MUTLAK RİESZ TOPLANABİLME METOTLARININ TOPLANABİLME ÇARPANLARI ÜZERİNE

İbrahim Ethem ÖZER

Temmuz 2006
DENİZLİ

MUTLAK RİESZ TOPLANABİLME METOTLARININ TOPLANABİLME ÇARPANLARI ÜZERİNE

Pamukkale Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Yüksek Lisans Tezi
Matematik Anabilim Dalı

İbrahim Ethem ÖZER

Danışman: Prof. Dr. Mehmet Ali SARIGÖL

Temmuz 2006
DENİZLİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ ONAY FORMU

İbrahim Ethem ÖZER tarafından Prof. Dr. Mehmet Ali SARIGÖL yönetiminde hazırlanan "Mutlak Riesz Toplanabilme Metodlarının Toplanabilme Çarpanları üzerine" başlıklı tez tarafımızdan okunmuş, kapsamı ve niteliği açısından bir Yüksek Lisans Tezi olarak kabul edilmiştir.

Prof. Dr. Mehmet Ali SARIGÖL
Jüri Başkanı

Doç. Dr. Sadulla Jafarov
Jüri Üyesi

Doç. Dr. Murat Alp
Jüri Üyesi

Pamukkale Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun …../…../2006 tarih ve …………sayılı kararıyla onaylanmıştır.

Prof. Dr. Mehmet Ali SARIGÖL
Müdür

Bu tezin tasarımı, hazırlanması, yürütülmesi, araştırmaların yapılması ve bulgularının analizlerinde bilimsel etiğe ve akademik kurallara özenle riayet edildiğini; bu çalışmanın doğrudan birincil ürünü olmayan bulguların, verilerin ve materyallerin bilimsel etiğe uygun olarak kaynak gösterildiğini ve alıntı yapılan çalışmalara atfedildiğini beyan ederim.

İmza :

Öğrenci Adı Soyadı : İbrahim Ethem ÖZER

TEŞEKKÜR

Bu tez çalışmasında her zaman bana güvenmiş ve destek olmuş olan aileme, bu konuda çalışmamı sağlayan ve çalışmalarım süresince her türlü ilgi ve yardımını esirgemeyen değerli hocam Sayın Prof. Dr. Mehmet Ali SARIGÖL'e ve Pamukkale Üniversitesi Matematik Bölümündeki tüm öğretim elemanlarına gönülden teşekkür ederim.

ÖZET

MUTLAK RİESZ TOPLANABİLME METODLARININ TOPLANABİLME ÇARPANLARI ÜZERİNE

Özer, İbrahim Ethem
Yüksek Lisans Tezi, Matematik ABD
Tez Yöneticisi: Prof. Dr. Mehmet Ali SARIGÖL

Temmuz 2006, 39 Sayfa

Üç bölümden oluşan bu çalışmada toplanabilme teorisi alanında önemli bir yer tutan mutlak Riesz Toplanabilme metotları ve bu metotların toplanabilme çarpanları incelenmiştir.

Birinci bölümde, ikinci ve üçüncü bölümde kullanacağımız temel tanım ve teoremler verilmiştir.

İkinci bölümde mutlak Riesz toplanabilme metotları ile tanımlanan dizi uzaylarının temel özelliklerinin yanı sıra kullandığımız bazı lemmaların sadece ifadeleri veya ispatları verilmiştir.

Üçüncü bölümde toplanabilme çarpanlarını karakterize eden temel teoremler ile bazı sonuçları verilmiştir.

Anahtar kelimeler: Mutlak Riesz toplanabilme, toplanabilme çarpanları.

Prof. Dr. Mehmet Ali SARIGÖL
Doç. Dr. Sadulla JAFAROV
Doç. Dr. Murat ALP

ABSTRACT

ON SUMMABİLİTY FACTORS OF ABSOLUTE RİESZ SUMMABİLİTY METHODS

Özer, İbrahim Ethem
M. Sc. Thesis in Mathematics
Supervisor: Prof. Dr. Mehmet Ali SARIGÖL

July 2006, 39 Pages

In this study which is prepared as three chapters, Riesz Summability Methods that are important in Summability Theory and these methods' summability factors are examined.

In the first chapter, basic definitions and theorems that will be used in the others are given.

In the second chapter, the basic properties of the sequence spaces defined by Absolute Riesz Summability Methods and some lemmas with or without their proofs that we used are given.

In the third chapter, The theorems which chracterize summability factors and some corollaries are given.

Keywords: Absolute Riesz summability, Inclusion, summability factors.

Prof. Dr. Mehmet Ali SARIGÖL
Assoc. Prof. Dr. Sadulla JAFAROV
Assoc. Prof. Dr. Murat ALP

İÇİNDEKİLER

ÜÇÜNCÜ BÖLÜM

SİMGE VE KISALTMALAR DİZİNİ

$\mathbb{C}$	Kompleks sayılar cümlesi.
BV	Sınırlı salınımlı diziler uzayı.
C	Kompleks veya reel terimli yakınsak diziler uzayı.
l_∞	Kompleks veya reel terimli sınırlı diziler uzayı.
l_p	$\{ x = (x_k) : \sum_{k=1}^{\infty} \lvert x_k \rvert^p < \infty , p > 0 , \ \forall x_k$ reel veya kompleks sayıdır. $\}$
$(C,1)$	1. mertebeden Cesáro toplanabilme.
$\lvert C,1 \rvert_k$	k indisli 1. mertebeden mutlak Cesáro toplanabilme.
$(\overline{N}, p_n)$	Riesz ortalaması.
$\lvert \overline{N}, p_n \rvert_k$	k indisli 1. mertebeden mutlak Riesz toplanabilme
$[A, B]$	$\sum x_n$ serisi A toplanabilir olduğunda $\sum x_n \lambda_n$ serisi B toplanabilir

olacak

şekilde tüm $\lambda = (\lambda_n)$ dizilerinin cümlesi.

BİRİNCİ BÖLÜM

Bu bölümde, bundan sonraki bölümlerde kullanılacak olan temel tanım ve teoremler ifade edilecektir.

1.1 Temel Tanım ve Teoremler:

Tanım 1.1.1 (Lineer uzay):

X boş olmayan bir cümle, F reel veya kompleks sayıların bir cismi olsun. Bu durumda,

$$T : XxX \to X, \quad T(x, y) = x + y$$

$$Ç : FxX \to X, \quad Ç(\alpha, x) = \alpha.x$$

fonksiyonları $\forall\, x, y, z \in X$ ve $\forall\, \alpha, \beta \in F$ için aşağıdaki şartları sağlıyorsa, X cümlesine F cismi üzerinde bir lineer uzay (vektör uzay) denir;

1) $x + y \in X$
2) $x + (y + z) = (x + y) + z$
3) $x + \theta = \theta + x = x$ olacak şekilde bir tek $\theta \in X$ vardır.
4) $x + (-x) = (-x) + x = \theta$ olacak şekilde bir tek $(-x) \in X$ vardır.
5) $x + y = y + x$
6) $\alpha.x \in X$
7) $(\alpha + \beta).x = \alpha.x + \beta.x$
8) $(\alpha.\beta).x = \alpha.(\beta.x)$
9) $1.x = x$

Tanım 1.1.2 (Lineer dönüşüm) :

L ve L' aynı F cismi üzerinde iki lineer uzay olmak üzere $T : L \to L'$ dönüşümü verilmiş olsun. Eğer $\forall x, y \in L$ ve $\alpha \in F$ için

$$T(x+y) = T(x) + T(y)$$

$$T(\alpha . x) = \alpha . T(x)$$

şartları sağlanıyorsa T'ye Lineer dönüşüm denir. Özel olarak Kompleks değerli lineer dönüşüme ise lineer fonksiyonel adı verilir.

Tanım 1.1.3 (Sınırlı lineer dönüşüm):

X ve Y iki normlu uzay ve $T: X \to Y$ lineer dönüşüm olsun. Eğer $\forall x \in X$ için

$$\|T(x)\| \leq K.\|x\|$$

olacak şekilde K>0 reel sayısı varsa T'ye sınırlı lineer dönüşüm denir. Bir sınırlı lineer dönüşümün normu ise,

$$\|T\| = \sup_{x \neq o} \frac{\|T(x)\|}{\|x\|}$$

biçiminde tanımlanır.

Teorem 1.1.4 : X ve Y iki normlu uzay ve $T: X \to Y$ lineer dönüşüm olsun. Bu takdirde T dönüşümünün sürekli olması için gerek ve yeter şart T'nin sınırlı olmasıdır (Bayraktar, 1998).

Tanım 1.1.5 (Norm ve Normlu uzay) :

X, F cismi üzerinde bir lineer uzay olsun. Eğer $\| \; \| : X \to R$ fonksiyonu $\forall x, y \in X$ ve $\forall \alpha \in \mathbb{C}$ için

N_1) $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = \theta$

N_2) $\|\alpha x\| = |\alpha| . \|x\|$

N_3) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

şartlarını sağlıyorsa, $\| \ \|$ fonksiyonuna X üzerinde bir norm ve $(X,\| . \|)$ ikilisine normlu lineer uzay veya kısaca normlu uzay denir.

Tanım 1.1.6 (Yarınormlu uzay) :

X bir lineer uzay olsun. Eğer $P : X \to R$ fonksiyonu aşağıdaki şartları sağlıyorsa, P'ye X üzerinde bir yarınorm, (X,P) ikilisine de yarınormlu uzay adı verilir.

$Y_1)$ $P(\alpha.x) = |\alpha|.P(x)$ $(\forall x \in X,\ \forall \alpha \in \mathbb{C})$

$Y_2)$ $P(x+y) \le P(x) + P(y)$ $(\forall x, y \in X)$

Tanım 1.1.7 : A bir cümle, B yarınormlu uzay ve Φ, $f : A \to B$ olacak şekilde fonksiyonların ailesi olsun. Eğer her bir $a \in A$ için $\{f(a) : f \in \Phi\}$ B'de sınırlı bir cümle ise Φ'ye noktasal sınırlıdır denir (Wilansky 1964).

Tanım 1.1.8 : A ve B yarınormlu uzay Φ, $f : A \to B$ lineer fonksiyonların bir ailesi veya A üzerinde tanımlı yarınormlar olsun. $\forall f \in \Phi$ için $\|f\| \le M$ olacak şekilde bir M sayısı varsa Φ'ye düzgün sınırlıdır denir (Wilansky 1964).

Teorem 1.1.9 (Resonance Teoremi) :

Φ tam yarınormlu uzay üzerinde tanımlı sürekli yarınormların noktasal sınırlı bir ailesi olsun. Bu takdirde Φ düzgün sınırlıdır (Wilansky 1964).

Tanım 1.1.10 (Cauchy dizisi) :

(x_n), $(X,\| \ \|)$ normlu uzayında bir dizi olsun.Eğer $\forall \varepsilon > 0$ için $m, n > n_0$ olduğunda $\|x_m - x_n\| < \varepsilon$ olacak şekilde bir n_0 sayısı bulunabiliyorsa, (x_n) dizisine X'de bir Cauchy dizisi denir.

Tanım 1.1.11 (Normlu uzayda yakınsaklık) :

(x_n), $(X,\| \|)$ normlu uzayında bir dizi ve $x \in X$ olsun.Eğer $\forall \varepsilon > 0$ sayısına karşılık $n > n_0$ olduğunda $\|x_n - x\| < \varepsilon$ olacak şekilde bir n_0 sayısı varsa, (x_n) dizisi x noktasına yakınsaktır denir ve

$$x_n \to x \quad \text{veya} \quad \lim_n x_n = x$$

biçiminde gösterilir. Norm fonksiyonunun özelliğinden

$$\|x_n - x_m\| = \|x_n - s + s - x_m\| \leq \|x_n - s\| + \|x_m - s\|$$

olduğu açıktır. Buna göre Normlu bir uzayda yakınsak her dizi aynı zamanda bir Cauchy dizisidir. Bu iddianın karşıtı ise her normlu uzayda doğru değildir.

Tanım 1.1.12 (Banach uzayı) :

$(X,\| \|)$ normlu uzayı olsun. Eğer X'de alınan her Cauchy dizisi $\| \|$ normuna göre yakınsak ise bu uzaya Banach uzayı (tam uzay) denir.

Tanım 1.1.13 (Banach - Steinhause teoremi) :

Eğer (A_n) bir X Banach uzayından Y normlu uzayı içine sınırlı lineer dönüşümlerin bir dizisi ve X üzerinde $\sup_n \|A_n(x)\| < \infty$ ise bu takdirde $\sup_n \|A_n\| < \infty$'dur. Yani ($\|A_n\|$) normlar dizisi sınırlıdır.

Tanım 1.1.14 (Matris Dönüşümü) :

$A = (a_{nk})$, (n,k=1,2,…) kompleks veya reel terimli sonsuz bir matris, X ile Y'de herhangi iki dizi uzayını göstersin. Eğer $\forall x = (x_k) \in X$ için,

$$A_n(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} x_k \qquad (\text{n= } 1, 2, \ldots)$$

serisi yakınsak ve $A(x)=(A_n(x))\in Y$ ise bu takdirde A'ya X'den Y'ye bir matris dönüşümü denir. X'den Y'ye olan bütün matris dönüşümlerinin kümesi (X,Y) ile gösterilir. Hemen görüleceği gibi matris dönüşümleri özel lineer dönüşümlerdir.

Bu arada bütün kompleks veya reel terimli bütün dizilerin kümesi s ile gösterilir. Açıktır ki, s kümesi $x=(x_k)$, $y=(y_k)\in s$ ve $\alpha\in \mathbb{C}$ için

$$x+y=(x_k+y_k) \quad , \quad \alpha x=(\alpha x_k)$$

işlemlerine göre lineer uzaydır. Öte yandan

$$BV=\left\{x=(x_k):\sum_{k=1}^{\infty}\left|x_k-x_{k+1}\right|<\infty\right\}$$

$$C=\left\{x=(x_k):\lim_k x_k \text{ mevcut}\right\}$$

$$l_\infty=\left\{x=(x_k):\sup_k\left|x_k\right|<\infty\right\}$$

$$l_p=\left\{x=(x_k):\sum_{k=1}^{\infty}\left|x_k\right|^p<\infty , p>0\right\}$$

dizi uzayları, normlarına göre Banach uzayıdır.

Lemma 1.1.15 : $1\le k<\infty$ olsun. $T=(a_{nv})\in(l_1,l_k)\Leftrightarrow \sup_v\sum_{n=1}^{\infty}\left|a_{nv}\right|^k<\infty$ (Maddox 1970).

Lemma 1.1.16 : $1\le k<\infty$, $1\le r<\infty$ olsun. $x=(x_n)$, $y=(y_n)$, $u=(u_n)$, $v=(v_n)$ dizilerini,

$$y_n=\sum_{v=0}^{\infty}a_{nv}x_v \quad (n=0,1,2,\ldots)$$

$$v_v=\sum_{n=0}^{\infty}a_{nv}u_v \quad (v=0,1,2,\ldots)$$

şeklinde tanımlayalım. Bu takdirde $\forall x\in l_k$ için $y\in l_r$ olması için gerek ve yeter şart $\forall u\in l_{r^*}$ için $v\in l_{k^*}$ olmasıdır. Burada r^* ve k^* sırasıyla ve r ve k'nın eşleniğidir (Mehdi 1959).

Lemma 1.1.17 : $1 < k < \infty$ olsun. Eğer $A = (a_{nv}) \in (l_k, l_1)$ ise bu takdirde $(a_{nn}) \in l_{k^*}$ 'dır (Mehdi 1959).

Teorem 1.1.18 (Minkowski Eşitsizliği) :

$p \geq 1$, $a_1, a_2, ..., a_n \geq 0$, $b_1, b_2, ..., b_n \geq 0$ olsun. Bu takdirde

$$\left(\sum_{k=1}^{n} (a_k + b_k)^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{k=1}^{n} a_k{}^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{k=1}^{n} b_k{}^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

olur.

Teorem 1.1.19 (Hölder eşitsizliği) :

$p>1$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, $a_1, a_2, ..., a_n \geq 0$ ve $b_1, b_2, ..., b_n \geq 0$

olsun. Bu takdirde,

$$\sum_{k=1}^{n} a_k . b_k \leq \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^p \right)^{\frac{1}{p}} . \left(\sum_{k=1}^{n} b_k^q \right)^{\frac{1}{q}}$$

dır.

İKİNCİ BÖLÜM

Bu bölümde mutlak Riesz toplanabilme metotları ile tanımlanan dizi uzaylarının temel özelliklerinin yanısıra kullandığımız bazı lemmaların sadece ifadelerini veya ispatlarını vereceğiz.

Tanım 2.1: $\sum x_n$ kısmi toplamlar dizisi (s_n) olan bir seri olsun. Bu durumda

$$u_n = \frac{1}{n+1}\sum_{v=o}^{n} s_v$$

eşitliği ile tanımlı (u_n) dizisine $\sum x_n$ serisinin birinci mertebeden Cesáro ortalaması denir. Eğer $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = s$ ise $\sum x_n$ serisi s'ye $(C,1)$ toplanabilir ve $u = (u_n) \in BV$, yani

$$\sum_{n=1}^{\infty} |u_n - u_{n-1}| < \infty$$

ise $|C,1|$ toplanabilirdir denir. Eğer $k \geq 1$ için

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{k-1} |u_n(x) - u_{n-1}(x)|^k < \infty$$

ise $\sum x_n$ serisi $|C,1|_k$ toplanabilirdir denir (Flett 1957).

Tanım 2.2: $\sum x_n$ kısmi toplamlar dizisi (s_n) olan bir seri ve (p_n) ise

$$P_n = p_0 + p_1 + p_2 + \ldots + p_n \to \infty \quad (n \to \infty) \quad , P_{-1} = p_{-1} = 0$$

olacak şekilde pozitif sayıların bir dizisi olsun. Bu durumda $\forall n \in IN$ için

$$u_n = \frac{1}{P_n}\sum_{v=o}^{n} p_v s_v = \frac{1}{P_n}\sum_{v=0}^{n} (P_n - P_{v-1}) x_v$$

biçiminde tanımlanan (u_n)'e (s_n) dizisinin $(\overline{N},p_n)$ (Riesz ortalaması) dönüşüm dizisi denir. Bu dönüşüme karşılık gelen $A=(a_{nv})$ matrisi,

$$a_{nv}=\begin{cases}\dfrac{p_v}{P_n}, & 0\le v\le n\\ 0, & v>n\end{cases}$$

dır. Eğer $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = s$ ise $\sum x_n$ serisine (veya (s_n) dizisine) s'ye $(\overline{N},p_n)$ toplanabilir (limitlenebilirdir) denir.

Tanım 2.3: $\sum x_n$ kısmi toplamlar dizisi (s_n) olan bir seri olsun. $u_n(x)$, (s_n) dizisinin $(\overline{N},p_n)$ ortalaması olmak üzere eğer $(u_n(x))$ sınırlı salınımlı yani

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|u_n(x)-u_{n-1}(x)\right|<\infty$$

ise bu takdirde $\sum x_n$ serisine $\left|\overline{N},p_n\right|$ toplanabilirdir denir. Açıktır ki, $\forall n$ için $p_n=1$ alınırsa $\left|\overline{N},p_n\right|$ metodu $|C,1|$ metoduna indirgenir.

Tanım 2.4: $(u_n(x))$, $\sum x_n$ serisinin $(\overline{N},p_n)$ ortalaması olsun. Eğer $k\ge 1$ için

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{P_n}{p_n}\right)^{k-1}\left|u_n(x)-u_{n-1}(x)\right|^k<\infty$$

ise bu takdirde $\sum x_n$ serisine $\left|\overline{N},p_n\right|_k$ toplanabilirdir denir (Bor 1985). Eğer k=1 alınırsa $\left|\overline{N},p_n\right|_k$ toplanabilme metodu, $\left|\overline{N},p_n\right|$ toplanabilme metoduna dönüşür. Ayrıca $\forall n$ için $p_n=1$ alırsak $\left|\overline{N},p_n\right|_k$ toplanabilme metodu, $|C,1|_k$ toplanabilmeye dönüşür.

Tanım 2.5: $\sum x_n$ kısmi toplamlar dizisi $s=(s_n)$ olan bir seri ve $A=(a_{nv})$ pozitif normal bir matris olsun. s dizisinin A dönüşüm dizisini $A(s)=(A_n(s))$ ile gösterelim, yani,

$$A_n(s)=\sum_{v=0}^{n}a_{nv}s_v \qquad (n=0,1,2,\dots)$$

alalım. Eğer,

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_{nn}|^{1-k} |A_n(s) - A_{n-1}(s)|^k < \infty$$

ise $\sum x_n$ serisi $|A|_k$ toplanabilirdir denir (Sarıgöl 1994). Açıktır ki A'nın Riesz matrisi olması durumunda $|A|_k$ toplanabilme metodu $|\bar{N}, p_n|_k$ toplanabilme metoduna indirgenir.

Tanım 2.6: $\sum x_n$ herhangi bir seri ve A ile B iki toplanabilme metodu olsun. Eğer A toplanabilen her $\sum x_n$ serisi için $\sum x_n \lambda_n$ serisi B toplanabiliyorsa, bu takdirde $\lambda = (\lambda_n)$'e A'dan B'ye bir toplanabilme dizisi denir ve $[A, B]$ biçiminde gösterilir (Sarıgöl ve Bor 1995).

Tanım 2.7: Pozitif terimli (a_n) ve (b_n) dizileri verilsin. Eğer her $n \geq n_0$ için $a_n \leq c.b_n$ olacak şekilde $c > 0$ ve $n_0 \geq 1$ tamsayısı varsa, $a_n = O(b_n)$, $n \to \infty$ şeklinde yazılır.

Tanım 2.8: A ve B verilen iki toplanabilme metodu olsun. Eğer A toplanabilen her dizi aynı zamanda B toplanabiliyorsa A , B'yi gerektirir denir ve $A \Rightarrow B$ ile gösterilir. Eğer $A \Rightarrow B$ ve $B \Rightarrow A$ ise A metodu B metoduna denktir denir ve $A \Leftrightarrow B$ ile gösterilir.

Teorem 2.9: Eğer pozitif sabitlerin (p_n) dizisi için $np_n = O(P_n)$ ve $P_n = O(np_n)$ şartları sağlanıyorsa, bu takdirde $|C,1|_k \Rightarrow |\bar{N}, p_n|_k$'dır (Bor 1985).

Şimdi ifade ve ispatından çokca yararlandığımız bir lemmayı ifade ve ispat verelim.

Lemma 2.10: Kabul edelim ki $k > 0$ ve $n \to \infty$ için $P_n = p_0 + p_1 + ... + p_n \to \infty$ olsun. Bu takdirde $\forall$ v ≥ 1 için

$$\frac{M}{P_{v-1}^k} \leq \sum_{n=v}^{\infty} \frac{p_n}{P_n P_{n-1}^k} \leq \frac{N}{P_{v-1}^k}$$

olacak şekilde (p_n) dizisinden bağımsız pozitif M ve N sabitleri vardır (Sarıgöl 1991).

İspat: $f:[0,1) \to R$

$$f(x)=\frac{1}{1-x}(1-x^{\frac{1}{k}})$$

fonksiyonunu gözönüne alalım. Açıktır ki bu fonksiyon sürekli ve pozitiftir. Öte yandan

$$x \to 1-0 \quad \text{için} \quad f(x) \to \frac{1}{k} \quad . \text{ Çünkü , } \lim_{x\to 1-0} f(x)=\lim_{x\to 1-0}\frac{(1-x^{\frac{1}{k}})}{1-x}=\frac{0}{0}$$

belirsizliği mevcut olduğundan L'Hospital kuralı uygulanarak,

$$\lim_{x\to 1-0} f(x)=\lim_{x\to 1-0}\frac{(1-x^{\frac{1}{k}})}{1-x}=\lim_{x\to 1-0}\frac{1}{k}x^{\frac{1-k}{k}}=\frac{1}{k}\lim_{x\to 1-0}x^{\frac{1-k}{k}}=\frac{1}{k}$$

elde edilir. Dolayısıyla $\forall x \in [0,1)$ için

$$M \le f(x) \le N$$

olacak şekilde k'ya bağlı M ve N sabitleri vardır. Şimdi $\forall n \in IN$ için

$$x=\left(\frac{P_{n-1}}{P_n}\right)^k=\left(1-\frac{p_n}{P_n}\right)^k$$

alalım. Bu durumda,

$$f(x)=\frac{1-x^{\frac{1}{k}}}{1-x}=\frac{1}{1-\frac{P_{n-1}^k}{P_n^k}}(1-\frac{P_{n-1}}{P_n})$$

$$=\frac{1}{\frac{P_n^k-P_{n-1}^k}{P_n^k}}\frac{p_n}{P_n}=\frac{P_n^kP_{n-1}^k}{P_n^k-P_{n-1}^k}\cdot\frac{p_n}{P_nP_{n-1}^k}$$

olduğuna göre,

$$M\left(\frac{1}{P_{n-1}^k}-\frac{1}{P_n^k}\right)\le\frac{p_n}{P_nP_{n-1}^k}\le N\left(\frac{1}{P_{n-1}^k}-\frac{1}{P_n^k}\right)$$

$$M\sum_{n=v}^{\infty}\left(\frac{1}{P_{n-1}^k}-\frac{1}{P_n^k}\right)\le\sum_{n=v}^{\infty}\frac{p_n}{P_nP_{n-1}^k}\le N\sum_{n=v}^{\infty}\left(\frac{1}{P_{n-1}^k}-\frac{1}{P_n^k}\right)$$

bulunur. Öte yandan,

$$\sum_{n=v}^{\infty}\left(\frac{1}{P_{n-1}^k}-\frac{1}{P_n^k}\right)$$

serisi yakınsaktır. Çünkü kısmi toplamlar dizisini (s_m) dersek

$$\lim_{m\to\infty} s_m = \lim_{m\to\infty}\sum_{n=v}^{m}\left(\frac{1}{P_{n-1}^k}-\frac{1}{P_n^k}\right)$$

$$= \lim_{m\to\infty}\left(\frac{1}{P_{v-1}^k}-\frac{1}{P_v^k}+\frac{1}{P_v^k}-\frac{1}{P_{v+1}^k}+\cdots+\frac{1}{P_{m-1}^k}-\frac{1}{P_m^k}\right)$$

$$= \lim_{m\to\infty}\left(\frac{1}{P_{v-1}^k}-\frac{1}{P_m^k}\right)=\frac{1}{P_{v-1}^k}$$

dır. Böylece,

$$\frac{M}{P_{v-1}^k} \leq \sum_{n=v}^{\infty}\frac{p_n}{P_n P_{n-1}^k} \leq \frac{N}{P_{v-1}^k}$$

elde edilir.

Lemma 2.11 : $1<k\leq s<\infty$ olsun. Ayrıca B ve C matrisleri aşağıdaki şekilde tanımlansın;

$$b_{nv} = \begin{cases} \left(\dfrac{q_n}{Q_n}\right)^{\frac{1}{s}} \dfrac{1}{Q_{n-1}}\left\{\dfrac{P_v}{p_v}\Delta(Q_{v-1}\varepsilon_v)+Q_v\varepsilon_{v+1}\right\}\left(\dfrac{p_v}{P_v}\right)^{\frac{1}{k^*}} & , \quad 1\leq v\leq n-1 \\ 0 & , \quad v\geq n \end{cases}$$

$$c_{nv} = \begin{cases} \left(\dfrac{q_n}{Q_n}\right)^{\frac{1}{s}}\left(\dfrac{P_n}{p_n}\right)^{\frac{1}{k}}\varepsilon_n & , \quad v=n \\ 0 & , \quad v\neq n \end{cases}$$

Bu takdirde,

$$B\in(l_k,l_s)\Leftrightarrow \sum_{v=1}^{m}\left|\frac{P_v}{p_v}\Delta(Q_{v-1}\varepsilon_v)+Q_v\varepsilon_{v+1}\right|^{k^*}\frac{p_v}{P_v}=O(Q_m^{k^*}) \quad , \quad \frac{1}{k}+\frac{1}{k^*}=1$$

$$C\in(l_k,l_s)\Leftrightarrow \varepsilon_n = O\left\{\left(\frac{Q_n}{q_n}\right)^{\frac{1}{s}}\left(\frac{p_n}{P_n}\right)^{\frac{1}{k}}\right\}$$

dır (Bennett 1987).

Şimdi $\left|\overline{N},p_n\right|_k$ toplanabilme metodu ile tanımladığımız dizi uzayının çok kullandığımız temel bir özelliğini veren bir lemmayı ifade ve ispat edelim.

Lemma 2.12: $1 \le k < \infty$ olsun. Bu takdirde,

$$\left|\overline{N}_p\right|_k = \left\{ x = (x_i) : \sum x_i \quad , \quad \left|\overline{N}, p_n\right|_k \quad \text{toplanabilir} \right\}$$

dizi uzayı,

$$\|x\| = \left\{ |x_0|^k + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{P_n}{p_n} \right)^{k-1} \left| \frac{p_n}{P_n P_{n-1}} \sum_{v=1}^{n} P_{v-1} x_v \right|^k \right\}^{\frac{1}{k}}$$

normuyla birlikte Banach uzayıdır (Sarıgöl 1991).

İspat: Önce $\left|\overline{N}_p\right|_k$ ’nın lineer uzay olduğunu gösterelim. Bunun için

$x = (x_i)$, $y=(y_i) \in \left|\overline{N}_p\right|_k$ ve $\alpha \in \mathbb{C}$ alalım.

$x + y = (x_1 + y_1 , x_2 + y_2 , \ldots , x_n + y_n ,\ldots)$ ve $\alpha x = (\alpha x_1 , \alpha x_2 ,\ldots, \alpha x_n ,\ldots)$

olduğuna göre Minkowski eşitsizliği nedeniyle,

$$\|x + y\| = \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{P_n}{p_n} \right)^{k-1} |U_n(x + y)|^k \right\}^{\frac{1}{k}} = \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{P_n}{p_n} \right)^{k-1} |U_n(x) + U_n(y)|^k \right\}^{\frac{1}{k}}$$

$$\le \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{P_n}{p_n} \right)^{k-1} |U_n(x)|^k \right\}^{\frac{1}{k}} + \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{P_n}{p_n} \right)^{k-1} |U_n(y)|^k \right\}^{\frac{1}{k}} < \infty$$

ve dolayısıyla $x + y \in \left|\overline{N}_p\right|_k$ bulunur. $\alpha x \in \left|\overline{N}_p\right|_k$ olduğu ise açıktır. O halde $\left|\overline{N}_p\right|_k$ lineer uzaydır. Şimdi de $\|x\|$ ’in $\left|\overline{N}_p\right|_k$ üzerinde bir norm olduğunu gösterelim.

N1) $x = \theta = (0,0,\ldots,0,\ldots)$ ise $\|x\| = 0$’dır. Tersine

$$\|x\| = \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{P_n}{p_n} \right)^{k-1} |U_n(x)|^k \right\}^{\frac{1}{k}} = 0$$

$$\Rightarrow \forall n \ge 0, \quad U_n(x) = 0 \qquad ,$$

$$\Rightarrow \forall n \ge 0, \frac{p_n}{P_n P_{n-1}} \sum_{v=1}^{n} P_{v-1} x_v = 0 \quad .$$

$$\Rightarrow \quad U_0(x) = x_0 = 0$$

$$\Rightarrow U_1(x) = P_0 x_1 = 0$$

$$\Rightarrow x_1 = 0$$

Bu şekilde devam edilerek $x_0 = x_1 = x_2 = \ldots = x_n = \ldots = 0$ yani, $x = \theta$ bulunur.

$$\text{N2)}\quad \|\alpha x\| = \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{P_n}{p_n} \right)^{k-1} |U_n(\alpha x)|^k \right\}^{\frac{1}{k}}$$

$$= \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{P_n}{p_n} \right)^{k-1} |\alpha|^k |U_n(x)|^k \right\}^{\frac{1}{k}} = |\alpha|.\|x\|$$

N3) Minkowski eşitsizliğinden ,

$$\|x+y\| = \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{P_n}{p_n} \right)^{k-1} |U_n(x+y)|^k \right\}^{\frac{1}{k}}$$

$$\leq \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{P_n}{p_n} \right)^{k-1} \left(|U_n(x)| + |U_n(y)|\right)^k \right\}^{\frac{1}{k}}$$

$$\leq \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{P_n}{p_n} \right)^{k-1} |U_n(x)|^k \right\}^{\frac{1}{k}} + \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{P_n}{p_n} \right)^{k-1} |U_n(y)|^k \right\}^{\frac{1}{k}}$$

$$= \|x\| + \|y\|$$

elde edilir. Şu halde $\left|\overline{N}_p\right|_k$ normlu uzaydır. Nihayet $\left|\overline{N}_p\right|_k$'nın tamlığı için keyfi bir (x_m) Cauchy dizisi alalım. Bu durumda her bir $m \in IN$ için

$$x_m = (x_i^m) = (x_1^m, x_2^m, \ldots, x_i^m, \ldots) \in \left|\overline{N}_p\right|_k$$

olur. Bu takdirde $\forall \varepsilon > 0$ için $m, n > n_0$ olduğunda,

$$\|x_m - x_n\| = \left\{ \left|x_0^m - x_0^n\right|^k + \sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{P_i}{p_i} \right)^{k-1} \left| \frac{p_i}{P_i P_{i-1}} \sum_{v=1}^{i} P_{v-1}(x_v^m - x_v^n) \right|^k \right\}^{\frac{1}{k}} < \varepsilon \qquad *$$

olacak şekilde n_0 mevcuttur. Buradan da $v = 0, 1, 2, \ldots$ ve $m, n > n_0$ için $\left|x_v^m - x_v^n\right| < \varepsilon$ yazılabilir. Şu halde her bir v için $(x_v^1, x_v^2, \ldots, x_v^m, \ldots)$ dizisi $\mathbb{C}$'de bir Cauchy dizisidir. $\mathbb{C}$ tam olduğuna göre bu Cauchy dizisi yakınsaktır. Yani $\lim_{m\to\infty} x_v^m = x_v$ olacak şekilde $x_v \in \mathbb{C}$ vardır. Diyelim ki $x = (x_0, x_1, \ldots, x_v, \ldots)$ olsun. $m \to \infty$ için $x_m \to x$ ve $x = (x_k) \in \left|\overline{N}_p\right|_k$ olduğunu göstermek yeterlidir. *' dan $m, n > n_0$ için $\left|x_0^m - x_0^n\right| < \varepsilon$ ve $\forall j \in N$ için

$$\sum_{i=1}^{j} \left(\frac{P_i}{p_i} \right)^{k-1} \left| \frac{p_i}{P_i P_{i-1}} \sum_{v=1}^{i} P_{v-1}(x_v^m - x_v^n) \right| < \varepsilon$$

bulunur. Bu eşitsizlikte $n \to \infty$ için limite geçilirse $m > n_o$ için

$$\left|x_0^m - x_0\right|^k < \varepsilon^k \quad \text{ve} \quad \sum_{i=1}^{j}\left(\frac{P_i}{p_i}\right)^{k-1}\left|\frac{p_i}{P_i P_{i-1}}\sum_{v=1}^{i} P_{v-1}(x_v^m - x_v)\right|^k < \varepsilon^k$$

elde edilir. Son eşitsizlik $\forall j \in N$ için sağlandığına göre $\forall m > n_0$ için

$$\left\|x_m - x\right\| = \left\{\left|x_0^m - x_0\right|^k + \sum_{i=1}^{\infty}\left(\frac{P_i}{p_i}\right)^{k-1}\left|\frac{p_i}{P_i P_{i-1}}\sum_{v=1}^{i} P_{v-1}(x_v^m - x_v)\right|^k\right\}^{\frac{1}{k}} < \varepsilon^k + \varepsilon^k < 2\varepsilon \quad (\varepsilon < 1)$$

bulunur ki bu ise $m \to \infty$ için $\left\|x_m - x\right\| \to 0$ yani $x_m \to x$ demektir. Ayrıca Minkowski's eşitsizliğinden $\|x\| \le \|x - x_m\| + \|x_m\| < \infty$ olduğundan $x = (x_k) \in \left|\overline{N}_p\right|_k$ 'dır. Şu halde $\left|\overline{N}_p\right|_k$ Banach uzayıdır.

Teorem 2.13 (Abel- Dini Teoremi):

$\sum_{n=1}^{\infty} p_n$ pozitif sabitlerin keyfi ıraksak bir serisi ve $P_n = p_1 + p_2 + ... + p_n$, yani serinin kısmi toplamı olsun. Bu takdirde,

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \equiv \sum_{n=1}^{\infty}\frac{p_n}{P_n^{\alpha}} \begin{cases} \text{yakınsak}, & \alpha > 1 \quad \text{ise} \\ \text{ıraksak}, & \alpha \le 1 \quad \text{ise} \end{cases}$$

dır (Knopp 1944).

ÜÇÜNCÜ BÖLÜM

Bu bölümde toplanabilme çarpanlarını karakterize eden temel teoremler ile bazı sonuçlarını inceleyeceğiz.

Aksi söylenmediği sürece bu bölümde (p_n) ve (q_n),

$$P_n = p_0 + p_1 + p_2 + ... + p_n \ , \quad P_n \to \infty, \qquad (P_{-1} = p_{-1} = 0)$$

ve

$$Q_n = q_0 + q_1 + q_2 + ... + q_n \ , \quad Q_n \to \infty, \qquad (Q_{-1} = q_{-1} = 0)$$

olacak şekilde pozitif sabitlerin dizilerini ve $n = 0, 1, 2, ...$ için $\Delta\varepsilon_n = \varepsilon_n - \varepsilon_{n+1}$ eşitliğini gösterecektir.

Açıktır ki genel olarak $\left|\overline{N}, p_n\right|_k$ ve $\left|\overline{N}, q_n\right|_k$ her bir $k \geq 1$ indisi için farklı farklı toplanabilme metotlarıdır. Diğer bir ifadeyle bu metotlar birbirinden bağımsızdır. Dolayısıyla bir toplanabilme çarpanı ile iki metottan birinin toplanabilme alanından diğerinin toplanabilme alanına geçilip geçilemeyeceğini sormak doğaldır. Bu bağlamda (Bor, 1993) , aşağıdaki teoremi vermiştir.

Teorem 3.1: $k \geq 1$ olsun. Eğer $\left|\overline{N}, p_n\right|_k$ toplanabilen her $\sum x_n$ serisi için $\sum \varepsilon_n x_n$ serisi $\left|\overline{N}, q_n\right|_k$ toplanabilirse, bu takdirde

$$\text{(i)} \ \varepsilon_n = O\left\{\left(\frac{p_n Q_n}{q_n P_n}\right)^{\frac{1}{k}}\right\}$$

ve

$$\text{(ii)}\ \ \Delta\varepsilon_n = O\left\{\left(\frac{p_n}{P_n}\right)^{\frac{1}{k}}\right\}$$

dır (Bor 1993).

Şimdi bu teoremi genişleterek gerek ve yeter formda ortaya koyan Sarıgöl ’e (1994) ait olan bir teoremi ifade ve ispat edelim.

Teorem 3.2: $1 < k \le s < \infty$ olsun. Bu takdirde $\varepsilon = (\varepsilon_n) \in \left[\left|\overline{N}, p_n\right|_k, \left|\overline{N}, q_n\right|_s\right]$ olması için gerek ve yeter şart

$$\text{(a)}\ \ \varepsilon_n = O\left\{\left(\frac{Q_n}{q_n}\right)^{\frac{1}{s}}\left(\frac{p_n}{P_n}\right)^{\frac{1}{k}}\right\}$$

$$\text{(b)}\ \ \sum_{v=1}^{m}\left|\frac{P_v}{p_v}\Delta(Q_{v-1}\varepsilon_v) + Q_v\varepsilon_{v+1}\right|^{k^*}\frac{p_v}{P_v} = O(Q_m^{k^*})\ , \qquad \frac{1}{k}+\frac{1}{k^*} = 1 \qquad (1)$$

olmasıdır.

Bu teoremi ispatlamak için önce aşağıdaki lemmayı ifade ve ispat edelim.

Lemma 3.3: $1 \le k \le s < \infty$ olsun. Eğer $\varepsilon = (\varepsilon_n) \in \left[\left|\overline{N}, p_n\right|_k, \left|\overline{N}, q_n\right|_s\right]$ ise bu takdirde (1 a) sağlanır (Sarıgöl 1994).

İspat: $(u_n(x))$ ve $(t_n(x))$ sırasıyla $\sum x_n$ ve $\sum \varepsilon_n x_n$ serilerinin $(\overline{N}, p_n)$ ve $(\overline{N}, q_n)$ Riesz ortalamalarını göstersin. Bu durumda,

$$\begin{aligned} u_n(x) &= \frac{1}{P_n}\sum_{v=0}^{n} p_v s_v \\ &= \frac{1}{P_n}\sum_{v=0}^{n} p_v \sum_{i=0}^{v} x_i \\ &= \frac{1}{P_n}\sum_{i=0}^{n}\left(\sum_{v=i}^{n} p_v\right)x_i \\ &= \frac{1}{P_n}\sum_{v=0}^{n}(P_n - P_{v-1})x_v \end{aligned}$$

olduğuna göre $U_0(x)=u_0(x)=s_0=x_o$ ve $n\geq 1$ için

$$
\begin{aligned}
U_n(x) &= u_n(x)-u_{n-1}(x)\\
&=\frac{1}{P_n}\sum_{v=0}^{n}(P_n - P_{v-1})x_v - \frac{1}{P_{n-1}}\sum_{v=0}^{n-1}(P_{n-1}-P_{v-1})x_v\\
&=\frac{1}{P_n}\sum_{v=o}^{n}P_n x_v-\frac{1}{P_{n-1}}\sum_{v=0}^{n-1}P_{n-1}x_v+\frac{1}{P_{n-1}}\sum_{v=0}^{n-1}P_{v-1}x_v-\frac{1}{P_n}\sum_{v=0}^{n}P_{v-1}x_v\\
&=\sum_{v=0}^{n}x_v-\sum_{v=0}^{n-1}x_v+\frac{1}{P_{n-1}}\sum_{v=0}^{n-1}P_{v-1}x_v-\frac{1}{P_n}\sum_{v=0}^{n-1}P_{v-1}x_v-\frac{(P_n-p_n)}{P_n}x_n\\
&=x_n+\frac{p_n}{P_nP_{n-1}}\sum_{v=0}^{n}P_{v-1}x_v-\frac{p_n}{P_n}x_n-x_n+\frac{p_n}{P_n}x_n\\
&=\frac{p_n}{P_nP_{n-1}}\sum_{v=0}^{n}P_{v-1}x_v\ , \qquad (P_{-1}=0) \qquad (2)
\end{aligned}
$$

bulunur. Benzer olarak,

$$
\begin{aligned}
t_n(x) &= \frac{1}{Q_n}\sum_{v=0}^{n}q_v s_v\\
&=\frac{1}{Q_n}\sum_{v=0}^{n}q_v\sum_{i=0}^{v}\varepsilon_i x_i\\
&=\frac{1}{Q_n}\sum_{i=0}^{n}\left(\sum_{v=i}^{n}q_v\right)\varepsilon_i x_i\\
&=\frac{1}{Q_n}\sum_{v=0}^{n}(Q_n-Q_{v-1})\varepsilon_v x_v
\end{aligned}
$$

ve

$$T_n(x)=t_n(x)-t_{n-1}(x)=\frac{q_n}{Q_nQ_{n-1}}\sum_{v=1}^{n}Q_{v-1}\varepsilon_v x_v \quad , \quad T_0(x)=\varepsilon_0 x_0 \qquad (3)$$

olur. $s,k\geq 1$ için

$$F=\left\{\ x=(x_i):\sum x_i,\ \ \left|\overline{N},p_n\right|_k \text{ toplanabilir } \right\}$$

lineer uzayı ,

$$\|x\|_F=\left\{\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{P_n}{p_n}\right)^{k-1}\left|U_n(x)\right|^k\right\}^{\frac{1}{k}} \qquad (4)$$

ve benzer olarak

$$G=\left\{\ (\varepsilon_i x_i):\sum\varepsilon_i x_i,\ \ \left|\overline{N},q_n\right|_s \quad \text{toplanabilir } \right\}$$

lineer uzayı,

$$\|x\|_G = \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{Q_n}{q_n} \right)^{s-1} |T_n(x)|^s \right\}^{\frac{1}{s}} \tag{5}$$

normlarıyla birlikte birer Banach uzayıdır. Hipotezden $F \subset G$ olduğundan $\|x\|_F < \infty$ ise $\|x\|_G < \infty$ dır. Her bir $n \in IN$ için

$$T_n(x) = \frac{q_n}{Q_n Q_{n-1}} \sum_{v=1}^{n} Q_{v-1} \varepsilon_v x_v$$

şeklinde tanımlanan $T_n : F \to \mathbb{C}$ dönüşümünü göz önüne alalım. $\forall\, x, y \in F$ ve $\alpha \in \mathbb{C}$ için $T_n(x+y) = T_n(x) + T_n(y)$ ve $T_n(\alpha x) = \alpha . T_n(x)$ olduğu açıkça görüldüğüne göre T_n dönüşümü lineerdir. Öte yandan T_n sınırlıdır. Bunun için Teorem 1.1.4 nedeniyle bu dönüşümün sürekli olduğunu göstermek yeterlidir. Her bir $n \in IN$ için

$$f_n(x) = \left\{ \sum_{i=0}^{n} \left(\frac{Q_i}{q_i} \right)^{s-1} |T_i(x)|^s \right\}^{\frac{1}{s}}$$

fonksiyonelini göz önüne alalım. f_n, F üzerinde bir yarınormdur. Çünkü, her bir $i \in N$ için T_i lineer olduğundan Minkowski eşitsizliğinden,

$$\begin{aligned} f_n(x+y) &= \left\{ \sum_{i=0}^{n} \left(\frac{Q_i}{q_i} \right)^{s-1} |T_i(x+y)|^s \right\}^{\frac{1}{s}} \\ &\leq \left\{ \sum_{i=0}^{n} \left(\frac{Q_i}{q_i} \right)^{s-1} |T_i(x)|^s \right\}^{\frac{1}{s}} + \left\{ \sum_{i=0}^{n} \left(\frac{Q_i}{q_i} \right)^{s-1} |T_i(y)|^s \right\}^{\frac{1}{s}} \\ &= f_n(x) + f_n(y) \end{aligned}$$

dır. Ayrıca $f_n(\alpha x) = |\alpha| \, . \, f_n(x)$ olduğu ise açıktır. Şu halde f_n, F üzerinde bir yarınormdur. Bunun yanı sıra $\forall\, i$ için T_i'lerin F üzerinde sınırlı lineer fonksiyonel olması nedeniyle f_n F üzerinde sınırlıdır. Eğer $f(x) = \lim_n f_n(x)$ dersek

$$f(x) = \|\, x\|_G < \infty \tag{6}$$

olur. Bu ise $\{f_n\}$ ailesinin F üzerinde noktasal sınırlı olması demektir. Resonance teoremi (Wilansky 1964) nedeniyle bu aile F üzerinde düzgün sınırlıdır, yani $\forall\, n \in N$ için $\|\, f_n \| \leq M$ olacak şekilde bir M sabiti vardır. Dolayısıyla $\forall\, x \in F$ için

$$\|f_n\| \le M \quad (n \in N) \Rightarrow |f_n(x)| = f(x) \le M.\|x\|_F$$

$$\Rightarrow \|x\|_G \le M.\|x\|_F$$

yazılabilir. Özel olarak $v \in N$ için $e_v = (0,...,0,1,0,...)$ (v. terim 1) olmak üzere (3) ve (4) ifadelerinde $x = e_v - e_{v+1}$ alınırsa,

$$U_n(x) = \begin{cases} 0 & , n < v \\ \dfrac{p_v}{P_v} & , n = v \\ -\dfrac{p_v p_n}{P_n P_{n-1}} & , n > v \end{cases}$$

bulunur. Çünkü,

$$n < v \quad \text{için} \quad U_n(x) = \frac{p_n}{P_n P_{n-1}} \sum_{v=1}^{n} P_{v-1} x_v = 0$$

$$n = v \ \text{için} \ U_v(x) = \frac{p_v}{P_v P_{v-1}} P_{v-1} x_v = \frac{p_v}{P_v}$$

olur. $n > v$ için aynı incelemeyi yapalım.

$n = v + 1$ ise,

$$U_{v+1}(x) = \frac{p_{v+1}}{P_{v+1} P_v} \sum_{i=1}^{v+1} P_{i-1} x_i = \frac{p_{v+1}}{P_{v+1} P_v} (P_{v-1} - P_v) = -\frac{p_v p_{v+1}}{P_{v+1} P_v}$$

$n = v + 2$ ise,

$$U_{v+2}(x) = \frac{p_{v+2}}{P_{v+2} P_{v+1}} \sum_{i=1}^{v+2} P_{i-1} x_i = \frac{p_{v+2}}{P_{v+2} P_{v+1}} (P_{v-1} - P_v) = -\frac{p_v p_{v+2}}{P_{v+2} P_{v+1}}$$

ve bu şekilde devam edilirse,

$$U_n(x) = -\, p_v \frac{p_n}{P_n P_{n-1}}$$

elde edilir. Benzer şekilde,

$$T_n(x) = \begin{cases} 0 & , n < v \\ \dfrac{\varepsilon_v q_v}{Q_v} & , n = v \\ \Delta(Q_{v-1}\varepsilon_v) \dfrac{q_n}{Q_n Q_{n-1}} & , n > v \end{cases}$$

bulunur. Öte yandan,

$$\|x\|_F = \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{P_n}{p_n} \right)^{k-1} |U_n(x)|^k \right\}^{\frac{1}{k}}$$

$$= \left\{ \sum_{n=0}^{v-1} \left(\frac{P_n}{p_n} \right)^{k-1} |U_n(x)|^k + \frac{p_v}{P_v} + p_v^k \sum_{n=v+1}^{\infty} \frac{p_n}{P_n P_{n-1}^k} \right\}^{\frac{1}{k}}$$

$$= \left\{ \frac{p_v}{P_v} + p_v^k \sum_{n=v+1}^{\infty} \frac{p_n}{P_n P_{n-1}^k} \right\}^{\frac{1}{k}}$$

ve

$$\|x\|_G = \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{Q_n}{q_n} \right)^{s-1} |T_n(x)|^s \right\}^{\frac{1}{s}}$$

$$= \left\{ \left(\frac{Q_v}{q_v} \right)^{s-1} \left| \frac{\varepsilon_v q_v}{Q_v} \right|^s + \sum_{n=v+1}^{\infty} \left(\frac{Q_n}{q_n} \right)^{s-1} \left| \frac{q_n}{Q_n Q_{n-1}} \Delta(Q_{v-1}\varepsilon_v) \right|^s \right\}^{\frac{1}{s}}$$

$$= \left\{ |\varepsilon_v|^s \frac{q_v}{Q_v} + |\Delta(Q_{v-1}\varepsilon_v)|^s \sum_{n=v+1}^{\infty} \frac{q_n}{Q_n Q_{n-1}^s} \right\}^{\frac{1}{s}}$$

elde edilir. $\|x\|_G \le M \|x\|_F$ eşitsizliğinde bu sonuçlar yerine koyulursa Lemma 2.10'dan,

$$\left\{ |\varepsilon_v|^s \frac{q_v}{Q_v} + |\Delta(Q_{v-1}\varepsilon_v)|^s \sum_{n=v+1}^{\infty} \frac{q_n}{Q_n Q_{n-1}^s} \right\}^{\frac{1}{s}} \le M \left\{ \frac{p_v}{P_v} + p_v^k \sum_{n=v+1}^{\infty} \frac{p_n}{P_n P_{n-1}^k} \right\}^{\frac{1}{k}}$$

$$\Rightarrow \left\{ |\varepsilon_v|^s \frac{q_v}{Q_v} \right\}^{\frac{1}{s}} \le M \left\{ \frac{p_v}{P_v} + p_v^k \sum_{n=v+1}^{\infty} \frac{p_n}{P_n P_{n-1}^k} \right\}^{\frac{1}{k}}$$

$$\Rightarrow \left\{ |\varepsilon_v|^s \frac{q_v}{Q_v} \right\}^{\frac{k}{s}} \le M \left(\frac{p_v}{P_v} + K \left(\frac{p_v}{P_v} \right)^k \right)$$

$$\le M \frac{p_v}{P_v} \left(1 + K \left(\frac{p_v}{P_v} \right)^{k-1} \right) \le M(1+K) \frac{p_v}{P_v}$$

$$= M_1 \frac{p_v}{P_v} \quad ,$$

bulunur. Buradan da,

$$|\varepsilon_v|\left(\frac{q_v}{Q_v}\right)^{\frac{1}{s}} \le M_1\left(\frac{p_v}{P_v}\right)^{\frac{1}{k}}$$

$$\Rightarrow \quad |\varepsilon_v| \le M_1\left(\frac{Q_v}{q_v}\right)^{\frac{1}{s}}\left(\frac{p_v}{P_v}\right)^{\frac{1}{k}}$$

$$\Rightarrow \quad \varepsilon_n = O\left\{\left(\frac{Q_n}{q_n}\right)^{\frac{1}{s}}\left(\frac{p_n}{P_n}\right)^{\frac{1}{k}}\right\}$$

elde edilir ki bu ise (1 a)'nın sağlanması demektir.

Teorem 3.2'nin ispatı: Lemma 3.3'te tanımlanan sembolleri kullanarak önce bazı eşitlikler elde edelim. (2)'nin tersini (3)'te yerine yazarsak,

$$U_n(x) = \frac{p_n}{P_n P_{n-1}}\sum_{v=1}^{n} P_{v-1} x_v$$

olduğuna göre $n \ge 1$ için

$$\frac{P_n P_{n-1}}{p_n}\cdot U_n(x) = \sum_{v=1}^{n} P_{v-1} x_v \Rightarrow$$

$$\frac{P_n P_{n-1}}{p_n}\cdot U_n(x) - \frac{P_{n-1}P_{n-2}}{p_{n-1}}\cdot U_{n-1}(x) = \sum_{v=1}^{n} P_{v-1}x_v - \sum_{v=1}^{n-1} P_{v-1}x_v = P_{n-1}x_n \Rightarrow$$

$$x_n = \frac{P_n}{p_n}\cdot U_n(x) - \frac{P_{n-2}}{p_{n-1}}\cdot U_{n-1}(x) \qquad \text{ve} \qquad U_0(x) = x_0$$

bulunur. Buradan da,

$$T_n(x) = \frac{q_n}{Q_n Q_{n-1}}\sum_{v=1}^{n} Q_{v-1}\varepsilon_v x_v$$

$$= \frac{q_n}{Q_n Q_{n-1}}\sum_{v=1}^{n} Q_{v-1}\varepsilon_v\left(\frac{P_v}{p_v}U_v(x) - \frac{P_{v-2}}{p_{v-1}}\cdot U_{v-1}(x)\right)$$

$$= \frac{q_n}{Q_n Q_{n-1}}\sum_{v=1}^{n-1}\frac{P_v}{p_v}Q_{v-1}\varepsilon_v U_v(x) + \frac{q_n P_n}{Q_n p_n}\varepsilon_n U_n(x)$$

$$- \frac{q_n}{Q_n Q_{n-1}}\sum_{v=1}^{n}\frac{P_{v-2}}{p_{v-1}}Q_{v-1}\varepsilon_v U_{v-1}(x)$$

$$= \frac{q_n}{Q_n Q_{n-1}} \sum_{v=1}^{n-1} \frac{P_v}{p_v} Q_{v-1} \varepsilon_v U_v(x) + \frac{q_n P_n}{Q_n p_n} \varepsilon_n U_n(x)$$

$$- \frac{q_n}{Q_n Q_{n-1}} \sum_{v=2}^{n} \frac{P_{v-2}}{p_{v-1}} Q_{v-1} \varepsilon_v U_{v-1}(x)$$

$$= \frac{q_n}{Q_n Q_{n-1}} \sum_{v=1}^{n-1} \frac{P_v}{p_v} Q_{v-1} \varepsilon_v U_v(x) + \frac{q_n P_n}{Q_n p_n} \varepsilon_n U_n(x)$$

$$- \frac{q_n}{Q_n Q_{n-1}} \sum_{v=1}^{n-1} \frac{P_v}{p_v} Q_v \varepsilon_{v+1} U_v(x) + \frac{q_n}{Q_n Q_{n-1}} \sum_{v=1}^{n-1} Q_v \varepsilon_{v+1} U_v(x)$$

$$= \frac{q_n}{Q_n Q_{n-1}} \sum_{v=1}^{n-1} \left\{ \frac{P_v}{p_v} \Delta(Q_{v-1}\varepsilon_v) + Q_v \varepsilon_{v+1} \right\} U_v(x) + \frac{q_n P_n}{Q_n p_n} \varepsilon_n U_n(x)$$

$\forall n \geq 1$ için $U_n^*(x) = \left(\frac{P_n}{p_n}\right)^{1-\frac{1}{k}} . U_n(x)$ ve $T_n^*(x) = \left(\frac{Q_n}{q_n}\right)^{1-\frac{1}{s}} . T_n(x)$ alalım. Bu durumda,

$$U_n(x) = \left(\frac{P_n}{p_n}\right)^{\frac{1}{k}-1} \cdot U_n^*(x)$$

ve

$$T_n^*(x) = \left(\frac{Q_n}{q_n}\right)^{1-\frac{1}{s}} \frac{q_n}{Q_n Q_{n-1}} \sum_{v=1}^{n-1} \left\{ \frac{P_v}{p_v} \Delta(Q_{v-1}\varepsilon_v) + Q_v \varepsilon_{v+1} \right\} \left(\frac{p_v}{P_v}\right)^{\frac{1}{k^*}} U_v^*(x)$$

$$+ \left(\frac{Q_n}{q_n}\right)^{1-\frac{1}{s}} \frac{q_n P_n}{Q_n p_n} \varepsilon_n \left(\frac{P_n}{p_n}\right)^{\frac{1}{k}-1} U_n^*(x)$$

$$= \left(\frac{q_n}{Q_n}\right)^{\frac{1}{s}} \frac{1}{Q_{n-1}} \sum_{v=1}^{n-1} \left\{ \frac{P_v}{p_v} \Delta(Q_{v-1}\varepsilon_v) + Q_v \varepsilon_{v+1} \right\} \left(\frac{p_v}{P_v}\right)^{\frac{1}{k^*}} U_v^*(x) + \left(\frac{q_n}{Q_n}\right)^{\frac{1}{s}} \left(\frac{P_n}{p_n}\right)^{\frac{1}{k}} \varepsilon_n U_n^*(x)$$

$$= \sum_{v=1}^{\infty} a_{nv} U_v^*(x) \ ,$$

yazalım. Bu takdirde $\left(T_n^*(x)\right)$ dizisi, $\left(U_n^*(x)\right)$ dizisinin

$$a_{nv}=\begin{cases}\left(\dfrac{q_n}{Q_n}\right)^{\frac{1}{s}}\dfrac{1}{Q_{n-1}}\left\{\dfrac{P_v}{p_v}\Delta(Q_{v-1}\varepsilon_v)+Q_v\varepsilon_{v+1}\right\}\left(\dfrac{p_v}{P_v}\right)^{\frac{1}{k^*}} & ,1\le v\le n-1\\ \left(\dfrac{q_n}{Q_n}\right)^{\frac{1}{s}}\left(\dfrac{P_n}{p_n}\right)^{\frac{1}{k}}\varepsilon_n & ,\quad v=n\\ 0 & ,\quad v>n\end{cases}$$

matrisiyle yapılan dönüşüm dizisi olur. Öte yandan,

$$U_n^*(x)=\left(\frac{P_n}{p_n}\right)^{1-\frac{1}{k}}U_n(x)\quad,\qquad \sum\left|U_n^*(x)\right|^k=\sum\left(\frac{P_n}{p_n}\right)^{k-1}\left|U_n(x)\right|^k$$

ve

$$T_n^*(x)=\left(\frac{Q_n}{q_n}\right)^{1-\frac{1}{s}}T_n(x)\quad,\qquad \sum\left|T_n^*(x)\right|^s=\sum\left(\frac{Q_n}{q_n}\right)^{s-1}\left|T_n(x)\right|^s$$

eşitsizlikleri nedeniyle $\sum x_n$ serisi $\left|\bar{N},p_n\right|_k$ toplanabilir olduğunda $\sum\varepsilon_n x_n$ serisi $\left|\bar{N},q_n\right|_s$ toplanabilirdir $\Leftrightarrow$ $\sum\left|U_n^*(x)\right|^k<\infty$ olduğunda $\sum\left|T_n^*(x)\right|^s<\infty$ dır. Bu da $A=(a_{nv})\in(l_k,l_s)$ olmasıdır. Lemma 2.11'deki B ve C matrislerinin tanımları nedeniyle

$$T_n^*(x)=\sum_{v=1}^{\infty}a_{nv}U_v^*(x)=\sum_{v=1}^{n-1}b_{nv}U_v^*(x)+c_{nn}U_n^*(x) \tag{7}$$

yazılabilir ve dolayısıyla $A=B+C$ olur. Şu halde

$$T_n^*(x)=B_n(x)+C_n(x) \tag{8}$$

olur.

Yeterlilik: Eğer (1 a) ve (1 b) sağlanıyorsa Lemma 2.11'dan $B,C\in(l_k,l_s)$ ve (8) eşitliğinden $A\in(l_k,l_s)$ bulunur. Şu halde (1 a) ve (1 b) yeterlidir.

Gereklilik: Eğer $A\in(l_k,l_s)$ ise Lemma 3.3 nedeniyle (1 a) sağlanır. Dolayısıyla Lemma 2.11'dan $B\in(l_k,l_s)$ olur. Öte yandan $C_n(x)=T_n^*(x)-B_n(x)$ eşitliğinden $C\in(l_k,l_s)$ ve Lemma 2.11'dan (1b) elde edilir.Şu halde (1a) ve (1b) gereklidir.

3.4. Sonuçlar:

Teorem 3.2, mutlak toplanabilme metodları arasında ilişki kuran, bilinen bir çok teoremi özel durum olarak kapsamaktadır. Şimdi bunların bazılarını ifade edelim.

Teorem 3.2'de $p_n = \varepsilon_n = 1$, $k = s$ ve $p_n = q_n$ alınırsa aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 3.4.1: $1 < k < \infty$ olsun $\left|C,1\right|_k$ toplanabilen her seri aynı zamanda $\left|\overline{N},p_n\right|_k$

$$\text{toplanabilirdir} \Leftrightarrow \begin{cases} \text{i.)} \quad np_n = O(P_n) \\ \text{ii.)} \quad \displaystyle\sum_{v=1}^{m} \left|P_v - (v+1)p_v\right|^{k^*} \frac{1}{v} = O(P_m^{k^*}) \end{cases} \tag{9}$$

şartlarının sağlanmasıdır. Burada k^*, k'nın eşleniğidir.

Dikkat edilmelidir ki bu sonucun şartları Teorem 2.9'un şartlarından daha zayıftır. Çünkü $np_n = O(P_n)$ ve $P_n = O(np_n)$ sağlanıyorsa,

$$\begin{aligned} \sum_{v=1}^{n} \left|P_v - (v+1)p_v\right|^{k^*} \cdot \frac{1}{v} &= O(1)\sum_{v=1}^{n} P_v^{k^*} \cdot \frac{1}{v} \\ &= O(1)\sum_{v=1}^{n} P_v^{k^*-1} \cdot \left(\frac{P_v}{v}\right) \\ &= O(1)\sum_{v=1}^{n} P_v^{k^*-1}\, p_v \\ &= 0(1)\, P_n^{k^*-1} \sum_{v=1}^{n} p_v \\ &= O(P_n^{k^*}) \quad . \end{aligned}$$

Tersi ise doğru değildir. Dolayısıyla Sonuç 3.4.1, Teorem 2.9'u kapsar.

Sonuç 3.4.2: $1 < k < s < \infty$ olsun. Bu takdirde $\left|\overline{N},p_n\right|_k$ toplanabilen her seri , $\left|\overline{N},p_n\right|_s$ toplanabilirdir $\Leftrightarrow$

$$P_n = O(np_n) \tag{10}$$

şartının sağlanmasıdır**.**

İspat: Teorem 3.2'de $p_n = q_n$ ve $\varepsilon_n = 1$ alalım. Bu durumda

$$\varepsilon_n = O\left\{\left(\frac{Q_n}{q_n}\right)^{\frac{1}{s}}\left(\frac{p_n}{P_n}\right)^{\frac{1}{k}}\right\}$$

olduğuna göre

$$1 \le K\left(\frac{Q_n}{q_n}\right)^{\frac{1}{s}}\left(\frac{p_n}{P_n}\right)^{\frac{1}{k}} \quad \Leftrightarrow 1 \le K\left(\frac{p_n}{P_n}\right)^{\frac{1}{k}-\frac{1}{s}}$$

$$\Leftrightarrow 1 \le K\left(\frac{p_n}{P_n}\right)$$

$$\Leftrightarrow P_n = O(p_n) \text{ 'dir.}$$

Şimdi (10) şartını sağlayan bir (p_n) dizisinin mevcut olup olmadığı sorulabilir. Bunun için bir örnek verelim. $p_v = x^v$, $v = 0,1,2,...$ $x > 1$ olacak şekilde (p_v) dizisi alalım. Bu durumda,

$\frac{P_v}{p_v} \approx \frac{x}{x-1}$, yani $\frac{P_v}{p_v}$, $\frac{x}{x-1}$ ifadesine asimtotiktir. Çünkü,

$$\lim_{x\to\infty}\frac{P_v}{p_v}\cdot\frac{x-1}{x} = \lim_{x\to\infty}\frac{(x^0 + x^1 + ... + x^v)(x-1)}{x^{v+1}} = 1 \quad .$$

Sonuç 3.4.3: $1 < k < \infty$ olsun. Pozitif sabitlerin (p_n) dizisi için

$$\begin{cases} \text{(a)} \quad p_n Q_n = O(q_n P_n) \\ \text{(b)} \quad q_n P_n = O(p_n Q_n) \end{cases} \tag{11}$$

şartları sağlansın. Bu takdirde $\left|\overline{N}, p_n\right|_k \Leftrightarrow \left|\overline{N}, q_n\right|_k$ 'dır.

İspat: Teorem 3.2'de $\varepsilon_n = 1$ ve $k = s$ alalım. Bu durumda (1 a) ve (1 b) şartları sırasıyla

$$\text{ve} \qquad \begin{cases} q_n P_n = O(p_n Q_n) \\ \sum_{v=1}^{m}\left|Q_v - \frac{P_v q_v}{p_v}\right|^{k^*}\cdot\frac{p_v}{P_v} = O(Q_m^{k^*}) \end{cases} \tag{12}$$

şartlarına dönüşür. Dikkat edelim ki (11 a) ve (11 b) şartları (12) eşitliğini gerektirir. Gerçekten her $v \in N$ için $P_v q_v \leq K_1 p_v Q_v$ ve $Q_v p_v \leq K_2 q_v P_v$ olacak şekilde K_1 ve K_2 sabitleri mevcut olduğuna göre,

$$\sum_{v=1}^{m}\left|Q_v - \frac{P_v q_v}{p_v}\right|^{k^*} \cdot \frac{p_v}{P_v} \leq K_0 \sum_{v=1}^{m}\left(Q_v + \frac{P_v q_v}{p_v}\right)^{k^*} \cdot \frac{p_v}{P_v}$$

$$\leq K_1 \sum_{v=1}^{m} Q_v^{k^*} \cdot \frac{p_v}{P_v} = K_1 \sum_{v=1}^{m} Q_v^{k^*-1} \frac{Q_v p_v}{P_v}$$

$$\leq K_2 \sum_{v=1}^{m} Q_v^{k^*-1} q_v = K_2 Q_m^{k^*-1} \sum_{v=1}^{m} q_v$$

$$= K_2 Q_m^{k^*}$$

bulunur. Şu halde $\left|\overline{N}, p_n\right|_k \Rightarrow \left|\overline{N}, q_n\right|_k$ olur. Nihayet p_n ve q_n' nin rolleri değiştirilerek $\left|\overline{N}, q_n\right|_k \Rightarrow \left|\overline{N}, p_n\right|_k$ ve dolayısıyla $\left|\overline{N}, p_n\right|_k \Leftrightarrow \left|\overline{N}, q_n\right|_k$ elde edilir.

Sonuç 3.4.4: $1 < k < \infty$ olsun. Bu takdirde $\left|\overline{N}, p_n\right|_k \Leftrightarrow \left|\overline{N}, q_n\right|_k$ olması için gerek ve yeter şart (11 a) ve (11 b) şartlarının sağlanmasıdır.

İspat: Teorem 3.2'de $k = s$ ve $\varepsilon_n = 1$ alınarak istenen elde edilir. Sonuç 3.4.3 ve sonuç 3.4.4 Bor ve Thorpe ile Sarıgöl tarafından verilmiştir.

Şimdi mutlak toplanabilme metodları ile ilgili toplanabilme çarpanlarını karakterize eden teoremleri ifade ve ispat ederek bilinen bir çok sonucu genelleştireceğiz.

Lemma 3.5: $k \geq 1$ olsun. Eğer $\sum a_n$ serisi $\left|\overline{N}, p_n\right|$ toplanabilir olduğunda $\sum a_n \lambda_n$ serisi $\left|\overline{N}, q_n\right|_k$ toplanabilir ise bu takdirde $\lambda_n = O(1)$ olur.

İspat: (t_n) ve (T_n) sırasıyla $\sum a_n$ ve $\sum a_n \lambda_n$ serilerinin $\left(\overline{N}, p_n\right)$ ve $\left(\overline{N}, q_n\right)$ Riesz ortalamaları olsun. Bu takdirde,

$$t_n = \frac{1}{P_n} \sum_{v=0}^{n} p_v s_v = \frac{1}{P_n} \sum_{v=0}^{n} p_v \sum_{i=0}^{v} a_i = \frac{1}{P_n} \sum_{v=0}^{n} (P_n - P_{v-1}) a_v$$

$$x_n = t_n - t_{n-1} = \frac{p_n}{P_n P_{n-1}} \sum_{v=1}^{n} P_{v-1} a_v , \quad n \geq 1 \ , \ x_0 = a_0 \tag{13}$$

ve benzer olarak $n \geq 1$ için

$$T_n = \frac{1}{Q_n} \sum_{v=0}^{n} q_v s_v = \frac{1}{Q_n} \sum_{v=0}^{n} q_v \sum_{i=0}^{v} a_i \lambda_i = \frac{1}{Q_n} \sum_{v=0}^{n} (Q_n - Q_{v-1}) a_v \lambda_v$$

$$y_n = T_n - T_{n-1} = \frac{q_n}{Q_n Q_{n-1}} \sum_{v=1}^{n} Q_{v-1} a_v \lambda_v \ , \quad y_0 = a_0 \lambda_o \tag{14}$$

yazabiliriz. Hipotez nedeniyle $\sum a_n$ serisi $\left|\overline{N}, p_n\right|$ toplanabilir olduğunda $\sum a_n \lambda_n$ serisi $\left|\overline{N}, q_n\right|_k$ toplanabilir olduğuna göre

$$\sum_{n=1}^{\infty} |x_n| < \infty \tag{15}$$

olduğunda,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{Q_n}{q_n} \right)^{k-1} |y_n|^k < \infty \tag{16}$$

yazabiliriz. (15) şartını sağlayan diziler uzayı, $\|x\| = \sum_{n=0}^{\infty} |x_n|$ normuyla birlikte Banach uzayı ve (16) şartını sağlayan (y_n) diziler uzayı Lemma 2.12'deki

$$\|y\| = \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{Q_n}{q_n} \right)^{k-1} |y_n|^k \right\}^{\frac{1}{k}}$$

normuyla birlikte Banach uzayıdır. (14) eşitliği ile verilen dönüşüm (15) şartını sağlayan dizileri (16) şartını sağlayan dizilere dönüştürdüğüne göre Banach-Steinhause teoremi nedeniyle her x için

$$\|y\| \leq C.\|x\| \tag{17}$$

olacak şekilde C sabiti bulunabilir. Gerçekten, bunun için

$$A_n(x) = \begin{cases} T_v(x) & , \quad 0 \leq v \leq n \\ 0 & , \quad v > n \end{cases}$$

olmak üzere $A_n : l_1 \to \left|\overline{N}_p\right|_k$ dönüşümünü göz önüne alalım. Bu durumda her bir $n \in IN$ için

$$A_n(x) = (T_1(x), T_2(x), ..., T_n(x), 0, 0, ...)$$

olduğuna göre A_n lineerdir. Çünkü $\forall x, y \in l_1$ ve $\alpha \in \mathbb{C}$ için T_n'nin lineerliğinden

$$\begin{aligned} A_n(x+y) &= (T_1(x+y), \ldots, T_n(x+y), 0, \ldots) \\ &= (T_1(x)+T_1(y), \ldots, T_n(x)+T_n(y), 0, \ldots) \\ &= (T_1(x), \ldots, T_n(x), 0, \ldots) + (T_1(y), \ldots, T_n(y), 0, \ldots) \\ &= A_n(x) + A_n(y) \quad , \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A_n(\alpha x) &= (T_1(\alpha x), \ldots, T_n(\alpha x), 0, \ldots) \\ &= (\alpha T_1(x), \ldots, \alpha T_n(x), 0, \ldots) \\ &= \alpha (T_1(x), \ldots, T_n(x), 0, \ldots) \\ &= \alpha A_n(x) \end{aligned}$$

dır. Öte yandan her bir A_n süreklidir (sınırlıdır), zira $\forall x \in l_1$ için T_i'nin sınırlılığı nedeniyle

$$\begin{aligned} \|A_n(x)\| &= \left\{ |T_0(x)|^k + \sum_{v=1}^{n} \left(\frac{Q_v}{q_v} \right)^{k-1} |T_v(x)|^k \right\}^{\frac{1}{k}} \\ &\leq \left\{ M_0^k \|x\|^k + \|x\|^k \left(\sum_{v=0}^{n} \left(\frac{Q_v}{q_v} \right)^{k-1} M_v^k \right) \right\}^{\frac{1}{k}} \\ &\leq \left(M_0 + K_n^{1/k} \right) . \|x\| \end{aligned}$$

dır. l_1 tam uzay ve $\sup_n \|A_n(x)\| \leq \|T(x)\|$ (Burada $T(x) = y = (y_n) = (T_n(x))$ aldık.) olduğuna göre Banach-Steinhause teoremi nedeniyle $\forall n \in N$ için $\|A_n\| \leq C$ yani $\forall n \in IN$ ve $\forall x \in l_1$ için

$$\|A_n(x)\| \leq \|A_n\| . \|x\| \leq C . \|x\|$$

olacak şekilde $C > 0$ sayısı vardır. Buradan da $\forall x \in l_1$ için

$$\sup_n \|A_n(x)\| = \|T(x)\| \leq C . \|x\|$$

elde edilir. Şimdi bu eşitsizlik özel olarak $v \geq 1$ için $a_v = 1$ ve $r \neq v$ için $a_r = 0$ olmak üzere $x = (x_v) \in l_1$ dizisine uygulanırsa, (13) ve (14) eşitsizlikleri nedeniyle sırasıyla,

$$x_n = \begin{cases} 0 & , \quad n < v \\ \dfrac{P_{v-1}p_n}{P_nP_{n-1}} & , \quad n \geq v \end{cases}$$

$$y_n = \begin{cases} 0 & , \ n < v \\ \dfrac{Q_{v-1}q_n\lambda_v}{Q_nQ_{n-1}} & , \ n \geq v \end{cases}$$

elde edilir. Öte yandan,

$$\|x\| = \sum_{n=0}^{\infty}|x_n| = \sum_{n=v}^{\infty}\left|\frac{P_{v-1}p_n}{P_nP_{n-1}}\right| = P_{v-1}\sum_{n=v}^{\infty}\frac{p_n}{P_nP_{n-1}} = P_{v-1}\cdot\frac{1}{P_{v-1}} = 1$$

ve

$$\|y\| = \left\{\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{Q_n}{q_n}\right)^{k-1}|y_n|^k\right\}^{\frac{1}{k}} = \left\{\sum_{n=v}^{\infty}\left(\frac{Q_n}{q_n}\right)^{k-1}\left|\frac{Q_{v-1}q_n\lambda_v}{Q_nQ_{n-1}}\right|^k\right\}^{\frac{1}{k}} = Q_{v-1}|\lambda_v|\left\{\sum_{n=v}^{\infty}\frac{q_n}{Q_nQ_{n-1}^k}\right\}^{\frac{1}{k}}$$

olur. Böylece (17) eşitsizliği ve Lemma 2.10 nedeniyle $\forall v$ için

$$Q_{v-1}|\lambda_v|\left\{\sum_{n=v}^{\infty}\frac{q_n}{Q_nQ_{n-1}^k}\right\}^{\frac{1}{k}} \leq C.1$$

$$Q_{v-1}|\lambda_v|\cdot\frac{M^{\frac{1}{k}}}{Q_{v-1}} \leq C$$

$$\Rightarrow |\lambda_n| = O(1)$$

bulunur ki, bu ise ispatı tamamlar.

Teorem 3.6: $1 \leq k < \infty$ olsun. $\lambda \in \left[\,\left|\overline{N}, p_n\right|, \left|\overline{N}, q_n\right|_k\right] \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} \text{(a)} \ \ \lambda_n = O(1) \\ \text{(b)} \ \ \Delta\lambda_n = O\left(\dfrac{p_n}{P_n}\right) \\ \text{(c)} \ \ \lambda_n = O\left\{\left(\dfrac{p_n}{P_n}\right)\left(\dfrac{Q_n}{q_n}\right)^{\frac{1}{k}}\right\} \end{cases} . \qquad (18)$$

İspat : Lemma 3.5’teki notasyonları kullanacağız. (13) eşitliğinde a_v terimini, x_n terimi cinsinden çekip (14) ifadesinde yerine yazılırsa,

$$y_n = \frac{q_n}{Q_nQ_{n-1}}\sum_{v=1}^{n} Q_{v-1}\lambda_v a_v = \frac{q_n}{Q_nQ_{n-1}}\sum_{v=1}^{n} Q_{v-1}\lambda_v\left(\frac{P_v}{p_v}x_v - \frac{P_{v-2}}{p_{v-1}}x_{v-1}\right)$$

$$= \frac{q_n}{Q_nQ_{n-1}}\sum_{v=1}^{n-1}\frac{P_v}{p_v}Q_{v-1}\lambda_v x_v + \frac{q_nP_n\lambda_n}{Q_np_n}x_n - \frac{q_n}{Q_nQ_{n-1}}\sum_{v=1}^{n}\frac{P_{v-2}}{p_{v-1}}Q_{v-1}\lambda_v x_{v-1}$$

$$= \frac{q_n}{Q_nQ_{n-1}}\sum_{v=1}^{n-1}\frac{P_v}{p_v}Q_{v-1}\lambda_v x_v + \frac{q_nP_n}{Q_np_n}\lambda_n x_n - \frac{q_n}{Q_nQ_{n-1}}\sum_{v=2}^{n}\frac{P_{v-2}}{p_{v-1}}Q_{v-1}\lambda_v x_{v-1}$$

$$= \frac{q_n}{Q_nQ_{n-1}}\sum_{v=1}^{n-1}\frac{P_vQ_v\lambda_v}{p_v}x_v - \frac{q_n}{Q_nQ_{n-1}}\sum_{v=1}^{n-1}\frac{P_vq_v\lambda_v}{p_v}x_v - \frac{q_n}{Q_nQ_{n-1}}\sum_{v=1}^{n-1}\frac{P_vQ_v\lambda_{v+1}}{p_v}x_v$$

$$+ \frac{q_n}{Q_nQ_{n-1}}\sum_{v=1}^{n-1}Q_v\lambda_{v+1}x_v + \frac{q_nP_n\lambda_n}{Q_np_n}x_n$$

$$= \frac{q_n}{Q_nQ_{n-1}}\sum_{v=1}^{n-1}\left\{\frac{P_vQ_v\Delta\lambda_v}{p_v} - \frac{q_vP_v\lambda_v}{p_v} + Q_v\lambda_{v+1}\right\}x_v + \frac{q_nP_n\lambda_n}{p_nQ_n}x_n$$

olur. $n \geq 0$ için $Y_n = \left(\frac{Q_n}{q_n}\right)^{1-\frac{1}{k}} y_n$ diyelim. Bu takdirde $n \geq 1$ için

$$Y_n = \left(\frac{q_n}{Q_n}\right)^{\frac{1}{k}}\left(\frac{1}{Q_{n-1}}\right)\sum_{v=1}^{n-1}\left\{\frac{P_vQ_v\Delta\lambda_v}{p_v} - \frac{q_vP_v\lambda_v}{p_v} + Q_v\lambda_{v+1}\right\}x_v + \left(\frac{q_n}{Q_n}\right)^{\frac{1}{k}}\left(\frac{P_n}{p_n}\right)\lambda_n x_n$$

$$= \sum_{v=1}^{n} a_{nv}x_v$$

yazalım. Bu durumda (Y_n) dizisi, (a_{nv}) matrisi

$$a_{nv} = \begin{cases} (\frac{q_n}{Q_n})^{\frac{1}{k}} \frac{1}{Q_{n-1}} (\frac{Q_v P_v \Delta\lambda_v}{p_v} - \frac{q_v P_v \lambda_v}{p_v} + Q_v \lambda_{v+1}) & ,1 \leq \; v \leq \; n-1 \\ \left(\frac{q_n}{Q_n}\right)^{\frac{1}{k}} \left(\frac{P_n}{p_n}\right) \lambda_n & , v = n \end{cases}$$

olmak üzere (x_n) dizisinin A dönüşüm dizisi olur. Buna göre lemma 1.1.15'ten

$$\lambda = (\lambda_n) \in \left[\, \left|\overline{N}, p_n\right|, \left|\overline{N}, q_n\right|_k \right] \Leftrightarrow A \in (l_1, l_k) \quad \Leftrightarrow \sup_v \sum_{n=1}^{\infty} \left|a_{nv}\right|^k < \infty \tag{19}$$

olur. (19) ifadesinden

$$\left(\frac{q_v}{Q_v}\right)\left(\frac{P_v|\lambda_v|}{p_v}\right)^k + \left|\frac{Q_v P_v \Delta\lambda_v}{p_v} - \frac{q_v P_v \lambda_v}{p_v} + Q_v \lambda_{v+1}\right|^k \sum_{n=v+1}^{\infty} \frac{q_n}{Q_n Q_{n-1}^k} = O(1) \;,\; v \to \infty \;, \tag{20}$$

yazılabilir. Açıktır ki terimlerin pozitif olduğu dikkate alınırsa (20) şartının sağlanması için gerek ve yeter şart

$$\left(\frac{q_v}{Q_v}\right)\left(\frac{P_v|\lambda_v|}{p_v}\right)^k = O(1) \tag{21}$$

ve

$$\left|\frac{Q_v P_v \Delta\lambda_v}{p_v} - \frac{q_v P_v \lambda_v}{p_v} + Q_v \lambda_{v+1}\right| \left\{\sum_{n=v+1}^{\infty} \frac{q_n}{Q_n Q_{n-1}^k}\right\}^{\frac{1}{k}} = O(1) \tag{22}$$

olmasıdır. 2.10. lemması göz önüne alarak (22) şartı denk olarak

$$\frac{P_v \Delta\lambda_v}{p_v} - \frac{q_v P_v \lambda_v}{Q_v p_v} + \lambda_{v+1} = O(1) \tag{23}$$

yazılabilir. (21)'den,

$$\left(\frac{q_v}{Q_v}\right)^{\frac{1}{k}} \left(\frac{P_v|\lambda_v|}{p_v}\right) = O(1)$$

$$\Rightarrow\left(\frac{q_v P_v \lambda_v}{Q_v p_v}\right)=O\left\{\left(\frac{q_v}{Q_v}\right)^{1-\frac{1}{k}}\right\}=O(1)$$

olduğuna göre (23) şartı

$$\frac{P_v \Delta\lambda_v}{p_v}+\lambda_{v+1}=O(1) \tag{24}$$

şartına denk olur. Şu halde (21) ve (24) nedeniyle (a) , (b) , (c) hipotezleri yeterlidir. Bununla birlikte lemma 3.5 , (21) , (24) şartlarından Teorem 3.6'nın hipotezlerinin gerekli olduğu görülür. Böylece teoremin ispatı tamamlanır.

Teorem 3.7 : $1<k<\infty$ olsun. $\lambda\in\left[\,\left|\overline{N},p_n\right|_k,\left|\overline{N},q_n\right|\,\right]\Leftrightarrow$

$$a)\sum_{v=1}^{\infty}\left(\frac{p_v}{P_v}\right)\left|\left(\frac{P_v}{p_v}\right)\Delta\lambda_v+\lambda_{v+1}\right|^{k^*}<\infty$$

$$b)\sum_{v=1}^{\infty}\left(\frac{p_v}{P_v}\right)\left\{\frac{q_v P_v}{p_v Q_v}\left|\lambda_v\right|\right\}^{k^*}<\infty \quad . \tag{25}$$

İspat: Lemma 3.5' teki notasyonlara göre,

$$y_n=\frac{q_n}{Q_nQ_{n-1}}\sum_{v=1}^{n}Q_{v-1}\lambda_v x_v=\frac{q_n}{Q_nQ_{n-1}}\sum_{v=1}^{n}Q_{v-1}\lambda_v\left(\frac{P_v}{p_v}x_v-\frac{P_{v-2}}{p_{v-1}}x_{v-1}\right)$$

$$=\frac{q_n}{Q_nQ_{n-1}}\sum_{v=1}^{n-1}\frac{P_v}{p_v}Q_{v-1}\lambda_v x_v+\frac{q_nP_n\lambda_n}{Q_np_n}x_n-\frac{q_n}{Q_nQ_{n-1}}\sum_{v=1}^{n}\frac{P_{v-2}}{p_{v-1}}Q_{v-1}\lambda_v x_{v-1}$$

$$=\frac{q_n}{Q_nQ_{n-1}}\sum_{v=1}^{n-1}\frac{P_v}{p_v}Q_{v-1}\lambda_v x_v+\frac{q_nP_n}{Q_np_n}\lambda_n x_n-\frac{q_n}{Q_nQ_{n-1}}\sum_{v=2}^{n}\frac{P_{v-2}}{p_{v-1}}Q_{v-1}\lambda_v x_{v-1}$$

$$=\frac{q_n}{Q_nQ_{n-1}}\sum_{v=1}^{n-1}\frac{P_v}{p_v}Q_{v-1}\lambda_v x_v-\frac{q_n}{Q_nQ_{n-1}}\sum_{v=1}^{n-1}\frac{P_vQ_v\lambda_{v+1}}{p_v}x_v$$

$$+\frac{q_n}{Q_nQ_{n\ 1}}\sum_{v=1}^{n-1}Q_v\lambda_{v+1}x_v+\frac{q_nP_n\lambda_n}{Q_np_n}x_n$$

$$=\frac{q_n}{Q_nQ_{n-1}}\sum_{v=1}^{n-1}\left\{\frac{P_v}{p_v}.\Delta(Q_{v-1}\lambda_v)+Q_v\lambda_{v+1}\right\}x_v+\frac{q_nP_n\lambda_n}{Q_np_n}x_n \quad , \quad n\geq 1.$$

$n\geq 1$ için $X_n=\left(\frac{P_n}{p_n}\right)^{1-\frac{1}{k}}x_n$ koyarsak;

$$y_n=\frac{q_n}{Q_nQ_{n-1}}\sum_{v=1}^{n-1}\left\{\frac{P_v}{p_v}.\Delta(Q_{v-1}\lambda_v)+Q_v\lambda_{v+1}\right\}\left(\frac{P_v}{p_v}\right)^{\frac{1}{k}-1}X_v+\frac{q_nP_n\lambda_n}{Q_np_n}\left(\frac{P_n}{p_n}\right)^{\frac{1}{k}-1}X_n$$

$$=\sum_{v=1}^{n}a_{nv}X_v$$

elde ederiz. Bu durumda (y_n) dizisi, $A=(a_{nv})$ matrisi

$$a_{nv}=\begin{cases}\dfrac{q_n}{Q_nQ_{n-1}}\left\{\dfrac{P_v}{p_v}\Delta(Q_{v-1}\lambda_v)+Q_v\lambda_{v+1}\right\}\left(\dfrac{P_v}{p_v}\right)^{\frac{1}{k}-1} & , \quad 1\leq v\leq n-1\\[2ex] \dfrac{q_nP_n\lambda_n}{Q_np_n}\left(\dfrac{P_n}{p_n}\right)^{\frac{1}{k}-1} & , \quad v=n\end{cases}$$

olmak üzere (X_n) dizisinin A-dönüşüm dizisi olur. Böylece $\sum a_n$ serisi $\left|\overline{N},p_n\right|_k$ toplanabilir olduğunda $\sum a_n\lambda_n$ serisi $\left|\overline{N},q_n\right|$ toplanabilir olması için gerek ve yeter şart $A\in(l_k,l_1)$ olmasıdır. Lemma 1.1.16'dan aynı durum için gerek ve yeter şartlar her $z_n=O(1)$ için $\sum_{n=v}^{\infty}a_{nv}z_n$ (v=1,2,3,…) yakınsak ve $z_n=0(1)$ olduğunda

$$\sum_{v=1}^{\infty}\left|\sum_{n=v}^{\infty}a_{nv}z_n\right|^{k^*}<\infty$$

olmasıdır. Şimdi,

$$\sum_{n=v}^{\infty}a_{nv}z_n=\frac{q_v}{Q_v}\left(\frac{P_v}{p_v}\right)^{\frac{1}{k}}\lambda_vz_v+\sum_{n=v+1}^{\infty}\frac{q_n}{Q_nQ_{n-1}}\left\{\frac{P_v}{p_v}\Delta(Q_{v-1}\lambda_v)+Q_v\lambda_{v+1}\right\}\left(\frac{P_v}{p_v}\right)^{\frac{1}{k}-1}z_n$$

$$=\frac{q_v}{Q_v}\left(\frac{P_v}{p_v}\right)^{\frac{1}{k}}\lambda_vz_v+\left\{\frac{P_v}{p_v}\Delta(Q_{v-1}\lambda_v)+Q_v\lambda_{v+1}\right\}\left(\frac{P_v}{p_v}\right)^{\frac{1}{k}-1}d_v$$

yazalım. Burada ,

$$d_v = \sum_{n=v+1}^{\infty} \frac{q_n}{Q_n Q_{n-1}} \cdot z_n$$

dır. Bu seri $z_n = O(1)$ olduğunda yakınsaktır.Dolayısıyla teoremin doğruluğu için gerek ve yeter şartlar, $z_v = O(1)$ olduğunda

$$\sum_{v=1}^{\infty} \left| \frac{q_v}{Q_v} \left(\frac{P_v}{p_v} \right)^{\frac{1}{k}} \lambda_v z_v + \left\{ \frac{P_v}{p_v} \Delta(Q_{v-1}\lambda_v) + Q_v \lambda_{v+1} \right\} \left(\frac{P_v}{p_v} \right)^{\frac{1}{k}-1} d_v \right|^{k^*} < \infty \qquad (26)$$

serisinin yakınsak olmasıdır. $\forall\, v \in IN$ için $z_v = 1$ alınırsa

$$d_v = \sum_{n=v+1}^{\infty} \frac{q_n}{Q_n Q_{n-1}} \cdot z_n = \sum_{n=v+1}^{\infty} \frac{q_n}{Q_n Q_{n-1}} = \frac{1}{Q_v}$$

olur. Bu takdirde (26) ifadesinden,

$$\sum_{v=1}^{\infty} \left| \frac{q_v}{Q_v} \left(\frac{P_v}{p_v} \right)^{\frac{1}{k}} \lambda_v + \left\{ \frac{P_v}{p_v} \Delta(Q_{v-1}\lambda_v) + Q_v \lambda_{v+1} \right\} \left(\frac{P_v}{p_v} \right)^{\frac{1}{k}-1} \cdot \frac{1}{Q_v} \right|^{k^*}$$

$$= \sum_{v=1}^{\infty} \left| \left(\frac{P_v}{p_v} \right)^{\frac{1}{k}} \left(\frac{q_v \lambda_v}{Q_v} + \frac{1}{Q_v} \Delta(Q_{v-1}\lambda_v) + \lambda_{v+1} \cdot \frac{p_v}{P_v} \right) \right|^{k^*}$$

$$= \sum_{v=1}^{\infty} \left| \left(\frac{P_v}{p_v} \right)^{\frac{1}{k}} \left(\frac{q_v \lambda_v}{Q_v} - \frac{q_v}{Q_v} \lambda_v + (\Delta\lambda_v) + \lambda_{v+1} \frac{p_v}{P_v} \right) \right|^{k^*}$$

$$= \sum_{v=1}^{\infty} \left| \left(\frac{P_v}{p_v} \right)^{\frac{1}{k}} \left(\Delta\lambda_v + \frac{p_v}{P_v} \lambda_{v+1} \right) \right|^{k^*}$$

$$= \sum_{v=1}^{\infty} \left(\frac{p_v}{P_v} \right) \left| \frac{P_v}{p_v} \Delta\lambda_v + \lambda_{v+1} \right|^{k^*} < \infty \qquad (27)$$

bulunur. Öte yandan Lemma 1.1.18'den

$$\sum_{v=1}^{\infty} \frac{p_v}{P_v} \left\{ \frac{q_v P_v}{Q_v p_v} |\lambda_v| \right\}^{k^*} < \infty$$

dır. Dolayısıyla teoremin hipotezleri gerek şartlardır. Nihayet $z_v = O(1)$ olduğunda teoremin hipotezleri ve

$$(a+b)^{k^*} \leq 2^{k^*}(a^{k^*}+b^{k^*}) \qquad (a\,,b\geq 0)$$

eşitsizliği dikkate alınarak (26) elde edilir ki bu da yeterliliğin ispatını tamamlar.

3.8 Sonuçlar:

Teorem 3.6 ve Teorem 3.7 bilinen bazı sonuçları özel durum olarak içerir. Bu sonuçları ifade edelim.

Sonuç 3.8.1:

$$\lambda \in \left[\, \left|\overline{N}, p_n\right|, \left|\overline{N}, q_n\right| \,\right] \Leftrightarrow \begin{cases} \text{a)} \quad \lambda_n = O(1) \\ \text{b)} \quad \Delta\lambda_n = O(\dfrac{p_n}{P_n}) \\ \text{c)} \quad \lambda_n = O(\dfrac{p_n Q_n}{q_n P_n}) \end{cases} \tag{28}$$

Teorem 3.6'da k=1 alınarak elde edilen bu sonucun yeterlilik kısmı Khan-Alauddin (1976) tarafından daha kuvvetli şartlar olan (28b), (28c) ve $p_n Q_n = O(q_n P_n)$ altında ispatlanmıştır.

Sonuç 3.8.2: $\left(\dfrac{p_n Q_n}{q_n P_n}\right) \in \left[\, \left|\overline{N}, p_n\right|, \left|\overline{N}, q_n\right| \,\right] \Leftrightarrow p_n Q_n = O(P_n q_n)$ ve

$$\Delta\frac{Q_n}{q_n} + \left(\frac{P_n}{P_{n+1}}\right)\cdot\left(\frac{Q_{n+1}}{q_{n+1}}\right)\cdot\left(\frac{\Delta p_n}{p_n}\right) = O(1)$$

dır.

İspat: Teorem 3.6'da k=1 ve $\lambda_n = \dfrac{p_n Q_n}{q_n P_n}$ alınarak istenen elde edilir. Bu sonucun yeterlilik kısmı Kishore ve Hotta (1970) tarafından daha kuvvetli şartlar altında ispatlanmıştır.

Sonuç 3.8.3 : $\left|\overline{N}, p_n\right| \Rightarrow \left|\overline{N}, q_n\right|$ olması için gerek ve yeter şart $q_n P_n = O(p_n Q_n)$ olmasıdır.

Teorem 3.6'da $k = \lambda_n = 1$ alınarak elde edilen bu sonucun yeterlilik kısmı Sunouchi (1949) ve gereklilik kısmı ise Bosanquet (1954) tarafından verilmiştir.

Sonuç 3.8.4 : $k \geq 1$ olsun. $\left|\overline{N}, p_n\right| \Rightarrow \left|\overline{N}, q_n\right|_k$ olması için gerek ve yeter şart

$$q_n P_n^k = O(Q_n p_n^k)$$

olmasıdır.

İspatı için Teorem 3.6'da $\lambda_n = 1$ almak yeterlidir. Öte yandan Teorem 3.7' de $\lambda_n = 1$ alırsak (25 a) şartı ,

$$\sum_{v=1}^{\infty} \frac{p_v}{P_v} < \infty$$

şartına dönüşür ki Abel-Dini teoremi nedeniyle bu mümkün değildir. Bu nedenle aşağıdaki sonuç Sarıgöl (1993) tarafından ortaya atılan problemi çözer.

Sonuç 3.8.5: $1 < k < \infty$ olsun. Bu takdirde $\left|\overline{N}, p_n\right|_k \not\Rightarrow \left|\overline{N}, q_n\right|$ 'dır, yani $\left|\overline{N}, p_n\right|_k$ toplanabilen fakat $\left|\overline{N}, q_n\right|$ toplanamayan bir seri vardır.

KAYNAKLAR

Bayraktar, M. (1998) Fonksiyonel Analiz, Uludağ Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü, Bursa, s140-141.

Bennett, G. (1987) Some elementary inequalities. The Quarterly Journal of Mathematics Oxford 38: 401-25.

Bor, H. (1985) On two summability methods, Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society 98: 147- 149.

Bor, H. (1993) On absolute weighted mean summability methods. Bulletin of the London Mathematical Society 25: 265-268.

Bor, H. and Thorpe, B. (1987) On some absolute summability methods, Analysis 7: 145-52.

Bor, H. and Kuttner B. (1989) On the necessary condition for absolute weighted arithmetic mean summability factors, Acta Math. Hungar. 54: 57-61.

Bosanquet, L. S. (1954) Math. Rev. 11, 654s.

Flett T. M. (1957) Proc. London Math. Soc. 7, 113-41.

Khan-Alauddin, F. M. (1976) On $\left|\overline{N}, p_n\right|$ summability factors, Revue de la Faculte des Sciences de l'Université d'Istanbul, Ser. A 41, 99-105.

Kishore N. And Hotta G. C. (1970) On $\left|\overline{N}, p_n\right|$ summability factors, Acta Sci. Math. (Szeged), 31, 9-12

Knopp, K. (1944) Theory and application of infinite series, Blackie and Son limited London and Glasgow, 480s.

Maddox, I. J. (1970) 'Elements of Functional Analysis', Cambridge Univ. Pres, Cambridge,

Mehdi, M. R. (1959) Ph. D. thesis, London.

Sarıgöl, M. A. (1991) On absolute summability factors, Commentationes Mathematicae 31, 157-63

Sarıgöl, M. A. (1991) Necessary and sufficient conditions for the equivalance of the summability methods $\left|\overline{N}, p_n\right|_k$ and $\left|C,1\right|_k$, Indian Journal of Pure and Applied Mathematics 22, 483-489.

Sarıgöl, M. A. (1992) On absolute weighted mean summability methods, Proceedings of the American Mathematical Society 115, 157-160.

Sarıgöl, M. A. (1993) A note on summability, Stud. Sci. Math. Hungar. 28, 395-400.

Sarıgöl, M. A. (1994) , Characterization of summability factors for Riesz methods, Journal of the University of Kuwait (Science), Vol. 21, pp 1-8.

Sarıgöl, M. A. And Bor, H. (1995) Characterization of absolute summability factors, Journal of mathematical analysis and applications 195, 537-545.

Sunouchi, G (1949) Notes on Fourier analysis (18), Absolute summability of a series with constant terms, Tohoku Math. J. 1, 57-65

Wilansky, A (1964) Functional Analysis, Blaisdell Publishing Company, New York, Toronto, London,290 pp.

ÖZGEÇMİŞ

İbrahim Ethem ÖZER, 31 Ağustos 1978 tarihinde Muğla'da doğmuştur.

İlköğrenimini, Muğla Atatürk İlkokulunda 1989 yılında tamamladı. Eylül1989-Haziran 1996 tarihleri arasında Muğla Anadolu Lisesi'nde hazırlık, ortaokul ve lise eğitimine devam etmiştir. Ekim 1996'da Atatürk Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümünde lisans eğitimine başladı ve 2000 yılında mezun oldu.

Aynı yıl Denizli ili, Çardak ilçesi, Gemiş İlköğretim Okuluna, Matematik Öğretmeni olarak atanmıştır. 2005-2006 Eğitim ve Öğretim yılı sonunda zorunlu hizmet nedeniyle Denizli ili Beyağaç Lisesine atanmıştır ve halen bu görevine devam etmektedir.