 d_2(U) \subset Z$, $d_2(U) \subset U$ olan M nin sıfırdan farklı türevleri ve $a \in M$. olsun. Eğer $\forall \gamma \in \Gamma$ için $[d_1(U), a]_\gamma = 0$ ise o zaman $a \in Z$ dir.

Lemma 2.7.1.9: charM$\neq 2,3$, d_1,d_2 $d_1 d_2(U) \subset Z$ ve $d_2(U) \subset U$ olan M nin sıfırdan farklı türevleri olsun. Eğer $[d_1(U), a]_\gamma \subset Z$ ise o zaman $a \in Z$ dir.

Teorem 2.7.1.2: charM$\neq 2,3$, d_1,d_2 $d_1 d_2(U) \subset Z$ ve $d_2(U) \subset U$ olan M nin sıfırdan farklı türevleri olsun. O zaman M değişmelidir.

ÜÇÜNCÜ BÖLÜM

ASAL HALKALARDA VE ASAL GAMMA HALKALARDA SİMETRİK-Bİ-TÜREVLER

Bu bölümde Asal Halkalar ve Asal Gamma Halkalarında Simetrik-Bi-Türevlerin tanımları yapılarak bazı önemli özellikler ispatlı olarak verilecektir. Bu bölümün son kısımlarında ise bu çalışılan yayınların ışığında elde ettiğimiz sonuçlar verilecektir.

3.1 Asal Halkalarda Simetrik Bi-Türevler

Tanım 3.1.1: R bir asal halka olmak üzere D(.,.): RxR $\rightarrow$R dönüşümü $\forall x, y \in R$ için aşağıdaki şartları sağlıyorsa D ye *simetrik bi-toplamsal dönüşüm* denir

$$D(x+y,z) = D(x,z) + D(y,z)$$

$$D(x,y+z) = D(x,y) + D(x,z)$$

$\forall x, y \in R$ için D(x,y) = D(y,x) ise D ye *simetrik dönüşüm* denir.

Ayrıca $\forall x,y,z \in R$ için $D(xy,z) = xD(y,z) + D(x,z)y$ sağlanıyorsa D ye *simetrik bi- türev* denir.Bu durumda $\forall x,y,z \in R$ için $D(x,yz) = D(x,y)z + yD(x,z)$ sağlandığı açıktır.

D(.,.): RxR $\rightarrow$R simetrik dönüşüm olmak üzere d(x) = D(x,x) biçiminde tanımlı olan bir $d : R \rightarrow R$ dönüşümüne D nin *izi* denir.

D(.,.) simetrik ve bi-toplamsal olduğundan d(x) = D(x,x) izi $\forall x,y \in R$ için aşağıdaki özellikleri sağlar:

$$d(x+y) = d(x) + d(y) + 2D(x,y)$$

Aynı zamanda d(x) bir çift fonksiyondur.

$$d(x+y) = D(x+y, x+y) = D(x, x+y) + D(y, x+y)$$
$$= D(x,x) + D(x,y) + D(y,x) + D(y,y)$$
$$= d(x) + d(y) + 2D(x,y) \text{ olur.}$$

Bu ifade $\forall x,y \in R$ için geçerli olduğundan y yerine x alırsak;

$$d(x+x) = d(x) + d(x) + 2D(x,x)$$
$$= d(x) + d(x) + 2d(x) = 4d(x)$$

ve dolayısıyla $d(2x) = 4d(x)$ elde edilir.Böylece özel olarak $0 \in R$ için $d(0) = 4d(0)$ ve buradan $3d(0) = 0$ olur. Dolayısıyla

$$3d(0) = 3D(0,0) = 0$$
$$\Rightarrow 0 = D(0,0) + D(0,0) + D(0,0)$$
$$\Rightarrow 0 = D(0,0) + D(0,0) \Rightarrow D(0,0) = 0$$

olur. Böylece $d(x+y) = d(x) + d(y) + 2D(x,y)$ denkleminde y = 0 alınırsa

$d(x) = d(x) + d(0) + 2D(x,0)$ olur ve $d(0) = 0$ olduğundan $2D(x,0) = 0$ bulunur.

$0 = 2D(x,0) = D(x,0) + D(x,0) = D(x,0+0) = D(x,0)$ ve buradan da $D(x,0) = 0$ olur.

D simetrik olduğundan $0 = D(x,0) = D(0,x)$ dir.

$D(x,x-x) = 0 \Rightarrow D(x,x) + D(x,-x) = 0 \Rightarrow D(x,-x) = -D(x,x)$ elde edilir.

$d(x+y) = d(x) + d(y) + 2D(x,y)$ de y yerine –x alınırsa,

$d(x-x) = d(x) + d(-x) - 2d(x) \Rightarrow d(-x) - d(x) = 0 \Rightarrow d(-x) = d(x)$ ve böylece d(x) fonksiyonu çift fonksiyon olur.

Lemma 3.1.1:R bir asal halka olmak üzere D: R $\rightarrow$R bir türev olsun. $\forall x \in R$ için

i) aD(x) = 0 veya

ii) D(x)a = 0

ise bu iki durumda da ya a = 0 ya da D = 0 dır.

İspat: i) $\forall x \in R$ için aD(x) = 0 olduğuna göre x yerine xy yazarsak;

$0 = aD(xy) = a(D(x)y + xD(y)) = aD(x)y + axD(y)$ olur. $\forall x, y \in R$ için

$axD(y) = 0$ olduğundan ve R asal halka olduğundan $aRD(x) = 0 \Rightarrow a = 0$ veya

$D(x) = 0$

ii) $\forall x \in R$ için D(x)a = 0 olduğundan $\forall x, y \in R$ için x yerine xy yazılırsa;

$D(xy)a = (D(x)y + xD(y))a = D(x)ya + xD(y)a = D(x)ya$ olur.Buradan da

$D(x)Ra = (0) \Rightarrow D(x) = 0$ veya $a = 0$ elde edilir ve ispat biter.

Lemma 3.1.2: R karakteristiği ikiden farklı bir asal halka ve $a, b \in R$ sabit elemanlar olsun. Eğer $\forall x \in R$ için $axb + bxa = 0$ ise o zaman a = 0 veya b = 0 dir.

İspat: $\forall x \in R$ için $axb + bxa = 0$ olduğundan

$\forall r \in R$ için $a(xbrax)b + b(xbrax)a = 0$ olur. Buradan

$a(xbrax)b = -b(xbrax)a = -(bxbra)xa = ax(bxbra) = -ax(braxb) = -axbraxb \Rightarrow 2(axbraxb) = 0$
olur. charR $\neq 2$ olduğundan $(axb)R(axb) = (0)$ ve R asal halka olduğundan $\forall x \in R$ için

$axb = 0$ elde edilir. Böylece R nin asal halka olmasından dolayı a = 0 veya b = 0 dır.

Teorem 3.1.1: R karakteristiği ikiden farklı değişmeli olmayan bir asal halka olsun. D(.,.): RxR$\rightarrow$R bir simetrik bi-türev ve d, D nin izi olsun.Eğer d, R de komüte edilebiliyor ise o zaman D = 0 dır.

İspat : d, R de komüte edilebiliyor olduğundan $\forall x \in R$ için $[d(x), x] = 0$ dır.

(1)

(1) i lineerleştirirsek $[d(x + y), x + y] = 0$ olur ve $d(x + y) = d(x) + d(y) + 2D(x, y)$ olduğundan

0 = [d(x) + d(y) + 2D(x,y) , x + y]

0 = [d(x) , x] + [d(x) , y] + [d(y) , x] + [d(y) , y] + 2[D(x,y) , x] + 2[D(x,y) , y]

= [d(x) , y] + [d(y) , x] + 2[D(x,y) , x] + 2[D(x,y) , y]

(2)

elde edilir. (2) de x yerine -x yazılırsa;

0 = [d(-x) , y] + [d(y) , -x] + 2[D(-x,y) , -x] + 2[D(-x,y) , y]

olur. d(-x) = d(x) olduğundan da

[d(x) , y] - [d(y) , x] + 2[D(x,y) , x] - 2[D(x,y) , y]

(3)

elde edilir (2) ve (3) denklemlerini toplarsak ;

$\forall x, y \in R$ için [d(x) , y] + 2[D(x,y),x] = 0

(4)

olur. (4) te y yerine xy yazılırsa;

0 = [d(x) , xy] + 2[D(x,xy),x]

= x[d(x) , y] + [d(x) , x]y + 2[D(x,x)y + xD(x,y) , x]

= x[d(x) , y] + 2[d(x)y , x] + 2[xD(x,y) , x]

= x[d(x) , y] +2d(x) [y , x] + 2[d(x) , x] y + 2x[D(x,y) , x] + 2[x,x]D(x,y)

= x[d(x) , y] + 2d(x) [y , x] + 2x[D(x,y) , x]

= 2d(x) [y , x] + x{ [d(x) , y] + 2[D(x,y) , x] }

= 2d(x) [y , x] elde edilir. charR $\neq$ 2 olduğundan $\forall x, y \in R$ için

= d(x) [y , x] = 0

(5)

$x \notin Z(R)$ için [x,y] $\neq 0$ dır.

Öte yandan sabit bir $x \in R$ için y$\rightarrow$[x,y] dönüşümü bir iç türevdir.Böylece (5) ve lemma 3.1.1 den d(x) = 0 olur. $x \in Z(R)$ ve $y \notin Z(R)$ alalım. Bu durumda $x + y \notin Z(R)$ ve $-y \notin Z(R)$ dir. Böylece 0 = d(x+y) = d(x) + d(y) + 2D(x,y) = d(x) + 2D(x,y) ve

= d(x+(-y)) = d(x) + d(-y) + 2D(x,-y) = d(x) – 2D(x,y)

Dolayısıyla 0 = d(x) + 2D(x,y) + d(x) – 2D(x,y) $\Rightarrow$ 0 = 2d(x) ve charR $\neq$ 2 olduğundan

d(x) = 0 olur.Bundan dolayı $\forall x \in R$ için d(x) = D(x,x) = 0 olur.Böylece D = 0 dır ve ispat biter.

Teorem 3.1.2 : R karakteristiği 2 ve 3 ten farklı değişmeli olmayan bir asal halka olsun. D(.,.): RxR$\rightarrow$R bir simetrik bi-türev ve d, D nin izi olsun.Eğer D, R de merkezleyen ise

o zaman D = 0 dır.

İspat : d, R de merkezleyen olduğundan; $\forall x \in R$ için $[d(x), x] \in Z(R)$

(1)

dir. (1) ifadesini lineerleştirirsek [d(x+y) , x+y] $\in Z(R)$ dir.

d(x+y) = d(x) + d(y) + 2D(x,y) olduğundan [d(x) + d(y) + 2D(x,y),x+y] $\in Z(R)$ olur.

Teorem 3.1.1 in ispatında yapılan işlemlere benzer işlemler yaparsak

$$[d(y) , x] + [d(x) , y] + 2[D(x,y) , y] + 2[D(x,y) , x] \in Z(R)$$

(2)

elde edilir. (2) de x yerine –x yazılırsa ve işlemler teorem 3.1.1 deki gibi yapılırsa

$$-[d(y) , x] + [d(x) , y] - 2[D(x,y) , y] + 2[D(x,y) , x] \in Z(R)$$

(3)

bulunur. (2) ve (3) ü toplarsak

$$[d(x) , y] + 2[D(x,y) , x] \in Z(R)$$

(4)

elde edilir. (4) te y yerine x^2 alırsak

$[d(x) , x^2] + 2[D(x, x^2) , x] \in Z(R)$ olur.

$= x[d(x) , x] + [d(x) , x]x + 2[D(x,xx) , x] \in Z(R)$

$= x[d(x) , x] + [d(x) , x]x - 2[D(x,x)x + xD(x,x) , x] \in Z(R)$

$= 2x[d(x) , x] +[d(x)x , x] + [xd(x) , x] \in Z(R)$

$= x[d(x) , x] + d(x) [x , x] + [d(x) , x]x + x[d(x) , x] \in Z(R)$

$=3x[d(x) , x] \in Z(R)$ charR $\neq 3$ olduğundan

$=x[d(x) , x] \in Z(R)$

(5)

(1) ve (5) ten $\forall y \in R$ için

$x[d(x) , x]y - yx[d(x) , x] = 0$ dır.

$[d(x) , x]xy - [d(x) , x]yx = 0$

$[d(x) , x]\{xy - yx\} = 0$

Buradan $\forall x, y \in R$ için $[d(x) , x][x,y] = 0$

(6)

elde edilir.Teorem 3.1.1 ispatında yaptığımız gibi keyfi bir $x \notin Z(R)$ için işlemler yapılırsa

$[d(x), x] = 0$ ve böylece teorem 3.1.1 den $D = 0$ olur ve ispat biter.

Teorem 3.1.3 : R karakteristiği ikiden farklı bir asal halka ve $D_1(.,.):RxR \to R$, $D_2(.,.):RxR \to R$ birer simetrik bi-türev olsun. d_2, D_2 nin izi olmak üzere $\forall x \in R$ için $D_1(d_2(x),x) = 0$ ise o zaman $D_1 = 0$ veya $D_2 = 0$ dır.

İspat: Hipotezden $\forall x \in R$ için $D_1(d_2(x),x)=0$ dır. (1)

(1) i lineerleştirirsek

$$0 = D_1(d_2(x + y), x + y)$$
$$= D_1(d_2(x) + d_2(y) + 2D_2(x,y) , x + y)$$
$$= D_1(d_2(x),x + y) + D_1(d_2(y),x + y) + 2D_1(D_2(x,y),x + y)$$
$$= D_1(d_2(x), x) + D_1(d_2(x), y) + D_1(d_2(y),x) + D_1(d_2(y),y) + 2D_1(D_2(x,y),x) + 2D_1(D_2(x,y),y)$$
$$= D_1(d_2(x), y) + D_1(d_2(y),x) + 2D_1(D_2(x,y),x) + 2D_1(D_2(x,y),y)$$

(2)

elde edilir. (2) de x yerine –x alınırsa

$$0 = D_1(d_2(-x), y) + D_1(d_2(y),-x) + 2D_1(D_2(-x,y),-x) + 2D_1(D_2(-x,y),y)$$
$$0 = D_1(d_2(x), y) - D_1(d_2(y),x) + 2D_1(D_2(x,y),x) - 2D_1(D_2(x,y),y)$$

(3)

olur. Dolayısıyla (2) ve (3) ü toplarsak

$$0 = 2D_1(d_2(x), y) + 4D_1(D_2(x,y),x)$$

olur ve $\mathrm{char}R \neq 2$ olduğundan $\forall x, y \in R$ için

$$0 = D_1(d_2(x), y) + 2D_1(D_2(x,y),x)$$

(4)

elde edilir. (4) te y yerine xy yazılırsa

$$0 = D_1(d_2(x), xy) + 2D_1(D_2(x,xy),x)$$
$$= D_1(d_2(x), x)y + xD_1(d_2(x),y) + 2D_1(D_2(x,y)y + x D_2(x,y),x)$$
$$= xD_1(d_2(x),y) + 2D_1(d_2(x)y,x) + 2D_1(xD_2(x,y),x)$$
$$= xD_1(d_2(x),y) + 2d_2(x)D_1(y,x) + 2D_1(d_2(x),x)y + 2xD_1(D_2(x,y),x) + 2D_1(x,x)D_2(x,y)$$
$$= x\{ D_1(d_2(x),y) + 2D_1(D_2(x,y),x) \} + 2d_2(x)D_1(x,y) + 2d_1(x)D_2(x,y)$$
$$= 2d_2(x)D_1(x,y) + 2d_1(x)D_2(x,y)$$

ve $\mathrm{char}R \neq 2$ olduğundan $\forall x, y \in R$ için

$0 = d_2(x)D_1(x,y) + d_1(x)D_2(x,y)$

(5)

(5) te y yerine yx yazılırsa ;

$0 = d_2(x)D_1(x,yx) + d_1(x)D_2(x,yx)$

$= d_2(x)\{y D_1(x,x) + D_1(x,y)x\} + d_1(x) \{yD_2(x,x) + D_2(x,y)x\}$

$= d_2(x)yd_1(x) + d_2(x)D_1(x,y)x + d_1(x)yd_2(x) + d_1(x)D_2(x,y)x$

$= d_2(x)yd_1(x) + d_1(x)yd_2(x) + \{d_2(x)D_1(x,y) + d_1(x)D_2(x,y)\}x$

$0 = d_2(x)yd_1(x) + d_1(x)yd_2(x)$ olur ve böylece $\forall x, y \in R$ için

$0 = d_2(x)yd_1(x) + d_1(x)yd_2(x)$

(6)

elde edilir. $d_1 \neq 0$ ve $d_2 \neq 0$ olsun.Bir başka deyişle $d_1(x_1) \neq 0$ ve $d_2(x_2) \neq 0$ olacak biçimde

$x_1, x_2 \in R$ elemanları vardır. (6) da x yerine x_1 yazalım.Bu durumda

$0 = d_1(x_1)yd_2(x_1) + d_2(x_1)yd_1(x_1)$

(7)

elde edilir.Böylece lemma 3.1.2 ve (7) den $d_1(x_1) \neq 0$ olduğundan $d_2(x_1) = 0$ elde edilir.

Tekrar (6) da x yerine x_2 yazılırsa;

$0 = d_1(x_2)yd_2(x_2) + d_2(x_2)yd_1(x_2)$

(8)

olur.Böylece lemma 3.1.2 ve (8) den $d_2(x_2) \neq 0$ olduğundan $d_1(x_2) = 0$ elde edilir.

(5) te x yerine x_2 yazılırsa;

$0 = d_2(x_2)D_1(x_2,y) + d_1(x_2)D_2(x_2,y)$

(9)

olur. $d_1(x_2) = 0$ olduğundan (9) ifadesi $0 = d_2(x_2)D_1(x_2,y)$ olur.Öte yandan bir sabit $x_2 \in R$ ve $y \in R$ için $y \to D_1(x_2,y)$ dönüşümü bir türev idi. O halde $d_2(x_2) \neq 0$ olduğundan lemma 3.1.1 den $\forall y \in R$ için $D_1(x_2,y) = 0$ bulunur.Dolayısıyla $x_1 \in R$ için $D_1(x_2,x_1) = 0$ olur. Benzer olarak (5) te x yerine x_1 yazılır ve işlemler yapılırsa $D_2(x_1,x_2) = 0$ elde edilir.

Şimdi y yerine $x_1 + x_2$ yazalım ;

$d_1(y) = d_1(x_1 + x_2) + d_1 (x_1) + d_1 (x_2) + 2D_1(x_1,x_2) = d_1 (x_1) \neq 0$

$d_2(y) = d_2(x_1 + x_2) + d_2 (x_1) + d_2 (x_2) + 2D_1(x_1,x_2) = d_2 (x_2) \neq 0$ bulunur.

Fakat bu, (6) ve lemma 3.1.2 den $d_1(y) = 0$ veya $d_2(y) = 0$ olmasıyla çelişir.Bu çelişkiye $d_1 \neq 0$ ve $d_2 \neq 0$ kabulümüzle vardık. O halde $d_1 = 0$ veya $d_2 = 0$ dır. Böylece $\forall x \in R$ için $d_1(x) = 0$

ve dolayısıyla $D_1(x,x) = 0$ olur.O halde $\forall x, y \in R$ için

$$0 = D_1(x + y,x + y) = D_1(x ,x + y) + D_1(y,x + y)$$
$$= D_1(x ,x) + D_1(x ,y) + D_1(y ,x) + D_1(y ,y)$$
$$= 2 D_1(x ,y)$$ olur. charR $\neq 2$ olduğundan $\forall x, y \in R$ için $D_1(x ,y) = 0$

ve böylece $D_1 = 0$ olur.

Benzer biçimde $D_2 = 0$ olur ve ispat biter.

Not: $D_1 = D_2$ ise teorem 3.1.3 yarı asal halkalar için de verilebilir.

Teorem 3.1.4 : R karakteristiği ikiden farklı bir asal halka ve $D(.,.):RxR \rightarrow R$ simetrik bi-türev olsun. d, D nin izi olmak üzere $\forall x \in R$ için $D(d(x),x) = 0$ ise o zaman $D = 0$ dır.

İspat : Teorem 3.1.3 te $D_1 = D_2$ alıp, işlemler yapılırsa (6) ifadesi charR $\neq 2$ olduğundan $\forall x, y \in R$ için $0 = d(x)yd(x)$ olur. Böylece $0 = d(x)R\, d(x)$ ve R yarı asal halka olduğundan

$\forall x \in R$ için $0 = d(x)$ olur. Dolayısıyla yukarıda yaptığımız gibi $D = 0$ elde edilir.

Teorem 3.1.5 : R karakteristiği ikiden farklı bir asal halka ve $D_1(.,.):RxR \rightarrow R$, $D_2(.,.):RxR \rightarrow R$ birer simetrik bi-türev olsun d_1 ve d_2, D_1 ve D_2 nin izleri olmak üzere $\forall x \in R$ için

$d_1(d_2(x)) = f(x)$ olacak biçimde $B(.,.):RxR \rightarrow R$ simetrik bi-toplamsal dönüşüm ise o zaman

$D_1 = 0$ veya $D_2 = 0$ dır.Burada f, B nin izidir.

İspat : Hipotezden $\forall x \in R$ için $d_1(d_2(x)) = f(x)$ idi.

(1)

(1) ifadesini lineerleştirirsek

$$d_1(d_2(x + y)) = f(x + y)$$

$d_1(d_2(x) + d_2(y) + 2D_2(x,y)) = f(x) + f(y) + 2B(x,y)$ olur ve buradan

$$D_1(d_2(x) + d_2(y) + 2D_2(x,y), d_2(x) + d_2(y) + 2D_2(x,y)) = f(x) + f(y) + 2B(x,y)$$

$$D_1(d_2(x), d_2(x)) + D_1(d_2(x), d_2(y)) + D_1(d_2(x), 2D_2(x,y))$$
$$+ D_1(d_2(y), d_2(x)) + D_1(d_2(y), d_2(y)) + D_1(d_2(y), 2D_2(x,y)) + D_1(2D_2(x,y),d_2(x))$$

$+ D_1(2D_2(x,y),d_2(y)) + D_1(2D_2(x,y), 2D_2(x,y)) = f(x) + f(y) + 2B(x,y)$

Buradan da

$d_1(d_2(x)) + d_1(d_2(y) + 2 D_1(d_2(x), d_2(y)) + 4D_1(d_2(x), D_2(x,y)) + 4D_1(d_2(y), D_2(x,y)) + 4d_1(D_2(x,y)) = f(x) + f(y) + 2B(x,y)$ elde edilir.Burada (1) i kullanırsak;

$D_1(d_2(x) + d_2(y)) + 2D_1(d_2(x), D_2(x,y)) + 2D_1(d_2(y), D_2(x,y)) + 2d_1(D_2(x,y)) = B(x,y)$ (2)

Bu ifadede x yerine –x yazarsak

$D_1(d_2(-x) + d_2(y)) + 2D_1(d_2(-x), D_2(-x,y)) + 2D_1(d_2(y), D_2(-x,y)) + 2d_1(D_2(-x,y)) = B(-x,y)$

$D_1(d_2(x) + d_2(y)) - 2D_1(d_2(x), D_2(x,y)) - 2D_1(d_2(y), D_2(x,y)) + 2d_1(D_2(x,y)) = -B(x,y)$

Bu ifadede iki tarafı da (–) ile çarparsak

$-D_1(d_2(x) + d_2(y)) + 2D_1(d_2(x), D_2(x,y)) + 2D_1(d_2(y), D_2(x,y)) - 2d_1(D_2(x,y)) = B(x,y)$ (3)

bulunur. (2) ve (3) ü toplarsak

$4D_1(d_2(x), D_2(x,y)) + 4D_1(d_2(y), D_2(x,y)) = 2B(x,y)$ bulunur. $\text{char}R \neq 2$ olduğundan

$\forall x, y \in R$ için $2D_1(d_2(x), D_2(x,y)) + 2D_1(d_2(y), D_2(x,y)) = B(x,y)$ elde edilir. (4)

(4) te x yerine 2x yazılırsa;

$2D_1(d_2(2x), D_2(2x,y)) + 2D_1(d_2(y), D_2(2x,y)) = B(2x,y)$

$16D_1(d_2(x), D_2(x,y)) + 4D_1(d_2(y), D_2(x,y)) = 2B(x,y)$ olur ve $\text{char}R \neq 2$ olduğundan

$\forall x, y \in R$ için, $8D_1(d_2(x), D_2(x,y)) + 2D_1(d_2(y), D_2(x,y)) = B(x,y)$ (5)

elde edilir. Böylece (4) ve (5) toplanırsa

$6D_1(d_2(x), D_2(x,y)) = 0$ olur ve $\text{char}R \neq 2,3$ olduğundan

$\forall x, y \in R$ için $D_1(d_2(x), D_2(x,y)) = 0$ olur. (6)

O halde özel olarak $D_1(d_2(y), D_2(x,y)) = 0$ olur.

Böylece (6) dan (4) ifadesinde B = 0 olur. Dolayısıyla (1) ifadesi

$\forall x \in R$ için $d_1(d_2(x)) = 0$ olur.

(7)

(6) da y yerine yx alalım. Bu durumda

$0 = D_1(d_2(x), D_2(x,yx))$

$= D_1(d_2(x), yD_2(x,x) + D_2(x,y)x)$

$= D_1(d_2(x), yd_2(x)) + D_1(d_2(x), D_2(x,y)x)$

$= D_1(d_2(x), D_2(x,y))x + D_2(x,y)\, D_1(d_2(x), x) + y\, D_1(d_2(x), d_2(x)) + D_1(d_2(x),$ $y)d_2(x)$

$= D_1(d_2(x), D_2(x,y))x + D_2(x,y)\, D_1(d_2(x), x) + y\, d_1(d_2(x)) + D_1(d_2(x), y)d_2(x)$

elde edilir. Dolayısıyla;

$\forall x, y \in R$ için $D_2(x,y)\, D_1(d_2(x), x) + D_1(d_2(x), y)d_2(x) = 0$ olur.

(8)

(8) de y yerine xy alınırsa

$0 = D_2(x,xy)\, D_1(d_2(x), x) + D_1(d_2(x), xy)d_2(x)$

$= D_2(x,x)y\, D_1(d_2(x), x) + xD_2(x, y)D_1(d_2(x), x) + xD_1(d_2(x), y)d_2(x)$ $+ D_1(d_2(x), x)yd_2(x)$

$= d_2(x)y\, D_1(d_2(x), x) + D_1(d_2(x), x)yd_2(x)$ elde edilir ve böylece $\forall x, y \in R$ için

$0 = D_1(d_2(x), x)yd_2(x) + d_2(x)y\, D_1(d_2(x), x)$

(9)

bulunur. Dolayısıyla lemma 3.1.2 ve (9) dan $\forall x, y \in R$ için

$D_1(d_2(x), x) = 0$ veya $d_2(x) = 0$ dır.

Eğer bir $x \in$R için $D_1(d_2(x), x) \neq 0$ ise o zaman $d_2(x) = 0$ dır ve dolayısıyla $D_1(0, x) \neq 0$ elde edilir. Buradan $D_1(0, x) = D_1(x, 0) \Rightarrow D_1(0, x) - D_1(x, 0) = 0 \Rightarrow D_1(-x, x) = 0 \Rightarrow$ $D_1(x, 0) = 0$

olur. Bu ise $D_1(d_2(x), x) \neq 0$ olmasıyla çelişir. O halde $\forall x \in R$ için $D_1(d_2(x), x) = 0$ olur. Böylece teorem 3.1.3 ten $D_1 = 0$ veya $D_2 = 0$ olur ve ispat biter.

Teorem 3.1.6 : R karakteristiği ikiden farklı bir yarı-asal halka ve $D(.,.):RxR \rightarrow R$, simetrik bi-türev d, D nin izi olmak üzere $\forall x \in R$ için $d(d(x)) = f(x)$ ise o zaman D = 0 dır.

İspat : Teorem 3.1.5 ten $D_1 = D_2$ alıp aynı işlemler burada da tekrarlanırsa

$\forall x, y \in R$ için $D(d(x), D(x,y)) = 0$

(1)

ve

$\forall x \in R$ için d(d(x)) = 0

(2)

elde edilir. (1) de y yerine yz yazılırsa

0 = D(d(x), D(x,yz))

= D(d(x), yD(x,z) + D(x,y)z)

= yD(d(x), D(x,z)) + D(d(x),y) D(x,z) + D(x,y)D(d(x),z)

= D(d(x),y) D(x,z) + D(x,y)D(d(x),z)

olur. Bu durumda z yerine d(x) alınırsa

D(x,y)D(d(x),d(x)) + D(d(x),y) D(x,d(x)) olur .Böylece

$\forall x, y \in R$ için D(d(x),y) D(x,d(x)) = 0

(3)

elde edilir. (3) te y yerine xy yazılırsa

0 = D(d(x),xy)D(x,d(x))

={D(d(x),x)y + xD(d(x),y)}D(x,d(x))

= D(d(x),x)yD(d(x),x) + xD(d(x),y)D(x,d(x))

= D(d(x),x)yD(d(x),x) olur.Dolayısıyla

$\forall x, y \in R$ için D(d(x),x)yD(d(x),x) = 0 olur.

(4)

Böylece teorem 3.1.4 ten D = 0 dır ve ispat biter.

3.2 Gamma Halkalarda Simetrik Bi-Türevler

Tanım 3.2.1: M bir Γ halkası ve D(.,.):MxM$\rightarrow$M simetrik bi-toplamsal dönüşümü $\forall x, y, z \in M, \alpha \in \Gamma$ için $D(x\alpha y, z) = D(x, z)\alpha y + x\alpha D(y, z)$ eşitliğini sağlıyorsa D ye gamma halkalarda simetrik bi- türev denir. Ayrıca $\forall x \in M$ için f(x) = D(x,x) şeklinde tanımlanan

f : M$\rightarrow$M fonksiyonuna D nin izi denir. $\forall x, y \in M$ için f nin bir çift fonksiyon ve f(x + y) = f(x) + f(y) + 2D(x,y) olduğu açıktır.

Lemma 3.2.1: M bir asal Γ halka olmak üzere D:M$\to$M bir türev ve a, M nin sabit bir elemanı olsun. Bu durumda $\forall x \in M, \forall \gamma \in \Gamma$ için

$a\gamma D(x) = 0$ ise o zaman a = 0 veya D = 0 dır.

(1)

İspat: (1) de x yerine $x\beta y, \beta \in \Gamma, y \in M$ yazılırsa ;

0 = $a\gamma D(x\beta y)$

= $a\gamma\{x\beta D(y) + D(x)\beta y\}$

= $a\gamma x\beta D(y) + a\gamma D(x)\beta y$ olur ve böylece (1) den

$\forall x, y \in M, \forall \gamma, \beta \in \Gamma$ için $a\gamma x\beta D(y) = 0$

(2)

olur ve dolayısıyla (2) den

$\forall y \in M$ için $a\Gamma M\Gamma D(y) = 0$ elde edilir. M asal ve gamma halka olduğundan a = 0 veya $\forall y \in M$ için D(y) = 0 olur. Böylece a = 0 veya D = 0 elde edilir ve ispat biter.

Teorem 3.2.1: M, karakteristiği ikiden farklı değişmeli olmayan bir asal gamma halka, D(.,.):MxM$\to$M simetrik bi-türev ve d, D nin izi olsun.Bu durumda

$\forall x \in M, \forall \gamma \in \Gamma$ için $[d(x),x]_\gamma = 0$ ise o zaman D = 0 olur.

(1)

İspat: (1) i lineerleştirirsek

$0 = [d(x + y),x + y]_\gamma$

$= [d(x) + d(y) + 2D(x,y), x + y]_\gamma$

$= [d(x),x]_\gamma + [d(x),y]_\gamma + [d(y), x]_\gamma + [d(y),y]_\gamma + 2[D(x,y),x]_\gamma + 2[D(x,y),y]_\gamma$

olur.Dolayısıyla (1) den $\forall x, y \in M, \forall \gamma \in \Gamma$ için

$[d(x),y]_\gamma + [d(y), x]_\gamma + 2[D(x,y),x]_\gamma + 2[D(x,y),y]_\gamma = 0$

(2)

elde edilir. (2)de x yerine –x yazılırsa; $\forall x, y \in M, \forall \gamma \in \Gamma$ için

$[d(x),y]_\gamma - [d(y), x]_\gamma + 2[D(x,y),x]_\gamma - 2[D(x,y),y]_\gamma = 0$

(3)

elde edilir.(2) ve (3) toplanır ve charM$\neq$2 olduğu kullanılırsa $\forall x, y \in M, \forall \gamma \in \Gamma$ için

$[d(x),y]_{\gamma} + 2[D(x,y),x]_{\gamma} = 0$

(4)

elde edilir.(4) te y yerine $x\gamma y, \gamma \in \Gamma$ yazılırsa

$$0 = [d(x), x\gamma y]_{\gamma} + 2[D(x, x\gamma y),x]_{\gamma}$$

$$= x\gamma[d(x),y]_{\gamma} + [d(x),x]_{\gamma}\gamma y - x\gamma(d(x)\gamma y + x\gamma d(x)\gamma y + 2[x\gamma D(x,y),x]_{\gamma} + 2[d(x)\gamma y,x]_{\gamma}$$

$$= \begin{array}{l} x\gamma[d(x),y]_{\gamma} + [d(x),x]_{\gamma}\gamma y - x\gamma(d(x)\gamma y + x\gamma d(x)\gamma y \\ +2\{[x\gamma D(x,y),x]_{\gamma} + [x,x]_{\gamma}\gamma D(x,y) + \\ x\gamma(x\gamma D(x,y)) - x\gamma(x\gamma D(x,y))\} + 2\{d(x)\gamma[y,x]_{\gamma} \\ +[d(x),x]_{\gamma}\gamma y + d(x)\gamma(x\gamma y) - d(x)\gamma(x\gamma y) \end{array}$$

olur ve dolayısıyla (1) ve (4) ten $\forall x,y \in M, \forall \gamma,\beta \in \Gamma$ için

$$\begin{array}{l} x\gamma d(x)\gamma y - x\gamma d(x)\gamma y + 2x\gamma x\gamma D(x,y) \\ -2x\gamma x\gamma D(x,y) + 2d(x)\gamma[y,x]_{\gamma} + 2d(x)\gamma x\gamma y - 2d(x)\gamma x\gamma y \end{array}$$

(5)

(5) te β yerine γ yazılırsa

$$x\gamma d(x)\gamma y - x\gamma d(x)\gamma y + 2x\gamma x\gamma D(x,y) - 2x\gamma x\gamma D(x,y) + 2d(x)\gamma[y,x]_{\gamma} + 2d(x)\gamma x\gamma y - 2d(x)\gamma x\gamma y$$

ve dolayısıyla charM $\neq 2$ olduğu kullanılırsa

$\forall x,y \in M, \forall \gamma \in \Gamma$ için $d(x)\gamma[y,x]_{\gamma} = 0$

(6)

elde edilir. Keyfi bir $x \notin Z(M)$ için $[x,y]_{\gamma} \neq 0$ dır. Öte yandan sabit bir $x \in M$ için

y $\rightarrow$[x,y] dönüşümü bir iç türevdir. Böylece (6) ve lemma 3.2.1 den d(x) = 0 olur.

Şimdi $x \in Z(M)$ ve $y \notin Z(M)$ alalım.Bu durumda $x + y \notin Z(M)$ ve $-y \notin Z(M)$ dir.

Böylece

0 = d(x + y)

= d(x) + d(y) + 2D(x,y)

= d(x) + 2D(x,y)

ve

0 = d(x + (-y))

= d(x) + d(-y) – 2D(x,y)

= d(x) – 2D(x,y)

elde edilir.Bu iki ifadenin toplamı ve charM$\neq$2 olduğundan

$\forall x \in M$ için d(x) = 0 elde edilir. (7)

(7) de x yerine x + y yazılırsa;

$$0 = d(x + y)$$
$$= d(x) + d(y) + 2D(x,y)$$

ve dolayısıyla (7) den ve charM$\neq$2 olduğundan

$\forall x, y \in M$ için D(x,y) = 0 olur ve böylece D = 0 olur ve ispat biter.

Teorem 3.2.2: M karakteristiği ikiden farklı değişmeli olmayan bir asal gamma halka, $D_1(.,.)$:MxM$\rightarrow$M ve $D_2(.,.)$:MxM$\rightarrow$M simetrik bi-türevler ve sırasıyla d_1,d_2 $D_1(.,.)$ ve D_2 (.,.) nin izleri olsun. Bu durumda $\forall x, y \in M, \forall \gamma \in \Gamma$ için $[d_1(x), d_2(y)]_\gamma = 0$

(1)

ise o zaman $D_1 = 0$ veya $D_2 = 0$ dır.

İspat: (1) de y yerine x yazılırsa

$\forall x \in M, \forall \gamma \in \Gamma$ için $[d_1(x),d_2(x)]_\gamma = 0$

(2)

elde edilir.Tekrar (1) de x yerine x + y yazılırsa

$$0 = [d_1(x + y) , d_2(x + y)]_\gamma$$
$$= [d_1(x) + d_1(y) + 2D_1(x,y),d_2(y)]_\gamma$$
$$= [d_1(x) , d_2(y)]_\gamma + [d_1(y) , d_2(y)]_\gamma + 2[D_1(x,y) , d_2(y)]_\gamma$$

olur ve dolayısıyla (1) ve (2) den ve charM$\neq$2 olduğundan

$\forall x, y \in M, \forall \gamma \in \Gamma$ için $[D_1(x,y),d_2(y)]_\gamma = 0$ (3) elde edilir

$$0 = [D_1(x\beta z ,y),d_2(y)]_\gamma$$
$$= x\beta D_1(z, y), d_2(y)]_\gamma + [D_1(x, y)\beta z, d_2(y)]_\gamma$$
$$\begin{aligned} &x\beta[D_1(z, y), d_2(y)]_\gamma + [x, d_2(y)]_\gamma \beta D_1(z, y)]_\gamma + x\beta(d_2(y)\gamma D_1(z, y)) \\ = &-x\gamma(d_2(y)\beta D_1(z, y)) + D_1(x, y)\beta[z, d_2(y)]_\gamma + [D_1(x, y), d_2(y)]_\gamma \beta z \\ &+D_1(x, y)\beta(d_2(y)\gamma z) - D_1(x, y)\gamma(d_2(y)\beta z)\end{aligned}$$

olur.Böylece (3) ten

$\forall x, y, z \in M, \forall \gamma, \beta \in \Gamma$ için

$$\begin{aligned}&[x,d_2(y)]_\gamma \beta D_1(z,y)]_\gamma + x\beta(d_2(y)\gamma D_1(z,y)) - x\gamma(d_2(y)\beta D_1(z,y))\\ &= +D_1(x,y)\beta[z,d_2(y)]_\gamma + [D_1(x,y),d_2(y)]_\gamma \beta z + D_1(x,y)\beta(d_2(y)\gamma z)\\ &-D_1(x,y)\gamma(d_2(y)\beta z)\end{aligned} \tag{4}$$

elde edilir.(4) te β yerine γ yazılırsa

$\forall x,y,z \in M, \forall \gamma \in \Gamma$ için

$$[x,d_2(y)]_\gamma \gamma D_1(z,y) + D_1(x,y)\gamma[z,d_2(y)]_\gamma = 0$$

(5)

elde edilir.(5) te z yerine $z\beta x, \beta \in \Gamma$ yazılırsa

$$0 = [x,d_2(y)]_\gamma \gamma D_1(z\beta x,y) + D_1(x,y)\gamma[z\beta x,d_2(y)]_\gamma$$

$$= \begin{aligned}&[x,d_2(y)]_\gamma \gamma\{z\beta D_1(x,y) + D_1(z,y)\beta z\} + D_1(x,y)\gamma\{z\beta[x,d_2(y)]_\gamma\\ &+[z,d_2(y)]_\gamma \beta x + z\beta(d_2(y)\gamma x) - z\gamma(d_2(y)\beta x\}\end{aligned}$$

$$= \begin{aligned}&[x,d_2(y)]_\gamma \gamma z\beta D_1(x,y) + [x,d_2(y)]_\gamma \gamma D_1(z,y)\beta z + D_1(x,y)\gamma z\beta[x,d_2(y)]_\gamma\\ &+ D_1(x,y)\gamma[z,d_2(y)]_\gamma \beta x + D_1(x,y)\gamma z\beta(d_2(y)\gamma x) - D_1(x,y)\gamma z\gamma(d_2(y)\beta x\end{aligned}$$

olur ve böylece (5) ten

$\forall x,y,z \in M, \forall \gamma,\beta \in \Gamma$ için

$$= \begin{aligned}&[x,d_2(y)]_\gamma \gamma z\beta D_1(x,y) + D_1(x,y)\gamma z\beta[x,d_2(y)]_\gamma\\ &+ D_1(x,y)\gamma z\beta(d_2(y)\gamma x) - D_1(x,y)\gamma z\gamma(d_2(y)\beta x = 0\end{aligned} \tag{6}$$

elde edilir.(6) da β yerine γ yazılırsa

$\forall x,y,z \in M, \forall \gamma \in \Gamma$ için

$$[x,d_2(y)]_\gamma \gamma z\gamma D_1(x,y) + D_1(x,y)\gamma z\gamma[x,d_2(y)]_\gamma = 0$$

(7)

elde edilir. $\forall x,y \in M, \forall \gamma \in \Gamma$ için $[x,d_2(y)]_\gamma = 0$ veya $\forall x,y \in M$ için $D_1(x,y) = 0$ dır.

Böylece teorem 3.2.1 den $D_1 = 0$ veya $D_2 = 0$ elde edilir.İspat biter.

Teorem 3.2.3: M karakteristiği iki ve üçten farklı değişmeli olmayan bir asal Γ halka, D(.,.):MxM$\rightarrow$M simetrik bi-türev ve d, D(.,.) nin izi olsun.Bu durumda $\forall x \in M, \forall \gamma \in \Gamma$ için $[d\ (x),x]_\gamma \in Z(M)$ ise o zaman $D = 0$ dır.

(1)

İspat: (1) de x yerine x + y yazılırsa ;

$$[d(x+y),x+y]_\gamma \in Z(M)$$

$\Rightarrow [d(x)+d(y)+2D(x,y),x+y]_{\gamma} \in Z(M)$

$\Rightarrow [d(x),x]_{\gamma} + [d(x),y]_{\gamma} + [d(y),x]_{\gamma} + [d(y),y]_{\gamma} + 2[D(x,y),x]_{\gamma} + 2[D(x,y),y]_{\gamma} \in Z(M)$

olur ve dolayısıyla (1) den

$\forall x,y \in M, \forall \gamma \in \Gamma$ için

$$[d(y),x]_{\gamma} + [d(x),y]_{\gamma} + 2[D(x,y),x]_{\gamma} + 2[D(x,y),y]_{\gamma} \in Z(M) \qquad (2)$$

elde edilir. (2) de x yerine –x yazılırsa;

$\forall x,y \in M, \forall \gamma \in \Gamma$ için

$$-[d(y),x]_{\gamma} + [d(x),y]_{\gamma} + 2[D(x,y),x]_{\gamma} - 2[D(x,y),y]_{\gamma} \in Z(M) \qquad (3)$$

elde edilir.(2) ve (3) toplanırsa charM$\neq 2$ olduğundan

$\forall x,y \in M, \forall \gamma \in \Gamma$ için

$$[d(x),y]_{\gamma} + 2[D(x,y),x]_{\gamma} \in Z(M) \quad \text{elde edilir.} \qquad (4)$$

Şimdi (4) te y yerine $x\beta x, \beta \in \Gamma$ yazılırsa

$[d(x),x\beta x]_{\gamma} + 2[D(x,x\beta x),x]_{\gamma} \in Z(M)$ elde edilir.

$\Rightarrow x\beta[d(x),x]_{\gamma} + [d(x),x]_{\gamma}\beta x - x\beta(d(x)\gamma x + x\gamma(d(x)\beta x) + 2[x\beta D(x,x) + D(x,x)\beta x, x] \in Z(M)$

$\Rightarrow x\beta[d(x),x]_{\gamma} + [d(x),x]_{\gamma}\beta x - x\beta(d(x)\gamma x) + x\gamma(d(x)\beta x)$

$+ 2x\beta[d(x),x]_{\gamma} + 2[x,x]_{\gamma}\beta d(x) + 2x\beta(x\gamma d(x))$

$- 2x\gamma(x\beta d(x)) + 2d(x)\beta[x,x]_{\gamma} + 2[d(x),x]_{\gamma}\beta x + 2d(x)\beta(x\gamma x) - 2d(x)\gamma(x\beta x) \in Z(M)$

olur ve böylece (1) den

$\forall x \in M, \forall \gamma,\beta \in \Gamma$ için

$$\begin{aligned} &6x\beta[d(x),x]_{\gamma} - x\beta(d(x)\gamma x) + x\gamma(d(x)\beta x) + 2x\beta(x\gamma d(x)) \\ &- 2x\gamma(x\beta d(x)) + 2d(x)\beta(x\gamma x) - 2d(x)\gamma(x\beta x) \in Z(M) \end{aligned} \qquad (5)$$

elde edilir.(5) te β yerine γ yazılırsa ve charM$\neq 2,3$ olduğundan $\forall x \in M, \forall \gamma \in \Gamma$ için

$x\gamma[d(x),x]_{\gamma} \in Z(M)$ elde edilir.Böylece (1) ve (5) ten $\forall y \in M, \forall \gamma \in \Gamma$ için

$x\gamma[d(x),x]_{\gamma} x\gamma y - y\gamma x\gamma[d(x),x]_{\gamma} = 0$

$\Rightarrow [d(x),x]_{\gamma}\gamma x\gamma y - [d(x),x]_{\gamma}\gamma y\gamma x = 0$ elde edilir. $\forall x,y \in M, \forall \gamma \in \Gamma$ için

$$[d(x),x]_{\gamma}\gamma[x,y]_{\gamma} = 0 \qquad (6)$$

elde edilir. Teorem 3.2.1 in ispatında yapılan işlemler keyfi bir $x \notin Z(M)$ için yapılırsa $\forall x \in M, \forall \gamma \in \Gamma$ için $[d(x),x]_{\gamma} = 0$ olur ve böylece teorem 3.1.1 den D = 0 elde edilir.

3.3 Asal ve Yarı-Asal Halkalarda İdealler ve Simetrik Bi-Türevler

Lemma 3.3.1 : D:R$\rightarrow$R , R asal halkasının simetrik-bi-türevi ve I, R nin sıfırdan farklı ideali olsun. Eğer her $x \in I$ için

i) aD(x) = 0

ii) D(x)a= 0

ise o zaman a = 0 veya D = 0 dır.

Lemma 3.3.2 : R bir asal halka ve I, R nin sağ ideali olsun. Eğer I sıfırdan farklı ve değişmeli ise R de değişmelidir.

Lemma 3.3.3 : R asal halka charR$\neq$2 ve I, R nin sıfırdan farklı bir ideali olsun.a ve b R nin sabit iki elemanı olsun.Eğer axb + bxa = 0 $\forall x \in I$ için sağlanıyorsa a = 0 veya b = 0 dır.

İspat: axb + bxa = 0 $\forall x \in I$ için sağlansın.

axb = -axb Bu eşitlikte x yerine xbrax alırsak a(xbrax)b$\in$ I dır

a(xbrax)b = -b(xbrax)a = -b(xbra)xa = -(bxbra)xa = (axbrb)xa = axbr(bxa)

= axbraxb = axbraxb ve burada 2axbraxb = 0 charR$\neq$2 olduğundan ve R asal halka olduğundan axbraxb = 0 buradan axb = 0 R de asal olduğundan a = 0 veya b = 0 dır.

Lemma 3.3.4 : R asal halka ve charR$\neq$2 olsun ve I, R nin sıfırdan farklı bir sağ ideali olsun.

D(.,) : RxR$\rightarrow$R simetrik bi-türev ve d onun izi olsun. Kabul edelim ki $\forall x \in I$ için d(x) = 0 ise d = 0 dır.

İspat: Kabul edelim ki d(x) = 0 $\forall x \in I$ olsun.d yi lineerleştirirsek $\forall x, y \in I$

d(x+y) = d(x) + d(y) + 2D(x,y) = 0

(1)

charR$\neq$2 olduğundan $\forall x, y \in I$ için

D(x,y) = 0 dır

(2)

(2) de y yerine $\forall x, y \in I$ ve $r \in R$ için yr alırsak

D(x,yr) =D(x,y)r + yD(x,r) = 0

(3)

(3) ten yD(x,y) = 0 olur. $\forall x, y \in I$ ve $r \in R$

Bir sağ idealin sağ çarpanı sıfır olduğundan

D(x,r) = 0 $x \in R$ ve $r \in R$

(4)

(4) te x yerine xr yazarsak

D(xr,r) = xD(r,r) + D(x,r)r = 0

xD(r,r) = 0 olur.

xD(r,r) = xd(r) $x \in R$ ve $r \in R$

sağ idealin sağ çarpanı sıfır olacağından d(r) = 0 $\forall\ r \in R$ ise d = 0 dır.

Teorem 3.3.1 :R karakteristiği ikiden farklı değişmeli olmayan asal halka ve I, R nin sıfırdan farklı bir ideali ve D(.,) : RxR$\rightarrow$R simetrik bi-türev ve d onun izi olsun öyle ki D(I,I)$\subset$I.Eğer [x,d(x)] = 0 $\forall x \in I$ ise D = 0 dır.

İspat: Lemma 3.3.2 den I,R nin değişmeli olmayan bir ideali olur.R asal halka olduğundan

I da asal halkadır. Çünkü I, R nin sıfırdan farklı bir ideali idi.

[x,d(x)] = xd(x) – d(x)x = 0 $\forall x \in I$ ve lemma 3.3.1 den $\forall x \in I$ için d(x) = 0 ve dolayısıyla

lemma 3.3.4 ten d(r) = 0 $\forall r \in R$

Teorem 3.3.2: R charR$\neq$2,3 olan değişmeli olmayan asal halka I, R nin sıfırdan farklı bir ideali ve D(.,) : RxR$\rightarrow$R D(I,I)$\subset$I olan simetrik bi-türev ve d onun izi olsun. Eğer

[x,d(x)]$\in Z(R)$ $\forall x \in I$ ise D = 0 dır.

İspat: R değişmeli olmayan asal halka olduğundan $\forall x \in I$ için [x,d(x)] = 0 ve teorem 3.3.1 den

d(r) = 0 $\forall r \in R$ ve dolayısıyla D = 0 olur.

Teorem 3.3.3 :R, charR$\neq$2 olan değişmeli olmayan bir asal halka ve I, R nin ideali olsun. Kabul edelim ki D_1(.,) : RxR$\rightarrow$R ve D_2(.,) : RxR$\rightarrow$R simetrik bi-türevler, d_1,d_2 sırasıyla D_1, D_2 nin izleri olsun. $D_1(d_2(x),x) = 0$ $\forall x \in I$ ise ya $D_1 = 0$ ya da $D_2 = 0$ dır.

İspat: Lemma 3.3.4 ten $d_1(I) = 0$ veya $d_2(I) = 0$ olduğunu göstermeliyiz. Bölüm 3.1 deki çalışmanın 3.1.3. teoremindeki işlemleri aynen uygularsak buradan

$d_2D_1(x,y) + d_1(x)D_2(x,y) = 0$ $\forall x, y \in I$

(5)

$d_1(x)yd_2(x) + d_2(x)yd_1(x) = 0$

(6)

Kabul edelim ki $d_1(I) \neq 0$ ve $d_2(I) \neq 0$ ise $x_1, x_2 \in I$ öyle ki $d_1(x_1) \neq 0$ ve $d_2(x_2) \neq 0$ olur.

Lemma 3.3.3 ten de $d_2(x_1) = d_1(x_2)$ elde edilir.Denklem 5 ten sadeleştirilirse

$d_2(x_2)D_1(x_2,y) = 0$ olur.

Lemma 3.3.1 den $\forall y \in I$ için $D_1(x_2,y) = 0$ Özellikle $D_1(x_2, x_1) = 0$

Benzer şekilde $D_2(x_1, x_2) = 0$ olur.y yerine $x_1 + x_2$ yazılırsa

$d_1(y) = d_1(x_1 + x_2) = d_1(x_1) + d_1(x_2) + 2D_1(x_1, x_2) = d_1(x_1) \neq 0$ Aynı şekilde

$d_2(y) = d_2(x_1) + d_2(x_2) + D_2(x_1, x_2) = d_2(x_2) \neq 0$

Denklem (6) ve lemma 3.3.3 ten $d_1(y)$ ve $d_2(y)$ nın her ikisi birden sıfır olamayacağından

$d_1(I) = 0$ veya $d_2(I) = 0$, lemma 3.3.4 ten $d_1 = 0$ veya $d_2 = 0$ dır. Buradan da $D_1 = 0$ veya

$D_2 = 0$ elde edilir.

Teorem 3.3.4 :R yarı-asal bir halka olsun.Eğer d, R nin ya endomorfizmi ya da anti-endomorfizmi olan bir türevi ise d = 0 dır.

Teorem 3.3.5 : R bir asal halka ve U, R nin sıfırdan farklı sağ ideali olsun. d, R nin bir türevi olmak üzere U üzerinde homomorfizma ya da anti-homomorfizma gibi davranıyorsa R üzerinde d = 0 dır.

Teorem 3.3.4 ve teorem 3.3.5 e göre aşağıdaki iki teoremin ispatını vereceğiz.

R bir asal halka ve I, R nin sıfırdan farklı sol(sağ) ideali olsun. O zaman D(.,) : $R \times R \to R$ sol(sağ) R homomorfizması gibi davranıyor ise $\forall x, y \in I$ ve $\forall\ r \in R$ için

D(rx,y) = rD(x,y)

D(x,ry) = rD(x,y)

D(xr,y) = D(x,y)r

D(x,yr) = D(x,y)r

Teorem 3.3.5 :R asal halka ve I, R nin sıfırdan farklı sol(sağ) ideali olsun. D(.,) : $R \times R \to R$ simetrik bi-türev ve d R nin izi olsun.Eğer D, I da bir sol(sağ) R homomorfizmi ise D = 0 dır.

İspat: Kabul edelim ki I sol ideal ve D, I da sol R homomorfizm olsun.

rD(x,y) = D(x,ry) = D(x,r)y + rD(x,y) $\forall x, y \in I$ ve $\forall\ r \in R$ için elde edilir.

Buradan D(x,r)y = 0 D(x,r) $\forall x, y \in I$ ve $\forall\ r \in R$ elde edilir. D(x,r) I nın sol çarpanının
bir elemanı olduğundan ve R asal halka olduğundan D(x,r) = 0 $\forall x \in I$ ve $\forall\ r \in R$.
Şimdi x yerine r_1x yazalım

$$0 = D(r_1x,r) = r_1D(x,r) + D(r_1,r)x = D(r_1,r)x \quad \forall\ r, r_1 \in R\ \ \forall x \in I$$

Buradan da $\forall\ r, r_1 \in R$ için D(r, r_1) = 0 dır.

Teorem 3.3.6 :R bir yarıasal halka, D(.,) : RxR$\rightarrow$R simetrik bi-türev ve d onun izi olsun.
Eğer D, R de sol R homomorfizma gibi davranıyorsa D = 0 dır.

İspat: Kabul edelim ki D,R de sol R homomorfizma olsun.

rD(x,y) = D(x,ry) = rD(x,y) + D(x,r)y $\forall x, y, r \in R \Rightarrow$ D(x,r)y = 0

R nin yarıasal halka olmasından dolayı D(x,r) = 0 $x, r \in R$ dolayısıyla D = 0 dır.

3.4 Asal ve Yarı-Asal Halkalarda Simetrik Bi-α-Türevler

Bu çalışma boyunca R birleşmeli bir halka ve C, R nin merkezi olarak alınacaktır.
α : R$\rightarrow$R sıfırdan farklı dönüşüm olmak üzere $[x,y]_\alpha$ = xα(y) – yx ve
C_α = { c$\in$R :cα(x) = xc , $\forall x \in$R }biçiminde gösterilecek.Özellikle 1: R$\rightarrow$R birim dönüşüm ise C_1 = C ve $[x,y]_\alpha$ = xy-yx = [x,y] dir.Ayrıca

$$[x,yz]_\alpha = y[x,z]_\alpha + [x,y]_\alpha\, \alpha(z) \text{ ve}$$

$[xy,z]_\alpha = x[y,z]_\alpha + [x,z]y$ özellikleri vardır. Bir d : R$\rightarrow$R toplamsal dönüşümü $\forall x, y \in R$ için d(xy) = d(x)α(y) + xd(y) özelliğini sağlıyorsa o zaman d ye bir α-türev denir. Keyfi bir $a \in R$ve $\forall x \in R$için d_a(x) = $[a,x]_\alpha$ bir (iç) α-türevdir. D: RxR$\rightarrow$R bir dönüşüm olsun. D(.,.) dönüşümü $\forall x, y, z \in R$için

$$D(x + y,z) = D(x,z) + D(y,z) \text{ ve } D(x, y +z) = D(x,y) + D(x,z)$$

özelliğini sağlıyorsa D(.,.) ye *bi-toplamsal dönüşüm* denir.
$\forall x, y \in R$ için D(x,y) = D(y,x) ise D ye *simetrik bi-toplamsal dönüşüm* denir.
Ayrıca $\forall x, y, z \in R$için D(xy,z) = D(x,z)α(y) + D(y,z) sağlanıyorsa D(.,.) ye *simetrik bi-α-türev* denir.Bu durumda $\forall x, y, z \in R$için D(x,yz) = D(x,y)α(z) + yD(x,z) sağlandığı açıktır. D: RxR$\rightarrow$R simetrik bi-toplamsal dönüşüm olmak üzere d(x) =

D(x,x) biçiminde tanımlı olan d: R$\rightarrow$R dönüşümüne D(.,.) nin *izi* denir. D(.,.) simetrik bi-toplamsal olduğundan d(x) = D(x,x) izi $\forall x, y \in R$ için d(x + y) = d(x) + d(y) + 2D(x,y) bağıntısını sağlar ve ayrıca d(x) bir çift fonksiyondur.

Örnek: R bir değişmeli halka olsun.Bu durumda

M = { $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} : a, b \in R$ } kümesi matrislerdeki bilinen toplama ve çarpma işlemleriyle

bir halkadır. α : M$\rightarrow$M $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ bir dönüşüm olmak üzere

D(.,.): MxM$\rightarrow$M

$\left(\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right) \rightarrow \begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & a_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & a_1 a_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ biçiminde tanımlanan dönüşüm bir

simetrik bi-α -türevdir.

Lemma 3.4.1: R bir asal halka, a$\in$ R ve d:R$\rightarrow$R birα -türev olsun.Buna göre

i) U, R nin sıfırdan farklı bir sağ ideali ve ad(U) = 0 ise o zaman a = 0 veya d = 0 dır.

ii) U, R nin sıfırdan farklı bir ideali ve ad(U) = 0 ise o zaman a = 0 veya d = 0 dır.

iii) d(R)a = 0 ise o zaman a = 0 veya d = 0 dır.

iv) U, R nin sıfırdan farklı bir sağ ideali ve $[a,U]_\alpha$ = 0 ise o zaman ve $[a,R]_\alpha$ = 0 dır.

v) a$\in C_\alpha$ ve ab$\in C_\alpha$, b$\in$R ise o zaman a = 0 veya b$\in C_\alpha$ dir.

Teorem 3.4.1 : R karakteristiği ikiden farklı değişmeli olmayan bir asal halka α :R$\rightarrow$R bir otomorfizma olmak üzere D(.,.), R nin simetrik bi-α -türev ve d onun izi olsun.Bu durumda $\forall x \in R$ için $[d(x),x]_\alpha$ = 0 ise o zaman D = 0 dır.

(1)

İspat: Bölüm 3.1 deki (1) den (4) e kadar aynı işlemler yapılırsa

$\forall x, y \in R$ için $[d(x),y]_\alpha + 2[D(x,y),x]_\alpha = 0$

(2)

elde edilir. Şimdi (2) de y yerine xy yazılırsa

$0 = [d(x),xy]_\alpha + 2[D(x,xy),x]_\alpha$

$= x[d(x),y]_\alpha + [d(x),x]_\alpha\, \alpha(y) + 2[d(x)\alpha(y),x]_\alpha + 2[xD(x,y),x]_\alpha$

$= x[d(x),y]_\alpha + [d(x),x]_\alpha\, \alpha(y) + 2d(x)[\alpha(y),x]_\alpha + 2[d(x),x]_\alpha\, \alpha(y) +$ $2x[D(x,y),x]_\alpha + 2[x,x]D(x,y)$ olur ve dolayısıyla (1) , (2) ve charR $\neq 2$ olduğundan

$\forall x, y \in R$ için $d(x)[\alpha(y),x]_\alpha = 0$ elde edilir.

(3)

Keyfi bir $x \notin C_\alpha$ için $[x,\alpha(y)]_\alpha \neq 0$ dır.Öte yandan sabit bir $x \in R$ için $y \to [x,\alpha(y)]_\alpha$ dönüşümü bir α -türevdir.Böylece (3) ve lemma 3.4.1 (ii) den d(x) = 0 olur. $x \in C_\alpha$ ve $y \notin C_\alpha$ alalım. $x + y \notin C_\alpha$ dır.Dolayısıyla d(y) = 0 ve d(x + y) = 0 olur.Böylece

$0 = d(x + y) = d(x) + 2D(x,y)$ ve

$0 = d(x +(-y)) = d(x) - 2D(x,y)$ olur. charR $\neq 2$ olduğundan $\forall x \in R$ için d(x) = 0 olur ve buradan D = 0 elde edilir ve ispat biter.

Teorem 3.4.2 : R karakteristiği iki ve üçten farklı değişmeli olmayan bir asal halka, α :R$\to$R bir otomorfizma olmak üzere, D(.,.), R nin simetrik bi-α -türev ve d onun izi olsun. Bu durumda $\forall x \in R$ için $[d(x),x]_\alpha \in C_\alpha$ ise o zaman D = 0 dır.

(4)

İspat: Bölüm 3.1 deki (6) dan (9) a kadar olan işlemler aynen (4) e uygulanırsa

$\forall x, y \in R$ için $[d(x),y]_\alpha + 2[D(x,y),x]_\alpha \in C_\alpha$

(5)

elde edilir.(5) te y yerine x^2 yazılırsa

$= [d(x), x^2]_\alpha + 2[D(x, x^2),x]_\alpha \in C_\alpha$

$= x[d(x),x]_\alpha + [d(x),x]_\alpha\, \alpha(x) + 2[d(x)\alpha(x),x]_\alpha + 2[xd(x),x]_\alpha \in C_\alpha$

$= x[d(x),x]_\alpha + [d(x),x]_\alpha\, \alpha(x) + 2d(x)[\alpha(x),x]_\alpha + 2[d(x),x]_\alpha\, \alpha(x)$ $+2x[d(x),x]_\alpha + 2[x,x]d(x) \in C_\alpha$ olur. $[d(x),x]_\alpha \in C_\alpha$ olduğundan

$[d(x),x]_\alpha\, \alpha(x) = x[d(x),x]_\alpha$ dır.

Öte yandan α otomorfizma olduğundan $\alpha(x) = y$ olacak biçimde bir $y \in R$ vardır. Bunu $\forall x \in R$ için yapabileceğimizden

$\forall x, y \in R$ için $6x[d(x),x]_\alpha + 2d(x)[y,x] \in C_\alpha$

(6)

elde edilir.(6) da y yerine x yazılırsa charR $\neq 2,3$ olduğundan

$\forall x \in R$ için x$[d(x),x]_{\alpha} \in C_{\alpha}$

(7)

elde edilir.Böylece (4) ve (7) den $\forall y \in R$ için x$[d(x),x]_{\alpha}\,\alpha(y)$ = yx$[d(x),x]_{\alpha}$ ve buradan

$\{xy - yx\}[d(x),x]_{\alpha} = 0$ olur.Dolayısıyla $\forall x, y \in R$ için $[x,y][d(x),x]_{\alpha} = 0$ elde edilir. Teorem 3.4.1 deki gibi keyfi bir $x \notin C_{\alpha}$ için işlemler yapılırsa $\forall x \in R$ için $[d(x),x]_{\alpha} = 0$ ve böylece teorem 3.4.1 den D = 0 olur ve ispat biter.

Teorem 3.4.3: R karakteristiği ikiden farklı bir asal halka ve α:R$\rightarrow$R bir otomorfizma olmak üzere $D_1(.,.)$,$D_2(.,.)$, R nin simetrik bi-α-türevleri ve d_1 ,d_2 , $D_1(.,.)$,$D_2(.,.)$ nin izleri olsun.

Bu durumda $\forall x \in R$ için $D_1(d_2(x),x) = 0$

(8)

ise o zaman $D_1 = 0$ veya $D_2 = 0$ dır.

İspat: Bölüm 3.1 deki (11) den (12) ye kadar olan işlemlerin aynısı (8) e uygulanırsa

$\forall x, y \in R$ için $D_1(d_2(x),y) + 2D_1(D_2(x,y),x) = 0$

(9)

elde edilir.Şimdi (9) da y yerine xy yazılırsa

$0 = D_1(d_2(x),xy) + 2D_1(D_2(x,xy),x)$

$= D_1(d_2(x),x)\alpha(y) + xD_1(d_2(x),y) + 2D_1(d_2(x\alpha(y),x) + 2D_1(xD_2(x,y),x)$

$= D_1(d_2(x),x)\alpha(y) + xD_1(d_2(x),y) + 2D_1(d_2(x,x)\alpha^2(y) + 2d_2(x)D_1(\alpha(y),x) +$
$2d_1(x)\alpha(D_2(x,y)) + 2xD_1(D_2(x,y),x)$

olur ve dolayısıyla (1), (9) ve charR $\neq 2$ olduğundan

$\forall x, y \in R$ için $d_2(x)D_1(\alpha(y),x) + d_1(x)\alpha(D_2(x,y)) = 0$

(10)

elde edilir. (10) da y yerine yx yazılırsa

$\forall x, y \in R$ için $d_2(x)\alpha(y)D_1(\alpha(x),x) + d_1(x)\alpha(y)\alpha(d_2(x)) = 0$

(11)

elde edilir. α otomorfizma olduğundan $\alpha(x) = z$ olacak biçimde bir $z \in R$ vardır.O halde

$\forall x, y, z \in R$ için $d_2(x)\alpha(y)D_1(z,x) + d_1(x)\alpha(y)\alpha(d_2(x)) = 0$

(12)

dir.(12) de z yerine – z alınırsa

$\forall x, y, z \in R$ için $- d_2(x)\alpha(y)D_1(z,x) + d_1(x)\alpha(y)\alpha(d_2(x)) = 0$

(13)

elde edilir.(12) ve (13) toplanırsa charR $\neq 2$ olduğundan

$\forall x, y \in R$ için $d_1(x)\alpha(y)\alpha(d_2(x)) = 0$

(14)

elde edilir.Varsayalım ki $d_1 \neq 0$ ve $d_2 \neq 0$ olsun.Bu durumda $d_1(x_1) \neq 0$ ve $d_2(x_2) \neq 0$ olacak biçimde x_1 ve $x_2 \in R$ vardır.Böylece (14) de x yerine x_2 yazılırsa; $d_1(x_2)\alpha(y)\alpha(d_2(x_2)) = 0$ olur ve dolayısıyla $d_2(x_2) \neq 0$,R asal halka ve α otomorfizma olduğundan $d_1(x_2) = 0$ dır.O halde (10) da x yerine x_2 yazılırsa $d_1(x_2) = 0$ olur.

$\forall y \in R$ için $d_2(x_2)D_1(\alpha(y), x_2) = 0$

(15)

elde edilir.Öte yandan sabit bir $x_2 \in R$ ve $\forall y \in R$ için $y \rightarrow D_1(\alpha(y), x_2)$ bir α-türevdir.

Böylece (15) ve lemma 3.4.1 (ii) den $\forall y \in R$ için $D_1(\alpha(y), x_2) = 0$ dır. O halde x_1, $x_2 \in R$ için

$D_1(x_1, x_2) = 0$ dır.

Şimdi tekrar (14) te x yerine x_1 yazılırsa $d_1(x_1) \neq 0$, R asal ve α otomorfizma olduğundan $d_2(x_1) = 0$ dır.Dolayısıyla (10) da x yerine x_1 yazılırsa $d_2(x_1) = 0$ olduğundan

$\forall y \in R$ için $d_1(x_1)\alpha(D_2(x_1,y)) = 0$

(16)

elde edilir. (16) da y yerine yz yazılırsa

$0 = d_1(x_1)\alpha(D_2(x_1,yz))$

$= d_1(x_1)\alpha(D_2(x_1,y)\alpha(z) + yD_2(x_1,z))$

$= d_1(x_1)\{\alpha(D_2(x_1,y)\alpha^2(z) + \alpha(y)\alpha(D_2(x_1,z))\}$

$= d_1(x_1)\alpha(D_2(x_1,y)\alpha^2(z) + d_1(x_1)\alpha(y)\alpha(D_2(x_1,z))$ olur.Dolayısıyla (16) dan

$\forall y, z \in R$ için $d_1(x_1)\alpha(y)\alpha(D_2(x_1,z)) = 0$ olur.

(17)

$d_1(x_1) \neq 0$, R asal ve α otomorfizma olduğundan $D_2(x_1,z) = 0$ ve dolayısıyla $D_2(x_1, x_2) = 0$ elde edilir. $x_1 + x_2 = z$ olsun. O halde

$d_1(z) = d_1(x_1 + x_2) = d_1(x_1) + d_1(x_2) + 2D_1(x_1,x_2) = d_1(x_1) \neq 0$

$d_2(z) = d_2(x_1 + x_2) = d_2(x_1) + d_2(x_2) + 2D_2(x_1,x_2) = d_2(x_2) \neq 0$

olur.Böylece (14) ten ve R asal halka olduğundan $d_1(z)$ ve $d_2(z)$ aynı anda sıfırdan farklı olamaz.O halde $d_1 = 0$ veya $d_2 = 0$ olmak zorundadır.Böylece $D_1 = 0$ veya $D_2 = 0$ dır. İspat biter.

Teorem 3.4.4 : R 2-torsion free bir yarı asal halka, α :R$\to$R bir idempotent otomorfizma olmak üzere, D(.,.), R nin simetrik bi-α -türev ve d onun izi olsun.Bu durumda

$\forall x \in R$ için D(d(x),x) = 0 ise o zaman D = 0 dır.

İspat: Teorem 3.4.3 de $D_1 = D_2$ alınıp işlemler yapılırsa (14) ifadesi

$\forall x, y \in R$ için $d(x)\alpha(y)\alpha(d(x)) = 0$

(18)

olur. α :R$\to$R bir idempotent otomorfizma olduğundan

$\forall x, y \in R$ için $d(x)yd(x) = 0$ elde edilir.

(19)

Böylece R yarı-asal halka olduğundan $\forall x \in R$ için d(x) = 0 ve dolayısıyla D = 0 olur.

Teorem 3.4.5 : R karakteristiği ikiden farklı bir asal halka ve α:R$\to$R bir otomorfizma olmak üzere $D_1(.,.)$,$D_2(.,.)$, R nin simetrik bi-α -türevleri ve d_1 ,d_2 , $D_1(.,.)$,$D_2(.,.)$ nin izleri olsun.

Bu durumda $\forall x \in R$ için $d_1(d_2(x)) = f(x)$

(20)

olacak biçimde izi f(x) olan R nin bir B(.,.) simetrik bi-toplamsal dönüşümü varsa o zaman

$D_1 = 0$ veya $D_2 = 0$ dır.

İspat: (20) ifadesini lineerleştirip Bölüm 3.1 deki işlemler yapılırsa

$\forall x, y \in R$ için $D_1(d_2(x),y) + 2d_1(D_2(x,y)) = 0$

(21)

$\forall x, y \in R$ için $D_1(d_2(x),D_2(x,y)) = 0$

(22)

$\forall x \in R$ için $d_1(d_2(x)) = 0$

(23)

elde edilir. (22) de y yerine yx alınırsa

$$0 = D_1(d_2(x),D_2(x,yx))$$
$$= D_1(d_2(x),D_2(x,y)\alpha(x)) + D_1(d_2(x),yd_2(x))$$
$$= D_1(d_2(x),D_2(x,y))\alpha^2(x) + D_2(x,y)D_1(d_2(x),\alpha(x)) + D_1(d_2(x),y)\alpha(d_2(x)) + yd_1(d_2(x))$$

olur dolayısıyla (22) ve (23) den

$\forall x, y \in R$ için $D_1(d_2(x),y)\alpha(d_2(x)) + D_2(x,y)D_1(d_2(x),\alpha(x)) = 0$

(24)

elde edilir. α otomorfizma olduğundan $\alpha(x) = z$ olacak biçimde bir $z \in R$ vardır.Dolayısıyla

$\forall x, y, z \in R$ için $D_1(d_2(x),y)\alpha(d_2(x)) + D_2(x,y)D_1(d_2(x),z) = 0$

(25)

olur.(25) te z yerine –z yazılırsa

$\forall x, y, z \in R$ için $D_1(d_2(x),y)\alpha(d_2(x)) - D_2(x,y)D_1(d_2(x),z) = 0$

(26)

elde edilir.(25) ve (26) toplanırsa ve charR $\neq 2$ olduğu da kullanılırsa

$\forall x, y \in R$ için $D_1(d_2(x),y)\alpha(d_2(x))$

(27)

elde edilir.(27) de y yerine yz yazılırsa

$$0 = D_1(d_2(x),yz)\alpha(d_2(x))$$
$$= D_1(d_2(x),y)\alpha(z)\alpha(d_2(x)) + yD_1(d_2(x),z)\alpha(d_2(x))$$

olur ve dolayısıyla (27) den

$\forall x, y, z \in R$ için $D_1(d_2(x),y)\alpha(z)\alpha(d_2(x)) = 0$ elde edilir.Buradan

$\forall x \in R$ için $D_1(d_2(x),x) = 0$ olduğunu göstermek istiyoruz.Varsayalım ki en az bir $x_1 \in R$ için

$D_1(d_2(x_1), x_1) \neq 0$ olsun.Bu durumda $\forall y \in R$ için $D_1(d_2(x_1), x_1)\alpha(z)\alpha(d_2(x_1)) = 0$

elde edilir. $D_1(d_2(x_1), x_1) \neq 0$, R asal ve α otomorfizma olduğundan $d_2(x_1) = 0$ dır.Böylece

$d_2(x_1) = 0$ ise o zaman $D_1(d_2(x_1), x_1) = D_1(0, x_1) = 0$ olacağından çelişki elde edilir.

O halde $\forall x \in R$ için $D_1(d_2(x),x) = 0$ dır. Dolayısıyla teorem 3.4.3 ten $D_1 = 0$ veya $D_2 = 0$ dır.

Teorem 3.4.6 : R karakteristiği iki ve üçten farklı bir yarı asal halka, α:R$\rightarrow$R bir idempotent otomorfizma olmak üzere D(.,.), R nin simetrik bi-α-türevi B(.,.) simetrik bi-toplamsal dönüşüm ve sırasıyla d ve f, D ve B nin izleri olsun.Bu durumda $\forall x \in R$ için d(d(x)) = f(x) ve
dα = αd ise o zaman D = 0 dır.

İspat: Teorem 3.4.5 te $D_1 = D_2$ alınırsa (22) ve (23) ifadeleri

$\forall x, y \in R$ için D(d(x),D(x,y)) = 0

(28)

$\forall x \in R$ için d(d(x)) = 0

(29)

olur. (28) de y yerine yz yazılırsa

$$
\begin{aligned}
0 &= D(d(x),D(x,yz)) \\
&= D(d(x),D(x,y)\alpha(z)) + D(d(x),yD(x,z)) \\
&= D(d(x),D(x,y))\alpha^2(z) + D(x,y)D(d(x),\alpha(z)) + D(d(x),y)\alpha(D(x,z)) + yD(d(x),D(x,z))
\end{aligned}
$$

olur ve dolayısıyla (28) den

$\forall x, y, z \in R$ için + D(x,y)D(d(x),α(z)) + D(d(x),y)α(D(x,z)) = 0

(30)

elde edilir.(30) da z = d(x) alınırsa $\alpha^2 = \alpha$ ve dα = αd olduğundan (29) dan

$\forall x, y \in R$ için α(D(d(x),y)D(d(x),x) = 0

(31)

elde edilir. α otomorfizma olduğundan (31) de y yerine xy alınırsa (31) den

$\forall x, y \in R$ için D(d(x),x)yD(d(x),x) = 0

elde edilir.Böylece R yarı asal olduğundan $\forall x \in R$ için D(d(x),x) = 0 ve dolayısıyla teorem 3.4.4 ten de D = 0 olur ve ispat biter.

Bu bölümden sonraki bölümlerde daha önce ispatlı veya ispatsız olarak verilen çalışmaların ışığında yapmış olduğumuz çalışmaları vereceğim.

3.5 Asal Gamma Halkalarda Simetrik Bi –Türevler

Bu çalışmada Young Bae Jun un asal halkalarda simetrik bi türevle yaptığı ispatlar asal gamma halkalara taşıdık. Bu çalışma boyunca R birleşmeli halka olacak.

$[x,y] = xy - yx$ ve $[x,y]_\gamma = x\gamma y - y\gamma x$ komutatörleri tanımlanacak.

D(.,.) dönüşümü D(x,y) = D(y,x) şartını sağlıyorsa D ye simetrik dönüşüm denir. Bu çalışma boyunca D simetrik olarak alınacaktır. d(x) = D(x,x) olarak tanımlanan $d:R \rightarrow R$ fonksiyonuna D nin izi denir.Eğer D, bi-toplamsal bir dönüşüm ise o zaman

$$d(x + y) = d(x) + d(y) + 2D(x,y) \text{ olduğu açıktır.}$$

Eğer D fonksiyonu

$$\forall x, y, z \in R \text{ için toplamsal ve } D(x\gamma y,z) = D(x,z)\gamma y + x\gamma D(y,z)$$

şartını sağlarsa o zaman D ye gamma halkalarında simetrik bi- türev denir.

Lemma 3.5.1: R karekteristiği ikiden farklı bir asal gamma halka olsun.D(.,.) simetrik bi- türev ve d de D(.,.) nın izi olsun. Eğer U, R nin $a\gamma d(U) = 0$ $\{d(U)\gamma a = 0\}$ sağlayan bir ideali ise o zaman a = 0 veya d = 0 dır.

Lemma 3.5.2: R karekteristiği ikiden farklı bir asal gamma halka olsun.D(.,.) simetrik bi- türev ve d de D(.,.) nin izi olsun. a, R nin sabit elemanı olsun.

i) Eğer $\forall a \in R$ için $[a,d(x)]_\gamma = 0$ ise o zaman $a \in Z$ veya d = 0 dır.

ii) $\forall x \in R$ için $[a,d(x)]_\gamma \in Z$ ve d izi için $d(a) \neq 0$ ise o zaman $a \in Z$ dir.

Lemma 3.5.3 : R bir asal gamma halka $a, b, c \in R$ olsun. Eğer $\forall x \in R$ için $a\gamma x\gamma b = c\gamma x\gamma a$ ise o zaman a = 0 veya b = c dır.

Lemma 3.5.4 : R karakteristiği ikiden farklı asal gamma halka d_1 ve d_2 de $D_1(.,.)$ ve $D_2(.,.)$ simetrik bi-türevlerinin izleri olsunlar. Eğer $\gamma \in \Gamma$ için

$$d_1(x)\gamma d_2(y) = d_2(x)\gamma d_1(y)$$

(1)

eşitliği sağlanıyor ve $d_1 \neq 0$ ise o zaman $d_2(x) = \lambda\ \gamma\ d_1(x)$ olan $\lambda \in C_\gamma$ vardır.

İspat: $\forall x, y, z \in R$ için $d_1(x)\gamma d_2(y) = d_2(x)\gamma d_1(y)$ olduğunu kabul edelim.

Bu eşitlikte y yerine y + z koyarsak

$$d_1(x)\gamma D_2(y,z) = d_2(x)\gamma D_1(y,z) \text{ elde ederiz.}$$

(2)

Bu eşitlikte z yerine zγ y yazar ve simetrik bi türev özelliklerini kullanarak açarsak

$d_1(x)\gamma z\gamma d_2(y) = d_2(x)\gamma z\gamma d_1(y)$ elde edilir.

(3)

Bu eşitlikte de y yerine x alırsak

$d_1(x)\gamma z\gamma d_2(x) = d_2(x)\gamma z\gamma d_1(x)$ elde edilir.

(4)

Eğer $d_1 \neq 0$ ise o zaman $d_2(x) = \lambda(x)\gamma d_1(x)$ olan $\lambda(x) \in C_\gamma$ vardır.

O zaman sonuç olarak $d_1(x) \neq 0$ ve $d_1(y) \neq 0$ ise o zaman (3) ten

$(\lambda(y) - \lambda(x))\ \gamma z\gamma d_1(y) = 0$ dır.R asal halka olduğundan ve lemma 3.5.1 den

$\lambda(y) = \lambda(x)$ elde edilir.

Bu da bize gösterir ki $d_1 \neq 0$ ise o zaman $d_2(x) = \lambda\ \gamma d_1(x)$ olan $\lambda \in C_\gamma$ vardır.

Diğer taraftan kabul edelim ki $d_1(x) = 0$ olsun. (3) ten $d_1(y) \neq 0$ olduğundan ve R asal gamma halka olduğundan $d_2(x) = 0$ elde edilir.Sonuç olarak yine $d_2(x) = \lambda\ \gamma d_1(x)$ olan $\lambda \in C_\gamma$ vardır.

Teprem 3.5.1 : R karakteristiği ikiden farklı asal gamma halka ve $d_1 \neq 0$, d_2, d_3, $d_4 \neq 0$ da $D_1(.,.)$,$D_2(.,.)$,$D_3(.,.)$,$D_4(.,.)$ simetrik bi-türevlerinin izleri olsunlar. Eğer $\gamma \in \Gamma$ için

$d_1(x)\gamma d_2(y) = d_3(x)\gamma d_4(y)$

(5)

eşitliği sağlanıyor ise o zaman $d_2(x) = \lambda\ \gamma d_4(x)$ ve $d_3(x) = \lambda\ \gamma d_1(x)$ olan $\lambda \in C_\gamma$ vardır.

İspat: $x, y, z, w \in R$ ve $d_1(x)\gamma d_2(y) = d_3(x)\gamma d_4(y)$ olsun.

Bu eşitlikte y yerine y + z yazarsak

$d_1(x)\gamma D_2(y,z) = d_3(x)\gamma D_4(y,z)$ elde ederiz.

(6)

Bu eşitlikte z yerine zγ y yazarsak ve (6) yı tekrar kullanırsak

$d_1(x)\gamma z\gamma d_2(y) = d_3(x)\gamma z\gamma d_4(y)$ elde edilir

(7)

Bu eşitlikte de $z\gamma d_4(w)$ yazarsak

$d_1(x)\gamma z\gamma d_4(w)\gamma d_2(y) = d_3(x)\gamma z\gamma d_4(w)\gamma d_4(y) = d_1(x)\gamma z\gamma d_2(w)\gamma d_4(y)$ elde edilir.

Bu eşitlikte soldan $d_1(x)\gamma z$ parantezine alırsak

$d_1(x)\gamma z\gamma(d_4(w)\gamma d_2(y) - d_2(w)\gamma d_4(y)) = 0$ elde edilir.

$d_1 \neq 0$ olduğundan ve R asal gamma halka olduğundan

$d_4(w)\gamma d_2(y) = d_2(w)\gamma d_4(y)$ elde edilir. Burada lemma 3.5.4 ü uygularsak

$d_2(y) = \lambda\gamma d_4(y)$ olan $\lambda \in C_\gamma$ vardır.

(7) den de $(\lambda\gamma d_1(x) - d_3(x))\gamma z\gamma d_4(y) = 0$ elde edilir.Yani $\lambda\gamma d_1(x) = d_3(x)$ tir.

Bu da ispatı tamamlar.

Teorem 3.5.2 : R karakteristiği iki ve üçten farklı asal gamma halka d de D(.,.) simetrik bi- türevinin izi olsun. R nin sabit a elemanı için ve $d(a) \neq 0$ iken $\forall x \in R$ için

$d(x)\gamma a\gamma d(x) = 0$

(8)

sağlanıyorsa o zaman $a \in Z$ dir.

İspat: (8) denklemini lineerleştirir ve tekrar (8) i kullanırsak $\forall x, y \in R$ için

$d(x)\gamma a\gamma d(y) + 2d(x)\gamma a\gamma D(x,y) + d(y)\gamma a\gamma d(x) + 2d(y)\gamma a\gamma D(x,y) +$
$2D(x,y)\gamma a\gamma d(x) + 2D(x,y)\gamma a\gamma d(y) + 4D(x,y)\gamma a\gamma Dx,y) = 0$ elde edilir.

(9)

Bu eşitlikte x yerine –x yazarsak

$d(x)\gamma a\gamma d(y) - 2d(x)\gamma a\gamma D(x,y) + d(y)\gamma a\gamma d(x) - 2d(y)\gamma a\gamma D(x,y) -$
$2D(x,y)\gamma a\gamma d(x) - 2D(x,y)\gamma a\gamma d(y) + 4D(x,y)\gamma a\gamma Dx,y) = 0$ elde edilir.

(10)

(9) ve (10) u taraf tarafa toplarsak ve $\mathrm{char}R \neq 2$ olduğunu kullanırsak

$d(x)\gamma a\gamma d(y) + d(y)\gamma a\gamma d(x) + 4D(x,y)\gamma a\gamma D(x,y) = 0$ elde edilir.

(11)

Şimdi (11) de x yerine x + y yazıp açarsak, (8) ile (11) ve $\mathrm{char}R \neq 2$ olduğunu kullanırsak

$D(x,y)\gamma a\gamma d(y) + d(y)\gamma a\gamma D(x,y) + 2d(x)\gamma a\gamma D(x,y) + 2D(x,y)\gamma a\gamma d(x) = 0$

(12)

olur.

(12) de y yerine x + y yazıp (8), (11),(12) yi kullanırsak

D(x,y) γ a γ d(x) + d(x) γ a γ (Dx,y) = 0 elde edilir.

(13)

(13) te y yerine y γ z yazarsak ve D(x,y) γ a γ d(y) = -d(y) γ a γ D(x,y) ve

D(z,y) γ a γ d(y) = -d(y)aD(z,y) olduğu da hatırlanırsa

D(x,y) γ [z,a γ d(y)]$_\gamma$ = [x,d(y) γ a]$_\gamma$ γ D(z,y) elde edilir.

(14) (14) te x yerine x γw yazılırsa ve (14) kullanılırsa

D(x,y) $\gamma w \gamma$ [z,a γ d(y)]$_\gamma$ = [x,d(y) γ a]$_\gamma$ $\gamma w \gamma$ D(z,y) elde edilir.

(15)

Bu eşitlikte de z yerine x alınırsa

D(x,y) $\gamma w \gamma$ [x,a γ d(y)]$_\gamma$ = [x,d(y) γ a]$_\gamma$ $\gamma w \gamma$ D(x,y) elde edilir.

R asal gamma halka olduğundan D(x,y) = 0 veya [x,a γ d(y)]$_\gamma$ = [x,d(y) γ a]$_\gamma$ = 0 dır.

Diğer bir deyişle A = { x $\in$ R : D(x,y) = 0 } ve B = { x $\in$ R : [x,a γ d(y) – d(y) γ a]$_\gamma$ = 0 }

R nin altkümeleri olsun. O zaman R bu iki kümenin bileşkesidir.

R halkası bu iki kümenin bileşkesi olarak yazılamayacağından R = A veya R = B dir. R = A olamayacağından R = B dir. Yani [a,d(y)]$_\gamma$ $\in$ Z elde edilir. Lemma 3.5.2 (ii) den a $\in$ Z dir.

3.6 Gamma Near Halkalarda $\Gamma-(\sigma,\tau)$ - Türev

Bu çalışmamızda ispatsız olarak bölüm 2.5 de verilen ispatlar $\Gamma-(\sigma,\tau)$- türeve taşınarak yapılmıştır. Tüm Near halkalar soldan dağılma özeliğine sahiptir. Γ- Near halka aşağıdaki özelliklere sahip olan $(M,+,\gamma)$ üçlüsüdür.

(i) $(M,+)$ gruptur.

(ii) Γ boştan farklıdır ve M üzerinde iki işlem tanımlıdır öyle ki $(M,+,\gamma)$ bir Near halkadır.

(iii) $(x\beta y)\gamma z = x\beta(y\gamma z)$ dir. $\forall x,y,z \in M$, $\beta,\gamma \in \Gamma$

M, Γ- Near halkası için $M_0 = \{x \in M : 0\gamma x = 0,\ \forall \gamma \in \Gamma\}$ kümesi M nin sıfır simetrik kısmıdır. Eğer $M = M_0$ ise M ye *sıfır simetrik* denir.

Eğer $\forall x \in M, u \in U$ için $x\gamma u \in U$ oluyorsa M, Γ- Near halkasının U alt kümesine *sol invaryant* denir.

Eğer $\forall x \in M, u \in U$ için $u\gamma x \in U$ oluyorsa M, Γ- Near halkasının U alt kümesine *sağ invaryant* denir.

Hem sol hem de sağ invaryant ise o zaman U ya invaryant denir.

Eğer $\forall x \in M$ için $x\Gamma M\Gamma y = 0$ iken $x = 0$ veya $y = 0$ oluyorsa o zaman M ye asal Γ- Near halkası denir.

M ve $M^{'}$ Γ- Near halkalar ve $d : M \to M^{'}$ $d(x+y) = d(x) + d(y)$ ve $d(x\gamma y) = d(x)\gamma d(y)$ oluyorsa d dönüşümüne Γ- Near halka homomorfizmi denir.

$\Gamma - (\sigma,\tau)$ türev $d(x\gamma y) = d(x)\gamma\sigma(y) + \tau(x)\gamma d(y)$ şartını sağlayan toplamsal bir endomorfizmadır.

$c \in M$ için $d(c) = 0$ oluyorsa c ye sabit denir.

S, M Γ- Near halkasının alt kümesi ve d, M de $\Gamma - (\sigma,\tau)$ türev olsun. $\forall x, y \in S$ için $d(x\gamma y) = d(x)\gamma d(y)$ oluyorsa d, S üzerinde Γ homomorfizmi olarak etkir denir.

Bu çalışmamız boyunca M, Γ- Near halkasının sıfır simetriği olacak ve C olarak da M nin çarpımsal merkezini göstereceğiz.

$C_{(\sigma,\tau)} = \{x \in M : x\gamma\sigma(m) = \tau(m)\gamma x \quad \forall m \in M, \gamma \in \Gamma\}$

$\forall x, y \in M, \gamma \in \Gamma$ için $[x,y]^{\gamma}_{(\sigma,\tau)} = x\gamma\sigma(y) - \tau(y)\gamma x$ komutatörü olarak tanımlanacaktır.

$(x,y) = x + y - x - y$ ile toplamsal grup komutatörü gösterilecek.

Diğer kullanılacak olan komutatörler de şöyledir.

$$[x,y]_{(\sigma,\tau)} = x\sigma(y) - \tau(y)x$$

$$[x,y]_{\gamma} = x\gamma y - y\gamma x$$

$$[x,y] = xy - yx$$

$$[x, y\gamma z]^{\gamma}_{(\sigma,\tau)} = \tau(y)\gamma[x,z]^{\gamma}_{(\sigma,\tau)} + [x,y]^{\gamma}_{(\sigma,\tau)}\gamma\sigma(z)$$

$$[x\gamma y, z]^{\gamma}_{(\sigma,\tau)} = x\gamma[y,z]^{\gamma}_{(\sigma,\tau)} + [x,\tau(z)]^{\gamma}\gamma y$$

Lemma 3.6.1: $\forall x, y \in M, \gamma, \beta \in \Gamma$ için eğer $z \in C$ ise o zaman

$[z\gamma x, y]^{\gamma}_{(\sigma,\tau)} = z\gamma[x, y]^{\gamma}_{(\sigma,\tau)}$ dır.

Lemma 3.6.2: M asal Γ - Near halka olsun.

(i) $z \in C/\{0\}$ ise z sıfır bölen değildir.

(ii) $z \in C/\{0\}$, $z + z \in C$ olan eleman olsun.O zaman (M,+) Abeldir.

(iii) $z \in C/\{0\}$ ve x de $x\gamma z \in C$ veya $z\gamma x \in C$ olan elemanı ise o zaman $x \in C$ dir.

Lemma 3.6.3: $\forall x, y, z \in M$ ve $\gamma, \mu \in \Gamma$ için M üzerindeki her d $\Gamma-(\sigma,\tau)$ türev için aşağıdakiler sağlanır.

i) $(x\gamma d(y) + d(x)\gamma y)\mu z = x\gamma d(y)\mu z + d(x)\gamma y\mu z$

ii) $(d(x)\gamma y + x\gamma d(y))\mu z = d(x)\gamma y\mu z + x\gamma d(y)\mu z$

Lemma 3.6.4: M 2-torsion-free asal ve d, $\Gamma-(\sigma,\tau)$ türev ve d, σ ve τ ile komute edilebiliyor olsun. $d^2 = 0$ ise d = 0 dır.

İspat: $\forall x, y \in M, \gamma \in \Gamma$ olsun. Hipotezden

$$\begin{aligned} 0 &= d^2(x\gamma y) = d(d(x)\gamma\sigma(y) + \tau(x)\gamma d(y)) \\ &= d^2(x)\gamma\sigma(y) + \tau(d(x))\gamma d(\sigma(y)) + d(\tau(x))\gamma\sigma(d(y)) + \tau(x)\gamma d^2(y) \end{aligned}$$

Kabulleri kullanırsak

$$\begin{aligned} 0 &= \tau(d(x))\gamma d(\sigma(y)) + d(\tau(x))\gamma\sigma(d(y)) \\ &= 2\tau(d(x))\gamma\sigma(d(y)) \\ &= \tau(d(x))\gamma\sigma(d(y)) \end{aligned}$$

elde edilir.

Bu eşitlikte y yerine $y\beta z$ yazılırsa

$$\begin{aligned} 0 &= \tau(d(x))\gamma\sigma(d(y\beta z)) \\ &= \tau(d(x))\gamma\sigma(d(y)\beta\sigma(z) + \tau(y)\beta d(z)) \\ &= \tau(d(x)\gamma\sigma(d(y)\beta\sigma(z)) + \tau(d(x))\gamma\sigma(\tau(y)\beta d(z)) \\ &= \tau(d(x)\gamma\sigma(\tau(y)\beta d(z)) \\ &= \tau(d(x))\Gamma M\Gamma\sigma(d(z)) \end{aligned}$$

M asal halka olduğundan $d(x) = 0$ veya $d(z) = 0$ ise $d = 0$ dır.

Lemma 3.6.5: d, M de $\Gamma-(\sigma,\tau)$ türev olsun. $u \in M$ de sol bölen olmasın. Eğer $[u, d(u)]^{\gamma}_{(\sigma,\tau)} = 0$ ise o zaman (x,u) M de sabittir.

İspat: $x \in M, \gamma \in \Gamma$ olsun.O zaman

$$d(u\gamma(u+x)) = d(u)\gamma\sigma(u+x) + \tau(u)\gamma d(u+x)$$
$$= d(u)\gamma\sigma(u) + d(u)\gamma\sigma(x) + \tau(u)\gamma d(u) + \tau(u)\gamma d(x)$$

ve

$$d(u\gamma u + u\gamma x) = d(u\gamma u) + d(u\gamma x)$$
$$= d(u)\gamma\sigma(u) + \tau(u)\gamma d(u) + d(u)\gamma\sigma(x) + \tau(u)\gamma d(x)$$

elde edilir.

Sol taraflar eşit olduğundan sağ taraflar da eşit olmalıdır.

$$0 = \tau(u)\gamma d(u) + \tau(u)\gamma d(x) - \tau(u)\gamma d(u) - \tau(u)\gamma d(x)$$
$$= \tau(u)\gamma d((x,u))$$

elde edilir.

u sol bölen olmadığından $d((x,u)) = 0$ olduğundan (x,u) sabittir.

Teorem 3.6.1: d, M de $\Gamma-(\sigma,\tau)$ türev ve M nin sıfır böleni olmasın. Eğer $x \in M, \gamma \in \Gamma$ için $[x, d(x)]^{\gamma}_{(\sigma,\tau)} = 0$ ise o zaman $(M,+)$ Abeldir.

İspat: $a,b \in M$ için $c = (a,b)$ toplamsal komutatör olsun.O zaman lemma 3.6.2 den c sabittir. Yani $d(c) = 0$ dır. $w\gamma c = (w\gamma a, w\gamma c)$ olduğundan $w\gamma c$ de sabittir. O zaman

$$0 = d(w\gamma c) = d(w)\gamma\sigma(c) + \tau(w)\gamma d(c)$$
$$= d(w)\gamma\sigma(c)$$

elde edilir.

$d(w) \neq 0$ olduğundan ve M nin sıfır böleni olmadığından c = 0 dır. Dolayısıyla $(M,+)$ Abeldir.

Teorem 3.6.2: M asal ve d, M de $\Gamma-(\sigma,\tau)$ türev olsun. Eğer $d(x) \in C$ ise $(M,+)$ Abeldir. Eğer M 2-torsion-free ise o zaman M değişmelidir.

İspat: c bir sabit ve x bir sabit olmasın. O zaman

$$d(x\gamma c) = d(x)\gamma\sigma(c) + \tau(x)\gamma d(c)$$
$$= d(x)\gamma\sigma(c) \in C$$

elde edilir.

$d(x) \in C/\{0\}$ olduğundan ve lemma 3.6.2 (iii) den $c \in C/\{0\}$ dır.

$d(c+c) = 0$ olduğundan lemma 3.6.2 (ii) den $(M,+)$ Abeldir.

Şimdi 0 tek sabit olsun. u da sıfır bölen olmasın. $x \in M, \gamma \in \Gamma$ olsun. O zaman

$$d(u\gamma(u+x)) = d(u)\gamma\sigma(u+x) + \tau(u)\gamma d(u+x)$$
$$= d(u)\gamma\sigma(u) + d(u)\gamma\sigma(x) + \tau(u)\gamma d(u) + \tau(u)\gamma d(x)$$

ve

$$d(u\gamma u+u\gamma x)=d(u\gamma u)+d(u\gamma x)$$
$$=d(u)\gamma\sigma(u)+\tau(u)\gamma d(u)+d(u)\gamma\sigma(x)+\tau(u)\gamma d(x)$$

elde edilir.

Hipotezden yani $d(x)\in C$ olduğundan

$$0=\tau(u)\gamma(d(x)+d(u)-d(x)-d(u))$$
$$=u\gamma(d(x+u-x-u)$$
$$=u\gamma d((x,u))$$

elde edilir.

u sıfır bölen olmadığından $d((x,u))=0$ elde edilir. O zaman $(x,u)=0$ dır.Yani $u\in C(M)$ ise $(M,+)$ nın merkezindedir.

Şimdi x sıfırdan farklı bir eleman olsun. $d(M)\subseteq C$ olduğundan lemma 3.6.2 (i) den $d(x)$ sıfır bölen değildir. Buradan $d(x)\in C(M)$ dir. $0\neq y\in M$ olsun.

$$0=d(x)+d(y)-d(x)-d(y)$$
$$=d((x,y))$$

elde edilir.

Buradan $(x,y)=0$ olduğundan $(M,+)$ Abeldir.

Hipotezdeki x yerine $\beta\in\Gamma$ için $x\beta y$ yazarsak

$$0=[d(x\beta y),z]^{\gamma}_{(\sigma,\tau)}=[d(x)\beta\sigma(y)+\tau(x)\beta d(y),z]^{\gamma}_{(\sigma,\tau)}$$
$$=[d(x)\beta\sigma(y),z]^{\gamma}_{(\sigma,\tau)}+[\tau(x)\beta d(y),z]^{\gamma}_{(\sigma,\tau)}$$

komutatör özelliğini kullanarak bu ifadeleri açarsak

O zaman lemma 3.6.2 (i) den $\forall x,y,z\in M,\beta,\gamma\in\Gamma$ için

$$d(x)\beta[y,z]^{\gamma}_{(\sigma,\tau)}=d(y)\beta[z,x]^{\gamma}_{(\sigma,\tau)}$$

elde edilir.

Bu eşitlikte x yerine $d(x)$ yazarsak ve hipotezle karşılaştırırsak

$0=d^2(x)\beta[y,z]^{\gamma}_{(\sigma,\tau)}$ olur.

Şimdi M nin değişmeli olmadığını kabul edelim. $y,z\in M$ alalım öyle ki $[y,z]^{\gamma}_{(\sigma,\tau)}\neq 0$ olsun.

Merkezsel $d^2(x)$ elemanı sıfır bölen olmadığından $d^2(x)=0$ olur. O zaman lemma 3.6.1 den $d=0$ elde edilir. Fakat bu çelişki olduğundan M değişmelidir.

Lemma 3.6.6: M asal ve $x, y \in M$ olsun. Eğer $x \in C$ ve $x\Gamma y = 0$ ise o zaman $x = 0$ veya $y = 0$ dır.

İspat: Açıktır.

Teorem 3.6.3: M asal ve d, $\Gamma - (\sigma, \tau)$-türev olsun. Eğer $[d(x), d(y)]^{\gamma}_{(\sigma,\tau)} = 0$ ise o zaman $(M,+)$ Abeldir.

İspat: $[d(x), d(y)]^{\gamma}_{(\sigma,\tau)} = 0$ olduğundan w ve w + w ile komute edersek

$$0 = \left[w, d(x+y)\right]^{\gamma}_{(\sigma,\tau)} = w\gamma(d(x,y)) \text{ elde edilir.}$$

$w \to d(z)$ alırsak $\forall x, y, z \in M, \gamma \in \Gamma$ için

$$0 = d(z)\gamma d(x+y) \text{ elde edilir.}$$

$z \to z\beta v$ alır ve lemma 3.6.3 (i) yi kullanırsak

$$\begin{aligned} 0 &= d(z\beta v)\gamma d((x,y)) \\ &= d(z)\beta\sigma(v)\gamma d((x,y)) + \tau(x)\beta d(v)\gamma d((x,y)) \end{aligned}$$

elde edilir. O zaman M nin asallığından $d((x, y)) = 0$ elde edilir.

$z\gamma(x, y)$ de toplamsal komutatör olduğundan

$$\begin{aligned} 0 &= d(z\gamma(x,y)) \\ &= d(z)\gamma\sigma(x,y) + \tau(z)\gamma d((x,y)) \\ &= d(z)\gamma\sigma(x,y) \end{aligned}$$

elde edilir. Yine M nin asallığından $(x, y) = 0$ dır. Bu da $(M,+)$ Abel demektir.

Lemma 3.6.7: M asal ve $U \neq \{0\}$ M nin sol (sağ) invaryantı olsun. Eğer $U \subseteq C$ ise M değişmelidir.

İspat: M nin merkezcil sol invaryantı aynı zamanda sağ invaryant olduğundan $U \neq \{0\}$ ı sağ invaryant olarak da alabiliriz. $x \in M, u \in U, \gamma \in \Gamma$ olsun. Hipotezden $[u, x]^{\gamma}_{(\sigma,\tau)} = 0$ dır.

$u \to u\beta y$ yazarsak

$$0 = [u\beta y, x]^{\gamma}_{(\sigma,\tau)} = u\beta[y, x]^{\gamma}_{(\sigma,\tau)} \text{ elde edilir.}$$

$U \neq \{0\}$ olduğundan lemma 3.6.5 ten $[y, x]^{\gamma}_{(\sigma,\tau)} = 0$ elde edilir.Bu da ispatı bitirir.

Teorem 3.6.4: M asal 2 torsion free ve $U \neq \{0\}$ M nin sol (sağ) invaryantı, d de $\Gamma - (\sigma, \tau)$-türev olsun. Eğer $d(U) \subseteq C$ ise M değişmelidir.

İspat: $x \in M, u \in U, \gamma \in \Gamma$ olsun. Hipotezden $[d(u), x]^{\gamma}_{(\sigma,\tau)} = 0$

$u \to u\beta u$ yazarsak

$$2[d(u)\beta u, x]_{(\sigma,\tau)}^{\gamma} = 0 \text{ elde edilir.}$$

M 2- torsion free asal olduğundan $\forall x \in M, u \in U, \gamma \in \Gamma$ için

$$[d(u)\beta u, x]_{(\sigma,\tau)}^{\gamma} = 0 \text{ elde edilir.}$$

Lemma 3.6.2 (i) den de $d(u)\beta[u, x]_{(\sigma,\tau)}^{\gamma} = 0$ elde edilir.

Hipotezden bu eşitlikten ve lemma 3.6.5 ten $\forall x \in M, u \in U, \gamma \in \Gamma$ için

$$[u, x]_{(\sigma,\tau)}^{\gamma} = 0 \text{ elde edilir.}$$

Sonuç olarak lemma 3.6.5 den M değişmelidr.

3.7 Asal Gamma Halkalarda Yarı – Türevler

Yarı – türev ilk olarak J.Bergen tarafından tanımlanmıştır. Bu çalışmada J.Bergen tarafından ve bölüm 2 de ispatsız olarak verdiğimiz yarı-türev ispatlarını asal gamma halkalara taşıdık.

Tanım 3.7.1: Toplamsal f fonksiyonuna g fonksiyonu ile aşağıdaki özellikleri sağlıyorsa
yarı – türev denir.

(i)
$$\begin{aligned} f(x\gamma y) &= f(x)\gamma g(y) + x\gamma f(y) \\ &= f(x)\gamma y + g(x)\gamma f(y) \end{aligned}$$

(ii) $f(g(x)) = g(f(x))$

Açık olarak türev bir yarı- türevdir ama yarı -türev bir türev değildir. $f = g - 1$ alınırsa f yarı-türevdir ama türev değildir.

Lemma 3.7.1: $a \in R$ asal gamma halka ve $f \neq 0$ yarı - türev olsun.
$a\gamma f(x) = 0$ $(f(x)\gamma a = 0)$ ise o zaman $a = 0$ dır.

İspat: $a \in R$ ve $a\gamma f(x) = 0$ olsun.

$$\begin{aligned} a\gamma f(x\gamma y) &= a\gamma(f(x)\gamma g(y) + x\gamma f(y)) \\ &= a\gamma f(x)\gamma g(y) + a\gamma x\gamma f(y) \end{aligned}$$

$$a\gamma x\gamma f(y) = a\gamma f(x\gamma y) - a\gamma f(x)\gamma g(y)$$

Buradan hipotez kullanılırsa

$$a\gamma x\gamma f(y)=0 \text{ yani } a\Gamma R\Gamma f(y)=0 \text{ elde edilir.}$$

R asal gamma halkası olduğundan da $a=0$ veya $f=0$ dır. $f\neq 0$ olduğundan $a=0$ dır.

Teorem 3.7.1: $f\neq 0$, g fonksiyonu ile yarı – türev olsun. g bir Γ - homomorfizmdir.

İspat: $f\neq 0$, g fonksiyonu ile yarı – türev olsun. O zaman

$$\begin{aligned} f(z\gamma(x+y)) &= f(z)\gamma g(x+y)+z\gamma f(x+y) \\ &= f(z)\gamma g(x+y)+z\gamma f(x)+z\gamma f(y) \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} f(z\gamma(x+y)) &= f(z\gamma x+z\gamma y) \\ &= f(z\gamma x)+f(z\gamma y) \\ &= f(z)\gamma g(x)+z\gamma f(x)+f(z)\gamma g(y)+z\gamma f(y) \end{aligned}$$

Taraf tarafa çıkarırsak

$0=f(z)\gamma\left[g(x+y)-g(x)-g(y)\right]$ elde edilir. $f\neq 0$ olduğundan ve lemma 3.7.1 den

$0=g(x+y)-g(x)-g(y)$ ve dolayısıyla

$g(x+y)=g(x)+g(y)$ elde edilir. Yani g toplamsaldır.

Şimdi g nin çarpımsallığını gösterelim.

$$\begin{aligned} f((x\gamma y)\gamma z) &= g(x\gamma y)\gamma f(z)+f(x\gamma y)\gamma z \\ &= g(x\gamma y)\gamma f(z)+g(x)\gamma f(y)\gamma z+f(x)\gamma y\gamma z \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} f(x\gamma(y\gamma z)) &= g(x)\gamma f(y\gamma z)+f(x)\gamma y\gamma z \\ &= g(x)\gamma(g(y)\gamma f(z)+f(y)\gamma z)+f(x)\gamma y\gamma z \\ &= g(x)\gamma g(y)\gamma f(z)+g(x)\gamma f(y)\gamma z+f(x)\gamma y\gamma z \end{aligned}$$

Taraf tarafa çıkarırsak

$0=(g(x\gamma y)-g(x)-g(y))\gamma f(z)$ elde edilir. Lemma 3.7.1 den de

$g(x\gamma y)=g(x)\gamma g(y)$ dir. Bu da g çarpımsal demektir.

Bu iki ifadeden g bir Γ - homomorfizmdir.

Lemma 3.7.2: $f\neq 0$ ve R, $f(R)\subseteq Z$ şartını sağlayan asal gamma halkası ise R değişmelidir.

İspat: $f(R)\subseteq Z$ olsun.

$f(x\gamma y)=f(x)\gamma g(y)+x\gamma f(y)\in Z$ Bu ifadeyi x ile komute edersek

$$0=(f(x)\gamma g(y)+x\gamma f(y))\gamma x-x\gamma(f(x)\gamma g(y)+x\gamma f(y))$$

$0=f(x)\gamma g(y)\gamma x+x\gamma f(y)\gamma x-x\gamma f(x)\gamma g(y)-x\gamma x\gamma f(y)$ elde edilir.

$f(R)\subseteq Z$ olduğu kullanılırsa

$0=f(x)\gamma[x,g(y)]_{\gamma}$ elde edilir.

g örten olduğundan $g(y)=y$ alabiliriz. R asal olduğundan

$f(x)=0$ veya $[x,y]_{\gamma}=0$ elde edilir.

$K=\{x:f(x)=0\}$ ve $L=\{x:[x,y]_{\gamma}=0\}$ olarak tanımlarsak $R=K\cup L$ dir. Hipotezden $R=L$ olmak zorundadır.

$\forall x,y\in R$ için $[x,y]_{\gamma}=0$ olması $R=Z$ olması demektir. Bu ise R nin değişmeliliği demektir.

Teorem 3.7.2: $f\neq 0$ yarı – türev ve $[f(R),f(R)]_{\gamma}=0$ olsun. Eğer R, charR$\neq 2$ olan asal gamma halkası ise o zaman R değişmelidir.

İspat: $[f(R),f(R)]_{\gamma}=0$ olsun.

$$\begin{aligned}
0&=[f(x),f(y\gamma f(z))]_{\gamma}\\
&=[f(x),f(y)\gamma f(z)+g(y)\gamma f^{2}(z)]_{\gamma}\\
&=[f(x),f(y)\gamma f(z)]_{\gamma}+[f(x),g(y)\gamma f^{2}(z)]_{\gamma}\\
&=[f(x),f(y)]_{\gamma}\gamma f(z)+f(y)[f(x),f(y)]_{\gamma}+g(y)[f(x),f^{2}(z)]_{\gamma}+[f(x),g(y)]_{\gamma}\gamma f^{2}(z)
\end{aligned}$$

elde edilir. g örten olduğundan $g(y)=y$ alabiliriz.

$0=[f(x),y]_{\gamma}\gamma f^{2}(z)$ dir. Bu eşitlikten

$f(R)\subseteq Z$ veya $f^{2}(R)=0$ elde edilir.

$f(R)\subseteq Z$ ise lemma 3.7.2 den R değişmelidir. $f^{2}(R)=0$ ise o zaman charR$\neq 2$ olduğundan $f=0$ dır bu da çelişki olduğundan R değişmelidir.

Teorem 3.7.3: $f\neq 0$ yarı – türev ve $a\in R$ asal gamma halkası olsun. $a\gamma f(R)\subseteq Z$ ise o zaman $a=0$ veya R değişmelidir.

İspat: Kabul edelim ki $a\notin Z$ olsun. Hipotezden

$a\gamma f(R)\subseteq Z$ ise $a\gamma f(x)\gamma a=a\gamma f(x)\gamma a$ dır. O zaman

$$a\gamma f([a,x]_\gamma) = a\gamma([a, f(x)]_\gamma + [f(a), g(x)]_\gamma)$$
$$= a\gamma[f(a), g(x)]_\gamma$$

elde edilir.

$a\gamma f([a,x]_\gamma) \in Z$ olduğundan $a\gamma[f(x), g(x)]_\gamma \in Z$ dir.

g örten olduğundan $a\gamma[f(a), x]_\gamma \in Z$ dir.

$z \to x\gamma f(a)$ yazarsak

$$a\gamma[f(a), x\gamma f(a)]_\gamma = a\gamma[f(a), x]_\gamma \gamma f(a) \in Z \text{ dir.}$$

$a\gamma[f(a), x]_\gamma \in Z$ idi. Buradan

$$a\gamma[f(a), x]_\gamma = 0 \text{ veya } f(a) \in Z \text{ dir.}$$

Her iki durumda da $a\gamma[f(a), x]_\gamma = 0$ dır. $a \neq 0$ olduğundan $f(a) \in Z$ dir.

Kabulden $a\gamma f(a) \in Z$ idi. O zaman $f(a) = 0$ veya $a \in Z$ dir. Ama $a \notin Z$ kabul etmiştik. Onun için $f(a) = 0$ dır.

Şimdi $x \in R$ için $f(a\gamma x) = f(a)\gamma g(x) + a\gamma f(x) = a\gamma f(x) \in Z$ dir.

$a\gamma f(a\gamma x) \in Z$ olduğundan $f(a\gamma x) = 0$ dır. Çünkü $a \neq 0$ idi. O zaman $a\gamma f(x) = 0$ dır.

$a \neq 0$ olduğundan ve lemma 3.7.1 den $f = 0$ çıkar. Bu da çelişkidir. Yani $a \in Z$ dir.

$f(R) \subseteq Z$ ise de lemma 3.7.2 den R değişmelidir.

Sonuç 3.7.2: d, R asal gamma halkasında türev olsun. $a \in R$ de $a\gamma d(R) \subseteq Z$ şartını sağlasın. O zaman $a = 0$ veya R değişmelidir.

Sonuç 3.7.3: R, g + 1 epimorfizması ile asal gamma halkası olsun. $a \in R$ ve $a\gamma(g(x) - x) \in Z$ olsun. O zaman $a = 0$ veya R değişmelidir.

Teorem 3.7.4: $a \in R$, $f \neq 0$ yarı – türev olsun. $[a, f(R)]_\gamma = 0$ ise $a \in Z$ dir.

İspat: Kabul edelim ki $a \notin Z$ olsun. O zaman

$$0 = [a, f(x\gamma f(y)]_\gamma$$
$$= [a, f(x)\gamma f(y) + g(x)\gamma f^2(y)]_\gamma$$
$$= [a, f(x)\gamma f(y)]_\gamma + [a, g(x)]_\gamma \gamma f^2(y)$$

g örten olduğundan

$0 = [a, x]_\gamma \gamma f^2(y)$ dir. $a \notin Z$ olduğundan ve lemma 3.7.1 den $f^2(y) = 0$ dır.

charR $\neq 2$ olduğundan $f = 0$ dır. Bu çelişki olur. O zaman $a \in Z$ dir.

Teorem 3.7.5: $a \in R$, $f \neq 0$ yarı – türev olsun. $[a, f(R)]_\gamma \subseteq Z$ ise $a \in Z$ dir.

İspat: Kabul edelim ki $a \notin Z$ olsun. Hipotezden $[a, f([a,x]_\gamma)]_\gamma \in Z$ dir.

$$\begin{aligned}[a, f([a,x]_\gamma)]_\gamma &= [a,[a, f(x)]_\gamma]_\gamma + [a,[f(a), g(x)]_\gamma]_\gamma \\ &= [a,[f(a), g(x)]_\gamma]_\gamma\end{aligned}$$

elde edilir. Yani g örten olduğundan $[a,[f(a), x]_\gamma]_\gamma \in Z$ dir.

Burada iki tane iç türevin bileşkesi R yi Z ye gönderir. Daha genel olarak ya $a \in Z$ ya da $f(a) \in Z$ dir. $a \notin Z$ olduğunu kabul ettiğimiz için $f(a) \in Z$ dir.

$x \in R$ için $[a, f(a\gamma x)]_\gamma \in Z$ dir. Bu ifadeyi açar ve a nın $f(a)$ ile komute edildiğini kullanırsak

$$[a, f(a)\gamma g(x) + a\gamma f(x)]_\gamma = [a, f(a)\gamma g(x)]_\gamma + [a, a\gamma f(x)]_\gamma$$ elde edilir.

Buradan da

$$f(a)\gamma[a, g(x)]_\gamma + a\gamma[a, f(x)]_\gamma \in Z$$ elde edilir.

(1)

Bu denklemi a ile komute eder ve $[a, f(x)]_\gamma \in Z$ olduğunu kullanırsak

$$f(a)\gamma[a,[a, g(x)]_\gamma]_\gamma = 0 \quad \text{ve} \quad f(a)\gamma[a,[a,x]_\gamma]_\gamma = 0$$ elde edilir.

Eğer $f(a) \neq 0$ ise $[a,[a,x]_\gamma]_\gamma = 0$ yani $a \in Z$ dir.

Eğer $f(a) = 0$ ise (3) ten $a\gamma[a, f(x)]_\gamma \in Z$ dir. $[a, f(x)]_\gamma \in Z$ olduğundan $a \in Z$ ya da $[a, f(x)]_\gamma = 0$ dır. $a \notin Z$ olduğundan $[a, f(x)]_\gamma = 0$ dır. Yani $a \in Z$ dir. Bu çelişki ispatı bitirir.

Teorem 3.7.6: $f \neq 0$ yarı türev ve $[f(R), f(R)]_\gamma \subseteq Z$ olsun. Bu durumda R değişmelidir.

İspat: Teorem 3.7.5 ten $f(R) \subseteq Z$ dir. Lemma 3.7.2 den de R değişmelidir..

Teorem 3.7.7: $f \neq 0$ yarı – türev olsun. $f^2(R) \subseteq Z$ ise o zaman R değişmelidir.

İspat: $\forall x, y \in R$ için hipotezden $f^2([x,y]_\gamma) \in Z$ dir.

$$\begin{aligned}f^2([x,y])_\gamma &= f([f(x), y]_\gamma + [g(x), f(y)]_\gamma) \\ &= [f^2(x), y]_\gamma + [g(f(x), f(y)]_\gamma + [f(g(x)), f(y)]_\gamma + [g^2(x), f^2(y)]_\gamma \\ &= [f^2(x), y]_\gamma + 2[f(g(x)), f(y)]_\gamma + [g^2(x), f^2(y)]_\gamma\end{aligned}$$

elde edilir.

$g^2(x)$ ve $f^2(x) \in Z$ olduğundan $2[f(g(x)), f(y)]_\gamma \in Z$ olur. charR$\neq 2$ olduğundan $[f(g(x)), f(y)]_\gamma \in Z$ olur. Dolayısıyla $[f(R), f(R)]_\gamma \in Z$ dir. Teorem 3.7.6 dan da R değişmelidir.

Teorem 3.7.8: f_1, f_2 iki yarı – türev olsun. g_1 ve g_2 epimorfizmler olmak üzere $f_1(f_2(R) \subseteq Z$ ise o zaman R değişmelidir.

İspat: Hipotezden $f_1 f_2([x,y]_\gamma) \in Z$ dir.

$$f_1 f_2([x,y]_\gamma) = f_1([f_2(x), y]_\gamma + [g_2(x), f_2(y)]_\gamma) \in Z$$
$$= [f_1 f_2(x), y]_\gamma + [g_1 f_2(x), f_1(y)]_\gamma + [f_1 g_2(x), f_2(y)]_\gamma + [g_1 g_2(x), f_2(y)]_\gamma \in Z$$

dir. Buradan

$$[g_1 f_2(x), f_1(y)]_\gamma + [f_1 g_2(x), f_2^2(y)]_\gamma \in Z \quad \text{dir.}$$

Yani

$[f_1(R), f_2^2(R)]_\gamma \in Z$ dir. Teorem 3.7.5 ten de $f_2^2(R) \subseteq Z$ dir. Teorem 3.7.7 den R değişmelidir.

Teorem 3.7.9: charR$\neq 2$ asal gamma halkası ve f, yarı – türev olsun. Eğer $[a, f(a)]_\gamma \in Z$ ise

R değişmelidir.

İspat: Hipotezden $[a, f(a)]_\gamma \in Z$ olsun. Bu ifadeyi lineerleştirirsek

$$[a+x, f(a+x)]_\gamma = [a+x, f(a)+f(x)]_\gamma$$
$$= [a, f(a)]_\gamma + [a, f(x)]_\gamma + [x, f(a)]_\gamma + [x, f(x)]_\gamma$$

Hipotezden $[a, f(x)]_\gamma + [x, f(a)]_\gamma \in Z$ elde edilir.

$x \to [a,x]_\gamma$ yazarsak

$$[a, f([a,x])_\gamma]_\gamma + [[a,x]_\gamma, f(a)]_\gamma \in Z$$
$$= [a,[f(a),x]_\gamma]_\gamma + [a,[g(a), f(x)]_\gamma]_\gamma + [[a,x]_\gamma, f(a)]_\gamma$$
$$= [a,[f(a),x]_\gamma]_\gamma + [a,[g(a), f(x)]_\gamma]_\gamma + [f(a),[x,a]_\gamma]_\gamma$$
$$= -[x,[a, f(a)]_\gamma]_\gamma + [a,[g(a), f(x)]_\gamma]_\gamma$$
$$= [a,[g(a), f(x)]_\gamma]_\gamma \in Z$$

elde edilir.

Diğer taraftan

$$0 = f([a,a]_\gamma) = [f(a),a]_\gamma + [g(a), f(a)]_\gamma \in Z$$
$$\Rightarrow [g(a), f(a)]_\gamma \in Z$$

dir.

$a \to a + x$ yazarsak

$[g(a), f(x)]_\gamma + [g(x), f(a)]_\gamma \in Z$ olur. Bu ifadeyi a ile komute edersek

$0 = [a,[g(a), f(x)]_\gamma]_\gamma + [a,[g(x), f(a)]_\gamma]_\gamma \in Z$ olur.

Bu ifadeden de

$[a,[g(x), f(a)]_\gamma]_\gamma \in Z$ dir.

g örten olduğundan ve komutatör özelliğinden

$[a,[f(a),x]_\gamma]_\gamma \in Z$ dir. Yani $a \in Z$ veya $f(a) \in Z$ dir.

$R = Z \cup \{x : f(x) \in Z\}$ ise Brauer Trickten $R = Z$ veya $f(R) \subseteq Z$ dir.

Her iki durumda da R değişmelidir.

3.8 Asal Gamma Halkalarda Simetrik Bi-Türevler

Bu çalışmada türevli asal halkalar ve ideallerde çok iyi bilinen bazı önemli özellikler simetrik
bi-türev için asal gamma halkalarda ispatladık.

Lemma 3.8.1: R, charR$\neq$2 olan bir asal gamma halka, I, R nin sıfırdan farklı bir ideali, $D(.,.) : RxR \to R$ simetrik bi-türev ve d, D nin izi olsun. Sabit bir a$\in$R ve her x$\in$I için $a\gamma d(x) = 0$ ise ya $a = 0$ ya da $d = 0$ dır.

İspat: Her x$\in$I için $a\gamma d(x) = 0$ olsun. Burada x yerine y$\in$I olmak üzere $x + y$ alınırsa ve charR$\neq$2 olduğu kullanılırsa

$\forall$ x,y $\in$I için $a\gamma D(x, y) = 0$

(1)

bulunur. (1) de x yerine r$\in$R olmak üzere xγr yazalım.O zaman

$\forall$ x,y $\in$I ve r$\in$R için aγxγD(r,y) + aγD(x,y)γr = 0 olur.

(2)

(2) eşitliği (1) den $\forall$ x,y $\in$I, r$\in$R için aγxγD(r,y) = 0 a indirgenir. Burada x yerine s,t$\in$R olmak üzere sxt konulur ve ayrıca R nin asallığı ile I nın sıfırdan farklı ideal

olduğu dikkate alınırsa, $\forall$ $y \in I$ ve $r \in R$ için $a = 0$ veya $D(r,y) = 0$ olur. $D(r,y) = 0$ ise $d = 0$ demektir.

Böylece ya $a = 0$ ya da $d = 0$ dır.

Lemma 3.8.2 : R, $charR \neq 2$ olan bir asal gamma halka, $D(.,.)$: $RxR \rightarrow R$ simetrik bi-türev ve d, D nin izi olsun. a,R nin $d(a) \neq 0$ olacak şekilde bir elemanı olmak üzere her $x \in R$ için

$ad(x) \in Z$ ise o zaman $a \in Z$ dir.

İspat : $\forall x \in R$ için $a\gamma d(x) \in Z$. Burada x yerine $y \in R$ olmak üzere x + y alınırsa ve $charR \neq 2$ olduğu kullanılırsa

$\forall$ $x,y \in R$ için $a\gamma D(x,y) \in Z$

(3)

elde edilir.

(3) te x yerine $a\gamma a$ koyalım.Böylece

$\forall$ $y \in R$ için $a\gamma aD(a,y) + a\gamma D(a,y)\gamma a \in Z$

(4)

olur. (4) te ikinci terim (3) ten dolayı $a\gamma a\gamma D(a,y)$ ye eşittir.Öyleyse (4) ten

$\forall$ $y \in R$ için $2a\gamma a\gamma D(a,y) \in Z$ elde edilir.

Z nin özelliğinden $a \in Z$ veya $\forall y \in R$ için $a\gamma D(a,y) = 0$

(5)

bulunur.

$\forall$ $y \in R$ için $a\gamma D(a,y) = 0$ olsun. Burada y yerine $r \in R$ olmak üzere $y\gamma r$ alınırsa,

$a\gamma D(a,y)\gamma r + a\gamma y\gamma D(a,r) = a\gamma y\gamma D(a,r) = 0$ olur.R nin asallığından $a = 0$ veya $\forall r \in R$ için $D(a,r) = 0$ dır. $a = 0$ olamaz. Çünkü $a = 0$ olsa $d(a) = d(0) = 0$ gibi bir çelişki çıkar.

Aynı zamanda $\forall r \in R$ için $D(a,r) = 0$ da olamaz. Çünkü $\forall r \in R$ için $D(a,r) = 0$ olsaydı özel olarak $d(a) = 0$ olurdu. Öyleyse (5) teki durum geçerli olmak zorundadır. Böylece $a \in Z$ bulunur.

Teorem 3.8.1 : R, $charR \neq 2$ olan bir asal gamma halka,$D(.,.)$: $RxR \rightarrow R$ simetrik bi-türev ve

d, D nin izi olsun. a, R nin sabit bir elemanı olmak üzere

(a) $\forall x \in R$ için $[a,d(x)]_\gamma = 0$ ise $a \in Z$ veya $d = 0$ dır.

(b) $d \neq 0$, $d(a) \neq 0$ ve $\forall\, x \in R$ için $[a,d(x)]_{\gamma} \in Z$ ise $a \in Z$ dir

İspat: (a) Her $x \in R$ için $[a,d(x)\,]_{\gamma} = 0$ olsun.

(6)

(6) yı lineerleştirirsek

$\forall\;\; x,y \in R$ için $[a,d(x)\,]_{\gamma} + [a,d(y)\,]_{\gamma} + 2[a,D(x,y)\,]_{\gamma} = 0$

(7)

bulunur. $CharR \neq 2$ olduğundan (7) eşitliği

$\forall\;\; x,y \in R$ için $[a,D(x,y)\,]_{\gamma} = 0$ a indirgenir.

(8)

(8) de y yerine yd(x) yazılırsa ve (6) ile (8) tekrar kullanılırsa

$\forall\, x,y \in R$ için $[a,y]_{\gamma}\, \gamma\, D(x,d(x)) = 0$ bulunur. Burada y yerine $r \in R$ olmak üzere $y \gamma r$ alalım.O zaman her $x,y,r \in R$ için $[a,y]_{\gamma}\, \gamma\, r \gamma\, D(x,d(x)) = 0$ R nin asallığından $a \in Z$ veya

$\forall\, x \in R$ için $D(x,d(x))$ dır. İkinci durum geçerli ise o zaman $d = 0$ olur. Dolayısıyla ya $a \in Z$ ya da $d = 0$ dır.

(b) Her $x \in R$ için $[a,d(x)] \in Z$ olsun.

(9)

(9) u lineerleştirirsek ve

$R \neq 2$ olduğu kullanılırsa

$\forall\;\; x,y \in R$ için $[a,D(x,y)\,]_{\gamma} \in Z$

(10)

elde edilir.(10) da x yerine $a \gamma a$ alalım.

O zaman $\forall\, y \in R$ için $[a,a\gamma D(a,y) + D(a,y)\gamma a]_{\gamma} \in Z$ dir.Bu ifade açılırsa

$\forall\, y \in R$ için $a\gamma [a,D(a,y)\,]_{\gamma} + [a,D(a,y)\,]_{\gamma}\, \gamma\, a \in Z$

(11)

elde edilir. (10) ifadesini (11) de kullanırsak $\forall\, y \in R$ için $2a\gamma [a,D(a,y)\,]_{\gamma} \in Z$ olur.

Tekrar $charR \neq 2$ olmasından dolayı $a\gamma [a,D(a,y)\,]_{\gamma} \in Z$ dir.Buradan da

$a \in Z$ veya $[a,D(a,y)\,]_{\gamma} = 0$ dır.

(12)

$\forall y \in R$ için $[a,D(a,y)]_\gamma = 0$ olduğunu kabul edelim.Burada y yerine $a\gamma y$ yazalım.Bu durumda

$\forall y \in R$ için $[a,d(a)]_\gamma \gamma y + y\gamma d(a)[a,y]_\gamma + a\gamma [a,D(a,y)]_\gamma = 0$

(13)

elde edilir.(13) te birinci ve üçüncü terimlerin sıfıra eşit olmasından

$\forall y \in R$ için $d(a)\gamma [a,y]_\gamma = 0$

(14)

dır. (14) te y yerine $r\in R$ olmak üzere $y\gamma r$ alalım.O zaman $\forall$ $y,r \in R$ için $d(a)\gamma y\gamma [a,r]_\gamma + d(a)\gamma [a,y]_\gamma \gamma r = d(a)\gamma y\gamma [a,r]_\gamma = 0$ olur.R nin asallığından ve $d(a)\neq 0$ olmasından

her $r \in R$ için $[a,r] = 0$ yani $a \in Z$ dır.

Teorem 3.8.2 : R, char$R\neq 2$ olan bir asal gamma halka,D(.,.): $RxR\rightarrow R$ simetrik bi-türev ve d, D nin izi olsun.a, R nin $d(a)\neq 0$ olacak şekilde sabit bir elemanı olmak üzere

(a) $\forall$ $x\in R$ için $(a,d(x))_\gamma = 0$ ise $a\in Z$ dir

(b) $\forall$ $x\in R$ için $(a,d(x))_\gamma \in Z$ ise $a\in Z$ dir

İspat : (a) $\forall$ $x\in R$ için $(a,d(x))_\gamma = 0$ ise $a\in Z$ olsun.

(15)

(15) i lineerleştirirsek

$\forall$ $x,y\in R$ için $(a,D(x,y))_\gamma = 0$

(16)

bulunur.(16) da y yerine $y\gamma a$ alalım.O zaman $\forall$ $x,y\in R$ için

$0 = (a,D(x,y\gamma a))_\gamma = (a,D(x,y)\gamma a + y\gamma D(x,a))_\gamma$

$= a\gamma D(x,y)\gamma a + a\gamma y\gamma D(x,a) + D(x,y)\gamma a\gamma a - y\gamma a\gamma D(x,a)$

$= [a,y]_\gamma \gamma D(x,a)$

(18)

olur.(18) de y yerine $r\in R$ olmak üzere $y\gamma r$ alalım.O zaman $\forall$ $x,y,r \in R$ için

$0 = [a,y]_\gamma \gamma r\gamma D(x,a) + y\gamma [a,r]_\gamma \gamma D(x,a)$

$= [a,y]_\gamma \gamma r \gamma D(x,a)$

(19)

bulunur.(19) ve R nin asallığından $\forall$ $x,y \in R$ için $[a,y]_\gamma = 0$ veya $D(x,a) = 0$ dır.

$\forall$ $x \in R$ için $D(x,a) = 0$ olsa $d(a) = 0$ gibi bir çelişki çıkar.Öyleyse $a \in Z$ olmalıdır.

(b) $\forall$ $x \in R$ için $(a,d(x))_\gamma \in Z$ olsun.

(20)

(20) yi lineerleştirirsek

$\forall$ $x,y \in R$ için $(a,D(x,y))_\gamma \in Z$

(21)

olur.(21) de x yerine $a\gamma a$ alalım.Böylece (20) den $\forall$ $y \in R$ için

$(a,D(a\gamma a,y))_\gamma = (a,a\gamma D(a,y) + D(a,y)\gamma a)_\gamma$

$= a\gamma D(a,y) + a\gamma D(a,y)\gamma a + a\gamma D(a,y)\gamma a + D(a,y)\gamma a$

$= a\gamma a\gamma D(a,y) + 2a\gamma D(a,y)\gamma a + D(a,y)\gamma a\gamma a \in Z$

(22)

elde edilir.(21) den özel olarak $\forall$ $x,y \in R$ için $[a,(a,D(x,y))_\gamma]_\gamma = 0$ dır.Bunu açarsak

$\forall$ $x,y \in R$ için $[a\gamma a,D(x,y)]_\gamma = 0$

(23)

bulunur. (23) ten özel olarak $[a\gamma a,D(a,y)]_\gamma = 0$ Bunu (22) de göz önüne alırsak

$\forall$ $y \in R$ için $2a\gamma a\gamma D(a,y) + 2a\gamma D(a,y)\gamma a = 2a\gamma(a,D(a,y))_\gamma \in Z$ elde edilir. $\mathrm{char}R \neq 2$ olduğundan

$\forall$ $y \in R$ için $a\gamma(a,D(a,y))_\gamma \in Z$

(24)

dir.(24) ve özellikten

$\forall$ $y \in R$ için $(a,D(a,y))_\gamma = 0$ veya $a \in Z$ dir.

(25)

Kabul edelimki $\forall$ $y \in R$ için $(a,D(a,y))_\gamma = 0$ olsun.

(26)

(26) da y yerine $a\gamma y$ yazarsak $\forall$ $y \in R$ için

$$0 = a\gamma d(a)\gamma y + a\gamma a\gamma D(a,y) + d(a)\gamma y\gamma a + a\gamma D(a,y)\gamma a$$

$$= a\gamma d(a)\gamma y + d(a)\gamma y\gamma a + a\gamma (a,D(a,y))_\gamma$$

(27)

olur.(26) dan özel olarak $(a,d(a))_\gamma = 0$ dır.Bu son eşitliği ve (26) yı (27) de göz önüne alırsak

$$\forall\ y\in R \text{ için } d(a)\gamma [a,y]_\gamma = 0$$

(28)

elde edilir.(28) de y yerine $r\in R$ olmak üzere $y\gamma r$ alalım.O zaman $\forall\ y,r \in R$ için $d(a)\gamma y\gamma [a,r]_\gamma = 0$ olur.R nin asallığından ve $d(a) \neq 0$ olmasından $a\in Z$ dir.

Teorem 3.8.3 : R, $\mathrm{char}R\neq 2$ olan bir asal gamma halka, I, R nin sıfırdan farklı bir ideali, D(.,.): $RxR\rightarrow R$ simetrik bi-türev ve d, D nin izi olsun.

$\forall\ x\in I$ için $(x,d(x))_\gamma = 0$ ise $[x,d(x)]_\gamma = 0$ dır.

İspat $\forall\ x\in I$ için $(x,d(x))_\gamma = 0$ olsun.

(29)

(29) u lineerleştirirsek ve $\mathrm{char}R\neq 2$ olmasından dolayı $\forall\ x,y \in I$ için

$$x\gamma d(y) + 2x\gamma D(x,y) + y\gamma d(x) + 2y\gamma D(x,y)$$

$$+ d(y)\gamma x + 2D(x,y)\gamma x + d(x)\gamma y + 2D(x,y)\gamma y = 0$$

(30)

bulunur.(30) da y yerine –y yazıp bulunan eşitliği (30) ile birlikte ele alırsak

$$\forall\ x,y \in I \text{ için } 2x\gamma D(x,y) + y\gamma d(x) + 2D(x,y)\gamma x + d(x)\gamma y = 0$$

(31)

olur.(31) de y yerine $x\gamma y$ yazalım.O zaman $\forall\ x,y \in I$ için

$$2x\gamma x\, D(x,y) + 2xd(x)y + xyd(x) + 2d(x)yx + 2xD(x,y)x + d(x)xy = 0$$

(32)

olur.(31) i soldan x ile çarpalım.Böylece $\forall\ x,y \in I$ için

$$2x\gamma x\gamma D(x,y) + x\gamma y\gamma d(x) + 2x\gamma D(x,y)\gamma x + x\gamma d(x)\gamma y = 0$$

(33)

bulunur.(32) ve (33) ü taraf tarafa çıkarırsak ve (29) u kullanırsak $\forall\ x,y \in I$ için

$x\gamma d(x)\gamma y + d(x)\gamma x\gamma y + 2d(x)\gamma y\gamma x = (x,d(x))_\gamma + 2d(x)\gamma y\gamma x = 2d(x)\gamma y\gamma x$

$= 0$

olur. Char$R \neq 2$ olduğundan $\forall$ $x,y \in I$ için $d(x)\gamma y\gamma x = 0$ dır.Bu son eşitlikte y yerine $x\gamma yd(x)$ alalım.O zaman $\forall$ $x,y \in I$ için $d(x)\gamma x\gamma y\gamma d(x)\gamma x = 0$ olur.R nin asallığından ve I nın sıfırdan farklı bir ideal olmasından $\forall$ $x \in I$ için $d(x)\gamma x = 0$ dır.

(34)

dır.(34) ve (29) u göz önüne alırsak

$\forall$ $x \in I$ için $x\gamma d(x) = 0$ dır.

(35)

elde edilir.(34) ve (35) ten $\forall$ $x \in I$ için $[x,d(x)]_\gamma = 0$ dır.

Teorem 3.8.4 : R, char$R \neq 2$ olan bir asal gamma halka, I, R nin sıfırdan farklı bir ideali, D(.,.): $RxR \rightarrow R$ simetrik bi-türev ve d, D nin izi olsun.Eğer $d(I) \subseteq Z$ ise o zaman $d = 0$ veya R değişmelidir.

İspat : R nin değişmeli olmadığını kabul edelim.

$\forall$ $x \in I$ için $d(x) \in Z$ olsun.

(36)

(36) yı lineerleştirirsek $\forall$ $x,y \in I$ için $D(x,y) \in Z$

(37)

olur.(37) de x yerine $x\gamma x$ alalım.O zaman $\forall$ $x,y \in I$ için

$x\gamma D(x,y) + D(x,y)\gamma x = 2x\gamma D(x,y) \in Z$ olur. Bu durumda özellikten

$\forall$ $x,y \in I$ için $D(x,y) = 0$ veya $x \in Z$

(38)

elde edilir. $K = \{ x \in I : D(x,y) = 0 , \forall \ y \in I \}$ ve $L = \{ x \in I : x \in Z \}$ kümeleri I nın toplamsal alt gruplarıdır.Üstelik $I = K \cup L$ dir. Ayrıca $I \neq L$ olur.Çünkü aksi halde $I \subseteq Z$ dolayısıyla da R değişmeli olurdu.Bu ise kabulümüzle çelişir.O halde $I = K$ olmak zorundadır.Buna göre (38) den $\forall$ $x,y \in I$ için $D(x,y) = 0$ elde edilir.Bu ise $d = 0$ demektir.

Teorem 3.8.5 : R, char$R \neq 2$ değişmeli olmayan bir asal gamma halka, D(.,.): $RxR \rightarrow R$ simetrik bi-türev ve d, D nin izi olsun. $\forall$ $x,y \in R$ için $[d(x) , d(x)]_\gamma = 0$ ise $d = 0$ dır.

İspat: $\forall$ $x,y \in R$ için $[d(x) , d(x)]_\gamma = 0$ olsun.Teorem 3.8.2 (a) dan $\forall$ $x,y \in R$ için

$d(x) \in Z$ veya $d = 0$ dır.

(39)

$\forall \quad x \in R$ için $d(x) \in Z$ ise teorem 3.8.4 ten $d = 0$ veya R değişmelidir.R değişmeli olmadığı için (39) daki her iki durumdan da $d = 0$ dır.İspat biter.

KAYNAKLAR

Argaç, N., Kaya, A. and Kısır, A., (σ,τ)-Derivations in prime rings, Mathematical Journal of Okayama University, Vol.28, 173 - 177 p., 1987.

Ashraf, M. And Rehman, N., On (σ,τ)-Derivations in prime Rings,Archivum Mathematicum, Vol. 38, 259-264, 2002.

Aydın, N. and Kaya, K., Some Generalizations in Prime Rings with (σ,τ)–Derivations, Doğa Tr. J. of Math., Vol. 16, 169 – 176, 1992.

Ceran, Ş., Asal ve Yarı-Asal Halkalarda Simetrik bi-(σ,τ)–Türevler, (yayınlanmamış)

Ceran, Ş., Gamma Halkalar Üzerinde Simetrik bi-α- Türevler (yayınlanmamış)

Ceran, Ş., Gamma Halkalar Üzerinde Simetrik bi- Türevler (yayınlanmamış)

Chang, J. C., On Semi-Derivations of Prime Rings, Chinese J. Math., Vol. 12, 255 – 262, 1984.

Herstein, I. N., A note on derivations, Canad. Math. Bull., Vol. 21(3), 369 – 370, 1978.

Herstein, I. N., A Note on Derivations II., Canad. Math. Bull., Vol. 22(4), 509 – 511, 1979.

Jun, Y. B., Kim, K. H., Cho, Y. U., On Gamma derivations in Gamma- Near- Rings, Soochow J. of Math., Vol 29, 275-282, 2003.

Kandamar, H., The k-derivation of a Gamma-Ring, Tr. J. Of Mah. Vol. 21, 221-231, 2000.

Kaya, K., On (σ,τ)-Derivations of prime rings, Doğa TU. J. Math. D., Vol. 12(2), 42 – 45, 1988.

Kaya, K., On Prime rings with weak-α-derivations, Doğa TU. Journal Math. D., Vol. 12(2), 46 – 51, 1988.

Lee, P. H. and Lee, T. K., On derivations of Prime Rings, Chinese Journal Math., Vol. 9(2), 107 – 110, 1981.

Öztürk, M.A., Sapancı, M., Orthogonal Symmetric bi-derivations on Semi-Prime Gamma Rings, Hacettepe Bull. Of Natural Sciences and Eng. Vol. 26, 31-46, 1997.

Öztürk, M.A., Jun, Y. B., Kim, K. H., On derivations of Prime Rings, Tr. J. Of Mah. Vol.26, 317-327, 2002

Posner, E. C., Derivations in Prime Rings, Proc. Amer. Math. Soc., Vol. 8, 1093 – 1100, 1957.

Sapancı, M, Nakajima, A.. A note on Gamma Rings, Tr. J. Of Mah. Vol. 20, 463-465, 1996.

Sapancı, M, Öztürk, M.A., Jun, Y. B., Symmetric bi-derivations on Prime Rings, East Asian Math. J. Vol. 1, 105-109, 1999.

Soytürk, M., The commutativity in prime gamma rings with derivation, Tr. J. Of Mah. Vol. 18, 149-155, 1994.

Soytürk, M., On (σ,τ)-Derivations with Module Values, Tr. J. Of Mah. Vol. 20, 563-569, 1996.

Uçkun, M., Öztürk, M. A., Jun, Y.B., On Prime Gamma Near Rings with derivations, Comm. Korean Math. Soc., 2003.

Vukman, J., symmetric bi-derivations on Prime and Semi-Prime Rings, Aequationes Math. Vol. 38, 245-254, 1989.

Vukman, J. Two results concerning symmetric bi-derivations on prime rings, Aequationes Math. Vol. 40, 181-189, 1990.

Yenigül, M. Ş., Argaç, N. On prime and semiprime rings with α-derivation, Tr. J. Of Mah. Vol. 18, 280-284, 1994.

Yenigül, M. Ş., Argaç, N., Ideals and Symmetric bi- derivations of Prime and Semi-Prime Rings, Tr. J. Of Mah, 127-130,

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı	: Mustafa Aşcı
Ana Adı	: Ümran
Baba Adı	: Mehmet Emin
Doğum Yeri ve Tarihi	: Güney / DENİZLİ, 11.03.1979
Lisans Eğitimi ve Mezuniyet tarihi	: Hacettepe Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü, 2002.
Çalıştığı Yer	:Pamukkale Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü
Bildiği Yabancı Diller	: İngilizce, Almanca
Mesleki Etkinlikleri	: Pamukkale Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü Araştırma Görevlisi