T.C.
PAMUKKALE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

# YÜKSEK MERTEBEDEN M-NOKTA SINIR DEĞER PROBLEMLERİ İÇİN POZİTİF ÇÖZÜMLERİN VARLIĞI

**DOKTORA TEZİ**

**MUSTAFA GÜNENDİ**

**DENİZLİ, KASIM - 2016**

T.C.
PAMUKKALE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

# YÜKSEK MERTEBEDEN M-NOKTA SINIR DEĞER PROBLEMLERİ İÇİN POZİTİF ÇÖZÜMLERİN VARLIĞI

DOKTORA TEZİ

MUSTAFA GÜNENDİ

DENİZLİ, KASIM - 2016

# KABUL VE ONAY SAYFASI

**Mustafa GÜNENDİ** tarafından hazırlanan "**YÜKSEK MERTEBEDEN M-NOKTA SINIR DEĞER PROBLEMLERİ İÇİN POZİTİF ÇÖZÜMLERİN VARLIĞI**" adlı tez çalışmasının savunma sınavı 08.11.2016 tarihinde yapılmış olup aşağıda verilen jüri tarafından oy birliği / oy çokluğu ile Pamukkale Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı Doktora Tezi olarak kabul edilmiştir.

| Jüri Üyeleri | İmza |
|---|---|
| Danışman<br>Doç. Dr. İsmail YASLAN | ........................................ |
| Üye<br>Prof. Dr. Bilender PAŞAOĞLU<br>Süleyman Demirel Üniversitesi | ........................................ |
| Üye<br>Doç. Dr. Alp Arslan KIRAÇ<br>Pamukkale Üniversitesi | ........................................ |
| Üye<br>Prof. Dr. Mehmet Ali SARIGÖL<br>Pamukkale Üniversitesi | ........................................ |
| Üye<br>Prof. Dr. Ali GÜVEN<br>Balıkesir Üniversitesi | ........................................ |

Pamukkale Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun 25/11/2016 tarih ve 43/29 sayılı kararıyla onaylanmıştır.

........................................

Prof. Dr. Uğur YÜCEL

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

**Bu tezin tasarımı, hazırlanması, yürütülmesi, araştırmalarının yapılması ve bulgularının analizlerinde bilimsel etiğe ve akademik kurallara özenle riayet edildiğini; bu çalışmanın doğrudan birincil ürünü olmayan bulguların, verilerin ve materyallerin bilimsel etiğe uygun olarak kaynak gösterildiğini ve alıntı yapılan çalışmalara atfedildiğine beyan ederim.**

**Mustafa GÜNENDİ**

# ÖZET

**YÜKSEK MERTEBEDEN M-NOKTA SINIR DEĞER PROBLEMLERİ İÇİN POZİTİF ÇÖZÜMLERİN VARLIĞI**
**DOKTORA TEZİ**
**MUSTAFA GÜNENDİ**
**PAMUKKALE ÜNİVERSİTESİ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**
**MATEMATİK ANABİLİM DALI**
**(TEZ DANIŞMANI: DOÇ. DR. İSMAİL YASLAN)**

**DENİZLİ, KASIM - 2016**

Bu tez çalışması, giriş bölümü dışında beş ana bölümden oluşmaktadır. İkinci bölümde, tezin ilerleyen kısımlarında kullanılacak olan temel tanım ve teoremlerin ifadeleri verilmiştir. Üçüncü bölümde, zaman skalası üzerinde tanımlı, yüksek mertebe m-nokta sınır değer probleminin en az bir ve üç pozitif çözümünün varlığı Krassnosel'skii ve Leggett-Williams sabit nokta teoremleri yardımıyla incelenmiştir. Dördüncü bölümde, yüksek mertebe m- nokta kesirli sınır değer problemi için en az bir ve en az üç pozitif çözümün varlığı araştırılmıştır. Bu bölümde yine Krassnosel'skii ve Leggett-Williams sabit nokta teoremleri kullanılmıştır. Beşinci bölümde, yüksek mertebe m-nokta kesirli integral sınır koşullu bir sınır değer problemi tanımlanmıştır. Bu problemin en az bir, en az iki ve en az üç pozitif çözümlerinin varlığı için yeterli koşullar sırasıyla sabit nokta indeks teorisi, Avery-Henderson sabit nokta teoremi ve Leggett-Williams sabit nokta teoremi yardımıyla ispatlanmıştır. Altıncı bölümde, yüksek mertebeden çoklu nokta kesirli integral sınır koşullu bir sınır değer problemi incelenmiştir. Bu problemin en az bir, en az iki ve en az üç pozitif çözümünün varlığı sırasıyla dört fonksiyonel sabit nokta teoremi, Avery-Henderson sabit nokta teoremi ve Leggett-Williams sabit nokta teoremi yardımıyla gösterilmiştir.

**ANAHTAR KELİMELER:** Sınır değer problemleri, Koni, Sabit nokta teoremleri, Pozitif çözümler, Zaman skalası, Kesirli türev, İntegral sınır koşulları.

# ABSTRACT

**EXISTENCE OF POSITIVE SOLUTIONS FOR HIGHER ORDER M-POINT BOUNDARY VALUE PROBLEMS**

**PH.D THESIS**
**MUSTAFA GÜNENDİ**
**PAMUKKALE UNIVERSITY INSTITUTE OF SCIENCE**
**MATHEMATICS**
**(SUPERVISOR: ASSOC. PROF. DR. İSMAİL YASLAN)**

**DENİZLİ, NOVEMBER 2016**

This thesis consists essentially of five chapters except the introduction part. In chapter 2, expressions of the basic definitions and theorems which are needed later in the thesis are given. In chapter 3, existence of at least one and three positive solutions for the higher order m-point boundary value problems defined on time scale are investigated by means of the Krassnosel'skii fixed point theorem and the Leggett-Williams fixed point theorem. In chapter 4, existence of at least one and three positive solutions for the higher order m-point fractional boundary value problems is investigated. Main tools used in this chapter are the Krassnosel'skii fixed point theorem and the Leggett-Williams fixed point theorem. In chapter 5, higher order m-point fractional boundary value problems with integral boundary conditions are defined. Then, we are established some sufficient conditions for the existence of at least one, two and three positive solutions for this problem by using fixed point index theory, Avery-Henderson fixed point theorem and Leggett-Williams fixed point theorem, respectively. In chapter 6, higher order multi point fractional boundary value problem with integral boundary conditions is studied. The existence of at leastone, two and three positive solutions for this problem is investigated by means four functional fixed point theorem, Avery-Henderson fixed point theorem and Leggett-Williams fixed point theorem, respectively.

**KEYWORDS:** Boundary value problems, Cone, Fixed point theorems, Positive solutions, Time scales, Fractional derivative, Integral boundary conditions.

# İÇİNDEKİLER

Sayfa

# ÖNSÖZ

Bu tez çalışması süresince, değerli yardım ve katkılarıyla beni yönlendiren, anlayışını, emeğini ve zamanını esirgemeyen çok kıymetli hocam Sayın Doç. Dr. İsmail YASLAN' a, bu süreçte hoşgörü ve sabırla beni destekleyen aileme, Yurt İçi Doktora Burs Programı kapsamında beni destekleyen TÜBİTAK' a, desteğini her an yanımda hissettiğim değerli arkadaşım Halil ALTIPARMAK' a teşekkürü bir borç bilirim.

# 1. GİRİŞ

Matematikte fonksiyon veya fonksiyonların, bir veya birden çok türevini ilişkilendiren denklemlere diferansiyel denklem denir. Fizik, kimya, mühendislik, biyoloji, ekonomi gibi birçok alanda matematik modeller genellikle diferansiyel denklemler kullanılarak ifade edilir. Bir diferansiyel denklem ile birlikte sınır koşulları olarak adlandırılan ek koşullar yardımıyla sınır değer problemleri (SDP) adı verilen problemler oluşturulur.

Diğer taraftan doğal sayılar kümesinin bir alt kümesi üzerinde tanımlı olan bir fonksiyonun değerlerini ve onun farklarını içeren denklemlere fark denklemleri adı verilir. Bağımsız değişkeni ayrık yada onu ayrık bir değişken gibi görmek matematiksel bakımdan uygun olduğu zaman fark denklem modelleri ortaya çıkar. Bu yüzden fark denklemleri geniş bir uygulama alanına sahiptir. Örneğin, biyolojide popülasyon sayısının araştırılması, tıpta hücre hareketlerinin takibinde, kontrol teorisinde kararlılık durumunun tespitinde ve daha birçok alanda fark denklemleriyle karşılaşılmaktadır.

Bir sınır değer probleminin çözümlerinin hangi şartlar altında varolduğunun bilinmesi özellikle uygulamalı matematik alanındaki çalışmaların önünü açan bir durumdur. Çünkü çözülmek istenen bir sınır değer probleminin çözümlerinin varlığı ispatlanmışsa, bu problemin üzerinde çalışmak daha akılcıdır.

Bu tez çalışmasında genel olarak dört adet yüksek mertebeden, çoklu nokta sınır değer problemi ele alınmış ve bu problemlerin pozitif çözümlerinin hangi koşullar altında varolduğu incelenmiştir.

Yüksek mertebeden bir sınır değer probleminin incelenmesi daha düşük mertebeden sınır değer problemlerini de kapsayan bir çalışma ortaya konmasını sağlar. Benzer şekilde çoklu nokta problemlerde bir sonuç ortaya koymak daha genel bir çalışma yapmak anlamına geldiği için önemlidir.

Çoklu nokta sınır değer problemleri, ilk olarak Il'in ve Moiseev (1987) tarafından çalışılmıştır. İki yazar bu çalışmalarında oluşturdukları sınır değer problemi için pozitif çözümlerin varlığını ispatladılar. Bu çalışmadan sonra araştırmalar lineer olmayan teoride devam etti. Bu konuda ilk çalışma Gupta (1992) ile yapıldı. Daha sonra literatürde birçok yazar gerek diferansiyel denklemler, gerekse fark denklemleriyle oluşturulan, farklı yapıda birçok çoklu nokta sınır değer probleminin çözümleri için varlık koşullarını sundular (Chyan ve Henderson 2002), (Feng 1997), (Graef ve Yang 2006), (Guo ve diğ. 2008), (Guo ve Trian 2007), (Guo ve diğ. 2004), (Guo ve diğ.

2003), (Jiang ve Liu 2009), (Jiang 2008), (Liu 2002), (Liu 2004), (Ma 2004), (Ma 2001), (Yang 2007), (Wang ve diğ. 2010), (Wei 2006), (Zhang ve diğ. 2009).

Detayını temel kavramlar kısmında verecek olduğumuz zaman skalası konusu, ilk olarak Hilger (1988) tarafından ortaya atılmasından sonra, sürekli ve ayrık analizi birleştiren bir kavram olarak oldukça popüler bir çalışma alanı olmuştur. Bohner ve Peterson (2001) ve Bohner ve Peterson (2003) kitapları zaman skalası konusunda bilgi alınabilecek kapsamlı kaynaklar arasındadır. Zaman skalası üzerinde çoklu nokta sınır değer problemleri birçok matematikçi tarafından ilgiyle çalışılmış ve pozitif çözümlerin varlığı üzerine yayınlar yapılmıştır (Anderson ve Avery 2004), (Anderson ve diğ. 2006), (Anderson ve Karaca 2008), (Dogan ve diğ. 2010), (Dogan 2013), (Hamal ve Yörük 2009), (Han ve Kao 2008), (Hilger 1990), (Hu ve Zhau 2011), (Liang ve diğ. 2009), (Luca 2012), (Yaslan 2012), (Wang ve Xu 2009).

Wang ve Ge (2007) makalesinde

$$\begin{cases} x^{(2n)}(t) = f(t, x(t), ..., x^{(2(n-1))}(t)), \;\; 0 \leq t \leq 1, \\ x^{(2i)}(0) - a_i x^{(2i+1)}(0) = \sum\limits_{j=1}^{m-2} \alpha_{ij} x^{(2i)}(\xi_j), \\ x^{(2i)}(1) + b_i x^{(2i+1)}(1) = \sum\limits_{j=1}^{m-2} \beta_{ij} x^{(2i)}(\xi_j), \quad 0 \leq i \leq n-1 \end{cases}$$

yüksek mertebeden çoklu nokta sınırdeğer problemini ele almış ve bu problemin en az üç pozitif çözümünün varlığı için yeterli koşulları Leggett-Williams sabit nokta teoremi yardımıyla elde etmişlerdir.

Diğer taraftan Yaslan (2013) makalesinde

$$\begin{cases} (-1)^n y^{\Delta^{2n}}(t) = f(t, y(t)), \;\; t \in [t_1, t_m] \subset \mathbb{T}, \;\; n \in \mathbb{N} \\ y^{\Delta^{2i+1}}(t_m) = 0, \, \alpha y^{\Delta^{2i}}(t_1) - \beta y^{\Delta^{2i+1}}(t_1) = \sum\limits_{k=2}^{m-1} y^{\Delta^{2i+1}}(t_k) \end{cases}$$

zaman skalası üzerinde yüksek mertebe $m$-nokta sınır değer problemini incelemiş ve en az bir, en az iki ve en az üç pozitif çözümlerin varlığını sırasıyla dört fonksiyonel sabit nokta teoremi, Avery-Henderson sabit nokta teoremi ve beş fonksiyonel sabit nokta teoremini kullanarak elde etmiştir.

Yukarıdaki çalışmalardan hareketle, tezimizde ilk olarak

$$\begin{cases} (-1)^n y^{\Delta^{2n}}(t) = f(t, y(t)), \ \ t \in [t_1, t_2] \subset \mathbb{T}, \ \ n \in \mathbb{N} \\ \alpha y^{\Delta^{2i}}(t_1) - \beta y^{\Delta^{2i+1}}(t_1) = \sum\limits_{p=1}^{m-2} a_p y^{\Delta^{2i+1}}(\xi_p), \\ \gamma y^{\Delta^{2i}}(t_2) + \delta y^{\Delta^{2i+1}}(t_2) = \sum\limits_{p=1}^{m-2} b_p y^{\Delta^{2i+1}}(\xi_p), \end{cases}$$

olacak şekilde, zaman skalası üzerinde yüksek mertebeden çoklu nokta sınır değer problemi ele alınacaktır. Bu problem için en az bir pozitif çözümün varlığı Krassnosel'skii sabit nokta teoremi yardımıyla, en az üç pozitif çözümünün varlığı Leggett-Williams sabit nokta teoremi yardımıyla incelenecektir.

Detaylarını Temel kavramlar kısmında vereceğimiz kesirli türev kavramı bize daha genel bir türev alma olanağı sağlar. Bu nedenle kesirli türev kendine fizik, kimya, aerodinamik ve polimer reoloji gibi bir çok bilim dalında uygulama alanı bulmuştur (Kilbas ve diğ. 2006), (Oldman ve Spanier 1974), (Sabatier ve diğ. 2007), (Samko ve diğ. 1993).

Kesirli türev kullanılarak oluşturulan sınır değer problemlerinin pozitif çözümlerinin varlığı son yıllarda bir çok matematikçi tarafından çalışılmıştır (Ahmad ve Nieto 2009), (Ahmad ve Ntouyas 2012), (El-Shahed 2007), (Ghanbari ve Gholami 2012), (Liang ve Zhang 2011), (Su ve Zhang 2009), (Sun ve Zhao 2005), (Zhang 2010).

Nyamoradi ve Javidi (2012) çalışmasında

$$\begin{cases} D^{\sigma}_{0^+}(\phi_p(u''(t))) - g(t)f(u(t)) = 0, \ \ t \in [0,1], \, 1 < \sigma \leq 2, \\ \phi_p(u''(0)) = \phi_p(u''(1)) = 0, \\ au(0) - bu'(0) = \sum\limits_{i=1}^{m-2} a_i u(\xi_i), \\ cu(1) + du'(1) = \sum\limits_{i=1}^{m-2} b_i u(\xi_i), \end{cases}$$

kesirli mertebeden çoklu nokta sınır değer problemini ele almış ve Karassnosel'skii sabit nokta teoremi yardımıyla en az bir pozitif çözümünün varlığını incelemişlerdir.

Biz de bu tez çalışmamızda

$$\begin{cases} -D^{\eta}_{0^+}u(t) + f(t, u(t)) = 0, \ \ t \in [0,1], \\ u''(0) = u'''(0) = ... = u^{(n-2)}(0) = 0, \ \ u'''(1) = 0, \\ \alpha u(0) - \beta u'(0) = \sum\limits_{p=1}^{m-2} a_p u'(\xi_p), \\ \gamma u(1) + \delta u'(1) = \sum\limits_{p=1}^{m-2} b_p u'(\xi_p), \end{cases}$$

yüksek mertebeden çoklu nokta kesirli sınır değer probleminin pozitif çözümlerinin varlığı ile ilgileneceğiz. Bu incelemeyi yaparken en az bir pozitif çözüm için Krassnosel'skii sabit nokta teoreminden, en az üç pozitif çözüm için Leggett-Williams sabit nokta teoreminden yararlanacağız.

Özel olarak bazı matematikçiler kesirli türev yardımıyla oluşturdukları sınır değer problemlerine integral sınır koşulu ekleyerek çalışmalarını farklı hale getirmişlerdir (Benchohra ve diğ. 2008), (Cabada ve Wang 2012), (Graef ve diğ. 2012), (Graef ve diğ. 2013), (Jia ve diğ. 2012), (Jin ve diğ. 2012), (Liang ve Song 2012), (Sun ve Wang 2014), (Wang ve Zhang 2014), (Wong 2013), (Yang 2014), (Zhang ve Xu 2013), (Zhao 2012).

Tezimizin beşinci bölümünde

$$\begin{cases} D_{0^+}^{\alpha}u(t) + f(t,u(t)) = 0, \;\; t \in [0,1], \\ u(0) = u'(0) = \ldots = u^{(n-2)}(0) = 0, \\ \qquad u(1) = \sum\limits_{p=1}^{m-2} a_p \int\limits_0^{\xi_p} u(s)ds, \end{cases}$$

yüksek mertebeden çoklu nokta integral sınır koşullu kesirli sınır değer problemini araştıracağız. Bu problem için en az bir pozitif çözümün varlığını sabit nokta indeks teorisi ile, en az iki pozitif çözümün varlığını Avery-Henderson sabit nokta teoremi ile ve en az üç pozitif çözümün varlığını Leggett-Williams sabit nokta teoremi ile inceleyeceğiz.

Tezimizin son bölümünde de benzer olarak

$$\begin{cases} -D_{0^+}^{\eta-2}(u''(t)) + f(t,u(t)) = 0, \;\; t \in [0,1], \\ u''(0) = u'''(0) = ... = u^{(n-2)}(0) = 0, \;\; u'''(1) = 0, \\ \alpha u(0) - \beta u'(0) = \sum\limits_{p=1}^{m-2} a_p \int\limits_0^{\xi_p} u(s)ds, \\ \gamma u(1) + \delta u'(1) = \sum\limits_{p=1}^{m-2} b_p \int\limits_0^{\xi_p} u(s)ds, \end{cases}$$

yüksek mertebe çoklu nokta integral sınır koşullu sınır değer problemini ele alacağız. Bu problemin en az bir pozitif çözümünün varlığını dört fonksiyonel sabit nokta teoremi yardımıyla, en az iki pozitif çözümünün varlığını Avery-Henderson sabit nokta teoremi yardımıyla ve en az üç pozitif çözümünün varlığını Leggett-Williams sabit nokta teoremi yardımıyla ispatlayacağız.

# 2. TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde, ilerleyen kısımlarda gereksinim duyacağımız bazı tanım ve teoremlerin ifadelerine yer vereceğiz.

## 2.1 Zaman Skalası

### 2.1.1 Zaman Skalası ile İlgili Temel Kavramlar

**Tanım 2.1.1.** Reel sayıların boştan farklı kapalı bir alt kümesine zaman skalası adı verilir ve genellikle $\mathbb{T}$ ile gösterilir (Bohner ve Peterson 2001).

Reel sayılar kümesi, tam sayılar kümesi, doğal sayılar kümesi ve Cantor kümesi zaman skalasına örnek olarak verilebilir. Buna karşılık rasyonel sayılar, irrasyonel sayılar, karmaşık sayılar ve $(0,1)$ aralığı birer zaman skalası değildir.

**Tanım 2.1.2.** $\mathbb{T}$ bir zaman skalası olsun. $t \in \mathbb{T}$ için $\sigma(t) := \inf\{s \in \mathbb{T} : s > t\}$ şeklinde tanımlı $\sigma : \mathbb{T} \to \mathbb{T}$ operatörüne ileri sıçrama operatörü denir. Diğer taraftan $t \in \mathbb{T}$ için $\rho(t) := \sup\{s \in \mathbb{T} : s < t\}$ ile tanımlı $\rho : \mathbb{T} \to \mathbb{T}$ operatörüne geri sıçrama operatörü adı verilir (Bohner ve Peterson 2001).

Bu tanıma ek olarak, eğer $\mathbb{T}$ nin maksimum elemanı $t_1$ ise, $\sigma(t_1) = t_1$ ve $\mathbb{T}$ nin minimum elemanı $t_2$ ise, $\rho(t_2) = t_2$ olarak tanımlandığını da söyleyebiliriz.

**Tanım 2.1.3.** $\mathbb{T}$ bir zaman skalası olsun. $t \in \mathbb{T}$ için eğer $\sigma(t) > t$ ise $t$ noktasına sağ-yayılmış nokta, $\rho(t) < t$ ise $t$ noktasına sol-yayılmış nokta denir. Hem sağ-yayılmış hem de sol-yayılmış olan noktaya izole (ayrık) nokta denir (Bohner ve Peterson 2001).

**Tanım 2.1.4.** $\mathbb{T}$ zaman skalasındaki herhangi bir $t$ elemanı için, eğer $t < \sup \mathbb{T}$ ve $\sigma(t) = t$ ise $t$ noktasına sağ-yoğun nokta, $t > \inf \mathbb{T}$ ve $\rho(t) = t$ ise $t$ noktasına sol-yoğun nokta denir. Hem sağ-yoğun hem de sol-yoğun olan noktaya yoğun nokta denir (Bohner ve Peterson 2001).

**Tanım 2.1.5.** $\mathbb{T}$ bir zaman skalası olmak üzere, $\forall t \in \mathbb{T}$ için $\mu(t) = \sigma(t) - t$ ile tanımlı $\mu : \mathbb{T} \to [0, \infty)$ fonksiyonuna graininess fonksiyonu denir (Bohner ve Peterson 2001).

**Tanım 2.1.6.** Eğer bir $\mathbb{T}$ zaman skalası sol-yayılmış maksimum $m$ elemanına sahipse $\mathbb{T}^k = \mathbb{T} - \{m\}$ ile tanımlanır. Özetle;

$$\mathbb{T}^k = \begin{cases} \mathbb{T} \backslash (\rho(\sup \mathbb{T}), \sup \mathbb{T}], & \sup \mathbb{T} < \infty, \\ \mathbb{T}, & \sup \mathbb{T} = \infty \end{cases} \tag{2.1}$$

şeklinde yazılabilir (Bohner ve Peterson 2001).

Bu tanıma ek olarak $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu için, $f^\sigma : \mathbb{T}^k \to \mathbb{R}$ fonksiyonunu $\forall t \in \mathbb{T}$ olduğunda

$$f^\sigma(t) = (f \circ \sigma)(t) = f(\sigma(t))$$

olarak ele alacağız.

**Tanım 2.1.7.** Bir $\mathbb{T}$ zaman skalasında $[a, b]$ aralığı, $[a, b] = \{t \in \mathbb{T} : a \leq t \leq b\}$ olarak tanımlanır (Bohner ve Peterson 2001).

**Örnek 2.1.8.** Zaman skalasını $\mathbb{T} = \mathbb{R}$ olarak alırsak, $t \in \mathbb{R}$ için

$$\sigma(t) = \inf\{s \in \mathbb{R} : s > t\} = \inf(t, \infty) = t$$

olduğu görülür. Benzer şekilde $\rho(t) = t$ olduğunu da görebiliriz. Bu takdirde $\forall t \in \mathbb{R}$ noktasının yoğun olduğu söylenebilir. Diğer taraftan graininess fonksiyonunun tanımı gözönüne alınırsa $\forall t \in \mathbb{T}$ için $\mu(t) = 0$ olduğu aşikardır.

**Örnek 2.1.9.** Zaman skalasını $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$ seçelim. Bu durumda $t \in \mathbb{Z}$ için

$$\sigma(t) = \inf\{s \in \mathbb{R} : s > t\} = \inf\{t + 1, t + 2, t + 3, ...\} = t + 1$$

olur. Benzer biçimde $\rho(t) = t - 1$ bulunur. Bu durumda tamsayılar kümesinin bütün elemanları izole noktalardır. Bunu yanında graininess fonksiyonu düşünülecek olursa, $\forall t \in \mathbb{T}$ için $\mu(t) = 1$ olduğunu söyleyebiliriz.

### 2.1.2 Zaman Skalasında Türev

**Tanım 2.1.10.** $U \subset \mathbb{T}$ olsun. Her $\varepsilon > 0$ için $U_\varepsilon(t) = \{s \in \mathbb{T} : |s - t| < \varepsilon\}$ kümesine $t$ nin $\varepsilon$ komşuluğu denir (Bohner ve Peterson 2001).

**Tanım 2.1.11.** $t_0 \in \mathbb{T}$ olsun. Verilen her $\varepsilon > 0$ ve her $t \in U(t_0)$ için, $|f(t) - f(t_0)| < \varepsilon$ olacak şekilde bir $U(t_0)$ komşuluğu bulunabiliyorsa, $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ fonksiyonuna $t_0$ noktasında süreklidir denir (Bohner ve Peterson 2001).

**Tanım 2.1.12.** $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon ve $t \in \mathbb{T}^k$ olsun. $\forall \varepsilon > 0$ sayısı verildiğinde $t$ nin bir $U$ komşuluğu vardır öyleki $\forall s \in U$ için,

$$|[f(\sigma(t)) - f(s)] - f^\Delta(t)[\sigma(t) - s]| \leq \varepsilon|\sigma(t) - s|$$

oluyorsa, $f^{\Delta}(t)$ sayısına $f$ nin $t$ noktasındaki delta (Hilger) türevi denir (Bohner ve Peterson 2001).

Eğer $\forall t \in \mathbb{T}^k$ olduğunda $f$ fonksiyonu için $f^{\Delta}(t)$ mevcutsa, $f$ fonksiyonu $\mathbb{T}^k$ üzerinde delta türevlenebilirdir (kısaca türevlenebilirdir) denir. $f^{\Delta} : \mathbb{T}^k \to \mathbb{R}$ fonksiyonuna ise $f$ nin $\mathbb{T}^k$ kümesindeki (delta) türev fonksiyonu adı verilir.

**Teorem 2.1.13.** Kabul edelim ki, $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon ve $t \in \mathbb{T}^k$ olsun. Bu durumda

(i) Eğer $f$, $t$ noktasında türevlenebilir ise, bu noktada süreklidir.

(ii) $f$ fonksiyonu $t$ noktasında sürekli ve $t$ noktası sağ-yayılmış bir nokta ise, $f$ fonksiyonu $t$ de türevlenebilirdir ve bu türev
$$f^{\Delta}(t) = \frac{f(\sigma(t)) - f(t)}{\mu(t)}$$
şeklinde ifade edilir.

(iii) $t$ sağ-yoğun bir nokta olsun. Bu durumda $f$ fonksiyonunun $t$ noktasında türevlenebilir olması için gerek ve yeter şart
$$\lim_{s \to t} \frac{f(t) - f(s)}{t - s}$$
limitinin sonlu bir sayı olarak var olmasıdır. Bu takdirde
$$f^{\Delta}(t) = \lim_{s \to t} \frac{f(t) - f(s)}{t - s}$$
olur.

(iv) $f$ fonksiyonu $t$ noktasında türevlenebilir ise,
$$f(\sigma(t)) = f(t) + \mu(t) f^{\Delta}(t)$$
olur (Bohner ve Peterson 2001).

**Örnek 2.1.14.** $\mathbb{T} = \mathbb{R}$ ve $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$ durumlarında türevi inceleyelim.

(i) $\mathbb{T} = \mathbb{R}$ alınırsa Teorem 2.1.13 ün $(iii)$ koşulu gereği, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonunun $t \in \mathbb{R}$ de türevlenebilir olması için gerek ve yeter şart
$$f'(t) = \lim_{s \to t} \frac{f(t) - f(s)}{t - s}$$
limitinin mevcut olmasıdır. Bu da bize $\mathbb{T} = \mathbb{R}$ de delta türevin klasik anlamda türeve karşılık geldiğini verir. Yani $f^{\Delta}(t) = f'(t)$ olur.

(ii) $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$ iken Teorem 2.1.13 ün $(ii)$ şartı gözönüne alınırsa, $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu $t \in \mathbb{Z}$ de

$$f^{\Delta}(t) = \frac{f(\sigma(t)) - f(t)}{\mu(t)} = \frac{f(t+1) - f(t)}{1} = f(t+1) - f(t) = \Delta f(t)$$

olacak şekilde delta türeve sahiptir. Burada $\Delta$ alışılmış ileri fark operatörüdür.

**Teorem 2.1.15.** Kabul edelimki $f, g : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ fonksiyonları $t \in \mathbb{T}^k$ noktasında türevlenebilir olsunlar. Bu takdirde:

(i) $f + g : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu, $t$ noktasında

$$(f+g)^{\Delta}(t) = f^{\Delta}(t) + g^{\Delta}(t)$$

olacak şekilde türevlenebilirdir.

(ii) Herhangi bir $\alpha$ sabiti için $\alpha f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu, $t$ noktasında türevlenebilirdir ve

$$(\alpha f)^{\Delta}(t) = \alpha f^{\Delta}(t)$$

olur.

(iii) $fg : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ çarpım fonksiyonu, $t$ noktasında

$$(fg)^{\Delta}(t) = f^{\Delta}(t)g(t) + f(\sigma(t))g^{\Delta}(t) = f(t)g^{\Delta}(t) + f^{\Delta}(t)g(\sigma(t))$$

olacak şekilde türevlenebilirdir.

(iv) Eğer $f(t)f(\sigma(t)) \neq 0$ ise $\frac{1}{f}$ fonksiyonu $t$ noktasında

$$\left(\frac{1}{f}\right)^{\Delta}(t) = -\frac{f^{\Delta}(t)}{f(t)f(\sigma(t))}$$

ile birlikte türevlenebilirdir.

(v) Eğer $g(t)g(\sigma(t)) \neq 0$ ise $\frac{f}{g}$ fonksiyonu $t$ noktasında türevlenebilirdir ve

$$\left(\frac{f}{g}\right)^{\Delta}(t) = \frac{f^{\Delta}(t)g(t) - f(t)g^{\Delta}(t)}{g(t)g(\sigma(t))}$$

olduğu söylenebilir (Bohner ve Peterson 2001).

**Tanım 2.1.16.** $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. $f^{\Delta} : \mathbb{T}^k \to \mathbb{R}$ fonksiyonu $\mathbb{T}^{k^2} = (\mathbb{T}^k)^k$ da türevlenebilir ise, $f$ fonksiyonuna ikinci mertebeden türevlenebilirdir denir ve

$$f^{\Delta\Delta} = (f^{\Delta})^{\Delta} : \mathbb{T}^{k^2} \to \mathbb{R}$$

olur. Benzer şekilde $f$ fonksiyonunun yüksek mertebeden türevleri $f^{\Delta^n} : \mathbb{T}^{k^n} \to \mathbb{R}$ ile tanımlanır (Bohner ve Peterson 2001).

### 2.1.3 Zaman Skalasında İntegral

**Tanım 2.1.17.** Eğer $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ fonksiyonunun $\mathbb{T}$ deki tüm sağ-yoğun noktalarda sağdan limitleri var (sonlu) ve $\mathbb{T}$ deki tüm sol-yoğun noktalarda soldan limitleri var (sonlu) ise, $f$ fonksiyonuna düzenli (regüler) fonksiyon denir (Bohner ve Peterson 2001).

**Tanım 2.1.18.** Eğer $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu, $\mathbb{T}$ deki sağ-yoğun noktalarda sürekli ve sol-yoğun noktalarda sonlu limite sahipse, $f$ fonksiyonuna sağ-yoğun sürekli fonksiyon denir. $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ sağ-yoğun sürekli fonksiyonların kümesi

$$C_{rd} = C_{rd}(\mathbb{T}) = C_{rd}(\mathbb{T}, \mathbb{R})$$

ile gösterilir (Bohner ve Peterson 2001).

**Tanım 2.1.19.** $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$, $D$ (diferensiyellenebilme bölgesi) bölgesinde sürekli bir fonksiyon olmak üzere, $D \subset \mathbb{T}^k$, $\mathbb{T}^k \backslash D$ kümesi sayılabilir ve sağ-yayılmış nokta içermiyorsa $f$ fonksiyonuna $t \in D$ de pre-diferansiyellenebilirdir denir (Bohner ve Peterson 2001).

**Örnek 2.1.20.** $\mathbb{T} := \bigcup\limits_{k=0}^{\infty} [3k, 3k+2]$ ve $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu

$$f(t) = \begin{cases} 0, \quad t \in \bigcup\limits_{k=0}^{\infty} [3k, 3k+1], \\ t - 3k - 1,\ t \in [3k+1, 3k+2],\ k \in \mathbb{N}_0, \end{cases}$$

şeklinde olsun. Bu takdirde $D$ bölgesi,

$$D := \mathbb{T} \backslash \bigcup_{k=0}^{\infty} \{3k+1\}$$

olmak üzere $f$ fonksiyonu $D$ bölgesinde pre-diferansiyellenebilirdir (Bohner ve Peterson 2001).

**Teorem 2.1.21.** (Ortalama Değer Teoremi) Kabul edelim ki, $f$ ve $g$ fonksiyonları $\mathbb{T}$ de tanımlı ve bir $D$ bölgesinde pre-diferansiyellenebilir reel değerli fonksiyonlar olsunlar. Bu durumda $\forall t \in D$ için

$$|f^{\Delta}(t)| \leq g^{\Delta}(t)$$

eşitsizliğinden her $r, s \in \mathbb{T}$ ve $r \leq s$ için,

$$|f(s) - f(r)| \leq g(s) - g(r)$$

eşitsizliği sağlanır (Bohner ve Peterson 2001).

**Teorem 2.1.22.** $f$ düzenli bir fonksiyon olsun. O halde $\forall t \in D$ için,

$$F^{\Delta}(t) = f(t)$$

olacak şekilde $D$ diferensiyellenebilme bölgesine sahip pre-diferensiyellenebilen bir $F$ fonksiyonu vardır (Bohner ve Peterson 2001).

**Tanım 2.1.23.** Kabul edelim ki $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ düzenli bir fonksiyon olsun. Bu takdirde Teorem 2.1.22 de ifade edilen $F$ fonksiyonuna $f$ fonksiyonunun pre-anti türevi denir. Bu durumda, bir düzenli $f$ fonksiyonunun belirsiz integrali,

$$\int f(t)\Delta t = F(t) + C$$

şeklinde tanımlanır. Burada $C$ keyfi bir sabit, $F$ de $f$ nin pre-anti türevidir.
Cauchy integralini her $r, s \in \mathbb{T}$ için

$$\int_r^s f(t)\Delta t = F(s) - F(r)$$

olarak tanımlayacağız.
Bir $F : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu $\forall t \in \mathbb{T}^k$ için

$$F^{\Delta}(t) = f(t)$$

eşitliğini sağlıyorsa, $F$ fonksiyonuna $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ fonksiyonunun anti türevi denir (Bohner ve Peterson 2001).

**Teorem 2.1.24.** Kabul edelim ki $a, b, c \in \mathbb{T}$, $\alpha \in \mathbb{R}$ ve $f, g \in C_{rd}$ olsun. Bu takdirde,

(i) $\int_a^b [f(t)+g(t)]\Delta t = \int_a^b f(t)\Delta t + \int_a^b g(t)\Delta t;$

(ii) $\int_a^b (\alpha f)(t)\Delta t = \alpha \int_a^b f(t)\Delta t;$

(iii) $\int_a^b f(t)\Delta t = -\int_b^a f(t)\Delta t;$

(iv) $\int_a^b f(t)\Delta t = \int_a^c f(t)\Delta t + \int_c^b f(t)\Delta t;$

(v) $\int_a^b f(\sigma(t))g^{\Delta}(t)\Delta t = (fg)(b) - (fg)(a) - \int_a^b f^{\Delta}(t)g(t)\Delta t;$

(vi) $\int_a^b f(t)g^{\Delta}(t)\Delta t = (fg)(b) - (fg)(a) - \int_a^b f^{\Delta}(t)g(\sigma(t))\Delta t;$

(vii) $\int_a^a f(t)\Delta t = 0;$

(viii) Eğer $[a,b)$ üzerinde $|f(t)| \leq g(t)$ ise,

$$\left| \int_a^b f(t)\Delta t \right| \leq \int_a^b g(t)\Delta t;$$

(ix) Eğer her $a \leq t < b$ için $f(t) \geq 0$ ise, $\int_a^b f(t)\Delta t \geq 0;$

olur (Bohner ve Peterson 2001).

**Teorem 2.1.25.** Eğer $f \in C_{rd}$ ve $t \in \mathbb{T}^k$ ise,

$$\int_t^{\sigma(t)} f(\tau)\Delta\tau = \mu(t)f(t)$$

eşitliği sağlanır (Bohner ve Peterson 2001).

**Teorem 2.1.26.** $f^{\Delta}(t) \geq 0$ ise, $f$ azalmayandır (Bohner ve Peterson 2001).

**Teorem 2.1.27.** $a, b \in \mathbb{T}$ ve $f \in C_{rd}$ olsun.

(i) Eğer $\mathbb{T} = \mathbb{R}$ ise,

$$\int_a^b f(t)\Delta t = \int_a^b f(t)dt$$

dir. Burada sağdaki integral analizden bilinen Riemann integralidir.

(ii) Eğer $[a,b]$ aralığı yanlızca izole noktalar içeriyorsa,

$$\int_a^b f(t)\Delta t = \begin{cases} \sum\limits_{t\in[a,b)} \mu(t)f(t), & a<b, \\ 0, & a=b, \\ -\sum\limits_{t\in[b,a)} \mu(t)f(t), & a>b \end{cases}$$

dir.

(iii) Eğer $h>0$ için $\mathbb{T}=h\mathbb{Z}=\{hk : k\in\mathbb{Z}\}$ ise,

$$\int_a^b f(t)\Delta t = \begin{cases} \sum\limits_{k=\frac{a}{h}}^{\frac{b}{h}-1} f(kh)h, & a<b, \\ 0, & a=b, \\ -\sum\limits_{k=\frac{b}{h}}^{\frac{a}{h}-1} f(kh)h, & a>b \end{cases}$$

dir.

(iv) Eğer $\mathbb{T}=\mathbb{Z}$ ise,

$$\int_a^b f(t)\Delta t = \begin{cases} \sum\limits_{t=a}^{b-1} f(t), & a<b, \\ 0, & a=b, \\ -\sum\limits_{t=b}^{a-1} f(t), & a>b \end{cases}$$

olur (Bohner ve Peterson 2001).

## 2.2 Riemann-Liouville Kesirli Türev ve İntegrali

**Tanım 2.2.1.**

$$\Gamma(n) = \int_0^\infty x^{n-1}e^{-x}dx \tag{2.2}$$

integrali ile tanımlı fonksiyona Gamma Fonksiyonu denir (Samko ve diğ. 1993).

Burada sağ taraftaki genelleştirilmiş integral $n>0$ için yakınsak, $n\leq 0$ için ıraksaktır.

**Lemma 2.2.2.** Gamma fonksiyonu için aşağıdaki özellikler geçerlidir.

(i) $\Gamma(1)=1$.

(ii) $\forall n \in \mathbb{R}^+$ için $\Gamma(n+1) = n\Gamma(n)$ dir.

(iii) $\forall n \in \mathbb{N}$ için $\Gamma(n+1) = n!$ olur (Samko ve diğ. 1993).

**Tanım 2.2.3.** $\alpha > 0$, $n-1 \leq \alpha < n$, $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere $(n-1)$. mertebeye kadar sürekli türeve sahip $f(t)$ fonksiyonunun $\alpha$. mertebeden Riemann-Liouville kesirli türevi

$$D_{0^+}^{\alpha} f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dt^n} \int\limits_0^t (t-s)^{n-\alpha-1} f(s) ds$$

ile tanımlanır (Samko ve diğ. 1993).

**Tanım 2.2.4.** $f \in L^1(\mathbb{R}^+)$ fonksiyonunun $\alpha > 0$ olmak üzere $\alpha$. mertebeden Riemann-Liouville kesirli integrali

$$I_{0^+}^{\alpha} f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int\limits_0^t (t-s)^{\alpha-1} f(s) ds$$

olarak ifade edilir (Samko ve diğ. 1993).

**Örnek 2.2.5.** $f(t) = t^2$ fonksiyonunun $\alpha = \frac{1}{2}$. mertebeden Riemann-Liouville kesirli türevini hesap edelim. $\alpha = \frac{1}{2}$ için Tanım 2.2.3 gözönüne alınırsa $n$, $n-1 \leq \alpha < n$ şartını sağlayan bir doğal sayı olacağından $n = 1$ dir. Böylece $\Gamma(n-\alpha) = \Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$ olduğu gözönüne alınarak,

$$\begin{aligned}
D_{0^+}^{\alpha} f(t) &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dt^n} \int\limits_0^t (t-s)^{n-\alpha-1} f(s) ds \\
&= \frac{1}{\Gamma(\frac{1}{2})} \frac{d}{dt} \int\limits_0^t (t-s)^{-\frac{1}{2}} s^2 ds \\
&= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{d}{dt} \left[ -\left( 2t^2(t-s)^{\frac{1}{2}} - \frac{4}{3}(t-s)^{\frac{3}{2}} t + \frac{5}{2}(t-s)^{\frac{5}{2}} \right) \Bigg|_0^t \right] \\
&= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{d}{dt} \left[ \frac{16}{15} t^{\frac{5}{2}} \right] \\
&= \frac{8t^{\frac{3}{2}}}{3\sqrt{\pi}}
\end{aligned}$$

bulunur.

**Lemma 2.2.6.** $f \in L(0,1)$ için $\gamma > 0$ olmak üzere $D_{0^+}^{\gamma} I_{0^+}^{\gamma} f(t) = f(t)$ eşitliği sağlanır (Samko ve diğ. 1993).

**Lemma 2.2.7.** $\alpha > 0$ olsun. Bu takdirde

$$D^{\alpha}_{0+}u = 0 \tag{2.3}$$

diferansiyel denkleminin çözümü, $c_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, ..., n$ ve $n - 1 < \alpha \leq n$ olmak üzere $u(t) = c_1 t^{\alpha-1} + c_2 t^{\alpha-2} + ... + c_n t^{\alpha-n}$ şeklindedir (Samko ve diğ. 1993).

**Lemma 2.2.8.** $\alpha > 0$ alalım. $c_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, ..., n$ ve $n - 1 < \alpha \leq n$ olsun. Bu durumda $u \in L(0,1)$ ve $D^{\alpha}_{0+}u \in L(0,1)$ için

$$I^{\alpha}_{0+}D^{\alpha}_{0+}u(t) = u(t) + c_1 t^{\alpha-1} + c_2 t^{\alpha-2} + ... + c_n t^{\alpha-n} \tag{2.4}$$

eşitliği doğrudur (Samko ve diğ. 1993).

## 2.3 Sabit Nokta ve Sabit Nokta Teoremleri

Bu bölümde sabit nokta kavramına, tezimizin ilerleyen kısımlarında kullanacak olduğumuz bazı sabit nokta teoremlerinin ifadelerine ve bu teoremlerin içinde geçen tanımlara yer vereceğiz.

**Tanım 2.3.1.** $X \neq \varnothing$ bir küme ve $T : X \to X$ bir dönüşüm olsun. Eğer $T(x) = x$ olacak şekilde bir $x \in X$ varsa $x$'e $T$ nin bir sabit noktası denir (Deimling 1985).

**Tanım 2.3.2.** $\mathbb{B}$ Banach uzayı ve boştan farklı, kapalı ve konveks $P \subset \mathbb{B}$ olsun. Eğer

(i) $\forall x \in P$ ve her $a \geq 0$ için $ax \in P$,

(ii) $x \in P$ ve $-x \in P$ olduğunda $x = 0$

şartları sağlanıyorsa, $P$ kümesine bir koni denir (Guo ve Lakshmikantham 1988).

**Tanım 2.3.3.** $\mathbb{B}$ bir Banach uzayı ve $P$, $\mathbb{B}$ de bir koni olsun. $\varphi : P \to [0, \infty)$ sürekli fonksiyoneli $\forall x, y \in P$ ve $t \in [0,1]$ için

$$\varphi(tx + (1-t)y) \geq t\varphi(x) + (1-t)\varphi(y)$$

eşitsizliğini sağlıyorsa bu fonksiyonele $P$ üzerinde konkav fonksiyonel denir. Diğer taraftan, $\Phi : P \to [0, \infty)$ sürekli fonksiyoneli $\forall x, y \in P$ ve $t \in [0,1]$ için

$$\Phi(tx + (1-t)y) \leq t\Phi(x) + (1-t)\Phi(y)$$

eşitsizliğini sağlıyorsa bu fonksiyonele $P$ üzerinde konveks fonksiyonel denir (Rudin 1976).

**Tanım 2.3.4.** Eğer bir kümenin elemanlarının her dizisinden yakınsak bir alt dizi seçilebiliyorsa, bu kümeye pre kompakt küme denir. Yakınsadığı nokta küme içinde ise, bu kümeye kompakt küme denir (Deimling 1985).

**Tanım 2.3.5.** Eğer bir dönüşüm her sınırlı kümeyi prekompakt bir kümeye dönüştürüyorsa, bu dönüşüme kompakt dönüşüm denir (Deimling 1985).

**Tanım 2.3.6.** Eğer bir dönüşüm sürekli ve kompakt ise bu dönüşüme tamamen süreklidir denir (Deimling 1985).

**Tanım 2.3.7.** $M$, $C[a,b]$ içinde bir küme olsun.

(i) $\forall x \in M$ ve $\forall t \in [a,b]$ için $|x(t)| \leq c$ olacak şekilde bir $c$ sayısı varsa, $M$ kümesine ait fonksiyonlara aynı dereceden sınırlı fonksiyonlar denir.

(ii) $\varepsilon > 0$ verilsin. $\forall t_1, t_2 \in [a,b]$ ve $\forall x \in M$ için $|t_1 - t_2| < \delta$ eşitsizliği sağlandığında $|x(t_1) - x(t_2)| < \varepsilon$ olacak şekilde bir $\delta > 0$ sayısı bulunabiliyorsa, $M$ kümesine ait fonksiyonlara aynı dereceden sürekli fonksiyonlar denir (Deimling 1985).

**Teorem 2.3.8.** (Arzelà-Ascoli Teoremi) Bir $M \subset C[a,b]$ kümesinin sürekli fonksiyonlar ailesinin pre kompakt olması için gerek ve yeter koşul $M$ ye ait fonksiyonların aynı dereceden sınırlı ve aynı dereceden sürekli olmasıdır (Deimling 1985).

**Tanım 2.3.9.** $K \neq \emptyset$, $X$ in altkümesi olsun. Eğer $K$ üzerinde $Rx = x$ olacak şekilde $R : X \to K$ sürekli fonksiyonu varsa $K \neq \emptyset$ kümesine $X$ in retraktı denir. Kabul edelim ki $X$ bir Banach uzayı, $K \subset X$ bir retrakt, $\Omega \subset K$ açık küme ve $F : \overline{\Omega} \to K$ kompakt ve $Fix(f) \cap \partial\Omega = \emptyset$ olsun. Bu takdirde

(i) $f(\overline{\Omega}) \in \Omega$ için $i_X(f, \Omega) = 1$.

(ii) $f : \Omega \to K$ sürekli bir fonksiyon ve kabul edelim ki $Fix(f)$, $\Omega$ nın kompakt altkümesi olsun. Bunun yanında $\Omega_1$ ve $\Omega_2$ kümeleri, $Fix(f) \subset \Omega_1 \cup \Omega_2$ olacak şekilde $\Omega$ nın ayrık ve açık altkümeleri olsunlar. Bu durumda $i_K(f, \Omega) = i_K(f, \Omega_1) + i_K(f, \Omega_2)$ olur.

(iii) $G$, $K \times [0,1]$ in açık altkümesi ve $F : G \to K$ bir sürekli fonksiyon olsun. Kabul edelim ki $Fix(F)$, $G$ kümesinin kompakt altkümesi olsun. Eğer $G_t = \{x : (x,t) \in G\}$ ve $F_t = F(\cdot, t)$ ise, $i_K(F_0, G_0) = i_K(F_1, G_1)$ olur.

(iv) Eğer $K_0 \subset K$, $K$ nın bir retraktı ve $F(\overline{\Omega}) \subset K_0$ ise, $i_K(F, \Omega) = i_{K_0}(F, \Omega \cap K_0)$ dır.

şartlarını sağlayacak şekilde $i_K(f, \Omega)$ tamsayısını tanımlayabiliriz (Guo ve Lakshmikantham 1988).

**Lemma 2.3.10.** $P$, $B$ reel Banach uzayında bir koni, $D_p := D \cap P \neq \emptyset$ ve $\overline{D_p} \neq P$ olacak şekilde $B$ nin açık sınırlı $D$ altkümesini alalım. Kabul edelim ki $A : \overline{D_p} \to P$, $y \in \partial D_p$ için $y \neq Ay$ olacak şekilde kompakt bir operatör olsun. Bu takdirde

(i) Eğer $y \in \partial D_p$ için $\|Ay\| \leq \|y\|$ ise, $i_p(A, D_p) = 1$ dir.

(ii) Eğer her $y \in \partial D_p$ ve her $\lambda > 0$ için $y \neq Ay + \lambda b$ olacak şekilde $b \in P \backslash \{0\}$ sayısı varsa, $i_p(A, D_p) = 0$ olur.

(iii) $U$, $\overline{U_p} \subset D_p$ olacak şekilde $P$ de açık bir küme olsun. Eğer $i_p(A, D_p) = 1$ ve $i_p(A, U_p) = 0$ ise, $A$ operatörü $D_p \backslash \overline{U_p}$ de bir sabit noktaya sahiptir. Benzer sonuç $i_p(A, D_p) = 0$ ve $i_p(A, U_p) = 1$ içinde geçerlidir (Lan 2001).

**Teorem 2.3.11.** (Krasnosel'skii Sabit Nokta Teoremi) $E$ bir Banach uzayı, $K \subset E$ bir koni olsun. Kabul edelim ki $\Omega_1$ ve $\Omega_2$, $0 \in \Omega_1$ ve $\overline{\Omega_1} \subset \Omega_2$ olacak şekilde $E$ de birer açık sınırlı alt küme olsunlar.

$$A : K \cap (\overline{\Omega_2} \setminus \Omega_1) \to K$$

tamamen sürekli operatörü alalım. Bu takdirde;

(i) $u \in K \cap \partial\Omega_1$ için $\|Au\| \leq \|u\|, u \in K \cap \partial\Omega_2$ için $\|Au\| \geq \|u\|$;

veya

(ii) $u \in K \cap \partial\Omega_1$ için $\|Au\| \geq \|u\|, u \in K \cap \partial\Omega_2$ için $\|Au\| \leq \|u\|$

sağlanıyorsa, A operatörü $K \cap (\overline{\Omega_2} \setminus \Omega_1)$ de bir sabit noktaya sahiptir (Guo ve Lakshmikantham 1988).

Şimdi sıradaki teoremin ifadesi için bazı tanımlamalar yapalım. $P$ bir koni olmak üzere $\lambda$ ve $\Psi$ $P$ üzerinde negatif olmayan, sürekli, konkav fonksiyoneller ve $\Phi$ ve $\nu$ yine $P$ üzerinde negatif olmayan, sürekli, konveks fonksiyoneller olsunlar. $r, \varpi, \mu$ ve $R$ pozitif sayıları için

$$Q(\lambda, \Phi, r, R) = \{x \in P : r \leq \lambda(x), \Phi(x) \leq R\},$$

$$U(\Psi, \varpi) = \{x \in Q(\lambda, \Phi, r, R) : \varpi \leq \Psi(x)\},$$

$$V(\nu, \mu) = \{x \in Q(\lambda, \Phi, r, R) : \nu(x) \leq \varpi\}$$

kümelerini tanımlayalım.

**Teorem 2.3.12.** (Dört Fonksiyonel Sabit Nokta Teoremi) $P$ kümesi $E$ reel Banach uzayında bir koni olsun. $\lambda$ ve $\Psi$ $P$ üzerinde negatif olmayan, sürekli, konkav fonksiyoneller ve $\Phi$ ve $\nu$ yine $P$ üzerinde negatif olmayan, sürekli, konveks fonksiyoneller olsunlar. Bunun yanında $r, \varpi, \mu$ ve $R$ pozitif sayıları, $A : Q(\lambda, \Phi, r, R) \to P$ tamamen sürekli operatör ve $Q(\lambda, \Phi, r, R)$ kümesi sınırlı olacak şekilde varolsun. Eğer

(i) $\{x \in U(\Psi, \varpi) : \Phi(x) < R\} \cap \{x \in V(\nu, \mu) : r < \lambda(x)\} \neq \emptyset$,

(ii) $\forall x \in Q(\lambda, \Phi, r, R)$ için $\lambda(x) = r$ ve $\mu < \nu(Ax)$ olduğunda $\lambda(Ax) \geq r$,

(iii) $\forall x \in V(\nu, \mu)$ için $\lambda(x) = r$ olduğunda $\lambda(Ax) \geq r$,

(iv) $\forall x \in Q(\lambda, \Phi, r, R)$ için $\Phi(x) = R$ ve $\Psi(Ax) < \varpi$ olduğunda $\Phi(Ax) \leq R$,

(v) $\forall x \in U(\Psi, \varpi)$ için $\Phi(x) = R$ olduğunda $\Phi(Ax) \leq R$

koşulları sağlanıyorsa $A$ operatörü $Q(\lambda, \Phi, r, R)$ kümesinde en az bir $x$ sabit noktasına sahiptir (Avery ve diğ. 2008).

**Teorem 2.3.13.** (Avery-Henderson Sabit Nokta Teoremi) $E$ reel Banach uzayında bir $P$ konisi alalım.

$$P(\lambda, r) = \{u \in P : \lambda(u) < r\}$$

kümesini oluşturalım. $P$ üzerinde negatif olmayan artan sürekli $\Phi$, $\lambda$ fonksiyonelleri ve $\nu(0) = 0$ olacak şekilde negatif olmayan sürekli $\nu$ fonksiyonelini alalım. $u \in \overline{P(\lambda, r)}$ için

$$\lambda(u) \leq \nu(u) \leq \Phi(u) \text{ and } \|u\| \leq M\lambda(u)$$

olacak şekilde $r$ ve $M$ pozitif sayıları var olsun. Kabul edelim ki

$$0 \leq \zeta \leq 1 \text{ ve } \forall u \in \partial P(\nu, q) \text{ için } \nu(\zeta u) \leq \zeta \nu(u)$$

olacak şekilde $p < q < r$ pozitif sayıları var olsun. Eğer $A : \overline{P(\lambda, r)} \to P$ tamamen sürekli operatörü

(i) $\forall u \in \partial P(\lambda, r)$ için $\lambda(Au) > r$,

(ii) $\forall u \in \partial P(\nu, q)$ için $\nu(Au) < q$,

(iii) $P(\Phi, p) \neq \emptyset$ ve $\forall u \in \partial P(\Phi, p)$ için $\Phi(Au) > p$,

şartlarını sağlıyorsa, $A$ operatörünün $u_1$ ve $u_2$ gibi en az iki sabit noktası vardır öyleki

$$\nu(u_1) < q \text{ ile birlikte } p < \Phi(u_1) \text{ ve } \lambda(u_2) < r \text{ ile birlikte } q < \nu(u_2)$$

eşitsizlikleri sağlanır (Avery ve Henderson 2001).

**Teorem 2.3.14.** (Leggett-Williams Sabit Nokta Teoremi) Reel $E$ Banach uzayında $P$ bir koni olsun.

$$P_r := \{x \in P : \|x\| < r\}$$

$$P(\psi, a, b) := \{x \in P : a \leq \psi(x),\ \|x\| \leq b\}$$

kümelerini tanımlayalım. Kabul edelim ki $A : \overline{P_r} \to \overline{P_r}$ tamamen sürekli operatör ve $\forall u \in \overline{P_r}$ için $\psi(u) \leq \|u\|$ olacak şekilde $P$ de bir negatif olmayan sürekli konkav $\psi$ fonksiyoneli olsun. Eğer

(i) $\{u \in P(\psi, q, l) : \psi(u) > q\} \neq \emptyset$ ve $\forall u \in P(\psi, q, l)$ için $\psi(Au) > q$;

(ii) $\|u\| \leq p$ için $\|Au\| < p$;

(iii) $u \in P(\psi, q, r)$ için $\|Au\| > l$ iken $\psi(Au) > q$,

olacak şekilde $0 < p < q < l \leq r$ sayıları varsa $A$ operatörünün $\overline{P_r}$ da

$$\|u_1\| < p,\ \psi(u_2) > q,\ \psi(u_3) < q \text{ ve } p < \|u_3\|$$

eşitsizliklerini sağlayan en az üç sabit noktası vardır (Leggett ve Williams 1979).

# 3. ZAMAN SKALASINDA YÜKSEK MERTEBE $m$-NOKTA SDP İÇİN POZİTİF ÇÖZÜMLER

$\mathbb{T}$ bir zaman skalası, $0 \le i \le n-1$, $m \ge 3$, $\alpha > 1$, $\beta$, $\gamma$, $\delta > 0$, $t_1 < \xi_1 < \ldots < \xi_{m-2} < t_2$ ve $a_p$, $b_p \ge 0$ verilen sabitler olmak üzere

$$\begin{cases} (-1)^n y^{\Delta^{2n}}(t) = f(t, y(t)), \ \ t \in [t_1, t_2] \subset \mathbb{T}, \ \ n \in \mathbb{N} \\ \quad \alpha y^{\Delta^{2i}}(t_1) - \beta y^{\Delta^{2i+1}}(t_1) = \sum\limits_{p=1}^{m-2} a_p y^{\Delta^{2i+1}}(\xi_p), \\ \quad \gamma y^{\Delta^{2i}}(t_2) + \delta y^{\Delta^{2i+1}}(t_2) = \sum\limits_{p=1}^{m-2} b_p y^{\Delta^{2i+1}}(\xi_p), \end{cases} \tag{3.1}$$

yüksek mertebeden $m$-nokta sınır değer problemini (SDP) ele alalım. Burada $f : [t_1, t_2] \times [0, \infty) \to [0, \infty)$ fonksiyonunu sürekli bir fonksiyon olarak kabul edeceğiz.

Tezimizin bu bölümünde ele alınan (3.1) SDP nin pozitif çözümlerinin varlığı için yeter koşulları ortaya koyacağız. Bunu için ilk önce (3.1) SDP den yararlanarak oluşturacağımız yardımcı sınır değer probleminin Green fonksiyonunu elde edip, bu Green fonksiyonunu kullanarak, lineer olmayan SDP lineer olmayan integral denkleme indirgeyeceğiz. Daha sonra tanımlayacağımız bir koni üzerinde pozitif çözümlerin hangi şartlar altında var olduğunu araştıracağız. Bu noktada en az bir pozitif çözümün varlığını Krasnosel'skii sabit nokta teoremi yardımıyla, en az üç pozitif çözümün varlığını ise Leggett-Williams sabit nokta teoremi yardımıyla inceleyeceğiz.

Aşağıdaki koşulların sağlandığını kabul edelim.

(H1) $\frac{\beta}{\alpha} > t_2$.

(H2) Eğer $m \ge 3$ ise, $\gamma \sum\limits_{k=1}^{m-2} a_k \ge \alpha \sum\limits_{k=1}^{m-2} b_k$ ve $2 \le j \le m-2$ için eğer $m > 3$ ise, $\alpha\delta > \gamma \sum\limits_{k=1}^{j-1} a_k \ge \alpha \sum\limits_{k=1}^{j-1} b_k > \beta\gamma$ dır.

(H3) $\alpha\delta > \alpha \sum\limits_{p=1}^{m-2} b_p + \gamma \sum\limits_{p=1}^{m-2} a_p$.

## 3.1 Green Fonksiyonu ve Özellikleri

Şimdi ele aldığımız SDP den yararlanarak oluşturacağımız yardımcı SDP nin Green fonksiyonunu oluşturup, özelliklerini inceleyelim.

**Lemma 3.1.1.** $K := \alpha\gamma(t_2 - t_1) + \alpha\delta - \alpha \sum\limits_{p=1}^{m-2} b_p + \gamma\beta + \gamma \sum\limits_{p=1}^{m-2} a_p$ ve $J_1 = [t_1, \xi_1]$, $J_2 = [\xi_1, \xi_2]$,..., $J_{m-2} = [\xi_{m-3}, \xi_{m-2}]$, $J_{m-1} = [\xi_{m-2}, t_2]$ olmak üzere

$$\begin{cases} -y^{\Delta^2}(t) = 0, \ \ t \in [t_1, t_2], \\ \alpha y(t_1) - \beta y^{\Delta}(t_1) = \sum\limits_{p=1}^{m-2} a_p y^{\Delta}(\xi_p), \\ \gamma y(t_2) + \delta y^{\Delta}(t_2) = \sum\limits_{p=1}^{m-2} b_p y^{\Delta}(\xi_p) \end{cases} \tag{3.2}$$

probleminin Green fonksiyonu

$$G(t,s) = \frac{1}{K} \begin{cases} \left(\alpha(s - t_1) + \beta + \sum\limits_{r=1}^{k-1} a_r\right)\left(\gamma(t_2 - t) + \delta - \sum\limits_{p=k}^{m-2} b_p\right) \\ + \sum\limits_{r=1}^{k-1} b_r \left(\alpha(t - s) + \sum\limits_{p=k}^{m-2} a_p\right), \ t \geq s, \ s \in J_k \\ k = 1, 2, ..., m-1; \\ \left(\gamma(t_2 - s) + \delta - \sum\limits_{p=k}^{m-2} b_p\right)\left(\alpha(t - t_1) + \beta + \sum\limits_{r=1}^{k-1} a_r\right) \\ + \sum\limits_{p=k}^{m-2} a_p \left(\gamma(t - s) + \sum\limits_{r=1}^{k-1} b_r\right), \ t \leq s, \ s \in J_k \\ k = 1, 2, ..., m-1 \end{cases} \tag{3.3}$$

şeklindedir.

**İspat.** $h \in C[t_1, t_2]$ olarak alalım ve

$$\begin{cases} -y^{\Delta^2}(t) = h(t), \ \ t \in [t_1, t_2], \\ \alpha y(t_1) - \beta y^{\Delta}(t_1) = \sum\limits_{p=1}^{m-2} a_p y^{\Delta}(\xi_p), \\ \gamma y(t_2) + \delta y^{\Delta}(t_2) = \sum\limits_{p=1}^{m-2} b_p y^{\Delta}(\xi_p) \end{cases}$$

problemini oluşturalım. Buradaki denklemin çözümünün

$$y(t) = y(t_1) + (t - t_1) y^{\Delta}(t_1) - \int\limits_{t_1}^{t} (t - s) h(s) \Delta s \tag{3.4}$$

olduğu kolayca bulunabilir. Oluşturduğumuz SDP deki sınır koşulları dikkate alınacak olursa, (3.4) çözümünü

$$
\begin{aligned}
y(t) &= -\int_{t_1}^{t}(t-s)h(s)\Delta s+\frac{t}{K}\Bigg\{\alpha\int_{t_1}^{t_2}\left(\gamma(t_2-s)+\delta\right)h(s)\Delta s\\
&+ \sum_{p=1}^{m-2}(\gamma a_p-\alpha b_p)\int_{t_1}^{\xi_p}h(s)\Delta s\Bigg\}\\
&+ \frac{1}{K}\Bigg\{\left(\beta+\sum_{p=1}^{m-2}a_p-\alpha t_1\right)\int_{t_1}^{t_2}(\gamma(t_2-s)+\delta)h(s)\Delta s\\
&+ \left(\alpha t_1-(\beta+\sum_{p=1}^{m-2}a_p)\right)\sum_{p=1}^{m-2}b_p\int_{t_1}^{\xi_p}h(s)\Delta s\\
&+ \left(\frac{\gamma(\beta+\sum_{p=1}^{m-2}a_p)}{\alpha}-\frac{K}{\alpha}-\gamma t_1\right)\sum_{p=1}^{m-2}a_p\int_{t_1}^{\xi_p}h(s)\Delta s\Bigg\}
\end{aligned}
$$

olarak elde ederiz. Şimdi bu çözümü gözönüne alarak Green fonksiyonunu oluşturalım.

İlk önce $s\in J_k$, $t\geq s$ durumuna bakalım.

(i) $s\in J_1=[t_1,\xi_1]$ ve $t\geq s$ olsun. Bu durumda

$$
\begin{aligned}
G(t,s) &= -(t-s)+\frac{t}{K}\Bigg\{\alpha(\gamma(t_2-s)+\delta)+\sum_{p=1}^{m-2}(\gamma a_p-\alpha b_p)\Bigg\}\\
&+ \frac{1}{K}\Bigg\{\left(\beta+\sum_{p=1}^{m-2}a_p-\alpha t_1\right)(\gamma(t_2-s)+\delta)\\
&+ \left(\alpha t_1-\left(\beta+\sum_{p=1}^{m-2}a_p\right)\right)\sum_{p=1}^{m-2}b_p\\
&+ \left(\frac{\gamma\left(\beta+\sum_{p=1}^{m-2}a_p\right)}{\alpha}-\frac{K}{\alpha}-\gamma t_1\right)\sum_{p=1}^{m-2}a_p\Bigg\}\\
&= \frac{1}{K}\Bigg\{\alpha\delta(s-t_1)+\alpha\gamma(t_2-t)(s-t_1)+\left(\beta+\sum_{p=1}^{m-2}a_p\right)\\
&\times \left(\delta-\sum_{p=1}^{m-2}b_p\right)+\gamma\left(\beta+\sum_{p=1}^{m-2}a_p\right)(t_2-t)+\alpha\sum_{p=1}^{m-2}b_p(t-s+t_1)\\
&+ \gamma t\sum_{p=1}^{m-2}a_p-\alpha t\sum_{p=1}^{m-2}b_p-\gamma(t_2-t_1)\sum_{p=1}^{m-2}a_p
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&- \left(\delta - \sum_{p=1}^{m-2} b_p\right) \sum_{p=1}^{m-2} a_p - t_1\gamma \sum_{p=1}^{m-2} a_p \Bigg\} \\
&= \frac{1}{K}\Bigg\{\alpha(s-t_1)\left(\delta - \sum_{p=1}^{m-2} b_p\right) + \alpha\delta(t_2-t)(s-t_1) \\
&+ \gamma\beta(t_2-t) + \beta\left(\delta - \sum_{p=1}^{m-2} b_p\right)\Bigg\} \\
&= \frac{1}{K}\Bigg\{(\alpha(s-t_1)+\beta)\left(\gamma(t_2-t) + \delta - \sum_{p=1}^{m-2} b_p\right)\Bigg\}
\end{aligned}
$$

elde edilir.

(ii) $k = 2, 3, \ldots, m-2$ olmak üzere $s \in J_k$ ve $t \geq s$ olsun. Bu takdirde

$$
\begin{aligned}
G(t,s) &= -(t-s) + \frac{t}{K}\Bigg\{\alpha(\gamma(t_2-s)+\delta) + \sum_{p=k}^{m-2}(\gamma a_p - \alpha b_p)\Bigg\} \\
&+ \frac{1}{K}\Bigg\{\left(\beta + \sum_{p=1}^{m-2} a_p - \alpha t_1\right)(\gamma(t_2-s)+\delta) \\
&+ \left(\alpha t_1 - \left(\beta + \sum_{p=1}^{m-2} a_p\right)\right)\sum_{p=k}^{m-2} b_p \\
&+ \left(\frac{\gamma\left(\beta + \sum_{p=1}^{m-2} a_p\right)}{\alpha} - \frac{K}{\alpha} - \gamma t_1\right)\sum_{p=k}^{m-2} a_p\Bigg\} \\
&= \frac{1}{K}\Bigg\{\alpha\delta(s-t_1) + \alpha\gamma(t_2-t)(s-t_1) + \left(\beta + \sum_{p=1}^{m-2} a_p\right) \\
&\times \left(\delta - \sum_{p=k}^{m-2} b_p\right) + \gamma\left(\beta + \sum_{p=1}^{m-2} a_p\right)(t_2-t) + \alpha\sum_{p=1}^{m-2} b_p(t-s) \\
&+ \alpha t_1 \sum_{p=k}^{m-2} b_p + \gamma t \sum_{p=k}^{m-2} a_p - \alpha t \sum_{p=k}^{m-2} b_p - \gamma(t_2-t_1)\sum_{p=k}^{m-2} a_p \\
&- \left(\delta - \sum_{p=1}^{m-2} b_p\right)\sum_{p=k}^{m-2} a_p - t_1\gamma\sum_{p=k}^{m-2} a_p\Bigg\} \\
&= \frac{1}{K}\Bigg\{\alpha(s-t_1)\left(\delta - \sum_{p=k}^{m-2} b_p\right) + \alpha\gamma(t_2-t)(s-t_1) \\
&+ \gamma\beta(t_2-t) + \beta\left(\delta - \sum_{p=k}^{m-2} b_p\right) + \alpha\sum_{r=1}^{k-1} b_r(t-s)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&+ \quad \gamma\sum_{p=1}^{k-1} a_p(t_2-t) + \sum_{r=1}^{k-1} a_r\biggl(\delta - \sum_{p=k}^{m-2} b_p\biggr) + \sum_{r=1}^{k-1} b_r \sum_{p=k}^{m-2} a_p\biggr\} \\
&= \quad \frac{1}{K}\biggl\{\biggl(\alpha(s-t_1)+\beta+\sum_{r=1}^{k-1} a_r\biggr)\biggl(\gamma(t_2-t)+\delta-\sum_{p=k}^{m-2} b_p\biggr) \\
&+ \quad \sum_{r=1}^{k-1} b_r\biggl(\alpha(t-s)+\sum_{p=k}^{m-2} a_p\biggr)\biggr\}
\end{aligned}
$$

olduğu görülür.

(iii) $s \in J_{m-1} = [\xi_{m-2}, t_2]$ ve $t \geq s$ olsun. O halde

$$
\begin{aligned}
G(t,s) \quad &= \quad -(t-s) + \frac{t}{K}\biggl\{\alpha(\gamma(t_2-s)+\delta)\biggr\} \\
&+ \quad \frac{1}{K}\biggl\{\biggl(\beta+\sum_{p=1}^{m-2} a_p - \alpha t_1\biggr)(\gamma(t_2-s)+\delta) \\
&= \quad \frac{1}{K}\biggl\{\alpha\delta(s-t_1) + \alpha\gamma(t_2-t)(s-t_1) \\
&+ \quad \gamma\biggl(\beta+\sum_{p=1}^{m-2} a_p\biggr)(t_2-t) + \alpha\sum_{p=1}^{m-2} b_p(t-s) \\
&+ \quad \delta\biggl(\beta+\sum_{p=1}^{m-2} a_p\biggr) \\
&= \quad \frac{1}{K}\biggl\{\biggl(\alpha(s-t_1)+\beta+\sum_{p=1}^{k-1} a_p\biggr)(\gamma(t_2-t)+\delta) \\
&+ \quad \alpha\sum_{p=1}^{k-1} b_p(t-s)\biggr\}
\end{aligned}
$$

olur.

Bulunan bu sonuçlar gözönüne alınırsa $k = 1, 2, \ldots, m-1$ olduğunda $s \in J_k$ ve $t \geq s$ için

$$
\begin{aligned}
G(t,s) \quad &= \quad \frac{1}{K}\biggl\{\biggl(\alpha(s-t_1)+\beta+\sum_{r=1}^{k-1} a_r\biggr)\biggl(\gamma(t_2-t)+\delta-\sum_{p=k}^{m-2} b_p\biggr) \\
&+ \quad \sum_{r=1}^{k-1} b_r\biggl(\alpha(t-s)+\sum_{p=k}^{m-2} a_p\biggr)\biggr\}
\end{aligned}
$$

olduğunu söyleyebiliriz. Diğer taraftan $s \in J_k$, $t \leq s$ durumuna bakalım.

(i) $s \in J_1 = [t_1, \xi_1]$ ve $t \leq s$ olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned}
G(t,s) &= \frac{1}{K}\Bigg\{t\alpha\gamma(t_2-s)+t\alpha\delta+t\sum_{p=1}^{m-2}(\gamma a_p-\alpha b_p)\\
&+ \left(\beta+\sum_{p=1}^{m-2}a_p-\alpha t_1\right)(\gamma(t_2-s)+\delta)\\
&+ \left(\alpha t_1-\left(\beta+\sum_{p=1}^{m-2}a_p\right)\right)\sum_{p=1}^{m-2}b_p\\
&+ \left(\frac{\gamma\left(\beta+\sum\limits_{p=1}^{m-2}a_p\right)}{\alpha}-\frac{K}{\alpha}-\gamma t_1\right)\sum_{p=1}^{m-2}a_p\Bigg\}\\
&= \frac{1}{K}\Bigg\{\alpha\gamma(t_2-s)(t-t_1)+\alpha(t-t_1)\left(\delta-\sum_{p=1}^{m-2}b_p\right)\\
&+ \gamma\sum_{p=1}^{m-2}a_p\left(\frac{\beta}{\alpha}-t_2+t\right)+\gamma\left(\beta+\sum_{p=1}^{m-2}a_p\right)(t_2-s)\\
&+ \beta\left(\delta-\sum_{p=1}^{m-2}b_p-\frac{\gamma\sum\limits_{p=1}^{m-2}a_p}{\alpha}\right)\Bigg\}\\
&= \frac{1}{K}\Bigg\{\left(\gamma(t_2-s)+\delta-\sum_{p=1}^{m-2}b_p\right)\left(\alpha(t-t_1)+\beta\right)\\
&+ \gamma\sum_{p=1}^{m-2}a_p(t-s)\Bigg\}
\end{aligned}$$

elde edilir.

(ii) $k = 2, 3, \ldots, m-2$ olmak üzere $s \in J_k$ ve $t \leq s$ olsun. Bu takdirde

$$\begin{aligned}
G(t,s) &= \frac{1}{K}\Bigg\{t\alpha\gamma(t_2-s)+t\alpha\delta+t\sum_{p=k}^{m-2}(\gamma a_p-\alpha b_p)\\
&+ \left(\beta+\sum_{p=1}^{m-2}a_p-\alpha t_1\right)(\gamma(t_2-s)+\delta)\\
&+ \left(\alpha t_1-\left(\beta+\sum_{p=1}^{m-2}a_p\right)\right)\sum_{p=k}^{m-2}b_p\\
&+ \left(\frac{\gamma\left(\beta+\sum\limits_{p=1}^{m-2}a_p\right)}{\alpha}-\frac{K}{\alpha}-\gamma t_1\right)\sum_{p=k}^{m-2}a_p\Bigg\}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{K}\Bigg\{\alpha\gamma(t_2-s)(t-t_1)+\alpha(t-t_1)\Bigg(\delta-\sum_{p=k}^{m-2}b_p\Bigg) \\
&+ \gamma\sum_{p=k}^{m-2}a_p\Bigg(\frac{\beta}{\alpha}-t_2+t\Bigg)+\gamma\Bigg(\beta+\sum_{p=1}^{m-2}a_p\Bigg)(t_2-s) \\
&+ \beta\Bigg(\delta-\sum_{p=k}^{m-2}b_p-\frac{\gamma\sum\limits_{p=k}^{m-2}a_p}{\alpha}\Bigg)+\sum_{r=1}^{k-1}a_r\Bigg(\delta-\sum_{p=k}^{m-2}b_p\Bigg) \\
&+ \sum_{r=1}^{k-1}b_r\sum_{p=k}^{m-2}a_p\Bigg\} \\
&= \frac{1}{K}\Bigg\{\Bigg(\gamma(t_2-s)+\delta-\sum_{p=k}^{m-2}b_p\Bigg)\Bigg(\alpha(t-t_1)+\beta+\sum_{r=1}^{k-1}a_r\Bigg) \\
&+ \sum_{p=k}^{m-2}a_p\Bigg(\gamma(t-s)+\sum_{r=1}^{k-1}b_r\Bigg)\Bigg\}
\end{aligned}
$$

bulunur.

(iii) $s \in J_{m-1} = [\xi_{m-2}, t_2]$ ve $t \leq s$ olsun. O halde

$$
\begin{aligned}
G(t,s) &= \frac{1}{K}\Bigg\{\alpha t(\gamma(t_2-s)+\delta)+\Bigg(\beta+\sum_{p=1}^{m-2}a_p-\alpha t_1\Bigg)(\gamma(t_2-s)+\delta)\Bigg\} \\
&= \frac{1}{K}\Bigg\{(\gamma(t_2-s)+\delta)\Bigg(\alpha(t-t_1)+\beta+\sum_{p=1}^{m-2}a_p\Bigg)\Bigg\}
\end{aligned}
$$

olur.

Elde edilen sonuçlar birleştirilecek olursa $k = 1, 2, \ldots, m-1$ olduğunda $s \in J_k$ ve $t \leq s$ için

$$
\begin{aligned}
G(t,s) &= \frac{1}{K}\Bigg\{\Bigg(\gamma(t_2-s)+\delta-\sum_{p=k}^{m-2}b_p\Bigg)\Bigg(\alpha(t-t_1)+\beta+\sum_{r=1}^{k-1}a_r\Bigg) \\
&+ \sum_{p=k}^{m-2}a_p\Bigg(\gamma(t-s)+\sum_{r=1}^{k-1}b_r\Bigg)\Bigg\}
\end{aligned}
$$

yazabiliriz.

Sonuç olarak (3.2) denkleminin Green fonksiyonunun (3.3) de verildiği gibi olduğunu söyleyebiliriz. □

Şimdi (3.3) ile verilen $G(t,s)$ Green fonksiyonunun bazı özelliklerini inceleyelim.

**Lemma 3.1.2.** $(t,s) \in [t_1,t_2] \times [t_1,t_2]$ için (3.3) ile tanımlı $G(t,s)$ Green fonksiyonu

$$0 < G(t,s) \leq G(s,s)$$

eşitsizliğini sağlar.

**İspat.** (H1), (H2), (H3) kabulleri gözönüne alınacak olursa, $G(t,s) > 0$ olduğu kolayca görülebilir. $G(t,s) \leq G(s,s)$ olduğunu gösterelim.

(i) $s \in J_1$ ve $t \geq s$ olsun. $G(t,s)$, $t$ ye göre azalan olduğundan $G(t,s) \leq G(s,s)$ olacaktır.

(ii) $s \in J_1$ ve $t \leq s$ olsun. $G(t,s)$ fonksiyonu $t$ ye göre artan olduğundan $G(t,s) \leq G(s,s)$ eşitsizliği sağlanır.

(iii) $k = 1,2,\ldots,m-2$ olduğunda $s \in J_k$ ve $t \geq s$ olsun. (H2) kabulü gözönüne alınırsa $G(t,s)$ fonksiyonu $t$ ye göre azalan olacaktır. Bu nedenle $G(t,s) \leq G(s,s)$ eşitsizliğinin sağlandığını söyleyebiliriz.

(iv) $k = 1,2,\ldots,m-2$ olduğunda $s \in J_k$ ve $t \leq s$ olsun. $G(t,s)$, $t$ ye göre artan olacağından $G(t,s) \leq G(s,s)$ elde edilir.

(v) $s \in J_{m-1}$ ve $t \geq s$ olsun. (H2) kabulü ile birlikte $G(t,s)$ fonksiyonu $t$ ye göre azalan olacaktır. Bu nedenle $G(t,s) \leq G(s,s)$ eşitsizliğinin sağlandığını söyleyebiliriz.

(vi) $s \in J_{m-1}$ ve $t \leq s$ olsun. $G(t,s)$ fonksiyonu $t$ ye göre artan olduğundan $G(t,s) \leq G(s,s)$ eşitsizliği sağlanır.

Tüm bu sonuçlar bize $(t,s) \in [t_1,t_2] \times [t_1,t_2]$ için $G(t,s)$ Green fonksiyonunun

$$0 < G(t,s) \leq G(s,s)$$

eşitsizliğini sağladığını verir. $\square$

Sıradaki lemmaya geçmeden önce kolaylık olması için aşağıdaki tanımlamaları yapalım.

$$z_1 = \frac{\delta - \sum\limits_{p=1}^{m-2} b_p}{\gamma(t_2-t_1)+\delta-\sum\limits_{p=1}^{m-2} b_p},\ z_2 = \frac{(\alpha\delta - \alpha\sum\limits_{p=1}^{m-2} b_p - \gamma\sum\limits_{p=1}^{m-2} a_p)(t_2-t_1)}{\gamma(t_2-t_1)+\delta-\sum\limits_{p=1}^{m-2} b_p)(\alpha(t_2-t_1)+\beta}$$

$$z_3 = \frac{\delta - \sum\limits_{p=2}^{m-2} b_p}{\gamma(t_2-t_1)+\delta-\sum\limits_{p=2}^{m-2} b_p},\ z_4 = \frac{\frac{\beta}{\alpha}-t_2}{\alpha(t_2-t_1)+\beta+\sum\limits_{k=1}^{m-3} a_k},\ z_5 = \frac{\delta}{\gamma(t_2-t_1)+\delta}$$

$$z_6 = \frac{\frac{\beta}{\alpha}-t_2}{\alpha(t_2-t_1)+\beta+\sum\limits_{r=1}^{m-2} a_r}$$

ve

$$z = \min\{z_1,\ z_2,\ z_3,\ z_4,\ z_5,\ z_6\} \tag{3.5}$$

olarak alalım. $\|x\| = \max\limits_{t\in[t_1,t_2]} |x(t)|$ normunu tanımlayalım.

**Lemma 3.1.3.** (3.3) ile tanımlı $G(t,s)$ Green fonksiyonu

$$\min_{t\in[t_1,t_2]} G(t,s) \geq zG(s,s) = z\|G(\cdot,s)\| \tag{3.6}$$

eşitsizliğini sağlar.

**İspat.** Eğer incelenecek olursa $i = 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6$ olmak üzere $0 < z_i < 1$ olduğu kolayca görülebilir. Şimdi lemmanın ispatına bakalım.

$(i)$ $s \in J_1$ ve $t \geq s$ olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned}
\min_{t\in[t_1,t_2]} G(t,s) &= \frac{1}{K}(\alpha(s-t_1)+\beta)\left(\delta - \sum_{p=1}^{m-2} a_p\right) \\
&\geq \frac{1}{K}(\alpha(s-t_1)+\beta)\left(\delta - \sum_{p=1}^{m-2} b_p\right)\frac{\left(\gamma(t_2-s)+\delta-\sum\limits_{p=1}^{m-2} b_p\right)}{\left(\gamma(t_2-t_1)+\delta-\sum\limits_{p=1}^{m-2} b_p\right)} \\
&= \frac{\delta - \sum\limits_{p=1}^{m-2} b_p}{\gamma(t_2-t_1)+\delta-\sum\limits_{p=1}^{m-2} b_p}\frac{1}{K}(\alpha(s-t_1)+\beta) \\
&\times \left(\gamma(t_2-s)+\delta-\sum_{p=1}^{m-2} b_p\right) \\
&= z_1 G(s,s) \\
&= z_1\|G(\cdot,s)\|
\end{aligned}$$

olduğu görülür.

$(ii)$ $s \in J_1$ ve $t \leq s$ olsun. Bu takdirde

$$\begin{aligned}
\min_{t\in[t_1,t_2]} G(t,s) &= \frac{1}{K}\left\{\beta\left(\gamma(t_2-s)+\delta-\sum_{p=1}^{m-2} b_p\right)+\gamma\sum_{p=1}^{m-2} a_p(t_1-s)\right\} \\
&\geq \frac{1}{K}\left\{\beta\left(\delta-\sum_{p=1}^{m-2} b_p\right)-\gamma\sum_{p=1}^{m-2} a_p(s-t_1)\right\} \\
&= \frac{1}{K}\left\{\alpha\left(\delta-\sum_{p=1}^{m-2} b_p\right)\frac{\beta}{\alpha}-\gamma\sum_{p=1}^{m-2} a_p(s-t_1)\right\} \\
&\geq \frac{1}{K}\left\{\alpha\left(\delta-\sum_{p=1}^{m-2} b_p\right)(t_2-t_1)-\gamma\sum_{p=1}^{m-2} a_p(t_2-t_1)\right\} \\
&\geq \frac{1}{K}\left\{\frac{\alpha\left(\delta-\sum\limits_{p=1}^{m-2} b_p\right)(t_2-t_1)-\gamma\sum\limits_{p=1}^{m-2} a_p(t_2-t_1)}{\left(\gamma(t_2-t_1)+\delta-\sum\limits_{p=1}^{m-2} b_p\right)(\alpha(t_2-t_1)+\beta)}\right. \\
&\times \left.\left(\gamma(t_2-s)+\delta-\sum_{p=1}^{m-2} b_p\right)(\alpha(s-t_1)+\beta)\right\} \\
&= z_2 G(s,s) \\
&= z_2\|G(\cdot,s)\|
\end{aligned}$$

olarak elde edilir.

$(iii)$ $k=1,2,\ldots,m-2$ olduğunda $s \in J_k$ ve $t \geq s$ olsun. Buradan

$$\begin{aligned}
\min_{t\in[t_1,t_2]} G(t,s) &= \frac{1}{K}\left\{\left(\alpha(s-t_1)+\beta+\sum_{r=1}^{k-1} a_r\right)\left(\delta-\sum_{p=k}^{m-2} b_p\right)\right. \\
&+ \left.\sum_{r=1}^{k-1} b_r\left(\alpha(t-s)+\sum_{p=k}^{m-2} a_p\right)\right\} \\
&\geq \frac{1}{K}\left\{\frac{\left(\gamma(t_2-s)+\delta-\sum\limits_{p=2}^{m-2} b_p\right)}{\left(\gamma(t_2-s)+\delta-\sum\limits_{p=2}^{m-2} b_p\right)}\left(\alpha(s-t_1)+\beta+\sum_{r=1}^{k-1} a_r\right)\right. \\
&\times \left.\left(\delta-\sum_{p=k}^{m-2} b_p\right)+\frac{\delta-\sum\limits_{p=2}^{m-2} b_p}{\gamma(t_2-t_1)+\delta-\sum\limits_{p=2}^{m-2} b_p}\left(\sum_{r=1}^{k-1} b_r\sum_{p=k}^{m-2} a_p\right)\right\}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{\delta - \sum\limits_{p=2}^{m-2} b_p}{\gamma(t_2-t_1)+\delta - \sum\limits_{p=2}^{m-2} b_p} \frac{1}{K}\Bigg\{\Bigg(\alpha(s-t_1)+\beta+\sum_{r=1}^{k-1} a_r\Bigg) \\
&\times \Bigg(\gamma(t_2-s)+\delta-\sum_{p=2}^{m-2} b_p\Bigg)+\sum_{r=1}^{k-1} b_r \sum_{p=k}^{m-2} a_p\Bigg\} \\
&= z_3 G(s,s) \\
&= z_3 \|G(\cdot,s)\|
\end{aligned}
$$

elde edilir.

$(iv)$ $k = 1, 2, \ldots, m-2$ olduğunda $s \in J_k$ ve $t \leq s$ olsun. O halde

$$
\begin{aligned}
\min_{t\in[t_1,t_2]} G(t,s) &= \frac{1}{K}\Bigg\{\gamma \sum_{p=k}^{m-2} a_p \Bigg(\frac{\beta}{\alpha} - t_2 + t_1\Bigg) + \gamma\Bigg(\beta + \sum_{p=1}^{m-2} a_p\Bigg)(t_2 - s) \\
&+ \beta\Bigg(\delta - \sum_{p=k}^{m-2} b_p - \frac{\gamma \sum\limits_{p=k}^{m-2} a_p}{\alpha}\Bigg) + \sum_{r=1}^{k-1} a_r \Bigg(\delta - \sum_{p=k}^{m-2} b_p\Bigg) \\
&+ \sum_{r=1}^{k-1} b_r \sum_{p=k}^{m-2} a_p\Bigg\} \\
&= \frac{1}{K}\Bigg\{\Bigg(\beta + \sum_{k=1}^{m-2} a_p\Bigg)\Bigg(\gamma(t_2-s)+\delta-\sum_{p=k}^{m-2} b_p\Bigg) \\
&+ \gamma \sum_{p=k}^{m-2} a_p \Bigg(\frac{\beta}{\alpha} - t_2 + t_1\Bigg) + \gamma \sum_{p=k}^{m-2} a_p (t_2 - s) \\
&+ \sum_{p=k}^{m-2} a_p \Bigg(\sum_{r=1}^{k-1} b_r - \frac{\beta\gamma}{\alpha}\Bigg)\Bigg\} \\
&\geq \frac{1}{K}\Bigg\{\frac{\alpha(s-t_1)+\beta+\sum\limits_{r=1}^{k-1} a_r}{\alpha(t_2-t_1)+\beta+\sum\limits_{r=1}^{m-3} a_r}\Bigg(\frac{\beta}{\alpha} - t_2\Bigg)\Bigg(\gamma(t_2-s)+\delta-\sum_{p=k}^{m-2} b_p\Bigg) \\
&+ \frac{\frac{\beta}{\alpha} - t_2}{\alpha(t_2-t_1)+\beta+\sum\limits_{r=1}^{m-3} a_r} \gamma \sum_{p=k}^{m-2} a_p \Bigg(\frac{\beta}{\alpha} - t_2 + s\Bigg) \\
&+ \frac{\frac{\beta}{\alpha} - t_2}{\alpha(t_2-t_1)+\beta+\sum\limits_{r=1}^{m-3} a_r} \gamma \sum_{p=k}^{m-2} a_p (t_2 - s) \\
&+ \sum_{p=k}^{m-2} a_p \Bigg(\sum_{r=1}^{k-1} b_r - \frac{\beta\gamma}{\alpha}\Bigg)\Bigg\}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{\frac{\beta}{\alpha}-t_2}{\alpha(t_2-t_1)+\beta+\sum\limits_{r=1}^{m-3}a_r}\frac{1}{K}\Bigg\{\Bigg(\gamma(t_2-s)+\delta-\sum_{p=k}^{m-2}b_p\Bigg)\\
&\times \Bigg(\alpha(s-t_1)+\beta+\sum_{r=1}^{k-1}a_r\Bigg)+\sum_{p=k}^{m-2}a_p\sum_{r=1}^{k-1}b_r\Bigg\}\\
&= z_4G(s,s)\\
&= z_4\|G(\cdot,s)\|
\end{aligned}
$$

olduğu görülebilir.

$(v)$ $s\in J_{m-1}$ ve $t\geq s$ olsun. Bu durumda

$$
\begin{aligned}
\min_{t\in[t_1,t_2]}G(t,s) &= \frac{1}{K}\Bigg\{\Bigg(\alpha(s-t_1)+\beta+\sum_{r=1}^{m-2}a_r\Bigg)\delta+\alpha\sum_{r=1}^{m-2}b_r(t_2-s)\Bigg\}\\
&\geq \frac{\gamma(t_2-s)+\delta}{\gamma(t_2-t_1)+\delta}\frac{1}{K}\Bigg\{\Bigg(\alpha(s-t_1)+\beta+\sum_{r=1}^{m-2}a_r\Bigg)\delta\Bigg\}\\
&= \frac{\delta}{\gamma(t_2-t_1)+\delta}\frac{1}{K}\Bigg\{\Bigg(\alpha(s-t_1)+\beta+\sum_{r=1}^{m-2}a_r\Bigg)(\gamma(t_2-s)+\delta)\Bigg\}\\
&= z_5G(s,s)\\
&= z_5\|G(\cdot,s)\|
\end{aligned}
$$

elde edilir.

$(vi)$ $s\in J_{m-1}$ ve $t\leq s$ olsun. Bu takdirde

$$
\begin{aligned}
\min_{t\in[t_1,t_2]}G(t,s) &= \frac{1}{K}\Bigg\{(\gamma(t_2-s)+\delta)\Bigg(\beta+\sum_{r=1}^{m-2}a_r\Bigg)\Bigg\}\\
&\geq \frac{\alpha(s-t_1)+\beta+\sum\limits_{r=1}^{m-2}a_r}{\alpha(t_2-t_1)+\beta+\sum\limits_{r=1}^{m-2}a_r}\frac{1}{K}\Bigg\{(\gamma(t_2-s)+\delta)\Bigg(\frac{\beta}{\alpha}-t_2\Bigg)\Bigg\}\\
&= \frac{\frac{\beta}{\alpha}-t_2}{\alpha(t_2-t_1)+\beta+\sum\limits_{r=1}^{m-2}a_r}\frac{1}{K}\Bigg\{(\gamma(t_2-s)+\delta)\\
&\times \Bigg(\alpha(s-t_1)+\beta+\sum_{r=1}^{m-2}a_r\Bigg)\Bigg\}\\
&= z_6G(s,s)\\
&= z_6\|G(\cdot,s)\|
\end{aligned}
$$

olduğu görülür.

Bulunan tüm bu sonuçlar ve (3.5) gözönüne alınırsa (3.6) eşitsizliğinin sağlandığını söyleyebiliriz. □

$2 \leq j \leq n$ için $G_1(t,s) := G(t,s)$ olmak üzere

$$G_j(t,s) = \int_{t_1}^{t_2} G_{j-1}(t,r)G(r,s)\Delta r$$

fonksiyonunu tanımlayalım. Bu takdirde $m \geq 3$ ve $0 \leq i \leq n-1$ olmak üzere

$$\begin{cases} (-1)^n y^{\Delta^{2n}}(t) = 0, \quad t \in [t_1, t_2], \\ \alpha y^{\Delta^{2i}}(t_1) - \beta y^{\Delta^{2i+1}}(t_1) = \sum\limits_{p=1}^{m-2} a_p y^{\Delta^{2i+1}}(\xi_p), \\ \gamma y^{\Delta^{2i}}(t_2) + \delta y^{\Delta^{2i+1}}(t_2) = \sum\limits_{p=1}^{m-2} b_p y^{\Delta^{2i+1}}(\xi_p), \end{cases}$$

homojen SDP nin Green fonksiyonu $G_n(t,s)$ dir. Şimdi $G_n(t,s)$ Green fonksiyonunun bazı özelliklerini verelim.

**Lemma 3.1.4.**

$$L = \int_{t_1}^{t_2} \|G(\cdot,s)\|\Delta s > 1 \tag{3.7}$$

sayısını tanımlayalım. $z$ sayısı (3.5) ile tanımlı olmak üzere, $G_n(t,s)$ Green fonksiyonu

$$0 \leq G_n(t,s) \leq L^{n-1}\|G(\cdot,s)\|, \quad (t,s) \in [t_1,t_2] \times [t_1,t_2]$$

ve

$$G_n(t,s) \geq z^n L^{n-1}\|G(\cdot,s)\|, \quad (t,s) \in [t_1,t_2] \times [t_1,t_2]$$

eşitsizliklerini sağlar.

**İspat.** Lemma 3.1.2 ve lemma 3.1.3 gözönüne alınarak $n$ üzerinden tümevarımla ispat kolayca yapılabilir. □

## 3.2 A Operatörü ve Koni

(3.1) SDP nin $y(t)$ çözümünün bulunması

$$y(t) = \int_{t_1}^{t_2} G_n(t,s) f(s, y(s))\Delta s \tag{3.8}$$

integral denkleminin $y(t)$ çözümünün bulunmasına denktir.

$\|y\| = \max\limits_{t\in[t_1,t_2]} |y(t)|$ normu ile tanımlı $E = C[t_1, t_2]$ Banach uzayını ele alalım. $z$ ve $L$ sırasıyla (3.5) ve (3.7) ile tanımlı olmak üzere

$$P = \{y \in E : \min_{t\in[t_1,t_2]} y(t) \geq z^n \|y\|\} \tag{3.9}$$

olacak şekilde $P \subset E$ konisini tanımlayalım.

Bu durumda (3.8) integral denkleminin $P$ üzerinde çözümlerinin bulunması

$$Ay(t) = \int_{t_1}^{t_2} G_n(t,s) f(s, y(s))\Delta s, \tag{3.10}$$

ile tanımlı $A : P \to E$ operatörünün sabit noktalarının bulunmasına, yani

$$y = Ay$$

olacak şekilde $y \in P$ elemanlarının bulunmasına denktir.

**Lemma 3.2.1.** (H1), (H2) ve (H3) sağlansın. Bu takdirde $A : P \to P$ operatörü tamamen süreklidir.

**İspat.** Kabul edelimki $y \in P$ olsun. Bu durumda Lemma 3.1.4 gereği, $[t_1, t_2]$ üzerinde $Ay(t) \geq 0$ olduğu söylenebilir. Diğer taraftan, yine Lemma 3.1.4 den

$$\begin{aligned}
\min_{t\in[t_1,t_2]} Ay(t) &= \min_{t\in[t_1,t_2]} \int_{t_1}^{t_2} G_n(t,s) f(s, y(s))\Delta s \\
&\geq z^n \int_{t_1}^{t_2} \max_{t\in[t_1,t_2]} G_n(t,s) f(s, y(s))\Delta s \\
&\geq z^n \|Ay\|
\end{aligned}$$

olduğu söylenebilir. Bu da bize $Ay \in P$ olduğunu ve dolayısıyla $A : P \to P$ olduğunu verir.

Şimdi $A : P \to P$ operatörünün tamamen sürekli bir operatör olduğunu gösterelim. Bunun için $A$ operatörünün sürekli ve kompakt olduğunu göstermeliyiz.

İlk olarak $A$ operatörünün sürekliliğini inceleyelim. $f$ fonksiyonu sürekli olduğundan $t \in [t_1, t_2]$ için $y_1(t),\ y_2(t) \in P$ olduğunda $\|y_1(t) - y_2(t)\| < \delta^*$ iken

$$|f(t, y_1(t)) - f(t, y_2(t))| < \varepsilon' = \frac{\varepsilon}{L^n}$$

kalır. O halde Lemma 3.1.4 düşünülerek, $\|y_1(t) - y_2(t)\| < \delta^*$ iken

$$\begin{aligned}
\|Ay_1(t) - Ay_2(t)\| &= \max_{t\in[t_1,t_2]} |\int_{t_1}^{t_2} G_n(t,s)[f(s,y_1(s)) - f(s,y_2(s))]\Delta s| \\
&\leq \max_{t\in[t_1,t_2]} \int_{t_1}^{t_2} G_n(t,s)|f(t,y_1(s)) - f(t,y_2(s))|\Delta s \\
&< \varepsilon' L^{n-1} \int_{t_1}^{t_2} \|G(\cdot,s)\|\Delta s \\
&= \varepsilon
\end{aligned}$$

elde edilir. Yani $A : P \to P$ operatörü süreklidir.

Şimdi $A$ operatörünün kompakt yani her sınırlı kümeyi pre kompakt kümeye dönüştürdüğünü görelim. Keyfi sınırlı $Y \subset P$ kümesini ele alalım ve $A(Y)$ nin $P$ de pre kompakt olduğunu gösterelim. $f$ fonksiyonu sürekli olduğundan $s \in [t_1, t_2]$ ve $y \in Y$ için

$$f(s, y(s)) < c \tag{3.11}$$

olacak şekilde $c > 0$ sayısı vardır. Bu durumda (3.11) ve Lemma 3.1.4 gözönüne alınarak

$$\begin{aligned}
\|Ay\| &= \max_{t\in[t_1,t_2]} |Ay(t)| \\
&= \max_{t\in[t_1,t_2]} |\int_{t_1}^{t_2} G_n(t,s)f(s,y(s))\Delta s| \\
&\leq L^{n-1} \int_{t_1}^{t_2} \|G(\cdot,s)\| f(s,y(s))\Delta s \\
&< cL^n
\end{aligned}$$

bulunur. Bu takdirde $A(Y)$ aynı dereceden sınırlıdır.

Diğer taraftan $G_n(t,s)$ sürekli olduğundan $|t_1^* - t_2^*| < \delta^{**}$ iken

$$|G_n(t_1^*, s) - G_n(t_2^*, s)| < \varepsilon'' = \frac{\varepsilon}{c(t_2 - t_1)}$$

yazılabilir. O halde $|t_1^* - t_2^*| < \delta^{**}$ iken

$$\begin{aligned}
\|Ay(t_1^*) - Ay(t_2^*)\| &= \max_{t\in[t_1,t_2]} \left| \int_{t_1}^{t_2} [G_n(t_1^*, s) - G_n(t_2^*, s)] f(s, y(s))\Delta s \right| \\
&\leq \max_{t\in[t_1,t_2]} \int_{t_1}^{t_2} |G_n(t_1^*, s) - G_n(t_2^*, s)| f(s, y(s))\Delta s \\
&< \varepsilon'' c(t_2 - t_1) \\
&= \varepsilon
\end{aligned}$$

kalır. Buda bize $A(Y)$ nin aynı dereceden sürekli olduğunu verir. O halde Arzelà-Ascoli teoreminden $A(Y)$ nin pre kompakt olduğunu ve dolayısıyla $A$ operatörünün kompakt bir operatör olduğunu söyleyebiliriz.

Sonuç olarak $A$ operatörü sürekli ve kompakt olduğundan tamamen sürekli bir operatördür. □

### 3.3 Bir Pozitif Çözümün Varlığı

Bu bölümde, (3.1) SDP nin en az bir pozitif çözümünün varlığı Krasnosel'skii sabit nokta teoremi yardımıyla gösterilecektir.

**Teorem 3.3.1.** (H1), (H2) ve (H3) sağlansın. Bu takdirde $f$ fonksiyonu için,

(i) $(t, y) \in [t_1, t_2] \times [0, r]$ için $f(t, y) \leq \frac{1}{L^n} y(t)$,

(ii) $(t, y) \in [t_1, t_2] \times [R, \infty)$ için $f(t, y) \geq \frac{1}{z^{2n} L^n} y(t)$

eşitsizliklerini sağlayacak şekilde $0 < r < R < \infty$ sayıları varsa (3.1) SDP nin en az bir pozitif çözümü mevcuttur.

**İspat.** $\Omega_1 = \{y \in P : \|y\| < r\}$ ve $\Omega_2 = \left\{ y \in P : \|y\| < \frac{R}{z^n} \right\}$ olacak şekilde $E$ nin açık ve sınırlı altkümelerini tanımlayalım. Lemma 3.2.1 den $A : P \cap (\overline{\Omega_2} \setminus \Omega_1) \to P$ operatörünün tamamen sürekli olduğunu söyleyebiliriz. Şimdi Krasnosel'skii sabit nokta teoreminin şartlarını sağlatalım.

$y \in P \cap \partial\Omega_1$ olarak alınırsa $\|y\| = r$ olur. O halde $(i)$ kabulü ve Lemma 3.1.4 kullanılarak

$$
\begin{aligned}
Ay(t) &= \int_{t_1}^{t_2} G_n(t,s) f(s,y(s))\Delta s \\
&\leq \frac{1}{L^n}\int_{t_1}^{t_2} G_n(t,s) y(s)\Delta s \\
&\leq \frac{1}{L^n}\|y\| L^{n-1}\int_{t_1}^{t_2} \|G(\cdot,s)\|\Delta s \\
&= \|y\|
\end{aligned}
$$

elde edilir. Bu nedenle $y \in P \cap \partial\Omega_1$ için $\|Ay\| \leq \|y\|$ olduğunu söyleyebiliriz.

Diğer taraftan $y \in P \cap \partial\Omega_2$ alalım. Bu durumda $t \in [t_1, t_2]$ için

$$
y(t) \geq z^n \|y\| = R
$$

olacaktır. Artık burada $(ii)$ kabulü ve Lemma 3.1.4 gözönüne alınırsa,

$$
\begin{aligned}
Ay(t) &= \int_{t_1}^{t_2} G_n(t,s) f(s,y(s))\Delta s \\
&\geq \frac{1}{z^{2n}L^n}\int_{t_1}^{t_2} G_n(t,s) y(s)\Delta s \\
&\geq \frac{1}{z^n L^n}\|y\|\int_{t_1}^{t_2} G_n(t,s)\Delta s \\
&\geq \|y\|
\end{aligned}
$$

bulunur. Bu da bize, $y \in P \cap \partial\Omega_2$ için $\|Ay\| \geq \|y\|$ olduğunu verir.

Krasnosel'skii sabit nokta teoreminin birinci kısmı gereği $A$ operatörünün $P \cap (\overline{\Omega_2} \setminus \Omega_1)$ de $r \leq \|y\| \leq \frac{R}{z^n}$ olacak şekilde bir sabit noktası vardır. Dolayısıyla ele aldığımız (3.1) SDP nin en az bir pozitif çözümü mevcuttur. $\square$

### 3.4 Üç Pozitif Çözümün Varlığı

Tezin bu bölümünde, (3.1) SDP nin en az üç pozitif çözümünün varlığı için yeter koşulları Leggett-Williams sabit nokta teoremini kullanarak elde edeceğiz.

**Teorem 3.4.1.** Kabul edelimki (H1), (H2) ve (H3) sağlansın. Bu durumda $f$ fonksiyonu için,

(i) $(t,y) \in [t_1,t_2] \times [0,r]$ için $f(t,y) \leq \frac{r}{L^n}$,

(ii) $(t,y) \in [t_1,t_2] \times [0,p]$ için $f(t,y) < \frac{p}{L^n}$,

(iii) $(t,y) \in [t_1,t_2] \times [q, \frac{q}{z^n}]$ için $f(t,y) > \frac{q}{z^n L^n}$,

olacak şekilde $0 < p < q < \frac{q}{z^n} \leq r$ sayıları varsa, (3.1) SDP nin $y_1$, $y_2$ ve $y_3$ olacak şekilde en az üç pozitif çözümü mevcuttur ve bu çözümler

$$\max_{t\in[t_1,t_2]} y_1(t) < p, \ \min_{t\in[t_1,t_2]} y_2(t) > q,$$
$$\min_{t\in[t_1,t_2]} y_3(t) < q \text{ ve } \max_{t\in[t_1,t_2]} y_3(t) > p$$

eşitsizliklerini sağlarlar.

**İspat.** Teoremin ispatını Leggett-Williams sabit nokta teoreminden yararlanarak yapacağız. Bu yüzden negatif olmayan, sürekli, konkav $\psi : P \to [0,\infty)$ fonksiyonelini $\psi(y) = \min_{t\in[t_1,t_2]} y(t)$ olarak tanımlayalım ve $P$ konisini (3.9) da tanımlanmış haliyle alalım. Bu durumda her $y \in P$ için $\psi(y) \leq \|y\|$ eşitsizliği sağlanır.

Şimdi $A : \overline{P_r} \to \overline{P_r}$ operatörünün tamamen sürekli operatör olduğunu gösterelim. $y \in \overline{P_r}$ olsun. Bu durumda, $t \in [t_1,t_2]$ için $0 \leq y(t) \leq r$ olur. O halde, $(i)$ kabulü ve Lemma 3.1.4 düşünülerek

$$\begin{aligned} \|Ay\| &= \max_{t\in[t_1,t_2]} \int_{t_1}^{t_2} G_n(t,s) f(s,y(s)) \Delta s \\ &\leq L^{n-1} \int_{t_1}^{t_2} \|G(\cdot,s)\| f(s,y(s)) \Delta s \\ &\leq r \end{aligned}$$

elde edilir. Buradan $A : \overline{P_r} \to \overline{P_r}$ olduğu görülür. Lemma 3.2.1 gözönüne alınacak olursa da $A : \overline{P_r} \to \overline{P_r}$ operatörünün tamamen sürekli bir operatör olduğunu söyleyebiliriz.

$y(t) = \frac{q}{z^n}$ olarak alınırsa, $z < 1$ olduğundan $y(t) = \frac{q}{z^n} \in P(\psi, q, \frac{q}{z^n})$ ve $\psi(\frac{q}{z^n}) > q$ özellikleri sağlanır. Bu da

$$\{y \in P(\psi, q, \frac{q}{z^n}) : \psi(y) > q\} \neq \emptyset$$

olduğunu verir. Diğer taraftan her $y \in P(\psi, q, \frac{q}{z^n})$ ve $t \in [t_1,t_2]$ için $q \leq y(t) \leq \frac{q}{z^n}$

eşitsizliği sağlanır. Bu takdirde $(iii)$ kabulü ve Lemma 3.1.4 kullanılırsa

$$\begin{aligned} \psi(Ay) &= \min_{t\in[t_1,t_2]} \int_{t_1}^{t_2} G_n(t,s) f(s,y(s))\Delta s \\ &\geq z^n L^{n-1} \int_{t_1}^{t_2} \|G(\cdot,s)\| f(s,y(s))\Delta s \\ &> q \end{aligned}$$

bulunur. O halde Leggett-Williams sabit nokta teoreminin $(i)$ koşulu sağlanmış olur.

$\|y\| \leq p$ alındığında, $t \in [t_1, t_2]$ için $0 \leq y(t) \leq p$ eşitsizliği sağlanır. Bu durumda $(ii)$ kabulü ve Lemma 3.1.4 gözönüne alınırsa

$$\begin{aligned} \|Ay\| &= \max_{t\in[t_1,t_2]} \int_{t_1}^{t_2} G_n(t,s) f(s,y(s))\Delta s \\ &\leq L^{n-1} \int_{t_1}^{t_2} \|G(\cdot,s)\| f(s,y(s))\Delta s \\ &< p \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece, Leggett-Williams sabit nokta teoreminin $(ii)$ koşulu sağlanır.

Son olarak, Leggett-Williams sabit nokta teoreminin $(iii)$ koşulunu inceleyelim. $y \in P(\psi, q, r)$ ve $\|Ay\| > \frac{q}{z^n}$ olarak alalım. Bu durumda

$$\psi(Ay) = \min_{t\in[t_1,t_2]} Ay(t) \geq z^n \|Ay\| > q$$

olduğu görülür.

Leggett-Williams sabit nokta teoreminin bütün şartları sağlandığından (3.1) SDP nin $y_1$, $y_2$ ve $y_3$ olacak şekilde en az üç pozitif çözümü mevcuttur ve bu çözümler

$$\max_{t\in[t_1,t_2]} y_1(t) < p, \ \min_{t\in[t_1,t_2]} y_2(t) > q,$$
$$\min_{t\in[t_1,t_2]} y_3(t) < q \text{ ve } \max_{t\in[t_1,t_2]} y_3(t) > p$$

eşitsizliklerini sağlarlar. □

## 3.5 Örnekler

Bu kısımda ortaya koyduğumuz teoremler için birer örnek vereceğiz.

**Örnek 3.5.1.** $\mathbb{T} = \{(\frac{2}{3})^n : n \in \mathbb{N}_0\} \cup \{0\} \cup [2,3]$ olsun. (3.1) SDP de $n = 1$, $m = 3$, $t_1 = \frac{2}{3}$, $\xi_1 = 1$, $t_2 = 3$, $\alpha = \gamma = \delta = 3$, $\beta = 12$, $a_1 = b_1 = 1$ seçimlerini yaparsak,

$$\begin{cases} -y^{\Delta^2}(t) = f(t,y), \;\; t \in [\frac{2}{3}, 3] \subset \mathbb{T}, \\ \quad 3y(\frac{2}{3}) - 12y^{\Delta}(\frac{2}{3}) = y^{\Delta}(1), \\ \quad 3y(3) + 3y^{\Delta}(3) = 3y^{\Delta}(1) \end{cases} \tag{3.12}$$

problemini elde ederiz. Burada gerekli hesaplamalar yapılarak, $L = \frac{291}{2} = 145.5$ ve $z = 0.041$ olduğu görülebilir.

İlk olarak bu problem için Teorem 3.3.1 yı gözönüne alalım. Eğer $f(t,y) = \frac{1000y^3}{y^2+1}$, $r = 10^{-6}$ ve $R = 1$ seçimlerini yaparsak, $0 < r < R < \infty$ olur ve Teorem 3.3.1 nın tüm şartlarının sağlandığı kolayca görülebilir. Bu durumda (3.12) SDP nin en az bir $y$ çözümü vardır ve bu çözüm $10^{-6} \le \max\limits_{t \in [2/3,3]} y(t) \le 1/(0.041)$ eşitsizliğini sağlar.

Son olarak, yine bu problem için Teorem 3.4.1 yi gözönüne alalım. Eğer $f(t,y) = \frac{1000y^2}{y^2+1}$, $p = 7.10^{-7}, q = 3.10^{-4}$ ve $r = 146000$ olarak alırsak, $0 < p < q < \frac{q}{z} < r$ eşitsizliği sağlanır ve Teorem 3.4.1 nin bütün şartları gerçeklenir. Bu takdirde (3.12) SDP nin $y_1$, $y_2$ ve $y_3$ olacak şekilde en az üç pozitif çözümü mevcuttur ve bu çözümler

$$\max_{t \in [\frac{2}{3},3]} y_1(t) < p, \;\; \min_{t \in [\frac{2}{3},3]} y_2(t) > q$$
$$\max_{t \in [\frac{2}{3},3]} y_3(t) > p \text{ ve } \min_{t \in [\frac{2}{3},3]} y_3(t) < q$$

eşisizliklerini sağlarlar.

# 4. YÜKSEK MERTEBE $m$-NOKTA KESİRLİ SDP İÇİN POZİTİF ÇÖZÜMLERİN VARLIĞI

Tezimizin bu bölümünde, $D^{\eta}_{0^+}$, $\eta$. mertebeden Riemann-Liouville kesirli türev ve $n, m \in \mathbb{N}$ sayıları $m \geq 3, n > 3, n-1 < \eta \leq n$ şeklinde olmak üzere,

$$\begin{cases} -D^{\eta}_{0^+}u(t) + f(t,u(t)) = 0, \;\; t \in [0,1], \\ u''(0) = u'''(0) = ... = u^{(n-2)}(0) = 0, \;\; u'''(1) = 0, \\ \alpha u(0) - \beta u'(0) = \sum\limits_{p=1}^{m-2} a_p u'(\xi_p), \\ \gamma u(1) + \delta u'(1) = \sum\limits_{p=1}^{m-2} b_p u'(\xi_p), \end{cases} \tag{4.1}$$

yüksek mertebe çoklu nokta kesirli SDP ni inceleyeceğiz. Burada $\beta > \alpha > 1$, $\gamma$, $\delta > 0$, $a_p$, $b_p \geq 0$ verilen sayılar ve $0 < \xi_1 < \ldots < \xi_{m-2} < 1$ şeklinde olacaktır. Ayrıca $f : [0,1] \times [0,\infty) \to [0,\infty)$ fonksiyonu sürekli bir fonksiyon olacaktır.

Bu problemin incelemesini yaparken, ilk önce Green fonksiyonlarından yararlanarak problemimizi bir integral denklem haline getirecek, sonra bu integral denklemi bir operatör olarak düşünerek bu operatörün sabit noktalarını araştıracağız. Bunu yaparken en az bir pozitif çözüm için Krasnosel'skii sabit nokta teoremini, en az üç pozitif çözüm için Legget-Williams sabit nokta teoremini kullanacağız.

Bu problem incelenirken aşağıdaki koşulların sağlandığını kabul edelim.

(H1) Eğer $m \geq 3$ ise, $\gamma \sum\limits_{k=1}^{m-2} a_k \geq \alpha \sum\limits_{k=1}^{m-2} b_k$ dır. Eğer $2 \leq j \leq m-2$ iken $m > 3$ ise, $\alpha\delta > \gamma \sum\limits_{k=1}^{j-1} a_k \geq \alpha \sum\limits_{k=1}^{j-1} b_k > \beta\gamma$ dır.

(H2) $\alpha\delta > \alpha \sum\limits_{p=1}^{m-2} b_p + \gamma \sum\limits_{p=1}^{m-2} a_p$.

## 4.1 Green Fonksiyonları ve Özellikleri

Tanım 2.2.3 den $D^{(2)}_{0^+}u(t) = u''(t)$ olduğunu söyleyebiliriz. O halde $D^{\eta}_{0^+}u(t) = D^{\eta-2}_{0^+}(D^{(2)}_{0^+}u(t)) = D^{\eta-2}_{0^+}(u''(t))$ olduğundan (4.1) SDP,

$$\begin{cases} -D^{\eta-2}_{0^+}(u''(t)) + f(t,u(t)) = 0, \;\; t \in [0,1], \\ u''(0) = u'''(0) = ... = u^{(n-2)}(0) = 0, \;\; u'''(1) = 0, \\ \alpha u(0) - \beta u'(0) = \sum\limits_{p=1}^{m-2} a_p u'(\xi_p), \\ \gamma u(1) + \delta u'(1) = \sum\limits_{p=1}^{m-2} b_p u'(\xi_p) \end{cases} \tag{4.2}$$

şeklinde yazılabilir. Burada $-u''(t) = y(t)$ ve $\eta - 2 = \sigma$ tanımlamalarını yapalım. Bu takdirde (4.2) SDP içerisinden seçerek oluşturduğumuz

$$\begin{cases} -D_{0^+}^{\eta-2}(u''(t)) + f(t,u(t)) = 0, \;\; t \in [0,1] \\ u''(0) = u'''(0) = ... = u^{(n-2)}(0) = 0, \;\; u'''(1) = 0 \end{cases} \tag{4.3}$$

problemi

$$\begin{cases} D_{0+}^{\sigma} y(t) + f(t,u(t)) = 0, \;\; t \in [0,1] \\ y(0) = y'(0) = ... = y^{(n-4)}(0) = 0, \;\; y'(1) = 0 \end{cases} \tag{4.4}$$

halini alır.

İlk olarak (4.4) SDP nin çözümünü araştıralım.

**Lemma 4.1.1.** (4.4) SDP nin tek çözümü

$$H(t,s) = \begin{cases} \frac{(1-s)^{\sigma-2}t^{\sigma-1}}{\Gamma(\sigma)}, & t \le s, \\ \frac{(1-s)^{\sigma-2}t^{\sigma-1} - (t-s)^{\sigma-1}}{\Gamma(\sigma)}, & t \ge s \end{cases} \tag{4.5}$$

olmak üzere

$$y(t) = \int_0^1 H(t,s) f(s,u(s)) ds \tag{4.6}$$

şeklindedir.

**İspat.** Lemma 2.2.8 gözönüne alınarak,

$$y(t) = -\frac{1}{\Gamma(\sigma)} \int_0^t (t-s)^{\sigma-1} f(s,u(s)) ds + c_1 t^{\sigma-1} + c_2 t^{\sigma-2} + ... + c_{n-2} t^{\sigma-n+2} \tag{4.7}$$

olduğu söylenebilir.

(4.4) probleminin sınır koşulları dikkate alınırsa gerekli hesaplamalar sonucu, $c_2 = c_3 = ... = c_{n-2} = 0$ ve $c_1 = \frac{1}{\Gamma(\sigma)} \int_0^1 (1-s)^{\sigma-2} f(s,u(s)) ds$ olduğu kolayca görülebilir.

Bu takdirde (4.4) probleminin tek çözümünün

$$y(t) = \int_0^t \frac{(1-s)^{\sigma-2}t^{\sigma-1} - (t-s)^{\sigma-1}}{\Gamma(\sigma)} f(s,u(s)) ds + \int_t^1 \frac{(1-s)^{\sigma-2}t^{\sigma-1}}{\Gamma(\sigma)} f(s,u(s)) ds$$

olduğu söylenebilir. Buradan (4.5) ile tanımlı $H(t,s)$ Green fonksiyonu ile birlikte bu çözüm

$$y(t) = \int_0^1 H(t,s) f(s,u(s)) ds$$

şeklinde yazılabilir. $\square$

**Lemma 4.1.2.** (H1) ve (H2) sağlansın. $K := \alpha\gamma + \alpha\delta - \alpha \sum_{p=1}^{m-2} b_p + \gamma\beta + \gamma \sum_{p=1}^{m-2} a_p$ ve $J_1 = [0, \xi_1]$, $J_2 = [\xi_1, \xi_2]$,..., $J_{m-2} = [\xi_{m-3}, \xi_{m-2}]$, $J_{m-1} = [\xi_{m-2}, 1]$ olarak tanımlayalım. Bu durumda $y \in C[0,1]$ için

$$\begin{cases} -u''(t) = y(t), \quad t \in [0,1], \\ \alpha u(0) - \beta u'(0) = \sum_{p=1}^{m-2} a_p u'(\xi_p) \\ \gamma u(1) + \delta u'(1) = \sum_{p=1}^{m-2} b_p u'(\xi_p) \end{cases} \tag{4.8}$$

probleminin tek çözümü

$$G(t,s) = \frac{1}{K} \begin{cases} \left(\alpha s + \beta + \sum_{r=1}^{k-1} a_r\right)\left(\gamma(1-t) + \delta - \sum_{p=k}^{m-2} b_p\right) \\ + \sum_{r=1}^{k-1} b_r \left(\alpha(t-s) + \sum_{p=k}^{m-2} a_p\right), \ t \geq s, \ s \in J_k \\ k = 1, 2, ..., m-1; \\ \left(\gamma(1-s) + \delta - \sum_{p=k}^{m-2} b_p\right)\left(\alpha t + \beta + \sum_{r=1}^{k-1} a_r\right) \\ + \sum_{p=k}^{m-2} a_p \left(\gamma(t-s) + \sum_{r=1}^{k-1} b_r\right), \ t \leq s, \ s \in J_k \\ k = 1, 2, ..., m-1, \end{cases} \tag{4.9}$$

olmak üzere

$$u(t) = \int_0^1 G(t,s) y(s) ds \tag{4.10}$$

şeklindedir.

**İspat.** İspatımızı bir önceki bölümde incelediğimiz problemden yararlanarak yapacağız. Eğer (3.1) SDP de zaman skalası $\mathbb{T} = \mathbb{R}$, $n = 1$, $t_1 = 0$, $t_2 = 1$ ve $f(t, y(t)) = y(t)$ olarak seçilirse bu problem (4.8) SDP ne dönüşür. O halde bir önceki bölümün sonuçlarından yararlanabiliriz. Bu takdirde (4.8) SDP nin tek çözümünün $G(t,s)$ Green fonksiyonu (4.9) ile tanımlı olmak üzere

$$u(t) = \int_0^1 G(t,s) y(s) ds$$

şeklinde olduğu söylenebilir. □

**Lemma 4.1.3.** (4.9) ile tanımlı $G(t,s)$ Green fonksiyonu $(t,s) \in [0,1] \times [0,1]$ için

$$0 < G(t,s) \leq G(s,s)$$

eşitsizliğini sağlar.

**İspat.** $\mathbb{T}=\mathbb{R}$, $t_1=0$ ve $t_2=1$ seçilerek Lemma 3.1.2 gözönüne alınırsa eşitsizliğin sağlandığı söylenebilir. $\square$

Sıradaki lemma için aşağıdaki tanımlamaları yapalım.

$$\begin{aligned}
z_1 &= \frac{\delta-\sum\limits_{p=1}^{m-2} b_p}{\gamma+\delta-\sum\limits_{p=1}^{m-2} b_p},\ z_2=\frac{(\alpha\delta-\alpha\sum\limits_{p=1}^{m-2} b_p-(\gamma\sum\limits_{p=1}^{m-2} a_p)}{\gamma+\delta-\sum\limits_{p=1}^{m-2} b_p)(\alpha+\beta)}\\
z_3 &= \frac{\delta-\sum\limits_{p=2}^{m-2} b_p}{\gamma+\delta-\sum\limits_{p=2}^{m-2} b_p},\ z_4=\frac{\frac{\beta}{\alpha}-1}{\alpha+\beta+\sum\limits_{k=1}^{m-3} a_k},\ z_5=\frac{\delta}{\gamma+\delta}\\
z_6 &= \frac{\frac{\beta}{\alpha}-1}{\alpha+\beta+\sum\limits_{r=1}^{m-2} a_r}
\end{aligned}$$

ve

$$z=\min\{z_1,\ z_2,\ z_3,\ z_4,\ z_5,\ z_6\} \tag{4.11}$$

olarak alalım. $\|x\|=\max\limits_{t\in[t_1,t_2]}|x(t)|$ normunu tanımlayalım.

**Lemma 4.1.4.** (4.9) ile tanımlı $G(t,s)$ Green fonksiyonu

$$\min_{t\in[t_1,t_2]} G(t,s)\geq zG(s,s)=z\|G(\cdot,s)\| \tag{4.12}$$

eşitsizliğini sağlar.

**İspat.** $\mathbb{T}=\mathbb{R}$, $t_1=0$ ve $t_2=1$ seçilerek Lemma 3.1.3 düşünülürse eşitsizliğin sağlandığı görülebilir. $\square$

**Lemma 4.1.5.** $t,s\in[0,1]$ için $0\leq H(t,s)\leq H(1,s)$ dir.

**İspat.** $H(t,s)$ Green fonksiyonunun ifadesi incelenecek olursa, $H(t,s)\geq 0$ olduğu görülebilir. Şimdi $H(t,s)\leq H(1,s)$ olduğunu görelim.

(i) Eğer $t\leq s$ ise, $H(t,s)=\frac{(1-s)^{\sigma-2}t^{\sigma-1}}{\Gamma(\sigma)}\leq\frac{(1-s)^{\sigma-2}}{\Gamma(\sigma)}=H(1,s)$ olur.

(ii) $s\leq t$ için $H(t,s)$, $t$ ye göre artan olduğundan $H(t,s)\leq H(1,s)$ olacağı söylenebilir.

Bu takdirde, $t,s\in[0,1]$ için $0\leq H(t,s)\leq H(1,s)$ eşitsizliğinin sağlandığını görmüş oluruz. $\square$

**Lemma 4.1.6.** $k \in (0, \xi_{m-2})$ bir sabit olmak üzere $0 \leq t, s \leq 1$ için $\min\limits_{t\in[\xi_{m-2},1]} H(t,s) \geq k^{\sigma-1}H(1,s)$ eşitsizliği sağlanır.

**İspat.** (i) $t \leq s$ olsun. O halde

$$\min_{t\in[\xi_{m-2},1]} H(t,s) = \frac{(1-s)^{\sigma-2}\xi_{m-2}^{\sigma-1}}{\Gamma(\sigma)} \geq \frac{(1-s)^{\sigma-2}(k)^{\sigma-1}}{\Gamma(\sigma)} = k^{\sigma-1}H(1,s)$$

olduğu görülür.

(ii) $s \leq t$ için,

$$\begin{aligned}
\min_{t\in[\xi_{m-2},1]} H(t,s) &= \frac{(1-s)^{\sigma-2}\xi_{m-2}^{\sigma-1} - (\xi_{m-2}-s)^{\sigma-1}}{\Gamma(\sigma)} \\
&> \frac{(1-s)^{\sigma-2}\xi_{m-2}^{\sigma-1} - (\xi_{m-2}-\xi_{m-2}s)^{\sigma-1}}{\Gamma(\sigma)} \\
&= \frac{\xi_{m-2}^{\sigma-1}((1-s)^{\sigma-2} - (1-s)^{\sigma-1})}{\Gamma(\sigma)} \\
&= \xi_{m-2}^{\sigma-1}H(1,s) \\
&> k^{\sigma-1}H(1,s)
\end{aligned}$$

olduğunu söyleyebiliriz.

Böylece, $\min\limits_{t\in[\xi_{m-2},1]} H(t,s) \geq k^{\sigma-1}H(1,s)$ eşitsizliğinin sağlandığı bulunmuş olur. □

## 4.2 İntegral Denklem ve Operatör

Lemma 4.1.1 ve Lemma 4.1.2 gözönüne alınırsa (4.1) SDP nin $u(t)$ çözümünün

$$u(t) = \int_0^1 G(t,s) \int_0^1 H(s,\tau) f(\tau, u(\tau)) d\tau ds \tag{4.13}$$

şeklinde olduğu söylenebilir. Böylelikle (4.1) SDP ni, (4.13) te olduğu haliyle bir integral denkleme indirgemiş oluruz. Artık bu integral denklemin çözümleri (4.1) SDP nin çözümlerine karşılık gelecektir.

Bu kısımda $\|u\| = \max\limits_{t\in[0,1]} |u(t)|$ normu ile tanımlı $E = C[0,1]$ Banach uzayını ele alacağız. Buradan $z$ sayısı (4.11) ile tanımlı olmak üzere

$$P = \{u \in E : \min_{t\in[0,1]} u(t) \geq z\|u\|\} \tag{4.14}$$

olacak şekilde $P \subset E$ konisini tanımlayalım.

Bu takdirde (4.13) integral denkleminin $P$ üzerinde çözümlerinin bulunması

$$Au(t) = \int_0^1 G(t,s) \int_0^1 H(s,\tau) f(\tau, u(\tau)) d\tau ds, \tag{4.15}$$

ile tanımlı $A : P \to E$ operatörünün sabit noktalarının bulunmasına denktir.

**Lemma 4.2.1.** (H1) ve (H2) sağlansın. Bu durumda $A : P \to P$ operatörü tamamen süreklidir.

**İspat.** Lemma 4.1.3 ve Lemma 4.1.5 gözönüne alınacak olursa, $[0,1]$ de $u \in P$ için $Au(t) \geq 0$ olduğu açıktır. Diğer taraftan Lemma 4.1.4 kullanılarak,

$$\begin{aligned}
\min_{t\in[0,1]} Au(t) &= \min_{t\in[0,1]} \int_0^1 G(t,s) \int_0^1 H(s,\tau) f(\tau,u(\tau)) d\tau ds \\
&\geq z \int_0^1 \max_{t\in[0,1]} G(t,s) \int_0^1 H(s,\tau) f(\tau,u(\tau)) d\tau ds \\
&\geq z\|Au\|
\end{aligned}$$

olduğu elde edilir. Böylece, $Au \in P$, yani $AP \subset P$ olur.

Bunun yanında $A : P \to P$ operatörünün tamamen sürekli olduğu Lemma 3.2.1 deki ispata benzer şekilde kolayca gösterilebilir. O halde $A : P \to P$ operatörü tamamen süreklidir. □

Bu bölümün devamında kolaylık olması için

$$M = \int_0^1 H(1,\tau) d\tau \tag{4.16}$$

$$L = \int_0^1 G(s,s) ds \tag{4.17}$$

$$I = \int_{\xi_{m-2}}^1 G(s,s) ds \tag{4.18}$$

tanımlamalarını yapalım.

## 4.3 En Az Bir Pozitif Çözümün Varlığı

Bu kısımda, (4.1) SDP nin en az bir pozitif çözümünün varlık sonucu Krasnosel'skii sabit nokta teoremi yardımıyla incelenecektir.

**Teorem 4.3.1.** Kabul edelim ki (H1) ve (H2) sağlansın. $f$ fonksiyonu için eğer,

(i) $(t,u) \in [0,1] \times [0,r]$ için $f(t,u) < \frac{1}{LM}u(t)$;

(ii) $(t,u) \in [0,1] \times [R,\infty)$ için $f(t,u) > \frac{1}{k^{\sigma-1}z^2 IM}u(t)$,

şartlarını sağlayan $0 < r < R < \infty$ olacak şekilde $r$ ve $R$ sayıları mevcutsa, ele alınan (4.1) SDP nin en az bir pozitif çözümü mevcuttur.

**İspat.** $E$ Banach uzayının açık ve sınırlı $\Omega_1 = \{u \in P : \|u\| < r\}$ ve $\Omega_2 = \left\{u \in P : \|u\| < \frac{R}{z}\right\}$ alt kümelerini tanımlayalım. Lemma 4.2.1 den $A : P \cap (\overline{\Omega_2} \setminus \Omega_1) \to P$ operatörünün tamamen sürekli olduğu söylenebilir. Şimdi Krasnosel'skii sabit nokta teoreminin koşullarının sağlandığını görelim.

$u \in P \cap \partial\Omega_1$ seçilirse, $\|u\| = r$ olur. O halde $(i)$ kabulü, Lemma 4.1.3 ve Lemma 4.1.5 kullanılarak, $t \in [0,1]$ için

$$\begin{aligned} Au(t) &= \int_0^1 G(t,s)\int_0^1 H(s,\tau)f(\tau,u(\tau))d\tau ds \\ &< \frac{1}{LM}\int_0^1 G(t,s)\int_0^1 H(s,\tau)u(\tau)d\tau ds \\ &\le \frac{1}{LM}\|u\|\int_0^1 G(t,s)\int_0^1 H(s,\tau)d\tau ds \\ &\le \frac{1}{LM}\|u\|\int_0^1 G(s,s)\int_0^1 H(1,\tau)d\tau ds \\ &= \|u\| \end{aligned}$$

olduğu görülür. Yani, $u \in P \cap \partial\Omega_1$ için $\|Au\| \le \|u\|$ olduğu elde edilir.

Diğer taraftan $u \in P \cap \partial\Omega_2$ alınırsa, $t \in [0,1]$ için

$$u(t) \ge z\|u\| = R$$

olur. O halde $(ii)$ kabulü, Lemma 4.1.4 ve Lemma 4.1.6 gözönüne alınarak,

$$\begin{aligned}
Au(t) &= \int_0^1 G(t,s) \int_0^1 H(s,\tau) f(\tau, u(\tau)) d\tau ds \\
&> \frac{1}{k^{\sigma-1} z^2 IM} \int_0^1 G(t,s) \int_0^1 H(s,\tau) u(\tau) d\tau ds \\
&\geq \frac{1}{k^{\sigma-1} z^2 IM} z\|u\| \int_0^1 G(t,s) \int_0^1 H(s,\tau) d\tau ds \\
&\geq \frac{1}{k^{\sigma-1} z^2 IM} z\|u\| z k^{\sigma-1} \int_{\xi_{m-2}}^1 G(s,s) \int_0^1 H(1,\tau) d\tau ds \\
&= \|u\|
\end{aligned}$$

olur. Dolayısıyla $u \in P \cap \partial\Omega_2$ için $\|Au\| \geq \|u\|$ olduğu bulunur.

Sonuç olarak Krasnosel'skii sabit nokta teoreminin birinci kısmı gereği (4.1) SDP nin $P \cap (\overline{\Omega_2} \setminus \Omega_1)$ de $r \leq \|u\| \leq \frac{R}{z}$ olacak şekilde en az bir $u$ çözümü mevcuttur. $\square$

## 4.4 En Az Üç Pozitif Çözümün Varlığı

Bu kısımda, (4.1) SDP nin en az üç pozitif çözümünün varlığı, Leggett-Williams sabit nokta teoremi yardımıyla araştırılacaktır.

**Teorem 4.4.1.** (H1) ve (H2) sağlansın. $z$, $M$, $L$ ve $I$ sayıları sırasıyla (4.11), (4.16), (4.17) ve (4.18) ile verilsin. $k$ sayısı Lemma 4.1.6 daki şekliyle alınsın. Bu takdirde, $f$ fonksiyonu için,

(i) $(t,u) \in [0,1] \times [0,r]$ için $f(t,u) \leq \frac{r}{ML}$;

(ii) $(t,u) \in [0,1] \times [0,p]$ için $f(t,u) < \frac{p}{ML}$;

(iii) $(t,u) \in [0,1] \times [q, \frac{q}{z}]$ için $f(t,u) > \frac{q}{k^{\sigma-1} zIM}$,

şartlarını sağlayan $0 < p < q < \frac{q}{z} \leq r$ olacak şekilde $p$, $q$ ve $r$ sayıları varsa, (4.1) SDP $u_1$, $u_2$ ve $u_3$ şeklinde en az üç pozitif çözüme sahiptir ve bu çözümler,

$$\max_{t\in[0,1]} u_1(t) < p, \ \min_{t\in[0,1]} u_2(t) > q$$
$$\max_{t\in[0,1]} u_3(t) > p \text{ ve } \min_{t\in[0,1]} u_3(t) < q$$

eşitsizliklerini sağlarlar.

**İspat.** Teoremin ispatını yaparken Leggett-Williams sabit nokta teoreminden yararlanacağız. Bunu için $P$ konisini (4.14) deki şekliyle alalım. Bunun yanında negatif olmayan, sürekli ve konkav $\psi : P \to [0,\infty)$ fonksiyonelini $\psi(u) = \min\limits_{t\in[0,1]} u(t)$ şeklinde tanımlayalım. Bu takdirde, her $u \in P$ için $\psi(u) \leq \|u\|$ olduğu açıktır.

İlk olarak $A : \overline{P_r} \to \overline{P_r}$ operatörünün tamamen sürekli oladuğunu gösterelim. Eğer $u \in \overline{P_r}$ alınırsa, her $t \in [0,1]$ için $0 \leq u(t) \leq r$ olur. Bu takdirde $(i)$ kabulü, Lemma 4.1.3 ve Lemma 4.1.5 kullanılacak olursa,

$$\begin{aligned}
\|Au\| &= \max_{t\in[0,1]} |Au(t)| \\
&= \max_{t\in[0,1]} \int_0^1 G(t,s) \int_0^1 H(s,\tau) f(\tau, u(\tau)) d\tau ds \\
&\leq \int_0^1 G(s,s) \int_0^1 H(1,\tau) f(\tau, u(\tau)) d\tau ds \\
&\leq \frac{r}{ML} \int_0^1 G(s,s) \int_0^1 H(1,\tau) d\tau ds \\
&\leq r
\end{aligned}$$

elde edilir. O halde $A : \overline{P_r} \to \overline{P_r}$ şeklindedir. Bununla birlikte, Lemma 4.2.1 den $A : \overline{P_r} \to \overline{P_r}$ operatörünün tamamen sürekli olduğu aşikardır.

$z < 1$, $u(t) = \frac{q}{z} \in P(\psi, q, \frac{q}{z})$ ve $\psi(\frac{q}{z}) > q$ olduğundan

$$\{u \in P(\psi, q, \frac{q}{z}) : \psi(u) > q\} \neq \emptyset.$$

olur. Diğer taraftan $\forall u \in P(\psi, q, \frac{q}{z})$ alındığında, $t \in [0,1]$ için $q \leq u(t) \leq \frac{q}{z}$ olacaktır. O halde $(iii)$ kabulü, Lemma 4.1.4 ve Lemma 4.1.6 kullanılarak,

$$\begin{aligned}
\psi(Au) &= \min_{t\in[0,1]} \int_0^1 G(t,s) \int_0^1 H(s,\tau) f(\tau, u(\tau)) d\tau ds \\
&\geq z \int_0^1 G(s,s) \int_0^1 H(s,\tau) f(\tau, u(\tau)) d\tau ds \\
&\geq z \int_{\xi_{m-2}}^1 G(s,s) \int_0^1 H(s,\tau) f(\tau, u(\tau)) d\tau ds \\
&\geq k^{\sigma-1} z \int_{\xi_{m-2}}^1 G(s,s) \int_0^1 H(1,\tau) f(\tau, u(\tau)) d\tau ds
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\geq k^{\sigma-1}z\frac{q}{k^{\sigma-1}zIM}\int\limits_{\xi_{m-2}}^{1}G(s,s)\int\limits_{0}^{1}H(1,\tau)d\tau ds \\
&= q
\end{aligned}
$$

olarak buluruz. Böylece, Leggett-Williams sabit nokta teoreminin $(i)$ şartı sağlanır.

$\|u\| < p$ seçilirse $t \in [0,1]$ için $0 \leq u(t) \leq p$ olur. Bu durumda $(ii)$ kabulü, Lemma 4.1.3 ve Lemma 4.1.5 gözönüne alınarak,

$$
\begin{aligned}
\|Au\| &= \max_{t\in[0,1]}\int\limits_{0}^{1}G(t,s)\int\limits_{0}^{1}H(s,\tau)f(\tau,u(\tau))d\tau ds \\
&\leq \int\limits_{0}^{1}G(s,s)\int\limits_{0}^{1}H(1,\tau)f(\tau,u(\tau))d\tau ds \\
&< \frac{p}{ML}\int\limits_{0}^{1}G(s,s)\int\limits_{0}^{1}H(1,\tau)d\tau ds \\
&= p
\end{aligned}
$$

elde edilir. Böylece, Leggett-Williams sabit nokta teoreminin $(ii)$ şartı sağlanmış olur.

Son olarak, Leggett-Williams sabit nokta teoreminin $(iii)$ şartını kontrol edelim. $\|Au\| > \frac{q}{z}$ olacak şekilde $u \in P(\psi, q, r)$ elemanını seçelim. O halde alınan koninin özelliği gereği,

$$
\psi(Au) = \min_{t\in[0,1]} Au(t) \geq z\|Au\| > q \qquad (4.19)
$$

olacaktır.

Böylelikle, Leggett-Williams sabit nokta teoreminin bütün şartları sağlanmış olur. O halde (4.1) SDP $u_1$, $u_2$ ve $u_3$ şeklinde en az üç pozitif çözüme sahiptir ve bu çözümler,

$$
\begin{gathered}
\max_{t\in[0,1]} u_1(t) < p, \ \min_{t\in[0,1]} u_2(t) > q \\
\max_{t\in[0,1]} u_3(t) > p \text{ ve } \min_{t\in[0,1]} u_3(t) < q
\end{gathered}
$$

eşitsizliklerini sağlarlar. □

**Örnek 4.4.2.** (4.1) SDP de, $n = 5$, $m = 3$, $\xi_1 = \frac{1}{2}$, $\alpha = \gamma = \delta = 3$, $\beta = 4$, $a_1 = b_1 = 1$, $k = \frac{1}{4}$, $\sigma = \frac{5}{2}$ ve $f(t, u(t)) = \frac{100000u^2}{u^2+1}$ seçimleri yapılırsa,

$$\begin{cases} -D_{0+}^{\frac{5}{2}}(u''(t)) = \frac{100000u^2}{u^2+1}, \;\; t \in [0,1] \\ u''(0) = u'''(0) = 0, \; u'''(1) = 0 \\ 3u(0) - 4u'(0) = u'(\frac{1}{2}) \\ 3u(1) + 3y'(1) = u'(\frac{1}{2}) \end{cases} \tag{4.20}$$

SDP elde edilir. Buradan basit hesaplamalarla $K = 30$, $M = \frac{16}{45\sqrt{\pi}}$, $L = \frac{47}{60}$, $I = 0,45$, $z = \frac{3}{35}$ ve $k^{\sigma-1} = k^{\frac{3}{2}} = 0.125$ değerleri elde edilir. Eğer $p = 7.10^{-7}, q = 10$ ve $r = 130000$ sayıları seçilirse, $0 < p < q < \frac{q}{z} < r$ olur ve Teorem 4.4.1 un tüm koşullarının sağlandığı görülebilir. O halde, Teorem 4.4.1 gereği, (4.20) SDP nin $u_1$, $u_2$ ve $u_3$ olacak şekilde en az üç pozitif çözümü mevcuttur ve bu çözümler,

$$\max_{t\in[0,1]} u_1(t) < p, \; \min_{t\in[0,1]} u_2(t) > q$$
$$\max_{t\in[0,1]} u_3(t) > p \text{ ve } \min_{t\in[0,1]} u_3(t) < q$$

eşitsizliklerini sağlarlar.

# 5. YÜKSEK MERTEBE $m$-NOKTA KESİRLİ İNTEGRAL SINIR KOŞULLU SDP İÇİN POZİTİF ÇÖZÜMLERİN VARLIĞI

Tezimizin bu bölümünde $D^{\alpha}_{0+}$ ile $\alpha$. mertebeden Riemann-Liouville kesirli türev gösterilmek üzere

$$\begin{cases} D^{\alpha}_{0+}u(t) + f(t,u(t)) = 0, \ \ t \in [0,1], \\ u(0) = u'(0) = \ldots = u^{(n-2)}(0) = 0, \\ \qquad u(1) = \sum\limits_{p=1}^{m-2} a_p \int\limits_0^{\xi_p} u(s)ds, \end{cases} \tag{5.1}$$

SDP ni ele alacağız. Bu problemde $n \in \mathbb{N}$ için $n \geq 3$, $n-1 < \alpha \leq n$, $a_p \geq 0$ ve $0 < \xi_1 < \ldots < \xi_{m-2} < 1$ olacaktır. Ayrıca, $f : [0,1] \times [0,\infty) \to [0,\infty)$ fonksiyonunun sürekli olduğunu kabul edeceğiz.

(5.1) SDP incelenirken ilk olarak problemimimizi Green fonksiyonu yardımıyla integral denklem haline indirgeyip, bu integral denkleme bir operatör gözüyle bakacağız. Daha sonra, tanımlayacak olduğumuz koni üzerinde pozitif çözümlerin varlığı incelenecektir. Bu incelemeyi yaparken en az bir pozitif çözüm için sabit nokta indeks teorisi, en az iki pozitif çözüm için Avery-Henderson sabit nokta teoremi ve en az üç pozitif çözüm için Legget-Williams sabit nokta teoremi kullanılacaktır.

## 5.1 Green Fonksiyonu ve Özellikleri

Bu kısımda (5.1) SDP nin Green fonksiyonunu elde edip bazı özelliklerini vereceğiz.

**Lemma 5.1.1.** $y \in C[0,1]$, $K := 1 - \sum\limits_{p=1}^{m-2} a_p \frac{\xi_p^{\alpha}}{\alpha} > 0$ ve $J_1 = [0,\xi_1]$, $J_2 = [\xi_1,\xi_2]$,..., $J_{m-2} = [\xi_{m-3},\xi_{m-2}]$, $J_{m-1} = [\xi_{m-2},1]$ olsun. Bu durumda,

$$\begin{cases} -D^{\alpha}_{0+}u(t) + y(t) = 0, \ \ t \in [0,1], \\ u(0) = u'(0) = ... = u^{(n-2)}(0) = 0, \\ \qquad u(1) = \sum\limits_{p=1}^{m-2} a_p \int\limits_0^{\xi_p} u(s)ds \end{cases} \tag{5.2}$$

probleminin tek çözümü

$$G(t,s)=\frac{1}{K\Gamma(\alpha)}\begin{cases}(1-s)^{\alpha-1}t^{\alpha-1}-\sum\limits_{p=k}^{m-2}\frac{a_p}{\alpha}(\xi_p-s)^{\alpha}t^{\alpha-1},\ t\leq s,\ s\in J_k,\\ k=1,2,...,m-1;\\ (1-s)^{\alpha-1}t^{\alpha-1}-K(t-s)^{\alpha-1}-\sum\limits_{p=k}^{m-2}\frac{a_p}{\alpha}(\xi_p-s)^{\alpha}t^{\alpha-1},\\ t\geq s,\ s\in J_k,\ k=1,2,...,m-1\end{cases}\tag{5.3}$$

olmak üzere

$$u(t)=\int\limits_0^1 G(t,s)y(s)ds\tag{5.4}$$

şeklindedir.

**İspat.** Lemma 2.2.8 den

$$u(t)=-\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_0^t(t-s)^{\alpha-1}y(s)ds+c_1t^{\alpha-1}+c_2t^{\alpha-2}+...+c_nt^{\alpha-n}\tag{5.5}$$

olduğunu söyleyebiliriz. (5.2) SDP nin sınır koşulları kullanılarak $c_2=c_3=...=c_n=0$ elde edilir. Böylece,

$$u(t)=-\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_0^t(t-s)^{\alpha-1}y(s)ds+c_1t^{\alpha-1}$$

olur. Buradan da,

$$u(1)=-\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_0^1(1-s)^{\alpha-1}y(s)ds+c_1\tag{5.6}$$

ifadesi elde edilir.

Diğer taraftan, $p=1,2,\ldots,m-2$ için

$$\begin{aligned}\int\limits_0^{\xi_p}u(s)ds &= -\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_0^{\xi_p}\int\limits_0^{x}(x-s)^{\alpha-1}y(s)dsdx+c_1\int\limits_0^{\xi_p}s^{\alpha-1}ds\\ &= -\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_0^{\xi_p}\int\limits_s^{\xi_p}(x-s)^{\alpha-1}y(s)dxds+c_1\int\limits_0^{\xi_p}s^{\alpha-1}ds\\ &= -\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_0^{\xi_p}\frac{(\xi_p-s)^{\alpha}}{\alpha}y(s)ds+c_1\frac{\xi_p^{\alpha}}{\alpha}\end{aligned}$$

olur. Buradan

$$\sum_{p=1}^{m-2}\int_0^{\xi_p} u(s)ds = \sum_{p=1}^{m-2}\Big( -\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^{\xi_p}\frac{(\xi_p-s)^{\alpha}}{\alpha}y(s)ds + c_1\frac{\xi_p^{\alpha}}{\alpha}\Big)$$

olarak yazılabilir. (5.6) ifadesi

$$u(1) = \sum_{p=1}^{m-2} a_p \int_0^{\xi_p} u(s)ds,$$

sınır koşuluyla birlikte düşünülürse,

$$c_1 = \int_0^1 \frac{(1-s)^{\alpha-1}}{K\Gamma(\alpha)}y(s)ds - \sum_{p=1}^{m-2}\int_0^{\xi_p}\frac{(\xi_p-s)^{\alpha}}{K\alpha\Gamma(\alpha)}y(s)ds$$

olarak bulunur. Böylece,

$$\begin{aligned} u(t) &= -\int_0^t \frac{(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}y(s)ds + \int_0^1 \frac{(1-s)^{\alpha-1}t^{\alpha-1}}{K\Gamma(\alpha)}y(s)ds \\ &- \sum_{p=1}^{m-2}\int_0^{\xi_p}\frac{(\xi_p-s)^{\alpha}t^{\alpha-1}}{K\alpha\Gamma(\alpha)}y(s)ds \end{aligned}$$

olur. Buradan da, Green fonksiyonunun ifadesi (5.3) şeklinde bulunarak

$$u(t) = \int_0^1 G(t,s)y(s)ds$$

olarak çözüm elde edilir. □

Kolaylık olması için

$$m = \frac{1}{\alpha K\Gamma(\alpha)}\sum_{p=1}^{m-2} a_p\xi_p^{\alpha},\ \ M = \frac{n}{K\Gamma(\alpha)}\Big[1 + \sum_{p=1}^{m-2}\frac{a_p(\xi_p^{\alpha-1}-\xi_p^{\alpha})}{\alpha}\Big] \tag{5.7}$$

sayılarını tanımlayalım. Bu tanımlamalarla birlikte, tezimizin bu bölümünde $M > m$ olduğunu kabul edeceğiz.

**Lemma 5.1.2.** (5.3) ile tanımlı $G(t,s)$ Green fonksiyonu $(t,s) \in [0,1]\times[0,1]$ için

$$G(t,s) \le Ms(1-s)^{\alpha-1}$$

eşitsizliğini sağlar.

**İspat.** $t \leq s$ ve $s \in J_k,\ k = 1,2,...,m-1$ için $G(t,s)$ Green fonksiyonunu düşünürsek

$$\begin{aligned}
K\Gamma(\alpha)G(t,s) &= (1-s)^{\alpha-1}t^{\alpha-1} - \sum_{p=k}^{m-2}\frac{a_p}{\alpha}(\xi_p - s)^{\alpha}t^{\alpha-1} \\
&= \left(1 - \sum_{p=k}^{m-2}\frac{a_p\xi_p^{\alpha}}{\alpha}\right)(1-s)^{\alpha-1}t^{\alpha-1} + \sum_{p=k}^{m-2}\frac{a_p\xi_p^{\alpha}}{\alpha}(1-s)^{\alpha-1}t^{\alpha-1} \\
&- \sum_{p=k}^{m-2}\frac{a_p\xi_p^{\alpha}}{\alpha}\left(1-\frac{s}{\xi_p}\right)^{\alpha}t^{\alpha-1} \\
&\leq \left(1 - \sum_{p=k}^{m-2}\frac{a_p\xi_p^{\alpha}}{\alpha}\right)(1-s)^{\alpha-1}t^{\alpha-1} \\
&+ \sum_{p=k}^{m-2}\frac{a_p\xi_p^{\alpha}}{\alpha}t^{\alpha-1}\left[(1-s)^{\alpha-1} - \left(1-\frac{s}{\xi_p}\right)^{\alpha}(1-s)^{\alpha-1}\right] \\
&\leq \left(1 - \sum_{p=k}^{m-2}\frac{a_p\xi_p^{\alpha}}{\alpha}\right)(1-s)^{\alpha-1}t^{\alpha-1} \\
&+ \sum_{p=k}^{m-2}\frac{a_p\xi_p^{\alpha}}{\alpha}t^{\alpha-1}(1-s)^{\alpha-1}\left[1-\left(1-\frac{s}{\xi_p}\right)\right] \\
&\times \left[1+\left(1-\frac{s}{\xi_p}\right)+\left(1-\frac{s}{\xi_p}\right)^{2}+\ldots+\left(1-\frac{s}{\xi_p}\right)^{n-1}\right] \\
&\leq n\left(1 - \sum_{p=k}^{m-2}\frac{a_p\xi_p^{\alpha}}{\alpha}\right)(1-s)^{\alpha-1}st^{\alpha-2} \\
&+ ns\sum_{p=k}^{m-2}\frac{a_p\xi_p^{\alpha-1}}{\alpha}(1-s)^{\alpha-1}t^{\alpha-1} \\
&\leq ns(1-s)^{\alpha-1}\left[1 - \sum_{p=k}^{m-2}\frac{a_p\xi_p^{\alpha}}{\alpha} + \sum_{p=k}^{m-2}\frac{a_p\xi_p^{\alpha-1}}{\alpha}\right] \\
&\leq ns(1-s)^{\alpha-1}\left[1 + \sum_{p=1}^{m-2}\frac{a_p(\xi_p^{\alpha-1}-\xi_p^{\alpha})}{\alpha}\right]
\end{aligned}$$

sonucu elde edilir. Diğer taraftan $t \geq s$ ve $s \in J_k,\ k = 1,2,...,m-1$ için Green fonksiyonu ele alınırsa,

$$\begin{aligned}
K\Gamma(\alpha)G(t,s) &= (1-s)^{\alpha-1}t^{\alpha-1} - K(t-s)^{\alpha-1} - \sum_{p=k}^{m-2}\frac{a_p}{\alpha}(\xi_p - s)^{\alpha}t^{\alpha-1} \\
&\leq (1-s)^{\alpha-1}t^{\alpha-1} - \sum_{p=k}^{m-2}\frac{a_p}{\alpha}(\xi_p - s)^{\alpha}t^{\alpha-1} \\
&\leq ns(1-s)^{\alpha-1}\left[1 - \sum_{p=1}^{m-2}\frac{a_p\xi_p^{\alpha}}{\alpha} + \sum_{p=1}^{m-2}\frac{a_p\xi_p^{\alpha-1}}{\alpha}\right]
\end{aligned}$$

$$= \quad ns(1-s)^{\alpha-1}\left[1+\sum_{p=1}^{m-2}\frac{a_p(\xi_p^{\alpha-1}-\xi_p^{\alpha})}{\alpha}\right]$$

olacaktır.

Böylece, $(t,s)\in[0,1]\times[0,1]$ için $G(t,s)\le Ms(1-s)^{\alpha-1}$ eşitsizliğinin sağlandığı görülmüş olur. □

**Lemma 5.1.3.** (5.3) ile tanımlı $G(t,s)$ Green fonksiyonu $(t,s)\in[0,1]\times[0,1]$ için

$$G(t,s)\ge ms(1-s)^{\alpha-1}t^{\alpha-1}$$

ve $G(t,s)\ge 0$ eşitsizliklerini sağlar.

**İspat.** $G(t,s)$ Green fonksiyonunda $t\le s$ ve $s\in J_k,\ k=1,2,...,m-1$ seçimi yapılırsa,

$$\begin{aligned}
K\Gamma(\alpha)G(t,s) &= (1-s)^{\alpha-1}t^{\alpha-1}-\sum_{p=k}^{m-2}\frac{a_p}{\alpha}(\xi_p-s)^{\alpha}t^{\alpha-1}\\
&\ge (1-s)^{\alpha-1}t^{\alpha-1}-\sum_{p=1}^{m-2}\frac{a_p\xi_p^{\alpha}}{\alpha}\left(1-\frac{s}{\xi_p}\right)^{\alpha}t^{\alpha-1}\\
&\ge (1-s)^{\alpha-1}t^{\alpha-1}-\sum_{p=1}^{m-2}\frac{a_p\xi_p^{\alpha}}{\alpha}(1-s)^{\alpha}t^{\alpha-1}\\
&= (1-s)^{\alpha-1}t^{\alpha-1}\left[1-\sum_{p=1}^{m-2}\frac{a_p\xi_p^{\alpha}}{\alpha}(1-s)\right]\\
&= (1-s)^{\alpha-1}t^{\alpha-1}\left[1-\sum_{p=1}^{m-2}\frac{a_p\xi_p^{\alpha}}{\alpha}+\sum_{p=1}^{m-2}\frac{a_p\xi_p^{\alpha}}{\alpha}s\right]\\
&\ge \sum_{p=1}^{m-2}\frac{a_p\xi_p^{\alpha}}{\alpha}s(1-s)^{\alpha-1}t^{\alpha-1}
\end{aligned}$$

olduğu görülür. Bunun yanında, $t\ge s$ ve $s\in J_k,\ k=1,2,...,m-1$ seçimi yapılacak olursa

$$\begin{aligned}
K\Gamma(\alpha)G(t,s) &= (1-s)^{\alpha-1}t^{\alpha-1}-K(t-s)^{\alpha-1}-\sum_{p=k}^{m-2}\frac{a_p}{\alpha}(\xi_p-s)^{\alpha}t^{\alpha-1}\\
&\ge (1-s)^{\alpha-1}t^{\alpha-1}-\left(1-\sum_{p=1}^{m-2}\frac{a_p\xi_p^{\alpha}}{\alpha}\right)(t-s)^{\alpha-1}\\
&\quad -\sum_{p=1}^{m-2}\frac{a_p\xi_p^{\alpha}}{\alpha}(1-s)^{\alpha}t^{\alpha-1}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= (1-s)^{\alpha-1}t^{\alpha-1}\left[1-\sum_{p=1}^{m-2}\frac{a_p\xi_p^{\alpha}}{\alpha}(1-s)\right] \\
&- \left(1-\sum_{p=1}^{m-2}\frac{a_p\xi_p^{\alpha}}{\alpha}\right)(t-s)^{\alpha-1} \\
&= \left(1-\sum_{p=1}^{m-2}\frac{a_p\xi_p^{\alpha}}{\alpha}\right)\left[(1-s)^{\alpha-1}t^{\alpha-1}-(t-s)^{\alpha-1}\right] \\
&+ \sum_{p=1}^{m-2}\frac{a_p\xi_p^{\alpha}}{\alpha}s(1-s)^{\alpha-1}t^{\alpha-1} \\
&\geq \left(1-\sum_{p=1}^{m-2}\frac{a_p\xi_p^{\alpha}}{\alpha}\right)(1-s)^{\alpha-2}t^{\alpha-2}[(1-s)t-(t-s)] \\
&+ \sum_{p=1}^{m-2}\frac{a_p\xi_p^{\alpha}}{\alpha}s(1-s)^{\alpha-1}t^{\alpha-1} \\
&\geq \left(1-\sum_{p=1}^{m-2}\frac{a_p\xi_p^{\alpha}}{\alpha}\right)(1-s)^{\alpha-2}t^{\alpha-2}s(1-t) \\
&+ \sum_{p=1}^{m-2}\frac{a_p\xi_p^{\alpha}}{\alpha}s(1-s)^{\alpha-1}t^{\alpha-1} \\
&\geq \sum_{p=1}^{m-2}\frac{a_p\xi_p^{\alpha}}{\alpha}s(1-s)^{\alpha-1}t^{\alpha-1}
\end{aligned}
$$

elde edilir.

Böylece, $(t,s) \in [0,1] \times [0,1]$ için $G(t,s) \geq ms(1-s)^{\alpha-1}t^{\alpha-1}$ eşitsizliğinin sağlandığı bulunmuş olur. Bu sonuç gözönüne alınırsa, $(t,s) \in [0,1] \times [0,1]$ için $G(t,s) \geq 0$ olduğu kolayca söyylenebilir. □

## 5.2 Koni ve Operatör

Bu kısımda, daha önceki incelemelerimizde olduğu gibi bulduğumuz sonuçlara uygun birer koni ve operatör tanımlayacağız.

Lemma 5.1.1 den (5.1) SDP nin $u(t)$ çözümünün bulunması

$$u(t) = \int_0^1 G(t,s)f(s,u(s))ds. \tag{5.8}$$

integral denkleminin çözümünün bulunmasına denktir.

$\mathbb{B}$ Banach uzayını $\|u\| = \max_{t\in[0,1]} |u(t)|$ normu ile birlikte $C[0,1]$ olarak alalım. $m$ ve

$M$ sayıları (5.7) ile verilmek üzere

$$P = \{u \in \mathbb{B} : \forall t \in [0,1] \text{ için } u(t) \geq 0, u(t) \geq \frac{m}{M} t^{\alpha-1} \|u\|\} \tag{5.9}$$

olacak şekilde $P \subset \mathbb{B}$ konisini tanımlayalım.

Böylece, (5.8) integral denkleminin $P$ üzerindeki çözümleri,

$$Au(t) = \int_0^1 G(t,s) f(s, u(s)) ds \tag{5.10}$$

ile tanımlı $A : P \to \mathbb{B}$ operatörünün sabit noktalarıdır.

**Lemma 5.2.1.** $A : P \to P$ operatörü tamamen süreklidir.

**İspat.** $u \in P$ alınırsa, $[0,1]$ üzerinde $Au(t) \geq 0$ olduğu Lemma 5.1.3 ten söylenebilir. Bunun yanında, Lemma 5.1.2 den

$$\begin{aligned} \|Au\| &= \max_{t \in [0,1]} \int_0^1 G(t,s) f(s,u(s)) ds \\ &\leq \int_0^1 M s (1-s)^{\alpha-1} f(s,u(s)) ds \end{aligned}$$

olur. Bu durumda Lemma 5.1.3 kullanılarak

$$\begin{aligned} Au(t) &= \int_0^1 G(t,s) f(s,u(s)) ds \\ &\geq \int_0^1 m s (1-s)^{\alpha-1} t^{\alpha-1} f(s,u(s)) ds \\ &\geq \frac{m}{M} t^{\alpha-1} \|Au\| \end{aligned}$$

elde edilir. Bu takdirde, $Au \in P$ olduğu ve dolayısıyla $AP \subset P$ olduğu görülmüş olur.

Diğer taraftan, $A : P \to P$ operatörünün tamamen sürekli olduğu Lemma 3.2.1 dekine benzer şekilde yapılabilir. Böylece, $A : P \to P$ operatörünün tamamen sürekli bir operatör olduğu elde edilmiş olur. □

İlerleyen kısımlarda kolaylık olması için

$$L := \int_0^1 s(1-s)^{\alpha-1} ds \tag{5.11}$$

olarak tanımlayalım. Bunun yanında, $0 < \eta < 1$ olacak şekilde $\eta$ keyfi sabitini alalım.

## 5.3 En Az Bir Pozitif Çözümün Varlığı

Bu kısımda (5.1) SDP nin en az bir pozitif çözümünün varlığı için yeterli koşulları Lemma 2.3.10 ile birlikte sabit nokta indeks teorisi yardımıyla elde edeceğiz.

(5.9) ile tanımlı $P$ konisini ve herhangi bir pozitif $r$ reel sayısını ele alalım. Buradan

$$P_r := \{u \in P : \|u\| < r\} \tag{5.12}$$

konveks kümesini ve $m$ ile $M$ sayıları (5.7) ile tanımlı olmak üzere

$$\Omega_r := \{u \in P : \min_{t\in[\eta,1]} u(t) < \frac{m}{M} r\} \tag{5.13}$$

kümesini tanımlayalım.

**Teorem 5.3.1.** $f$ için, eğer;

(i) $(t, u) \in [0, 1] \times [0, r]$ için $f(t, u) \leq \frac{u}{ML}$ ve $u \neq Au$;

(ii) $(t, u) \in [\eta, 1] \times [\frac{m}{M} r, r]$ için $f(t, u) \geq \frac{r}{M\eta^{\alpha-1}L}$ ve $u \neq Au$,

şartlarını sağlayacak şekilde $r > 0$ sayısı varsa (5.1) SDP nin en az bir $u \in P_r \backslash \overline{\Omega_r}$ pozitif çözümü mevcuttur.

**İspat.** İspatımızı Lemma 2.3.10 u gözönüne alarak yapacağız.

$u \in \partial P_r$ olsun. Bu durumda, $t \in [0, 1]$ için $0 \leq u(t) \leq r$ olur. O halde $(i)$ kabulü, Lemma 5.1.2 ve (5.11) den

$$\begin{aligned} Au(t) &= \int_0^1 G(t, s) f(s, u(s)) ds \\ &\leq M \int_0^1 s(1 - s)^{\alpha-1} f(s, u(s)) ds \\ &\leq \frac{1}{L} \int_0^1 s(1 - s)^{\alpha-1} u(s) ds \\ &\leq \|u\| \end{aligned}$$

ifadesi elde edilir. Yani, $u \in \partial P_r$ için $\|Au\| \leq \|u\|$ olur. Böylece, Lemma 2.3.10 un $(i)$ sonucu gereği $i_P(A, P_r) = 1$ olduğu bulunur.

$u \in \partial\Omega_r$ olsun. $\overline{\Omega_r} \subset P_r$ ve $u \in \partial\Omega_r$ olduğundan $t \in [\eta, 1]$ için $\frac{m}{M}r \leq u(t) \leq r$ olur. $t \in [0,1]$ için $b(t) \equiv 1$ olarak alırsak $b \in \partial P_1$ olur. Kabul edelim ki, $u_0 = Au_0 + \lambda_0 b$ olacak şekilde $u_0 \in \partial\Omega_r$ ve $\lambda_0 > 0$ var olsun. Bu takdirde $(ii)$ kabulü, Lemma 5.1.3 ve (5.11) den

$$\begin{aligned}
u_0(t) &= Au_0(t) + \lambda_0 b(t) \\
&= \int_0^1 G(t,s)f(s,u_0(s))ds + \lambda_0 \\
&\geq \int_0^1 \min_{t\in[\eta,1]} G(t,s)f(s,u_0(s))ds + \lambda_0 \\
&\geq \int_0^1 \min_{t\in[\eta,1]} mt^{\alpha-1}s(1-s)^{\alpha-1}f(s,u_0(s))ds + \lambda_0 \\
&= m\eta^{\alpha-1}\int_0^1 s(1-s)^{\alpha-1}f(s,u_0(s))ds + \lambda_0 \\
&\geq \frac{m}{M}r + \lambda_0
\end{aligned}$$

olarak bulunur. Fakat, buradan $\frac{m}{M}r \geq \frac{m}{M}r + \lambda_0$ çelişkisi olduğu görülebilir. O halde, $u_0 \in \partial\Omega_r$ ve $\lambda_0 > 0$ için $u_0 \neq Au_0 + \lambda_0 b$ olacaktır. Bu durumda, Lemma 2.3.10 un $(ii)$ sonucu gereği $i_P(A, \Omega_r) = 0$ olduğu bulunur.

Sonuç olarak, Lemma 2.3.10 un $(iii)$ sonucundan $A$ operatörü $P_r \backslash \overline{\Omega_r}$ de bir sabit noktaya sahiptir. Bu nedenle, (5.1) SDP nin $u \in P_r \backslash \overline{\Omega_r}$ olacak şekilde en az bir pozitif çözümü mevcuttur. $\square$

## 5.4 En az İki Pozitif Çözümün Varlığı

Bu kısımda (5.1) SDP nin en az iki pozitif çözümünün varlığını inceleyeceğiz. Bu incelemeyi yaparken Avery-Henderson sabit nokta teoreminden yararlanacağız.

**Teorem 5.4.1.** $m$, $M$ ve $L$ sayıları sırasıyla (5.7) ve (5.11) ile verilsin. $f$ fonksiyonu için eğer;

(i) $(t,u) \in [\eta, 1] \times [r, \frac{M}{m\eta^{\alpha-1}}r]$ için $f(t,u) > \frac{r}{m\eta^{\alpha-1}L}$;

(ii) $(t,u) \in [0,1] \times [0,q]$ için $f(t,u) < \frac{q}{ML}$;

(iii) $(t,u) \in [0,1] \times [0,p]$ için $f(t,u) > \frac{p}{mL}$, koşullarını sağlayacak şekilde $0 < p < q < r$ sayıları varsa (5.1) SDP nin $u_1$ ve $u_2$ olacak şekilde en az iki pozitif çözümü mevcuttur ve bu çözümler

$$\|u_1\| < q \text{ ile birlikte } p < \|u_1\| \text{ ve } \min_{t\in[\eta,1]} u_2(t) < r \text{ ile birlikte } q < \|u_2\|$$

eşitsizliklerini sağlarlar.

**İspat.** (5.9) ile tanımlı $P$ konisini ele alalım. Lemma 5.2.1 den $AP \subset P$ dir ve $A$ operatörü tamamen sürekli bir operatördür. $P$ üzerinde negatif olmayan, artan, sürekli $\phi$, $\theta$ ve $\psi$ fonksiyonellerini,

$$\phi(u) = \min_{t\in[\eta,1]} u(t), \; \theta(u) = \psi(u) = \max_{t\in[0,1]} u(t) = \|u\|$$

şeklinde tanımlayalım. Bu tanımlamalarla birlikte, herhangi bir $u \in P$ için $\phi(u) \leq \theta(u) \leq \psi(u)$ olur ve

$$\phi(u) = \min_{t\in[\eta,1]} u(t) \geq \min_{t\in[\eta,1]} \frac{m}{M} t^{\alpha-1}\|u\| = \frac{m}{M}\eta^{\alpha-1}\|u\|$$

olarak elde edilir. Bunun yanında, $\theta(0) = 0$ dır ve $\forall u \in P$ ve $\lambda \in [0,1]$ için $\theta(\lambda u) = \lambda\theta(u)$ olur.

Şimdi Avery-Henderson sabit nokta teoreminin koşullarını inceleyelim.

$u \in \partial P(\phi, r)$ alınırsa, $t \in [\eta, 1]$ için $r \leq u(t) \leq \frac{M}{m\eta^{\alpha-1}} r$ olur. Bu takdirde, $(i)$ kabulü ve Lemma 5.1.3 kullanılarak

$$\begin{aligned} \phi(Au) &= \min_{t\in[\eta,1]} \int_0^1 G(t,s) f(s,u(s))ds \\ &\geq \min_{t\in[\eta,1]} m t^{\alpha-1} \int_0^1 s(1-s)^{\alpha-1} f(s,u(s))ds \\ &> r \end{aligned}$$

olduğu görülür. Bu durumda, Avery-Henderson sabit nokta teoreminin $(i)$ koşulu sağlanmış olur.

$u \in \partial P(\theta, q)$ olsun. Buradan $t \in [0,1]$ için $0 \leq u(t) \leq q$ sağlanır. O halde, $(ii)$ kabulü ve Lemma 5.1.2 den

$$\begin{aligned} \theta(Au) &= \max_{t\in[0,1]} \int_0^1 G(t,s) f(s,u(s))ds \\ &\leq M \int_0^1 s(1-s)^{\alpha-1} f(s,u(s))ds \\ &< q \end{aligned}$$

bulunur. Böylece, Avery-Henderson sabit nokta teoreminin $(ii)$ koşulunun sağlandığı bulunmuş olur.

$0 \in P$ ve $p > 0$ olduğundan, $P(\psi, p) \neq \emptyset$ dir. Eğer $u \in \partial P(\psi, p)$ olarak alırsak, $t \in [0,1]$ için $0 \leq u(t) \leq p$ sağlanır. Buradan $(iii)$ kabulünden

$$\begin{aligned}
\psi(Au) &= \max_{t\in[0,1]} \int_0^1 G(t,s) f(s,u(s)) ds \\
&\geq \max_{t\in[0,1]} m t^{\alpha-1} \int_0^1 s(1-s)^{\alpha-1} f(s,u(s)) ds \\
&= m \int_0^1 s(1-s)^{\alpha-1} f(s,u(s)) ds \\
&> p
\end{aligned}$$

olarak elde ederiz.

Böylece, Avery-Henderson sabit nokta teoreminin bütün koşulları sağlanır. O halde (5.1) SDP nin $u_1$ ve $u_2$ olacak şekilde en az iki pozitif çözümü mevcuttur ve bu çözümler

$$\|u_1\| < q \text{ ile birlikte } p < \|u_1\| \text{ ve } \min_{t\in[\eta,1]} u_2(t) < r \text{ ile birlikte } q < \|u_2\|$$

eşitsizliklerini sağlarlar. $\square$

## 5.5 En Az Üç Pozitif Çözümün Varlığı

Tezimizin bu kısmında (5.1) SDP nin en az üç pozitif çözümünün varlığını araştıracağız. Leggett-Williams sabit nokta teoremi bu araştırmayı yaparken bize yol gösterecektir.

**Teorem 5.5.1.** Sırasıyla (5.7) ve (5.11) ile tanımlı $m$, $M$ ve $L$ sayılarını ele alalım. Bu durumda $f$ fonksiyonu için eğer;

(i) $(t,u) \in [0,1] \times [0,r]$ için $f(t,u) \leq \frac{r}{ML}$;

(ii) $(t,u) \in [\eta,1] \times [q, \frac{M}{m\eta^{\alpha-1}} q]$ için $f(t,u) > \frac{q}{m\eta^{\alpha-1}L}$;

(iii) $(t,u) \in [0,1] \times [0,p]$ için $f(t,u) < \frac{p}{ML}$,

koşullarını sağlayacak şekilde $0 < p < q < \frac{M}{m\eta^{\alpha-1}} q \leq r$ sayıları mevcutsa, (5.1) SDP nin en az üç pozitif $u_1$, $u_2$ ve $u_3$ çözümü vardır ve bu çözümler

$$\|u_1\| < p,\ \min_{t\in[\eta,1]} u_2(t) > q,\ \min_{t\in[\eta,1]} u_3(t) < q \text{ ile birlikte } p < \|u_3\|$$

eşitsizliklerini sağlarlar.

**İspat.** $P$ konisini (5.9) ile tanımlanan haliyle alalım. $\psi : P \to [0,\infty)$ negatif olmayan, sürekli ve konkav fonksiyonelini $\psi(u) = \min\limits_{t\in[\eta,1]} u(t)$ şeklinde tanımlayalım. Bu durumda, her $u \in P$ için $\psi(u) \leq \|u\|$ olur.

$u \in \overline{P_r}$ alınırsa, her $t \in [0,1]$ için $0 \leq u(t) \leq r$ olur. O halde, $(i)$ koşulu ve Lemma 5.1.2 gözönüne alınırsa,

$$\begin{aligned} \|Au\| &= \max_{t\in[0,1]} \int_0^1 G(t,s)f(s,u(s))ds \\ &\leq M \int_0^1 s(1-s)^{\alpha-1} f(s,u(s))ds \\ &\leq r \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece, $A : \overline{P_r} \to \overline{P_r}$ olduğu söylenebilir. Diğer taraftan Lemma 5.2.1 düşünülecek olursa $A : \overline{P_r} \to \overline{P_r}$ operatörü tamamen sürekli bir operatördür.

Benzer yolla $(iii)$ koşulu ile birlikte $A(\overline{P_p}) \subset P_p$ olduğu kolayca bulunabilir. Böylece, $\forall u \in \overline{P_p}$ için $\|Au\| < p$ olduğu, yani Leggett-Williams sabit nokta teoreminin $(ii)$ şartının sağlandığı görülebilir.

$\frac{M}{m\eta^{\alpha-1}} > 1$ olduğundan, $\frac{M}{m\eta^{\alpha-1}}q \in P(\psi, q, \frac{M}{m\eta^{\alpha-1}}q)$ ve $\psi(\frac{M}{m\eta^{\alpha-1}}q) > q$ olur. Bu takdirde,

$$\{u \in P(\psi, q, \frac{M}{m\eta^{\alpha-1}}q) : \psi(u) > q\} \neq \emptyset$$

olacaktır. Bunun yanında $\forall u \in P(\psi, q, \frac{M}{m\eta^{\alpha-1}}q)$ alındığında, $t \in [\eta,1]$ için $q \leq u(t) \leq \frac{M}{m\eta^{\alpha-1}}q$ olur. Bu durumda, $(ii)$ koşulu ve Lemma 5.1.3 ten

$$\begin{aligned} \psi(Au) &= \min_{t\in[\eta,1]} Au(t) \\ &= \min_{t\in[\eta,1]} \int_0^1 G(t,s)f(s,u(s))ds \\ &\geq \min_{t\in[\eta,1]} mt^{\alpha-1} \int_0^1 s(1-s)^{\alpha-1} f(s,u(s))ds \\ &> q \end{aligned}$$

olarak buluruz. O halde, Leggett-Williams sabit nokta teoreminin $(i)$ şartı sağlanır.

Kabul edelim ki, $\|Au\| > \frac{M}{m\eta^{\alpha-1}}q$ olacak şekilde $u \in P(\psi, q, r)$ elemanı alınsın. Bu takdirde,

$$\begin{aligned}
\psi(Au) &= \min_{t\in[\eta,1]} Au(t) \\
&\geq \min_{t\in[\eta,1]} \frac{m}{M} t^{\alpha-1}\|Au\| \\
&= \frac{m}{M}\eta^{\alpha-1}\|Au\| \\
&> \frac{m}{M}\eta^{\alpha-1}\frac{M}{m\eta^{\alpha-1}}q \\
&= q
\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece, Leggett-Williams sabit nokta teoreminin $(iii)$ şartı gerçeklenir.

Sonuç olarak, Leggett-Williams sabit nokta teoreminin tüm şartlarını sağlandığından, (5.1) SDP nin en az üç pozitif $u_1$, $u_2$ ve $u_3$ çözümü vardır ve bu çözümler

$$\|u_1\| < p,\ \min_{t\in[\eta,1]} u_2(t) > q,\ \min_{t\in[\eta,1]} u_3(t) < q \text{ ile birlikte } p < \|u_3\|$$

eşitsizliklerini sağlarlar. $\square$

**Örnek 5.5.2.** $n = 3$, $\alpha = \frac{5}{2}$, $m = 3$, $a_1 = 1$, $\xi_1 = \frac{1}{2}$ ve $\eta = 0.9$ seçimleri yapılırsa, (5.1) SDP:

$$\begin{cases} D_{0+}^{\frac{5}{2}} u(t) + \frac{2000u^2}{1+u^2} = 0, \quad t \in [0,1] \\ u(0) = u'(0) = 0 \\ u(1) = \int\limits_0^{\frac{1}{2}} u(s)ds \end{cases} \tag{5.14}$$

halini alır. Buradan gerekli hesaplamalar pratik olarak yapılarak $K \approx 0.92928932$, $m \approx 0.05723976$, $M \approx 2.60019693$ ve $L = \frac{4}{35}$ olduğu bulunabilir. Eğer $p = 0.00001$, $q = 10$ ve $r = 2000$ şeklinde seçilirse, $0 < p < q < \frac{M}{m\eta^{\alpha-1}}q \leq r$ olur ve Teorem 5.5.1 in tüm koşulları sağlanır. Bu nedenle, (5.14) SDP en az üç pozitif $u_1$, $u_2$ ve $u_3$ çözümlerine sahiptir ve bu çözümler

$$\|u_1\| < p,\ \min_{t\in[0.9,1]} u_2(t) > q,\ \min_{t\in[0.9,1]} u_3(t) < q \text{ ile birlikte } p < \|u_3\|$$

eşitsizliklerini sağlarlar.

# 6. YÜKSEK MERTEBE ÇOKLU NOKTA KESİRLİ İNTEGRAL SINIR KOŞULLU SINIR DEĞER PROBLEMLERİ

Bu bölümde $\eta-2$. mertebeden Riemann-Liouville kesirli türevi $D_{0^+}^{\eta-2}$ ile gösterilmek üzere

$$\begin{cases} -D_{0^+}^{\eta-2}(u''(t))+f(t,u(t))=0, \ \ t\in[0,1], \\ u''(0)=u'''(0)=...=u^{(n-2)}(0)=0, \ \ u'''(1)=0, \\ \alpha u(0)-\beta u'(0)=\sum\limits_{p=1}^{m-2} a_p\int\limits_0^{\xi_p} u(s)ds, \\ \gamma u(1)+\delta u'(1)=\sum\limits_{p=1}^{m-2} b_p\int\limits_0^{\xi_p} u(s)ds, \end{cases} \tag{6.1}$$

SDP incelenecektir. Burada $n,m\in\mathbb{N}$ için $m,n\geq 3$, $n-1<\eta\leq n$, $a_p$, $b_p\geq 0$, $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta>0$ ve $0<\xi_1<\ldots<\xi_{m-2}<1$ olacaktır. Ayrıca, $f:[0,1]\times[0,\infty)\to[0,\infty)$ fonksiyonunun sürekli olduğunu kabul edeceğiz.

(6.1) SDP araştırılırken önceki bölümlerde olduğu gibi, ilk olarak problemimizin Green fonksiyonunu elde edip integral denklem haline indirgeyeceğiz. Bu integral denklemi bir operatör olarak değerlendirerek tanımlayacak olduğumuz koni üzerinde pozitif çözümlerin varlığı incelenecektir. Bu incelemeyi yaparken en az bir pozitif çözüm için dört fonksiyonel sabit nokta teoremi, en az iki pozitif çözüm için Avery-Henderson sabit nokta teoremi ve en az üç pozitif çözüm için Legget-Williams sabit nokta teoremi kullanılacaktır.

## 6.1 Green Fonksiyonu ve Özellikleri

$-u''(t)=y(t)$ olarak alınırsa,

$$\begin{cases} -D_{0^+}^{\eta-2}(u''(t))+f(t,u(t))=0, \ \ t\in[0,1], \\ u''(0)=u'''(0)=...=u^{(n-2)}(0)=0, \ \ u'''(1)=0 \end{cases} \tag{6.2}$$

problemi

$$\begin{cases} D_{0^+}^{\eta-2}y(t)+f(t,u(t))=0, \ \ t\in[0,1], \\ y(0)=y'(0)=...=y^{(n-4)}(0)=0, \ \ y'(1)=0. \end{cases} \tag{6.3}$$

halini alır.

**Lemma 6.1.1.** (6.3) sınır değer probleminin tek çözümü

$$H(t,s)=\begin{cases} \frac{(1-s)^{\eta-4}t^{\eta-3}}{\Gamma(\eta-2)}, & t\leq s, \\ \frac{(1-s)^{\eta-4}t^{\eta-3}-(t-s)^{\eta-3}}{\Gamma(\eta-2)}, & t\geq s, \end{cases} \tag{6.4}$$

olmak üzere

$$y(t)=\int\limits_0^1 H(t,s)f(s,u(s))ds \tag{6.5}$$

şeklindedir.

**İspat.** Lemma 2.2.8 den

$$y(t)=-\frac{1}{\Gamma(\eta-2)}\int\limits_0^t (t-s)^{\eta-3}f(s,u(s))ds+c_1t^{\eta-3}+c_2t^{\eta-4}+...+c_{n-2}t^{\eta-n} \tag{6.6}$$

olduğu görülebilir. (6.3) teki sınır koşullarından, $c_2=c_3=...=c_{n-2}=0$ ve $c_1=\frac{1}{\Gamma(\eta-2)}\int\limits_0^1(1-s)^{\eta-4}f(s,u(s))ds$ olduğunu elde edebiliriz. Böylece (6.3) sınır değer probleminin tek çözümü

$$\begin{aligned} y(t) &= \int\limits_0^t \frac{(1-s)^{\eta-4}t^{\eta-3}-(t-s)^{\eta-3}}{\Gamma(\eta-2)}f(s,u(s))ds \\ &+ \int\limits_t^1 \frac{(1-s)^{\eta-4}t^{\eta-3}}{\Gamma(\eta-2)}f(s,u(s))ds \\ &= \int_0^1 H(t,s)f(s,u(s))ds \end{aligned}$$

şeklinde elde edilir. □

Şimdi

$$\begin{cases} -u''(t)=y(t), \quad t\in[0,1], \\ \alpha u(0)-\beta u'(0)=\sum\limits_{p=1}^{m-2}a_p\int\limits_0^{\xi_p}u(s)ds \\ \gamma u(1)+\delta u'(1)=\sum\limits_{p=1}^{m-2}b_p\int\limits_0^{\xi_p}u(s)ds \end{cases} \tag{6.7}$$

sınır değer probleminin çözümünü elde edelim. Bu noktada

$$u''(t)=0 \tag{6.8}$$

homojen denkleminin $\theta(t)$ ve $\varphi(t)$ çözümlerini

$$\begin{aligned} \theta(0)=\beta,\ \theta'(0)=\alpha, \\ \varphi(1)=\delta,\ \varphi'(1)=-\gamma \end{aligned} \tag{6.9}$$

başlangıç koşullarını sağlayacak şekilde tanımlayalım. (6.9) başlangıç koşullarını kullanarak (6.8) denkleminden

$$\theta(t)=\alpha t+\beta, \tag{6.10}$$

ve

$$\varphi(t) = \gamma + \delta - \gamma t \tag{6.11}$$

olduğunu elde edebiliriz. $D := \alpha\gamma + \alpha\delta + \beta\gamma$ sayısını tanımlayalım. (6.8) denkleminin herhangi iki çözümünün Wronskian'ı hesaplanacak olursa,

$$\begin{aligned} W(\theta, \varphi) &= \theta(t)\varphi'(t) - \theta'(t)\varphi(t) \\ &= (\alpha t + \beta)(-\gamma) - \alpha(\gamma + \alpha - \gamma t) \\ &= -(\alpha\gamma + \alpha\delta + \beta\gamma) \\ &= -D \end{aligned}$$

bulunur. Burada $D \neq 0$ olur. Bu durumda $\theta$ ve $\varphi$ çözümleri lineer bağımsız iki çözüm olur. Artık buradan (6.7) SDP nin Green fonksiyonunun

$$G(t,s) = \frac{1}{D}\begin{cases} \theta(t)\varphi(s), \; 0 \leq t \leq s \leq 1 \\ \theta(s)\varphi(t), \; 0 \leq s \leq t \leq 1 \end{cases} \tag{6.12}$$

şeklinde olduğunu söyleyebiliriz. Şimdi (6.7) in çözümünü elde edelim.

**Lemma 6.1.2.** (6.7) SDP nin çözümü, $G(t,s)$ (6.12) ile verilmek üzere

$$u(t) = \int\limits_0^1 G(t,s)y(s)ds + \frac{\theta(t)}{D}\sum_{p=1}^{m-2} b_p \int\limits_0^{\xi_p} u(s)ds + \frac{\varphi(t)}{D}\sum_{p=1}^{m-2} a_p \int\limits_0^{\xi_p} u(s)ds \tag{6.13}$$

olur.

**İspat.** $D \neq 0$ olduğundan (6.8) homojen denkleminin $\theta$ ve $\varphi$ çözümleri lineer bağımsızdır. Parametrelerin değişimi yöntemi uygulanarak (6.7) denkleminin çözümü $c_1$ ve $c_2$ keyfi sabitler olmak üzere

$$u(t) = c_1\theta(t) + c_2\varphi(t) + \int\limits_0^1 G(t,s)y(s)ds, \tag{6.14}$$

şeklinde yazılır. Artık (6.7) probleminin sınır koşullarını sağlayacak şekilde $c_1$ ve $c_2$ sabitleri seçilecektir. Bu işlemler yapıldığında

$$c_1 = \frac{1}{D}\sum_{p=1}^{m-2} b_p \int\limits_0^{\xi_p} u(s)ds$$

ve

$$c_2 = \frac{1}{D}\sum_{p=1}^{m-2} a_p \int\limits_0^{\xi_p} u(s)ds.$$

olarak elde edilir. Bulunan $c_1$ ve $c_2$, (6.14) de yerine konulursa (6.13) integral denklemi bulunur. □

**Lemma 6.1.3.** $(6.12)$ ile verilen $G(t,s)$ Green fonksiyonu, $\theta(t)$ ve $\varphi(t)$ fonksiyonları $(t,s) \in [0,1] \times [0,1]$ için

$$\begin{aligned} 0 < G(t,s) \leq G(s,s), \\ 0 \leq \theta(t) \leq \theta(1), \\ 0 \leq \varphi(t) \leq \varphi(0) \end{aligned}$$

eşitsizliklerini sağlarlar.

**İspat.** $G(t,s)$ Green fonksiyonunun $(6.12)$ ile verilen ifadesinden $G(t,s) > 0$ olduğu kolayca görülebilir. Şimdi $G(t,s) \leq G(s,s)$ olduğunu görelim.

(i) $s \in [0,1]$ ve $t \leq s$ olsun. $G(t,s)$ fonksiyonu $t$ ye göre artan olduğundan $G(t,s) \leq G(s,s)$ eşitsizliği sağlanır.

(ii) $s \in [0,1]$ ve $t \geq s$ için, $G(t,s)$ fonksiyonu $t$ ye göre azalan olduğundan $G(t,s) \leq G(s,s)$ olduğu görülür.

Diğer taraftan $t \in [0,1]$ için,

$$0 \leq \theta(t) = \alpha t + \beta \leq \alpha + \beta = \theta(1)$$

ve

$$0 \leq \varphi(t) = \gamma + \delta - \gamma t \leq \gamma + \delta = \varphi(0)$$

ifadeleri elde edilir. □

**Lemma 6.1.4.**

$$z = \min\left\{\frac{\beta}{\alpha+\beta}, \frac{\delta}{\gamma+\delta}\right\} \in (0,1) \tag{6.15}$$

olmak üzere $(t,s) \in [0,1] \times [0,1]$ için $(6.12)$ ile verilen $G(t,s)$ Green fonksiyonu, $\theta(t)$ ve $\varphi(t)$ fonksiyonları

$$\begin{aligned} G(t,s) &\geq zG(s,s), \\ \theta(t) &\geq z\theta(1), \\ \varphi(t) &\geq z\varphi(0) \end{aligned}$$

eşitsizliklerini sağlarlar.

**İspat.** Öncelikle $G(t,s)$ Green fonksiyonu için lemmayı inceleyelim.

(i) $t,\ s \in [0,1]$ ve $t \leq s$ için, $\alpha t + \beta \geq \frac{\beta}{\alpha+\beta}(\alpha s + \beta)$ olduğundan,

$$\begin{aligned} G(t,s) &= \frac{1}{D}(\alpha t + \beta)(\gamma + \delta - \gamma s) \\ &\geq \frac{\beta}{\alpha+\beta}\frac{1}{D}(\alpha s + \beta)(\gamma + \delta - \gamma s) \\ &\geq zG(s,s) \end{aligned}$$

olduğu görülür.

(ii) $t,\ s \in [0,1]$ ve $t \geq s$ alalım. Bu durumda $\gamma + \delta - \gamma t \geq \frac{\delta}{\gamma+\delta}(\gamma + \delta - \gamma s)$ olacağından,

$$\begin{aligned} G(t,s) &= \frac{1}{D}(\alpha s + \beta)(\gamma + \delta - \gamma t) \\ &\geq \frac{\delta}{\gamma+\delta}\frac{1}{D}(\alpha s + \beta)(\gamma + \delta - \gamma s) \\ &\geq zG(s,s) \end{aligned}$$

elde edilir.

O halde $z = \min\left\{\frac{\beta}{\alpha+\beta}, \frac{\delta}{\gamma+\delta}\right\}$ için $G(t,s) \geq zG(s,s)$ ifadesinin sağlandığı söylenebilir. Diğer taraftan

$$\theta(t) = \alpha t + \beta \geq \frac{\beta}{\alpha+\beta}(\alpha + \beta) \geq z\theta(1)$$

ve

$$\varphi(t) = \gamma + \delta - \gamma t \geq \frac{\delta}{\gamma+\delta}(\gamma + \delta) \geq z\varphi(0)$$

olacak şekilde eşitsizliklerin sağlandığı görülmüş olur. □

**Lemma 6.1.5.** $t, s \in [0,1]$ için, $0 \leq H(t,s) \leq H(1,s)$ eşitsizliği doğrudur.

**İspat.** (6.4) ifadesinden $0 \leq H(t,s)$ olduğu söylenebilir. $H(t,s)$ fonksiyonu $t$ ye göre artan olduğundan $H(t,s) \leq H(1,s)$ olduğu bulunur. □

**Lemma 6.1.6.** $k \in (0, \xi_{m-2})$ bir sabit olmak üzere $0 \leq t, s \leq 1$ için $\min\limits_{t\in[\xi_{m-2},1]} H(t,s) \geq k^{\eta-3}H(1,s)$ eşitsizliği mevcuttur.

**İspat.** (i) $t \leq s$ alalım. $H(t,s)$ artan bir fonksiyon olduğundan,

$$\min_{t\in[\xi_{m-2},1]} H(t,s) = \frac{(1-s)^{\eta-4}\xi_{m-2}^{\eta-3}}{\Gamma(\eta-2)} \geq \frac{(1-s)^{\eta-4}k^{\eta-3}}{\Gamma(\eta-2)} = k^{\eta-3}H(1,s)$$

olduğu görülür.

(ii) $s \leq t$ için,

$$\begin{aligned}\min_{t\in[\xi_{m-2},1]} H(t,s) &= \frac{(1-s)^{\eta-4}\xi_{m-2}^{\eta-3} - (\xi_{m-2}-s)^{\eta-3}}{\Gamma(\eta-2)} \\ &> \frac{(1-s)^{\eta-4}\xi_{m-2}^{\eta-3} - (\xi_{m-2}-\xi_{m-2}s)^{\eta-3}}{\Gamma(\eta-2)} \\ &= \frac{\xi_{m-2}^{\eta-3}((1-s)^{\eta-4}-(1-s)^{\eta-3})}{\Gamma(\eta-2)} \\ &= \xi_{m-2}^{\eta-3}H(1,s) \\ &> k^{\eta-3}H(1,s)\end{aligned}$$

elde edilir. Sonuç olarak $\min\limits_{t\in[\xi_{m-2},1]} H(t,s) \geq k^{\eta-3}H(1,s)$ eşitsizliğinin mevcut olduğunu söyleyebiliriz. □

## 6.2 Koni ve Operatör

Bu kısımda, daha önceki incelemelerimizde olduğu gibi bulduğumuz sonuçlara uygun birer koni ve operatör tanımlayacağız.

Lemma 6.1.1 ve Lemma 6.1.2 den SDP nin $u(t)$ çözümünün bulunması

$$\begin{aligned}u(t) &= \int_0^1 G(t,s)\int_0^1 H(s,\tau)f(\tau,u(\tau))d\tau ds \\ &+\tfrac{\theta(t)}{D}\sum_{p=1}^{m-2} b_p\int_0^{\xi_p} u(s)ds + \tfrac{\varphi(t)}{D}\sum_{p=1}^{m-2} a_p\int_0^{\xi_p} u(s)ds\end{aligned} \tag{6.16}$$

integral denkleminin çözümünün bulunmasına denktir.

$\mathbb{B}$ Banach uzayını $\|u\| = \max\limits_{t\in[0,1]}|u(t)|$ normu ile birlikte $C[0,1]$ olarak seçelim. $z$ sayısı (6.15) ile verilmek üzere

$$P = \{u \in \mathbb{B} : \min_{t\in[0,1]} u(t) \geq z\|u\|\}, \tag{6.17}$$

olacak şekilde $P \subset \mathbb{B}$ konisini tanımlayalım.

Buradan, (6.16) integral denkleminin $P$ üzerindeki çözümleri,

$$\begin{aligned}Au(t) &= \int_0^1 G(t,s)\int_0^1 H(s,\tau)f(\tau,u(\tau))d\tau ds \\ &+\tfrac{\theta(t)}{D}\sum_{p=1}^{m-2} b_p\int_0^{\xi_p} u(s)ds + \tfrac{\varphi(t)}{D}\sum_{p=1}^{m-2} a_p\int_0^{\xi_p} u(s)ds,\end{aligned} \tag{6.18}$$

ile tanımlı $A : P \to \mathbb{B}$ operatörünün sabit noktaları olduğunu söyleyebiliriz.

**Lemma 6.2.1.** $A : P \to P$ bir operatördür.

**İspat.** $u \in P$ olsun. Lemma 6.1.3 ve Lemma 6.1.5 kullanılırsa $[0,1]$ üzerinde $Au(t) \geq 0$ olduğu görülebilir. Diğer taraftan, Lemma 6.1.4 gözönüne alınacak olursa

$$\begin{aligned}
\min_{t\in[0,1]} Au(t) &= \min_{t\in[0,1]} \bigg( \int_0^1 G(t,s) \int_0^1 H(s,\tau) f(\tau, u(\tau)) d\tau ds \\
&+ \frac{\theta(t)}{D} \sum_{p=1}^{m-2} b_p \int_0^{\xi_p} u(s)ds + \frac{\varphi(t)}{D} \sum_{p=1}^{m-2} a_p \int_0^{\xi_p} u(s)ds \bigg) \\
&\geq z \bigg( \int_0^1 G(s,s) \int_0^1 H(s,\tau) f(\tau, u(\tau)) d\tau ds \\
&+ \frac{\theta(1)}{D} \sum_{p=1}^{m-2} b_p \int_0^{\xi_p} u(s)ds + \frac{\varphi(0)}{D} \sum_{p=1}^{m-2} a_p \int_0^{\xi_p} u(s)ds \bigg) \\
&> z\|Au\|
\end{aligned}$$

elde edilir. Buradan $Au \in P$ olduğunu ve dolayısıyla $A : P \to P$ bir operatör olduğunu söyleyebiliriz. $\square$

Bundan sonraki kısımlarda kolaylık olması için

$$M = \int_0^1 H(1,\tau) d\tau, \tag{6.19}$$

$$L = \int_0^1 G(s,s) ds, \tag{6.20}$$

$$I = \int_{\xi_{m-2}}^1 G(s,s) ds \tag{6.21}$$

ve

$$B(r) = \frac{r}{D} \bigg( (\alpha+\beta) \sum_{p=1}^{m-2} b_p \xi_p + (\gamma+\delta) \sum_{p=1}^{m-2} a_p \xi_p \bigg) \tag{6.22}$$

sayılarını tanımlayalım.

## 6.3 En Az Bir Pozitif Çözümün Varlığı

Tezimizin bu kısmında (6.1) SDP nin en az bir pozitif çözümü için dört fonksiyonel sabit nokta teoreminden yararlanacağız.

**Teorem 6.3.1.** $0 < r < \varpi \leq \mu < R$ sayıları $r \leq z\mu$ ve $\varpi \leq zR$ özelliklerini sağlayacak şekilde var olsun. Eğer $f$ fonksiyonu:

(i) $(t,u) \in [0,1] \times [r,R]$ için $f(t,u) \leq \frac{R-B(R)}{LM}$;

(ii) $(t,u) \in [0,1] \times [r,\mu]$ için $f(t,u) \geq \frac{r}{k^{\eta-3}zIM}$,

koşullarını sağlıyorsa (6.1) SDP nin $r \leq u \leq R$ olacak şekilde en az bir $u$ pozitif çözümü mevcuttur.

**İspat.** İspatta dört fonksiyonel sabit nokta teoreminden faydalanacağız.

$$\lambda(u) = \Psi(u) = \min_{t\in[0,1]} u(t),$$

$$\nu(u) = \Phi(u) = \max_{t\in[0,1]} |u(t)| = \|u\|,$$

fonksiyonellerini tanımlayalım. Bu tanımlamalarla birlikte $\lambda$ ve $\Psi$, $P$ üzerinde negatif olmayan, sürekli, konkav fonksiyoneller, $\nu$ ve $\Phi$, $P$ üzerinde negatif olmayan, sürekli, konveks fonksiyoneller olurlar. Bunun yanında her $u \in Q(\lambda, \Phi, r, R)$ için

$$\|u\| = \max_{t\in[0,1]} |u(t)| = \Phi(u) \leq R$$

olduğundan, $Q(\lambda, \Phi, r, R)$ sınırlı bir kümedir. $A : Q(\lambda, \Phi, r, R) \to P$ operatörünün tamamen sürekli olduğunu önceki bölümlerde olduğu gibi Arzelà-Ascoli teoremini kullanarak kolayca görebiliriz.

Şimdi dört fonksiyonel sabit nokta teoreminin koşullarını sağlatalım.

Tanımladığımız fonksiyonellerle birlikte

$\lambda(\varpi) = \varpi > r, \quad \Psi(\varpi) = \varpi \geq \varpi,$

$\Phi(\varpi) = \varpi < R, \quad \nu(\varpi) = \varpi \leq \mu$ eşitsizlikleri sağlanır. Buradan $\varpi \in \{u \in U(\Psi,\varpi) : \Phi(u) < R\} \cap \{u \in V(\nu,\mu) : r < \lambda(u)\}$ olduğu görülür. Böylece dört fonksiyonel sabit nokta teoreminin $(i)$ koşulu sağlanır.

$\lambda(u) = r$ ve $\nu(Au) > \mu$ olacak şekilde her $u \in Q(\lambda, \Phi, r, R)$ için

$$\lambda(Au) = \min_{t\in[0,1]} Au(t) \geq z\|Au\| = z\nu(Au) > z\mu \geq r$$

olduğu görülür. O halde dört fonksiyonel sabit nokta teoreminin $(ii)$ koşulu sağlanır.

Diğer taraftan, $\lambda(u) = r$ olacak şekilde $\forall u \in V(\nu,\mu)$ alındığında $t \in [0,1]$ için $r \leq u(t) \leq \mu$ olur. Bu durumda $(ii)$ koşulu, Lemma 6.1.4 ve Lemma 6.1.6 gözönüne alınırsa

$$
\begin{aligned}
\lambda(Au) &= \min_{t\in[0,1]}\left(\int_0^1 G(t,s)\int_0^1 H(s,\tau)f(\tau,u(\tau))d\tau ds\right. \\
&+ \left.\frac{\theta(t)}{D}\sum_{p=1}^{m-2} b_p\int_0^{\xi_p} u(s)ds + \frac{\varphi(t)}{D}\sum_{p=1}^{m-2} a_p\int_0^{\xi_p} u(s)ds\right) \\
&\geq z\int_0^1 G(s,s)\int_0^1 H(s,\tau)f(\tau,u(\tau))d\tau ds \\
&\geq z\int_{\xi_{m-2}}^1 G(s,s)\int_0^1 H(s,\tau)f(\tau,u(\tau))d\tau ds \\
&\geq k^{\eta-3}z\int_{\xi_{m-2}}^1 G(s,s)\int_0^1 H(1,\tau)f(\tau,u(\tau))d\tau ds \\
&\geq k^{\eta-3}z\frac{r}{k^{\eta-3}zIM}IM \\
&= r
\end{aligned}
$$

bulunur. Böylece dört fonksiyonel sabit nokta teoreminin $(iii)$ koşulu sağlanır.

Şimdi dört fonksiyonel sabit nokta teoreminin $(iv)$ koşulunu inceleyelim. $\Phi(u) = R$ ve $\Psi(Au) < \varpi$ için $\forall u \in Q(\lambda, \Phi, r, R)$ alınırsa,

$$
\varpi > \Psi(Au) = \min_{t\in[0,1]}(Au) \geq z\|Au\|
$$

olur. Buradan $\|Au\| < \frac{\varpi}{z}$ elde edilir. Buradan hareketle $\Phi(Au) = \|Au\| < \frac{\varpi}{z} \leq R$ olduğu görülebilir.

Son olarak dört fonksiyonel sabit nokta teoreminin $(v)$ koşulunu sağlatalım.

$\Phi(u) = R$ olacak şekilde her $u \in U(\Psi, \varpi)$ elemanı alındığında, $t \in [0,1]$ için $\varpi \leq u(t) \leq R$ olur. O halde $(i)$ kabulü, Lemma 6.1.3 ve Lemma 6.1.5 dikkate alınırsa

$$
\begin{aligned}
\Phi(Au) &= \max_{t\in[0,1]}\left(\int_0^1 G(t,s)\int_0^1 H(s,\tau)f(\tau,u(\tau))d\tau ds\right. \\
&+ \left.\frac{\theta(t)}{D}\sum_{p=1}^{m-2} b_p\int_0^{\xi_p} u(s)ds + \frac{\varphi(t)}{D}\sum_{p=1}^{m-2} a_p\int_0^{\xi_p} u(s)ds\right) \\
&\leq \int_0^1 G(s,s)\int_0^1 H(s,\tau)f(\tau,u(\tau))d\tau ds
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&+ \quad \frac{\theta(1)}{D}\sum_{p=1}^{m-2} b_p \int_0^{\xi_p} u(s)ds + \frac{\varphi(0)}{D}\sum_{p=1}^{m-2} a_p \int_0^{\xi_p} u(s)ds \\
&\leq \quad \frac{R-B(R)}{ML}ML + B(R) \\
&= \quad R
\end{aligned}
$$

olduğu görülür.

Sonuç olarak dört fonksiyonel sabit nokta teoreminin tüm koşulları sağlandığından (6.1) SDP nin $r \leq u \leq R$ olacak şekilde en az bir $u$ pozitif çözümü mevcuttur. □

## 6.4 En az İki Pozitif Çözümün Varlığı

Bu kısımda (6.1) SDP nin en az iki pozitif çözümünün varlığını inceleyeceğiz. Bunu yaparken Avery-Henderson sabit nokta teoremini kullanacağız. Öncelikle tamamen süreklilikle ilgili bir lemma verelim.

**Lemma 6.4.1.** $z$, $M$ ve $L$ sayıları sırasıyla (6.15), (6.19) ve (6.20) ile verilsin. Bu durumda, $f$ fonksiyonu için $(t,u) \in [0,1] \times [0, \frac{r}{z}]$ olduğunda $f(t,u) < \frac{K-B(\frac{r}{z})}{ML}$ şartını sağlayacak şekilde $K > B(\frac{r}{z})$ olan $K$ ve $r$ sayıları varsa, $A : \overline{P(\lambda, r)} \to P$ operatörü tamamen süreklidir.

**İspat.** Lemma 6.2.1 den $A : \overline{P(\lambda, r)} \to P$ olduğu söylenebilir. Şimdi $A$ ope- ratörünün tamamen sürekli olduğunu gösterelim. Bunun için operatörün sürekli ve kompakt olduğunu göstermeliyiz.

İlk olarak sürekliliğe bakalım. Yani, $\forall \varepsilon > 0$ için $\exists \delta' > 0$ vardır öyleki $\|u_1 - u_2\| < \delta'$ iken $\|Au_1 - Au_2\| < \varepsilon$ olduğunu görelim.

$$
\delta' = \frac{\varepsilon D}{2\left[\theta(1)\sum\limits_{p=1}^{m-2} b_p\xi_p + \varphi(0)\sum\limits_{p=1}^{m-2} a_p\xi_p\right]}
$$

seçelim. $f$ fonksiyonu sürekli olduğundan $\|u_1 - u_2\| < \delta'$ iken $|f(t,u_1) - f(t,u_2)| < \frac{\varepsilon}{2ML}$ olur. Bu takdirde

$$
\begin{aligned}
\|Au_1 - Au_2\| &= \max_{t\in[0,1]} |Au_1(t) - Au_2(t)| \\
&\leq \int_0^1 G(s,s) \int_0^1 H(1,\tau)|f(\tau,u_1(\tau)) - f(\tau,u_1(\tau))| d\tau ds
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&+ \quad \frac{\theta(1)}{D}\sum_{p=1}^{m-2} b_p \int_0^{\xi_p} |u_1(s)-u_2(s)|ds + \frac{\varphi(0)}{D}\sum_{p=1}^{m-2} a_p \int_0^{\xi_p} |u_1(s)-u_2(s)|ds \\
&< \quad \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2} \\
&= \quad \varepsilon
\end{aligned}
$$

elde edilir. O halde $A$ operatörü süreklidir.

Şimdi $A$ operatörünün kompakt olduğunu görelim.

$\forall u \in \overline{P(\lambda, r)}$ alalım. $\forall t \in [0,1]$ için $0 \leq u(t) \leq \frac{r}{z}$ olur. Bu takdirde

$$
\begin{aligned}
\|Au\| &= \max_{t\in[0,1]} \Bigg( \int_0^1 G(t,s) \int_0^1 H(s,\tau) f(\tau, u(\tau)) d\tau ds \\
&+ \frac{\theta(t)}{D}\sum_{p=1}^{m-2} b_p \int_0^{\xi_p} u(s)ds + \frac{\varphi(t)}{D}\sum_{p=1}^{m-2} a_p \int_0^{\xi_p} u(s)ds \Bigg) \\
&\leq \int_0^1 G(s,s) \int_0^1 H(s,\tau) f(\tau, u(\tau)) d\tau ds \\
&+ \frac{\theta(1)}{D}\sum_{p=1}^{m-2} b_p \int_0^{\xi_p} u(s)ds + \frac{\varphi(0)}{D}\sum_{p=1}^{m-2} a_p \int_0^{\xi_p} u(s)ds \\
&\leq \frac{K - B(\frac{r}{z})}{ML} ML + B(\frac{r}{z}) \\
&= K
\end{aligned}
$$

olur. Bu durumda $A$ operatörü aynı dereceden sınırlıdır.

Diğer taraftan $t_1, t_2 \in [0,1]$, $t_1 < t_2$ olsun. O halde

$$
\begin{aligned}
\|Au(t_1) - Au(t_2)\| &\leq \int_0^1 |G(t_1,s) - G(t_2,s)| \int_0^1 H(s,\tau) f(\tau, u(\tau)) d\tau ds \\
&+ \frac{|\theta(t_1)-\theta(t_2)|}{D}\sum_{p=1}^{m-2} b_p \int_0^{\xi_p} u(s)ds + \frac{|\varphi(t_1)-\varphi(t_2)|}{D} \\
&\times \sum_{p=1}^{m-2} a_p \int_0^{\xi_p} u(s)ds
\end{aligned}
$$

olur. Buradan $t_1 \to t_2$ için $\|Au(t_1) - Au(t_2)\| \to 0$ olduğu kolayca görülebilir. Bu takdirde $A$ operatörü aynı dereceden sürekli olur. Böylece Arzelà-Ascoli teoremi gereği $A$ operatörünün kompakt olduğunu söyleyebiliriz.

Sonuç olarak ele alınan $A : \overline{P(\lambda, r)} \to P$ operatörü tamamen süreklidir. $\square$

**Teorem 6.4.2.** $z$, $M$, $L$ ve $I$ sayıları sırasıyla (6.15), (6.19), (6.20) ve (6.21) ile, $k$ sayısı da Lemma 6.1.6 daki gibi tanımlansın. $f$ fonksiyonu için eğer,

(i) $(t,u) \in [0,1] \times [r, \frac{r}{z}]$ için $f(t,u) > \frac{r}{k^{\eta-3} zIM}$;

(ii) $(t,u) \in [0,1] \times [0,q]$ için $f(t,u) < \frac{q-B(q)}{ML}$;

(iii) $(t,u) \in [0,1] \times [zp,p]$ için $f(t,u) > \frac{p}{k^{\eta-3} zIM}$;

(iv) $(t,u) \in [0,1] \times [0, \frac{r}{z}]$ için $f(t,u) < \frac{K-B(\frac{r}{z})}{ML}$,

$0 < p < q < r$ olacak şekilde $K > B(\frac{r}{z})$ şartını sağlayan $p$, $q$, $r$ ve $K$ sayıları mevcutsa ele alınan (6.1) SDP nin

$$\|u_1\| < q \text{ ile birlikte } p < \|u_1\| \text{ ve } \min_{t\in[0,1]} u_2(t) < r \text{ ile birlikte } q < \|u_2\|$$

olacak şekilde en az iki pozitif $u_1$ ve $u_2$ çözümü vardır.

**İspat.** (6.17) ile tanımlı $P$ konisini ele alalım. Lemma 6.4.1 den $A : \overline{P(\lambda, r)} \to P$ operatörünün tamamen sürekli bir operatör olduğunu söyleyebiliriz. $P$ konisi üzerinde negatif olmayan, artan, sürekli $\lambda$, $\nu$ ve $\Phi$ fonksiyonellerini,

$$\lambda(u) = \min_{t\in[0,1]} u(t), \ \nu(u) = \Phi(u) = \max_{t\in[0,1]} u(t) = \|u\|$$

olarak tanımlayalım. Bu tanımlamalarla birlikte, herhangi bir $u \in P$ için $\lambda(u) \leq \nu(u) \leq \Phi(u)$ olur ve

$$\|u\| \leq \frac{1}{z} \min_{t\in[0,1]} u(t) = \frac{1}{z}\lambda(u)$$

sağlanır. Bununla birlikte, $\nu(0) = 0$ dır ve $\forall u \in P$ ve $\zeta \in [0,1]$ için $\nu(\zeta u) = \zeta\nu(u)$ olur.

Şimdi Avery-Henderson sabit nokta teoreminin şartlarını araştıralım.

$u \in \partial P(\lambda, r)$ seçilirse, $t \in [0,1]$ için $r \leq u(t) \leq \frac{r}{z}$ olur. Bu durumda, $(i)$, Lemma 6.1.4 ve Lemma 6.1.6 kullanılarak

$$
\begin{aligned}
\lambda(Au) &= \min_{t\in[0,1]}\Bigg(\int_0^1 G(t,s)\int_0^1 H(s,\tau)f(\tau,u(\tau))d\tau ds \\
&+ \frac{\theta(t)}{D}\sum_{p=1}^{m-2} b_p\int_0^{\xi_p} u(s)ds + \frac{\varphi(t)}{D}\sum_{p=1}^{m-2} a_p\int_0^{\xi_p} u(s)ds\Bigg) \\
&\geq z\int_0^1 G(s,s)\int_0^1 H(s,\tau)f(\tau,u(\tau))d\tau ds \\
&\geq z\int_{\xi_{m-2}}^1 G(s,s)\int_0^1 H(s,\tau)f(\tau,u(\tau))d\tau ds \\
&\geq k^{\eta-3}z\int_{\xi_{m-2}}^1 G(s,s)\int_0^1 H(1,\tau)f(\tau,u(\tau))d\tau ds \\
&\geq k^{\eta-3}z\frac{r}{k^{\eta-3}zIM}IM \\
&= r
\end{aligned}
$$

olduğu görülür. Böylece, Avery-Henderson sabit nokta teoreminin $(i)$ koşulu sağlanmış olur.

$u\in\partial P(\nu,q)$ alalım. Buradan $t\in[0,1]$ için $0\leq u(t)\leq q$ sağlanır. O halde, $(ii)$, Lemma 6.1.3 ve Lemma 6.1.5 gözönüne alınarak

$$
\begin{aligned}
\nu(Au) &= \max_{t\in[0,1]}\Bigg(\int_0^1 G(t,s)\int_0^1 H(s,\tau)f(\tau,u(\tau))d\tau ds \\
&+ \frac{\theta(t)}{D}\sum_{p=1}^{m-2} b_p\int_0^{\xi_p} u(s)ds + \frac{\varphi(t)}{D}\sum_{p=1}^{m-2} a_p\int_0^{\xi_p} u(s)ds\Bigg) \\
&\leq \int_0^1 G(s,s)\int_0^1 H(s,\tau)f(\tau,u(\tau))d\tau ds \\
&+ \frac{\theta(1)}{D}\sum_{p=1}^{m-2} b_p\int_0^{\xi_p} u(s)ds + \frac{\varphi(0)}{D}\sum_{p=1}^{m-2} a_p\int_0^{\xi_p} u(s)ds \\
&\leq \frac{q-B(q)}{ML}ML + B(q) \\
&= q
\end{aligned}
$$

bulunur. Bu takdirde, Avery-Henderson sabit nokta teoreminin $(ii)$ koşulunun sağlandığı bulunmuş olur.

$0 \in P$ ve $p > 0$ olduğundan, $P(\Phi, p) \neq \emptyset$ dir. Eğer $u \in \partial P(\Phi, p)$ olarak alırsak, $t \in [0,1]$ için $zp \leq u(t) \leq p$ sağlanır. Buradan $(iii)$ kabulünden

$$\begin{aligned}
\Phi(Au) &= \min_{t\in[0,1]} \Bigg( \int_0^1 G(t,s) \int_0^1 H(s,\tau) f(\tau, u(\tau)) d\tau ds \\
&+ \frac{\theta(t)}{D} \sum_{p=1}^{m-2} b_p \int_0^{\xi_p} u(s)ds + \frac{\varphi(t)}{D} \sum_{p=1}^{m-2} a_p \int_0^{\xi_p} u(s)ds \Bigg) \\
&\geq z \int_0^1 G(s,s) \int_0^1 H(s,\tau) f(\tau, u(\tau)) d\tau ds \\
&\geq z \int_{\xi_{m-2}}^1 G(s,s) \int_0^1 H(s,\tau) f(\tau, u(\tau)) d\tau ds \\
&\geq k^{\eta-3} z \int_{\xi_{m-2}}^1 G(s,s) \int_0^1 H(1,\tau) f(\tau, u(\tau)) d\tau ds \\
&\geq k^{\eta-3} z \frac{p}{k^{\eta-3} z I M} I M \\
&= p
\end{aligned}$$

olarak elde ederiz.

Böylece, Avery-Henderson sabit nokta teoreminin bütün koşulları sağlanır. O halde (6.1) SDP nin $u_1$ ve $u_2$ olacak şekilde en az iki pozitif çözümü mevcuttur ve bu çözümler

$$\|u_1\| < q \text{ ile birlikte } p < \|u_1\| \text{ ve } \min_{t\in[0,1]} u_2(t) < r \text{ ile birlikte } q < \|u_2\|$$

eşitsizliklerini sağlarlar. □

## 6.5 En Az Üç Pozitif Çözümün Varlığı

Tezimizin bu kısmında (6.1) SDP nin en az üç pozitif çözümünün varlığını için koşullar elde edeceğiz. Aşağıdaki teoremin ispatında Legget-Williams sabit nokta teoremi kullanılacaktır.

**Teorem 6.5.1.** $z$, $M$, $L$ ve $I$ sayıları sırasıyla (4.1), (6.19), (6.20) ve (6.21) ile tanımlı ve $k$ sayısı Lemma 6.1.6 ile verilsin. Bu durumda $f$ fonksiyonu için eğer;

(i) $(t,u) \in [0,1] \times [0,r]$ için $f(t,u) \leq \frac{r-B(r)}{ML}$;

(ii) $(t,u) \in [0,1] \times [q, \frac{q}{z}]$ için $f(t,u) > \frac{q}{k^{\eta-3} z I M}$;

(iii) $(t,u) \in [0,1] \times [0,p]$ için $f(t,u) < \frac{p-B(p)}{ML}$,

koşullarını sağlayacak şekilde $0 < p < q < \frac{q}{z} \leq r$ sayıları mevcutsa, (6.1) SDP nin en az üç pozitif $u_1$, $u_2$ ve $u_3$ çözümü vardır ve bu çözümler

$$\|u_1\| < p, \ \min_{t \in [0,1]} u_2(t) > q, \ \min_{t \in [0,1]} u_3(t) < q \text{ ile birlikte } p < \|u_3\|$$

eşitsizliklerini sağlarlar.

**İspat.** (6.17) ile tanımlı $P$ konisini alalım. $\psi : P \to [0, \infty)$ negatif olmayan, sürekli ve konkav fonksiyonelini $\psi(u) = \min_{t \in [0,1]} u(t)$ olarak tanımlayalım. Bu durumda, her $u \in P$ için $\psi(u) \leq \|u\|$ olur.

$u \in \overline{P_r}$ seçilirse, her $t \in [0,1]$ için $0 \leq u(t) \leq r$ olur. O halde, $(i)$, Lemma 6.1.3 ve Lemma 6.1.5 kullanılırsa,

$$\begin{aligned}
\|Au\| &= \max_{t \in [0,1]} \Bigg( \int_0^1 G(t,s) \int_0^1 H(s,\tau) f(\tau, u(\tau)) d\tau ds \\
&+ \frac{\theta(t)}{D} \sum_{p=1}^{m-2} b_p \int_0^{\xi_p} u(s) ds + \frac{\varphi(t)}{D} \sum_{p=1}^{m-2} a_p \int_0^{\xi_p} u(s) ds \Bigg) \\
&\leq \int_0^1 G(s,s) \int_0^1 H(s,\tau) f(\tau, u(\tau)) d\tau ds \\
&+ \frac{\theta(1)}{D} \sum_{p=1}^{m-2} b_p \int_0^{\xi_p} u(s) ds + \frac{\varphi(0)}{D} \sum_{p=1}^{m-2} a_p \int_0^{\xi_p} u(s) ds \\
&\leq \frac{r - B(r)}{ML} ML + B(r) \\
&= r
\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece, $A : \overline{P_r} \to \overline{P_r}$ olduğu söylenebilir. Ayrıca, $A : \overline{P_r} \to \overline{P_r}$ operatörünün tamamen sürekli bir operatör olduğu kolayca görülebilir.

$z < 1$ olduğundan $u(t) = \frac{q}{z} \in P(\psi, q, \frac{q}{z})$ ve $\psi(\frac{q}{z}) > q$ olur. Bu durumda

$$\{u \in P(\psi, q, \frac{q}{z}) : \psi(u) > q\} \neq \emptyset$$

olacağı görülür.

Diğer taraftan, her $u \in P(\psi, q, \frac{q}{z})$ alındığında $t \in [0,1]$ için $q \leq u(t) \leq \frac{q}{z}$ olur. Bu takdirde $(ii)$ kabulü, Lemma 6.1.4 ve Lemma 6.1.6 düşünülürse,

$$
\begin{aligned}
\psi(Au) &= \min_{t\in[0,1]}\Bigg(\int_0^1 G(t,s)\int_0^1 H(s,\tau)f(\tau,u(\tau))d\tau ds \\
&+ \frac{\theta(t)}{D}\sum_{p=1}^{m-2} b_p \int_0^{\xi_p} u(s)ds + \frac{\varphi(t)}{D}\sum_{p=1}^{m-2} a_p \int_0^{\xi_p} u(s)ds\Bigg) \\
&\geq z\int_0^1 G(s,s)\int_0^1 H(s,\tau)f(\tau,u(\tau))d\tau ds \\
&\geq z\int_{\xi_{m-2}}^1 G(s,s)\int_0^1 H(s,\tau)f(\tau,u(\tau))d\tau ds \\
&\geq k^{\eta-3}z\int_{\xi_{m-2}}^1 G(s,s)\int_0^1 H(1,\tau)f(\tau,u(\tau))d\tau ds \\
&\geq k^{\eta-3}z\frac{q}{k^{\eta-3}zIM}IM \\
&= q
\end{aligned}
$$

olarak bulunur. Bu durumda Legget-Williams sabit nokta teoreminin $(i)$ koşulu sağlanır.

$\|u\| < p$ olacak şekilde alalım. Buradan $t \in [0,1]$ için $0 \leq u(t) \leq p$ olur. O halde $(iii)$ kabulü, Lemma 6.1.3 ve Lemma 6.1.5 den

$$
\begin{aligned}
\|Au\| &= \max_{t\in[0,1]}\Bigg(\int_0^1 G(t,s)\int_0^1 H(s,\tau)f(\tau,u(\tau))d\tau ds \\
&+ \frac{\theta(t)}{D}\sum_{p=1}^{m-2} b_p \int_0^{\xi_p} u(s)ds + \frac{\varphi(t)}{D}\sum_{p=1}^{m-2} a_p \int_0^{\xi_p} u(s)ds\Bigg) \\
&\leq \int_0^1 G(s,s)\int_0^1 H(s,\tau)f(\tau,u(\tau))d\tau ds \\
&+ \frac{\theta(1)}{D}\sum_{p=1}^{m-2} b_p \int_0^{\xi_p} u(s)ds + \frac{\varphi(0)}{D}\sum_{p=1}^{m-2} a_p \int_0^{\xi_p} u(s)ds \\
&\leq \frac{p-B(p)}{ML}ML + B(p) \\
&= p
\end{aligned}
$$

olur. Bu durumda Legget-Williams sabit nokta teoreminin $(ii)$ koşulu sağlanır.

Kabul edelim ki, $\|Au\| > \frac{q}{z}$ olacak şekilde $u \in P(\psi, q, r)$ elemanı alınsın. Bu takdirde,

$$\psi(Au) = \min_{t\in[0,1]} Au(t) \geq z\|Au\| > z\frac{q}{z} = q$$

elde edilir. Böylece, Leggett-Williams sabit nokta teoreminin $(iii)$ şartı sağlanır.

Sonuç olarak, Leggett-Williams sabit nokta teoreminin tüm şartlarını sağlandığından, (6.1) SDP nin en az üç pozitif $u_1$, $u_2$ ve $u_3$ çözümü vardır ve bu çözümler

$$\|u_1\| < p,\ \min_{t\in[0,1]} u_2(t) > q,\ \min_{t\in[0,1]} u_3(t) < q \text{ ile birlikte } p < \|u_3\|$$

eşitsizliklerini sağlarlar. □

## 6.6 Örnekler

**Örnek 6.6.1.** $n = 5$, $m = 3$, $\xi_1 = \frac{1}{2}$, $\alpha = \gamma = \delta = \beta = 1$, $a_1 = b_1 = 1$, $k = \frac{1}{4}$ ve $\eta = \frac{9}{2}$ olarak alınırsa, (6.1) SDP

$$\begin{cases} -D_{0+}^{\frac{5}{2}}(u''(t)) = f(t, u(t)),\ \ t \in [0,1], \\ u''(0) = u'''(0) = 0,\ u'''(1) = 0, \\ u(0) - u'(0) = \int_0^{\frac{1}{2}} u(s)ds, \\ u(1) + u'(1) = \int_0^{\frac{1}{2}} u(s)ds \end{cases} \tag{6.23}$$

şeklini alır. Buradan gerekli hesaplamalar yapılarak $M = \frac{16}{45\sqrt{\pi}}$, $L = \frac{13}{18}$, $I = \frac{13}{36}$, $z = 0.5$, $D = 3$ ve $k^{\eta-3} = k^{\frac{3}{2}} = 0.125$ olarak bulunur. $f$ sürekli fonksiyonunu

$$f(t, u(t)) = \frac{560u^2}{1+u^2}$$

olacak şekilde tanımlayalım.

Eğer $r = 0.5$, $\varpi = \mu = 1$ ve $R = 300$ seçilirse, $r \leq z\mu$, $\varpi \leq zR$ ve $B(R) = 200$ olur. Bu takdirde $0 < r < \varpi \leq \mu < R$ olur ve Teorem 6.3.1 in bütün şartları sağlanır. Bu nedenle, (6.23) SDP en az bir pozitif çözüme sahiptir.

$p = 0.0003$, $q = 0.5$ ve $r = 300$ alınırsa, $B(r) = 200$ ve $B(p) = 0.0002$ olarak bulunur. Bu durumda $0 < p < q < \frac{q}{z} \leq r$ olur ve Teorem 6.5.1 in tüm koşulları sağlanır. O halde (6.23) SDP nin $u_1$, $u_2$ ve $u_3$ olacak şekilde en az üç pozitif çözümü vardır ve bu çözümler

$$\|u_1\| < p,\ \min_{t\in[0,1]} u_2(t) > q,\ \min_{t\in[0,1]} u_3(t) < q \text{ ile birlikte } p < \|u_3\|$$

eşitsizliklerini sağlarlar.

$0 \leq g(u) \leq 45$, $g(0.18) = 0.4$ ve $g(0.2) = 45$ özelliklerini sağlayan $g(u)$ sürekli fonksiyonu olmak üzere (6.23) SDP için

$$f(t,u(t)) = \begin{cases} 0.4, & t \in [0,1],\ u \in [0, 0.18], \\ g(u), & t \in [0,1],\ u \in [0.18, 0.2], \\ 45, & t \in [0,1],\ u \in [0.18, 0.2], \end{cases}$$

fonksiyonunu ele alalım. $p = 0.0016$, $q = 0.18$, $r = 0.2$ ve $K = 40$ seçimleri yapılırsa, $B(q) = 0.12$ ve $B(\frac{r}{z}) \approx 0.26666$ olarak bulunur. Böylece $0 < p < q < r$ olur ve Teorem 6.4.2 deki şartlar sağlanır. Dolayısıyla (6.23) SDP en az iki pozitif $u_1$ ve $u_2$ çözümüne sahiptir ve bu çözümler

$$\|u_1\| < q \text{ ile birlikte } p < \|u_1\| \text{ ve } \min_{t\in[0,1]} u_2(t) < r \text{ ile birlikte } q < \|u_2\|$$

eşitsizliklerini sağlarlar.

# 7. SONUÇ

Bu tez çalışmasında yüksek mertebe çoklu nokta sınır değer problemlerinin pozitif çözümleri ile ilgili sonuçlar elde edilmiştir.

Wang ve Ge (2007) ve Yaslan (2013) çalışmalarından hareketle ilk olarak, zaman skalası üzerinde yüksek mertebe çoklu nokta sınır değer problemi ele alınmıştır. Bu problem için en az bir ve en az üç pozitif çözümleri için varlık koşulları sırasıyla Krassnosel'skii sabit nokta teoremi ve Leggett-Williams sabit nokta teoremi yardımıyla ispatlanmıştır.

İkinci olarak, Nymoradi ve Javidi (2012) çalışmasından yararlanarak, yüksek mertebe çoklu nokta kesirli sınır değer problemi ele alınarak en az bir ve en az üç pozitif çözümlerinin varlığı için yeter koşullar oluşturulmuştur. Burada Krassnosel'skii sabit nokta teoremi ve Leggett-Williams sabit nokta teoremi kullanılmıştır.

Üçüncü olarak, Wang ve Zhang (2014) çalışmasından esinlenerek, yüksek mertebe çoklu nokta kesirli integral sınır koşullu bir sınır değer problemi çalışılmıştır. Bu problem için, en az bir pozitif çözümün varlık koşulları sabit nokta indeks teorisi yardımıyla, en az iki pozitif çözümün varlık koşulları Avery-Henderson sabit nokta teoremi yardımıyla ve en az üç pozitif çözümün varlık koşulları Leggett-Williams sabit nokta teoremi yardımıyla gösterilmiştir.

Son bölümde ise benzer şekilde farklı bir yüksek mertebe çoklu nokta kesirli integral sınır koşullu sınır değer problemi incelenmiş ve bu incelemede en az bir, en az iki ve en az üç pozitif çözümün varlığı elde edilmiştir. Bu problemin en az bir pozitif çözümünün varlığı dört fonksiyonel sabit nokta teoremi yardımıyla, en az iki pozitif çözümünün varlığı Avery-Henderson sabit nokta teoremi yardımıyla ve en az üç pozitif çözümünün varlığı Leggett-Williams sabit nokta teoremi yardımıyla gösterilmiştir.

# 8. KAYNAKLAR


Ahmad, B. and Nieto, J., "Existence of solutions for nonlocal boundary value problems of higher-order nonlinear fractional differential equation", *Abst. Appl. Anal.,* 2009, Article ID: 494720, 9 pages, (2009).

Ahmad, B. and Ntouyas, S. K., "A note on fractional differential equations with fractional separated boundary value conditions", *Abst. Appl. Anal.*, 2012, (2012).

Ahmad, B. and Ntouyas, S. K., "Existence results for higher-order fractional differential inclusions with Riemann-Stieltjes type integral boundary conditions", *Commun. Appl. Anal.*, 17, 87-98, (2013).

Anderson, D. R. and Avery, R. I., "An even order three point boundary value problem on time scales", *J. Math. Anal. Appl.*, 291, 514-525, (2004).

Anderson, D. R., Guseinov, G. S. and Hoffacker, J., "Higher order self adjoint boundary value problems on time scales", *J. Comput. Appl. Math.*, 194, 309-342, (2006).

Anderson, D. R. and Karaca, I. Y., "Higher-order three point boundary value problem on time scales", *Comput. Math. Appl.*, 56, 2429-2443, (2008).

Avery, R. I. and Henderson, J., "Two positive fixed points of nonlinear operators on ordered Banach spaces", *Comm. Appl. Nonlinear Anal.*, 8, 27-36, (2001).

Avery, R. I., Henderson, J. and O'Regan, D., "Four functional fixed point theorem", *Math. Comput. Modelling*, 48, 1081-1089, (2008).

Benchohra, M., Graef, J. R. and Hamani, S., "Existence results for boundary value problems with nonlinear fractional differential equations", *Applicable Anal.*, 87, 851-863, (2008).

Bohner, M. and Peterson, A., *Dynamic Equations on Time Scales: An Introduction with Applications*, Boston: Birkhauser, (2001).

Bohner, M. and Peterson, A. (Eds.), *Advances in Dynamic Equations on Time Scales*, Boston: Birkhauser, (2003).

Cabada, A. and Wang, G., "Positive solutions of nonlinear fractional differential equations with integral boundary conditions", *J. Math. Anal. Appl.*, 389, 403-411, (2012).

Chyan, C. J. and Henderson, J., "Positive solutions of 2mth-order boundary value problem", *Appl. Math. Lett.*, 15, 767-774, (2002).

Deimling, K., *Nonlinear Functional Analysis*, New York: Springer-Verlag, (1985).

Dogan, A., Graef, J. R. and Kong L., "Higher order semipositon multipoint boundary value problems on time scales", *Comput. Math. Appl.*, 60, 23-35, (2010).

Dogan, A., "Existence of multiple positive solutions for p-Laplacian multipoint boundary value problems on time scales", *Adv. Differ. Equ.*, 2013 (238), 1-23, (2013).

El-Shahed, M., "Positive solutions for boundary value problems of nonlinear fractional differential equations", *Abst. Appl. Anal.*, 2007, (2007).

Feng, W., "On a m-point boundary value problem. Proceeding of the second world congress of nonlinear analysts", *Nonlinear Anal.*, 30, 5369-5374, (1997).

Ghanbari, K. and Gholami, Y., "Existence and multiplicity of positive solutions for m-point nonlinear fractional differential equations on the half line", *Electron. J. Differential Equations*, 2012 (238), 1-15, (2012).

Graef, J. R., Kong, L. and Yang, B., "Positive solutions for a semipositone fractional boundary value problem with a forcing term", *Fract. Calc. Appl. Anal.*, 15, 8-24, (2012).

Graef, J. R., Kong, L., Kong, Q. and Wang, M., "Uniqueness of positive solutions of fractional boundary value problems with non-homogeneous integral boundary conditions", *Fract. Calc. Appl. Anal.*, 15, 509-528, (2012).

Graef, J. R. and Kong, L., "Existence of positive solutions to a higher order singular boundary value problem with fractional Q-derivatives", *Fract. Calc. Appl. Anal.*, 16, 695-708, (2013).

Graef, J. R. and Yang, B., "Positive solutions to a multi point higher order boundary value problems", *J. Math. Anal. Appl.*, 316, 409-421, (2006).

Guo, D. and Lakshmikantham, V., *Nonlinear Problems in Abstract Cones*, San Diego: Academic Press, (1988).

Guo, Y., Ji, Y. and Zhang, J., "Three positive solutions for a nonlinear nth-order m-point boundary value problems", *Nonlinear Anal.*, 68, 3485-3492, (2008).

Guo, Y. and Trian, J., "Positive solutions of m-point boundary value problem for higher order ordinary differential equations", *Theory, Methods and Appl.*, 66, 1573-1586, (2007).

Guo, Y., Liu, X. and Qiu, J., "Three Positive solutions for higher order m-point boundary value problem", *J. Comput. Appl. Math.*, 289, 545-553, (2004).

Guo, Y., Shan, W. and Ge, W., "Positive solutions for second order m-point boundary value problems", *J. Comput. Appl. Math.*, 151, 415-424, (2003).

Gupta, C. P., "Solvability of a three point nonlinear boundary value problem for a second order ordinary differential equation", *J. Math. Anal. Appl.*, 168, 540-551, (1992).

Hamal, N. and Yörük, F., "Positive solutions of nonlinear m-point boundary value problem on time scales", *J. Comput. Appl. Math.*, 231, 92-105, (2009).

Han, W. and Kao, Y., "Existence and uniqueness of nontrivial solutions for nonlinear higher order three point eigen value problems on time scales", *Electron. J. Diff. Equ.*, 1-15, (2008).

Hilger, S., "Analysis on measure chains-A unifed approach to continıous and discrete calculus", *Result Math.*, 18, 18-56, (1990).

Hilger, S., "Ein mabkettenkalkül mit anvendung auf zentrumsman nigfaltigkeiten", Ph.D. Thesis, Universitat Würzburg, (1988).

Hu, L. G. and Zhau, X. F., "Positive solutions of the singular eigen value problem for a higher-order differential equations on time scales", *Math. Comput. Modelling*, 53, 667-677, (2011).

Il'in, V. A. and Moiseev, I., "A nonlocal boundary value problem of the second kind for the Sturm-Liouville operator", *Differentsial'nye Uravneniya*, 23, 1422-1431, (1987).

Il'in, V. A. and Moiseev, I., "A nonlocal boundary value problem of the first kind for the Sturm-Liouville operator in differential and difference interpretations", *Differentsial'nye Uravneniya*, 23, 1198-1207, (1987).

Jia, M., Liu, X. and Gu, X., "Uniqueness and asymtotic behavior of positive solutions for fractional-order integral boundary value problem", *Abstr. Appl. Anal.*, 2012, (2012).

Jiang, J. and Liu, L., "Positive solutions for nonlinear second-order m-point boundary value problems", *Electron. J. Diff. Equ.*, 110, 1-12, (2009).

Jiang, W., "Multiple positive solutions for n th order m-point boundary value problem with all derivatives", *Nonlinear Anal.*, 68, 1064-1072, (2008).

Jin, J., Liu, X. and Jia, M., "Existence of positive solutions for singular fractional differential equations with integral boundary conditions", *Electron. J. Differential Equations*, 2012, 1-14, (2012).

Karaca, I. Y. and Tokmak, F., "Eigen values for iterative systems of nnlinear m-point boundary value problems on time scales", *Bound. Value Probl.*, 2014 (63), 1-17, (2014).

Kilbas, A. A., Srivastava, H. M. and Trujillo, J. J., *Theory and Applications of Fractional Differential Equations*, Amsterdam: Elsevier, (2006).

Lan, K. Q., "Multiple positive solutions of semilinear differential equations with sigularities", *J. London Math. Soc.*, 63, 690-704, (2001).

Legget, R. W. and Williams, L. R., "Multiple positive fixed points of nonlinear operators on ordered Banach spaces", *Indiana Univ. Math. J.*, 28, 673-688, (1979).

Liang, S., Zhang, J. and Wang, Z., "The existence of three positive solutions of m-point boundary value problem for some dynamic equations on time scales", *Math. and Comput. Modelling*, 49, 1386-1393, (2009).

Liang, S. and Zhang, J., "Existence of multiple positive solutions for m-point fractional boundary value problems on an infinite interval", *Math. Comput. Modelling*, 54, 1334-1346, (2011).

Liang, S. and Song, Y., "Existence and uniqueness of positive solutions to nonlinear fractional differential equation with integral boundary conditions", *Lithuanian Math. J.*, 52, 62-76, (2012).

Liu, B., "Positive solutions of a nonlinear three point boundary value problems", *Comput. and Math. A.*, 44, 201-211, (2002).

Liu, X., Qiu, J. and Guo, Y., "Three positive solutions for second order m-point boundary value problems", *Appl. Math. Comput.*, 156, 733-742, (2004).

Liu, Y. and Zhang, W., "Positive solution for second order multi-point boundary value problem at resonance", *Fixed Point Theory*, 15, 155-166, (2014).

Luca, R., "On a higher-order m-point boundary value problem", *Fixed Point Theory*, 13, 137-145, (2012).

Luca, R., "Positive solutions for a higher-order m-point boundary value problem", *Mediterr. J. Math.*, 9, 379-392, (2012).

Ma, R., "Multiple positive solutions for nonlinear m-point boundary value problems", *J. Appl. Math. Comput.*, 148, 249-262, (2004).

Ma, R., "Positive solutions for second order three point boundary value problems", *Appl. Math. Letters*, 14, 1-5, (2001).

Moshinsky, M., "Sobre los problemas de condiciones a la frontiera en una dimension de caracteriticas discontinuas", *Bol. Soc. Mat. Mexicana*, 7, 1-25, (1950).

Nymoradi, N. and Javidi, M., "Positive solutions for fractional differential equations with p-Laplacian", *J. Nonlinear Anal. Optim.*, 3, 239-253, (2012).

Oldman, K. B. and Spanier, J., *Fractional Calculus: Theory and Applications, Differentiation and Integration to Arbitrary Order,* New York: Academic Press, (1974).

Rudin, W., *Principles of Mathematical Analysis,* McGraw Hill: International series in pure and applied mathematics, (1976).

Sabatier, O. P., Agrawal, J. A. and Machado, T., *Advances in Fractional Calculus*, Dordrecht: Springer, (2007).

Samko, S. G., Kilbas, A. A. and Marichev, O. I., *Fractional Integral and Derivatives: Theory and Applications*, Yverdon, Switzerland: Gordon and Breach, (1993).

Su, X. and Zhang, Z., "Solutions to Boundary value problems for nonlinear differential equations of fractional order", *Electron. J. Differential Equations*, 2009 (26), 1-15, (2009).

Sun, W., and Wang, Y., "Multiple positive solutions of nonlinear fractional differential equations with integral boundary value conditions", *Fract. Calc. Appl. Anal.*, 17, 605-616, (2014).

Sun, J. P. and Zhao, H., "Multiplicity of positive solutions of a class of nonlinear fractional differential equations", *Comput. Math. Appl.*, 49, 73-80, (2005).

Timoshenko, S.,*Theory of Elastic Stability*, New York: McGraw-Hill, (1961).

Tokmak, F. and Karaca, I. Y., "Existence of symmetric positive solutions for a multipoint boundary value problem with sing-changing nonlinearity on time scales", *Bound. Value Prob.*, 2013 (52), 1-12, (2013).

Wang, L. and Zhang, X., "Existence of positive solutions for a class of higher-order nonlinear fractional differential equations with integral boundary conditions and a parameter", *J. Appl. Math. Comput.*, 44, 293-316, (2014).

Wang, Y. and Ge, W., "Existence of multiple positive solutions for even order multi-point boundary value problems", *Georgian Math. J.*, 24, 775-792, (2007).

Wang, Y., Tang, Y. and Zhao, M., "Multiple rositive solutions for a nonlinear 2n-th order m-point boundary value problems", *Electron. J. Qualitative The. Diff. Equa.*, 39, 1-13, (2010).

Wang, J. and Xu, F., "Nontrivial solutions for nonlinear higher order multipoint boundary value problem on time scales with all derivatives", *Appl. Math. Sci.*, 3, 2349-2358, (2009).

Wei, Z., "Positive solutions for 2nth-order singular sublinear m-point boundary value problems", *Appl. Math. Comput.*, 182, 1280-1295, (2006).

Wong, S., "Positive solutions of singular fractional equations with integral boundary value conditions", *Math. Comput. Modelling*, 57, 1053-1059, (2013).

Yang, W., "Positive solutions for nonlinear Caputo fractional differential equations with integral boundary conditions", *J. Appl. Math. Comput.*, 44, 39-59, (2014).

Yang, Z., "Existence and uniqueness of positive solutions for a higher order boundaryvalue problems", *Comput. Math. Appl.*, 54, 220-228, (2007).

Yaslan, I., "Higher order m-point boundary value problems on time scales", *Comput. Math. Appl.*, 63, 739-750, (2012).

Yaslan, I., "Existence of positive solutions for even order m-point boundary value problems on time scales", *Electron. J. Diff. Equ.*, 2013, 1-12, (2013).

Zhang, K., and Xu, J., "Unique positive solution for a fractional boundary value problem", *Fract. Calc. Appl. Anal.*, 16, 937-948, (2013).

Zhang, W., "Positive solutions for multipoint boundary value problem of fractional differential equations", *Abst. Appl. Anal.*, 2010, (2010).

Zhang, X., Feng, M. and Ge, W., "Multiple positive solutions for a class of m-point boundary value problems", *Appl. Math. Letters*, 22, 12-18, (2009).

Zhang, X., Wang, L. and Sun, Q., "Existence of positive solutions for a class nonlinear fractional differential equations with integral boundary conditions and a parameter", *Appl. Math. Comput.*, 226, 708-718, (2014).

Zhao, C., "Existence and uniqueness of positive solutions to higher-order nonlinear fractional differential equation with integral boundary conditions", *Electron. J. Differential Equations*, 2012, 1-11, (2012).

# 9. ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı : Mustafa GÜNENDİ

Doğum Yeri ve Tarihi : Acıpayam 10.02.1987

Lisans Üniversite : Pamukkale Üniversitesi

Y. Lisans Üniversite : Pamukkale Üniversitesi

Elektronik posta : mustafa_87875@hotmail.com

İletişim Adresi :Yenice M. Şehit Hasan Karakılınç C. No:39 Serinhisar/Denizli

**Yayın Listesi :**

• Günendi, M. and Yaslan, İ., "Higher order nonlinear dynamic systems on time scales", Georgian Math. J., 23 (2) 211-220, (2016).

• Günendi, M. and Yaslan, İ., "Positive solutions of higher-order nonlinear multi-point fractional equations with integral boundary conditions", Fract. Calc. Appl. Anal.,19 (4) 989-1009, (2016).

• Günendi, M. and Yaslan, İ., "Positive solutions for even-order multi-point boundary value problems on time scales", Fixed Point Theory, accepted.