KUVVETLİ VE MUTLAK TOPLANABİLME ÜZERİNE

Gülseli ERMEZ

Temmuz 2006

DENİZLİ

KUVVETLİ VE MUTLAK TOPLANABİLME ÜZERİNE

Pamukkale Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Yüksek Lisans Tezi
Matematik Anabilim Dalı

Gülseli ERMEZ

Danışman: Prof. Dr. Mehmet Ali SARIGÖL

Temmuz 2006
DENİZLİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ ONAY FORMU

Gülseli ERMEZ tarafından Prof. Dr. Mehmet Ali SARIGÖL yönetiminde hazırlanan "Kuvvetli ve Mutlak Toplanabime Üzerine" başlıklı tez tarafımızdan okunmuş, kapsamı ve niteliği açısından bir Yüksek Lisans Tezi olarak kabul edilmiştir.

Prof. Dr. Mehmet Ali SARIGÖL
Jüri Başkanı

Doç. Dr. Murat ALP
Jüri Üyesi

Doç. Dr. Sadulla JAFAROV
Jüri Üyesi

Pamukkale Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun ...../...../2006 tarih ve .... sayılı kararıyla onaylanmıştır.

Prof. Dr. Mehmet Ali SARIGÖL
Müdür

TEŞEKKÜR

Bu çalışmanın hazırlanmasında bana destek olan aileme, gerekli bütün imkanları sağlayarak benden her zaman yakın ilgi ve yardımlarını esirgemeyen değerli hocam Prof. Dr. M. Ali SARIGÖL'e ve Pamukkale Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik bölümündeki tüm öğretim elemanlarına teşekkürlerimi sunmayı bir borç bilirim.

Gülseli ERMEZ

Bu tezin tasarımı, hazırlanması, yürütülmesi, araştırmalarının yapılması ve bulgularının analizlerinde bilimsel etiğe ve akademik kurallara özenle riayet edildiğini; bu çalışmanın doğrudan birincil ürünü olmayan bulguların, verilerin ve materyallerin bilimsel etiğe uygun olarak kaynak gösterildiğini ve alıntı yapılan çalışmalara atfedildiğini beyan ederim.

İmza:

Öğrenci Adı Soyadı: Gülseli Ermez

ÖZET

KUVVETLİ VE MUTLAK TOPLANABİLME ÜZERİNE

Ermez, Gülseli
Yüksek Lisans Tezi, Matematik ABD
Tez Yöneticisi:Prof. Dr. M. Ali SARIGÖL

Temmuz 2006, 41 Sayfa

Bu çalışma dört bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölümde, sonraki bölümlerde kullanılacak olan temel tanım ve teoremler verilmiştir.

İkinci bölümde, mutlak toplanabilme, üçüncü bölümde kuvvetli toplanabilme ele alınmıştır.

Dördüncü bölümde ise adi, mutlak ve kuvvetli toplanabilme arasındaki ilişkileri ortaya koyan teoremler ve sonuçlar ortaya konulmuştur.

Anahtar kelimeler: Kuvvetli toplanabilme, mutlak toplanabilme, Cesáro matrisleri, Hausdorff matrisleri, Hölder matrisleri.

Prof. Dr. M. Ali SARIGÖL
Doç. Dr. Murat ALP
Doç. Dr. Sadulla JAFAROV

ABSTRACT

ON STRONG AND ABSOLUTE SUMMABILITY

Ermez, Gülseli
M. Sc. Thesis in Mathematics
Supervisor: Prof. Dr. M. Ali SARIGÖL

July 2006, 41 Pages

This thesis consists of four chapters.

In the first chapter, some definitions and theorems that will be used in the other chapters are stated.

In the second chapter absolute summability, in the third chapter strong summability have been examined.

In the fourth chapter relations between ordinary summability, absolute summability and strong summability have been given.

Keywords: Strong summability, absolute summability, Cesáro matrices, Hausdorff matrices, Hölder matrices.

Prof. Dr. M. Ali SARIGÖL
Assoc. Prof. Dr. Murat ALP
Assoc. Prof. Dr. Sadulla JAFAROV

İÇİNDEKİLER

1.BİRİNCİ BÖLÜM

Bu bölümde, daha sonraki bölümlerde kullanılan temel tanım ve teoremler verilecektir.

1.1.Temel Tanım ve Teoremler

Tanım 1.1.1:

Cesáro matrisi, $\lambda > 0,\ \ \alpha > -1,\ \gamma$ reel bir sayı ve $\varepsilon_n^{\gamma} = \binom{n+\gamma}{n},\ \ s_n = \sum_{r=0}^{n} a_r$ olmak üzere

$$C_\alpha(s_n) = s_n^\alpha = \frac{1}{\varepsilon_n^\alpha}\sum_{r=0}^{n}\varepsilon_{n-r}^{\alpha-1}s_r$$

dönüşümü ile tanımlanır (Borwein 1959).

Tanım 1.1.2:

$s_n^\alpha \to s$ ise $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ serisi s ye (C,α) toplanabilirdir denir(Borwein 1959).

Tanım 1.1.3:

Eğer

$$\frac{1}{n+1}\sum_{r=0}^{n}\left|s_r^\alpha - s\right|^\lambda = o(1)$$

ise $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ serisi s ye λ indisiyle $(C,\alpha+1)$ kuvvetli toplanabilirdir veya $[C,\alpha+1]_\lambda$ toplanabilirdir denir (Borwein 1959).

Tanım 1.1.4:

Eğer

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{\gamma\lambda+\lambda-1}\left|s_n^{\alpha}-s_{n-1}^{\alpha}\right|<\infty$$

ise $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ serisi s ye γ, λ indisiyle (C,α) mutlak toplanabilirdir veya $|C,\alpha,\gamma|_{\lambda}$ toplanabilirdir denir (Borwein 1959).

$[C,\alpha+1]_{\lambda}$ ve $|C,\alpha,\gamma|_{\lambda}$ toplanabilme yöntemleri sırasıyla $[C_1,C_{\alpha}]_{\lambda}$ ve $|C_{\alpha},\gamma|_{\lambda}$ şeklinde de gösterilebilir.

Tanım 1.1.5:

$Q=(q_{n,r})$ reel veya kompleks terimli sonsuz matris olsun ve (s_n) dizisi verilsin. $s_n \to s$ olduğunda $Q(s_n)=\sigma_n=\sum_{r=0}^{\infty} q_{n,r}s_r$ $(n=0,1,2,...)$ serisi yakınsak ve

$$\sigma_n \to s$$

oluyorsa Q dönüşümü (matrisi) regülerdir denir (Hardy 1949).

Teorem 1.1.6 (Toeplitz Teoremi):

$Q=(q_{n,r})$ matrisinin regüler olması için gerek ve yeter şart

i) $\forall n \in \mathrm{IN}$ için

$$\sum |q_{n,r}|<H$$

olacak şekilde H sayısı vardır.

ii) Her r için, $n\to\infty$ olduğunda

$$q_{n,r}\to 0$$

dır.

iii) $n\to\infty$ için

$$q_n=\sum q_{n,r}\to 1$$

olmasıdır (Hardy 1949).

Teorem 1.1.7:

$Q=(q_{n,r})$ sonsuz matrisi ve (s_n) dizisi verilsin. $\sigma_n=\sum_{r=0}^{\infty} q_{n,r}s_r \ (n=0,1,2,...)$ serisi yakınsak ve $s_r \to 0$ olduğunda $\sigma_n \to 0$ olması için gerek ve yeter şart $q_{n,r} \to 0$ $(r=0,1,2,...)$ ve $\forall n \in IN$ için

$$\sum_{r=0}^{\infty} |q_{n,r}| < H$$

olacak şekilde H sayısının mevcut olmasıdır (Hardy 1949).

Teorem 1.1.8:

$\lambda \geq 1$ ve $\alpha > 0$ olsun. Bu taktirde herhangi bir serinin bir s değerine $[C,\alpha]_\lambda$ toplanabilir olması için gerek ve yeter şart aynı s değerine (C,α) toplanabilir ve

$$\sum_{r=0}^{n} r^\lambda \left|s_r^\alpha - s_{r-1}^\alpha\right|^\lambda = o(n)$$

olmasıdır. (Hyslop 1951).

Tanım 1.1.9 (Abel toplanabilirliği):

Eğer $0<t<1$ için $\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$ serisi yakınsak ve

$$\lim_{t\to 1} \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n = s < \infty$$

ise bu taktirde $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ serisi s ye Abel toplanabilirdir denir ve A ile gösterilir.

Teorem 1.1.10:

$\mu > 1,\ \alpha > -1/\mu,\ \beta > \alpha - 1/\mu'$ ve $1/\mu + 1/\mu' = 1$ olsun. $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ serisi $|C,\alpha|_\mu$ toplanabilir ise bu taktirde A toplanabildiği her zaman (C,β) toplanabilirdir (Flett 1956).

P ve Q toplanabilme metodları olmak üzere

$$P \Rightarrow Q$$

gösterimi s ye P toplanabilen her seri, s ye Q toplanabilirdir anlamında kullanılır. Bu duruma aynı zamanda Q, P yi kapsar da denir. Eğer her iki metot birbirini kapsıyorsa bu metotlara denk metotlar denir ve $P \cong Q$ ile gösterilir.

Tanım 1.1.11:

(ξ_n) reel bir dizi;

$$X_{n,r} = \begin{cases} \binom{n}{r} \sum_{v=0}^{n-r} (-1)^v \binom{n-r}{v} \xi_{r+v} & , \ 0 \le r \le n \text{ ise} \\ 0 & , \text{ diğer durumlarda} \end{cases}$$

olsun ve $(X_{n,r})$ matrisini (h, ξ_n) ile gösterelim. Bu tipteki matrislere reel Hausdorff matrisleri denir (Borwein, 1959).

$X = (h, \xi_n)$, $Y = (h, \eta_n)$ olsun. Bu durumda

$$XY = YX = (h, \xi_n \eta_n)$$

olur. Sonuç olarak $\xi_n \neq 0$ olduğunda $X^{-1} = (h, 1/\xi_n)$ olur. Bu durumda $X \Rightarrow Y$ olması için gerek ve yeter şart YX^{-1} in regüler olmasıdır.

Ayrıca X in regüler olması için gerek ve yeter şart

$$\xi_n = \int_0^1 t^n d\chi(t)$$

olmasıdır. Burada $\chi(t)$, $[0,1]$ aralığında sınırlı salınımlı reel bir fonksiyon öyle ki

$$\chi(0+) = \chi(0) = \chi(1) - 1$$

...(1)

ve ξ_0 için $0^0 = 1$ dır.

Öte yandan $C_k = (h, 1/\varepsilon_n^k)$ $(k > -1)$ ve

$$C_\alpha C_\beta \cong C_{\alpha+\beta} \quad (\alpha > -1, \beta > -1, \alpha + \beta > -1)$$

...(2)

dir (Hardy 1949).

Tanım 1.1.12:

$(H,1)$ matrisi, $(C,1)$ matrisi ile aynıdır. Her k $(k = 1,2,...)$ için (H,k) matrisi $(H,1)$'in kendi kendisiyle k defa çarpımı olarak tanımlanır.

Her α reel sayısı için $\left(h,(n+1)^{-\alpha}\right)$ Hausdorff matrisine karşılık gelen toplanabilme metoduna Hölder metodu denir ve H_α veya (H,α) ile gösterilir.

Buna göre $(H,1) = (C,1)$ ve $(H,\alpha).(H,\beta) = (H,\alpha+\beta)$ olduğu açıktır.

Teorem 1.1.13:

$\alpha > -1$ için (C,α) ve (H,α) toplanabilme yöntemleri denktir (Hardy 1949), yani

$$(C,\alpha) \cong (H,\alpha)$$

dır.

Teorem 1.1.14:

$\phi(t) \in L^p(0,1)$, $p > 1$, $(x_{n,r})$ bir Hausdorff matrisi olmak üzere

$$\xi_n = \int_0^1 t^c \phi(t) dt$$

olması için gerek ve yeter şart

$$(n+1)^{p-1} \sum_{r=0}^{n} |x_{n,r}|^p < H^p$$

olmasıdır. Burada H, n den bağımsızdır (Hardy 1949).

Teorem 1.1.15 (Stirling Formülü):

z kompleks sayı olmak üzere pozitif reel eksen üzerinde $z \to \infty$ için

$$\Gamma(z+1) \approx \sqrt{2\pi}\, z^{z+1/2} e^{-z}$$

dir.

Stirling Formülünde her iki tarafın logaritması alınırsa

$$\log \Gamma(z+1) \approx \frac{1}{2}\log 2\pi + \left(z + \frac{1}{2}\right)\log z - z$$

bulunur. $\alpha > -1$ ve $s = \sigma + i\tau$, $\sigma > -\alpha - 1 = c$, $c < 0$

$$\theta(s)=\frac{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(s+1)}{\Gamma(\alpha+s+1)}(s+1)^{\alpha}$$

olmak üzere

$$\log\Gamma(z+1)\approx\frac{1}{2}\log 2\pi+\left(z+\frac{1}{2}\right)\log z-z$$

formülünde yeterince büyük $|s|$ için $\sigma>c$ olduğunda z yerine $s+\alpha$ alınırsa

$$\log\Gamma(\alpha+s+1)\approx\frac{1}{2}\log 2\pi+\left(s+\alpha+\frac{1}{2}\right)\log(s+\alpha)-(s+\alpha)$$

elde edilir.

$$\left(s+\alpha+\frac{1}{2}\right)\log(s+\alpha)-(s+\alpha)\approx\left(s+\alpha+\frac{1}{2}\right)\log(s+1)-(s+1)$$

olduğundan

$$\log\Gamma(\alpha+s+1)=\left(s+\alpha+\frac{1}{2}\right)\log(s+1)-(s+1)+\frac{1}{2}\log 2\pi+o\left(\frac{1}{|s|}\right)$$

bulunur. Bu durumda $\sigma>c$ olduğunda yeterince büyük $|s|$ için

$$\log\frac{\Gamma(s+1)}{\Gamma(\alpha+s+1)}=-\alpha\log(s+1)+o\left(\frac{1}{|s|}\right)$$

olur. Şu halde

$$\theta(s)=\Gamma(\alpha+1)\left\{1+o\left(\frac{1}{|s|}\right)\right\}$$

elde edilir (Rogosinski 1942).

Teorem 1.1.16:

$t^{2c+1}\phi'^{2}(t)\in L$ olmak üzere

$$F(z)=\int_0^1 t^z\phi'(t)dz \qquad (\Re z>c)$$

şeklinde tanımlanan F(z) fonksiyonlarının sınıfı M_c olsun. Bu durumda M_c, $\Re z>c$ için regüler olan ve

$$\int_{-\infty}^{\infty}|F(z)|^2\,dy=\int_{-\infty}^{\infty}|F(x+iy)|^2\,dy\le c \qquad (x>c)$$

eşitsizliğini sağlayan F(z) fonksiyonlar sınıfı ile aynıdır (Rogosinski 1942).

Tanım 1.1.17 (Hölder Eşitsizliği):

$p>1,\ \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1,\ a_1,a_2,...,a_n \geq 0$ ve $b_1,b_2,...,b_n \geq 0$ olsun. Bu durumda

$$\sum_{k=1}^{n} a_k b_k \leq \left(\sum_{k=1}^{n}(a_k)^p\right)^{1/p}\left(\sum_{k=1}^{n}(b_k)^q\right)^{1/q}$$

olur.

Tanım 1.1.18 (Minkowski Eşitsizliği):

$p \geq 1,\ a_1,a_2,...,a_n \geq 0$ ve $b_1,b_2,...,b_n \geq 0$ olsun. Bu durumda

$$\left(\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k)^p\right)^{1/p} \leq \left(\sum_{k=1}^{n}(a_k)^p\right)^{1/p}+\left(\sum_{k=1}^{n}(b_k)^p\right)^{1/p}$$

olur.

$Q=(q_{n,r}),\ (n,r=0,1,2,...)$ bir sonsuz matris ve $s_n=\sum_{r=0}^{n} a_r$ olmak üzere her $n \in IN$ için

$$\sigma_n = Q(s_n)=\sum_{r=0}^{\infty} q_{n,r}s_r$$

serisi yakınsak olsun.

Tanım 1.1.19:

Eğer $\lim_{n\to\infty}\sigma_n = s$ ise $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ serisi Q matrisiyle s ye toplanabilirdir denir ve $s_n \to s(Q)$ ile gösterilir (Borwein 1959).

Aşağıdaki kısımlarda $P=(p_{n,r})$ $(n,r=0,1,2,...)$ negatif olmayan matrisi gösterecektir.

Tanım 1.1.20:

Eğer

$$P\left(\left|\sigma_n - s\right|^{\lambda}\right) = \sum_{r=0}^{\infty} p_{n,r}\left|\sigma_n - s\right|^{\lambda} = o(1)$$

ise $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ serisi, s ye λ indisiyle (P,Q) kuvvetli toplanabilirdir veya $[P,Q]_{\lambda}$ toplanabilirdir denir ve $s_n \to s[P,Q]_{\lambda}$ ile gösterilir (Borwein 1959).

Tanım 1.1.21:

Eğer

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{\gamma\lambda+\lambda-1}\left|\sigma_n - \sigma_{n-1}\right|^{\lambda} < \infty$$

ise $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ serisi γ, λ indisiyle Q mutlak toplanabilirdir ya da $|Q,\gamma|_{\lambda}$ toplanabilirdir denir (Borwein 1959).

QR, $[P,QR]_{\lambda}$, $|QR,\gamma|_{\lambda}$ çarpım formlarını tanımlarken, R herhangi bir matris olmak üzere, $R(s_n) = \tau_n$, $\sigma_n = Q(\tau_n)$ olarak alacağız. Birim matrisi ise I ile göstereceğiz. Bu durumda $I(s_n) = s_n$ olduğu açıktır.

Teorem 1.1.22:

X ve Y Hausdorff matrisleri olmak üzere, eğer $X \Rightarrow Y$ ise

$$AX \Rightarrow AY$$

dır (Borwein 1958).

Teorem 1.1.23:

$\alpha > -1$, $\gamma > \beta > -1$ olmak üzere

$$C_{\alpha} \Rightarrow AC_{\beta} \Rightarrow AC_{\gamma}$$

dır (Borwein 1958).

2.İKİNCİ BÖLÜM

Bu bölümde öncelikle herhangi bir Q matrisinin mutlak toplanabilmesini, daha sonra Hausdorff matrislerinin mutlak toplanabilmesini ve bunların L^p sınıfından fonksiyonlarla ilişkilerini ortaya koyan teoremler verilecektir.

2.1.Mutlak Toplanabilme

Teorem 2.1.1:

$\lambda \geq \mu > 0,\ \gamma > \delta$ ise

i) $$\left(\sum_{n=1}^{\infty} n^{\delta\mu+\mu-1}|\omega_n|^{\mu}\right)^{1/\mu} \leq M\left(\sum_{n=1}^{\infty} n^{\gamma\lambda+\lambda-1}|\omega_n|^{\lambda}\right)^{1/\lambda}$$

dır. Burada M, (ω_n) dizisinden bağımsızdır.

ii) Her Q matrisi için

$$|Q,\gamma|_{\lambda} \Rightarrow |Q,\delta|_{\mu}$$

dır.

İspat:

i) $\lambda = \mu$ durumu açıktır. $\lambda > \mu$ olsun. Bu durumda Hölder eşitsizliğinden

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} n^{\delta\mu+\mu-1}|\omega_n|^{\mu} &= \sum_{n=1}^{\infty} n^{\delta\mu-\gamma\mu+\gamma\mu+\mu-\mu/\lambda-(\lambda-\mu)/\lambda}|\omega_n|^{\mu} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty}\left(n^{\gamma\mu+\mu-\mu/\lambda}|\omega_n|^{\mu}\right)\left(n^{\delta\mu-\gamma\mu-(\lambda-\mu)/\lambda}\right) \\ &\leq \left(\sum_{n=1}^{\infty}\left(n^{\gamma\mu+\mu-\mu/\lambda}|\omega_n|^{\mu}\right)^{\lambda/\mu}\right)^{\mu/\lambda}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\left(n^{\delta\mu-\gamma\mu-(\lambda-\mu)/\lambda}\right)^{\lambda/(\lambda-\mu)}\right)^{(\lambda-\mu)/\lambda} \\ &= \left(\sum_{n=1}^{\infty} n^{\gamma\lambda+\lambda-1}|\omega_n|^{\lambda}\right)^{\mu/\lambda}\left(\sum_{n=1}^{\infty} n^{(\delta-\gamma)\mu\lambda/(\lambda-\mu)-1}\right)^{1-\mu/\lambda}\end{aligned}$$

yazılabilir.

$(\delta-\gamma)\mu\lambda/(\lambda-\mu)-1=\alpha$ diyelim. Bu durumda $\delta-\gamma<0$ olduğundan $\alpha<-1$ dir. $\alpha<-1$ olduğundan $\sum_{n=1}^{\infty} n^{\alpha}$ serisi yakınsaktır. Dolayısıyla eşitsizliğin her iki tarafının $1/\mu$ -üncü kuvvetini alıp $\left(\sum_{n=1}^{\infty} n^{\alpha}\right)^{1/\mu-1/\lambda}=M$ dersek istenen eşitsizlik elde edilir.

ii) Biliyoruz ki $\sum_{n=1}^{\infty} n^{\gamma\lambda+\lambda-1}|\sigma_n-\sigma_{n-1}|^{\lambda}<\infty$ olması için gerek ve yeter şart serinin $|Q,\gamma|_{\lambda}$ limitlenebilir olmasıdır.. Bu durumda (i) sonucunda ω_n yerine $\sigma_n-\sigma_{n-1}$ alınırsa $|Q,\gamma|_{\lambda}\Rightarrow|Q,\delta|_{\mu}$ elde edilir.

Lemma 2.1.2:

$$\xi_n=\int_0^1 t^n d\chi(t),\quad \tilde{\xi}_n=\int_0^1 t^n\,|\,d\chi(t)|<\infty \quad (n=0,1,\ldots)$$

olmak üzere $X=(h,\xi_n)$, $\tilde{X}=(h,\tilde{\xi}_n)$ ve $\lambda\geq 1$ ise her (ω_n) dizisi için

$$|X(\omega_n)|^{\lambda}\leq(\tilde{\xi}_0)^{\lambda-1}\tilde{X}\left(|\omega_n|^{\lambda}\right)$$

olur.

İspat:

$X=(X_{n,r})$, $\tilde{X}=(\tilde{X}_{n,r})$ olsun. $X=(h,\xi_n)$ olduğundan $0\leq r\leq n$ için

$$X_{n,r}=\binom{n}{r}\sum_{v=0}^{n-r}(-1)^v\binom{n-r}{v}\xi_{r+v}$$

$$=\binom{n}{r}\sum_{v=0}^{n-r}(-1)^v\binom{n-r}{v}\int_0^1 t^{r+v}d\chi(t)$$

$$=\binom{n}{r}\int_0^1 t^r\left[\sum_{v=0}^{n-r}(-1)^v\binom{n-r}{v}t^v\right]d\chi(t)$$

$$=\binom{n}{r}\int_0^1 t^r\left[1-(n-r)t+\binom{n-r}{2}t^2+\ldots+(-1)^{n-r}t^{n-r}\right]d\chi(t)$$

$$= \binom{n}{r} \int_0^1 t^r \left[1 + (n-r)(-t) + \binom{n-r}{2} (-t)^2 + \ldots + (-t)^{n-r} \right] d\chi(t)$$

$$= \binom{n}{r} \int_0^1 t^r (1-t)^{n-r} d\chi(t)$$

olur. Benzer şekilde

$$\widetilde{X}_{n,r} = \binom{n}{r} \int_0^1 t^r (1-t)^{n-r} |d\chi(t)|$$

dır.

Hölder eşitsizliğinden, $p = \lambda/(\lambda - 1)$, $q = \lambda$ için

$$|X(\omega_n)|^\lambda = \left| \sum_{r=0}^{n} X_{n,r} \omega_r \right|^\lambda$$

$$\leq \left(\sum_{r=0}^{n} |X_{n,r}| |\omega_r| \right)^\lambda$$

$$= \left(\sum_{r=0}^{n} \widetilde{X}_{n,r} |\omega_r| \right)^\lambda$$

$$= \left(\sum_{r=0}^{n} \widetilde{X}_{n,r}{}^{((\lambda-1)/\lambda + 1/\lambda)} |\omega_r| \right)^\lambda$$

$$= \left(\sum_{r=0}^{n} (\widetilde{X}_{n,r})^{(\lambda-1)/\lambda} (\widetilde{X}_{n,r})^{1/\lambda} |\omega_r| \right)^\lambda$$

$$\leq \left(\sum_{r=0}^{n} (\widetilde{X}_{n,r})^{(\lambda-1)/\lambda.\lambda/(\lambda-1)} \right)^{\lambda.(\lambda-1)/\lambda} \left(\sum_{r=0}^{n} (\widetilde{X}_{n,r})^{1/\lambda.\lambda} |\omega_r|^\lambda \right)^{\lambda.1/\lambda}$$

$$= \left(\sum_{r=0}^{n} \widetilde{X}_{n,r} \right)^{\lambda-1} \sum_{r=0}^{n} \widetilde{X}_{n,r} |\omega_r|^\lambda$$

$$= (\widetilde{\xi}_0)^{\lambda-1} \widetilde{X}(|\omega_n|^\lambda)$$

bulunur. Bu ise ispatı tamamlar.

Teorem 2.1.3:

$$\xi_n = \int_0^1 t^n d\chi(t) \quad (n=0,1,\ldots)$$

χ, $[0,1]$ aralığında sınırlı salınımlı reel bir fonksiyon olmak üzere $X = (h, \xi_n)$,

$$\int_0^1 t^{-\gamma} |d\chi(t)| < \infty$$

...(3)

ve $\lambda \geq 1$ ise bu taktirde

i) $\sum_{n=1}^{\infty} n^{\gamma\lambda-1} |X(na_n)|^{\lambda} \leq M \sum_{n=1}^{\infty} n^{\gamma\lambda-1} |na_n|^{\lambda}$

dır. Burada M, (a_n) dizisinden bağımsızdır.

ii) Her Q matrisi için

$$|Q,\gamma|_{\lambda} \Rightarrow |XQ,\gamma|_{\lambda}$$

dır.

İspat:

i) İlk olarak $\gamma \leq 0$ olduğunu kabul edelim. $n \geq r$ için $n^{\gamma\lambda} \leq r^{\gamma\lambda}$ olur.

Lemma 2.1.2 den

$$|X(na_n)|^{\lambda} \leq (\tilde{\xi}_0)^{\lambda-1} \tilde{X}(|na_n|^{\lambda})$$

$$= (\tilde{\xi}_0)^{\lambda-1} \sum_{r=1}^{n} \tilde{X}_{n,r} |ra_r|^{\lambda}$$

$$= (\tilde{\xi}_0)^{\lambda-1} \sum_{r=1}^{n} |ra_r|^{\lambda} \binom{n}{r} \int_0^1 t^r (1-t)^{n-r} |d\chi(t)|$$

dır. Böylece

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{\gamma\lambda-1} |X(na_n)|^{\lambda} \leq (\tilde{\xi}_0)^{\lambda-1} \sum_{n=1}^{\infty} n^{\gamma\lambda-1} \sum_{r=0}^{n} |ra_r|^{\lambda} \binom{n}{r} \int_0^1 t^r (1-t)^{n-r} |d\chi(t)|$$

$$= (\tilde{\xi}_0)^{\lambda-1} \int_0^1 |d\chi(t)| \sum_{r=1}^{\infty} r^{-1} |ra_r|^{\lambda} t^r \sum_{n=r}^{\infty} n^{\gamma\lambda} \binom{n-1}{r-1} (1-t)^{n-r}$$

$$\leq M\sum_{r=1}^{\infty} r^{\gamma\lambda-1}\left|ra_r\right|^{\lambda}$$

elde edilir.

$\gamma > 0$ olduğunu kabul edelim ve $0 \leq t \leq 1$ olmak üzere

$$f_n(t) = \sum_{r=0}^{n}\binom{n}{r}t^r(1-t)^{n-r}\, ra_r$$

olsun. Bu durumda Hölder eşitsizliğinden $p = \lambda,\ q = \dfrac{\lambda}{\lambda-1}$ için

$$\left|f_n(t)\right|^{\lambda} = \left|\sum_{r=0}^{n}\binom{n}{r}t^r(1-t)^{n-r}\, ra_r\right|^{\lambda}$$

$$= \left|\sum_{r=0}^{n}\left[\binom{n}{r}t^r(1-t)^{n-r}\right]^{1/\lambda+(\lambda-1)/\lambda}(ra_r)\right|^{\lambda}$$

$$= \left|\sum_{r=0}^{n}\left[\binom{n}{r}t^r(1-t)^{n-r}\right]^{1/\lambda}(ra_r)\left[\binom{n}{r}t^r(1-t)^{n-r}\right]^{(\lambda-1)/\lambda}\right|^{\lambda}$$

$$\leq \sum_{r=0}^{n}\binom{n}{r}t^r(1-t)^{n-r}\left|ra_r\right|^{\lambda}\left\{\sum_{r=0}^{n}\binom{n}{r}t^r(1-t)^{n-r}\right\}^{\lambda-1}$$

$$\Rightarrow \left|f_n(t)\right|^{\lambda} \leq \sum_{r=0}^{n}\binom{n}{r}t^r(1-t)^{n-r}\left|ra_r\right|^{\lambda}$$

olur ve buradan da

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{\gamma\lambda-1}\left|f_n(t)\right|^{\lambda} \leq M_1\sum_{n=1}^{\infty}\varepsilon_n^{\gamma\lambda-1}\sum_{r=1}^{n}\binom{n}{r}t^r(1-t)^{n-r}\left|ra_r\right|^{\lambda}$$

$$= M_1\sum_{r=1}^{\infty}\varepsilon_r^{\gamma\lambda-1}\left|ra_r\right|^{\lambda} t^r\sum_{n=r}^{\infty}\varepsilon_{n-r}^{\gamma\lambda+r-1}(1-t)^{n-r}$$

$$\leq M_2 t^{-\gamma\lambda}\sum_{r=1}^{\infty} r^{\gamma\lambda-1}\left|ra_r\right|^{\lambda}$$

elde edilir. Burada M_1 ve M_2, (a_n) dizisinden bağımsızdır.

$$X(na_n)=\sum_{r=0}^{n}X_{n,r}(ra_r)$$

$$=\sum_{r=0}^{n}ra_r\int_0^1\binom{n}{r}t^r(1-t)^{n-r}d\chi(t)$$

$$=\int_0^1\sum_{r=0}^{n}ra_r\binom{n}{r}t^r(1-t)^{n-r}d\chi(t)$$

$$=\int_0^1 f_n(t)d\chi(t)$$

olduğundan ve Minkowski eşitsizliğinden

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty}n^{\gamma\lambda-1}\left|X(na_n)\right|^{\lambda}\right)^{1/\lambda}=\left(\sum_{n=1}^{\infty}n^{\gamma\lambda-1}\left|\int_0^1 f_n(t)d\chi(t)\right|^{\lambda}\right)^{1/\lambda}$$

$$\leq\int_0^1\left|d\chi(t)\right|\left(\sum_{n=1}^{\infty}n^{\gamma\lambda-1}\left|f_n(t)\right|^{\lambda}\right)^{1/\lambda}$$

$$\leq M_2^{1/\lambda}\int_0^1 t^{-\gamma}\left|d\chi(t)\right|\left(\sum_{r=1}^{\infty}r^{\gamma\lambda-1}\left|ra_r\right|^{\lambda}\right)^{1/\lambda}$$

elde edilir. Böylece (i) nin ispatı tamamlanır.

Bir X Hausdorff matrisi için $\sum a_n$ nin $\left|X,\gamma\right|_{\lambda}$ toplanabilir olması için gerek ve yeter şart

$$\sum_{n=1}^{\infty}n^{\gamma\lambda-1}\left|X(na_n)\right|^{\lambda}<\infty$$

olmasıdır, çünkü $X(na_n)=n(\sigma_n-\sigma_{n-1})$ $(n=1,2,...)$ dir. (i) nedeniyle

$$\sum_{n=1}^{\infty}n^{\gamma\lambda-1}\left|X(na_n)\right|^{\lambda}\leq M\sum_{n=1}^{\infty}n^{\gamma\lambda-1}\left|na_n\right|^{\lambda}$$

olduğundan $\left|I,\gamma\right|_{\lambda}\Rightarrow\left|X,\gamma\right|_{\lambda}$ olduğu görülür. Böylece I yerine Q alındığında (ii) sonucu elde edilir.

Teorem 2.1.4:

i) $\alpha > -1, \quad \lambda \geq 1, \quad \gamma < \min(1,1+\alpha)$ ise

$$|C,\alpha,\gamma|_\lambda \Rightarrow |H,\alpha,\gamma|_\lambda$$

dır.

ii) $\alpha > -1, \quad \lambda \geq 1, \quad \gamma < 1$ veya $\alpha = 2,3,...$, $\lambda \geq 1, \quad \gamma < 2$ ise

$$|H,\alpha,\gamma|_\lambda \Rightarrow |C,\alpha,\gamma|_\lambda$$

dır.

Bu teoremin ispatı için önce aşağıdaki lemmayı ifade ve ispat edelim.

Lemma 2.1.5:

Eğer $\sigma_0 < 0$ ve $g(s)$, $\sigma > \sigma_0$ bölgesinde $s = \sigma + i\tau$ nun analitik bir fonksiyonu ve yeterince büyük $|s|$ için, K, δ sabitler ve $\delta > \frac{1}{2}$ olmak üzere

$$g(s) = K + 0\left(|s|^{-\delta}\right)$$

ise bu taktirde

$$g(n) = \int_0^1 t^n d\chi(t) \qquad (n \geq 0)$$

olur. Burada χ, her $c > \sigma_0$ için $\int_0^1 t^c |d\chi(t)| < \infty$ olmak üzere $[0,1]$ aralığında sınırlı salınımlı bir fonksiyondur.

İspat:

$f(s) = g(s) - K$ olsun. Bu durumda $c > \sigma_0 + \varepsilon > \sigma$ için

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(c+it)|^2 dt < M_\varepsilon$$

olur. Burada M_ε, c den bağımsız sonlu bir sayıdır. Bu durumda Teorem 1.1.16 dan, her $c > \sigma_0 + \varepsilon$ için ve dolayısıyla her $c > \sigma_0$ için $t^c\phi(t) \in L(0,1)$ olmak üzere

$$f(n) = \int_0^1 t^n \phi(t) dt \qquad (n \geq 0)$$

elde edilir. Sonuç olarak

$$g(n)=\int_0^1 t^n d\chi(t) \qquad (n \geq 0)$$

bulunur. Burada $0 \leq t < 1$ için $\chi(t)=\int_0^t \phi(u)du$ ve $\chi(1)=K+\int_0^1 \phi(u)du$ dur. Bu, her $c > \sigma_0$ için $\int_0^1 t^c |d\chi(t)| < \infty$ olduğunun ispatıdır. Lemma böylece ispatlanır.

Teorem 2.1.4'ün ispatı:

$$\omega(s)=(s+1)^{-\alpha}\frac{\Gamma(s+\alpha+1)}{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(s+1)}$$

ve $\omega_n=\omega(n)$ olmak üzere, W=(h,ω_n) şeklinde Hausdorff matrisi olsun.

i) Stirling formülünden, $\omega(s)$ dönüşümü $\delta=1, \sigma_0=\max(-1,-1-\alpha)$ için Lemma 2.1.5 deki $g(s)$ nin hipotezlerini sağlar. Bu durumda Teorem 2.1.3 de X=W alınırsa $-\gamma > \sigma_0$ yani $\gamma < \min(1,1+\alpha)$ için

$$|C_\alpha,\gamma|_\lambda \Rightarrow |WC_\alpha,\gamma|_\lambda$$

olur. $WC_\alpha = H_\alpha$ olduğundan (i) nin ispatı tamamlanır.

ii) $\dfrac{1}{\omega(s)}$ fonksiyonu, $\alpha > -1$ için $\delta=1, \sigma_0=-1$ ve $\alpha=2,3,...$ için $\delta=1$, $\sigma_0=-2$ olan Lemma 2.1.5 deki $g(s)$ nin hipotezlerini sağlar.

Bu durumda Teorem 2.1.3 de $X=W^{-1}$ alınırsa $\alpha > -1$ olduğunda $-\gamma > -1$ için ve $\alpha = 2,3,...$ olduğunda $-\gamma > -2$ için

$$|H_\alpha,\gamma|_\lambda \Rightarrow |W^{-1}H_\alpha,\gamma|_\lambda$$

olur. $W^{-1}H_\alpha = C_\alpha$ olduğundan bu (ii) nin ispatını tamamlar.

Teorem 2.1.6:

$$\mu > \lambda \geq 1,\ \frac{1}{p} = 1 + \frac{1}{\mu} - \frac{1}{\lambda},\ \gamma \geq 0 \text{ ve}$$

$$\xi_n = \int_0^1 t^n \phi(t)dt,\quad \phi(t) \in L(0,1),\quad t^{1-\gamma-1/p}\phi(t) \in L^p(0,1)$$

olmak üzere $X = (h, \xi_n)$ olsun. Bu durumda

i) $$\left(\sum_{n=1}^{\infty} n^{\gamma\mu-1} \left| X(na_n) \right|^{\mu} \right)^{1/\mu} \leq M \left(\sum_{n=1}^{\infty} n^{\gamma\lambda-1} \left| na_n \right|^{\lambda} \right)^{1/\lambda},$$

burada M, (a_n) dizisinden bağımsızdır.

ii) Her Q matrisi için

$$|Q,\gamma|_{\lambda} \Rightarrow |XQ,\gamma|_{\mu}$$

dır.

İspat:

i) n, t ve (a_n) dizisinden bağımsız olan pozitif sayıları M_1, M_2, M_3, M_4 ile gösterelim. $0 \leq t \leq 1$ olmak üzere

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} n^{\gamma\lambda-1} \left| na_n \right|^{\lambda} < \infty$$

ve

$$f_n(t) = \sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} t^r (1-t)^{n-r} ra_r$$

olsun. Bu durumda Teorem 2.1.3 ün ispatına benzer olarak

$$\left| f_n(t) \right|^{\lambda} \leq \sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} t^r (1-t)^{n-r} \left| ra_r \right|^{\lambda}$$

olur. Dolayısıyla

$$n^{\gamma\lambda} \int_0^1 t^{\gamma\lambda-1} \left| f_n(t) \right|^{\lambda} dt \leq n^{\gamma\lambda} \int_0^1 t^{\gamma\lambda-1} \sum_{r=1}^{n} \binom{n}{r} t^r (1-t)^{n-r} \left| ra_r \right|^{\lambda} dt$$

$$= n^{\gamma\lambda} \sum_{r=1}^{n} \left| ra_r \right|^{\lambda} \binom{n}{r} \int_0^1 t^{\gamma\lambda+r-1} (1-t)^{n-r} dt$$

$$= n^{\gamma\lambda}\sum_{r=1}^{n}|ra_r|^{\lambda}\binom{n}{r}\frac{\Gamma(\gamma\lambda+r)\Gamma(n-r+1)}{\Gamma(n+\gamma\lambda+1)}$$

$$= n^{\gamma\lambda}\sum_{r=1}^{n}|ra_r|^{\lambda}\frac{n!}{(n-r)!r!}\frac{(\gamma\lambda+r-1)!(n-r)!}{(n+\gamma\lambda)!}$$

$$= n^{\gamma\lambda}\sum_{r=1}^{n}|ra_r|^{\lambda}\frac{\dfrac{(\gamma\lambda+r-1)!}{r(r-1)!}}{\dfrac{(n+\gamma\lambda)!}{n!}}$$

$$= n^{\gamma\lambda}\sum_{r=1}^{n}|ra_r|^{\lambda}\frac{1}{r}\frac{\dfrac{(\gamma\lambda+r-1)!}{(\gamma\lambda)!(r-1)!}}{\dfrac{(n+\gamma\lambda)!}{(\gamma\lambda)!n!}}$$

$$= n^{\gamma\lambda}\sum_{r=1}^{n}|ra_r|^{\lambda}\frac{1}{r}\frac{\binom{\gamma\lambda+r-1}{r-1}}{\binom{\gamma\lambda+n}{n}}$$

$$= n^{\gamma\lambda}\sum_{r=1}^{n}|ra_r|^{\lambda}r^{-1}\frac{\varepsilon_{r-1}^{\gamma\lambda}}{\varepsilon_n^{\gamma\lambda}}$$

$$= \frac{n^{\gamma\lambda}}{\varepsilon_n^{\gamma\lambda}}\sum_{r=1}^{n}r^{-1}\varepsilon_{r-1}^{\gamma\lambda}|ra_r|^{\lambda}$$

$$\le M_1\sum_{r=1}^{n}r^{\gamma\lambda-1}|ra_r|^{\lambda} = M_1S$$

...(4)

elde edilir.

Ayrıca $\gamma > 0$ için Teorem 2.1.3(i) den

$$\sum_{n=1}^{\infty}n^{\gamma\lambda-1}|f_n(t)|^{\lambda} \le M_2t^{-\gamma\lambda}\sum_{r=1}^{\infty}r^{\gamma\lambda-1}|ra_r|^{\lambda} = M_2St^{-\gamma\lambda}$$

...(5)

bulunur. $\gamma = 0$ durumu için de Teorem 2.1.3(i) nin ispatına benzer olarak

$$\frac{1}{n}\binom{n}{r} = \frac{1}{r}\binom{n-1}{r-1}$$

özdeşliğinden yararlanarak eşitsizliğin geçerliliğini gösterebiliriz. Gerçekten,

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-1}\left|f_n(t)\right|^{\lambda} \le \sum_{n=1}^{\infty} n^{-1}\sum_{r=0}^{n}\binom{n}{r}t^r(1-t)^{n-r}\left|ra_r\right|^{\lambda}$$

$$=\sum_{r=1}^{\infty} t^r\left|ra_r\right|^{\lambda}\sum_{n=r}^{\infty}\frac{1}{n}\binom{n}{r}(1-t)^{n-r}$$

$$=\sum_{r=1}^{\infty} t^r\left|ra_r\right|^{\lambda}\sum_{n=r}^{\infty}\frac{1}{r}\binom{n-1}{r-1}(1-t)^{n-r}$$

$$=\sum_{r=1}^{\infty} r^{-1}\left|ra_r\right|^{\lambda}t^r\sum_{n=r}^{\infty}\binom{n-1}{r-1}(1-t)^{n-r}$$

$$=\sum_{r=1}^{\infty} r^{-1}\left|ra_r\right|^{\lambda}t^r\,\frac{1}{t^r}$$

$$=\sum_{r=1}^{\infty} r^{-1}\left|ra_r\right|^{\lambda}$$

olur. Böylece $\gamma=0$ durumu için de eşitsizliğin doğruluğunu göstermiş oluruz. Şimdi

$$c=1-\gamma-\frac{1}{p},\quad \Psi(t)=t^c\phi(t),\quad k=\int_0^1\left|\Psi(t)\right|^p dt$$

olsun. Bu durumda k sonludur ve

$$\left|X(na_n)\right|^{\lambda}=\left|\int_0^1\Psi(t)t^{-c}f_n(t)dt\right|^{\lambda}$$

$$\le\left(\int_0^1\left|\Psi(t)\right|t^{-c}\left|f_n(t)\right|dt\right)^{\lambda}$$

$$=\left(\int_0^1\left|\Psi(t)\right|^{p.1/p}t^{-c}\left|f_n(t)\right|dt\right)^{\lambda}$$

$$=\left(\int_0^1\left|\Psi(t)\right|^{p(1+1/\mu-1/\lambda)}t^{-c}\left|f_n(t)\right|dt\right)^{\lambda}$$

$$=\left(\int_0^1\left|\Psi(t)\right|^{p(1-1/\lambda)}\left|\Psi(t)\right|^{p/\mu}t^{-c}\left|f_n(t)\right|dt\right)^{\lambda}$$

$$\leq \left(\int_0^1 |\Psi(t)|^{p(\lambda-1)/\lambda.\lambda/(\lambda-1)} dt \right)^{\lambda(\lambda-1)/\lambda} \left(\int_0^1 |\Psi(t)|^{p.\lambda/\mu} t^{-c\lambda} |f_n(t)|^{\lambda} dt \right)^{\lambda.1/\lambda}$$

$$= \left(\int_0^1 |\Psi(t)|^{p} dt \right)^{\lambda-1} \int_0^1 |\Psi(t)|^{p.\lambda/\mu} t^{1-c\lambda-\lambda\gamma} t^{\lambda\gamma-1} |f_n(t)|^{\lambda} dt$$

$$= k^{\lambda-1} \int_0^1 t^{(\lambda\gamma-1)((\mu-\lambda)/\mu+\lambda/\mu)} |f_n(t)|^{\lambda((\mu-\lambda)/\mu+\lambda/\mu)} |\Psi(t)|^{p.\lambda/\mu} t^{1-\lambda c-\lambda\gamma} dt$$

$$= k^{\lambda-1} \int_0^1 t^{(\lambda\gamma-1)(\mu-\lambda)/\mu} t^{(\lambda\gamma-1)\lambda/\mu} |f_n(t)|^{\lambda(\mu-\lambda)/\mu} |f_n(t)|^{\lambda\lambda/\mu} |\Psi(t)|^{p.\lambda/\mu} t^{1-\lambda c-\lambda\gamma} dt$$

$$\leq k^{\lambda-1} \left(\int_0^1 t^{(\lambda\gamma-1)(\mu-\lambda)/\mu.\mu/(\mu-\lambda)} |f_n(t)|^{\lambda(\mu-\lambda)/\mu.\mu/(\mu-\lambda)} dt \right)^{(\mu-\lambda)/\mu}$$

$$\left(\int_0^1 |\Psi(t)|^{p\lambda/\mu.\mu/\lambda} t^{(\lambda\gamma-1)\lambda/\mu.\mu/\lambda} t^{(1-\lambda c-\lambda\gamma)\mu/\lambda} |f_n(t)|^{\lambda\lambda/\mu.\mu/\lambda} dt \right)^{\lambda/\mu}$$

$$= k^{\lambda-1} \left(\int_0^1 t^{(\lambda\gamma-1)} |f_n(t)|^{\lambda} dt \right)^{1-\lambda/\mu} \left(\int_0^1 |\Psi(t)|^{p} t^{(\lambda\gamma-1)} t |f_n(t)|^{\lambda} dt \right)^{\lambda/\mu}$$

$$= k^{\lambda-1} \left(\int_0^1 t^{(\lambda\gamma-1)} |f_n(t)|^{\lambda} dt \right)^{1-\lambda/\mu} \left(\int_0^1 |\Psi(t)|^{p} t^{\lambda\gamma} |f_n(t)|^{\lambda} dt \right)^{\lambda/\mu}$$

elde edilir. Eşitsizliğin her iki tarafının μ/λ kuvvetini alırsak

$$|X(na_n)|^{\mu} \leq k^{(\lambda-1)\mu/\lambda} \left(\int_0^1 t^{\lambda\gamma-1} |f_n(t)|^{\lambda} dt \right)^{(\mu-\lambda)/\lambda} \int_0^1 |\Psi(t)|^{p} t^{\lambda\gamma} |f_n(t)|^{\lambda} dt$$

bulunur.

$$n^{\gamma\mu-1} = n^{\gamma\mu-\gamma\lambda+\gamma\lambda-1} = n^{\gamma\mu-\gamma\lambda} n^{\gamma\lambda-1} = n^{\gamma(\mu-\lambda)} n^{\gamma\lambda-1} = \left(n^{\gamma\lambda}\right)^{(\mu-\lambda)/\lambda} n^{\gamma\lambda-1}$$

olduğundan

$$n^{\gamma\mu-1} |X(na_n)|^{\mu} \leq k^{(\lambda-1)\mu/\lambda} \left(n^{\gamma\lambda} \int_0^1 t^{\lambda\gamma-1} |f_n(t)|^{\lambda} dt \right)^{\mu/\lambda-1} \int_0^1 |\Psi(t)|^{p} t^{\lambda\gamma} n^{\gamma\lambda-1} |f_n(t)|^{\lambda} dt$$

olur ve dolayısıyla (4) ve (5) den

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{\gamma\mu-1}\left|X(na_n)\right|^{\mu} \leq k^{(\lambda-1)\mu/\lambda}(M_1S)^{\mu/\lambda-1}\int_0^1 \left|\Psi(t)\right|^p t^{\lambda\gamma}\sum_{n=1}^{\infty} n^{\gamma\lambda-1}\left|f_n(t)\right|^{\lambda} dt$$

$$\leq k^{(\lambda-1)\mu/\lambda}M_1^{\mu/\lambda-1}S^{\mu/\lambda-1}\int_0^1 \left|\Psi(t)\right|^p t^{\lambda\gamma}M_2St^{-\gamma\lambda}dt$$

$$= M_3S^{\mu/\lambda-1}M_2S\int_0^1 \left|\Psi(t)\right|^p dt$$

$$= M_3M_2kS^{\mu/\lambda} = M_4S^{\mu/\lambda}$$

bulunur. Bu eşitsizlikte her iki tarafın $1/\mu$ kuvveti alınır ve S yerine yazılırsa

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} n^{\gamma\mu-1}\left|X(na_n)\right|^{\mu}\right)^{1/\mu} \leq M\left(\sum_{n=1}^{\infty} n^{\gamma\lambda-1}\left|na_n\right|^{\lambda}\right)^{1/\lambda}$$

elde edilir. Bu ise $\left|I,\gamma\right|_{\lambda} \Rightarrow \left|X,\gamma\right|_{\mu}$ demektir. Öte yandan I yerine Q alınarak (ii) bulunur.

Lemma 2.1.7:

Q herhangi bir matris ve

i) $\lambda = \mu \geq 1,\ \gamma \geq 0,\ \alpha+1 > \gamma > \delta,\ \beta \geq \alpha-\gamma+\delta,\ \beta > -1,$

veya

ii) $\lambda > \mu \geq 1,\ \gamma \geq 0,\ \alpha+1 > \gamma > \delta,\ \beta > \alpha-\gamma+\delta,\ \beta > -1,$ ise

$$\left|C_{\alpha}Q,\gamma\right|_{\lambda} \Rightarrow \left|C_{\beta}Q,\delta\right|_{\mu}$$

dır (Borwein 1959).

Sonuç 2.1.8:

Q herhangi bir matris ve

i) $\mu \geq \lambda \geq 1,\ \rho > 1/\lambda - 1/\mu,\ \alpha+1 > \gamma \geq 0$

veya

ii) $\mu > \lambda > 1,\ \rho = 1/\lambda - 1/\mu,\ \alpha+1 > \gamma \geq 0$

ise bu taktirde

$$\left|C_\alpha Q,\gamma\right|_\lambda \Rightarrow \left|C_{\alpha+\rho} Q,\gamma\right|_\mu$$

olur.

İspat:

i) $\varepsilon_n^\alpha / \varepsilon_n^{\alpha+\rho} = \int_0^1 t^n \phi(t)dt$, $\phi(t) = \dfrac{\Gamma(\alpha+\rho+1)}{\Gamma(\rho)\Gamma(\alpha+1)} t^\alpha (1-t)^{\rho-1}$, $X = \left(h, \varepsilon_n^\alpha / \varepsilon_n^{\alpha+\rho}\right)$ olmak üzere

$$C_{\alpha+\rho} = C_{\alpha+\rho} C_\alpha^{-1} C_\alpha = X C_\alpha$$

olur. İlk olarak $\lambda = \mu$ olduğunu varsayalım. Bu durumda $\alpha - \gamma + 1 > 0,\ \rho > 0$ olduğundan

$$\int_0^1 t^{-\gamma}\phi(t)dt = \int_0^1 \frac{\Gamma(\alpha+\rho+1)}{\Gamma(\rho)\Gamma(\alpha+1)} t^{\alpha-\gamma}(1-t)^{\rho-1} dt$$

integrali yakınsaktır. Dolayısıyla $t^{-\gamma}\phi(t) \in L(0,1)$ olur. Teorem 2.1.3 den

$$\left|C_\alpha, \gamma\right|_\lambda \Rightarrow \left|C_{\alpha+\rho}, \gamma\right|_\lambda$$

elde edilir.

Şimdi $\mu > \lambda$ ve $1/p = 1 + 1/\mu - 1/\lambda$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda $p(\rho - 1) > -1$ ve $\alpha + 1 - \gamma > 0$ olduğundan $p(\alpha + 1 - \gamma - 1/p) > -1$ olur. O halde

$$\int_0^1 \phi(t)dt = \int_0^1 \frac{\Gamma(\alpha+\rho+1)}{\Gamma(\rho)\Gamma(\alpha+1)} t^\alpha (1-t)^{\rho-1} dt$$

ve

$$\int_0^1 \left|t^{1-\gamma-1/p}\phi(t)\right|^p dt = \int_0^1 \left(\frac{\Gamma(\alpha+\rho+1)}{\Gamma(\rho)\Gamma(\alpha+1)}\right)^p t^{p(\alpha-\gamma-1/p+1)}(1-t)^{p(\rho-1)} dt$$

integralleri yakınsaktır. Buradan $\phi(t) \in L(0,1)$ ve $t^{1-\gamma-1/p}\phi(t) \in L^p(0,1)$ elde edilir. İstenen sonuç Teorem 2.1.6 dan bulunur.

3.ÜÇÜNCÜ BÖLÜM

Bu bölümde kuvvetli toplanabilme kavramını herhangi bir Q matrisi için incelendikten sonra Hausdorff matrislerinin kuvvetli toplanabilmesi ve Hausdorff matrislerinin L^p sınıfından fonksiyonlarla ilişkilerini ifade eden teorem ve lemmalar ele alınacaktır.

3.1.Kuvvetli Toplanabilme

Teorem 3.1.1:

Q herhangi bir matris, $P = (p_{n,r})$,

$$\sum_{r=0}^{\infty} p_{n,r} < M \quad (n=0,1,\ldots)$$

...(6)

olan bir matris ve $\lambda > \mu > 0$ ise bu taktirde

$$[P,Q]_\lambda \Rightarrow [P,Q]_\mu$$

dır.

Özel olarak $\lambda > \mu > 0$ ve P regüler ise teorem sağlanır.

İspat :

Her (ω_n) dizisi için Hölder eşitsizliğinden,

$$\sum_{r=0}^{\infty} p_{n,r} |\omega_r|^\mu = \sum_{r=0}^{\infty} \left(p_{n,r}{}^{1-\mu/\lambda+\mu/\lambda}\right) |\omega_r|^\mu$$

$$= \sum_{r=0}^{\infty} \left(p_{n,r}{}^{\mu/\lambda}\right)|\omega_r|^{\mu} \left(p_{n,r}{}^{1-\mu/\lambda}\right)$$

$$\leq \left(\sum_{r=0}^{\infty} \left(p_{n,r}{}^{\mu/\lambda}\right)^{\lambda/\mu} \left(|\omega_r|^{\mu}\right)^{\lambda/\mu} \right)^{\mu/\lambda} \left(\sum_{r=0}^{\infty} \left(p_{n,r}{}^{(\lambda-\mu)/\lambda}\right)^{\lambda/(\lambda-\mu)} \right)^{1-\mu/\lambda}$$

$$= \left(\sum_{r=0}^{\infty} p_{n,r} |\omega_r|^{\lambda} \right)^{\mu/\lambda} \left(\sum_{r=0}^{\infty} p_{n,r} \right)^{1-\mu/\lambda}$$

$$< \left(\sum_{r=0}^{\infty} p_{n,r} |\omega_r|^{\lambda} \right)^{\mu/\lambda} M^{1-\mu/\lambda}$$

$$\Rightarrow \sum_{r=0}^{\infty} p_{n,r} |\omega_r|^{\mu} \leq \left(\sum_{r=0}^{\infty} p_{n,r} |\omega_r|^{\lambda} \right)^{\mu/\lambda} M^{1-\mu/\lambda}$$

olur. Burada $s_n = \sum_{r=0}^{n} a_r$, $\sigma_n = Q(s_n)$ olmak üzere, (ω_n) dizisi yerine $(\sigma_n - s)$ dizisi alınırsa istenen sonuç elde edilir.

Teorem 3.1.2:

Q herhangi bir matris ve $\lambda > \mu > 0,\ \beta\lambda > \alpha\mu > 0$ ise bu taktirde

$$[C_\alpha, Q]_\lambda \Rightarrow [C_\beta, Q]_\mu$$

dır.

İspat:

$p = \dfrac{\lambda}{\mu},\ q = \dfrac{\lambda}{\lambda - \mu}$ ve (ω_n) herhangi bir dizi olsun. $\alpha > 0,\ \beta > 0$, $\beta q - \alpha \dfrac{q}{p} = (\beta\lambda - \alpha\mu)\dfrac{q}{\lambda} > 0$ olduğu için Hölder eşitsizliğinden

$$C_\beta\left(|\omega_n|^{\mu}\right) = \frac{1}{\varepsilon_n^{\beta}} \sum_{r=0}^{n} \varepsilon_r^{\beta-1} |\omega_{n-r}|^{\mu}$$

$$= \frac{\left(\varepsilon_n^{\alpha}\right)^{1/p}}{\left(\varepsilon_n^{\alpha}\right)^{1/p} \varepsilon_n^{\beta}} \sum_{r=0}^{n} \frac{\left(\varepsilon_r^{\alpha-1}\right)^{1/p}}{\left(\varepsilon_r^{\alpha-1}\right)^{1/p}} \varepsilon_r^{\beta-1} |\omega_{n-r}|^{\mu}$$

$$\leq \left\{ \frac{1}{\varepsilon_n^{\alpha}} \sum_{r=0}^{n} \varepsilon_r^{\alpha-1} |\omega_{n-r}|^{\lambda} \right\}^{1/p} \left\{ \frac{\left(\varepsilon_n^{\alpha}\right)^{q/p}}{\left(\varepsilon_n^{\beta}\right)^{q}} \sum_{r=0}^{n} \frac{\left(\varepsilon_r^{\beta-1}\right)^{q}}{\left(\varepsilon_r^{\alpha-1}\right)^{q/p}} \right\}^{1/q}$$

$$\leq M_1 \left\{ C_{\alpha}\left(|\omega_n|^{\lambda}\right) \right\}^{1/p} \left\{ (n+1)^{\alpha q/p - \beta q} \sum_{r=0}^{n} (r+1)^{\beta q - \alpha q/p - 1} \right\}$$

olur ve buradan da

$$C_{\beta}\left(|\omega_n|^{\mu}\right) \leq M \left\{ C_{\alpha}\left(|\omega_n|^{\lambda}\right) \right\}^{1/p} \qquad \textbf{...(7)}$$

elde edilir. M_1 ve M sayıları, n den ve (ω_n) dizisinden bağımsızdır. $s_n = \sum_{r=0}^{n} a_r$, $\sigma_n = Q(s_n)$ olmak üzere $\omega_n = \sigma_n - s$ alındığında istenen sonuç elde edilir.

Teorem 3.1.3:

P, X regüler Hausdorff matrisleri, Q herhangi bir matris ve $\lambda \geq 1$ ise bu taktirde

$$[P,Q]_{\lambda} \Rightarrow [P,XQ]_{\lambda}$$

dır.

İspat:

$X = (h, \xi_n)$ ve $\sigma_n = X(s_n)$ olsun. X regüler olduğundan

$$\sigma_n - s = X(s_n - s) \quad \text{ve} \quad \xi_n = \int_0^1 t^n d\chi(t)$$

olur. Burada χ, (1) şartını sağlayan, $[0,1]$ aralığında sınırlı salınımlı bir fonksiyondur. Bu durumda Lemma 2.1.2 den

$$|\sigma_n - s|^{\lambda} \leq \left(\tilde{\xi}_0\right)^{\lambda-1} \tilde{X}\left(|s_n - s|^{\lambda}\right)$$

bulunur. P negatif elemanı olmayan bir Hausdorff matrisi ve $\tilde{X}$ bir Hausdorff matrisi olduğundan

$$P\left(|\sigma_n - s|^{\lambda}\right) \leq \left(\tilde{\xi}_0\right)^{\lambda-1} P\tilde{X}\left(|s_n - s|^{\lambda}\right) = \left(\tilde{\xi}_0\right)^{\lambda-1} \tilde{X}P\left(|s_n - s|^{\lambda}\right) \qquad \textbf{...(8)}$$

elde edilir. Teorem 1.1.7 den $u_n \to 0$ olduğunda $\tilde{X}(u_n) \to 0$ olur. ($\tilde{X}$ nın regüler olması gerekli değildir.)

Bu durumda $P\left(\left|s_n - s\right|^{\lambda}\right) \to 0$ ise (8) den $P\left(\left|\sigma_n - s\right|^{\lambda}\right) \to 0$, yani $[P,I]_{\lambda} \Rightarrow [P,X]_{\lambda}$ bulunur. I yerine Q matrisi aldığımızda $[P,Q]_{\lambda} \Rightarrow [P,QX]_{\lambda}$ elde edilir.

Aşağıdaki sonuçlar bu teoremden kolayca görülür.

Sonuç 3.1.4:

$\lambda \geq 1$, P, Y, Z Hausdorff matrisleri, P regüler, $Y = (h,\eta_n)$, $\eta_n \neq 0$ ve $Y \Rightarrow Z$ ise $[P,Y]_{\lambda} \Rightarrow [P,Z]_{\lambda}$ olur.

Sonuç 3.1.5:

X bir Hausdorff matrisi ve $\lambda \geq 1$ ise $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ serisinin s ye $[C_1,X]_{\lambda}$ toplanabilir olması için gerek ve yeter şart s ye C_1X toplanabilir ve $na_n \to 0[C_1,C_1X]_{\lambda}$ olmasıdır.

(2) den $C_1C_{\alpha-1} \cong C_{\alpha}$ $(\alpha > 0)$ ve dolayısıyla Sonuç 3.1.4 den

$$[C_1,C_1C_{\alpha-1}]_{\lambda} \cong [C_1,C_{\alpha}]_{\lambda} \quad (\alpha > 0, \lambda \geq 1)$$

olur. Bu durumda Sonuç 3.1.5 den aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 3.1.6:

$\lambda \geq 1, \alpha > 0$ ise bir $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ serisinin s ye $[C,\alpha]_{\lambda}$ toplanabilir olması için gerek ve yeter şart serinin s ye (C,α) toplanabilir olması ve $\sum_{n=0}^{m} \left|C_{\alpha}(na_n)\right|^{\lambda} = o(m)$ olmasıdır.

Bu sonuç Hyslop (1951) tarafından verilmiş ve $\alpha = 0$ değeri için $[C,0]_{\lambda}$ toplanabilme metodu aşağıdaki şekilde ifade edilmiştir:

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ serisinin s değerine $[C,0]_{\lambda}$ toplanabilir olması için gerek ve yeter şart serinin s ye yakınsak ve

$$\sum_{n=0}^{m} |na_n|^{\lambda} = o(m)$$

olmasıdır.

Teorem 3.1.7:

$\alpha \geq 0,\ \lambda \geq 1$ ise

$$[C,\alpha]_{\lambda} \cong [H,\alpha]_{\lambda}$$

dır.

İspat:

Önce $\alpha > 0$ alalım. Bu durumda Teorem 1.1.13 den

$$C_{\alpha-1} \cong H_{\alpha-1}$$

olur. $C_1 = H_1$ olduğundan Sonuç 3.1.4 nedeniyle

$$[C_1, C_{\alpha-1}]_{\lambda} \Rightarrow [C_1, H_{\alpha-1}]_{\lambda} = [H_1, H_{\alpha-1}]_{\lambda}$$

elde edilir. $[C,\alpha]_{\lambda} = [C_1, C_{\alpha-1}]_{\lambda}$ ve $[H,\alpha]_{\lambda} = [H_1, H_{\alpha-1}]_{\lambda}$ gösterimlerinden

$$[C,\alpha]_{\lambda} \Rightarrow [H,\alpha]_{\lambda}$$

bulunur. Benzer şekilde $[H,\alpha]_{\lambda} \Rightarrow [C,\alpha]_{\lambda}$ elde edilir.

$\alpha = 0$ için Sonuç 3.1.5 de $X = H_{-1} = C_1^{-1}$ olarak alalım. Bu durumda $s_n \to s[C_1, C_1^{-1}]$ olması için gerek ve yeter şart $s_n \to s(C_1, C_1^{-1})$ ve $na_n \to 0[C_1, I]_{\lambda}$ olmasıdır. Buradan $s_n \to s$ ve

$$\frac{1}{m+1}\sum_{n=0}^{m} |na_n|^{\lambda} \to 0$$

elde edilir. $[C,0]_{\lambda}$ nın tanımı gereğince $[C,0]_{\lambda} \cong [C_1, C_1^{-1}]_{\lambda}$ bulunur. Öte yandan $[H,0]_{\lambda} = [H_1, H_{-1}]_{\lambda} = [C_1, C_1^{-1}]$ olduğu dikkate alınarak $[C,0]_{\lambda} \cong [H,0]_{\lambda}$ olduğu görülür.

Lemma 3.1.8:

$\phi(t),\ p > 1$ olmak üzere $L^p(0,1)$ sınıfından reel bir fonksiyon ve

$$\xi_n = \int_0^1 t^n \phi(t)\,dt\,,\quad \xi_n^{(p)} = \int_0^1 t^n |\phi(t)|^p dt \quad (n = 0,1,\ldots),\quad X = (h, \xi_n),\quad X^{(p)} = (h, \xi_n^{(p)})$$

olsun. $\mu > \lambda \geq 1$ ve $1 + 1/\mu - 1/\lambda = 1/p$ ise her (ω_n) dizisi için

$$|X(\omega_n)|^{\mu} \leq \left(\xi_0{}^{(p)}\right)^{\mu(1-1/\lambda)} \left\{C_1\left(|\omega_n|^{\lambda}\right)\right\}^{\mu/\lambda-1} X^{(p)}\left(|\omega_n|^{\lambda}\right)$$

dır.

İspat:

$0 \leq t \leq 1$ olmak üzere

$$f_n(t) = \sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} t^r (1-t)^{n-r} \omega_r$$

olsun. Teorem 2.1.3 ün ispatına benzer olarak

$$|f_n(t)|^{\lambda} \leq \sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} t^r (1-t)^{n-r} |\omega_r|^{\lambda}$$

olur.

$$\int_0^1 |f_n(t)|^{\lambda} dt \leq \int_0^1 \sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} t^r (1-t)^{n-r} |\omega_r|^{\lambda} dt$$

$$= \sum_{r=0}^{n} |\omega_r|^{\lambda} \binom{n}{r} \int_0^1 t^r (1-t)^{n-r} dt$$

$$= \sum_{r=0}^{n} |\omega_r|^{\lambda} \binom{n}{r} \frac{\Gamma(r+1)\Gamma(n-r+1)}{\Gamma(n+2)}$$

$$= \sum_{r=0}^{n} |\omega_r|^{\lambda} \frac{n!}{(n-r)!\,r!} \frac{(r)!(n-r)!}{(n+1)!}$$

$$= \frac{1}{n+1} \sum_{r=0}^{n} |\omega_r|^{\lambda}$$

$$= C_1\left(|\omega_n|^{\lambda}\right)$$

...(9)

ve dolayısıyla

$$|\phi(t)|^{p} |f_n(t)|^{\lambda} \leq \sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} t^r (1-t)^{n-r} |\phi(t)|^{p} |\omega_r|^{\lambda}$$

elde edilir. Buradan da

$$\int_0^1 |\phi(t)|^p |f_n(t)|^\lambda dt \le \sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} \left[\int_0^1 t^r (1-t)^{n-r} |\phi(t)|^p dt \right] |\omega_r|^\lambda$$

$$= X^{(p)}\left(|\omega_n|^\lambda\right)$$

...(10)

bulunur. Ayrıca iki kez Hölder eşitsizliğini uygulayarak

$$|X(\omega_n)|^\lambda = \left| \int_0^1 \phi(t) f_n(t) dt \right|^\lambda$$

$$\le \left(\int_0^1 |\phi(t)|^{p.1/p} |f_n(t)| dt \right)^\lambda$$

$$= \left(\int_0^1 |\phi(t)|^{p(1+1/\mu-1/\lambda)} |f_n(t)| dt \right)^\lambda$$

$$= \left(\int_0^1 |\phi(t)|^{p(1-1/\lambda)} |\phi(t)|^{p/\mu} |f_n(t)| dt \right)^\lambda$$

$$\le \left(\int_0^1 |\phi(t)|^{p((\lambda-1)/\lambda)(\lambda/(\lambda-1))} dt \right)^{\lambda.(\lambda-1)/\lambda} \left(\int_0^1 |\phi(t)|^{p/\mu.\lambda} |f_n(t)|^\lambda dt \right)^{\lambda.1/\lambda}$$

$$= \left(\int_0^1 |\phi(t)|^p dt \right)^{\lambda-1} \int_0^1 |\phi(t)|^{(p/\mu).\lambda} |f_n(t)|^\lambda dt$$

$$= \left(\int_0^1 |\phi(t)|^p dt \right)^{\lambda-1} \int_0^1 |\phi(t)|^{p.\lambda/\mu} |f_n(t)|^{\lambda((\mu-\lambda)/\mu+\lambda/\mu)} dt$$

$$= \left(\xi_0^{(p)}\right)^{\lambda-1} \int_0^1 |f_n(t)|^{\lambda(\mu-\lambda)/\mu} |f_n(t)|^{\lambda.\lambda/\mu} |\phi(t)|^{p.\lambda/\mu} dt$$

$$\le \left(\xi_0^{(p)}\right)^{\lambda-1} \left(\int_0^1 |f_n(t)|^{\lambda(\mu-\lambda)/\mu.\mu/(\mu-\lambda)} dt \right)^{1-\lambda/\mu} \left(\int_0^1 |f_n(t)|^{\lambda.\lambda/\mu.\mu/\lambda} |\phi(t)|^{p.\lambda/\mu.\mu/\lambda} dt \right)^{\lambda/\mu}$$

$$= \left(\xi_0^{(p)}\right)^{\lambda-1} \left(\int_0^1 |f_n(t)|^{\lambda} dt \right)^{1-\lambda/\mu} \left(\int_0^1 |f_n(t)|^{\lambda} |\phi(t)|^p dt \right)^{\lambda/\mu}$$

...(11)

bulunur. (9), (10) ve (11) den

$$|X(\omega_n)|^{\lambda} \le \left(\xi_0^{(p)}\right)^{\lambda-1} \left\{ C_1\left(|\omega_n|^{\lambda}\right)\right\}^{(\mu-\lambda)/\mu} \left(X^{(p)}\left(|\omega_n|^{\lambda}\right)\right)^{\lambda/\mu}$$

elde edilir. Eşitsizliğin her iki tarafının μ/λ kuvveti alınırsa

$$|X(\omega_n)|^{\mu} \le \left(\xi_0^{(p)}\right)^{\mu(1-1/\lambda)} \left\{ C_1\left(|\omega_n|^{\lambda}\right)\right\}^{\mu/\lambda-1} X^{(p)}\left(|\omega_n|^{\lambda}\right)$$

olur.

Teorem 3.1.9:

$\mu > \lambda \ge 1$, $1/p = 1 + 1/\mu - 1/\lambda$ olsun. Ayrıca $\phi(t) \in L^p(0,1)$ $\xi_n = \int_0^1 t^n \phi(t) dt$, $\xi_0 = 1$

olmak üzere $X = (h, \xi_n)$ alalım. Bu durumda her Q matrisi için

$$[C_1, Q]_{\lambda} \Rightarrow [C_1, XQ]_{\mu}$$

dır.

İspat:

X regüler bir Hausdorff matrisi ve $X^{(p)}$, $\nu_n \to 0$ olduğunda $X^{(p)}(\nu_n) \to 0$ olan bir Hausdorff matrisidir. Kabul edelim ki $s_n \to s[C_1, Q]_{\lambda}$ olsun. Kısalık için

$$\omega_n = Q(s_n) - s = \sigma_n - s, \quad \nu_n = C_1\left(|\omega_n|^{\lambda}\right), \quad k = \left(\xi_0^{(p)}\right)^{\mu(1-1/\lambda)} \sup_{n \ge 0} (\nu_n)^{\mu/\lambda - 1}$$

alalım. Bu durumda

$$\nu_n = C_1\left(|\omega_n|^{\lambda}\right) = C_1\left(|Q(s_n) - s|^{\lambda}\right) \to 0$$

olur. $\nu_n \to 0$ olduğundan k sonludur ve Lemma 3.1.8 den

$$C_1\left(|X(\sigma_n) - s|^{\mu}\right) = C_1\left(|X(\omega_n)|^{\mu}\right)$$

$$\le k C_1 X^{(p)}\left(|\omega_n|^{\lambda}\right)$$

$$= k X^{(p)} C_1\left(|\omega_n|^{\lambda}\right)$$

$$= kX^{(p)}(\nu_n) = o(1)$$

elde edilir. Bu ise $s_n \to s[C_1, XQ]_\mu$ olmasıdır. Bu ise ispatı tamamlar.

Sonuç 3.1.10:

Q herhangi bir matris ve

i) $\mu \geq \lambda \geq 1$, $\rho > 1/\lambda - 1/\mu$

veya

ii) $\mu > \lambda > 1$, $\rho = 1/\lambda - 1/\mu$ ise bu taktirde

$$[C_1, Q]_\lambda \Rightarrow [C_1, C_\rho Q]_\mu$$

dır.

İspat:

i) $\lambda = \mu$ durumu Teorem 3.1.3 de P matrisi yerine C_1 matrisi, X matrisi yerine C_ρ matrisi alınmasıyla elde edilir.

$\mu > \lambda$ olduğunu varsayalım ve $1/p = 1 + 1/\mu - 1/\lambda$ olsun. $\phi(t) = \rho(1-t)^{\rho-1}$ olmak üzere $C_\rho = (h, 1/\varepsilon_n^\rho)$ ve

$$1/\varepsilon_n^\rho = \int_0^1 t^n \phi(t) dt$$

olur. Ayrıca $\rho - 1 > -1 - 1/\mu + 1/\lambda = -1/p$, $p(\rho - 1) > -1$ olduğundan

$$\int_0^1 |\phi(t)|^p dt = \int_0^1 \rho^p (1-t)^{p(\rho-1)} dt = \rho^p \int_0^1 t^0 (1-t)^{p(\rho-1)} dt$$

integrali yakınsaktır. Buradan $\phi(t) \in L^p(0,1)$ elde edilir. Böylece Teorem 3.1.9 dan istenen sonuç bulunur.

4.DÖRDÜNCÜ BÖLÜM

Bu bölümde daha önceki bölümlerde ortaya koyduğumuz teorem, lemma ve sonuçların yardımıyla adi, mutlak ve kuvvetli toplanabilme arasındaki ilişkileri ele alacağız.

4.1.Adi, Mutlak ve Kuvvetli Toplanabilme Arasındaki İlişki

Teorem 4.1.1:

P, Q herhangi iki matris ve P regüler ise bu taktirde

i) $\lambda > 0$ için

$$Q \Rightarrow [P, Q]_{\lambda}$$

ii) $\lambda \geq 1$ için

$$[P, Q]_{\lambda} \Rightarrow PQ$$

dır.

İspat:

i) $s_n = \sum_{r=0}^{n} a_r$ olmak üzere, $Q(s_n) = \sigma_n \to s$ ise $|\sigma_n - s|^{\lambda} \to 0$ dır. P regüler olduğundan $P(|\sigma_n - s|^{\lambda}) \to 0$ olur. Bu ise $Q \Rightarrow [P,Q]_{\lambda}$ demektir.

ii) $s_n \to s[P,Q]_{\lambda}$ olsun. Teorem 3.1.1 den $\lambda \geq 1$ olduğundan $s_n \to s[P,Q]_1$ olur.

$$|P(\sigma_n - s)| \leq P(|\sigma_n - s|) = o(1)$$

eşitsizliğinden ve P regüler olduğundan $P(\sigma_n) \to s$ elde edilir. Bu da $[P,Q]_{\lambda} \Rightarrow PQ$ demektir.

Teorem 4.1.1 in (i) şıkkının bir sonucu olarak şunu elde ederiz:

Sonuç 4.1.2:

P,Q regüler matrisler ve $\lambda > 0$ ise bu durumda $[P,Q]_{\lambda}$ regülerdir.

İspat:

$s_n \to s$ olsun. Q regüler olduğundan

$$\sigma_n = Q(s_n) \to s$$

olur. $\sigma_n \to s$ ise $|\sigma_n - s|^{\lambda} \to 0$ dır. P regüler olduğundan

$$P(|\sigma_n - s|^{\lambda}) \to 0$$

olur. Buradan $s_n \to s[P,Q]_{\lambda}$ olur. Şu halde $[P,Q]_{\lambda}$ regülerdir.

Şimdi Teorem 1.1.8 in genelleştirilmesi olan bir teorem verelim.

Teorem 4.1.3:

P regüler bir matris, Q bir matris ve $\lambda \geq 1$ ise bu taktirde bir serinin s ye $[P,Q]_{\lambda}$ toplanabilir olması için gerek ve yeter şart serinin s ye PQ toplanabilir ve 0'a $[P,(1-P)Q]_{\lambda}$ toplanabilir olmasıdır.

İspat:

$\sigma_n = Q(s_n)$, $\tau_n = P(\sigma_n)$ olsun. Bu durumda

$$P\left(|\sigma_n - s|^\lambda\right) = o(1)$$

...(12)

olması için gerek ve yeter şartın

$$\tau_n \to s$$

...(13)

ve

$$P\left(|\sigma_n - \tau_n|^\lambda\right) = o(1)$$

...(14)

olduğunu göstermeliyiz.

i) (12) nin sağlandığını kabul edelim. Bu durumda Teorem 4.1.1(ii) den (13) sağlanır. P regüler olduğundan $P\left(|\tau_n - s|^\lambda\right) = o(1)$ olur. Minkowski eşitsizliğinden ve (12) den

$$\left\{P\left(|\sigma_n - \tau_n|^\lambda\right)\right\}^{1/\lambda} = \left\{\sum_{r=0}^{\infty} p_{n,r}|\sigma_r - \tau_r|^\lambda\right\}^{1/\lambda}$$

$$= \left\{\sum_{r=0}^{\infty} p_{n,r}|(\sigma_r - s) + (s - \tau_r)|^\lambda\right\}^{1/\lambda}$$

$$\leq \left\{\sum_{r=0}^{\infty} p_{n,r}|\sigma_n - s|^\lambda\right\}^{1/\lambda} + \left\{\sum_{r=0}^{\infty} p_{n,r}|\tau_n - s|^\lambda\right\}^{1/\lambda}$$

$$= \left\{P\left(|\sigma_n - s|^\lambda\right)\right\}^{1/\lambda} + \left\{P\left(|\tau_n - s|^\lambda\right)\right\}^{1/\lambda}$$

$$= o(1)$$

olur ve buradan da (14) sağlanır.

ii) (13) ve (14) ün sağlandığını kabul edelim. P regüler olduğundan $P\left(|\tau_n - s|^\lambda\right) = o(1)$ olur. Bu durumda Minkowski eşitsizliğinden ve (14) den

$$\left\{P\left(|\sigma_n - s|^\lambda\right)\right\}^{1/\lambda} = \left\{\sum_{r=0}^{\infty} p_{n,r}|\sigma_r - s|^\lambda\right\}^{1/\lambda}$$

$$= \left\{\sum_{r=0}^{\infty} p_{n,r}|\sigma_r - \tau_r + \tau_r - s|^\lambda\right\}^{1/\lambda}$$

$$\leq \left\{ \sum_{r=0}^{\infty} p_{n,r} \left| \sigma_n - \tau_n \right|^{\lambda} \right\}^{1/\lambda} + \left\{ \sum_{r=0}^{\infty} p_{n,r} \left| \tau_n - s \right|^{\lambda} \right\}^{1/\lambda}$$

$$= o(1)$$

olur ve buradan (12) sağlanır. Böylece ispat tamamlanır.

Teorem 4.1.4:

$\lambda > 1$, $2 > \rho > -1$, X bir Hausdorff matrisi ve $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ serisi **i)** $\left|C_1 X, 0\right|_{\lambda}$ toplanabilirse ve **ii)** s'ye $AC_{\rho}X$ toplanabilirse, seri s'ye $\left[C_1, X\right]_{\lambda}$ toplanabilirdir.

$\lambda = 1$ için (ii) şartına gerek yoktur.

İspat:

$s_n = \sum_{r=0}^{n} a_r$, $\tau_n = C_1 X(na_n)$, $\sigma_n = C_1 X(s_n)$ olsun. Bu durumda

$$\tau_n = C_1 X(na_n) = n(\sigma_n - \sigma_{n-1})$$

olur. (i) hipotezinden yani seri $\left|C_1 X, 0\right|_{\lambda}$ toplanabilir olduğundan

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{\lambda-1} \left| \sigma_n - \sigma_{n-1} \right|^{\lambda} < \infty$$

dur. Buradan

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{\lambda-1} \left| \sigma_n - \sigma_{n-1} \right|^{\lambda} = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-1} \left| n(\sigma_n - \sigma_{n-1}) \right|^{\lambda} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left|\tau_n\right|^{\lambda}}{n} < \infty$$

bulunur. Dolayısıyla

$$\frac{1}{n+1} \sum_{r=1}^{n} \left|\tau_r\right|^{\lambda} = \frac{1}{n+1} \sum_{r=1}^{n} \frac{r\left|\tau_r\right|^{\lambda}}{r} - \sum_{r=1}^{n} \frac{\left|\tau_r\right|^{\lambda}}{r} + \sum_{r=1}^{n} \frac{\left|\tau_r\right|^{\lambda}}{r}$$

$$= \sum_{r=1}^{n} \frac{\left|\tau_r\right|^{\lambda}}{r} + \frac{1}{n+1} \sum_{r=1}^{n} \frac{r\left|\tau_r\right|^{\lambda}}{r} - \frac{1}{n+1} \sum_{r=1}^{n} (n+1) \frac{\left|\tau_r\right|^{\lambda}}{r}$$

$$= \sum_{r=1}^{n} \frac{\left|\tau_r\right|^{\lambda}}{r} - \frac{1}{n+1} \sum_{r=1}^{n} (n+1-r) \frac{\left|\tau_r\right|^{\lambda}}{r}$$

$$= o(1)$$

elde edilir. Bu durumda

$$\frac{1}{n+1}\sum_{r=1}^{n}|\tau_r|^{\lambda} = \frac{1}{n+1}\sum_{r=1}^{n}|C_1X(ra_r)-0|^{\lambda} = o(1)$$

olduğuna göre

$$na_n \to 0[C_1, C_1X]_{\lambda}$$

olur. Nihayet, Sonuç 3.1.5 den ispatı tamamlamak için

$$s_n \to s(C_1X)$$

...(15)

olduğunu göstermemiz yeterlidir. $\lambda = 1$ olduğunda (15), (i) hipotezinden elde edilir. Dolayısıyla (ii) hipotezi gereksizdir. Çünkü $\lambda = 1$ için (i) hipotezine göre seri $|C_1X,0|_1$ toplanabilir olduğuna göre

$$\sum_{n=1}^{\infty}|C_1X(s_n)-C_1X(s_{n-1})| = \sum_{n=1}^{\infty}|\sigma_n - \sigma_{n-1}| < \infty$$

olur. Bu ise (σ_n) dizisinin yakınsak olması yani

$$s_n \to s(C_1X)$$

olmasıdır.

Şimdi $\lambda > 1$ ve $2 > \rho \geq 1 + 1/\lambda$ olduğunu varsayalım. Diyelim ki

$$C_\rho X(s_n) = \omega_n = \sum_{r=0}^{n} u_r$$

olsun. $C_\rho X(na_n) = n(\omega_n - \omega_{n-1})$ $(n = 1,2,...)$ olduğu için

$$nu_n = C_\rho X(na_n)$$

olur. Bu durumda (ii) den

$$\omega_n \to s(A)$$

...(16)

bulunur, yani $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ serisi s'ye A toplanabilirdir. Öte yandan, $\rho - 1 > 1/\lambda - 1/\mu$ ve olduğuna göre Sonuç 2.1.8 nedeniyle

$$|C_1X,0|_{\lambda} \Rightarrow |C_{1+\rho-1}X,0|_{\mu} = |C_\rho X,0|_{\mu} \qquad (\mu > \lambda)$$

olur. Dolayısıyla (ii) den seri $|C_\rho X,0|_{\mu}$ toplanabilir yani

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{\mu-1}\left|\omega_n-\omega_{n-1}\right|^{\mu}=\sum_{n=1}^{\infty} n^{\mu-1}\left|\sum_{r=0}^{n} u_r-\sum_{r=0}^{n-1} u_r\right|^{\mu}$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty} n^{\mu-1}\left|u_n\right|^{\mu}$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left|nu_n\right|^{\mu}}{n}<\infty$$

...(17)

dır. Teorem 1.1.10, (16) ve (17) nedeniyle her $\delta>1/\mu-1$ için $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ serisi s'ye (C,δ) toplanabilirdir, yani

$$C_\delta(\omega_n)\to s$$

...(18)

olur. μ istenildiği kadar büyük alınırsa her $\delta>-1$ için (18) sağlanır. Sonuç olarak $\delta=1-\rho$ alınırsa, $C_{1-\rho}C_\rho\cong C_1$ olduğundan

$$C_{1-\rho}(\omega_n)=C_{1-\rho}C_\rho X(s_n)=C_1X(s_n)\to s$$

elde edilir. Bu durumda (15) sağlanır. Bu da ispatı tamamlar.

Teorem 4.1.5:

X bir Hausdorff matrisi, $\lambda\geq 1$, $\alpha>\gamma>0$, $\beta\geq\alpha-\gamma-1$ ise bu taktirde

$$\left|C_\alpha X,\gamma\right|_\lambda \Rightarrow \left[C_1, C_\beta X\right]_\lambda$$

dır.

İspat:

$Y=C_1^{-1}C_{\alpha-\gamma}X$ olsun. Bu durumda (2) den

$$Y\cong C_{\alpha-\gamma-1}X \quad \text{ve} \quad C_{\gamma+1}Y\cong C_\alpha X$$

olur. Dolayısıyla Lemma 2.1.7 de $\mu=1, \delta=0, \beta=\alpha$ alınırsa ve Teorem 1.1.23 den her $\rho>-1$ için

$$\left|C_\alpha X,\gamma\right|_\lambda \Rightarrow \left|C_\alpha X,0\right|_1 \Rightarrow C_\alpha X \Rightarrow AC_\rho Y$$

bulunur. Ayrıca Lemma 2.1.7(i) de $\delta=0$, $\beta=\alpha-\gamma$ alınırsa

$$\left|C_\alpha X,\gamma\right|_\lambda \Rightarrow \left|C_{\alpha-\gamma}X,0\right|_\lambda=\left|C_1Y,0\right|_\lambda$$

bulunur. Şu halde $\beta \geq \alpha - \gamma - 1$ olduğundan $Y \cong C_{\alpha-\gamma-1}X \Rightarrow C_\beta X$ olduğu için Sonuç 3.1.4 ve Teorem 4.1.4 den

$$\left|C_\alpha X, \gamma\right|_\lambda \Rightarrow [C_1, Y]_\lambda \Rightarrow [C_1, C_\beta X]_\lambda$$

elde edilir.

Teorem 4.1.4 ve Teorem 4.1.5 göz önüne alınarak bazı sonuçlar verilebilir. Öncelikle şu iki basit sonucu ifade edelim.

Sonuç 4.1.6:

$\lambda > 1,\ \beta > \alpha - 1 + 1/\lambda$ ise

$$[H, \alpha]_\lambda \Rightarrow (H, \beta)$$

dır.

İspat:

$\beta - \alpha + 1 > 1/\lambda$ olduğuna göre Teorem 3.1.2 den

$$[H, \alpha]_\lambda \cong [C, \alpha]_\lambda \cong [C_1, C_{\alpha-1}]_\lambda \cong [C_1, H_{\alpha-1}]_\lambda \Rightarrow [C_{\beta-\alpha+1}, H_{\alpha-1}]_1$$

elde edilir. Teorem 4.1.1(ii) ve Teorem 1.1.13 den

$$[H, \alpha]_\lambda \Rightarrow C_{\beta-\alpha+1} H_{\alpha-1} \cong H_\beta$$

bulunur. Bu da ispatı tamamlar.

Benzer olarak şu sonucu da verebiliriz.

Sonuç 4.1.7:

$\lambda > 1,\ \beta > \alpha - 1 + 1/\lambda,\ \alpha \geq 0$ ise

$$[C, \alpha]_\lambda \Rightarrow (C, \beta)$$

dır.

Bu sonucun $\alpha = 1$, $\alpha > 1/\lambda$ ve $\alpha > 0$ durumları sırasıyla Kuttner (1946), Hyslop (1951) ve Chow'a (1954) aittir.

Sonuç 4.1.8:

$\lambda > 1,\ 1+\alpha > \rho$ olsun. Eğer $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ serisi

i) $|H,\alpha,0|_\lambda$ toplanabilir ve **ii)** s ye AH_ρ toplanabilir ise bu taktirde seri s ye $[H,\alpha]_\lambda$ toplanabilirdir. Dolayısıyla Sonuç 4.1.6 dan her $\beta > \alpha - 1 + 1/\lambda$ için s ye (H,β) toplanabilirdir.

İspat:

δ, $2 > \delta \geq \rho + 1 - \alpha$ olacak şekilde ise pozitif bir sayı olsun. Bu durumda Teorem 1.1.13 den

$$H_\rho \Rightarrow H_\delta H_{\alpha-1} \cong C_\delta H_{\alpha-1}$$

olur. Teorem 1.1.22 den

$$AH_\rho \Rightarrow AC_\delta H_{\alpha-1}$$

elde edilir. Teorem 4.1.4 de $\lambda > 1,\ 2 > \delta > -1$ için ρ yerine δ, $X = H_{\alpha-1}$ olarak alınırsa $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$, $|C_1 H_{\alpha-1},0|_\lambda$ toplanabilir ve s ye $AC_\delta H_{\alpha-1}$ toplanabilir olduğundan, seri s ye $[C_1, H_{\alpha-1}]_\lambda$ toplanabilirdir. Sonuç 4.1.6 nın uygulanmasıyla

$$[C_1, H_{\alpha-1}]_\lambda \cong [H,\alpha]_\lambda \Rightarrow (H,\beta)$$

elde edilir.

Benzer şekilde aşağıdaki sonuç ispat edilebilir.

Sonuç 4.1.9:

Eğer $\lambda > 1,\ 1+\alpha > \rho \geq 0,\ \beta > \alpha - 1 + 1/\lambda$ ve $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ serisi **i)** $|C,\alpha,0|_\lambda$ toplanabilir ve
ii) s ye AC_ρ toplanabilir ise bu taktirde seri s ye (H,β) toplanabilirdir.

Sonuç 4.1.10:

$\lambda > 1,\ \gamma > 0,\ \beta > \alpha - 1 - \gamma + 1/\lambda$ ise

$$|H,\alpha,\gamma|_\lambda \Rightarrow [H,\alpha-\gamma]_\lambda \Rightarrow (H,\beta)$$

dır.

İspat:

$\rho > \gamma$ olmak üzere $X = C_{\rho}^{-1} H_{\alpha}$ olsun. Bu durumda $C_{\rho} X = H_{\alpha}$ olduğundan ve Teorem 1.1.13 den

$$C_{\rho-\gamma-1} X \cong H_{\alpha-\gamma-1}$$

olur. Teorem 4.1.5 de α yerine ρ, β yerine $\rho-\gamma-1$ alınırsa, Sonuç 3.1.4 ve Sonuç 4.1.6 dan

$$|H, \alpha, \gamma|_{\lambda} = |C_{\rho} X, \gamma|_{\lambda} \Rightarrow [C_1, C_{\rho-\gamma-1} X]_{\lambda} \cong [H_1, H_{\alpha-\gamma-1}]_{\lambda} = [H, \alpha-\gamma]_{\lambda} \Rightarrow (H, \beta)$$

bulunur.

Benzer yolla aşağıdaki sonuç da ispat edilebilir.

Sonuç 4.1.11:

$\lambda > 1$, $\alpha > -1$, $\gamma > 0$, $\beta > \alpha - 1 - \gamma + 1/\lambda$ ise

$$|C, \alpha, \gamma|_{\lambda} \Rightarrow (H, \beta)$$

dır.

Bu sonucun $\alpha > \gamma - 1/\lambda$ durumu Flett (1958) tarafından ispat edilmiştir.

KAYNAKLAR

Borwein, D., (1958) Theorems On Some Methods of Summability. Proc. Quart. J. Math. Oxford (2), 9: 310-316.

Borwein, D., (1959) On Strong and Absolute Summability. Proc. Glosgow Math. Assoc. (4): 122-139.

Chow, H.C., (1954) A Further Note On the Summability of A Power Series On Its Circle of Convergence. Ann. Acad. Sinica, 1: 559-567.

Flett, T.M., (1957) On An Extension of Absolute Summability and Some Theorems of Littlewood and Paley. Proc. London Math. Soc.(3), 7: 113-141.

Flett, T.M., (1958) Some More Theorems Concerning the Absolute Summability of Fourier Series and Power series. 8: 357-387.

Hardy, G.H., (1949) Divergent Series, Oxford.

Hyslop, J.M., (1951) Note On the Strong Summability of Series. Proc. Glasgow Math. Assoc., 1: 16-20.

Kuttner, B., Note On Strong Summability. J. London Math. Soc., 21: 118-122.

Rogosinski, W.W., (1942) On Hausdorff Methods of Summability. Proc. Mathematical Proceedings, 38: 166-192.

Marsden, J.E., (1973) Basic Complex Analysis, San Francisco.

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı	:Gülseli ERMEZ
Ana Adı	:Cemile
Baba Adı	:Süleyman
Doğum Yeri ve Tarihi	:DENİZLİ, 26.10.1979
Lisans Eğitimi ve Mezuniyet Tarihi	:Pamukkale Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü, 2003
Çalıştığı Yer	:Pamukkale Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü
Bildiği Yabancı Diller	:İngilizce
Mesleki Etkinlikleri	:Pamukkale Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü Araştırma Görevlisi