

**T.C.
PAMUKKALE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**NÜMERİK METOTLARLA
SKALER DALGA MODELLEMESİ**

Timur KOPARAN

Yüksek Lisans Tezi

DENİZLİ-2005

NÜMERİK METOTLARLA SKALER DALGA MODELLEMESİ

**Pamukkale Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Yüksek Lisans Tezi
Matematik Anabilim Dalı**

Timur KOPARAN

Danışman: Yrd. Doç. Dr. Murat SARI

**Temmuz, 2005
DENİZLİ**

YÜKSEK LİSANS TEZİ ONAY FORMU

Timur KOPARAN tarafından Yrd. Doç. Dr. Murat SARI yönetiminde hazırlanan “Nümerik Metotlarla Skaler Dalga Modellemesi” başlıklı tez tarafımızdan okunmuş, kapsamı ve niteliği açısından bir Yüksek Lisans tezi olarak kabul edilmiştir.

Prof. Dr. İdris DAĞ

Jüri Başkanı

Yrd. Doç. Dr. Uğur YÜCEL

Jüri Üyesi

Yrd. Doç. Dr. Murat Sarı

Jüri Üyesi (Danışman)

Pamukkale Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun
...../...../.....tarih ve sayılı kararıyla onaylanmıştır.

Prof. Dr. Mehmet Ali SARIGÖL

Müdür

Bu tezin tasarımı, hazırlanması, yürütülmesi, araştırmalarının yapılması ve bulgularının analizlerinde bilimsel etiğe ve akademik kurallara özenle riayet edildiğini; bu çalışmanın doğrudan birincil ürünü olmayan bulguların, verilerin ve materyallerin bilimsel etiğe uygun olarak kaynak gösterildiğini ve alıntı yapılan çalışmalara atfedildiğini beyan ederim.

Öğrenci Adı Soyadı: Timur KOPARAN

İmza:

TEŐEKKÜR

Yüksek lisans tezimin danışmanlığını üstlenerek, tez çalışmalarımın yürütülmesi ve başarıyla tamamlanması esnasında ilgisini ve yardımını esirgemeyen, yol gösteren değerli danışman hocam Yrd. Doç. Dr. Murat SARI'ya, Karadeniz Teknik Üniversitesi Jeofizik Bölümü Öğretim üyesi, Yrd. Doç. Dr. Yusuf BAYRAK hocama, çalışmalarım boyunca bana vermiş oldukları destekten dolayı saygı ve şükranlarımı sunarım. Ayrıca manevi desteğini hiçbir zaman esirgemeyen sevgili eşim Arş. Gör. Ezgi TAYLAN KOPARAN'a, en içten teşekkürlerimi sunarım.

Timur KOPARAN

ÖZ

Nümerik yöntemler kullanılarak dalga modellemesi konusunda yıllardan beri süregelen çalışmalar, bilgisayarların gelişmesiyle çok daha ileri seviyelere taşınmıştır.

Bu çalışmada, bir yapay kaynaktan yayılan dalgaların değişik ortamlarda nasıl davrandığı matematiksel olarak incelenmiştir. Bunun için önce bir, iki ve üç boyutlu skaler dalga denklemleri çalışıldı. Daha sonra sonlu farklar metoduna dayalı olarak çeşitli yapılar için, söz konusu dalga denklemlerinin kararlı çözümleri elde edildi. Farklı kaynak fonksiyonları karşılaştırılarak, problemlerimizde kullanılacak uygun kaynak fonksiyonu belirlenmiştir. Başlangıçta ortamı çok karmaşık yapmamak için, ortamın elastik, homojen ve izotrop olduğu varsayılmış, daha sonra iki ve üç boyutlu tabakalı ortamlarda dalga yayılımı incelenmiştir. Yapılan modellemelerde Dirichlet ve soğuran sınır şartları ayrı ayrı uygulanarak, anlık enerji yayılımlarını gösteren fotoğraflar ve yapay sismogram grafikleri elde edilmiştir. Bu çalışma ile, ayrıca, değişik ortamlarda yapay olarak üretilen dalgaların yayılma, yansıma ve kırılma olaylarının herhangi bir zamanda izlenebildiği görülmüştür. Bunun yanı sıra ayrımlılık ve grid dispersiyonunun sonuçlara etkisi çeşitli uygulamalarla ortaya konmuştur.

FORTTRAN dilinde yazılmış program kodları ile elde edilen nümerik çözümler, GRAPHER, MATLAB ve MATHCAD programlarının kullanılmasıyla, farklı durumlar için yapay sismogramlar olarak ortaya konmuştur. Sonlu farklar yöntemi ile elde edilen sonuçlar, daha önceden sonlu farklar ve sınır elemanları yöntemi ile elde edilmiş sonuçlarla karşılaştırılmıştır. Bunun sonucunda aynı geometriye sahip yapılar için farklı yöntemlerle elde edilen sismogramların birbiriyle kantitatif/kalitatif bir uyum içinde olduğu görülmüştür.

Anahtar kelimeler: Skaler Dalga Denklemi, Matematiksel Modelleme, Sonlu Farklar Metodu, Anlık Enerji Yayılımı, Yapay Sismogram

Prof. Dr. İdris DAĞ
Yrd. Doç. Dr. Murat SARI
Yrd. Doç. Dr. Uğur YÜCEL

ABSTRACT

The studies have been carried out on the numerical wave modeling with the use of computers built on advanced technology increased very much.

In this study, it is analyzed mathematically that how the waves originated from a synthetic source behave through different environments. To achieve this; first one-, two- and three- dimensional wave equations were studied. Then stable solutions of the corresponding equations were obtained. Different source functions are chosen to use for our problems. For the sake of simplicity; the medium is firstly assumed to be elastic, homogeneous and isotropic. Then the wave propagation is analyzed in two- and three-layered media. To obtain our results, Dirichlet and transparent boundary conditions are considered here. In terms of the results; snap-shots and synthetic seismograms were presented. With this work; reflection, diffraction and propagation of the waves produced synthetically in various environments are seen to be followed at any time. In the meantime, the effects of distinguishability and grid dispersion on the results are discussed in different applications.

Numerical solutions obtained from the program codes with FORTRAN are presented as synthetic seismograms obtained from different methods for the structure having the same geometry are qualitatively/quantitatively consistent with each other.

Key Words: Scalar Wave Equations, Mathematical Modeling, Finite Difference Techniques, Snap-Shot Energy Propagation, Synthetic Seismogram

Prof. Dr. İdris DAĞ
Asst. Prof. Dr. Murat SARI
Asst. Prof. Dr. Uğur YÜCEL

İÇİNDEKİLER

| | Sayfa |
|---|--------------|
| İçindekiler..... | vi |
| Şekiller Dizini..... | viii |
| Simgeler ve Kısaltmalar Dizini..... | ix |
| 1.GİRİŞ | 1 |
| 1.1 Dalga Yayılımında Bazı Temel Kavramlar..... | 6 |
| 1.1.1 Hareket..... | 6 |
| 1.1.2 Dalga Hareketi..... | 6 |
| 1.1.3 Elastisite..... | 6 |
| 1.1.4 Elastisite Teorisi..... | 7 |
| 1.1.5 Gerilme(Stress)..... | 8 |
| 1.1.6 Deformasyon (Strain)..... | 10 |
| 1.1.7 Hooke Kanunu..... | 11 |
| 1.1.8 Tabakalı Ortamlarda Dalga Yayılımı..... | 12 |
| 1.2 Sismoloji ve Sismogram..... | 13 |
| 1.2.1 Boyuna Dalgalar (P Dalgaları)..... | 15 |
| 1.2.2 Enine Dalgalar (S Dalgaları)..... | 15 |
| 1.3 Dalga Denklemlerinin Çıkarılması..... | 17 |
| 1.3.1 Bir Boyutlu Skaler Dalga Denklemi..... | 17 |
| 1.3.2 İki ve Üç Boyutlu Skaler Dalga Denklemi..... | 19 |
| 1.4 Sonuçlar..... | 21 |
| 2. DALGA DENKLEMLERİNİN SAYISAL ÇÖZÜMÜ..... | 22 |
| 2.1 Sonlu Farklar Metodu..... | 22 |
| 2.1.1 Sonlu Farklar Metodunda Kullanılan Yaklaşımların Çıkarılması..... | 23 |
| 2.1.2 İleri Yön, Geri Yön ve Merkezi Fark Türevlerinin Karşılaştırılması..... | 25 |
| 2.2 Bir Boyutlu Dalga Denkleminin SFM ile Çözümü..... | 25 |
| 2.3 İki Boyutlu Dalga Denkleminin SFM ile Çözümü..... | 27 |
| 2.4 Üç Boyutlu Dalga Denkleminin SFM ile Çözümü..... | 29 |
| 2.5 Sonuçlar..... | 30 |

| | |
|--|-----------|
| 3. KAYNAK FONKSİYONLARI VE AYRIMLILIK..... | 31 |
| 3.1 Kaynak Fonksiyonları..... | 31 |
| 3.2 Gabor, Ricker, Gaussian ve Berlage Kaynak Fonksiyonları için Sonuçlar..... | 32 |
| 3.3 Ayrımlılık..... | 39 |
| 3.4 Ayrımlılığın Modellenmesi..... | 39 |
| 3.5 Sonuçlar..... | 42 |
| 4. DALGA DENKLEMLERİNİN SAYISAL ÇÖZÜM ŞARTLARI..... | 43 |
| 4.1 Sınır Şartları..... | 43 |
| 4.1.1 Bir Boyutlu Dalga Denkleminin Çözümünde Kullanılan Sınır Şartları..... | 44 |
| 4.1.2 İki Boyutlu Dalga Denkleminin Çözümünde Kullanılan Sınır Şartları..... | 45 |
| 4.1.3 Üç Boyutlu Dalga Denkleminin Çözümünde Kullanılan Sınır Şartları..... | 47 |
| 4.2 Kararlılık Şartı..... | 48 |
| 4.2.1 Bir Boyutlu Durum İçin Kararlılık Şartı..... | 48 |
| 4.2.2 İki Boyutlu Durum İçin Kararlılık Şartı..... | 50 |
| 4.2.3 Üç Boyutlu Durum İçin Kararlılık Şartı..... | 51 |
| 4.3 Grid dispersiyonu..... | 52 |
| 4.4 Sonuçlar..... | 52 |
| 5. UYGULAMALAR..... | 53 |
| 5.1 Sınır Koşullarının Etkisi..... | 53 |
| 5.2 İki Tabakalı Ortamda Kırılan ve Yansıyan Dalgalar..... | 59 |
| 5.3 Grid Dispersiyonu Etkisi..... | 61 |
| 5.4 İki Boyutlu Uygulamalar..... | 64 |
| 5.5 Üç Boyutlu Uygulamalar..... | 75 |
| 5.6 Sonuçlar..... | 83 |
| SONUÇ VE ÖNERİLER..... | 84 |
| KAYNAKLAR..... | 86 |
| ÖZGEÇMİŞ..... | 87 |

ŞEKİLLER DİZİNİ

| | Sayfa |
|---|--------------|
| Şekil 1.1: Düz ve ters problem çözümünün şematik olarak gösterimi..... | 1 |
| Şekil 1.2: Jeofizikte düz problem çözümü..... | 2 |
| Şekil 1.3: Jeolojik model..... | 4 |
| Şekil 1.4: Birim alana düşen kuvvetin fiziksel gösterimi..... | 8 |
| Şekil 1.5: Gerilme tensörü bileşenleri..... | 9 |
| Şekil 1.6: Gerilme ve deformasyon arasındaki ilişki..... | 11 |
| Şekil 1.7: Kırılan ve yansıyan dalga yolları..... | 13 |
| Şekil 1.8: Bir Sismogram..... | 14 |
| Şekil 1.9: P dalgası (Boyuna Dalga)..... | 15 |
| Şekil 1.10: S Dalgası (Enine Dalga)..... | 16 |
| Şekil 1.11: SV bileşeni..... | 16 |
| Şekil 1.12: SH bileşeni..... | 16 |
| Şekil 1.13: Bir sicim üzerinde dalga hareketi..... | 17 |
| Şekil 1.14: x_3 yönündeki boyuna normal gerilmeler..... | 19 |
| Şekil 2.1: Sonlu fark yönteminde kullanılan grid ağı..... | 26 |
| Şekil 2.2: İki boyutlu skaler dalga denkleminin çözümünde kullanılan grid ağı..... | 28 |
| Şekil 2.3: İki boyutlu skaler dalga denkleminin çözümünde kullanılan sınırlar..... | 28 |
| Şekil 2.4: Üç boyutlu skaler dalga denkleminin çözümünde kullanılan grid ağı..... | 30 |
| Şekil 2.5: Üç boyutlu skaler dalga denkleminin çözümünde kullanılan sınırlar..... | 30 |
| Şekil 3.1: Merkez frekansı 10, 50, 80 Hz olan Gabor kaynak fonksiyonunun zaman ve frekans ortamında görünümü..... | 34 |
| Şekil 3.2: Merkez frekansı 10, 50, 80 Hz olan Ricker kaynak fonksiyonunun zaman ve frekans ortamında görünümü..... | 35 |
| Şekil 3.3: Merkez frekansı 10, 50, 80 Hz olan Gaussian kaynak fonksiyonunun zaman ve frekans ortamında görünümü..... | 36 |
| Şekil 3.4: Merkez frekansı 10, 50, 80 Hz olan Berlage kaynak fonksiyonunun zaman ve frekans ortamında görünümü..... | 37 |
| Şekil 3.5: Merkez frekansı 30 Hz ve $\tau = 1,2,3,4$ değerleri için elde edilmiş olan Gabor kaynak fonksiyonunun zaman ve frekans ortamdaki görünümü..... | 38 |

| | |
|--|-------|
| Şekil 3.6: Merkez frekansı 30 Hz olan Gabor, Ricker, Gaussian ve Berlage kaynak fonksiyonlarının zaman ve frekans ortamında karşılaştırılması..... | 38 |
| Şekil 3.7: Üç tabakalı yapının görünümü..... | 40 |
| Şekil 3.8: Şekil 3.7’de verilen model için, $f_p = 30Hz$ ve ara tabaka kalınlığı $\frac{I}{4}N$ değerinden küçük olduğunda elde edilen anlık enerji yayılımları..... | 40 |
| Şekil 3.9: Şekil 3.7’de verilen model için, $f_p = 30Hz$ ve ara tabaka kalınlığı $\frac{I}{4}N$ değerinden büyük olduğunda elde edilen anlık enerji yayılımları..... | 41 |
| Şekil 4.1: İki boyutlu modelde Dirichlet ve transparent sınır koşullarının geometrisi.. | 46 |
| Şekil 4.2: Bir boyutlu skaler dalga modellemesinde $\lambda = \frac{c\Delta t}{h}$ değerinin sistemin kararlılığındaki etkisi..... | 49 |
| Şekil 5.1: İki boyutlu homojen yeraltı modeli..... | 53 |
| Şekil 5.2: Şekil 5.1 de verilen iki boyutlu homojen modelde Dirichlet sınır şartları kullanılarak elde edilen anlık enerji yayılımları..... | 55-56 |
| Şekil 5.3: Şekil 5.1 de verilen iki boyutlu homojen modelde soğuran sınır koşulları kullanılarak elde edilen anlık enerji yayılımları..... | 57 |
| Şekil 5.4: Şekil 5.1 de verilen model için Dirichlet sınır koşulları kullanılarak SFM ile elde edilen sismogram..... | 58 |
| Şekil 5.5: Şekil 5.1 de verilen model için soğuran sınır koşulları kullanılarak elde SFM ile edilen sismogram..... | 58 |
| Şekil 5.6: İki boyutlu iki tabakalı yeraltı modeli..... | 59 |
| Şekil 5.7: Şekil 5.6 da verilen iki tabakalı yapı için çeşitli zamanlarda elde edilen anlık enerji yayılımları..... | 60 |
| Şekil 5.8: Merkez frekansı 15, 40, 50, 75 Hz alınarak, aynı zaman adımında elde edilen anlık enerji yayılımları..... | 61 |
| Şekil 5.9: Merkez frekansı 15, 40, 50, 75 Hz alınarak, (20,240) noktasında elde edilen sismogramlar..... | 62 |
| Şekil 5.10: Merkez frekansı 15, 40, 50, 75 Hz alınarak, elde edilen sismogramların görünümü..... | 63 |
| Şekil 5.11: İki boyutlu homojen modelde kaynağın ve alıcıların yeri..... | 64 |
| Şekil 5.12: Şekil 5.11 de verilen iki boyutlu homojen model için SFM ile ve soğuran sınır şartı kullanılarak elde edilen sismogram..... | 65 |

| | |
|---|----|
| Şekil 5.13: Şekil 5.11’de verilen model için Reynolds’ın SFM ile soğuran sınır şartı kullanarak elde ettiği yapay sismogram..... | 65 |
| Şekil 5.14: Şekil 5.11’de verilen model için Sarı’nın SIEM ile elde ettiği yapay sismogram..... | 66 |
| Şekil 5.15: Şekil 5.11’de verilen model için SFM ile Dirichlet sınır şartı kullanılarak elde edilen yapay sismogram..... | 66 |
| Şekil 5.16: Şekil 5.11’de verilen model için Reynolds’ın SFM ile Dirichlet sınır şartı kullanılarak elde ettiği yapay sismogram..... | 67 |
| Şekil 5.17: Şekil 5.11’de verilen model için Demir’in SFM ile kutu kaynak ve Dirichlet sınır şartı kullanarak elde ettiği yapay sismogram..... | 67 |
| Şekil 5.18: Şekil 5.11’de verilen model için Sarı’nın SIEM ile Dirichlet sınır şartını kullanarak elde ettiği yapay sismogram..... | 68 |
| Şekil 5.19: İki boyutlu iki tabakalı modelde kaynağın ve alıcıların yeri..... | 69 |
| Şekil 5.20: Şekil 5.18’de verilen model için SFM ile soğuran sınır şartı kullanılarak elde edilen yapay sismogram..... | 70 |
| Şekil 5.21: Şekil 5.18’de verilen iki boyutlu iki tabakalı model için Reynolds’ın SFM ile soğuran sınır şartı kullanarak elde ettiği yapay sismogram..... | 70 |
| Şekil 5.22: Şekil 5.18’de verilen model için Sarı’nın SIEM ile elde ettiği yapay sismogram..... | 71 |
| Şekil 5.23: Şekil 5.18’de verilen model için SFM ile Dirichlet sınır şartı kullanılarak elde edilen yapay sismogram..... | 72 |
| Şekil 5.24: Şekil 5.17’de verilen model için Reynolds’ın SFM ile Dirichlet sınır şartı kullanarak elde ettiği yapay sismogram..... | 72 |
| Şekil 5.25: İki boyutlu üç tabakalı modelde kaynağın ve alıcıların yeri | 73 |
| Şekil 5.26: Şekil 5.25’de verilen model için SFM ile Dirichlet sınır şartı kullanılarak elde edilen yapay sismogram..... | 74 |
| Şekil 5.27: Şekil 5.25’de verilen model için Sarı’nın SIEM ile elde ettiği yapay sismogram..... | 74 |
| Şekil 5.28: Üç boyutlu homojen modelde kaynağın ve alıcıların yeri..... | 75 |
| Şekil 5.29: Şekil 5.28’de verilen model için SFM ile soğuran sınır şartı kullanılarak elde edilen yapay sismogram..... | 76 |
| Şekil 5.30: Şekil 5.28’de verilen model için SFM ile Dirichlet sınır şartı kullanılarak, elde edilen yapay sismogram..... | 76 |

| | |
|---|----|
| Şekil 5.31: Şekil 5.28’de verilen model için Sarı’nın SIEM ile elde ettiği yapay sismogramlar..... | 77 |
| Şekil 5.32: Üç boyutlu ve iki tabakalı modelde kaynağın ve alıcıların yeri..... | 78 |
| Şekil 5.33: Üç boyutlu iki tabakalı modelin farklı düzlemlerden görünümü..... | 78 |
| Şekil 5.34: Üç boyutlu iki tabakalı model için xz düzleminde elde edilen anlık enerji yayılımları..... | 79 |
| Şekil 5.35: Üç boyutlu iki tabakalı model için yz düzleminde elde edilen anlık enerji yayılımları..... | 80 |
| Şekil 5.36: Üç boyutlu iki tabakalı model için xy düzleminde elde edilen anlık enerji yayılımları..... | 81 |
| Şekil 5.37: Şekil 5.32’de verilen model için SFM ile soğuran sınır şartı kullanılarak, elde edilen yapay sismogram..... | 82 |
| Şekil 5.38: Şekil 5.32’de verilen model için SFM ile Dirichlet sınır şartı kullanılarak, elde edilen yapay sismogram..... | 82 |
| Şekil 5.39: Şekil 5.31’de verilen model için Sarı’nın SIEM ile elde ettiği yapay sismogram..... | 83 |

SİMGELER ve KISALTMALAR DİZİNİ

| <u>Simge</u> | <u>Açıklama</u> |
|---------------|---|
| A_o | Genlik |
| a | İvme |
| b | Yerçekimi kuvveti |
| c | Dalga yayılım hızı |
| c_p | P dalga hızı |
| c_s | S dalga hızı |
| Δt | Zaman adımı |
| Δx | Uzaklık adımı |
| E | Young Modülü |
| ε | Deformasyon |
| F | Kuvvet |
| f_p | Kaynak frekansı |
| f' | f fonksiyonunun birinci türevi |
| f'' | f fonksiyonunun birinci türevi |
| f''' | f fonksiyonunun birinci türevi |
| $f(x,t)$ | Bir boyutlu dalga denkleminde kaynak fonksiyonu |
| $f(x,z,t)$ | İki boyutlu dalga denkleminde kaynak fonksiyonu |
| $f(x,y,z,t)$ | Üç boyutlu dalga denkleminde kaynak fonksiyonu |
| h | Adım uzunluğu |
| K | Bulk modülü |
| m | Kütle |
| μ | Kayma modülü |
| N | Dalga boyu |
| $O(h)$ | h.ninci mertebeden hata |
| ρ | Yoğunluk |
| R | Yansıma katsayısı |

| | |
|-----------------|------------------------------------|
| τ | Sönüm sabiti |
| σ | Gerilme |
| ∂ | Diferansiyel operatör |
| λ | (Hız x zaman adımı) /uzaklık adımı |
| λ_L | Lame sabiti |
| U | Yer değiştirme fonksiyonu |
| x_1, x_2, x_3 | Kartezyen koordinatlar |
| w_p | Açısal pik frekansı |
| φ | Faz açısı |
| t | Zaman |
| α | Soğurma katsayısı |
| SIEM | Sınır elemanları metodu |
| SFM | Sonlu farklar metodu |

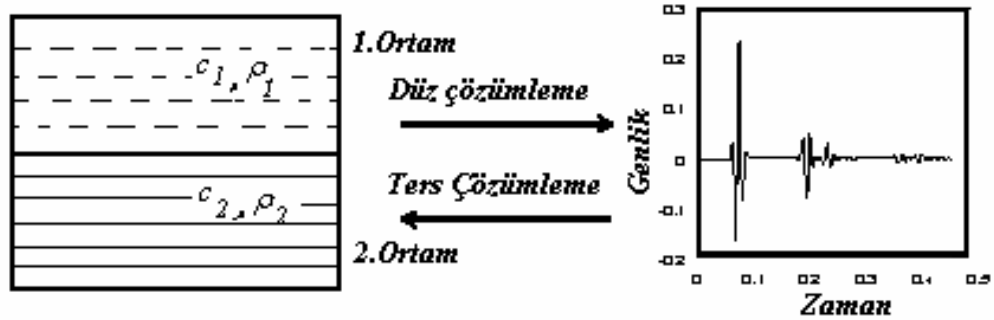
1. GİRİŞ

Matematiğin olduğu her yerde modelleme kendiliğinden gelir. Çünkü matematiğin kuralları kendine özgüdür ve çoğunlukla eldeki probleme tam olarak uymaz. Bu durumda matematiği değiştirmek zor ve gereksiz olduğundan, problemi matematiğe uydurmak gerekir. Bu yapılan işleme modelleme denir.

Deprem odağından yayılan elastik dalgalar yerin içyapısı hakkında en güvenilir bilgileri sağladığından, jeofizik alanında yapılan modelleme çalışmalarının önemi büyüktür. Jeofiziğin temel problemlerinden birisi gözlemsel verilerden yararlanarak ortamı veya kaynağı modellemektir. Verilen bir modelin jeofizik tepkisini ya da beklenen belirtisini hesaplamak, kimi zaman karmaşık bir takım hesaplamalar gerektirse de, zor değildir. Bunun için sırasıyla şunlar yapılır (Cantez 1997);

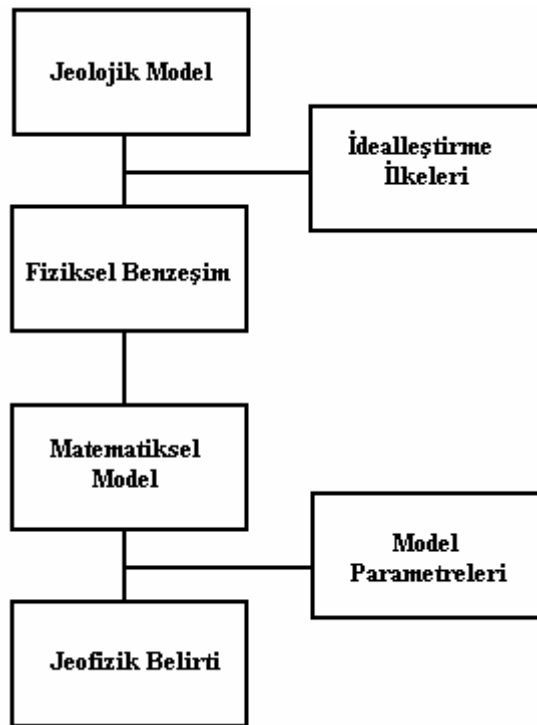
- Matematiksel model oluşturulur,
- Model parametreleri belirlenir,
- Sayısal hesaplamalar yapılır

Bu tür problem çözümüne “*Düz problem (Forward Problem)*” çözümü denir. Verilen bir matematik model ve parametre kümesi için tek bir düz çözüm vardır. Ancak, bunun tersi her zaman doğru değildir. Yani, aynı jeofizik belirtiyi verebilecek birden fazla (hatta sonsuz tane) model bulunabilir. Gözlemsel veriden yola çıkarak, modeli belirlemeyi amaçlayan problem çözümüne de “*Ters problem (Inverse problem)*” çözümü adı verilir.



Şekil 1.1 Düz ve ters problem çözümünün şematik olarak gösterimi

Sismolojide tasarlanan bir yer modelinden yapay sismogram hesaplanması bir başka deyişle düz problem çözümü sismik kesitlerin modellenmesine yardımcı olmaktadır. Düz problem çözümünde; yoğunluk ve hız dağılımları belli olan yer kesiti ile bir nokta kaynak için iki boyutlu sismogram hesaplanarak, araziden elde edilen muhtemel sonuçlarla karşılaştırılması hedeflenir. Kararlı sonuçlar elde etmek için; yeterli uygunluk sağlanana kadar giriş modeli değiştirilerek işlem tekrarlanır. Bu aşamada gerçek arazi verisiyle yapay veri karşılaştırılırken dalga yayılımının iyi bir şekilde modellenmesi gerekir.



Şekil 1.2 Jeofizikte düz problem çözümü aşamaları

Jeolojik bir taslaktan kalkarak jeofizik belirtiyeye ulaşma biçimindeki düz problem çözümünün ayrıntıları Şekil 1.2’de görüldüğü gibi açıklanabilir. Şekilden de görüldüğü gibi ilk aşama jeolojik yapının modellenmesidir. Jeolojik bir yapıyı modellemek için genel olarak iki grup parametrenin belirlenmesi gerekir;

- a) Geometrik parametreler,
- b) Fiziksel parametreler.

Jeofiziğin ilk yıllarında bilgisayar kullanım olanaklarının bulunmaması nedeniyle karmaşık jeolojik yapıları modelleme ve bunların jeofizik belirtilerini hesaplama olanağı bulunamıyor, yalnızca küre, silindir, yarı sonsuz bir düzlem vb. basit

geometrilere yetiniliyordu. Bugünün olanaklarıyla karmaşık yapıları modelleyerek bunların jeofizik belirtilerini hesaplamak olanaklıdır.

Jeolojik yapıların modellenmesi iki ya da üç boyutta yapılabilir. Yapılan işlem seçilen bir koordinat sistemine göre yapının geometrik sınırlarına ilişkin koordinatları saptamaktır. Çoğu zaman hesaplama zamanından kazanmak için geometri olabildiğince az nokta ile tanımlanmaya yani *model idealleştirilmeye çalışılır*. Bu durumda çoğu zaman cismi belirleyen sınırların noktalar arasında doğrusal olduğu varsayımı yapılmaktadır. Cismin geometrisi basitleştikçe, bunu tanımlayacak parametre sayısı da o ölçüde azalır.

Jeofizik belirtiyi cismin geometrisi ve ortamın fiziksel özelliklerinin yanı sıra ortamın homojenliği de etkiler. Çoğu zaman problemin çözümünü kolaylaştırmak için fiziksel modellemeye geçmeden bir takım varsayımların yapılması gerekebilir. Örneğin

- *ortam yatay katmanlardan oluşmuştur,*
- *katmanlar kendi aralarında homojendir,*
- *ortam izotropdur.*

Kimi zaman problem bir diferansiyel denklemin çözümü ile sonuçlanabilir. Bu durumda özel çözümlerin bulunabilmesi için başlangıç ve sınır koşullarının belirlenmesi gerekebilir. Bunlar da fiziksel problemin kurulmasından önce saptanması gereken koşullardır. Örneğin

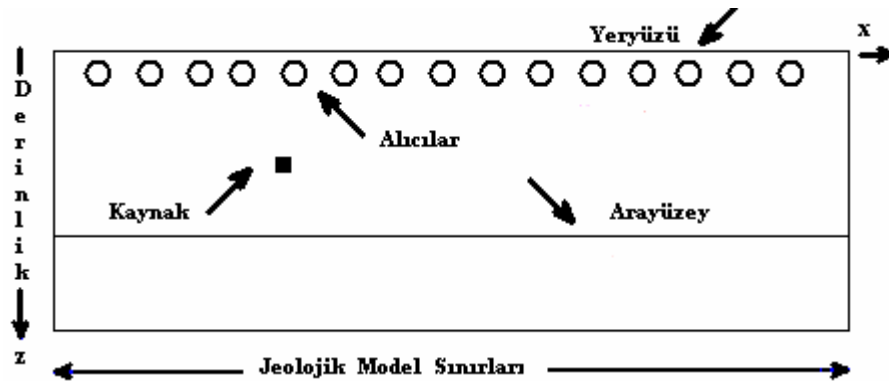
- *serbest yüzeyde gerilmeler sıfırdır,*
- *ara yüzeyde yer değiştirmeler süreklidir.*

Fiziksel modelin biçimi ve modelleme tekniği, çözülecek probleme ve uygulanacak jeofizik yönteme bağlı olarak değişir. Fiziksel modeli kurmaktaki amaç, jeofizik problemi çözülebilen bir probleme dönüştürmektir. Problem böylece bir jeoloji problemi olmaktan çıkarak bir matematiksel fizik problemine dönüşmüş olmaktadır.

Fiziksel modelin ortaya koyduğu ve çözülmesi gereken bağıntı kuşkusuz problemin özelliğine göre değişir. Bu basit bir analitik bağıntı olabileceği gibi, bir diferansiyel denklem vb. olabilir. Bu bağıntı, kurulan jeolojik modelden beklenen jeofizik belirtinin ifadesidir. Parametrelerin belirli değerleri için hesaplanan büyüklükler modelin tepkisini verecektir. Model tepkisinin gözlemsel verilere uygun olması gerekir. Bu aşamada düz problem çözümü tamamlanmıştır.

Uygulamalı jeofizikte yapay sismogram üretimi ve bunların gerçek sismogramlarla karşılaştırılması oldukça yararlı bilgiler sağlamaktadır. Sismik modellemeye artan ilgi, çeşitli doğrulukta ve uygulama kolaylıkları sağlayan yöntemlerin gelişmesine neden olmuştur. 1970’li yıllarda bilgisayar imkânlarının artması ile dalga denklemleri sayısal yöntemlerle çözümlenerek yapay sismogram üretimi konusunda çalışmalar başlamıştır.

Yapay sismogramlar, yer içindeki mikro veya global boyuttaki değişimlerin dalga biçimlerini nasıl etkilediğini öğrenmek için üretilirler. Yer içi çoğu kez homojen tabakalardan oluştuğu varsayılsa da aslında heterojen bir yapıya sahiptir. Yapay sismogramlardan karmaşık yer içi yapısını elde etmede yararlanılır. Dalga denklemlerinin sonlu farklar çözümü ile yapılan modellemelerde kaynağı istenilen bir derinliğe ve uzaklığa yerleştirme imkânı vardır. Şekil 1.3’de kaynaktan çıkıp alıcılar ile kaydedilen dalga, aldığı yol boyunca kat ettiği ortamın fiziksel özelliklerini yansıtmaktadır. Bu bakımdan, yapay sismogramlardan faydalanılarak yer içindeki karmaşık yapılar araştırılabilir (Bayrak 1993).



Şekil 1.3 Jeolojik model

Yapay sismogram üretim yöntemlerini beş ayrı başlık altında toplamak mümkündür (Canitez 1997). Bunlar;

- 1- İntegral dönüşümleri
- 2- Mod toplama
- 3- Işın teorisi
- 4- Ayrık koordinat yöntemleri
 - a. Sonlu elemanlar
 - b. Sonlu farklar
 - c. Spektral yöntemler
- 5- Melez (Hibrit) yöntemler.

Geniş kullanım alanı ve kolay oluşları, karmaşık problemlerin çözümünde sonlu farklar ve sonlu elemanlar yöntemlerinin etkin olarak kullanılmasını sağlaya gelmiştir. Son zamanlarda bilgisayar teknolojisinin gelişmesiyle birlikte sayısal hesaplamalardaki zamandan tasarruf, sonlu fark yaklaşımına olan ilgiyi arttırmıştır.

Bu çalışmada ilk olarak dalga yayılımı ile ilgili temel kavramlara yer verilmiş olup, bir, iki ve üç boyutlu skaler dalga denklemleri çıkarılmıştır. Daha sonra sonlu farklar metodu ile sayısal çözümler elde edilip, bu sayısal yaklaşımlardan yararlanılarak çeşitli boyut ve özelliklere sahip ortamların dinamik tepkisi modellenmiştir. Başlangıçta ortamı çok karmaşık yapmamak için, ortamın elastik, homojen ve izotrop olduğu varsayılmıştır. Daha sonra iki ve üç boyutta tabakalı ortamlarda dalga yayılımı incelenmiştir. Bilgisayarların belleklerinin sınırlı olmasından dolayı, sonlu farklar çözümü, sınırları kullanıcı tarafından belirlenen sonlu sayıdaki grid noktasından oluşacaktır. Bu takdirde model sınırlarında meydana gelecek sınır yansımaları problem olacaktır. Bu etki modellenen bölgede yayılan gerçek sismik sinyalleri örteceğinden, bu arzu edilen bir durum değildir. Bu sınır etkilerinden kurtulmak için modelin boyutları büyütülüp kenar yansımaları geciktirilir. Diğer bir çözüm de model sınırlarında sınır şartları tanımlamaktır. Yapılan modellemelerde Dirichlet ve soğuran sınır şartları olmak üzere iki farklı sınır şartı kullanılmış, bunlara dayalı olarak anlık enerji yayılımları ve yapay sismogramlar elde edilmiştir. Ayrıca farklı kaynak fonksiyonları ve bunların sonuçlar üzerindeki etkileri tartışılmıştır. Bazı Sonlu Fark Metodu (SFM) sonuçları, Sınır Elemanları Metodu (SIEM) sonuçları ile karşılaştırılmıştır. Burada sunulan sonuçların üretilmesinde kullanılan FORTRAN programlarının çoğu, KTÜ Jeofizik Bölümü öğretim üyeleri, Yrd. Doç. Dr Hakan KARSLI ve Yrd. Doç. Dr. Yusuf BAYRAK'tan alınan programların problemimize uygun hale getirilmiş modifiyeleridir. Bu programlardan elde edilen veriler MATLAB, GRAPHER ve MATHCAD gibi grafik programlarında işlenmiş, çeşitli sismogramlar ile anlık enerji yayılımını gösteren snapshotlar üretilmiştir. Nümerik çözümlerden elde edilen bu grafikler yardımıyla, yapay olarak üretilen dalgaların homojen ve tabakalı ortamlarda yayılımı, yansıması ve kırılması incelenmiştir. SFM ile elde edilen sonuçlardan bazıları Reynolds'ın 1978 SFM ile elde ettiği sismogramlarla, bazıları SIEM sonuçları ile karşılaştırılmış ve sonuçlardaki uyum ortaya konmuştur.

1. 1 Dalga Yayılımında Bazı Temel Kavramlar

1.1.1 Hareket

Bir cismin; sabit kabul edilen bir referans sisteminde duran bir noktaya göre yer değiştirmesine hareket denir. Bir ekin tarlasından geçen rüzgâr, tarlanın bir ucundan diğer ucuna yayılan bir dalga oluşturur. Burada, küçük salınım yapan ayrı bitkilerin hareketi ile dalganın hareketini ayırt etmek gerekir. Ortamı oluşturan parçacıklar yalnız küçük titreşimler yaparken, bütün hareket ilerleyen bir dalgadır.

1.1.2 Dalga Hareketi

Bir su yüzeyine bakıp su dalgası olarak adlandırılan olay, su yüzeyinin yeni bir düzene geçme halidir. Bu durumda dalga, bir cisim veya ortamdaki sarsıntı hareketi olarak ifade edilebilir. Genel olarak ilerleyen ve duran dalgalar olarak iki sınıfa ayrılır.

Su yüzeyinde yayılan bir dalga ilerleyen dalgaya bir örnektir. Bir duran dalga belirli sınırları olan bir uzay bölgesinde bulunur. Örneğin bir gitar teli titreştirildiğinde telin sabitlenmiş iki ucu arasında duran dalgalar meydana gelir. Duran bir dalgada enerji sınırlanan bölgede kalır. Ses dalgaları, su dalgaları, iplerdeki ve cisimlerdeki dalgalar mekanik dalga örnekleridir. Mekanik dalgalar bir ortam içinde var olabilirler ve Newton yasalarıyla çıkarılırlar.

1.1.3 Elastisite

Katı bir cismin büyüklüğü ve şekli, bu cisme uygulanan dış kuvvet etkisi ile değişebilir. Cisim içerisinde, bu dış kuvvetlere karşı koyan iç kuvvetler meydana gelir. Dış kuvvet ortadan kaldırıldığı zaman cisim ilk haline dönmeye çalışır. Dış kuvvetlerin etkisi ile şekli ve büyüklüğü değişebilen, dış kuvvetler ortadan kalktıktan sonra eski haline dönmeye çalışan cisimlere *elastik cisimler* denir.

Elastisite, hacim veya şekil değişikliğine direnme özelliği ve dış kuvvet ortadan kaldırıldığı zaman cismin eski haline dönmesi olarak tanımlanabilir. Kuvvet ortadan kaldırıldığı zaman cisim eski haline dönmezse şekil değişimi esnek değildir. şekil değişimi kısmen ortadan kalkıyorsa yarı esnek şekil değişiminden, hiç ortadan kalkmıyorsa plastik şekil değişiminden söz edilir.

1.1.4 Elastisite Teorisi

Cisim ve yüzey dalgaları olarak sınıflandırılan elastik dalgaların özellikleri tam olarak elastisite teorisi ile açıklanabilir. Elastisite teorisinden yararlanılarak bu dalgaların oluşumunu sağlayan tüm şartlar matematiksel olarak gösterilebilir. Bununla birlikte problemi basitleştirecek bazı ön kabuller yapılır. Bu kabuller ile basit elastisite teorisi yer içerisindeki şartları incelemek için yeterli olur (Alptekin 1985).

Söz konusu kabuller;

1. Birbirine bitişik taneciklerin birbirine göre hareketleri son derece küçüktür (infinitesimally small).
2. Materyal tam elastiktir. Yani gerilme, deformasyonun lineer bir fonksiyonudur ve genellikle Hooke kanununun genel şekli uygulanabilir.
3. Kullanılan yapı izotropdur. Yani, elastik parametrelerin yapı içerisindeki değerleri tüm yönlerde aynıdır.
4. Gravite, sürtünme gibi dış kuvvetler ihmal edilebilir.

Özel durumlarda bu kabullerden biri veya birkaçı kaldırılabilir. Bu gibi durumların incelenmesi matematiksel güçlükler gösterir. Materyalin elastik özellikleri yöne göre değişiyorsa bu gibi materyallere anizotropdur denir. Örneğin odun gibi materyallerde boyuna doğrultudaki özellikler, diğer doğrultudakilerden farklıdır ve bu malzemeler anizotropdur.

Uygulamada kullanılan materyallerin nadiren homojen ve izotrop olduğuna dikkat edilmelidir. Çünkü materyalin kristalik veya moleküler yapısı sürekli değildir ve gelişigüzel bir şekilde yönelmiş olabilir. Bununla beraber izotrop ve homojenlik kabulleri genellikle deneylerle uyum halinde olan sonuçlara götürür.

Yukarıda belirtilen sınırlamalara rağmen lineer elastisite teorisi yer içinde elastik dalga yayılmasını incelemekte çok yararlı olmuştur (Alptekin 1985).

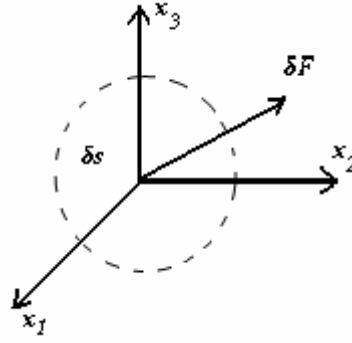
1.1.5 Gerilme (Stress)

Gerilme birim alana uygulanan kuvvet olarak tanımlanır. Bir başka ifadeyle, cisme bir dış kuvvet uygulandığında kuvvetin uygulanan alana oranı *gerilmeyi* verir. Gerilmenin matematiksel tanımı:

$$\sigma = \lim_{\delta s \rightarrow 0} \frac{\delta F}{\delta s} \quad (1.1)$$

Burada δF birim kuvvet, δs birim yüzeydir.

Fiziksel anlamda gerilme, bir kuvvetin meydana getireceği deformasyona karşı cismin içinde meydana gelen birim yüzeye düşen iç kuvvettir.



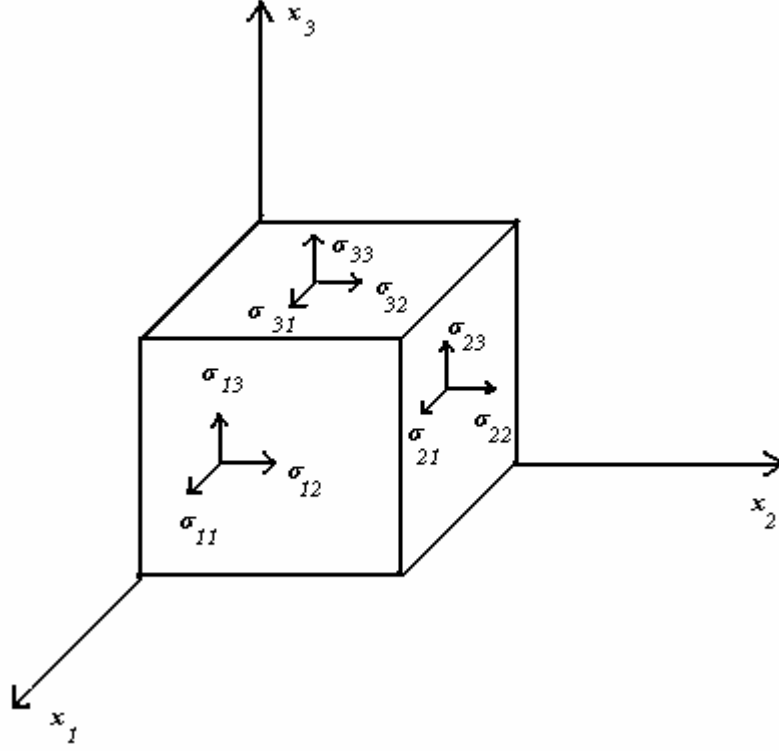
Şekil 1.4 Birim alana düşen kuvvetin fiziksel gösterimi

Gerilmeyi matematiksel olarak incelemek için Kartezyen koordinat sistemindeki bileşenlerine ayırmak yararlı olur. Bunun için gerilmeyi koordinat eksenlerine dik olan üç düzlemdeki bileşenlerine ayırmak gerekir. Şekil 1.5'te elemanter küp üzerine etki eden gerilme tensörü bileşenleri görülmektedir. Böylece eksenlerle rasgele bir açı yapan herhangi bir yüzey üzerinde gerilme dokuz bileşeni ile tanımlanır.

Eğer kuvvet alana dik ise, bu gerilmeye *normal gerilme (dik gerilme)* veya basınç denir. Kuvvet, alanın bir parçasına teğet olduğunda gerilme *makaslama gerilmesi* veya kayma gerilmesi (shearing stress) adını alır. Gerilme için kullanılan ilk indis gerilmenin doğrultusunu, ikinci indis ise gerilmenin etkilediği yüzeyi gösterir. Gerilme tensörü

$$\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix} \quad (1.2)$$

ile verilebilir.



Şekil 1.5 Gerilme tensörü bileşenleri

Gerilme bileşenlerinin hepsi birbirinden bağımsız değildir. Yukarıda göz önüne alınan birim küp denge konumunda olduğundan küpe etkiyen kuvvetlerin denge halinde olması gerekir. Küp, merkezinden geçen ve onu x_3 eksenine paralel bir eksen etrafında döndürmeye çalışan gerilmelerle ele alınırsa, yani bunu yapabilecek gerilmeler σ_{12} ve σ_{21} dir. Küp dengede olduğundan bu iki gerilmenin x_3 eksenine göre momentlerinin toplamı sıfır olmalıdır.

Moment=Gerilme×gerilmenin etkilediği alan×moment kolu

Buna göre:

$$\sigma_{12} \cdot a^2 \cdot \frac{a}{2} - \sigma_{21} \cdot a^2 \cdot \frac{a}{2} = 0 \quad (a \text{ küpün bir kenarının uzunluğudur.})$$

olur. Bu denklemden

$$\sigma_{12} - \sigma_{21} = 0$$

$$\sigma_{12} = \sigma_{21}$$

elde edilir.

Benzer şekilde x_1 ve x_2 eksenlerine göre momentlerin toplamaları sıfır yapılarak,

$\sigma_{23} = \sigma_{32}$ ve $\sigma_{13} = \sigma_{31}$ bulunur. Bu nedenle daha önce tanımlanan 9 gerilme

bileşeninden altısı birbirinden bağımsızdır. Böylece gerilme

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{13} & \sigma_{23} & \sigma_{33} \end{bmatrix} \quad (1.3)$$

şeklinde yazılabilir.

1.1.6 Deformasyon (Strain)

Elastik bir cisim gerilme altında bulunduğu anda, hacim ve şekil değişikliğine uğrar. Bu değişime *deformasyon*, burulma ya da yamulma denir. Deformasyon tensörü

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33} \end{bmatrix} \quad (1.4)$$

şeklinde dir. Birim küpteki x_1, x_2, x_3 yönlerindeki yer değiştirmeler, sırasıyla, ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3 ile ifade edilirse deformasyonların yer değiştirmeler cinsinden ifadesi aşağıdaki gibidir (Dominguez 1993, Sokolnikoff 1956).

$$\varepsilon_{i,j} = \frac{1}{2}(\phi_{i,j} + \phi_{j,i}) \quad (1.5)$$

Böylece, diyagonal ve diyagonal olmayan terimler sırasıyla;

$$\varepsilon_{11} = \phi_{1,1}, \quad \varepsilon_{22} = \phi_{2,2}, \quad \varepsilon_{33} = \phi_{3,3}$$

$$\varepsilon_{12} = \varepsilon_{21} = \frac{1}{2}(\phi_{1,2} + \phi_{2,1}),$$

$$\varepsilon_{13} = \varepsilon_{31} = \frac{1}{2}(\phi_{1,3} + \phi_{3,1}),$$

$$\varepsilon_{23} = \varepsilon_{32} = \frac{1}{2}(\phi_{2,3} + \phi_{3,2}).$$

1.1.7 Hooke kanunu

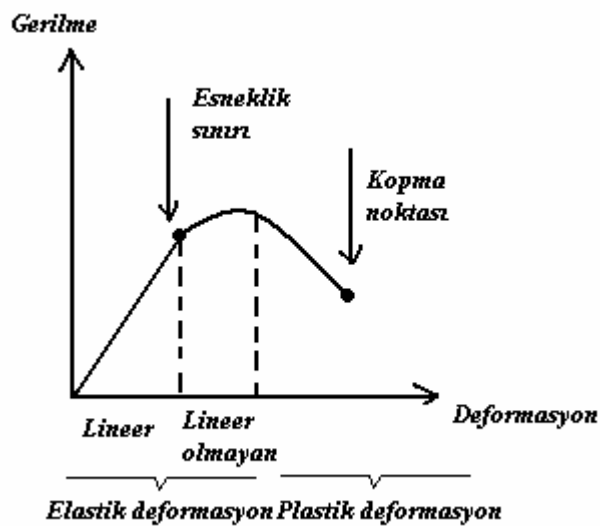
Gerilme ile deformasyon arasındaki ilişkiler, Hooke kanunu ile açıklanır. Buna göre yeteri kadar küçük deformasyonlar için gerilme ile deformasyon doğru orantılıdır ve orantı sabiti deformasyona uğrayan maddenin cinsine ve yapısına bağlıdır. Bu orantı sabitine esneklik sabiti de denir.

$$\text{Esneklik sabiti} = \frac{\text{Gerilme}}{\text{Deformasyon}}$$

$$\sigma_{ij} = E \varepsilon_{ij} \quad i, j = 1, 2, 3 \quad (1.6)$$

Burada σ_{ij} , ε_{ij} , E sırasıyla gerilme, deformasyon ve orantı sabitini gösterir.

Bu noktada Hooke kanunlarının neden küçük deformasyonlar için geçerli olduğu sorusu akla gelebilir. Yeteri kadar büyük bir gerilme uygulayarak bir cismin esneklik sınırını aşmak mümkündür. Gerilme, esneklik sınırını aştığında, cisim giderek aşırı derecede bozular. Artık gerilme ortadan kalktıktan sonra bile cisim başlangıçtaki şekline geri dönemez. Esneklik sınırının ötesinde, gerilme deformasyon arasındaki ilişki lineer çizgiden uzaklaşır. Gerilme daha çok arttırılırsa cisim eninde sonunda kopar. Gerilme ile deformasyon arasındaki ilişki Şekil 1.6'da olduğu gibidir.



Şekil 1.6 Gerilme ve deformasyon arasındaki ilişki

İzotrop olmayan ortamda gerilme ve deformasyon arasındaki lineer bağıntı 21 parametreye, izotrop ortamda 5 parametreye ve homojen, izotrop ortamda sadece 2 parametreye bağlıdır (Lavergne 1989). Böylece herhangi iki sabit bir homojen izotrop materyalin tanımlanmasında kullanılabilir. Homojen izotrop ortam için Hooke kanunu;

$$\sigma_{ij} = \lambda_L \delta_{ij} \varepsilon_{kk} + 2\mu \varepsilon_{ij}, \quad (i, j = 1, 2, 3, k = 1, 2, 3) \quad (1.7)$$

şeklinde yazılır.

Burada δ_{ij} Kronecker delta, ε_{kk} ise birim küpteki hacim değişikliği olup;

$$\varepsilon_{kk} = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33} = \phi_{1,1} + \phi_{2,2} + \phi_{3,3}$$

bağıntısı ile tanımlanır.

λ_L ve μ , Lamé sabitleri olarak bilinir. Bu sabitler, şu ifadeyle bilinen elastik sabitlerle ilişkilendirilebilir.

$$\mu = \frac{E}{2(1+\nu)}, \quad \lambda_L = \nu \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)}, \quad K = \lambda_L + \frac{2}{3}\mu \quad (1.8)$$

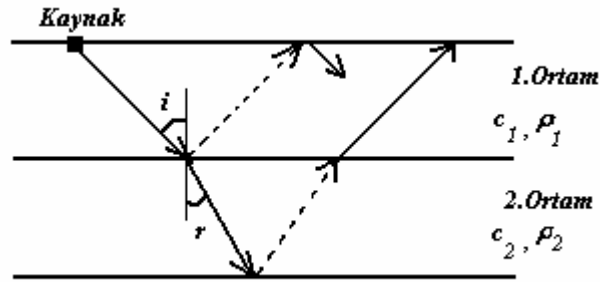
Buradaki E , çekme veya basma için gerilme, deformasyon oranı olan Young modülüdür. ν , enine kısalma ile boyuna uzamanın oranı olan Poisson oranıdır. K , hidrostatik basınç altında gerilme, deformasyon oranını ifade eden Bulk modülüdür (Sarı 2000).

1.1.8 Tabakalı Ortamlarda Dalga yayılımı

Teorik ve uygulamalı jeofizik araştırmalar ile sismik dalgaların yer içindeki hareketleri incelenerek karmaşık yeraltı yapısının tespiti amaçlanır. Yerküre tabakalı bir yapı olduğundan bu noktada tabakalı ortamlarda dalga yayılımının irdelenmesi gerekir.

Akustik empedansları farklı olan iki veya daha fazla ortamlar için ortamları ayıran her bir ara yüzde gelen sismik dalganın bir kısmı geri dönerken, bir kısmı da diğer ortama iletilir. Geri dönen dalgaya *yansıyan dalga*, diğer ortama iletilen dalgaya da *kırılan dalga* denir. Dalganın sınıra dik gelmesi halinde bir kısmı yansırken bir kısmı da diğer ortama iletilir. Bu durumda yeni dalga türleri oluşmaz. Eğer dalga sınıra eğik geliyorsa yansıma ve kırılmanın yanı sıra faz farkı da oluşur. Yansıma ve kırılma açıları dalganın geliş açısına ve sınırın iki tarafındaki ortamların akustik empedanslarına (yoğunluk ve hız) bağlıdır. Ara yüzde yansıyan ve kırılan dalganın enerjisi, gelen dalganın enerjisinden daha azdır.

Şekil 1.7'de dalga hızları c_1 ve c_2 ve yoğunlukları sırasıyla ρ_1 ve ρ_2 olan ortamlar için kırılan ve yansıyan dalgalar gösterilmiştir. Burada kesikli çizgi halinde verilenler ortam sınırından yansıyan dalgayı, düz çizgi halinde verilenler ise ortam sınırından kırılarak diğer ortama iletilen dalgayı gösterir (Kara 1992).



Şekil 1.7 Kırılan ve yansıyan dalga yolları

Gelen dalga enerjisinin ara yüzeylerde farklı fazlara bölünmesi, ortamın homojenlik derecesi ve akustik empedanslarındaki farklılardan ileri gelmektedir. Gerçek yerkürede, yansıyan sismik enerjideki ara yüz etkisi, yansıma katsayısı R ile verilmektedir. R , ara yüzeyin her iki tarafındaki ortamın akustik empedansının bir fonksiyonudur.

Ara yüz yansıyan ve kırılan dalgaların açıları, dalganın geliş açısına ve ortamların dalga hızına bağlıdır. Bu açıları ile hızlar arasında ilişki Snell yasasıyla verilmektedir.

$$\frac{\sin i}{c_1} = \frac{\sin r}{c_2}$$

Burada i dalganın geliş açısı, r dalganın kırılma açısıdır. c_1 ve c_2 sırasıyla, 1. ve 2. ortamın hızlarıdır.

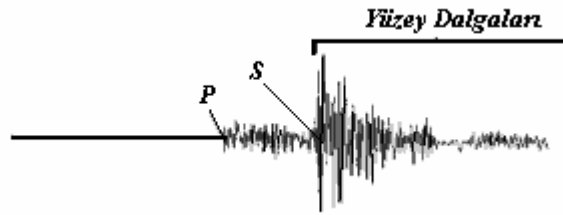
1.2 Sismoloji ve Sismogram

Sismoloji; depremin nasıl oluştuğunu, deprem dalgalarının yeryuvarı içinde ne şekilde yayıldıklarını, ölçü aletleri ve ölçme yöntemlerini, kayıtların değerlendirilmesini ve deprem ile ilgili diğer konuları inceleyen bilim dalıdır.

Yapay sarsıntı ölçümü ilk kez Mallet (1845) tarafından yapılmış olup, sismik dalgaların yansıma ve kırılmalarını ise Knott (1899) yılında Knott açıklamıştır. Daha sonra sismik dalga teorisi Wieher (1907) tarafından ortaya atılmış ve 1. Dünya Savaşı'nda Almanlar topraklarındaki askeri birliklerin yerlerini saptamak için sismik dalga yayılımından yararlanmışlardır. Sismik yansıma üzerine ilk kez Fessender (1913) çalışmış ve Korcher (1920) basit bir kayıt aleti yapmayı başarmıştır. Mintrop (1924) tuzun yüksek hızlı olmasından yararlanarak, bir tuz kütesinin yerini sismik yöntemle saptamıştır. Daha önce kayıt aletlerinde çizgisel olarak kaydedilen sismik dalgalar

1953'ten itibaren manyetik teyplerin kullanılmaya başlamasıyla dijital olarak kaydedilebilmiştir. Bu konuda ayrıntılı değerlendirme için Us (1993)'e başvurulabilir.

Deprem dalgalarının kayıt edilmesinde kullanılan cihazlara sismograf adı verilir. Sismograf, prensip olarak bir tür sarkaçtır. Günümüz teknolojisine bağlı olarak sismograflar da dijital kayıt yapabilecek şekilde üretilebilmektedir. Sismografların kaydettiği, zamana karşı sismik dalgaların değişimini gösteren kayıtlara da sismogram adı verilir (Şekil 1.8).



Şekil 1.8 Bir sismogram

Deprem sırasında açığa çıkan enerji, ses veya su dalgalarına benzeyen ve sismik dalga adı verilen dalgalar ile yayılır. Bu dalgalardan cisim dalgaları, P dalgaları (Primary) ve S dalgaları (Secondary) olarak ikiye ayrılır. Özel amaçlar dışında sismik prospeksiyonda sadece P dalgaları kaydedilmekte ve bu kayıtlarda elde edilebilecek S dalgaları gürültü olarak tanımlanmaktadır (Doyle 1995).

Sismik metot doğal ya da yapay olarak yaratılan titreşimlerin (deprem dalgası) kayalar içerisinden geçerken uğradıkları değişimlerin incelenmesi esasına dayanır.

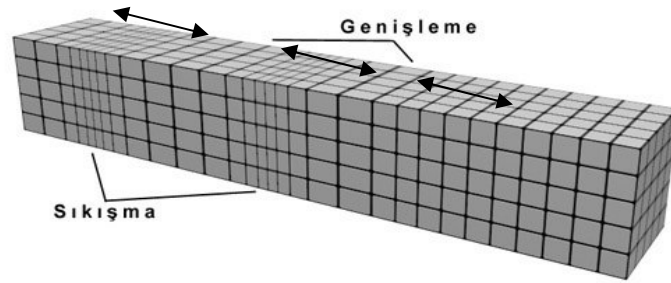
Deprem dalgaları esas itibariyle ikiye ayrılır:

- 1- Cisim Dalgaları
 - a) P dalgaları
 - b) S dalgaları
- 2-Yüzey Dalgaları
 - a) Rayleigh dalgaları
 - b) Love dalgaları

Skaler dalga yalnızca boyuna titreşim yapmakta ve bundan dolayı da sadece P dalgalarından oluşmaktadır. Özel amaçlar dışında sismik incelemelerde sadece P dalgaları kaydedilmekte ve bu kayıtlarda elde edilebilecek S dalgaları gürültü olarak tanımlanmaktadır. Bu yüzden sismik inceleme amaçlı yapılan çalışmalar, çoğunlukla skaler dalga denklemi kullanılarak yapılmaktadır. Bu nedenden dolayı bu çalışmada, yalnızca P dalgaları dikkate alınmıştır.

1.2.1 Boyuna dalgalar (P-Dalgaları) (Longitudinal Waves)

P dalgaları, en hızlı yayılan bu yüzden de deprem kayıt aletlerine ilk gelen dalgalardır. Bu dalgalar, basınç dalgaları veya ilk dalgalar olarak bilinirler. Hızı kabuğun yapısına göre 1.5 ile 8 km/sn arasında değişir. P dalgaları, yayıldıkları ortamdaki parçacıkları boyuna titreştirirler yani sıkışma ve gevşeme olayını gerçekleştirirler. Dalga yayılımı esnasında hacim değişimi ve şekil değişimi olur. Ancak şekil değişimi esnasında açılar değişmez. Boyuna dalgalarda sıkışma ve genişlemeyi temsil eden titreşim doğrultusu, dalga yayılım doğrultusuyla aynı doğrultudadır (Lay and Wallace 1995).



Şekil 1.9 P dalgası

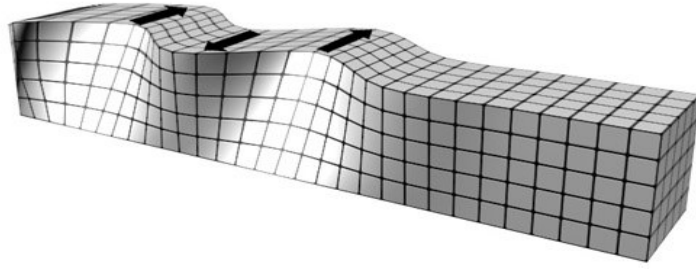
λ ve μ Lamé parametresi, ρ yoğunluk olmak üzere, P dalga hızı,

$$V_P = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}}$$

şeklinde tanımlanır.

1.2.2 Enine dalgalar (S Dalgaları) (Shear Waves)

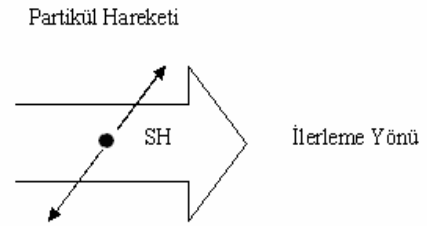
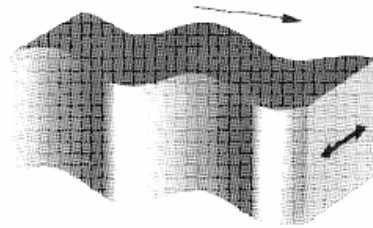
Kayıt istasyonuna P dalgalarından sonra gelirler. Yani hızları daha düşüktür. Hızı, P dalgası hızının %60'ı ile %70'i arasında değişir. Bu tip dalgalar yayıldıkları ortamdaki parçacıkları enine titreştirirler. Yani partikül hareketi ilerleme yönüne diktir. Yayılım sırasında parçacıklarda şekil bozuklukları yani açılarda değişim gözlenir. Şekil 1.8'de S dalgasının yayılım şekli görülmektedir.



Şekil 1.10 S Dalgası

S dalgası yatay ve düşey bileşene sahiptir. S dalgalarının yayınımda enine olan parçacık salınımı yatay düzlem üzerinde ise SH dalgası, düşey düzlem üzerinde ise SV dalgası adını alır. SV dalgası düşey bileşen kayıtlılarda, SH dalgası yatay bileşen kayıtlılarda kaydedilirler (Lay and Wallace 1995).

Şekil 1.11 SV bileşeni



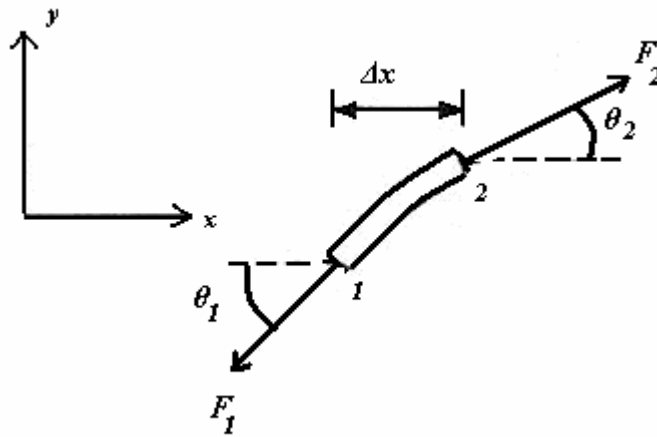
Şekil 1.12 SH bileşeni

S dalgasının hızı $V_s = \sqrt{\frac{\lambda}{\rho}}$ ile verilir.

1.3 Dalga Denklemlerinin Çıkarılması

1.3.1 Bir Boyutlu Skaler Dalga Denklemi

Newton'un ikinci yasası, lineer esnek geri getirici kuvveti olan bir ortamda dalgaların var olabileceğini öngörür. Δx uzunluğunda küçük bir sicim alınsın. Denge durumunda, sicim x eksenini boyunca gergin durumda durmaktadır.



Şekil 1.13 Bir sicim üzerindeki dalga hareketi

Bu sicimin 1 ve 2 uçlarına F_1 ve F_2 kuvvetleri uygulandığında oluşan dalgadan dolayı denge durumu bozulur. Dalganın etkisinin küçük, bu sebeple de sicimdeki F geriliminin düzgün yayıldığı varsayılabilir. Yani, $|F_1| = |F_2| = F$. Ayrıca, bu gerilim, sicim elemanının ağırlığının yok sayılmasına yetecek kadar büyük olduğu da kabul edilsin. Bu yaklaşımlarla eleman üzerindeki net kuvvetin y bileşeni,

$$\sum F_y = F_{y1} + F_{y2} = -F \sin \theta_1 + F \sin \theta_2 = F(\sin \theta_2 - \sin \theta_1)$$

olur. Sicim düz olsaydı $\theta_1 = \theta_2$ olacağına ve dolayısıyla eleman üzerindeki net kuvvetin sıfır olacağı açıktır. Eğrilmiş olan sicimde $\theta_1 \neq \theta_2$ olduğundan, eleman üzerinde sıfır olmayan net bir kuvvet vardır.

Şimdi θ_1 ve θ_2 açılarının, $\sin \theta \approx \tan \theta$ yazılabilecek kadar küçük olduğu varsayılabilir. Sicimin bir noktadaki eğimi, o noktadaki sicim ile x eksenini arasındaki açının tanjantına eşit olduğundan, bu yaklaşım kullanışlıdır.

$\tan \theta = \partial u / \partial x$ olduğundan, net kuvvet

$$\Sigma F_y = F \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_2 - \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_1 \right]$$

şeklinde yazılabilir.

$\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_2 - \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_1 \right]$ niceliği, eğimin 1 ve 2 uçları arasındaki değişikliğine eşittir.

Eğer sicim elemanı küçükse,

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_2 - \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_1 = \Delta \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\Delta \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)}{\Delta x} \Delta x \approx \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) \Delta x = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \Delta x$$

olur. Bu, elemanın boyu sıfıra yaklaştığında tam eşitlik haline gelir. Böylece, bu küçük eleman üzerindeki net kuvvetin y bileşeni şöyle olur,

$$\Sigma F_y = F \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \Delta x \quad (1.9)$$

Düzgün bir sicim için sicimin birim uzunluğu başına düşen kütle, ya da lineer kütle yoğunluğu, $\rho = \frac{m}{\Delta x}$ dir. m ve Δx , sırasıyla sicimin kütlesi ve uzunluğudur. ρ 'yu

kullanarak elemanın m kütlesi, Δx cinsinden $m = \rho \Delta x$ yazılabilir.

Elemana Newton'un ikinci yasasının y bileşeni, yani $\Sigma F_y = ma_y$ uygulanarak

$$\Sigma F_y = \rho \Delta x \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (1.10)$$

elde edilir.

Burada $a_y = \partial^2 u / \partial t^2$ olduğu kullanılmıştır. (1.9) ve (1.10) denklemlerini eşitlenirse

$$F \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \Delta x = \rho \Delta x \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

ya da

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\rho}{F} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

sonucu bulunur.

$$\rho / F = 1/c^2 \text{ alınırsa}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (1.11)$$

olur.

Bu denklem bir boyutlu skaler dalga denklemdir.

1.3.2 İki ve Üç Boyutlu Skaler Dalga Denklemi

Homojen, izotrop bir ortamda yayılan dalgayı tanımlayan denklem Newton'un ikinci hareket kanunundan faydalanılarak bulunur. Bu kurama göre verilen bir yönde yoğunlukla ivmenin çarpımı bu yönde birim hacmi etkileyen kuvvete eşittir.

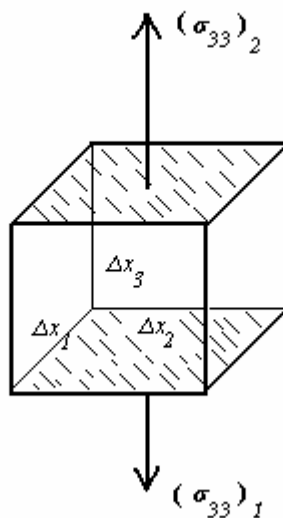
Böyle bir ortamda dalga denklemini elde etmek için yoğunluğu ρ olan boyutları $\Delta x_1, \Delta x_2, \Delta x_3$ olan bir kutuyu göz önüne alalım. Gerilme tesiri (σ), birim alana uygulanan kuvvet olarak ölçülür. ($Pa = N/m^2$)

Burada kutunun her bir yüzeyine düşen gerilmeler Şekil 1.4'te gösterildiği gibidir.

Kutunun herhangi bir yüzeyi için normal alınırsa, yüzeye dik olan eksenin pozitif yönü normalin yönü ile aynı olmak koşuluyla, kuvvet x_i 'nin artan yönlerinde hareket ediyorsa gerilme bileşenleri pozitif kabul edilir. $\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{33}$ normal gerilmeler, $\sigma_{ij}, i \neq j, i, j = 1, 2, 3$ kesme ya da kayma gerilmeleri olarak tanımlanır. Birinci indis kutunun yüzeyini, ikinci indis gerilme yönünü gösterir.

Skaler dalga denklemini türetmek için yalnızca boyuna normal gerilmeler göz önüne alınır. Önce x_3 yönündeki normal gerilmeleri dikkate alalım. Bu yöndeki şekil değiştirme –yer değiştirme ifadesi

$$\varepsilon_{33} = \phi_{3,3} \quad \text{idi.} \quad (1.12)$$



Şekil 1.14 x_3 yönünde boyuna normal gerilmeler

x_3 yönündeki net kuvvet hesaba katılarak, Newton'un ikinci hareket yasası şu şekilde uygulanabilir;

$$[(\sigma_{33})_2 - (\sigma_{33})_1] \Delta x_2 \Delta x_1 + \Delta m b_3 = \Delta m a_3 \quad (1.13)$$

Burada Δm , Şekil 1.14'deki kutunun kütlesi, b_3 , x_3 yönündeki cisim kuvveti (gravitasyon kuvveti) ve a_3 , x_3 yönündeki ivmedir. (1.13) eşitliği $\Delta x_1 \Delta x_2 \Delta x_3$ ile bölünüp $\Delta x_3 \rightarrow 0$ için limit alındığında hareketin gerilme eşitliği şu şekilde gelir:

$$\sigma_{33,3} + \rho b_3 = \rho a_3 \quad (1.14)$$

Burada ρ , kütleli yoğunluk ve $\Delta m = \rho \Delta x_1 \Delta x_2 \Delta x_3$ 'ü göstermektedir.

Bu özel durum Hooke yasasına uygulandığında gerilme tesirinin normal bileşenleri;

$$\sigma_{11} = 0 \Rightarrow \lambda(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}) + 2\mu\varepsilon_{11} = 0 \quad (1.15)$$

$$\sigma_{22} = 0 \Rightarrow \lambda(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}) + 2\mu\varepsilon_{22} = 0 \quad (1.16)$$

$$\sigma_{33} = (\lambda + 2\mu)\varepsilon_{33} + \lambda(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22}) \quad (1.17)$$

(1.15) ve (1.16) eşitliklerinden

$$\varepsilon_{11} = \varepsilon_{22} = -\frac{\lambda}{2(\lambda + 2\mu)}\varepsilon_{33} \quad (1.18)$$

(1.12), (1.17) ve (1.18) eşitliklerinden σ_{33} şu şekilde elde edilir;

$$\sigma_{33} = E\phi_{3,3} \quad (1.19)$$

(1.19) eşitliği (1.14)'de yerine konursa ve $a_3 = \ddot{\phi}_3$ olduğu ivmenin küçük değerlerinde şu eşitliği elde etmek kolaydır;

$$c^2 \phi_{3,33} + b_3 = \ddot{\phi}_3 \quad (1.20)$$

Burada $c^2 = E/\rho$ 'dir.

Aynı işlemler x_1 ve x_2 yönleri için de yapılabilir. Böylece

x_2 yönü için;

$$\sigma_{11} = 0 \Rightarrow \lambda(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}) + 2\mu\varepsilon_{11} = 0 \quad (1.21)$$

$$\sigma_{22} = (\lambda + 2\mu)\varepsilon_{22} + \lambda(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{33}) \quad (1.22)$$

$$\sigma_{33} = 0 \Rightarrow \lambda(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}) + \mu\varepsilon_{33} = 0 \quad (1.23)$$

x_1 yönü için;

$$\sigma_{11} = (\lambda + 2\mu)\varepsilon_{11} + \lambda(\varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}) \quad (1.24)$$

$$\sigma_{22} = 0 \Rightarrow \lambda(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}) + 2\mu\varepsilon_{22} = 0 \quad (1.25)$$

$$\sigma_{33} = 0 \Rightarrow \lambda(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}) + 2\mu \varepsilon_{33} = 0 \quad (1.26)$$

Sadece normal gerilmeler göz önüne alındığında, hareket eşitliği;

$$c^2 \phi_{i,ii} + b_i = \ddot{\phi}_i \quad (1.27)$$

şeklinde elde edilir. Bu eşitlik üç boyutlu vektörel dalga denklemdir.

Bu eşitlik Helmholtz açılımı kullanılarak alternatif ve daha kompakt bir halde ifade edilebilir (Sarı 2000). Bu açılımda, bir elemanın yer değiştirmesi u , Lamé potansiyelleri olarak bilinen bir vektör potansiyel bükümü $\Psi(x,t)$ ve bir skaler potansiyel gradyanının $\phi(x,t)$ toplamı olarak sunulabilir.

$$\phi_i = u_{,i} + e_{ijk} \Psi_{k,j} \quad (1.28)$$

Aynı şekilde düşünülerek, cisim kuvveti vektörü \mathbf{b} , bir skaler ve bir vektör değerli fonksiyon için f - F yazılabilir ve benzer yolla:

$$b_i = f_i + e_{ijk} F_{k,j} \quad (1.29)$$

(1.28) ve (1.29) eşitliklerinin sonuçlarının diverjansı ;

$$\nabla \cdot \phi = \phi_{i,j} = u_{,ii}, \quad \nabla \cdot \mathbf{b} = b_{i,i} = f_{,ii} \quad (1.30)$$

(1.21) ve (1.22) eşitliklerinin ikinci bölümlerinin diverjanssız oldukları görülebilir.

Böylece (1.27) eşitliğinin diverjansını kullanarak şu gösterilebilir (Sarı 2000) ;

$$c^2 u_{,ii} + f = \ddot{u} + g \quad (1.31)$$

Burada g harmonik bir fonksiyondur ve genelde $g = 0$ alınır. ϕ , x, t ve f sırasıyla potansiyel, durum vektörü, zaman ve cisim kuvvetidir.

(1.31) denkleminde $i = 2$ için 2 boyutlu dalga denklemi,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (1.32)$$

(1.31) denkleminde $i = 3$ için 3 boyutlu dalga denklemi aşağıdaki gibi elde edilir.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_3^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (1.33)$$

1.4 Sonuçlar

Bu bölümde dalga yayılımı ile ilgili temel kavramlar kısaca açıklanarak lineer, homojen izotrop bir ortamda skaler dalga denklemleri çıkarılmıştır. Bu denklemler SFM ile yapılacak sayısal çözümlere temel oluşturmaktadır.

2. DALGA DENKLEMLERİNİN SAYISAL ÇÖZÜMÜ

2.1 Sonlu Farklar Metodu

Sonlu farklar uygulamalarının temeli Daniel ve Jacop Bernoulli, Leonard Euler, Jacobo Stirling gibi ünlü bilim adamları ile iki yüz yıldan daha gerilere gider. Türev ve integral alma, iç ve dış değer bulma, sayısal veriye polinom uydurma gibi uygulama alanlarında sıkça karşılaşılan problemler sonlu farklar yaklaşımı ile çözümlenebilirler (Canitez 1997). Ayrıca kısmi türevli diferansiyel denklemlerin çözümünde kolaylıkla kullanılabilirdiği için dalga denklemleri bu yaklaşımla hesaplanabilmektedir. Son yıllarda gelişen bilgisayar teknolojisi ve buna bağlı olarak ortaya çıkan hızlı ve yüksek kapasiteli bilgisayarlar, sayısal hesaplamaları daha cazip bir hale sokarken, özellikle sonlu farklar yaklaşımları ile ilgili çalışmaların artışına da sebep olmuştur.

Sonlu fark yöntemleri iki grup altında toplanabilir. Açık (*explicit*) yaklaşım (Kelly vd 1976, McMechan 1982) ve dolaylı (*implicit*) yaklaşım (Emerman vd 1982, Mufti 1982) yöntemleridir. Sayısal olarak dalga denklemi uygulamaları göz önüne alındığında, açık yaklaşımda; bir ileriki zamanda bir uzaysal noktadaki değeri hesaplamak için, bir önceki zamana ait birkaç noktadaki değerler kullanılır ve işlem ardışık olarak her nokta için de ayrı ayrı hesaplanır. Oysa dolaylı yaklaşımda; bir önceki zamana ait bilinen tüm uzaysal noktadaki değerlerden, bir sonraki zamana ait bütün noktalar aynı anda matris tersleme yöntemi ile bulunur (Emerman vd 1982, Mufti 1982). Çözümlemede yaklaşık 500–1000 kadar zaman adımı ile çalışılmaktadır. Bu ise, bir bu kadar matrisin çözümünü gerektirmektedir. Bu işlem fazla zaman ve bellek kapsadığından bu çalışmada daha kolay uygulanabilen açık yaklaşım yöntemi tercih edilmiştir.

Sonlu fark yöntemi ile yapay sismogram elde edilirken *Homojen formülasyon* ve *heterojen formülasyon* olmak üzere iki ayrı hesaplama türü vardır (Emerman vd 1982, Mufti 1982). Homojen formülasyonda elastik parametreler her tabaka içinde sabit kabul edilir. Bu durumda, farklı elastik özelliklere sahip tabakalar arasındaki sınır şartları ele alınmalıdır. Heterojen formülasyonda, sonlu fark grid ağının her bir grid noktasında bu elastik özellikler belirtilmelidir ve sınır şartları dolaylı olarak yerine getirilmelidir.

Böyle bir formülasyon karmaşık yeraltı geometrilerinin modellenmesinde oldukça yararlı olmasına karşılık parametre sayısı arttığından çok işlem gerektirmektedir. Bu nedenle, bu çalışmada uygulanması daha kolay olan ve daha az parametre içeren homojen formülasyon kullanılmıştır. Sonlu farklar yaklaşımı:

- İleri yön sonlu farklar,
- Geri yön sonlu farklar,
- Merkezi farklar

olarak üç şekilde uygulanmaktadır.

2.1.1 Sonlu Farklar Metodunda Kullanılan Yaklaşımların Çıkarılması

Bir $f(x)$ fonksiyonunun $[a,b]$ tanım aralığında bir x noktasındaki türevi,

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \quad (2.1)$$

limit ifadesiyle tanımlanır. Eğer $f(x)$ 'in analitik ifadesi biliniyorsa, f' türevi için de analitik bir ifade çoğu zaman bulunabilir. Ama bazen bu analitik türev alma işlemi çok karmaşık olabilir. Bazen de fonksiyon, deneysel ölçümlerde olduğu gibi, sadece belli noktalarda verilmiş olabilir. Bu durumlarda, sayısal türev alma yoluna gidilir.

Sayısal türev problemi şöyle ortaya konur: $f(x)$ fonksiyonu, eşit h aralıklarıyla sıralanmış x_i noktalarında verilmiş olsun:

$$x_i = x_0 + ih \quad \text{ve} \quad f_i = f(x_i) \quad (i = \pm 1, \pm 2, \dots) \quad (2.2)$$

Buradaki küçük h değerine, adım uzunluğu denir. Her x_i noktasındaki $f'(x_i)$ türevi için sayısal hesaplamaya uygun yaklaşık bir ifade bulmak amaçlanır. Bunun için, fonksiyonun x_i civarında Taylor açılımından yararlanılır (Karaoğlu 1994).

$$f(x_i + h) = f(x_i) + hf'(x_i) + \frac{h^2}{2!} f''(x_i) + \frac{h^3}{3!} f'''(x_i) + \dots$$

Bu ifade, aranan $f'(x_i)$ için çözümlerse,

$$f'(x_i) = \frac{f(x_i + h) - f(x_i)}{h} - h \left[\frac{f''(x_i)}{2!} + h \frac{f'''(x_i)}{3!} + \dots \right]$$

Sağ taraftaki köşeli parantez içindeki terimler h değeriyle orantılı bir katkı verirler. O halde, h mertebesinde bir hatayla, sayısal türev ifadesi şöyle olur:

$$f'(x_i) = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{h} + O(h) \quad (\text{İleri yön sonlu fark 1. türev}) \quad (2.3)$$

Benzer şekilde geri yön ifadesi de kolayca hesaplanabilir. Bunun için, $f(x_i - h)$ 'ın Taylor açılımından,

$$f(x_i - h) = f(x_i) - hf'(x_i) + \frac{h^2}{2!} f''(x_i) - \frac{h^3}{3!} f'''(x_i) + \dots$$

olur. Yine, 1.türev terimi alınır ve $O(h)$ mertebesinde katkıları bir araya toplanırsa,

$$f'(x_i) = \frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{h} + O(h) \quad (\text{Geri yön sonlu fark 1. türev}) \quad (2.4)$$

bulunur. Hem ileri yön sonlu fark hem de geri yön sonlu fark türevlerinde hata payı h ile orantılıdır. İleri ve geri Taylor açılımlarının farkı alınır,

$$f(x_i + h) - f(x_i - h) = 2hf'(x_i) + \frac{2h^3}{3!} f'''(x_i) + \dots$$

Görüldüğü gibi h^2 ile orantılı 2.türev terimleri birbirini götürmüştür. Buradan, aranan türev ifadesi,

$$f'(x_i) = \frac{f(x_i + h) - f(x_i - h)}{2h} - h^2 \left[\frac{f'''(x_i)}{6} + \dots \right]$$

şeklinde olur. O halde, h^2 mertebesinde bir hatayla, merkezi fark türev ifadesi,

$$f'(x_i) = \frac{f(x_i + h) - f(x_i - h)}{2h} + O(h^2) \quad (\text{Merkezi farklı 1. türev}) \quad (2.5)$$

Bu ifadede h adım uzunluğu küçüldükçe, $O(h^2)$ hata payı çok daha hızlı küçülür. Bu nedenle, merkezi fark türev ifadesi ileri yönlü türevden daha iyi sonuç verir

Şimdi de, ikinci türev için ifadeler bulalım. Yukarıda, iki Taylor açılımının farkı alınmıştı. Bu kez de, iki Taylor açılımı ifadelerinin toplamı alınsın.

$$f(x_i + h) + f(x_i - h) = 2f(x_i) + h^2 f''(x_i) + \frac{2h^4}{4!} f^{iv}(x_i) + \dots$$

Birinci türev yok olduğundan, ikinci türev ifadesini yalnız bırakılırsa,

$$f''(x_i) = \frac{f(x_i + h) - 2f(x_i) + f(x_i - h)}{h^2} + O(h^2) \quad (\text{Merkezi fark 2. türev}) \quad (2.6)$$

İkinci türev için, ileri ve geri yön ifadeler $(a \pm h)$ ve $(a \pm 2h)$ noktalarındaki Taylor açılımlarından elde edilir. Benzer şekilde işlem yapılırsa,

$$f''(x_i) = \frac{f(x_i) - 2f(x_i \pm h) + f(x_i \pm 2h)}{h^2} + O(h) \quad (\text{İleri-geri yön 2.türev}) \quad (2.7)$$

2.1.2 İleri Yön, Geri Yön ve Merkezi Fark Türevlerinin Karşılaştırılması

Analitik türevi bilinen basit bir fonksiyon için ileri, geri ve simetrik türev ifadeleri ele alınıp, sayısal hesaplamalar sırasında oluşan hatalar karşılaştırılsın (Karaoğlu 2004).

Örneğin Sinüs fonksiyonu seçilirse,

$$f(x) = \text{Sin}x$$

$$f'(x) = \text{Cos}x \text{ olur.}$$

Sinüs fonksiyonunun $x = 1, 2, 3$ noktalarındaki 1. türevini $h = 0,001$ adım uzunluğu olarak hesaplayan FORTRAN programının çıktısı şöyle olur.

| x | İleri Fark | Geri Fark | Merkezi Fark | Tam |
|------|---------------|---------------|---------------|---------------|
| 1.00 | 0.5398814803 | 0.5407229513 | 0.5403022158 | 0.5403023059 |
| 2.00 | -0.4166014159 | -0.4156921185 | -0.4161467672 | -0.4161468365 |
| 3.00 | -0.9900628916 | -0.9899217716 | -0.9899923316 | -0.9899924966 |

Burada her bir fark ifadesinin hangi haneden sonra hatalı olduğu, altı çizilerek gösterilmiştir. Görüldüğü gibi, ileri ve geri fark ile yapılan hesapta en fazla 3–5 hane doğru olurken, simetrik fark ifadesi 6–7 hane doğrulukla sonuç vermektedir.

Bu çalışmada hata payı avantajı nedeniyle, ikinci dereceden kısmi türevler yerine merkezi fark formülleri kullanılmıştır.

2.2 Bir Boyutlu Dalga Denkleminin SFM ile Çözümü

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < x < a, \quad t > 0 \quad (2.8)$$

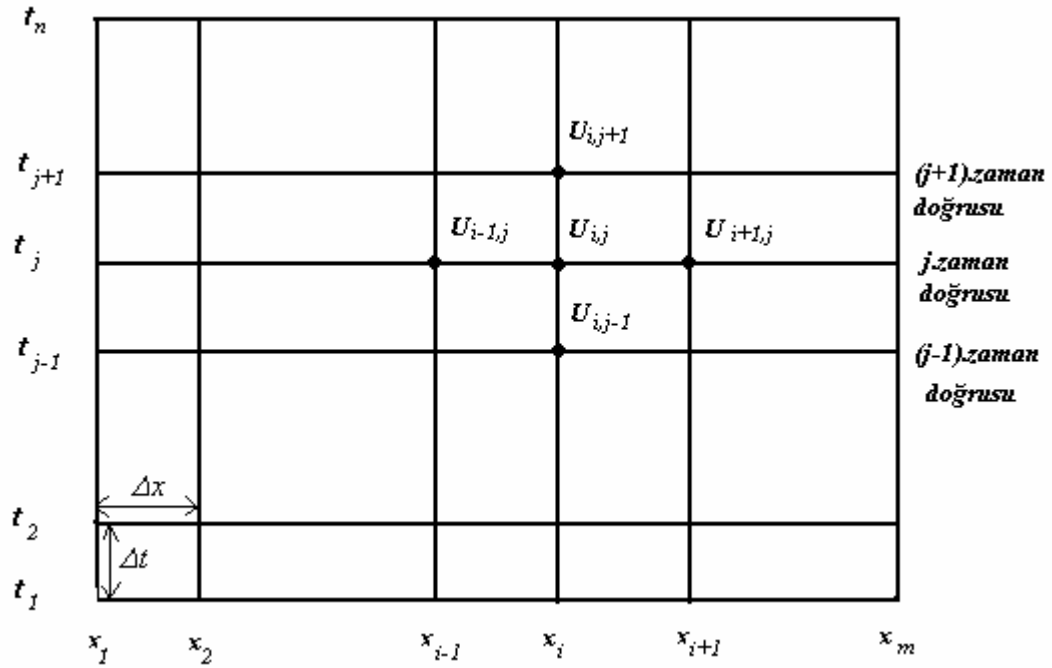
denklemini daha önceden elde edilmiş olan, bir boyutlu dalga denklemdir.

$$u(0, t) = 0, u(a, t) = 0, t > 0$$

$$u(x, 0) = f(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(t, 0) = g(x), \quad 0 \leq x \leq a$$

Eğer f ve g fonksiyonları $(0, a)$ ikinci mertebeden sürekli türevlere sahip ve $f(a) = f(0) = 0$ ise, verilen dalga denkleminin bir tek çözümü vardır.

(2.8) denklemindeki ikinci mertebeden kısmi türevlerin yerine, yaklaşık değerleri olan merkezi fark denklemlerini yazarak bir boyutlu dalga denklemini yerine kullanılacak olan sonlu fark denklemine ulaşılabilir.



Şekil 2.1 Sonlu fark yönteminde kullanılan grid ağı

Sonlu bir sicimin, Δx aralıklarla m tane parçaya ve zamanı Δt aralıklarla n parçaya bölüldüğü düşünülürse, sayısal hesaplamaların yapılacağı bir grid tanımlanmış olur (Smith 1985). Bu grid Şekil 2.1'de görülmektedir. Sonlu fark yaklaşımı (2.8) denkleminde uygulandığında,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \approx \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{(\Delta x)^2},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \approx \frac{u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}}{(\Delta t)^2}$$

yazılır. Böylece (2.8) denklemi yerine,

$$\frac{c^2 (\Delta t)^2}{(\Delta x)^2} (u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}) = u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1} \quad (2.9)$$

fark denklemi yazılır. Eğer $\lambda = \frac{c \Delta t}{\Delta x}$ olarak tanımlanırsa her $i = 1, 2, 3, \dots, m-1$

ve $j = 1, 2, 3, \dots, n-1$ için (2.9) denklemi

$$u_{i,j+1} = 2(1 - \lambda^2)u_{i,j} + \lambda^2(u_{i+1,j} + u_{i-1,j}) - u_{i,j-1} \quad (2.10)$$

şeklini alır. Bir boyutlu dalga denkleminin nümerik çözümü (2.10) açık sonlu fark denklemi yardımı ile bulunur.

2.3 İki Boyutlu Dalga Denkleminin SFM ile Çözümü

İki boyutlu skaler dalga denklemi

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \quad (2.11)$$

şeklinindedir. Burada t zaman x ve z yatay ve düşey yöndeki mesafe, u yer değiştirme ve c ise dalganın ortamdaki hızıdır.

İkinci mertebe kısmi türevlerin sonlu farklar ile gösterilmesi aşağıdaki gibidir.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \approx \frac{u_{i+1,j,k} - 2u_{i,j,k} + u_{i-1,j,k}}{(\Delta x)^2} \quad (2.12)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \approx \frac{u_{i,j+1,k} - 2u_{i,j,k} + u_{i,j-1,k}}{(\Delta z)^2} \quad (2.13)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \approx \frac{u_{i,j,k+1} - 2u_{i,j,k} + u_{i,j,k-1}}{(\Delta t)^2} \quad (2.14)$$

Burada Δt zaman örnekleme aralığını, Δx , Δz sırası ile x ve z yönündeki örnekleme aralıklarıdır. Yapılacak işlemlerin daha kolay ve hızlı olması için $\Delta x = \Delta z$ olarak alınmalıdır. Ayrıca i , j , k sırası ile x (açılım yönü), z (derinlik) ve t (zaman) parametrelerine karşılık gelen indislerdir.

İki boyutlu skaler dalga denklemindeki kısmi türevler yerine (2.12), (2.13), (2.14)'deki sonlu fark denklemleri yazılırsa,

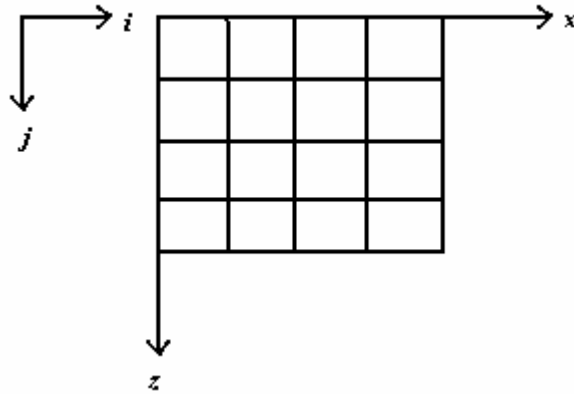
$$\frac{1}{c^2} \frac{u_{i,j,k+1} - 2u_{i,j,k} + u_{i,j,k-1}}{(\Delta t)^2} = \frac{u_{i+1,j,k} - 2u_{i,j,k} + u_{i-1,j,k}}{(\Delta x)^2} + \frac{u_{i,j+1,k} - 2u_{i,j,k} + u_{i,j-1,k}}{(\Delta z)^2} \quad (2.15)$$

elde edilir.

$\lambda = \frac{c \cdot \Delta t}{\Delta x}$ alınarak bu denklem yeniden düzenlenirse,

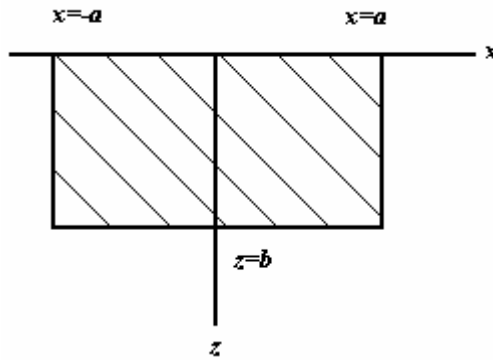
$$u_{i,j,k+1} = 2(1 - 2\lambda^2)u_{i,j,k} - u_{i,j,k-1} + \lambda^2(u_{i+1,j,k} + u_{i-1,j,k} + u_{i,j+1,k} + u_{i,j-1,k}) \quad (2.16)$$

İki boyutlu dalga denkleminin sonlu fark ifadesi elde edilmiş olur.



Şekil 2.2 İki boyutlu dalga denkleminin çözümünde kullanılan grid ağı

(2.11) denklemi aşağıda iki boyutlu ortam için fiziksel açıklaması verilen $-a \leq x \leq a$, $0 \leq z \leq b$ sınırları arasında çözülecektir.



Şekil 2.3 İki boyutlu dalga denkleminin çözümünde kullanılan sınırlar

Çözüme başlarken bazı başlangıç şartlarının bilinmesi gerekir. Bunlar,

$$u(x, z, 0) = 0$$

$$\frac{\partial u(x, z, 0)}{\partial t} = 0 \quad (2.17)$$

olarak alınmıştır. (2.17) ile verilen bu başlangıç şartları sonlu farklar cinsinden,

$$u_{i,j,0} = u_{i,j,1} = 0, \quad 1 \leq i \leq I+1, \quad 1 \leq j \leq J+1 \quad (2.18)$$

şeklinde ifade edilebilir.

2.4 Üç Boyutlu Dalga Denkleminin SFM ile Çözümü

Üç boyutlu skaler dalga denklemi

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \quad (2.19)$$

şeklindedir.

Bu denklemdeki türev eşitlikleri sonlu farklar cinsinden

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \approx \frac{u_{i+1,j,k,l} - 2u_{i,j,k,l} + u_{i-1,j,k,l}}{(\Delta x)^2} \quad (2.20)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \approx \frac{u_{i,j+1,k,l} - 2u_{i,j,k,l} + u_{i,j-1,k,l}}{(\Delta y)^2} \quad (2.21)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \approx \frac{u_{i,j,k+1,l} - 2u_{i,j,k,l} + u_{i,j,k-1,l}}{(\Delta z)^2} \quad (2.22)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \approx \frac{u_{i,j,k,l+1} - 2u_{i,j,k,l} + u_{i,j,k,l-1}}{(\Delta t)^2} \quad (2.23)$$

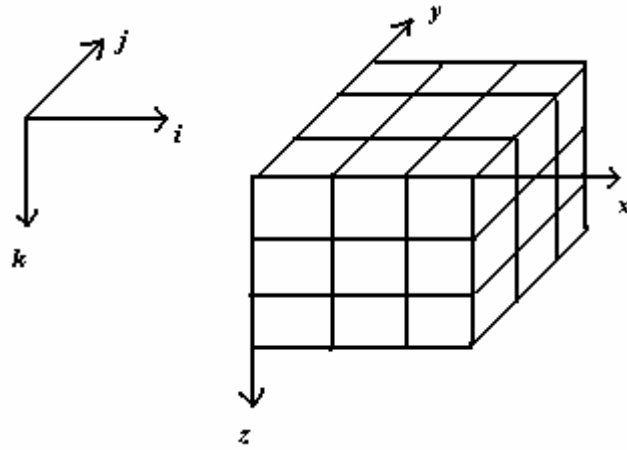
şeklinde yazılır.

Bu eşitlikler (2.19) denkleminde yerine konulup $\Delta x = \Delta y = \Delta z$ ve $\lambda = c\Delta t / \Delta x$ alınarak düzenlenir ise,

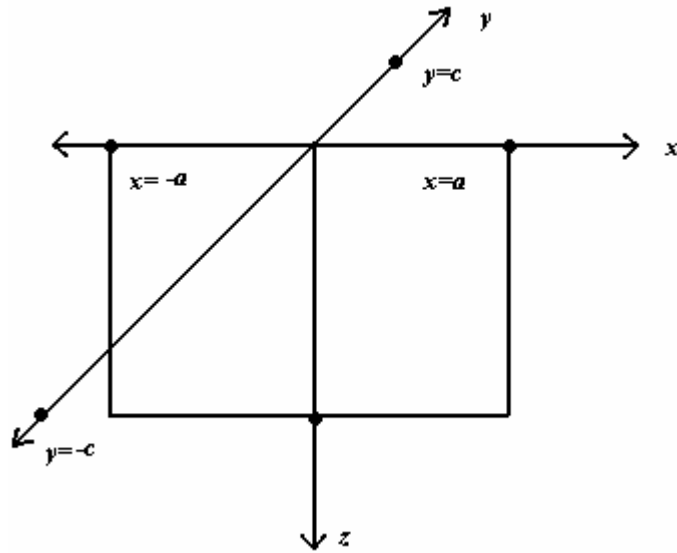
$$u_{i,j,k,l+1} = 2(1 - 3\lambda^2)u_{i,j,k,l} - u_{i,j,k,l-1} + \lambda^2(u_{i+1,j,k,l} + u_{i-1,j,k,l} + u_{i,j+1,k,l} + u_{i,j-1,k,l} + u_{i,j,k+1,l} + u_{i,j,k-1,l}) \quad (2.24)$$

denklemini elde edilir.

Burada i, j, k, l sırası ile x, y, z, t 'ye karşılık gelen indislerdir. Bu denklemin çözümünde kullanılan grid ağı Şekil 2.4'te ve çözüm sınırları Şekil 2.5'te verilmiştir. Bu sınırlar $-a \leq x \leq a, 0 \leq z \leq b, -c \leq y \leq c$ arasındadır.



Şekil 2.4 Üç boyutlu dalga denkleminin çözümünde kullanılan grid ağı



Şekil 2.5 Üç boyutlu dalga denkleminin çözümünde kullanılan sınırlar

2.5 Sonuçlar

SFM' de merkezi fark formülü hata payı avantajı nedeniyle diğerlerine göre daha iyi sonuç vermektedir. Bu yüzden bu çalışmada, dalga denklemlerinin SFM cinsinden ifadeleri elde edilirken, ikinci derece kısmi türevler yerine merkezi fark formülleri tercih edilmiştir. Bu bölümde verilen (2.10), (2.16) ve (2.24) denklemlerinin SFM ile çözümü, tasarlanan model için, yayılan dalganın zamana göre yer değiştirme grafiklerini elde etmede kullanılacaktır. Fakat bu denklemlerin sayısal çözümünün yapılabilmesi için sınır koşulları, kararlılık, grid dispersiyonu gibi hususların dikkate alınması gerekir. Bu konular dördüncü bölümde ayrıntılı olarak ele alınacaktır.

3. KAYNAK FONKSİYONLARI VE AYRIMLILIK

3.1 Kaynak Fonksiyonları

Dalga modellemesi çalışmalarında ortamın yapısının ve kaynak fonksiyonunun bilinmesi gerekmektedir. Elastik ortamlarda parçacık yer değiştirmesini sağlayan her tür enerji boşalımı, kaynak olarak düşünülebilir. Kaynak fonksiyonları enerji durumuna bağlı olarak minimum fazlı, sıfır fazlı ve maksimum fazlı olmak üzere üç grupta toplanır. Eğer enerji, dalgacığın baş tarafında toplanmış ise “*minimum fazlı*”, dalgacığın orta kısmında toplanmış ise ve dalgacık simetrik ise “*sıfır fazlı*” ve dalgacığın son tarafında toplanmış ise “*maksimum fazlı*” dalgacık olarak tanımlanır (Us 1993). Maksimum fazlı kaynak fonksiyonları uygulamada pek kullanılmazlar.

Kaynak olarak küçük boyutlarda dinamit kullanılması halinde nokta kaynak elde edilecek ve çok kısa zaman içerisinde büyük bir enerji açığa çıkacaktır. Bu enerji geniş bir frekans bandına sahiptir.

Sıfır fazlı kaynak fonksiyonları genellikle veri işlem aşamasında kullanılan kaynak fonksiyonlarıdır. Ortada kuvvetli bir peak ve her iki yanda daha düşük genlikli yan salınımları (side lobe) vardır. Uygulamada sıfır fazlı kaynak fonksiyonları daha çok tercih edilirler. Bunun nedeni, sıfır fazlı kaynak fonksiyonlarının minimum fazlı kaynak fonksiyonlarına göre aşağıda verilen bazı avantajlarının olmasıdır (Us 1993):

1. Aynı genlik spektrumuna sahip sıfır fazlı sinyal minimum fazlı sinyalden daha kısadır. Yani ayrımlılık gücü daha fazladır.
2. Sıfır fazlı kaynak fonksiyonları simetriktir. Minimum fazlı kaynak fonksiyonu simetrik değildir.
3. Sıfır fazlı kaynak fonksiyonu maksimum bir pik genliğine sahiptir. Minimum fazlı kaynak fonksiyonunda teorik olarak ilk tümsek (peak) ya da çukur (trough)’un en yüksek genliğe sahip olması gerekirse de pratikte ilk kırılmadan sonraki salınım en yüksek genliğe sahiptir.
4. Sıfır fazlı sinyallerin maksimum genliği daima yansıtıcı iğnecik ile çakışır. Minimum fazlı dalgacıkta ise bir gecikme söz konusudur.

Bu çalışmada minimum fazlı kaynak fonksiyonlarından Berlage kaynak fonksiyonu, sıfır fazlı kaynak fonksiyonlarından da Gabor, Ricker ve Gaussian kaynak fonksiyonları kullanılmıştır. Bu kaynak fonksiyonları zaman ortamında aşağıdaki şekilde tanımlanırlar (Bayrak 1993).

- Gabor kaynak fonksiyonu,

$$f(t) = \exp\left(-\left(w_p t / \tau\right)\right) \cos(w_p t), (\tau = 1, 2, 3, 4) \quad (2.61)$$

Burada w_p , açısal pik frekansını ve τ , sönüm sabitini göstermektedir.

- Ricker kaynak fonksiyonu,

$$f(t) = \left(1 - 2(f_p t)^2\right) \exp\left(-\pi f_p t^2\right) \quad (2.62)$$

Burada f_p , pik frekansını göstermektedir.

- Gaussian kaynak fonksiyonu,

$$f(t) = \cos(2\pi f_p t) \exp\left(-2(\pi \Delta f t)^2\right) \quad (2.63)$$

Bu ifadede yer alan Δf spektrum genişliğini göstermektedir.

- Berlage kaynak fonksiyonu,

$$f(t) = A_o t^\alpha e^{-\beta t} \sin(\omega t + \varphi), \quad t \geq 0 \quad (2.64)$$

w açısal hız, t zaman, A_o genlik, φ faz açısı, β azalım sabiti, α soğurma katsayısıdır (Bath 1974).

Grid dispersiyonundan kurtulmak için frekans bandı kontrol edilebilen kaynak fonksiyonları kullanılmalıdır. Ayrıca ayrımlılığı arttırmak ve girişmiş olan olayları birbirinden ayırmak için modelleme çalışmalarında sıfır fazlı dalgacıklar tercih edilir. Bunlardan Ricker, Gabor ve Gaussian dalgacıkları en çok kullanılanlarıdır.

3.2 Gabor, Ricker, Gaussian ve Berlage Kaynak Fonksiyonları için Sonuçlar

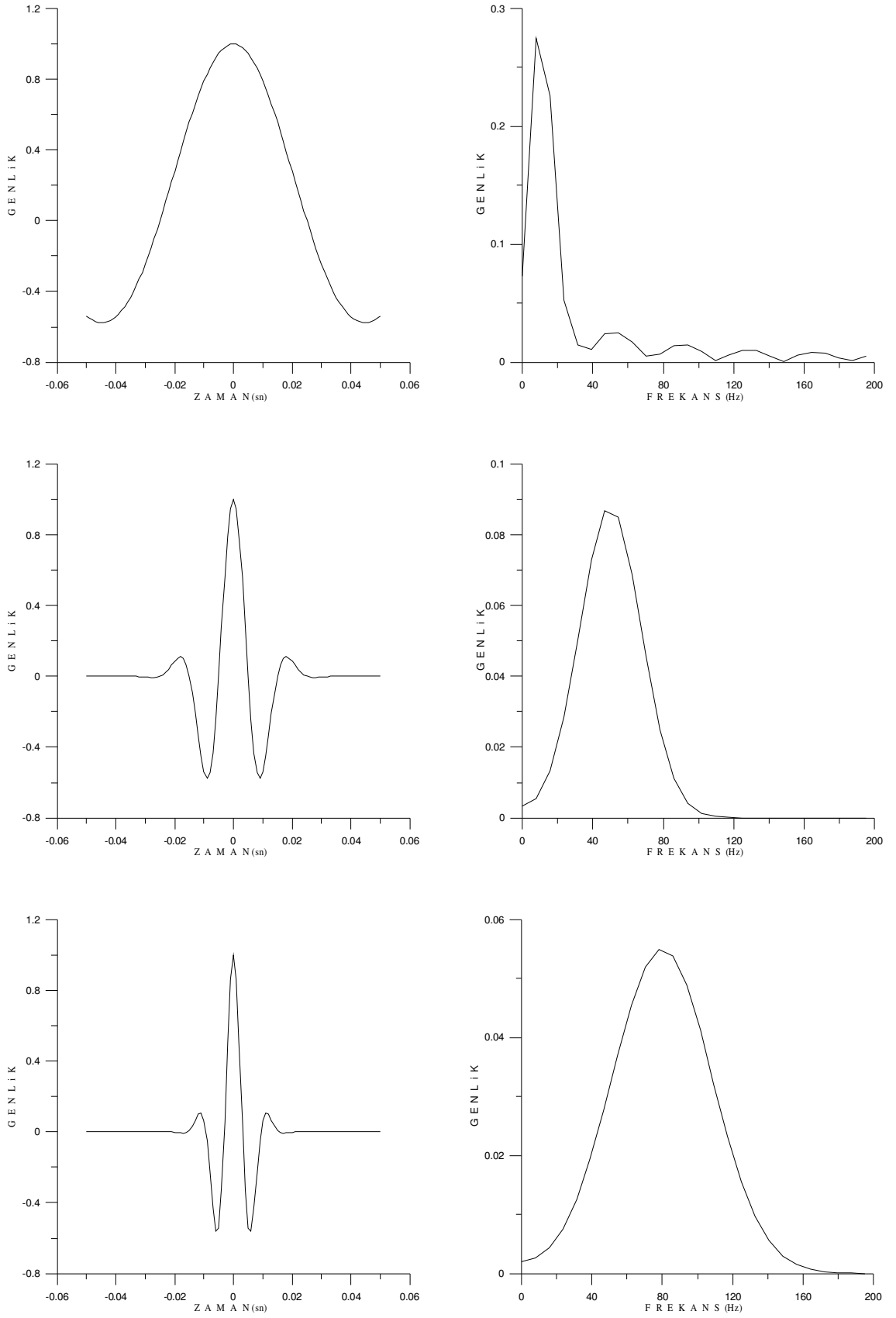
Merkez frekansları 10, 50, 80 Hz ve örnekleme aralıkları 1 m/sn olan Gabor, Ricker, Gaussian ve Berlage kaynak fonksiyonları ve bunların genlik spektrumları Şekil 3.1, Şekil 3.2, Şekil 3.3, Şekil 3.4'de verilmiştir.

Şekil 3.4'te görülen Berlage kaynak fonksiyonu minimum fazlı bir kaynak fonksiyonudur. Şekil 3.6'dan görüldüğü gibi aynı genlik spektrumuna sahip sıfır fazlı sinyaller (Gabor, Ricker, Gaussian), minimum fazlı sinyalden daha kısadır. Bu da minimum fazlı Berlage kaynak fonksiyonunun, ayrımlılık gücünün az olması anlamına

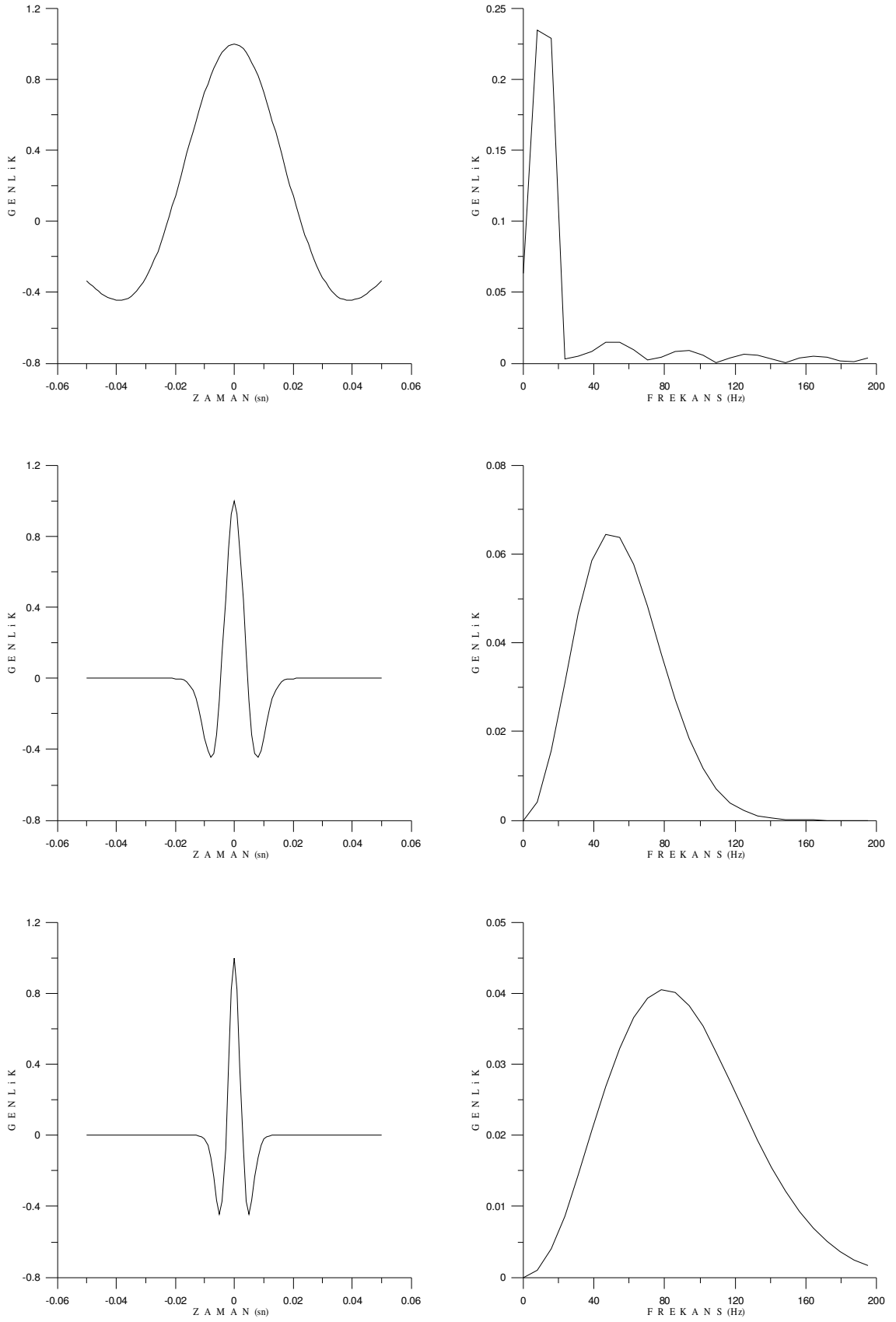
gelmektedir. Dalga modellemesi çalışmalarında ayrımlılık önemli bir husus olduğundan, Berlage kaynak fonksiyonunun kullanılması sağlıklı sonuçlar elde etmeyi güçleştirir. Şekil 3.3’de görülen Gaussian kaynak fonksiyonunun yan salınımları fazladır. Eğer bu kaynak fonksiyonu, sismik inceleme amaçlı çalışmalarda kullanılır ise özellikle ayrımlılık azalacak ve ince tabakalardan gelebilecek yansımalar belirlenemeyecektir. Şekil 3.1, Şekil 3.3’de verilen Gabor ve Ricker kaynak fonksiyonları prospeksiyon amaçlı çalışmalarda kullanılabilir. (3.2) denklemi ve Şekil 3.3 ile verilen Ricker kaynak fonksiyonunda bir merkez frekansı için sadece bir dalgacık elde edilebilmektedir. Fakat Şekil 3.2’den anlaşılacağı gibi, tek bir merkez frekansı için sadece sönüm sabiti τ ’yu değiştirerek Gabor kaynak fonksiyonunun yan salınımları ve band genişliği ayarlanabilmektedir.

Bir dalgacığın zaman ortamında salınımını bir an önce yapıp tamamlaması, ayrımlılık açısından önemlidir. Şekil 3.6’da eşit merkez frekansına sahip kaynak fonksiyonları aynı grafik üzerinde görülmektedir. Burada hareketini en kısa zamanda gerçekleştiren ve yansınımları en az olan kaynak fonksiyonu Ricker kaynak fonksiyonu olarak görülmektedir.

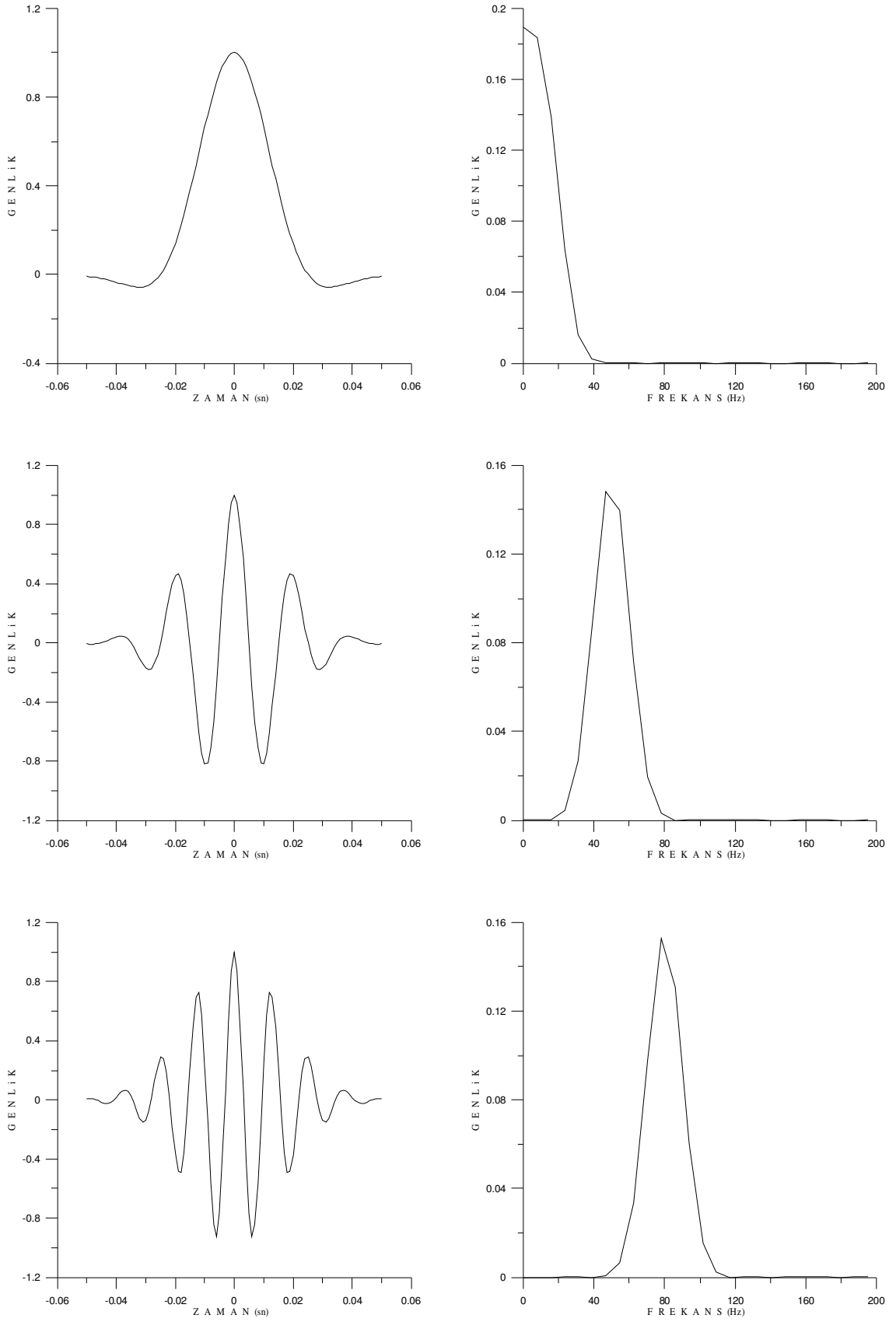
Prospeksiyon amaçlı sismik modelleme çalışmalarında ayrımlılık nedeni ile ve dördüncü bölümde açıklanan SFM de grid dispersiyonundan kurtulmak için frekans bandı kontrol edilebilen, sıfır fazlı kaynak fonksiyonları tercih edilir. Bu çalışmada yan salınımları ve band genişliği kontrol edilebilen sıfır fazlı bir kaynak fonksiyonu olan Ricker kaynak fonksiyonu tercih edilmiştir.



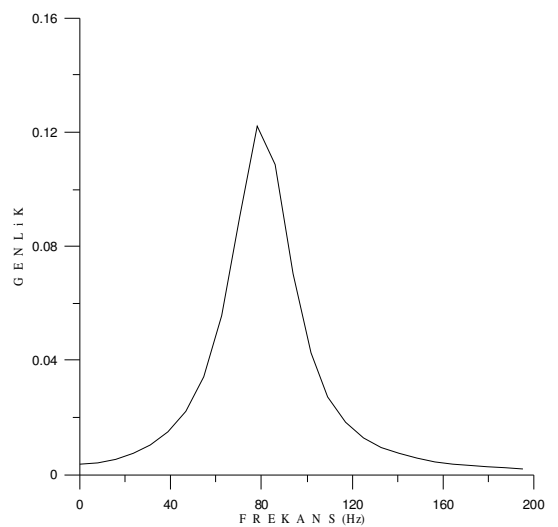
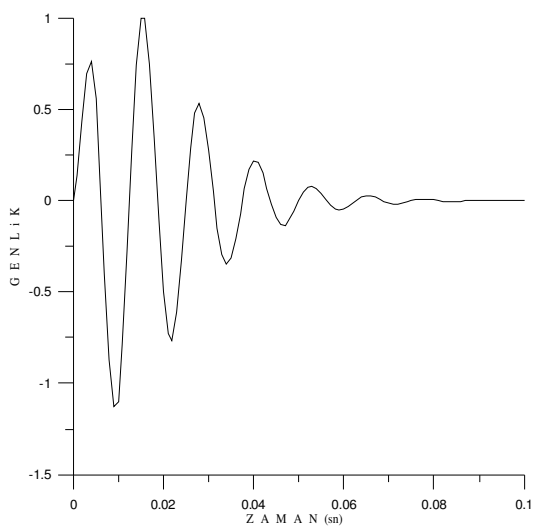
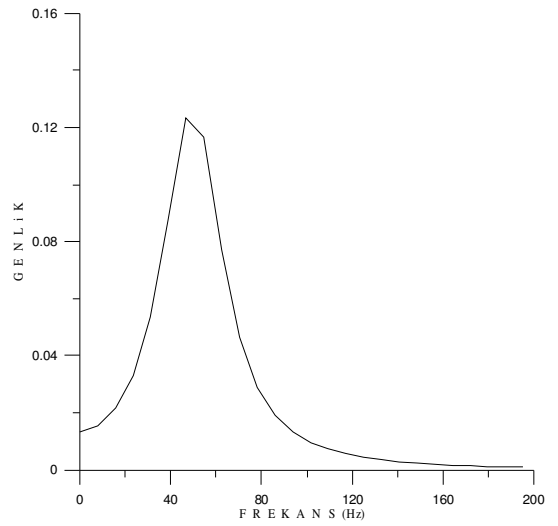
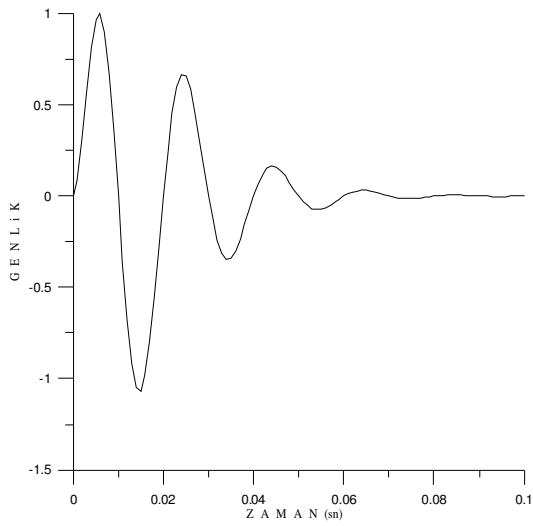
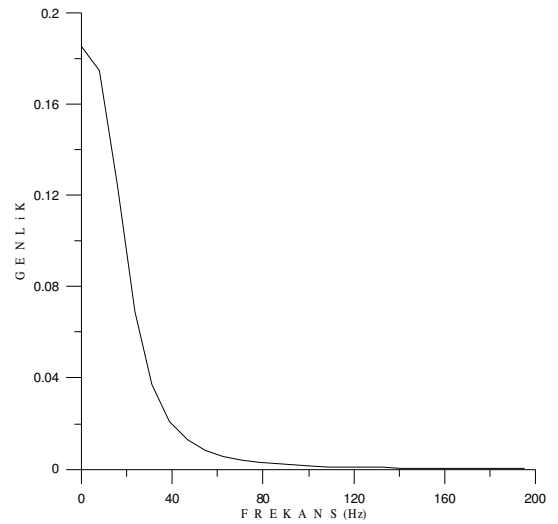
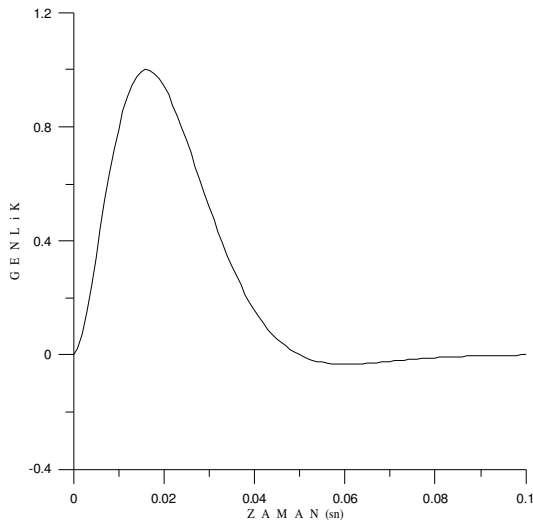
Şekil 3.1 Merkez frekansı 10, 50, 80 Hz olan Gabor kaynak fonksiyonunun zaman ve frekans ortamındaki görünümü



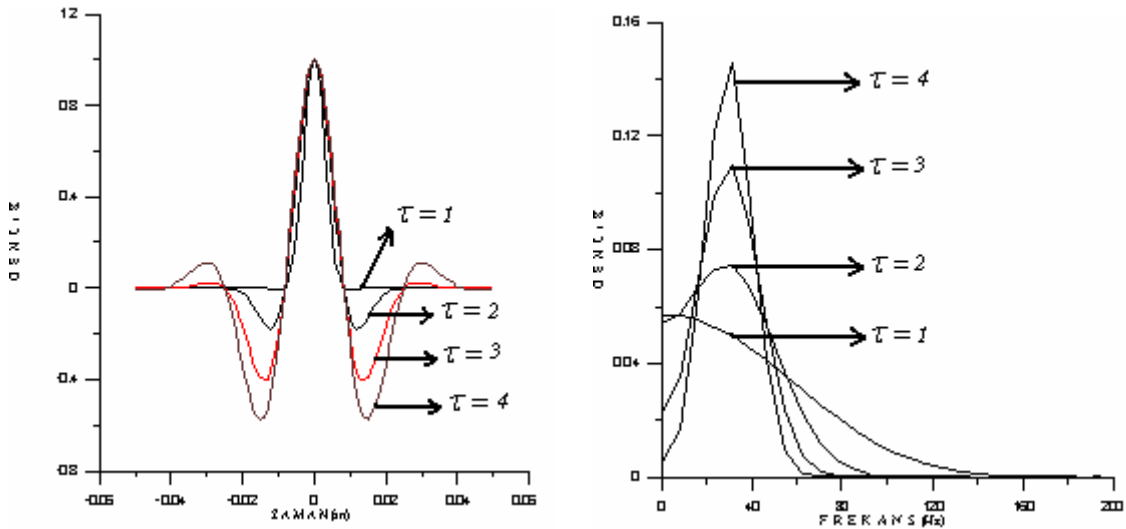
Şekil 3.2 Merkez frekansı 10, 50, 80 Hz olan Ricker kaynak fonksiyonunun zaman ve frekans ortamında görünümü



Şekil 3.3 Merkez frekansı 10, 50, 80 Hz olan Gaussian kaynak fonksiyonunun zaman ve frekans ortamındaki görünümü

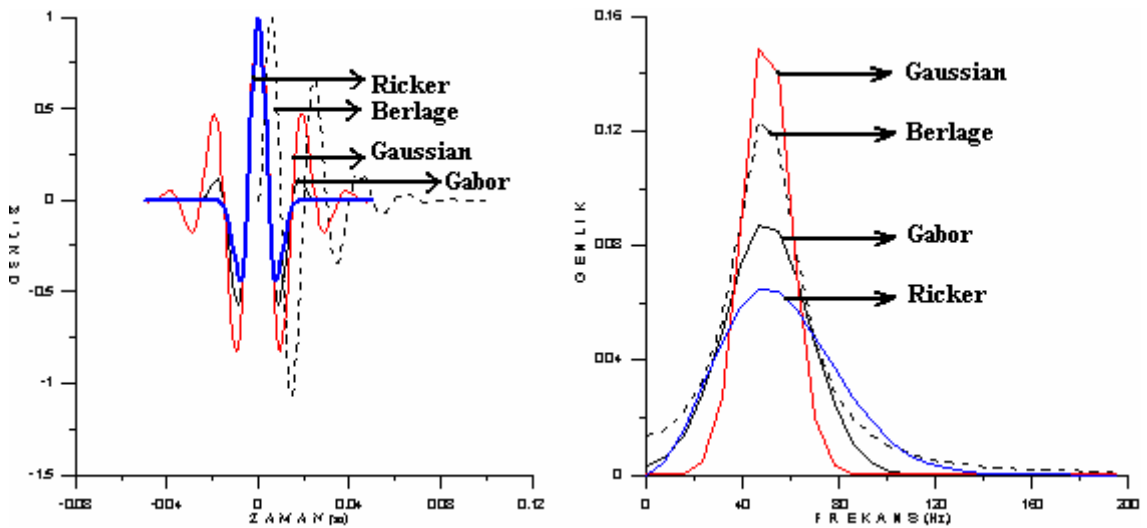


Şekil 3.4 Merkez frekansı 10, 50, 80 Hz olan Berlage kaynak fonksiyonunun zaman ve frekans ortamında görünümü



Şekil 3.5 Merkez frekansı 30 Hz, $\tau = 1,2,3,4$ değerleri için elde edilmiş olan Gabor kaynak fonksiyonunun zaman ve frekans ortamındaki görünüşleri

Şekil 3.5'den anlaşılacağı gibi, tek bir merkez frekansı için sadece sönüm sabiti τ 'yu değiştirerek Gabor kaynak fonksiyonunun yan salınımları ve band genişliği ayarlanabilmektedir.



Şekil 3.6 Merkez frekansı 30 Hz olan, Gabor, Ricker, Gaussian ve Berlage kaynak fonksiyonlarının zaman ve frekans ortamında karşılaştırılması

3.3 Ayrırlılık

Birbirini izleyen iki yansımanın ayrılabildiği en küçük zaman ya da uzaklığa “*zaman ayrırlılığı*” ya da “*uzaklık ayrırlılığı*” adı verilir. Ayrırlılık düşey ve yatay yönde olmak üzere iki kısımda incelenmektedir. Düşey ayrırlılık iki yansıtıcı yüzeyden gelen yansımalar arasındaki farka, yatay ayrırlılık ise yansıtıcı yüzeyin büyüklüğüne karşılık gelmektedir. Buna “*Fresnel Zon*” adı verilir. Sismogram yorumlamasında ayrırlılık önemli bir faktördür. Yeraltında alınan bir yapının kalınlığı, kaynağın frekansı ve yansıtıcı yüzeyin büyüklüğü ayrırlılığı etkiler. Bu yüzden yorumlama aşamasında modellemeden yararlanır.

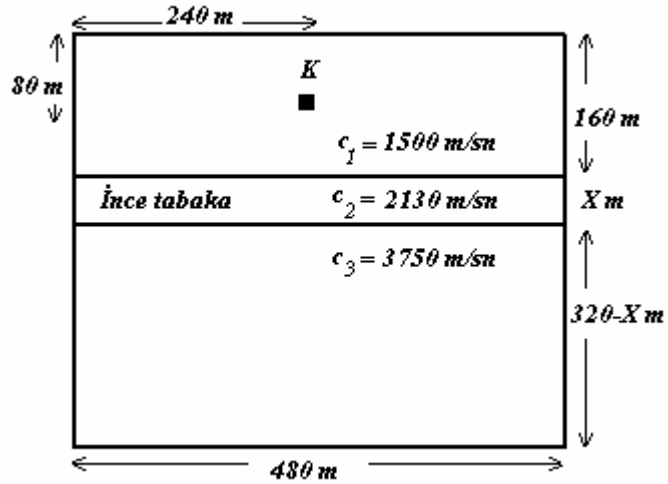
Bir ortamda yayılan dalgacığın dalga boyu $N = c/f_p$ ile verilir. Burada c ortamın hızını ve f_p kaynak frekansını göstermektedir. Dalga boyu ortamın hızına ve frekansa bağlıdır. Çeşitli kalınlık ve büyüklüklerde yapılar göz önüne alınarak ayrıca kaynağın frekansı değiştirilerek sismogramlar üretilip bu etkilerin ayrırlılığı nasıl etkilediği ve ayrırlılık sınırı bulunabilir.

3.4 Ayrırlılığın Modellenmesi

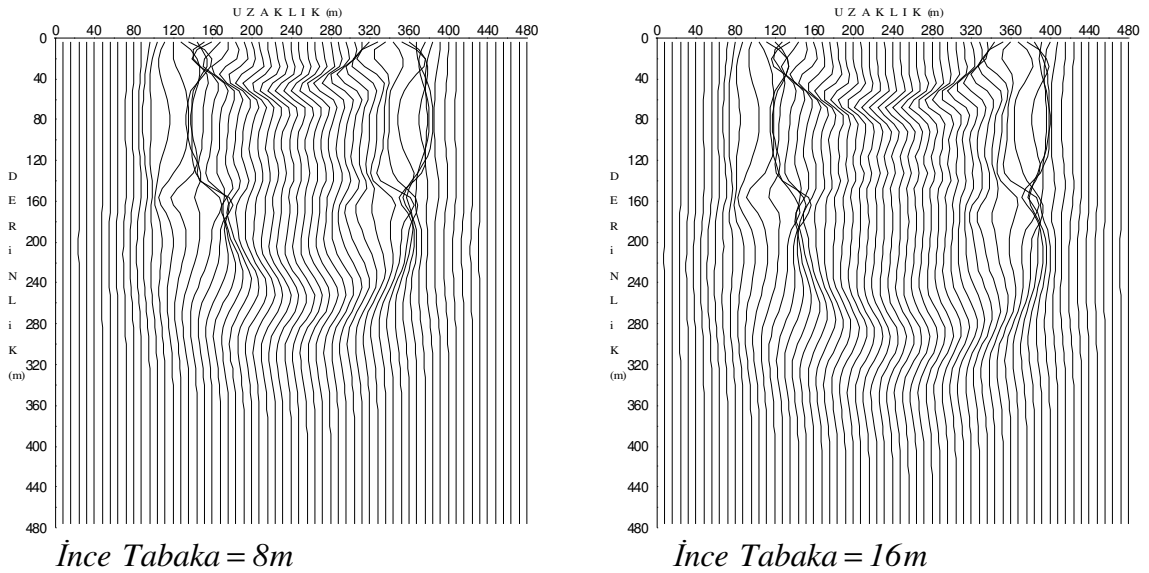
Ayrırlılık analizinde iki boyutlu skaler dalga denklemi, sonlu farklar yöntemi ile çözümlenip üç tabakalı bir ortam için ayrırlılık limiti araştırılmıştır. Pratikte kolay uygulanması nedeniyle ayrırlılık limiti olarak Widess kriteri kullanılır (Bayrak 1993). Bu kriter gere, tabaka kalınlığı dalga boyunun 1/4'ünden büyük olduğu zaman iki yansıma birbirinden ayırt edilebilmektedir.

Dalga boyu ortamın hızına ve frekansına bağlı olup, $N = \frac{c}{f_p}$ ile tanımlanmakta idi.

Burada, ayrırlılığı somut bir şekilde görebilmek için düşey ayrırlılık çalışması yapılmış, üç tabakalı bir ortam göz önüne bulundurulmuştur. Bu yapıda ortadaki ince tabaka kalınlığı 8, 16, 24, 40, 60, 80 m olarak değiştirilerek yansıyan dalgaların ayrırlılırlığı incelenmiştir. Ele alınan üç tabakalı yapı Şekil 3.7'de görülmektedir. Bu modelden aynı zaman adımı elde edilen snap shotlar Şekil 3.8 ve Şekil 3.9'da verilmiştir.



Şekil 3.7 Üç tabakalı yapının görünümü



Şekil 3.8 Şekil 3.7’de verilen model için, $f_p = 30\text{Hz}$ ve ara tabaka kalınlığı $\frac{1}{4}N$ değerinden küçük olduğunda elde edilen anlık enerji yayılımları.

Ortadaki ince tabakada dalganın yayılma hızı 2130 m/sn alındığından, bu ortamda

$$30\text{ Hz için dalga boyu } N = \frac{c}{f_p} = \frac{2130}{30} = 71\text{m},$$

$$50\text{ Hz için dalga boyu } N = \frac{c}{f_p} = \frac{2130}{50} \cong 43\text{m},$$

$$70\text{ Hz için dalga boyu } N = \frac{c}{f_p} = \frac{2130}{70} \cong 30\text{m} \text{ olmaktadır.}$$

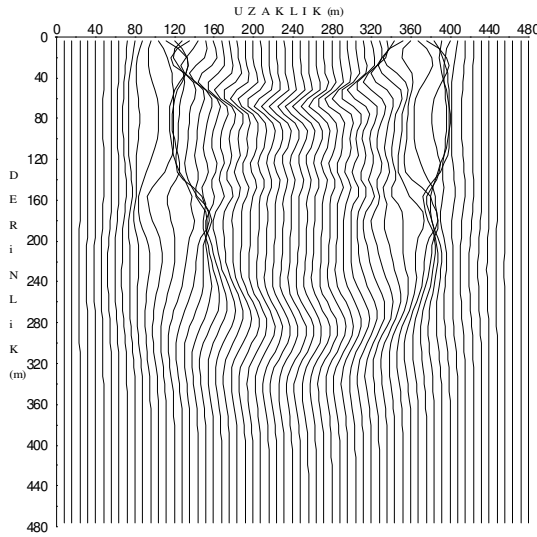
Görüldüğü gibi frekans arttıkça dalga boyu küçülmektedir. Bu iki ifade ters orantılıdır.

30 Hz için $\frac{1}{4}N$ değeri yaklaşık olarak 18m,

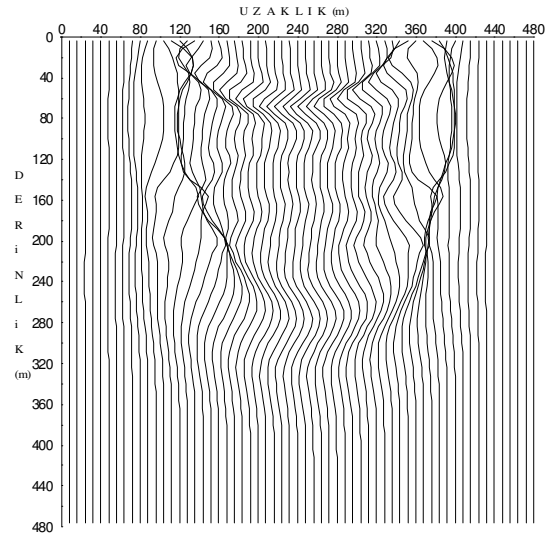
50 Hz için $\frac{1}{4}N$ değeri yaklaşık olarak 11m,

70 Hz için $\frac{1}{4}N$ değeri 7,5m dir.

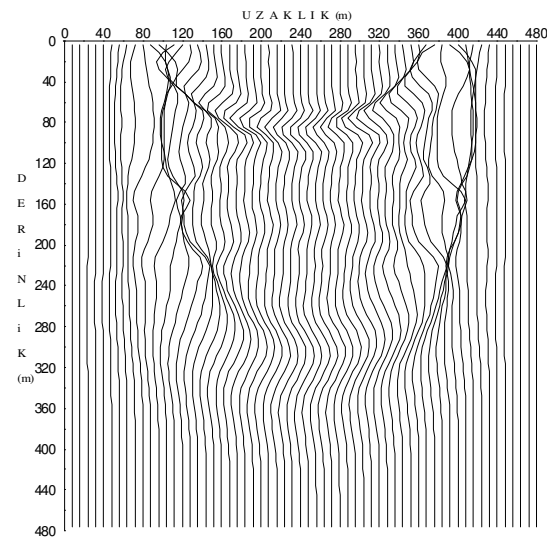
Şekil 3.8 de verilen snap-shotlarda ince tabakanın üstünden ve altından gelen yansımalar birbirinden ayırt edilememektedir. 30 Hz için $\frac{1}{4}N$ değeri yaklaşık olarak 18 m'dir. Şekil 3.8'de tabaka kalınlığı 8 m ve 16 m alınmıştır. Bu değerler 18 m den küçük olduğundan iki yansıma birbirinden ayırt edilememektedir.



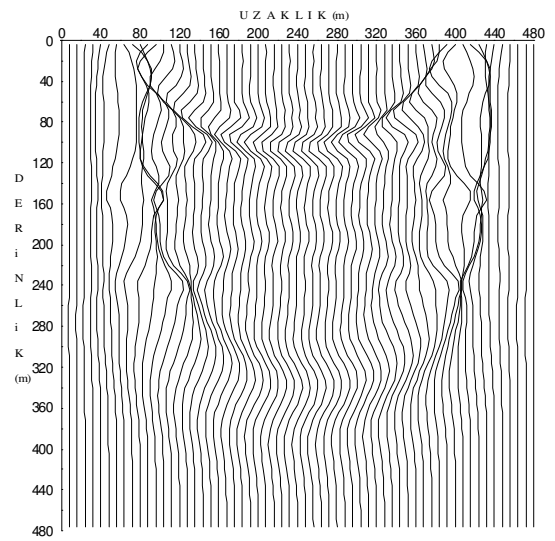
İnce Tabaka = 24m



İnce Tabaka = 40m



İnce Tabaka = 60m



İnce Tabaka = 80m

Şekil 3.9 Şekil 3.7'de verilen model için, $f_p = 30\text{Hz}$ ve ara tabaka kalınlığı $\frac{1}{4}N$ değerinden büyük olduğunda elde edilen anlık enerji yayımları

30 Hz için $\frac{I}{4}N$ değeri yaklaşık olarak 18 m idi. İnce tabaka kalınlığı 18 m'den büyük olduğunda, ince tabakadan gelen yansımalar birbirinden ayırt edilebilecektir. Şekil 3.9'da ince tabaka kalınlığı, 24 m, 40 m, 60 m ve 80 m alındığında ince tabakadan gelen yansımaların birbirinden ayırt edilebildiği görülmektedir. Elde edilen bu sonuçların Wides kriteri ile uyumlu olduğu görülmektedir.

İnce tabakalarda ayırlılığını arttırmak için başka bir yöntem de, frekansı yüksek tutup, dalga boyunu küçültmektir. Çünkü yeraltında hız derinlikle arttığından dalga boyu büyümekte ve yüksek frekanslar sönmelenmektedir. Dalga boyunu küçültmek için frekans artırılmalıdır.

3.5 Sonuçlar

Bu bölümde Gabor, Ricker, Gaussian ve Berlage kaynak fonksiyonları zaman ve frekans ortamında ayrı ayrı incelenmiştir. Elde edilen grafikler çeşitli kriterler de göz önünde bulundurularak yorumlanmıştır. Bu değerlendirmeler sonucunda model çalışmalarında Ricker kaynak fonksiyonu tercih edilmiştir. Ayrıca üç tabakalı yapılarda, birinci ve ikinci ara yüzden gelen yansımaların birbirinden ayırt edilebilmesi için ince tabaka kalınlığının seçimi ile ilgili yapılan çalışmanın, uygulamada en çok kullanılan Wides kriteri ile uyumlu olduğu görülmüştür.

4. DALGA DENKLEMLERİNİN SAYISAL ÇÖZÜM ŞARTLARI

Skaler dalganın modellenmesinde, farklı elastik özelliklere sahip ortamlar arasında sınırlarda bazı problemlerle karşılaşmaktadır. Bu çeşit problemleri çözmek için, farklı ara sınırlardaki süreksizlik yüzeylelerinde dalga alanlarının çözüme nasıl katılacağına bilinmesi gerekir. Bunun için her bir homojen bölgede alan çözümlerinin hesaplanmasına ihtiyaç vardır. Daha sonra uygun sınır şartlarına göre özel çözümler katılarak problemin genel çözümü oluşturulur. Eğer uygun sınır şartları kullanılmazsa yatay ve düşey yönde yapay süreksizlikler oluşacaktır.

Dalga denkleminin sayısal çözümünde uzaysal örnekleme aralıkları ($\Delta x, \Delta z$) ve zaman örnekleme aralığının (Δt) seçimi bazı şartlara bağlıdır. Eğer, bu şartların dışına çıkılırsa, gerçeğe yakın sismogramlar elde edilemez. Dalga denkleminin sayısal çözümünde,

1. Sınır şartları,
2. Kararlılık şartı,
3. Grid dispersiyonu,

problemleri ile karşılaşılır. Modellemelerde, bu problemlere dikkat edilmesi gerekir.

4.1 Sınır Şartları

Dalga problemleri normalde sonsuz ortamlar için çözülür fakat sismogram hesaplarında yeraltı modelinin düşey ve yatay yönde sınırlanması gerekmektedir. Eğer uygun sınır şartları kullanılmaz ise, yatay ve düşey yönde yapay süreksizlikler oluşacaktır. Bu yapay süreksizliklere “Sınır (kenar) yansımaları” denir. İstenmeyen bu sınır yansımaları modellenen bölgede yayılan gerçek sinyalleri örtmektedir. Bu nedenle sonlu ortamlarda, sınır yansımaları bastırmak için, soğuran sınır koşullarına ihtiyaç duyulur. Bunun için, dalga denklemini sağa, sola ve aşağı doğru giden dalga alanlarına ayrılmakta ve sınırdaki değerler bu sınırlara doğru giden düzlem dalgalarından belirlenmektedir. SFM de dalga denklemleri için soğuran sınır koşulları birçok bilim adamı tarafından geliştirilmiştir (Clayton ve Engquist 1977). Daha sonra kartezyen koordinatlar için farklı sınır koşulları geliştirilmiştir (Reynolds 1978). Reynolds sınır koşullarının avantajı kolay ve anlaşılır olmasıdır.

4.1.1 Bir Boyutlu Dalga Denkleminin Çözümünde Kullanılan Sınır Şartları

Skaler dalga denklemi için kısmi diferansiyel denklem bir boyutlu olarak;

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (4.1)$$

biçiminde verilir. Buradaki türevler ikinci dereceden olduklarından sonlu fark ifadeleri kolayca yazılabilir. Ancak sayısal çözüm için yine başlangıç, sınır ve kararlılık koşullarının belirlenmesi gerekir. Başlangıç koşulu için

$$u_{j,0} = u_{j,1} = 0 \quad (4.2)$$

alınmıştır. Fakat $x = \mp a$ gibi her iki sınırdan yansıma olması istenmemektedir. Yani;

$$u(\mp a, t) = 0$$

veya

$$\frac{\partial u(\mp a, t)}{\partial x} = 0 \quad (4.3)$$

olması arzu edilir. Sağ tarafa hareket eden bir düzlem dalga düşünülerek;

$$u = e^{i(\omega t - kx)} \quad (4.4)$$

şeklinde yazılabilir.

$x \leq a$ için ise (4.1) denkleminin çözümü

$$u = e^{i(\omega t - kx)} + R e^{i(\omega t + kx)}, \quad (4.5)$$

Burada R yansıma katsayısıdır. (4.5) eşitliği (4.3)'te yerine konulduğu zaman;

$$|R| = 1$$

olduğu elde edilir. Yani $x = a$ da, gelen dalga aynı genlikle geri yansımıştır. Oysa bu yansımanın olması istenmez. Bu sonuç (4.3)'teki koşullar ile probleme çözüm aramanın yanlış olduğunu gösterir. $x = \mp a$ daki yansımaları bastırmanın bir başka yolu daha vardır. (4.1) eşitliğini, sağa ve sola giden dalga alanları olarak ayırıp, $x = \mp a$ konularak bu problem çözülebilir.

$$\left(\frac{1}{c} \frac{\partial(-a, t)}{\partial t} - \frac{\partial(-a, t)}{\partial x} \right) = 0 \quad (4.6)$$

$$\left(\frac{1}{c} \frac{\partial(a, t)}{\partial t} + \frac{\partial(a, t)}{\partial x} \right) = 0 \quad (4.7)$$

sırasıyla sol ve sağ sınırlar için yansımayı soğurmaktadır (Reynolds 1978). Gerçekten de (4.5) eşitliği (4.7)'de yerine konursa $R = 0$ bulunur. Yani $x = a$ sınırında yansıma yoktur. Konu ile ilgili daha açıklayıcı bilgiler Reynolds (1978) de verilmiştir.

4.1.2 İki Boyutlu Dalga Denkleminin Çözümünde Kullanılan Sınır Şartları

Bu çalışmada iki boyutlu modellerde, modellenen ortam için iki farklı sınır koşulu kullanılmıştır. Bunlar Dirichlet ve transparent(soğuran) sınır koşullarıdır.

Skaler dalga denkleminin çözümünde başlangıç koşulu olarak $\Delta t = 0$ ve $\Delta t = 1$ zaman adımlarında yer değiştirmelerin sıfır olduğu kabul edilir. Bu koşullar modelin sınırlarda yansımaya uğramaması için uygun koşullardır.

$$u_{i,j,0} = u_{i,j,1} = 0 \quad (4.8)$$

Bu şartlarda (2.16) ile verilen iki boyutlu skaler dalga denklemi $-a \leq x \leq a$, $0 \leq z \leq b$, ve $t \geq 0$ için çözülecektir. Bu fiziksel sınırlar Şekil 2.3 de verilmiştir.

$x = \mp a$ sınırlarında yansıma olması istenmez. Bir başka deyişle iki boyutlu skaler dalganın $x = \mp a$ ve $z = b$ sınırlarında yansımaya uğramaması için uygun sınır şartları,

$$u(\mp a, z, t) = 0, \quad u(x, b, t) = 0$$

veya

$$\frac{\partial u(\mp a, z, t)}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial u(x, b, t)}{\partial x} = 0 \quad (4.9)$$

şeklinde verilmektedir ve bu denklemlere *Dirichlet* sınır şartı denir. Buna rağmen $x = \mp a$ ve $z = b$ sınırlarında tekrar kuvvetli kenar yansımalar gözlenir. Fakat bu sınırlarda yansıma katsayısı birimdir. Örneğin sağa doğru düzlem dalga yayılımı ele alınırsa

$$u = e^{i(\omega t - kx \cos \theta \pm kz \sin \theta)} \quad 0 \leq \theta \leq \pi/2 \quad (4.10)$$

elde edilir.

Burada θ , düzlem dalga cephesinin x eksenine yaptığı açı yani dalganın sınıra geliş açısıdır. Sınırdaki yer değiştirme

$$u = e^{i(\omega t - kx \cos \theta \pm kz \sin \theta)} + Re^{i(\omega t + kx \cos \theta \pm kz \sin \theta)} \quad (4.11)$$

denkleminde $x = a$ 'daki yansıma katsayısı hesaplanabilir. (4.11) denklemi (4.9) sınır şartında yerine konursa yansıma katsayısı,

$$|R| = 1$$

elde edilir. Yansıma katsayısının 1 olması, sınıra gelen dalganın aynı genlikle yansımaya neden olur. Bu kenar yansımalar gerçek yansımaları örtecektir.

Bu istenmeyen olayları bastırmak için dalga alanı sola, sağa, ve aşağı doğru giden dalga alanlarına ayrılır. Bu nedenle modelin solundaki sınır şartı,

$$\left(\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x}\right) \left(\frac{\lambda}{c} \frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x}\right) u = 0, \quad x = -a, \quad 0 \leq z \leq b, \quad 0 \leq t \leq T \quad (4.12)$$

sağ tarafındaki sınır şartı,

$$\left(\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\right) \left(\frac{\lambda}{c} \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\right) u = 0, \quad x = a, \quad 0 \leq z \leq b, \quad 0 \leq t \leq T \quad (4.13)$$

tabanındaki sınır şartı,

$$\left(\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z}\right) \left(\frac{\lambda}{c} \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z}\right) u = 0, \quad -a \leq x \leq a, \quad 0 \leq z \leq b, \quad 0 \leq t \leq T \quad (4.14)$$

serbest yüzeyde sınır şartı,

$$u = 0, \quad -a \leq x \leq a, \quad z = 0, \quad 0 \leq t \leq T \quad (4.15)$$

denklemleriyle verilmektedir. Burada $\lambda = \frac{c \cdot \Delta t}{\Delta x}$. Yukarıda verilen (4.11) denklemini

(4.12), (4.13), (4.14) denklemlerinde yerine konular ve R için çözülürse, yansıma katsayısı $R = 0$ olur. (4.12), (4.13), (4.14) ve (4.15) denklemleri sonlu farklar cinsinden,

$$u_{1,j,k+1} = u_{1,j,k} + u_{2,j,k} - u_{2,j,k-1} + \frac{c \Delta t}{\Delta x} [u_{2,j,k} - u_{1,j,k} - (u_{3,j,k-1} - u_{2,j,k-1})], \quad 2 \leq j \leq J, 2 \leq k \leq K \quad (4.16)$$

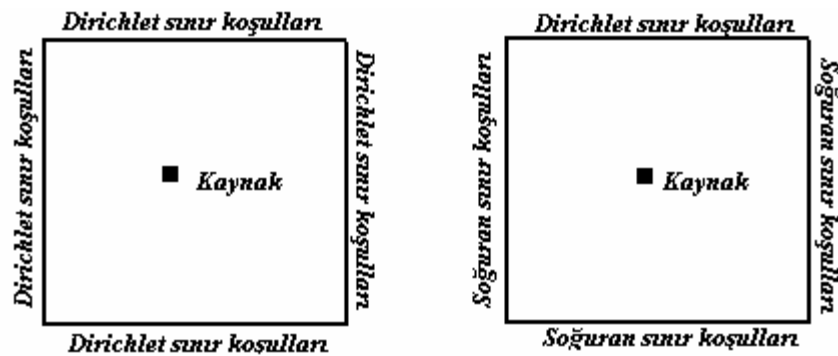
$$u_{I+1,j,k+1} = u_{I+1,j,k} + u_{I,j,k} - u_{I,j,k-1} + \frac{c \Delta t}{\Delta x} [u_{I+1,j,k} - u_{I,j,k} - (u_{I,j,k-1} - u_{I-1,j,k-1})], \quad 2 \leq j \leq J, 2 \leq k \leq K \quad (4.17)$$

$$u_{i,J+1,k+1} = u_{i,J+1,k} + u_{2,J,k} - u_{2,J,k-1} + \frac{c \Delta t}{\Delta x} [u_{2,J+1,k} - u_{1,J,k} - (u_{3,J,k-1} - u_{2,J-1,k-1})], \quad 2 \leq j \leq J, 2 \leq k \leq K \quad (4.18)$$

$$u_{i,I,k+1} = 0, \quad 2 \leq i \leq I, 2 \leq k \leq K \quad (4.19)$$

olacaktır. Bu denklemlere *transparent (soğuran) sınır şartları* denir (Reynolds 1978).

Şekil 4.1'de iki boyutlu modellerde kullanılan sınır koşullarının geometrisi verilmiştir.



Şekil 4.1 İki boyutlu modellerde Dirichlet ve soğuran sınır koşullarının geometrisi

4.1.3 Üç Boyutlu Dalga Denkleminin Çözümünde Kullanılan Sınır Şartları

Üç boyutlu durumda da iki boyutlu duruma benzer şekilde dalga alanı x ve y yönünde sağa ve sola, z yönünde ise aşağı giden dalga alanlarına ayrılarak sınırdaki değerler bulunur.

x yönündeki dalga alanları;

$$\left(\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x}\right) \left(\frac{\lambda}{c} \frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x}\right) u = 0$$

$$x = -a, 0 \leq z \leq b, -c \leq y \leq c, 0 \leq t \leq T \quad (4.20)$$

$$\left(\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\right) \left(\frac{\lambda}{c} \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\right) u = 0$$

$$x = a, 0 \leq z \leq b, -c \leq y \leq c, 0 \leq t \leq T \quad (4.21)$$

y yönündeki dalga alanları;

$$\left(\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial y}\right) \left(\frac{\lambda}{c} \frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial y}\right) u = 0$$

$$-a \leq x \leq a, 0 \leq z \leq b, y = -c, 0 \leq t \leq T \quad (4.22)$$

$$\left(\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial y}\right) \left(\frac{\lambda}{c} \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial y}\right) u = 0$$

$$-a \leq x \leq a, 0 \leq z \leq b, y = c, 0 \leq t \leq T \quad (4.23)$$

z yönünde aşağı giden dalga alanı;

$$\left(\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z}\right) \left(\frac{\lambda}{c} \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z}\right) u = 0$$

$$-a \leq x \leq a, z = b, -c \leq y \leq c, 0 \leq t \leq T \quad (4.24)$$

şeklinde yazılabilir. Bu denklemler sonlu farklar cinsinden,

$$u_{1,j,k,l+1} = u_{1,j,k,l} + u_{2,j,k,l} - u_{2,j,k,l-1} + \frac{c\Delta t}{\Delta x} [u_{2,j,k,l} - u_{1,j,k,l} - (u_{3,j,k,l-1} - u_{2,j,k,l-1})]$$

$$2 \leq j \leq J, 2 \leq k \leq K, 2 \leq l \leq L \quad (4.25)$$

$$u_{1+l,j,k,l+1} = u_{1+l,j,k,l} + u_{1,j,k,l} - u_{1,j,k,l-1} + \frac{c\Delta t}{\Delta x} [u_{1+l,j,k,l} - u_{1,j,k,l} - (u_{1,j,k,l-1} - u_{1-l,j,k,l-1})]$$

$$2 \leq j \leq J, 2 \leq k \leq K, 2 \leq l \leq L \quad (4.26)$$

$$u_{i,l,k,l+1} = u_{i,j,k,l} + u_{i,2,k,l} - u_{i,2,k,l-1} + \frac{c\Delta t}{\Delta x} [u_{i,2,k,l} - u_{i,1,k,l} - (u_{i,3,k,l-1} - u_{i,2,k,l-1})]$$

$$2 \leq i \leq J, 2 \leq k \leq K, 2 \leq l \leq L \quad (4.27)$$

$$u_{i,J+1,k,l+1} = u_{i,J+1,k,l} + u_{i,J,k,l} - u_{i,J,k,l-1} + \frac{c\Delta t}{\Delta x} [u_{i,J+1,k,l} - u_{i,J,k,l} - (u_{i,J,k,l-1} - u_{i,J-1,k,l-1})]$$

$$2 \leq i \leq J, 2 \leq k \leq K, 2 \leq l \leq L \quad (4.28)$$

$$u_{i,j,K+1,l+1} = u_{i,j,K+1,l} + u_{2,j,K,l} - u_{2,j,K,l-1} + \frac{c\Delta t}{\Delta x} [u_{2,j,K+1,l} - u_{1,j,K,l} - (u_{3,j,K,l-1} - u_{2,j,K-1,l-1})]$$

$$2 \leq i \leq J, 2 \leq k \leq K, 2 \leq l \leq L \quad (4.29)$$

şeklinde yazılabilir.

4.2 Kararlılık Şartı

Sayısal hesaplamanın durağan olarak küçük hatalar içinde kalmasına *kararlılık şartı* (stability condition) denir. Dalga denkleminin sonlu farklar yöntemi ile çözümünde Δx , Δz ve Δt nin seçimi bazı kriterlere bağlıdır. Bu parametreler uygun boyutta seçilerek en doğru sonuca yaklaşılr. Çeşitli kararlılık çözüm yöntemleri vardır. Bu yöntemler;

1. von Neuman kararlılık şartı
 2. Matris çözümü
 3. Sayısal hata kararlılık çözümü
- olmak üzere üçe ayrılmaktadır.

Dalga denklemlerinde von Neuman kararlılık şartı kullanılarak, sistemin kararlılığı için uygun λ aralıkları tespit edilmiş ve dalga denklemlerinin sonlu farklar çözümüne dayalı FORTRAN programlarında bu kararlılık kriterlerine bağlı kalınmıştır.

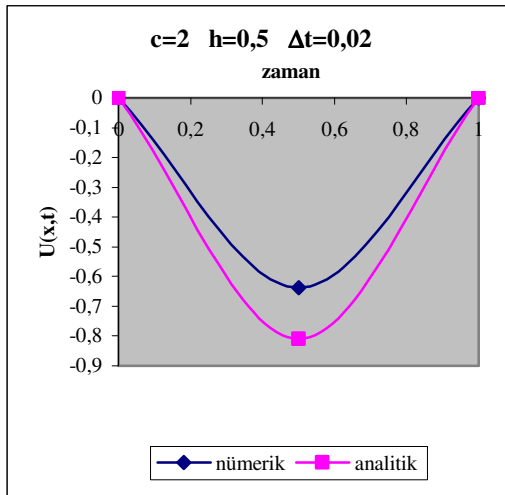
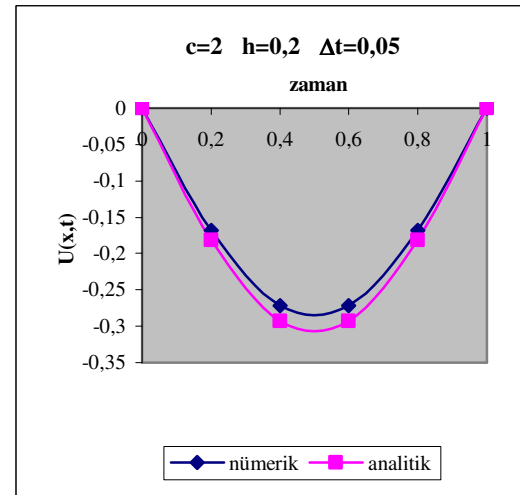
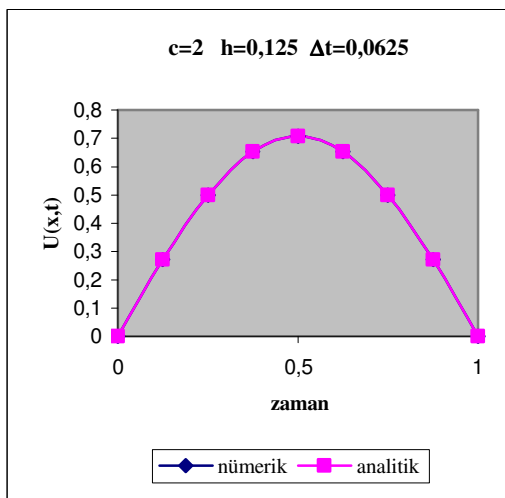
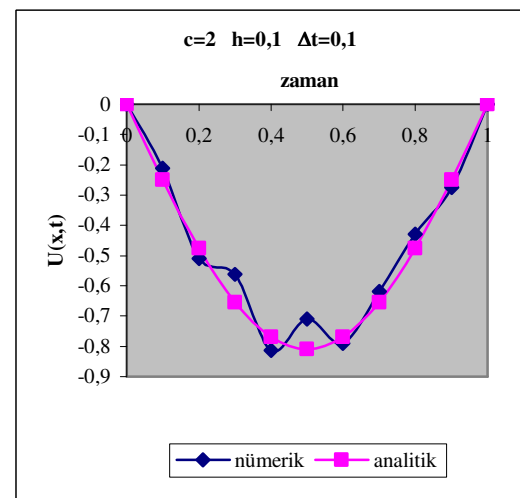
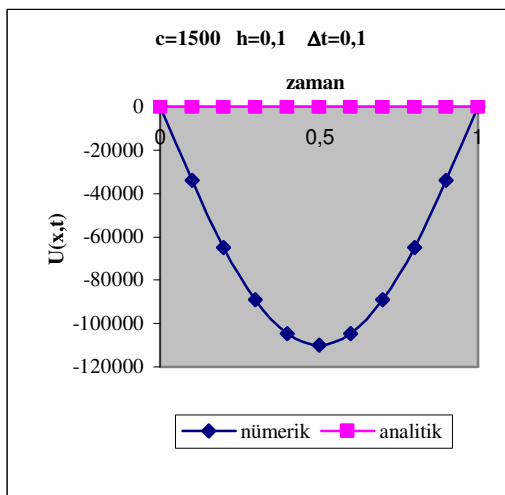
4.2.1 Bir Boyutlu Durum için Kararlılık Şartı

Bir boyutlu dalga denkleminin sonlu farklar ifadesi,

$$u_{i,j+1} = 2(1 - \lambda^2)u_{i,j} + \lambda^2(u_{i+1,j} + u_{i-1,j}) - u_{i,j-1}$$

denklemini ile verilmiştir. Bu denklemde yer alan λ , $\frac{c\Delta t}{\Delta x}$ değerine eşittir. Doğruluğu

daha fazla olan çözüm elde etmek için $\lambda = 1$ seçilmelidir (Bayram 2002). Bu ise $1 - \lambda^2$ değerinin sıfırdan küçük veya sıfıra eşit alınmasıyla mümkün olur. Yani bir boyutlu dalga denkleminin yaklaşık değerini bulmak için kullanılan açık sonlu fark yönteminde $\lambda \leq 1$ ise sistem kararlı, $\lambda > 1$ ise kararlı değildir. Şekil 4.2’de bir boyutlu dalga denkleminin sonlu farklar çözümünde farklı λ değerleri için analitik ve nümerik çözümler karşılaştırılmıştır. λ değerinin seçiminin sistem kararlılığındaki etkisi ve önemi açıkça görülmektedir.


 $\lambda = 0,08$

 $\lambda = 0,5$

 $\lambda = 1$

 $\lambda = 2$

 $\lambda = 1500$

Şekil 4.2 Bir boyutlu skaler dalga modellemesinde $\lambda = \frac{c\Delta t}{\Delta x}$ değerinin sistemin kararlılığındaki etkisi

Bir boyutlu skaler dalga modellemesinde yaklaşık çözüm ile analitik çözüm sistemin kararlılığını etkileyen $\lambda = \frac{c\Delta t}{\Delta x}$ değerinin farklı değerleri için ayrı ayrı gözlemlenmiş ve en uygun λ aralığı tespit edilmeye çalışılmıştır.

Şekil 4.2'de beş farklı λ durumu için bir boyutlu skaler dalga denkleminin nümerik ve analitik çözümler karşılaştırılmıştır. $\lambda \ll 1$ durumunda nümerik ve analitik çözümlerin birbirine yakın olmayan değerlere sahip olduğu görülmektedir. $\lambda < 1$ durumunda nümerik ve analitik çözümler birbirine biraz daha yakın elde edilmiştir. $\lambda = 1$ durumunda nümerik ve analitik çözümlerin birbirine çok yakın, hemen hemen aynı sonuçlar olduğu görülmektedir. $\lambda > 1$ durumunda nümerik ve analitik çözümlerin yine birbirinden farklılık göstermeye başladığı, son olarak da $\lambda \gg 1$ durumunda nümerik ve analitik çözümlerin arasındaki farkın bir hayli fazla olduğu görülmektedir.

Dalga denkleminin yaklaşık değerini bulmak için kullanılan sonlu fark yönteminde $\lambda \leq 1$ ise sistem kararlı, $\lambda > 1$ ise kararlı değildir. Elde edilen bu sonuçlar teorik bilgileri desteklemektedir.

4.2.2 İki Boyutlu Durum için Kararlılık Şartı

İki boyutlu dalga denkleminin sonlu farklar ifadesi,

$$u_{i,j,k+1} = 2(1 - 2\lambda^2)u_{i,j,k} - u_{i,j,k-1} + \lambda^2(u_{i+1,j,k} + u_{i-1,j,k} + u_{i,j+1,k} + u_{i,j-1,k}) \quad (4.30)$$

denklemini ile verilmiştir. Bu denklemde yer alan λ , $\frac{c\Delta t}{\Delta x}$ değerine eşittir. Kararlı çözümlerin elde edilebilmesi için $1 - 2\lambda^2$ değeri sıfırdan küçük veya sıfıra eşit olmalıdır.

$$1 - 2\lambda^2 \leq 0 \text{ 'dan } \lambda \leq \pm 1/\sqrt{2} = \pm 0,7071$$

bulunur. λ değeri uygulamada negatif değerler alamayacağından kararlı çözümler elde

$$\text{etmek için } \lambda = \frac{c\Delta t}{\Delta x} \leq \frac{1}{\sqrt{2}} \text{ olmalıdır.}$$

Şöyle ki (4.30) ile verilen iki boyutlu dalga denkleminin bir çözümü,

$$u_{i,j,k} = e^{ix} e^{jz} e^{ikt} \quad (4.31)$$

şeklindedir. Burada x ve z gerçel, t ise kompleks ($t = \mu + i\delta$) bir büyüklüktür. (4.31)

denklemini (4.30) denkleminde yerine konup düzenlenir ise,

$$\sin^2 \frac{t}{2} = \lambda^2 \left(\sin^2 \frac{x}{2} + \sin^2 \frac{z}{2} \right) \quad (4.32)$$

denklemini elde edilir. $\sin^2 \alpha = (1 - \cos 2\alpha)/2$ şeklinde dönüşüm yapıp ve x, z, t sıfır alınır ise $1 - 2\lambda^2 = 0$ elde edilir. Buradan $\lambda = \pm 1/\sqrt{2}$ elde edilir. Kararlı çözümler için $\lambda \leq 1/\sqrt{2}$ olmalıdır. Eğer $\lambda > 1/\sqrt{2}$ alınır ise kompleks kökler ortaya çıkacak ve negatif imajiner kök i ve j 'nin sonsuza gitmesi şeklinde üstel artan bir çözüm oluşturacaktır.

4.2.3 Üç Boyutlu Durum için Kararlılık Şartı

Üç boyutlu durum için kararlılık şartı iki boyutlu durum için elde edilen kararlılık şartına benzer şekilde elde edilir. Daha önce üç boyutlu dalga denkleminin sonlu farklarla ifadesi,

$$u_{i,j,k,l+1} = 2(1 - 3\lambda^2)u_{i,j,k,l} - u_{i,j,k,l-1} + \lambda^2 (u_{i+1,j,k,l} + u_{i-1,j,k,l} + u_{i,j+1,k,l} + u_{i,j-1,k,l} + u_{i,j,k+1,l} + u_{i,j,k-1,l}) \quad (4.33)$$

şeklinde elde edilmişti. Kararlı çözümlerin elde edilebilmesi için $1 - 3\lambda^2$ değeri sıfırdan küçük veya sıfıra eşit olmalıdır. $1 - 3\lambda^2 \leq 0$ dan $\lambda \leq \pm 1/\sqrt{3}$, λ değeri uygulamada negatif değerler alamayacağından kararlı çözümler elde etmek için,

$$\frac{c\Delta t}{\Delta x} \leq \frac{1}{\sqrt{3}} \quad (4.34)$$

olmalıdır.

Şöyle ki (4.33) ile verilen üç boyutlu dalga denkleminin bir çözümü,

$$u_{i,j,k} = e^{iix} e^{ijy} e^{ikz} e^{ikt} \quad (4.35)$$

şeklindedir. (4.35) denklemini (4.33)'de yerine konulup yeniden düzenlenir ise,

$$\sin^2 \frac{t}{2} = \lambda^2 \left(\sin^2 \frac{x}{2} + \sin^2 \frac{y}{2} + \sin^2 \frac{z}{2} \right) \quad (4.36)$$

denklemini elde edilir. $\sin^2 \alpha = (1 - \cos 2\alpha)/2$ şeklinde bir dönüşüm yapıp ve x, y, z ve t sıfır alınır ise, $1 - 3\lambda^2 = 0$ elde edilir. Buradan $\lambda = \pm 1/\sqrt{3}$ elde edilir. Kararlı çözümler için $\lambda \leq 1/\sqrt{3}$ olmalıdır. Eğer $\lambda > 1/\sqrt{3}$ alınır ise kompleks kökler ortaya çıkacak ve negatif imajiner kök i ve j 'nin sonsuza gitmesi şeklinde üstel artan bir çözüm oluşturacaktır.

4.3 Grid Dispersiyonu

Bir jeolojik model, belirli sınır şartları ve modelin herhangi bir yerine konulan nokta kaynak kullanılarak dalga denklemlerinin sonlu fark ifadeleri ile incelenebilir ve modele ait yapay sismogramlar elde edilebilir. Bu sismogramlar içinde sonlu fark yönteminden kaynaklanan hatalar vardır. Bunlardan birisi de grid dispersiyonudur.

Dalga hızının frekansa bağlı olarak değişmesine *dispersiyon* denir. Ayrık griddede yayılan dalgalar yayılma zamanı arttıkça dispersiyona uğrarlar ve bunun sonucu yüksek frekanslı sinyaller düşük frekanslı sinyallere göre relatif olarak daha geç gelirler. Bu olaya *grid dispersiyonu* denir. Grid dispersiyonundan kurtulmak için, bir dalga boyunun çözümlenmesinde yeteri kadar grid kullanılmalıdır. Grid aralığı Δx büyüdükçe grid dispersiyonu artar (Kelly vd 1976). Ortamda ilerleyen dalga cephesi $N = \frac{c}{f_p}$ dalga

boyuna sahiptir. Burada f_p kaynak fonksiyonunun maksimum pik frekansıdır. Dalga boyunun, uzaysal örnekleme aralığına oranı grid dispersiyonunu yok etmede önemlidir. Bu oran 10 veya daha büyük alınırsa sonucun duyarlılığı artmaktadır (Alford 1974).

Yani grid dispersiyon kriteri,

$$\frac{c}{\Delta x f_p} \geq 10 \quad (4.37)$$

olur. Buradan Δx çekilirse,

$$\Delta x \leq \frac{c}{10 f_p} \quad (4.38)$$

elde edilir. Burada c tasarlanan jeolojik model içindeki en küçük dalga hızını göstermektedir. Grid dispersiyonu uygun grid seçimi ile minimum yapılamazsa dalga şeklinde istenmeyen değişimler olur. Bu durumda da matematiksel modelden beklenen sonuçlar alınamaz. Bunun için (4.38) kriterine bağlı kalmak gerekmektedir.

4.4 Sonuçlar

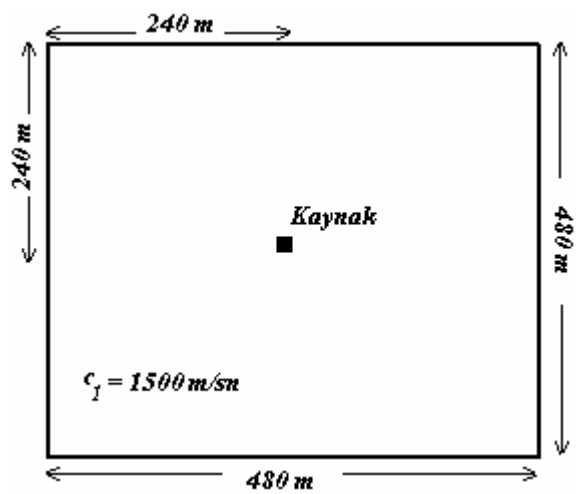
SFM ile yapılan modelleme çalışmalarında sınır şartları, kararlılık şartı ve grid dispersiyonu kriterlerinin önemi büyüktür. Beşinci bölümde, belirtilen bu hususlar dikkate alınarak çeşitli jeolojik yapılar modellenmiş, anlık enerji yayılımları ve sismogram grafikleri elde edilerek yorumlanmıştır.

5. UYGULAMALAR

Yeraltında geometrisi, hız ve yoğunluk gibi parametreleri bilinen bir yapının vereceği etkinin bulunması modelleme olarak tanımlanabilir. Yapılan modellemelerin amacı karmaşık olan yer içi yapısını tespit etmektir. Bunun için yapay sismogram modellemeleri yapılır. En yaygın olarak da dalga denklemlerinin sayısal çözümüne dayanan yöntemler kullanılır. Çünkü bu yöntemlerde kaynak, üzerinde çalışılan geometrinin herhangi bir noktasına yerleştirilebilmekte ve istenilen bir zamanda dalga alanının yer içinde nasıl hareket ettiğini gösteren anlık enerji yayılımları (snap-shot) alınabilmektedir. Burada, daha önceden teorik bilgileri verilen iki ve üç boyutlu skaler dalga denklemleri sonlu farklar yöntemi ile modellenmiştir. Elde edilen sonuçlar, SIEM ve Reynolds (1978) sonuçları ile karşılaştırılmıştır.

5.1 Sınır Koşullarının Etkisi

Derinliği 480 m , uzunluğu 480 m olan homojen ortam için, ortamın hızı $c = 1500\text{ m/sn}$, kaynağın merkez frekansı 30 Hz , zaman örnekleme aralığı $\Delta t = 0,00236\text{ sn}$ sonlu farklar için uzaysal örnekleme aralıkları $\Delta x = \Delta z = h = 5\text{ m}$ alınmıştır. Kaynak fonksiyonu olarak Ricker kaynak fonksiyonu kullanılmış ve geometrinin ortasına yerleştirilmiştir. Modellemelerde üst bölgenin serbest yüzey olduğu varsayılmıştır. Sınır koşulları olarak Dirichlet sınır koşulları ve soğuran sınır koşulları uygulanmıştır.

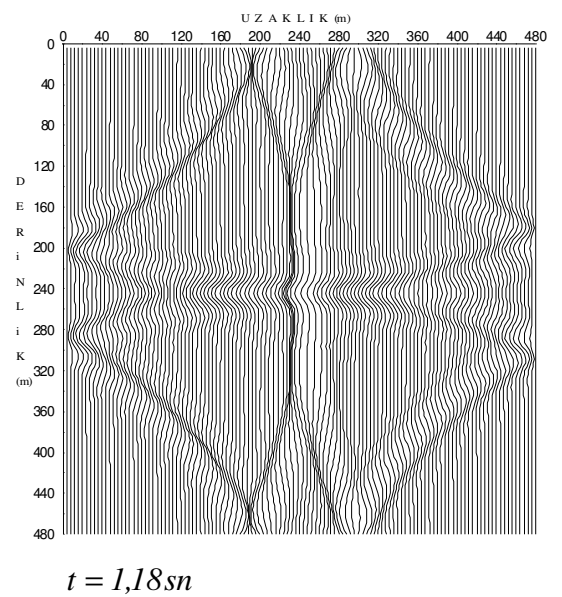
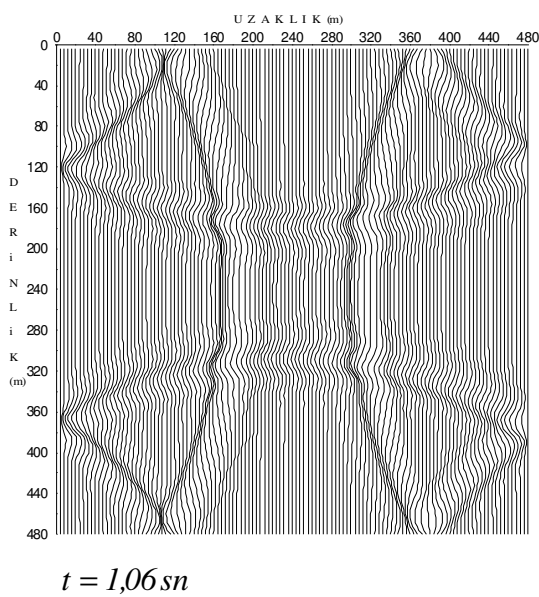
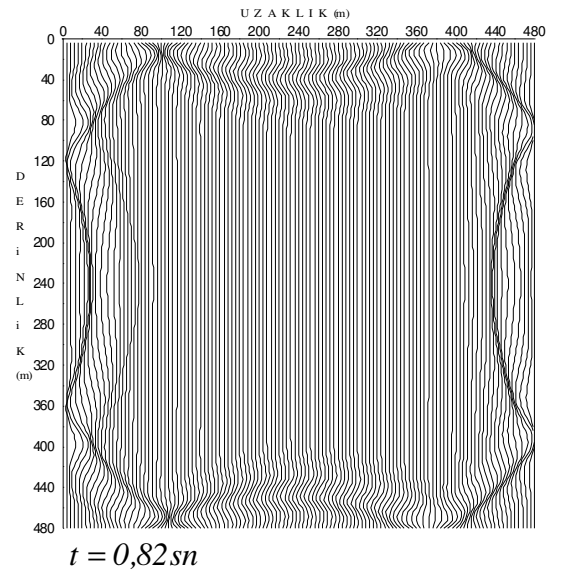
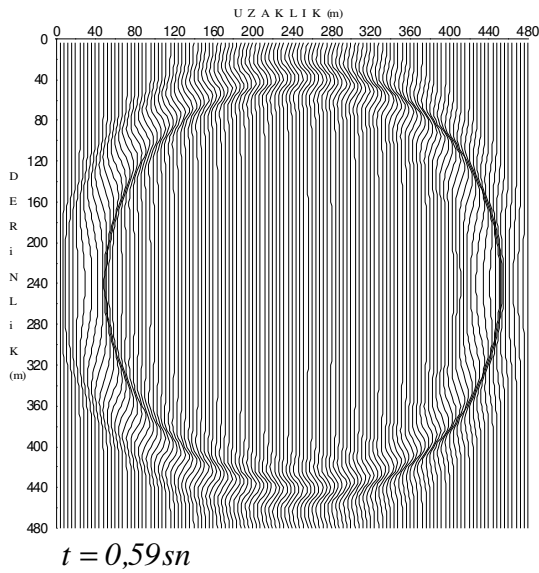
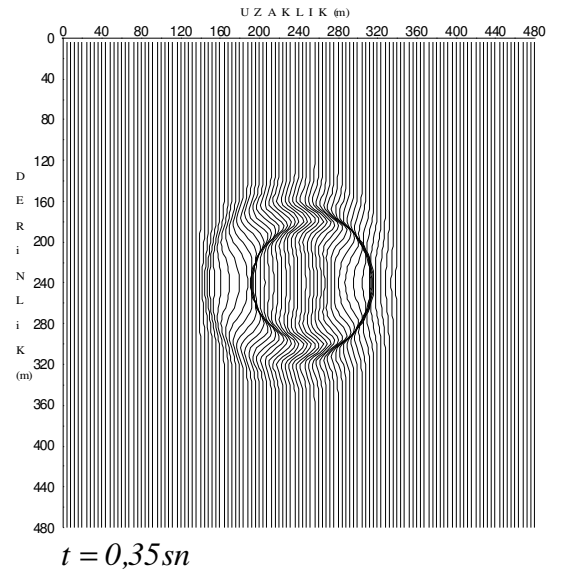
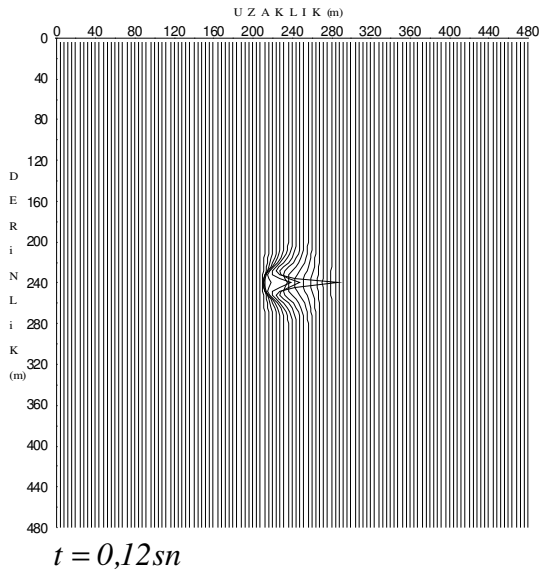


Şekil 5.1 İki boyutlu homojen yeraltı modeli

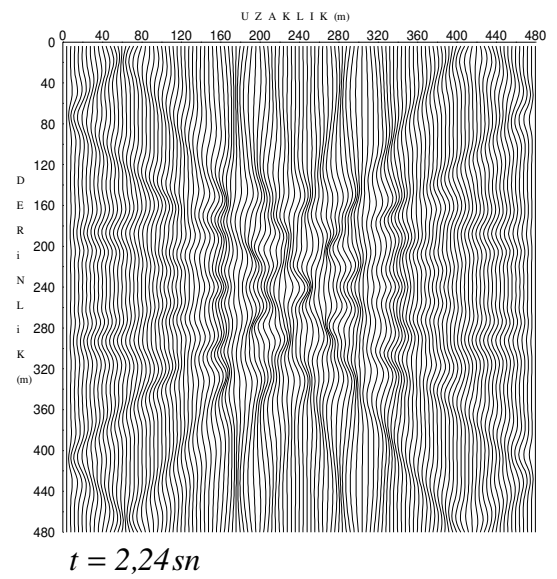
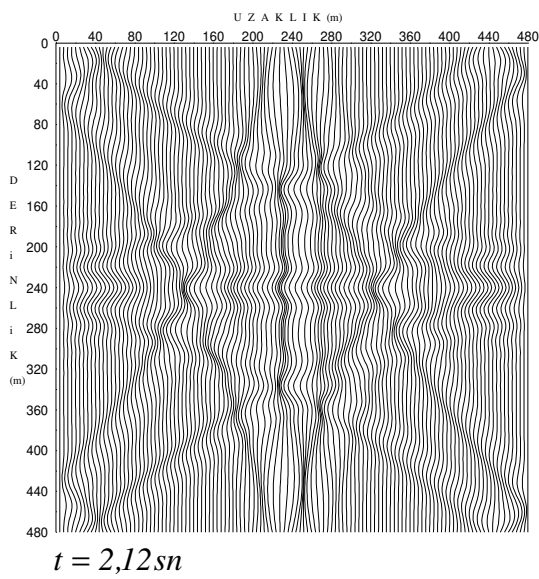
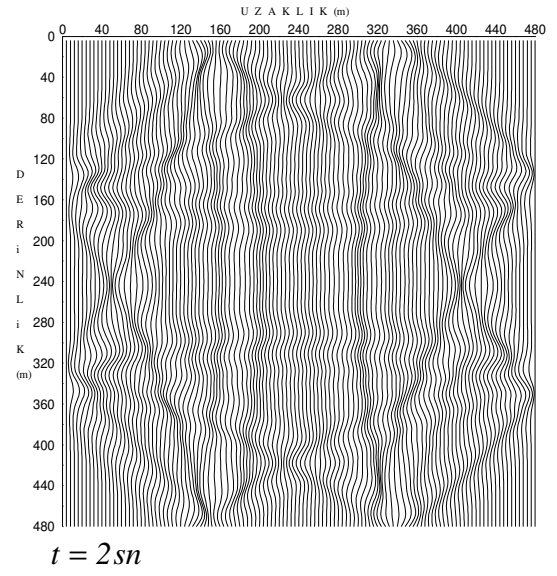
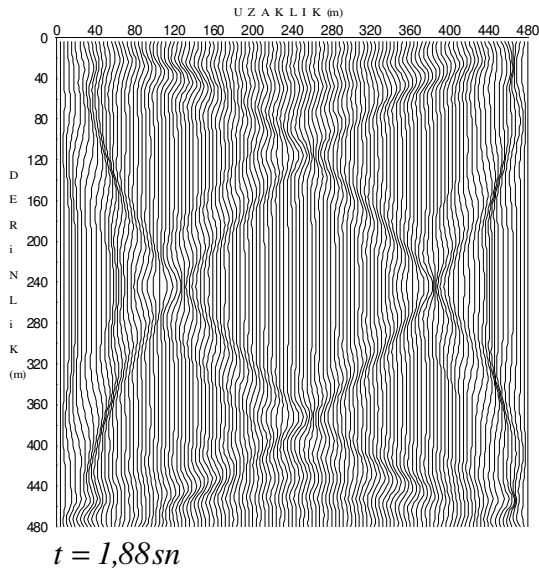
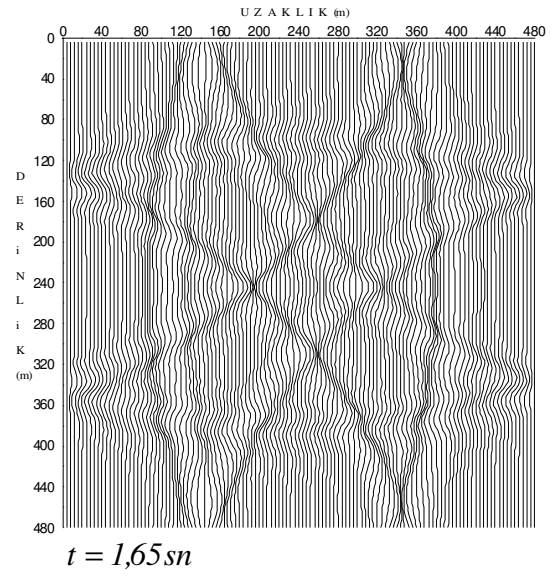
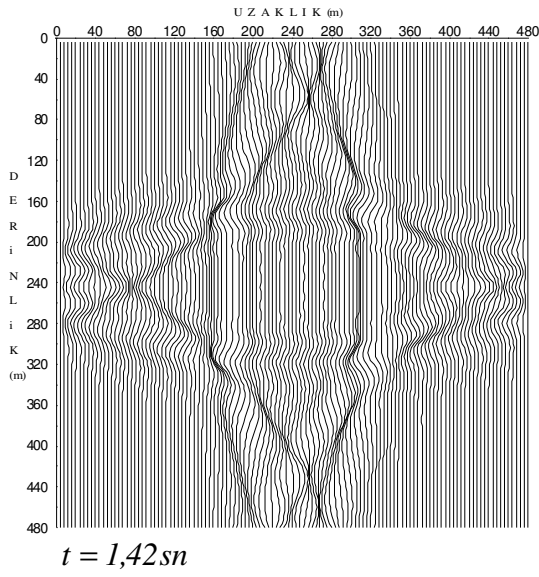
Şekil 5.2 ve Şekil 5.3'deki anlık enerji yayılımlarından homojen bir ortamda yayılan dalga cephesi izlenebilmektedir. Ortam iki boyutlu olduğu için dalga biçimi dairesel olarak yayılmaktadır. Doğal olarak üç boyutlu ortam durumunda dalga cephesi küresel olacaktır. Dirichlet sınır şartları kullanılarak, homojen bir ortam için hesaplanmış değişik zaman adımlarında dalga cephesi fotoğrafları Şekil 5.2'de görülmektedir. Dalga cephesinin, model sınırlarına geldiğinde, kenarlardan geri yansıdığı görülmektedir.

Kenarlardan yansıyan dalgaların zamanla birbiri içinden geçerek simetrik bir görünüm sergilediği görülmektedir. Bu durum, kaynaktan eşit uzaklıkta bulunan noktalarda kaynağın yapmış olduğu etkinin aynı olduğunu göstermektedir. Şekil 5.3'te ise soğuran sınır koşulları göz önüne alındığı durumda, sadece serbest yüzeyden (yeryüzü) yansıma olduğu diğer kenarlardan geri yansıma olmadığı görülmektedir.

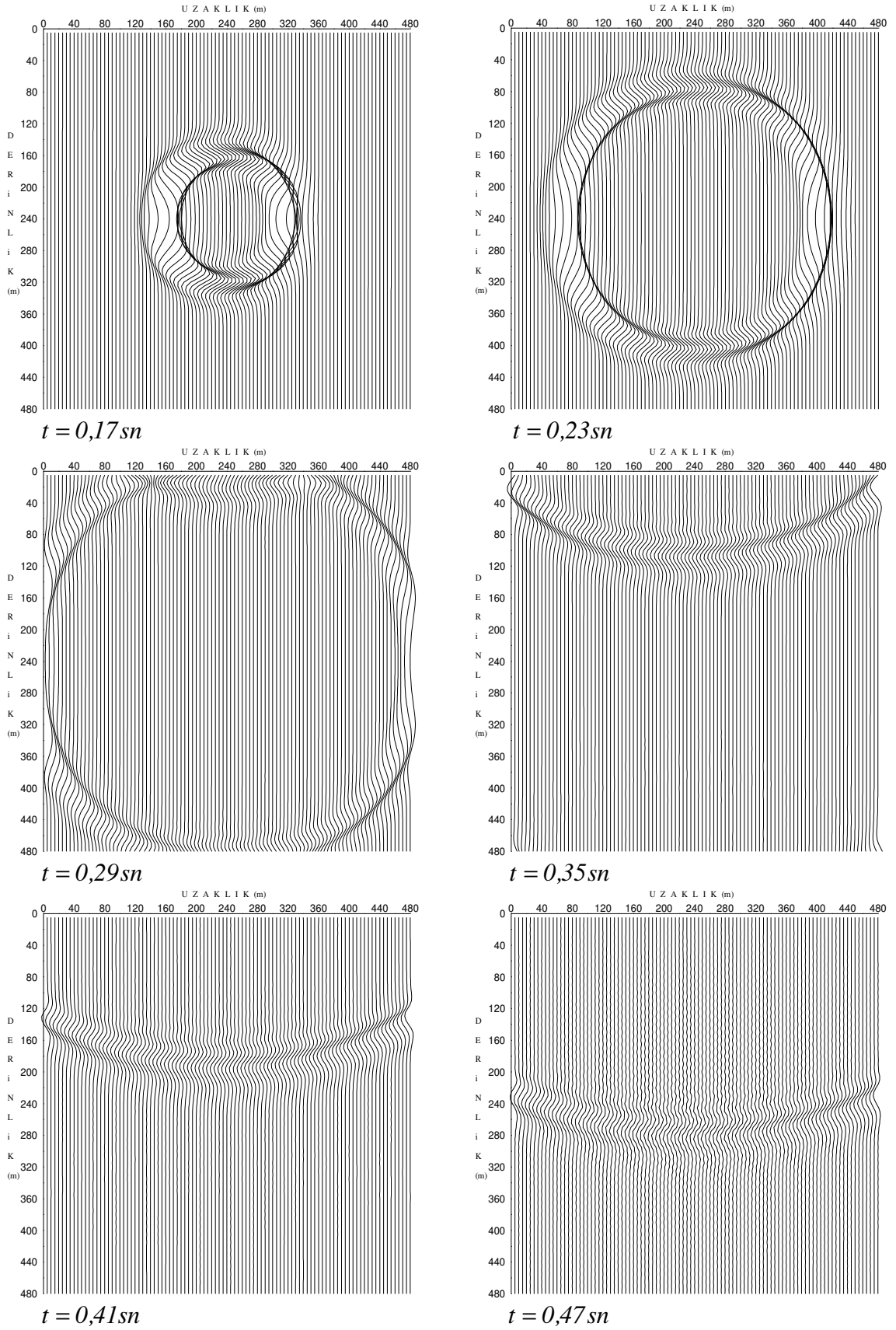
Şekil 5.4 ve Şekil 5.5'de alıcılar yeryüzüne yerleştirildiğinde, Dirichlet ve soğuran sınır şartları kullanılarak elde edilen sismogramlar görülmektedir. Kaynak $(240,240)$ noktasında olduğundan, kaynaktan çıkan dalgacık doğal olarak ilk önce en yakın alıcı tarafından kaydedilir. En yakın alıcı da $240 m$ uzaklıktaki jeofondur. Ayrıca ortamın hızı $1500 m/sn$ ve kaynağın en yakın alıcıya uzaklığı $240 m$ olduğuna göre, ilk ulaşan izin $240/1500=0.16 sn$ de kayıtçılara ulaşması beklenir. Şekil 5.4 ve Şekil 5.5'te elde edilen sismogramlarda ilk izin $0,16 sn$ 'de ve $240 m$ uzaklıktaki jeofon tarafından kaydedildiğini açık bir şekilde görülmektedir.



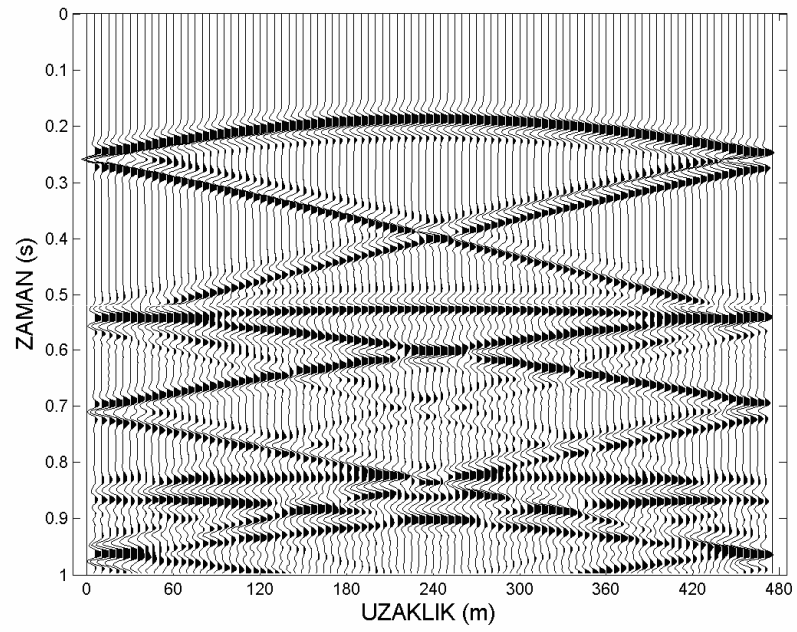
(Devamı arka sayfada)



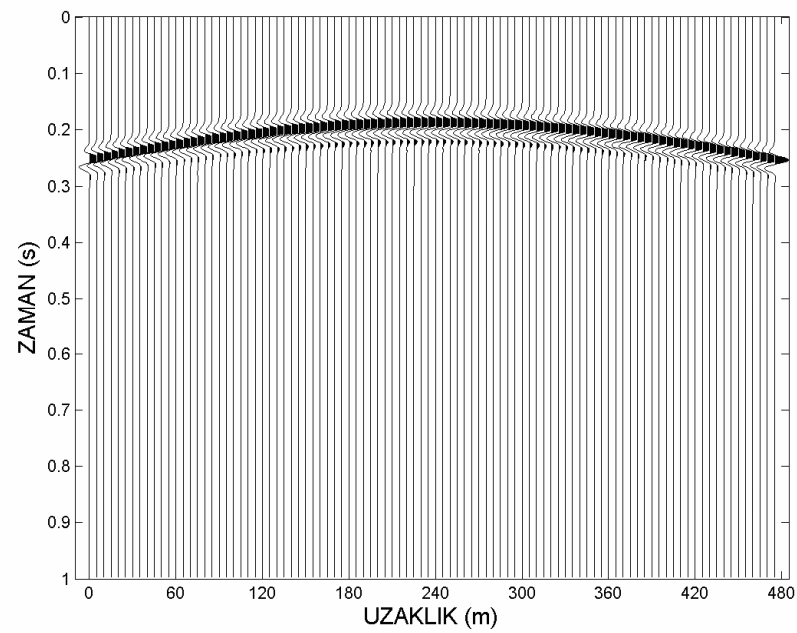
Şekil 5.2 Şekil 5.1 de verilen iki boyutlu homojen modelde Dirichlet sınır şartı kullanılarak elde edilen anlık enerji yayılımları



Şekil 5.3 Şekil 5.1 de verilen iki boyutlu homojen modelde soğuran sınır şartı kullanılarak elde edilen anlık enerji yayılımları



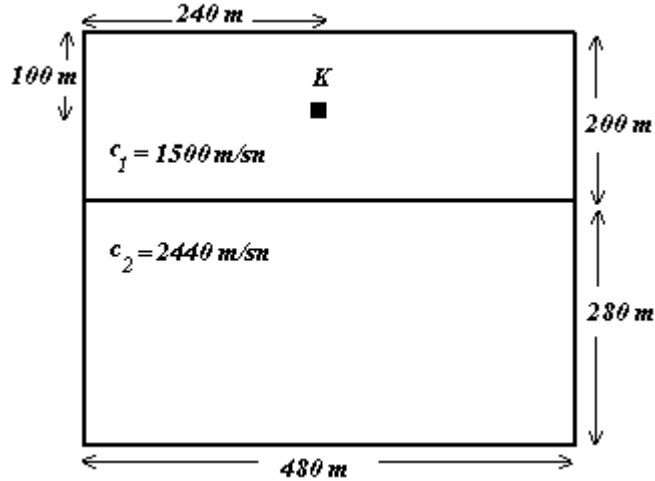
Şekil 5.4 Şekil 5.1 de verilen model için Dirichlet sınır koşulları kullanılarak SFM ile elde edilen sismogram



Şekil 5.5 Şekil 5.1 de verilen model için transparent sınır koşulları kullanılarak SFM ile elde edilen sismogram

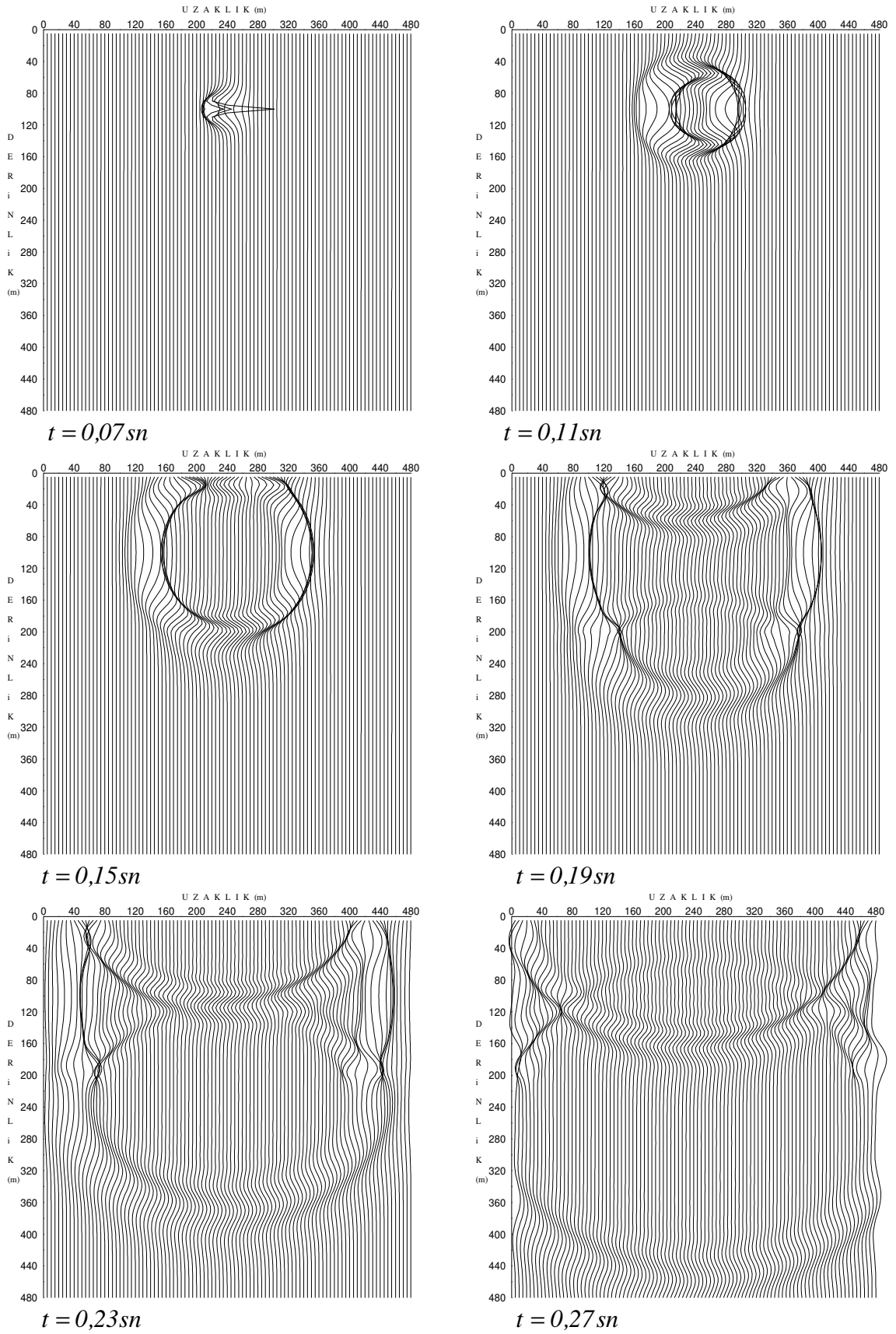
5.2 İki Tabakalı Ortamda Kırılan ve Yansıyan Dalgalar

Derinliği 480 m , uzunluğu 480 m olan iki tabakalı bir ortam için, birinci tabakanın hızı 1500 m/sn , ikinci tabakanın hızı ise 2440 m/sn , kaynağın merkez frekansı 30 Hz , zaman örnekleme aralığı $\Delta t = 0,00236\text{ sn}$, sonlu farklar için uzaysal örnekleme aralıkları $\Delta x = \Delta z = h = 5\text{ m}$ alınmıştır. Kaynak fonksiyonu 100 m derinliğe ve 240 m uzaklığa yerleştirilmiştir.



Şekil 5.6 İki boyutlu iki tabakalı yeraltı modeli

Şekil 5.6'da kaynaktan çıkan dalga cephesi zamanla ilerleyerek 200 m derinlikteki tabakaya gelecektir. Burada dalganın bir kısmı ara yüzden kırılarak alt tabakaya geçerken, bir kısmı da geri yansıyacaktır. Bu arada üst yüzey yeryüzü olduğundan üst yüzeyden de yansıma olacaktır. Sol, sağ ve alt yüzeylerde soğuran sınır şartları kullanıldığından, bu yüzeylerden yansıma gözlenmeyecektir. Bu beklenen etkiler Şekil 5.7'de çeşitli zamanlarda elde edilen anlık enerji yayılımlarında görülmektedir.



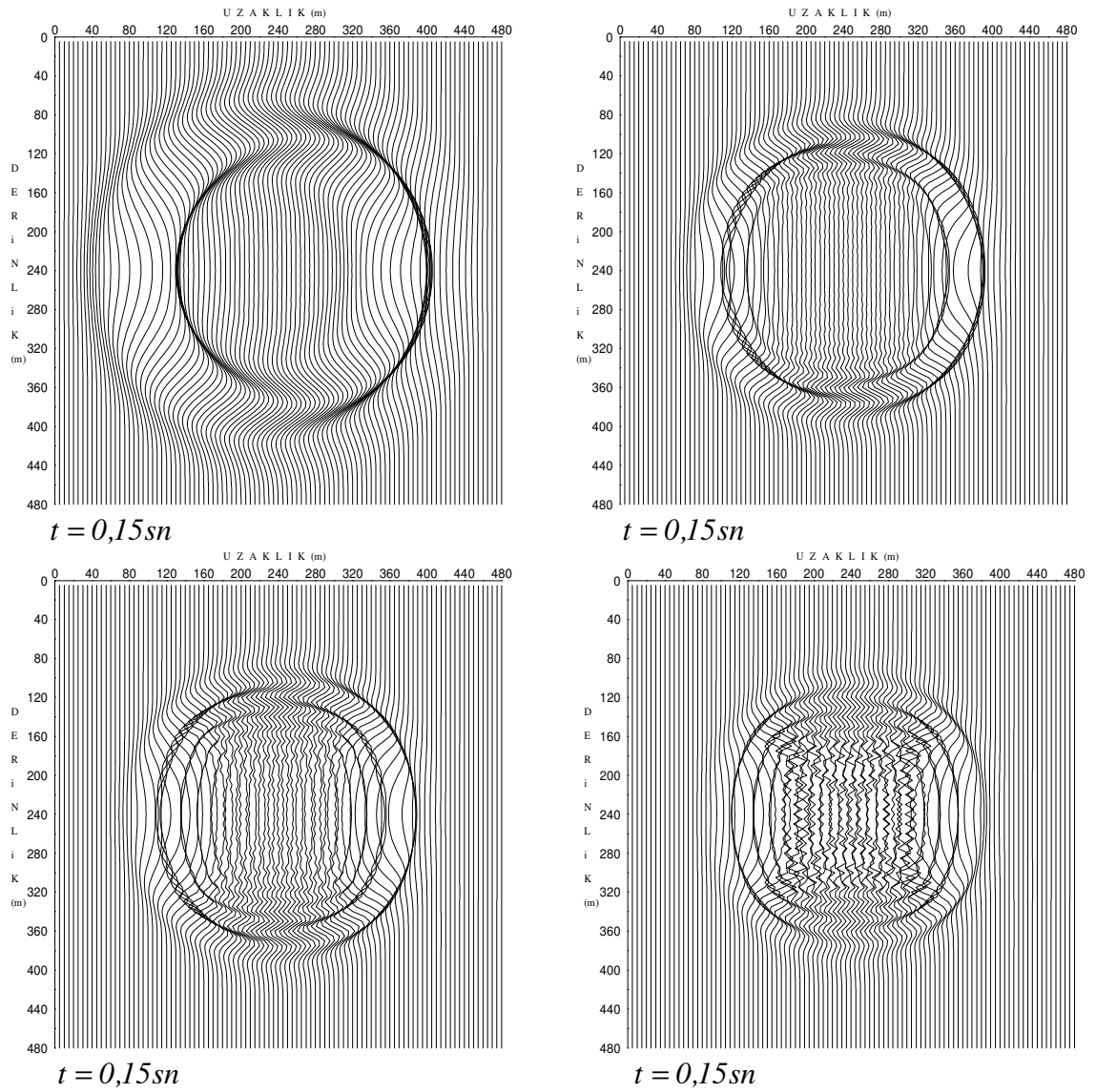
Şekil 5.7 Şekil 5.6'da verilen iki tabakalı yapı için çeşitli zamanlarda elde edilen anlık enerji yayılımları

5.3 Grid Dispersiyonu Etkisi

Şekil 5.1’de verilen model için adım aralığı $\Delta x = 5m$, ortam hızı $1500 m/sn$ olarak alındığında farklı frekanslar için grid dispersiyonu etkisi incelenmiş ve frekans arttıkça, grid dispersiyonunun arttığı görülmüştür. Şekil 5.8’de frekansın, grid dispersiyonu etkisi ve dalga biçimindeki bozulmalar görülmektedir. Grid dispersiyonunun uygun grid seçimi ile minimum yapılması amaçlanmalıdır. Bunun için

$$\Delta x \leq \frac{c}{10f_p}$$

kriterine bağlı kalmak gerekmektedir.



Şekil 5.8 Merkez frekansı 15, 40, 50, 75 Hz alınarak, aynı zaman adımında elde edilen anlık enerji yayılımları

Frekans

$15Hz$ alındığında $\Delta x \leq 10m$,

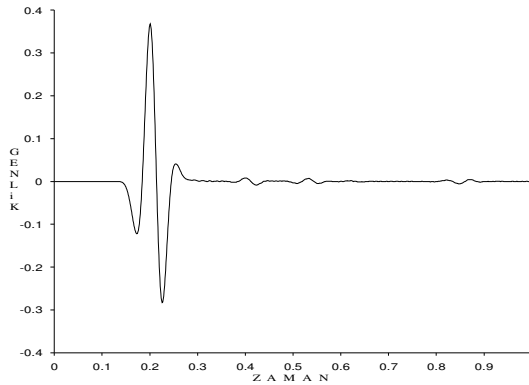
$40Hz$ alındığında $\Delta x \leq 3,75m$,

$50Hz$ alındığında $\Delta x \leq 3m$,

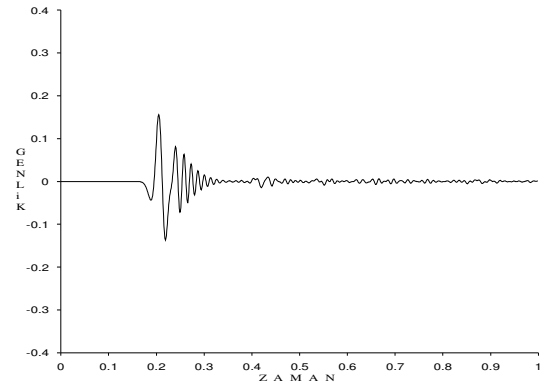
$70Hz$ alındığında yaklaşık olarak $\Delta x \leq 2,14m$ olmaktadır.

Aynı zaman adımında elde edilen snap-shotlarda, $f_p = 15Hz$ durumunda dalga cephesinin normal bir şekilde ilerlediği, $f_p = 40,50,70Hz$ alınması durumlarında da dalga şeklinde bozulmalar görülmektedir. Frekans arttıkça grid dispersiyonu kriterinden uzaklaşmakta ve dalga şeklinde bozulmalar daha da artmaktadır.

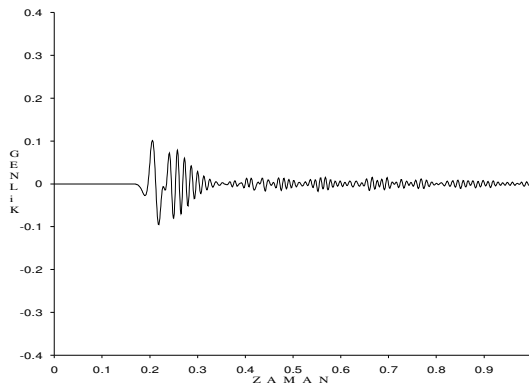
Şekil 5.9'da söz konusu frekanslar için $20m$ derinlik ve 240 metre uzaklıkta kaydedilen sismogramlar görülmektedir.



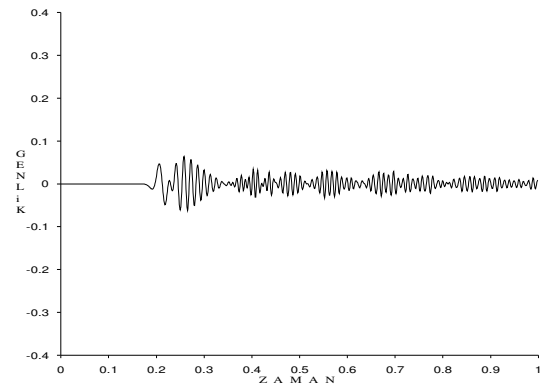
$f_p = 15Hz$



$f_p = 40Hz$

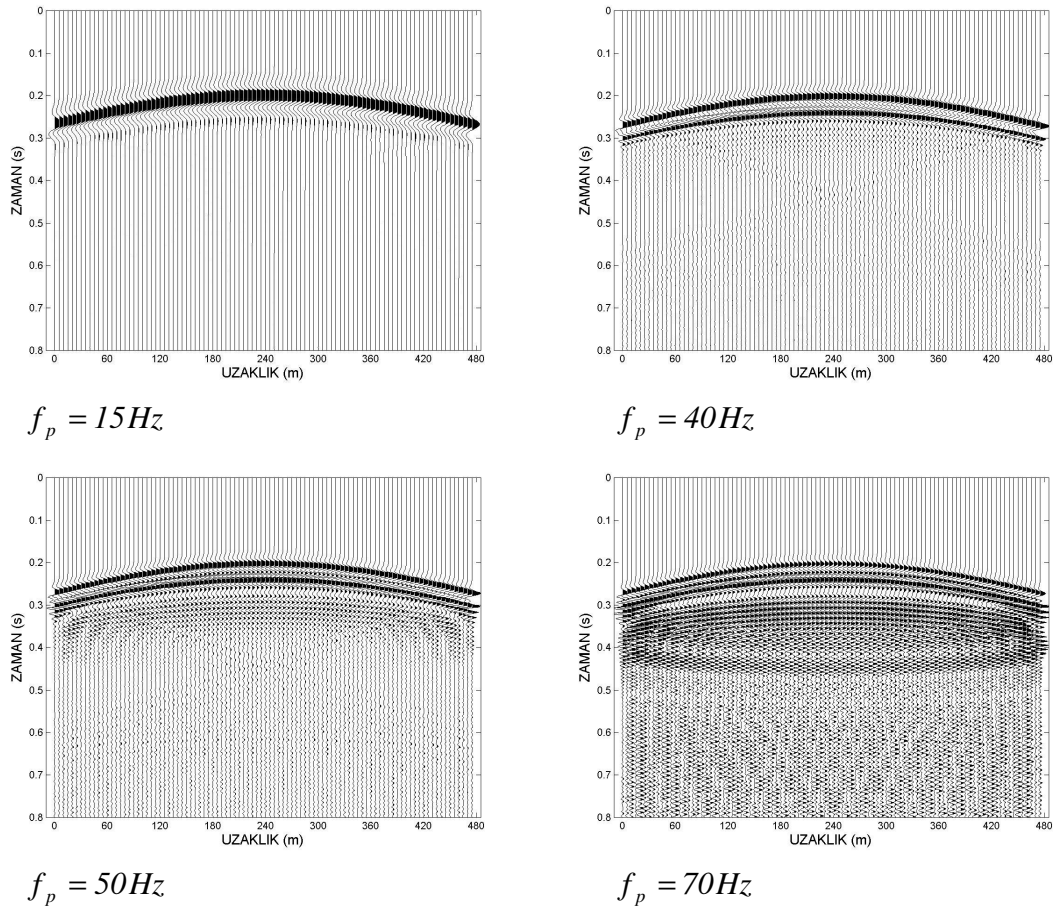


$f_p = 50Hz$



$f_p = 70Hz$

Şekil 5.9 Merkez frekansı $15, 40, 50, 75 Hz$ alınarak, $(20,240)$ noktasında elde edilen sismogramlar



Şekil 5.10 Merkez frekansı 15, 40, 50, 75 Hz alınarak, elde edilen sismogramlar ve grid dispersiyonu etkisi

Şekil 5.10’da çeşitli frekans değerleri için elde edilen yapay sismogramlar görülmektedir. $f_p = 15Hz$ iken yani grid dispersiyonu kriterine bağlı kalındığı durumda elde edilen sismogramda sadece bir tek dalga görülmektedir. Bu dalga alıcıya ulaşan ilk dalgadır. Soğuran sınır şartları kullanıldığı için başka dalga görülmemektedir. Frekansın $f_p = 40Hz$, $f_p = 50Hz$, $f_p = 70Hz$ alınması durumlarında grid dispersiyonu kriterinden uzaklaşmış ve elde edilen yapay sismogramlarda bozulmalar görülmüştür. Şayet Dirichlet sınır koşulları kullanılmış olsaydı ya da tabakalı bir model üzerinde çalışılmış olsaydı, ilk ulaşan izden sonraki izler net bir şekilde gözlenemeyecekti. Yani grid dispersiyonu arttıkça asıl görülmek istenen olaylar gözlenemeyecek. Şekil 5. 10’daki gibi ilk izden sonra kararmalar olacaktır. Yapılan iki ve üç boyutlu modellemelerde bu etki göz önünde bulundurulmuş, hesaplamalarla uygun frekans ve adım aralığı tespit edilmiştir. Böylece Şekil 5.10’da görülen etkilerden uzak sismogramlar elde edilmiştir.

5.4 İki Boyutlu Uygulamalar

İlk olarak Şekil 5.11’de görülen homojen bir ortam göz önünde bulundurulmuş, ortam hızı $c = 1500 \text{ m/sn}$, kaynağın pik frekansı 30 Hz , zaman örnekleme aralığı, $\Delta t = 0.00235 \text{ sn}$, uzaysal örnekleme aralıkları, $\Delta x = \Delta z = 5 \text{ m}$ olarak alınmıştır.

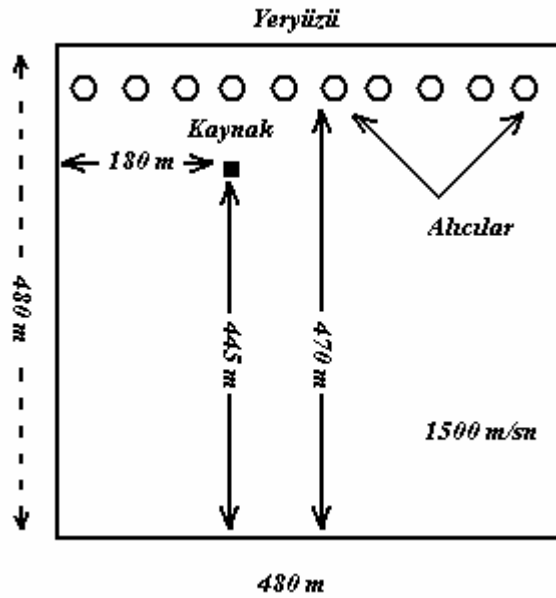
Kaynak, 35 m derinli ve 180 m uzaklığa, jeofonlar üst yüzeyin 10 m altına yerleştirilmiştir.

İki boyutlu dalga denkleminin, sonlu farklar kararlılık koşulu

$$\lambda = \frac{c \cdot \Delta t}{\Delta x} \leq 0,707 \text{ olmalıdır. Bu modelde kararlılık şartı, } \lambda = 0,705 \text{ olur.}$$

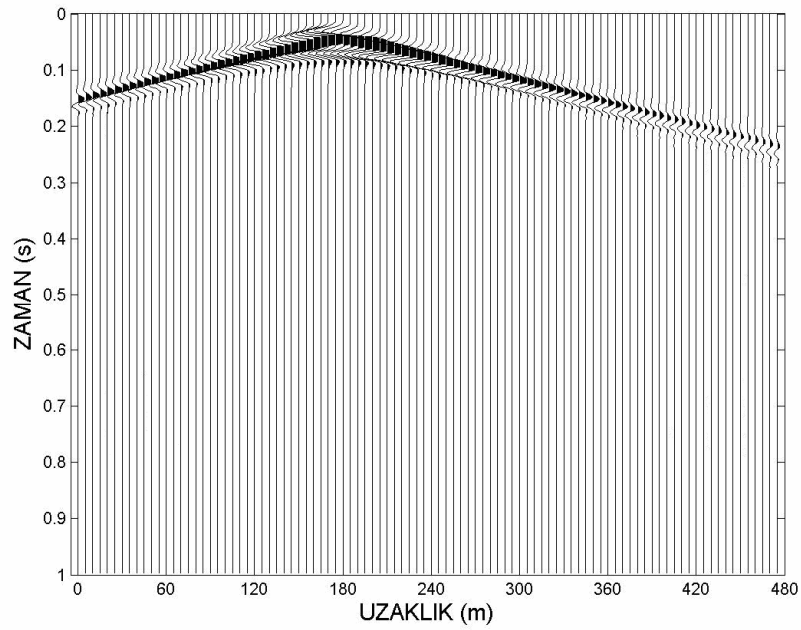
Grid dispersiyonundan kurtulmak için sonlu farklarda $\Delta x \leq \frac{c}{10 \cdot f_p}$ olması

gerekmektedir. Bir başka ifadeyle dalga boyunun, uzaysal örnekleme aralığına oranı 10 veya daha büyük olmalıdır. Bu modelde hız $c = 1500 \text{ m/sn}$, göz önüne alınarak yaklaşık, 50 m lik bir dalga boyu elde edilir. Buradan $N / \Delta x$ oranı 10 olacaktır.

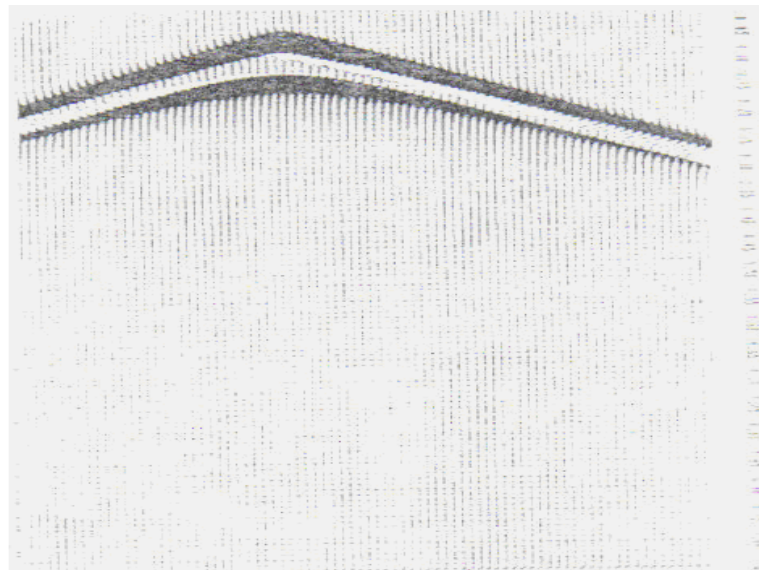


Şekil 5.11 İki boyutlu homojen modelde kaynağın ve alıcıların yeri

Şekil 5.11’de verilen iki boyutlu homojen model için soğuran sınır koşulları kullanılarak, sonlu farklar yöntemi ile elde edilen yapay sismogram Şekil 5.12’de, aynı yöntemle Reynolds’ın (1978) elde etmiş olduğu yapay sismogram Şekil 5.13’de ve Sarı’nın (2000) SIEM ile elde etmiş olduğu sismogram 5.14’de görülmektedir.

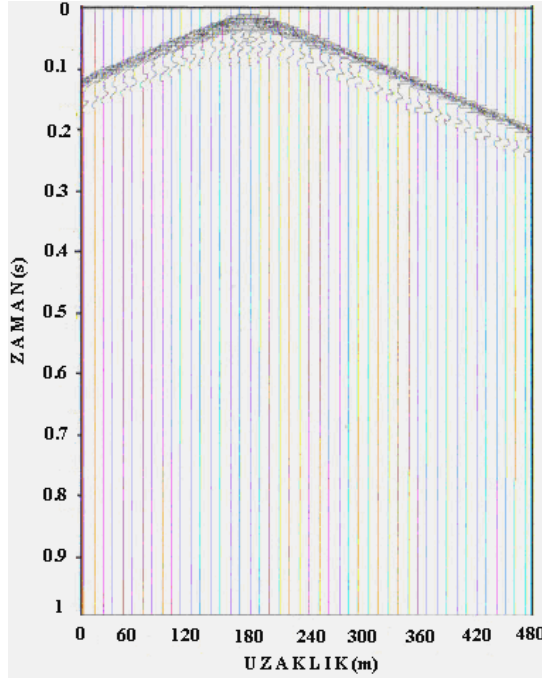


Şekil 5.12 Şekil 5.11’de verilen model için SFM ile ve soğuran sınır şartı kullanılarak elde edilen yapay sismogram



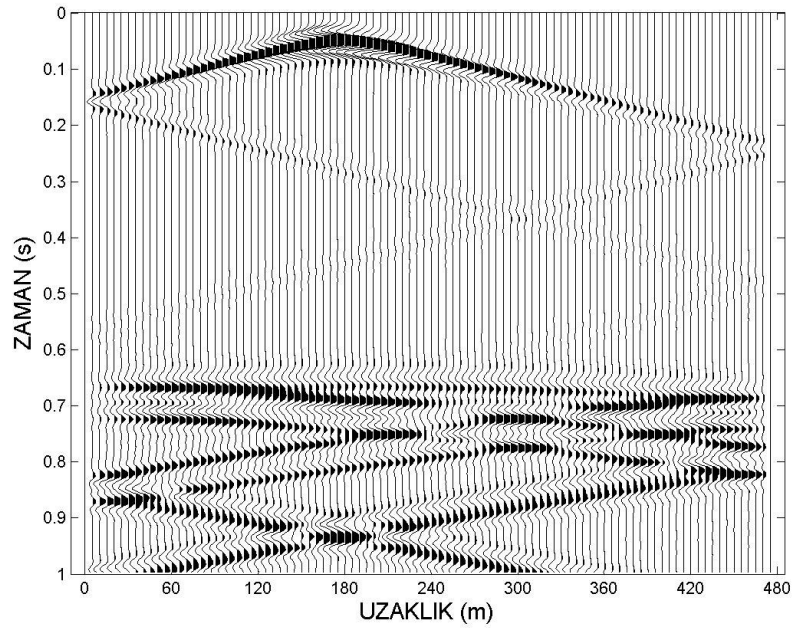
Şekil 5.13 Şekil 5.11’de verilen model için Reynolds’ın SFM ile soğuran sınır şartı kullanarak elde ettiği yapay sismogram

Şekil 5.12 ve 5.13’de soğuran sınır koşulları kullanılarak sonlu farklar yöntemi ile elde edilen sismogramlar incelendiğinde, alıcıya ulaşan ilk dalga yaklaşık olarak $0,017$ sn de görülmektedir. Daha sonra $0,03$ sn de üst yüzeyden yansıyor kaynağa ulaşan ikinci bir dalga gözlenmektedir. Diğer sınırlar soğuran olduğundan, başka yansıma olmamaktadır. Benzer olaylar Şekil 5.14’de görülmektedir.

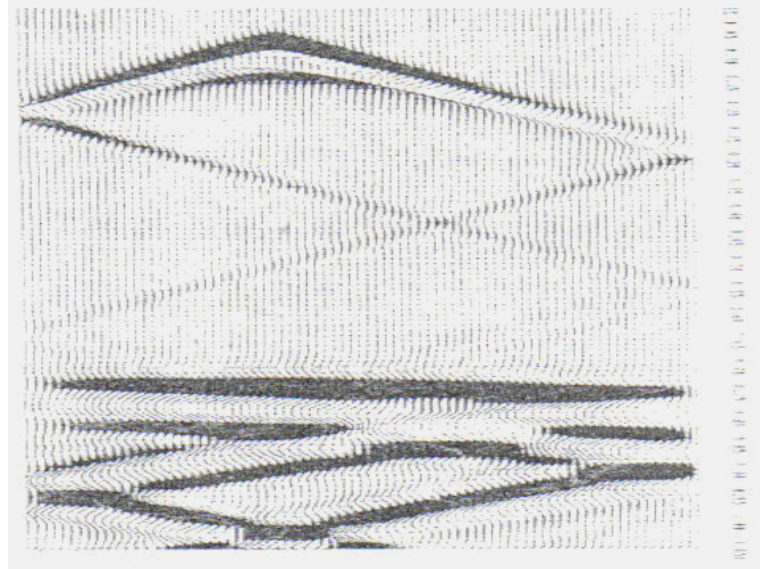


Şekil 5.14 Şekil 5.11’de verilen model için Sarı’nın SIEM ile elde ettiği yapay sismogram

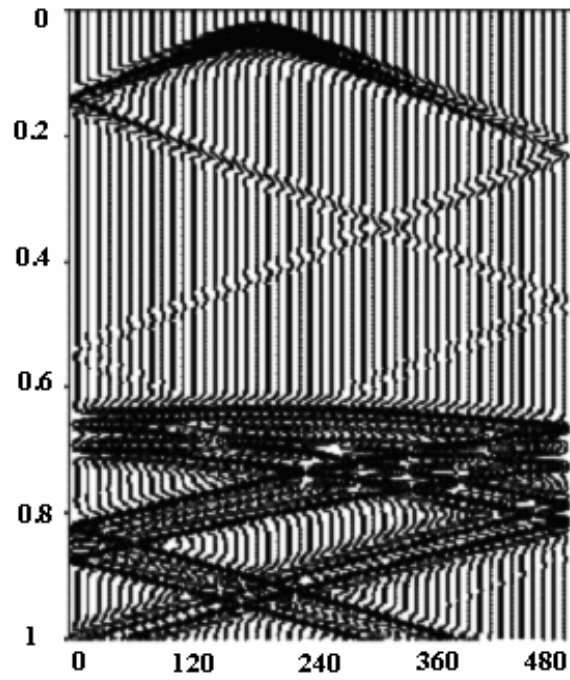
Şekil 5.11’de verilen iki boyutlu homojen model için Dirichlet sınır koşulları kullanılarak SFM ile elde edilen sismogram Şekil 5.15’de, Reynolds’ın (1978) SFM ile elde etmiş olduğu sismogram Şekil 5.16’da verilmiştir. Ayrıca Demir’in (1998) SFM ile kutu kaynak kullanarak elde etmiş olduğu sismogram Şekil 5.17’de ve Sarı’nın (2000) SIEM ile elde etmiş olduğu sismogram da Şekil 5.18’de görülmektedir.



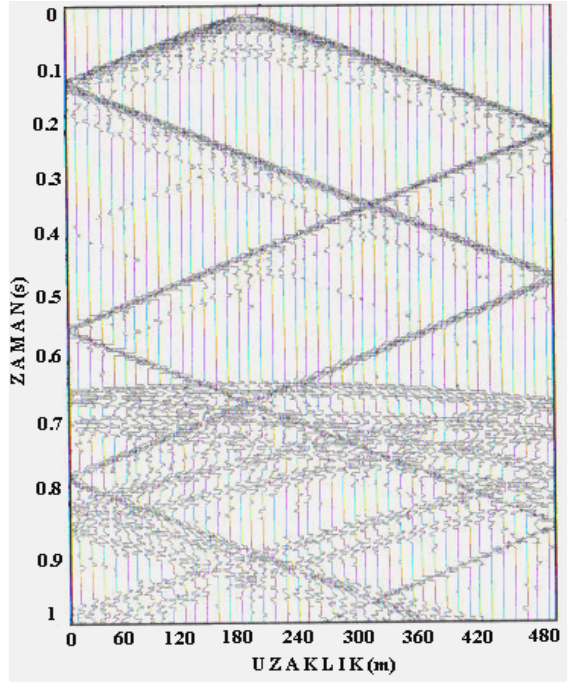
Şekil 5.15 Şekil 5.11’de verilen model için SFM ile Dirichlet sınır şartı kullanılarak elde edilen yapay sismogram



Şekil 5.16 Şekil 5.11’de verilen model için Reynolds’ın SFM ile Dirichlet sınır şartı kullanarak elde ettiği yapay sismogram



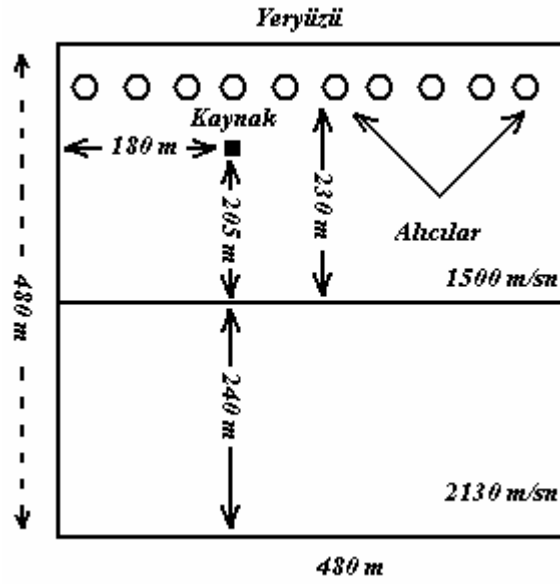
Şekil 5.17 Şekil 5.11’de verilen model için Demir’in SFM ile kutu kaynak ve Dirichlet sınır şartı kullanarak elde ettiği yapay sismogram



Şekil 5.18 Şekil 5.11’de verilen model için Sarı’nın SIEM ile Dirichlet sınır şartı kullanarak elde ettiği yapay sismogram

Şekil 5.15, Şekil 5.16, Şekil 5.17 ve Şekil 5.18’deki Dirichlet sınır koşulları kullanılarak elde edilen sismogramlar incelendiğinde alıcıya ilk ulaşan dalga yaklaşık olarak $0,017$ saniyede görülmektedir. Daha sonra görülen dalgalar ise modelin sınırlarından yansımalar sonucu oluşan dalgalardır. Sismogram grafiğinde çapraz şekilde görülen dalgalar sağ ve sol sınırlardan yansımalar sonucu oluşan dalgalardır. $0,6$ sn’de görülen dalgalar da alt sınırdan yansıyor alıcıya ulaşan dalgalardır.

Aynı geometri üzerinde, kaynak ve alıcılar aynı noktada olduğunda farklı yöntemlerle elde edilen yapay sismogramların birbiriyle uyumlu olması beklenir. Sonlu farklar yöntemi ile elde edilen yapay sismogramların Reynolds’ın (1978) elde etmiş olduğu yapay sismogramlarla benzer olduğu görülmektedir. Ayrıca Şekil 5.17’de görülen sismogram farklı kaynak fonksiyonu ile Şekil 5.18’deki sismogram farklı bir yöntemle elde edilmiş olmasına karşılık, SFM ile elde edilen sonuçlarla kalitatif olarak uyumlu olduğu görülmektedir.



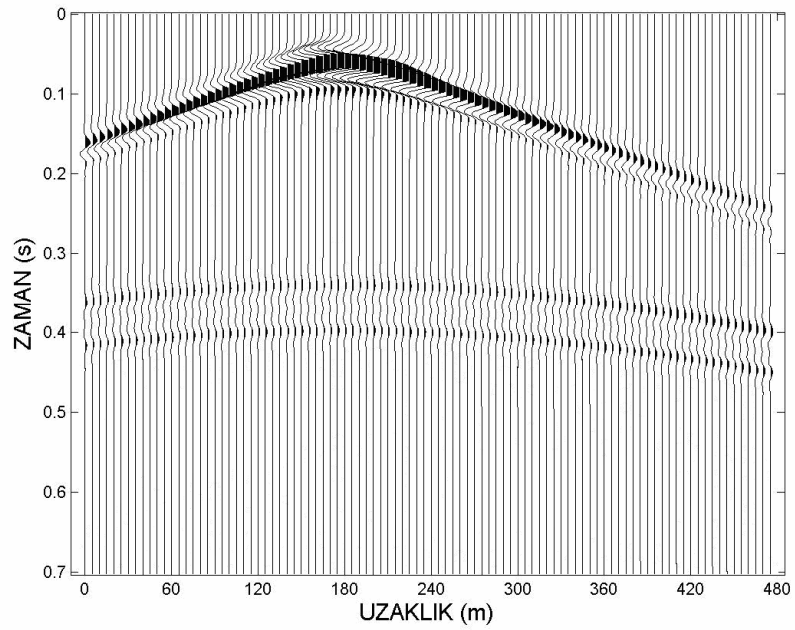
Şekil 5.19 İki boyutlu iki tabakalı modelde kaynağın ve alıcıların yeri

İkinci model olarak iki tabakalı bir ortam ele alınmış, birinci tabakanın hızı 1500 m/sn , ikinci ortamın hızı 2130 m/sn , kaynak fonksiyonunun merkez frekansı 30 Hz , zaman örnekleme aralığı $\Delta t = 0,00165 \text{ sn}$, uzaysal örnekleme aralıkları $\Delta x = \Delta z = 5 \text{ m}$ olarak alınmıştır (Şekil 5.19). Kaynak, 35 m derinli ve 180 m uzaklığa, jeofonlar üst yüzeyin 10 m altına yerleştirilmiştir.

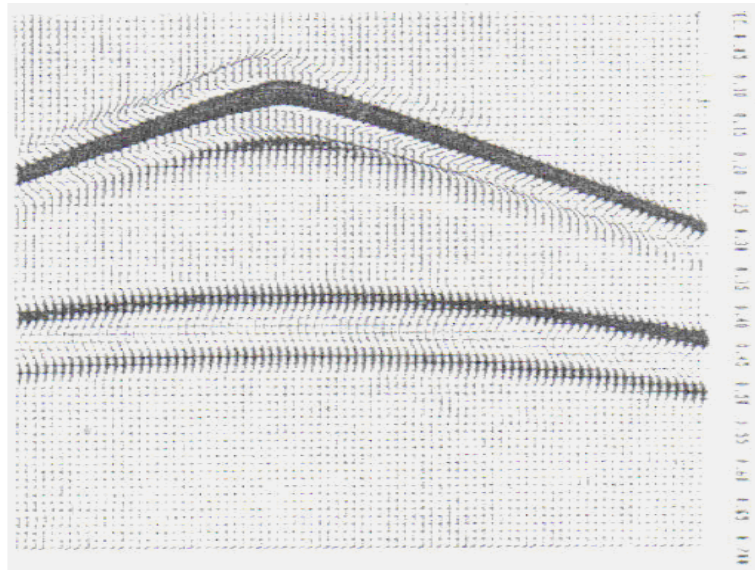
Tabakalı ortamlarda kararlılık koşulunu bulmada, modeldeki en büyük hız ve grid dispersiyonu etkisini göstermede modeldeki en küçük hız göz önünde bulundurulur. Ele alınan modelde en büyük hız değeri olan 2130 m/sn değeri göz önüne alınarak sonlu farklar için $\lambda = 0,704$ değeri elde edilmiştir.

Grid dispersiyonu etkisi için modeldeki en küçük hız değeri olan 1500 m/sn ile yaklaşık 50 m 'lik bir dalga boyu elde edilir. Buradan $N / \Delta x$ oranı 10 olmaktadır.

Şekil 5.19'da verilen iki boyutlu ve iki tabakalı model için sonlu farklarla, soğuran sınır şartları kullanılarak elde edilen yapay sismogram Şekil 5.20'de verilmiştir. Aynı model için Reynolds'ın (1978) elde etmiş olduğu yapay sismogram Şekil 5.21'de görülmektedir. Şekil 5.22'de de Sarı'nın (2000) sınır elemanları yöntemi ile elde ettiği sonuç görülmektedir.

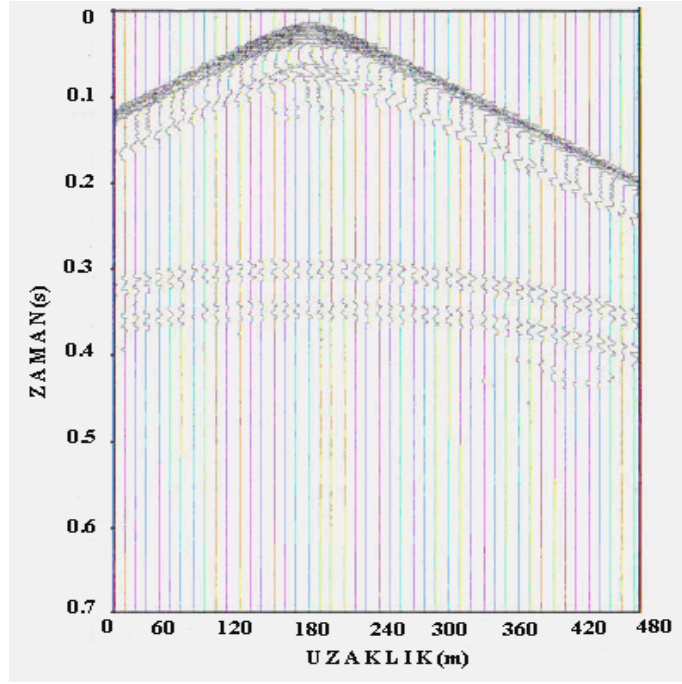


Şekil 5.20 Şekil 5.18’de verilen model için SFM ile soğuran sınır şartı kullanılarak elde edilen yapay sismogram



Şekil 5.21 Şekil 5.18’de verilen iki boyutlu iki tabakalı model için Reynolds’ın SFM ile soğuran sınır şartı kullanarak elde ettiği yapay sismogram

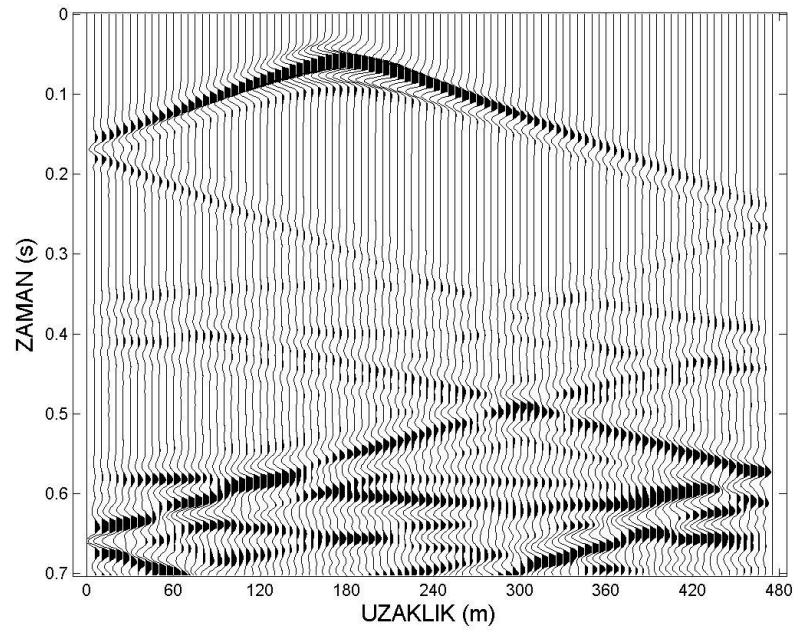
Şekil 5.20’deki yapay sismogramda yaklaşık $0,017$ sn’de alıcıya ulaşan ilk iz görülmektedir. $0,3$ sn’den sonra görülen dalgalar da serbest yüzey ve ara yüzeylerden, yansılardan meydana gelen dalgalardır. Bu yansımalar, Reynolds’ın (1978) ve Sarı’nın (2000) elde etmiş olduğu yapay sismogramlarda da aynen görülmektedir.



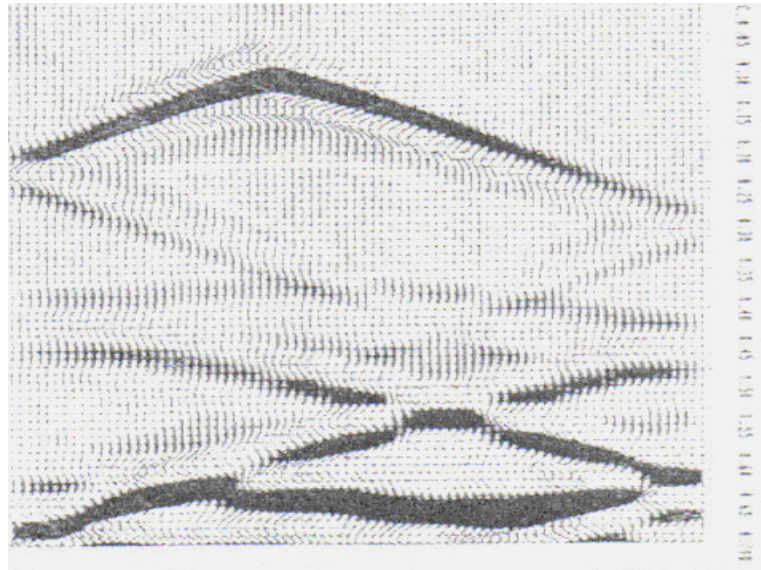
Şekil 5.22 Şekil 5.18’de verilen model için Sarı’nın SIEM ile elde ettiği yapay sismogram

Şekil 5.19’da verilen iki boyutlu ve iki tabakalı model için sonlu farklarla, Dirichlet sınır şartları kullanılarak elde edilen yapay sismogram Şekil 5.23’de verilmiştir. Aynı model için Reynolds’ın (1978) elde etmiş olduğu yapay sismogram Şekil 5.24’de görülmektedir.

Şekil 5.23’deki yapay sismogramda yaklaşık $0,017$ sn’de alıcıya ulaşan ilk iz görülmektedir. $0,3$ sn’den sonra görülen dalgalar da serbest yüzey ve ara yüzeyden, yansımalar sonucu meydana gelen dalgalardır. Sismogram grafiğinde çapraz şekilde görülen dalgalar sağ ve sol sınırlardan yansımalar sonucu oluşan dalgalardır. $0,6$ sn de görülen dalgalar da alt sınırdan yansıyor alıcıya ulaşan dalgalardır. Bu yansımalar, Reynolds’ın (1978) elde etmiş olduğu yapay sismogramlarda da aynen görülmektedir.



Şekil 5.23 Şekil 5.19’da verilen model için Dirichlet sınır şartı kullanılarak elde edilen yapay sismogram

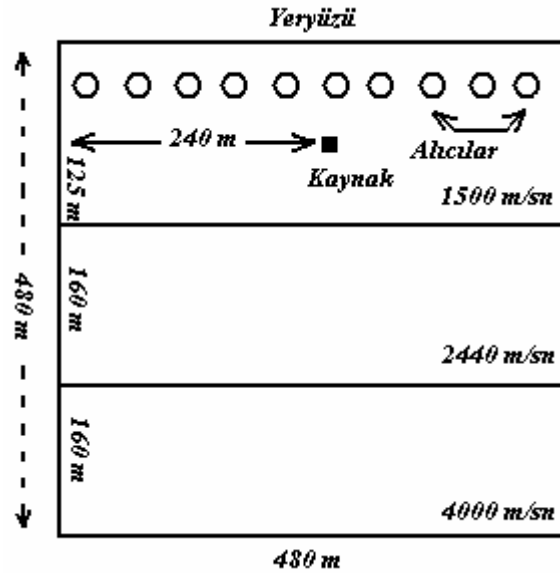


Şekil 5.24 Şekil 5.19’da verilen model için Reynolds’ın SFM ile Dirichlet sınır şartı kullanarak elde ettiği yapay sismogram

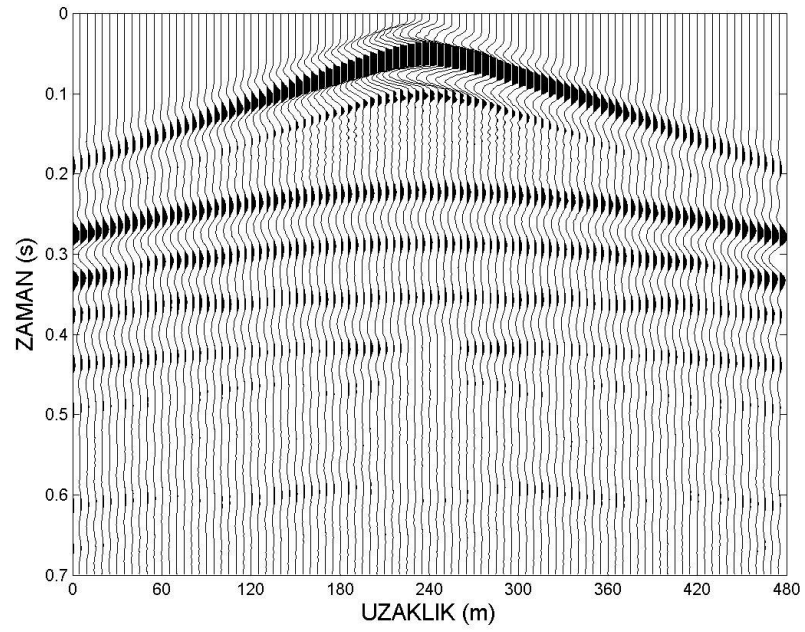
İki boyutlu modellere son örnek olarak Şekil 5.25’de görülen üç tabakalı model göz önünde bulundurulmuştur. Bu modelde birinci tabakanın hızı 1500 m/sn , ikinci tabakanın hızı 2440 m/sn , üçüncü tabakanın hızı 4000 m/sn , kaynak fonksiyonunun merkez frekansı 20 Hz , zaman örnekleme aralığı $\Delta t = 0,00088 \text{ sn}$ ve uzaysal örnekleme aralığı $\Delta x = \Delta z = 5 \text{ m}$ olarak alınmıştır. Kaynak fonksiyonu 35 m derinlik ve 240 m uzaklığa, jeofonlar üst yüzeyin 10 m altına yerleştirilmiştir.

Üç tabakalı modelde en büyük hız değeri 4000 m/sn , değeri ele alınarak sonlu farklar için $\lambda = 0,704$.

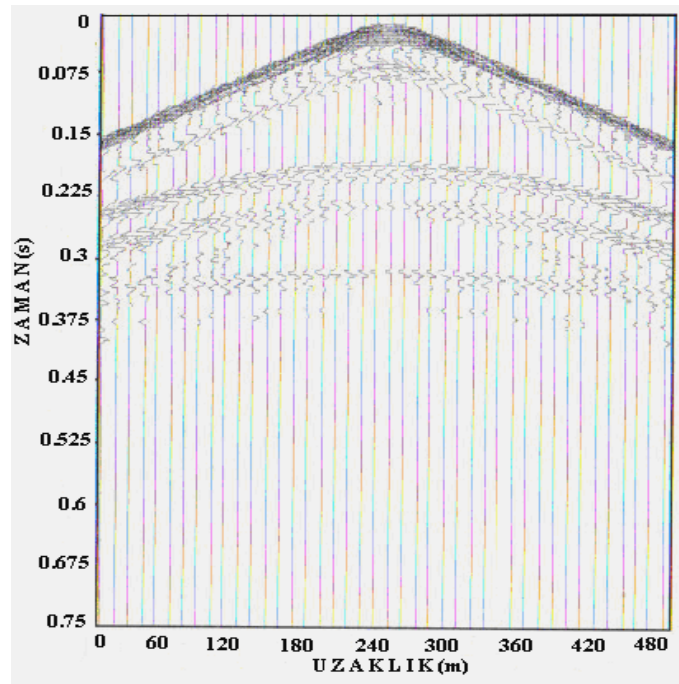
Grid dispersiyonu etkisi için de en küçük hız değeri 1500 m/sn ile 50 m lik dalga boyu elde edilir. $N / \Delta x$ oranı 10 olarak bulunur.



Şekil 5.25 İki boyutlu üç tabakalı modelde kaynağın ve alıcıların yeri



Şekil 5.26 Şekil 5.25’de verilen model için SFM ile Dirichlet sınır şartları kullanılarak elde edilen yapay sismogram



Şekil 5.27 Şekil 5.25’de verilen model için Sarı’nın SIEM ile elde ettiği yapay sismogram

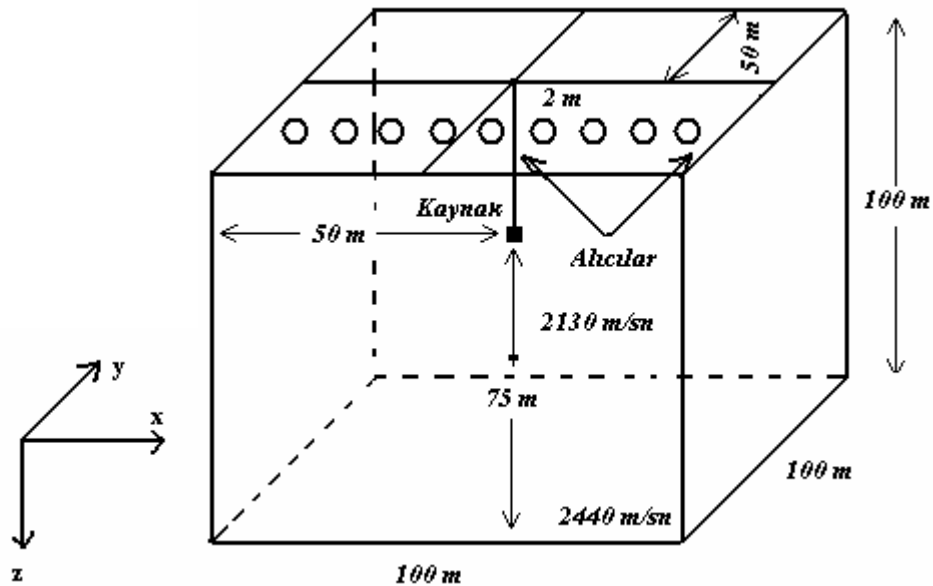
5.5 Üç Boyutlu Uygulamalar

İlk olarak Şekil 5.28’de görülen üç boyutlu homojen model göz önünde bulundurulmuş, ortam hızı $c = 2130 \text{ m/sn}$, kaynağın pik frekansı 30Hz , zaman örnekleme aralığı, $\Delta t = 0.0005\text{sn}$, uzaysal örnekleme aralıkları, $\Delta x = \Delta y = \Delta z = 2\text{m}$ olarak alınmıştır. Kaynak 25 m derinliğe ve kenarlara 50 m uzaklığa yerleştirilmiş, jeofonlar serbest yüzeyin 2 m altına yerleştirilmiştir. İki boyutlu modellemelerde 96×96 grid ile hesaplama yapılırken, üç boyutlu modellerde $50 \times 50 \times 50$ grid ile hesaplama yapılmıştır. Bu ise çözüm için iki boyutlu modellemelere göre üç boyutlu modellemelerde daha çok zaman ve bellek harcanacağını gösterir.

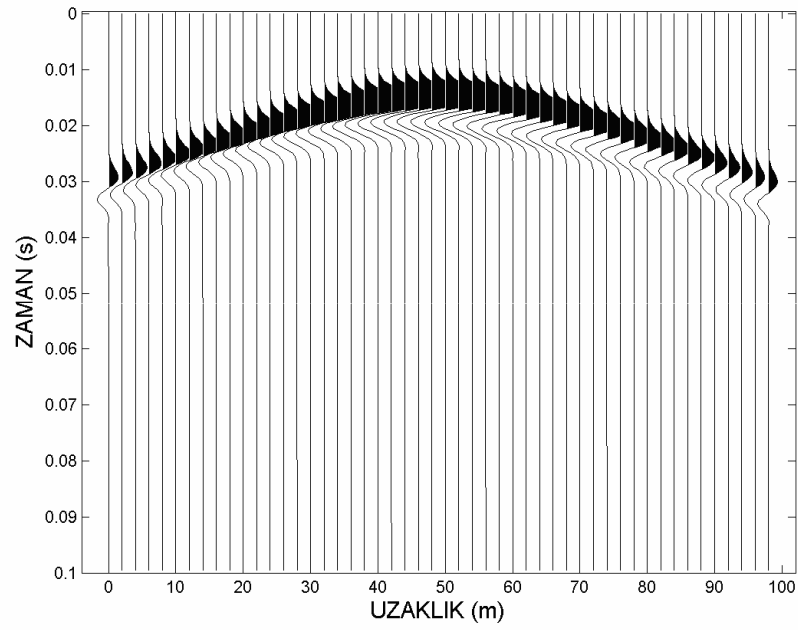
Üç boyutlu dalga denkleminin, sonlu farklar kararlılık koşulu

$$\lambda = \frac{c \cdot \Delta t}{\Delta x} \leq 0,577 \text{ olmalıdır. Bu modelde } \lambda = 0,5325.$$

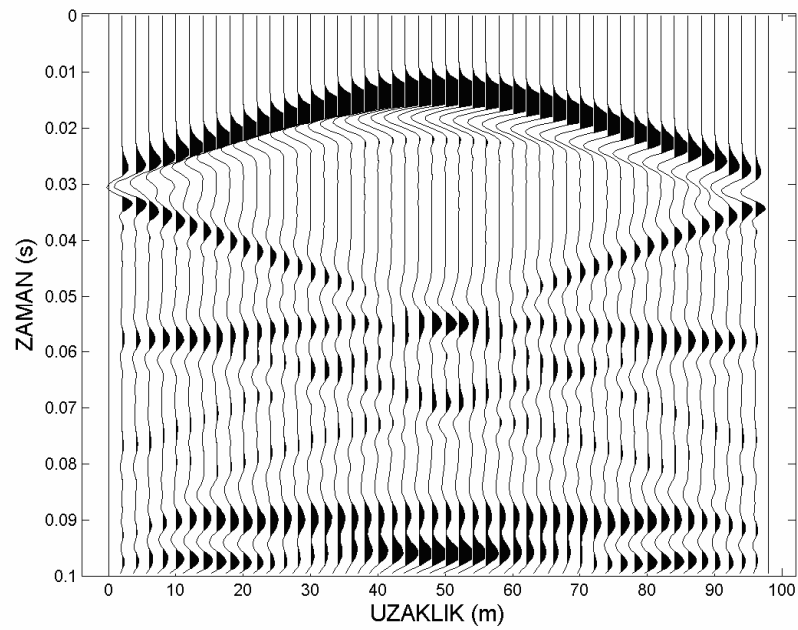
İki boyutlu modelleme için verilen grid dispersiyonu sınırları üç boyutlu modelleme için de geçerlidir. Yani $N/\Delta x$ oranı 10 veya daha büyük olmalıdır. Bu modelde hız $c = 2130 \text{ m/sn}$, göz önüne alınarak, 71 m lik bir dalga boyu elde edilir. Buradan $N/\Delta x$ oranı yaklaşık olarak 36 olacaktır. Şekil 5.28’deki modelden elde edilen sismogramlar Şekil 5.29, Şekil 5.30 ve Şekil 5.31’de verilmiştir.



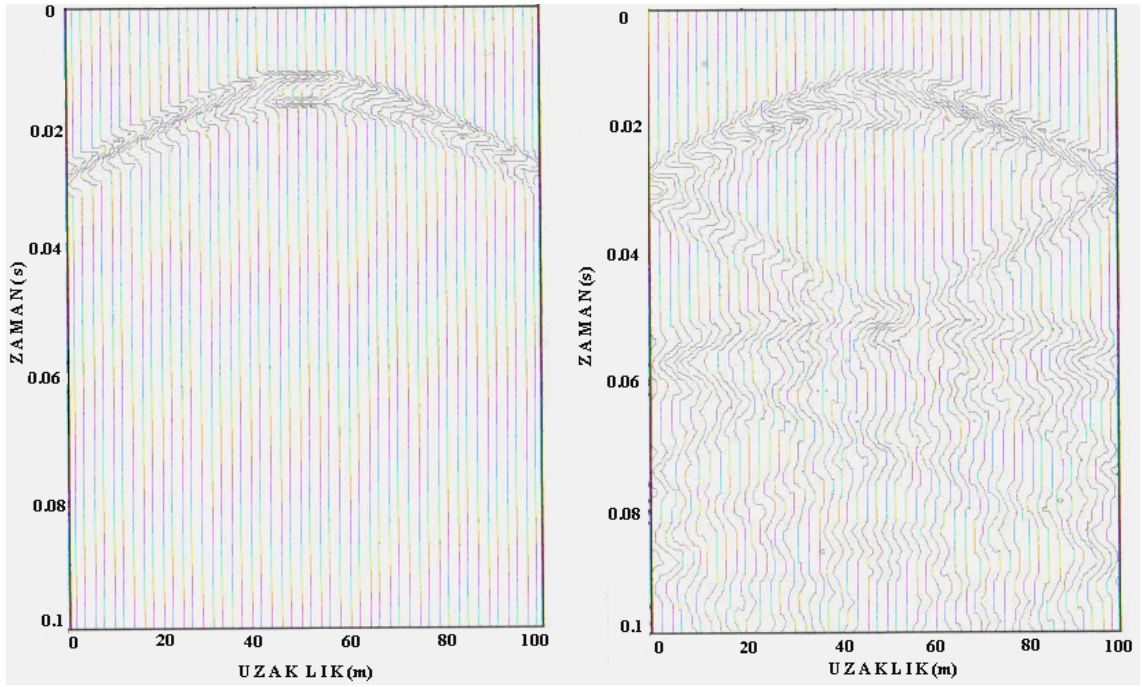
Şekil 5.28 Üç boyutlu homojen modelde kaynağın ve alıcıların yeri



Şekil 5.29 Şekil 5.28'de verilen model için SFM ile soğuran sınır şartı kullanılarak elde edilen yapay sismogram



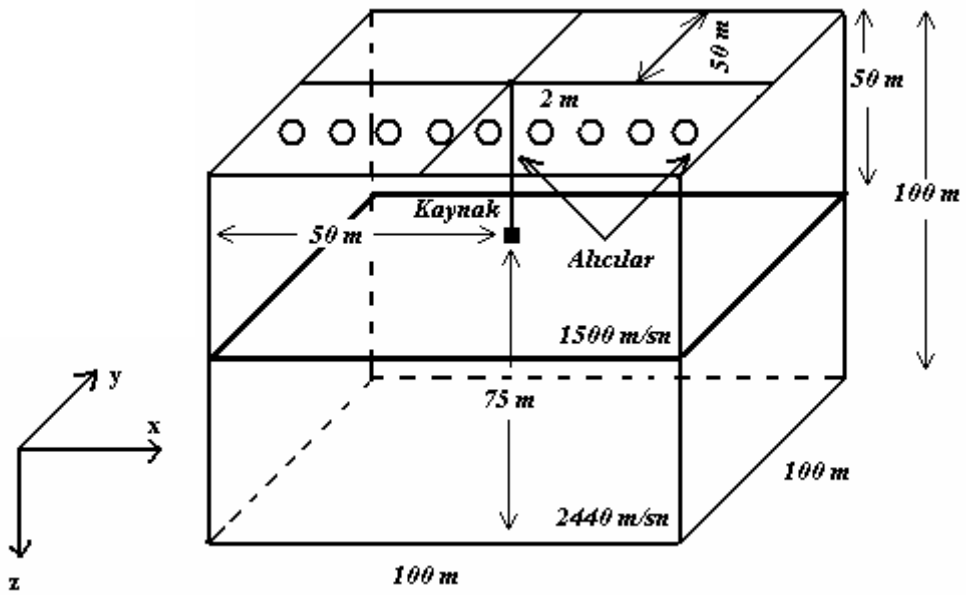
Şekil 5.30 Şekil 5.28'de verilen model için SFM ile Dirichlet sınır şartı kullanılarak, elde edilen yapay sismogram



Şekil 5.31 Şekil 5.28’de verilen model için Sarı’nın SIEM ile elde ettiği yapay sismogramlar

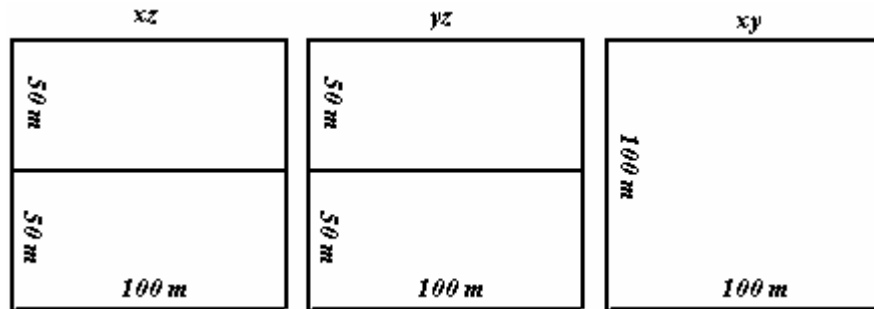
Şekil 5.29’da soğuran sınır koşulları kullanılarak SFM ile elde edilen sismogram görülmektedir. Bu sismogram incelendiğinde, alıcıya ulaşan ilk dalga yaklaşık olarak $0,011 sn$ ’de görülmektedir. Daha sonra $0,019 sn$ ’de üst yüzeyden yansiyıp kaynağa ulaşan ikinci bir dalga görülmektedir. Diğer sınırlar soğuran olduğundan, başka yansıma olmamaktadır. Şekil 5.30’da ise Dirichlet sınır koşulları kullanılarak elde edilen sismogram görülmektedir. Bu sismogramda da alıcıya ilk dalga $0,011 sn$ ’de ulaşmaktadır. Daha sonra görülen dalgalar ise modelin sınırlarından yansımalar sonucu oluşan dalgalardır. Sismogram grafiğinde çapraz şekilde görülen dalgalar sağ ve sol sınırlardan yansımalar sonucu oluşan dalgalardır. Bunlar da $0,08 sn$ ’de alıcıya ulaşmaktadır. $0,6 sn$ de görülen dalgalar da alt sınırdan yansiyıp alıcıya ulaşan dalgalardır. Bu dalganın ilk ulaşan dalgaya göre daha zayıf olduğu görülmektedir. Sarı’nın (2000) SIEM ile elde etmiş olduğu yapay sismogramlar Şekil 5.31’de verilmiştir. Bu sismogramlar incelendiğinde, SFM ile elde edilen sismogramlarla kalitatif olarak çok benzer olduğu görülmektedir.

Son olarak Şekil 5.32’de verilen üç boyutlu ve iki tabakalı model üzerinde çalışılmış, birinci tabakanın hızı 1500 m/sn , ikinci ortamın hızı 2440 m/sn , kaynak fonksiyonunun merkez frekansı 30Hz , zaman örnekleme aralığı $\Delta t = 0,00025\text{sn}$, uzaysal örnekleme aralıkları $\Delta x = \Delta y = \Delta z = 2\text{m}$ olarak alınmıştır. Kaynak, 25 m derinlik ve kenarlara 50 m uzaklığa yerleştirilmiştir. Kararlılık ve grid dispersiyonu kriterleri, önceki örneklerde olduğu gibi hesaplanmış ve belirtilen koşullara bağlı kalmıştır.

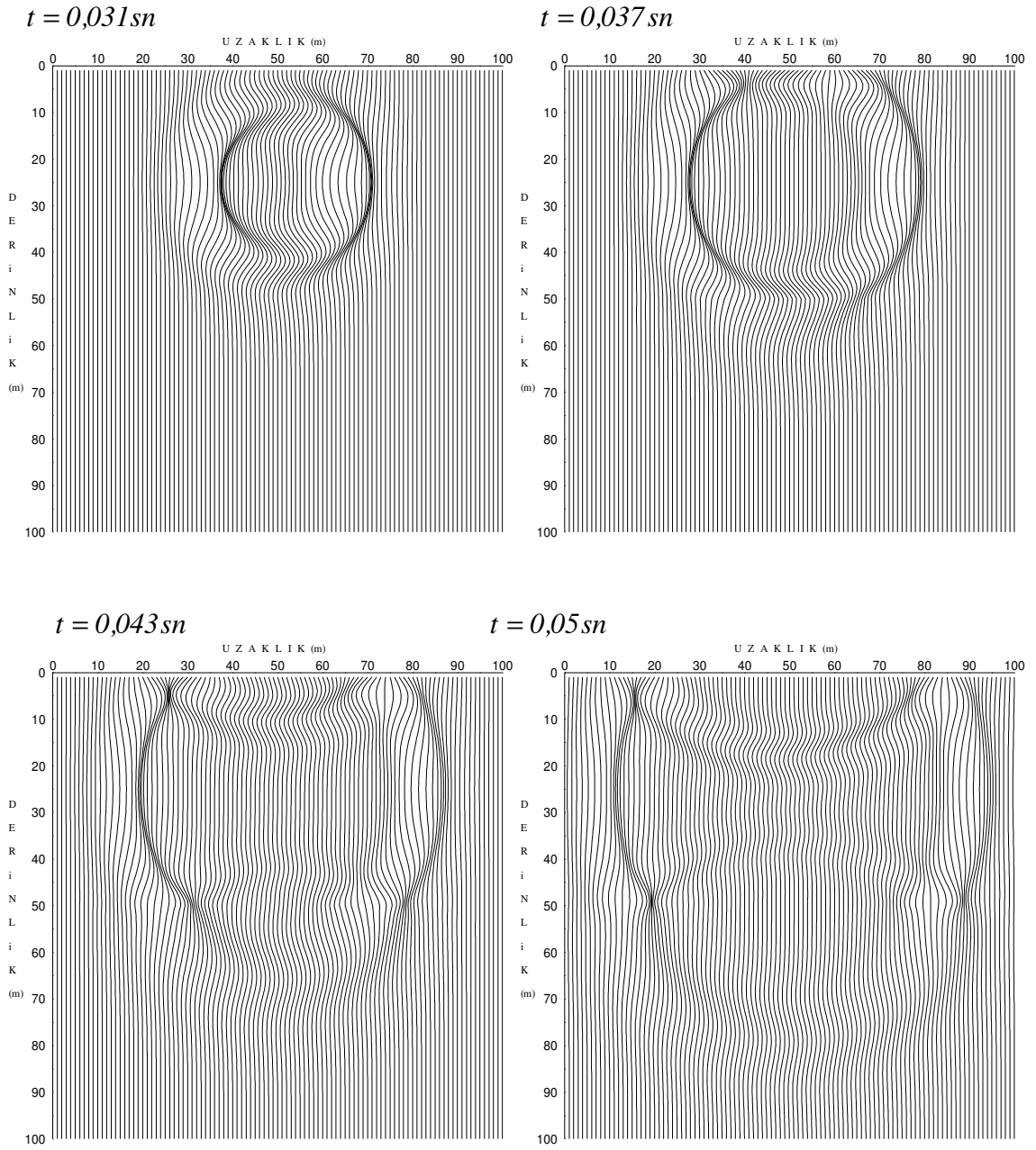


Şekil 5.32 Üç boyutlu ve iki tabakalı modelde kaynağın ve alıcıların yeri

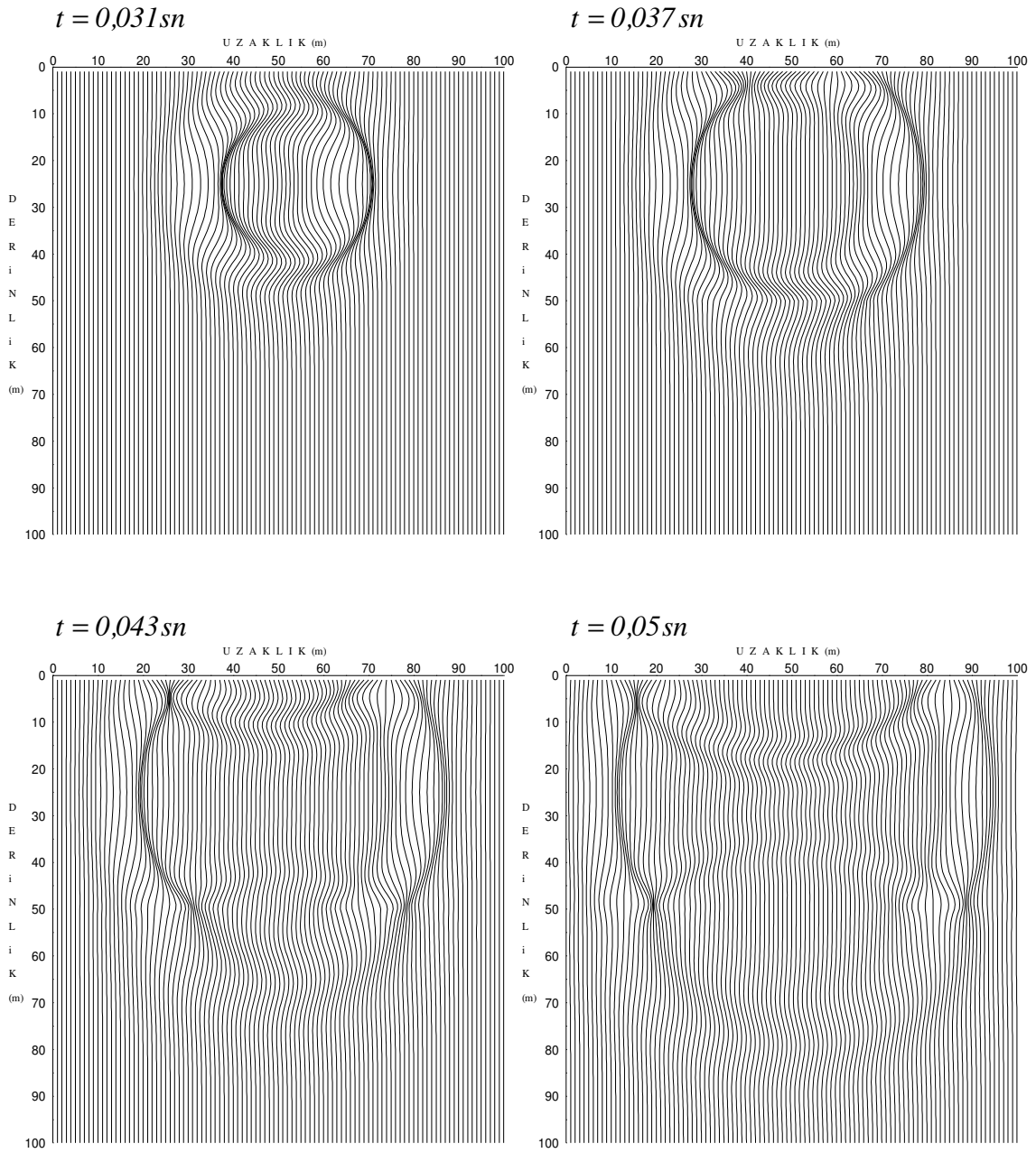
Üç boyutlu yapı modellenirken alıcıların xz , yz ve xy doğrultularında olduğu varsayılmış, bu doğrultuların altında kalan düzlemlerde elde edilen anlık enerji yayılımları Şekil 5.34, Şekil 5.35, Şekil 5.36’da verilmiştir. Ayrıca xz düzleminde soğuran ve Dirichlet sınır koşulları kullanılarak elde edilen sismogramlar da Şekil 5.37 ve Şekil 5.38’de verilmiştir.



Şekil 5.33 Üç boyutlu iki tabakalı modelin farklı düzlemlerden görünümü

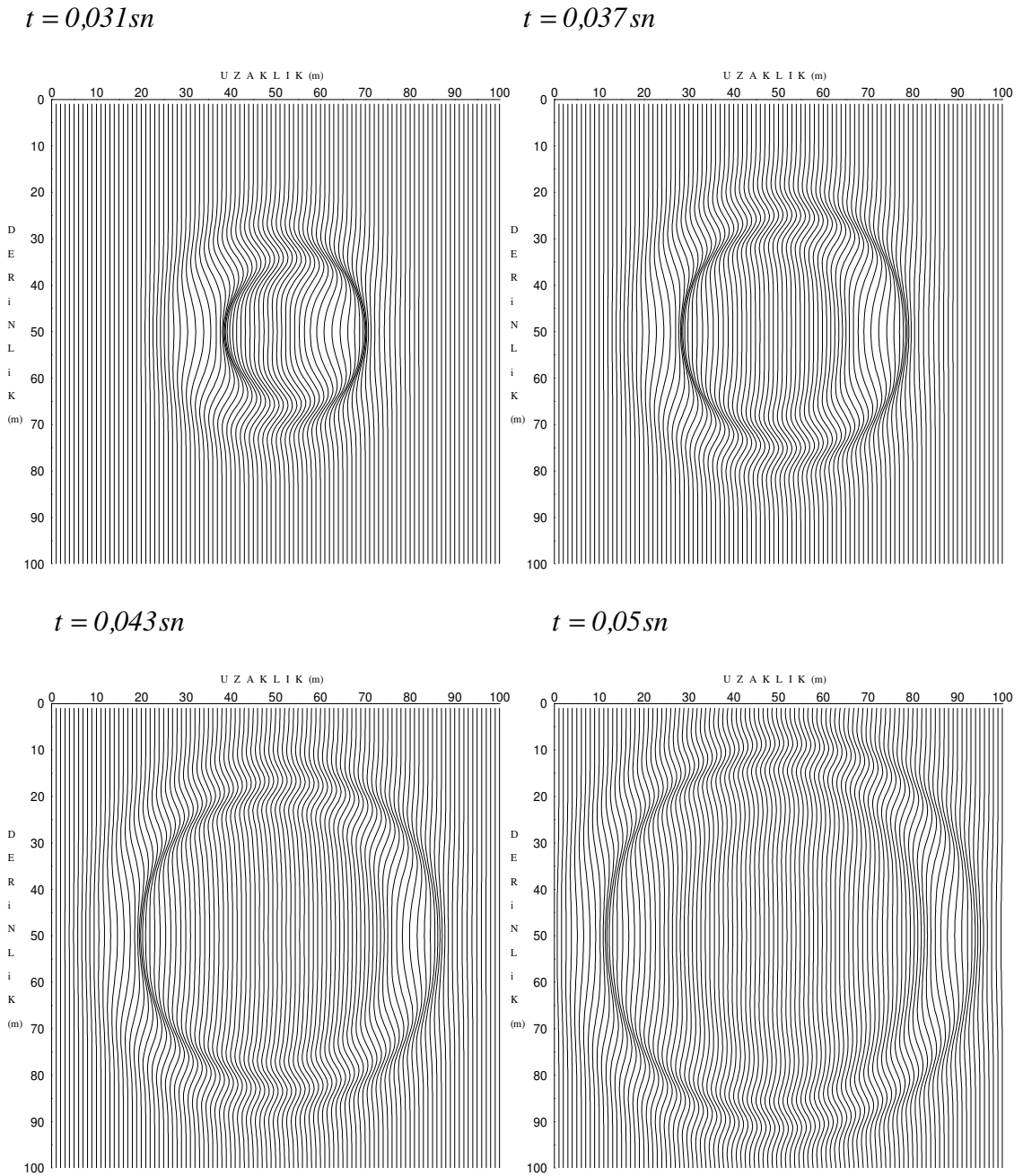


Şekil 5.34 Üç boyutlu iki tabakalı model için xz düzleminde elde edilen anlık enerji yayılımları



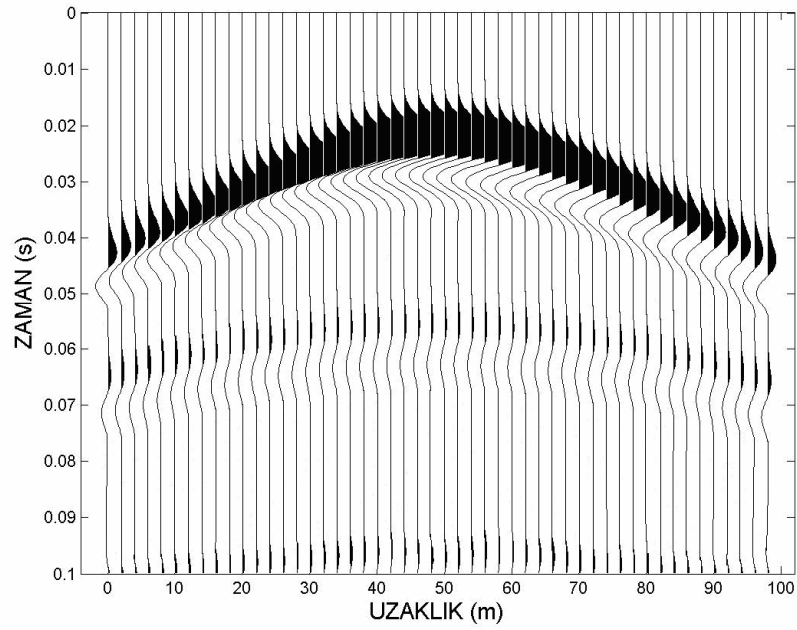
Şekil 5.35 Üç boyutlu iki tabakalı model için yz düzleminde elde edilen anlık enerji yayılımları

Şekil 5.32’de verilen modelin farklı düzlemlerden görünüşü Şekil 5.33’de olduğu gibidir. Şekil 5.32’ye, xz ve yz düzlemlerinden bakıldığında iki tabakalı bir modele benzemektedir. Dolayısıyla bu düzlemlerden elde edilecek anlık enerji yayılımları da iki tabakalı bir yapıdan elde edilecek anlık enerji yayılımına benzeyecektir. xz ve yz düzlemlerinden bakıldığında ortamın iki tabakalı bir yapı şeklinde görüldüğü Şekil 5.34 ve Şekil 5.35’de verilen anlık enerji yayılımlarında da gözlenebilmektedir.

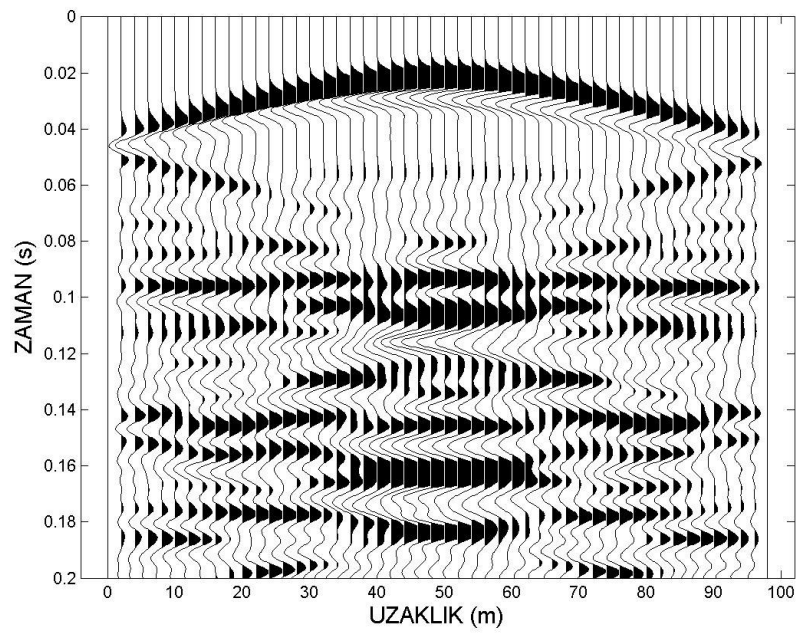


Şekil 5.36 Üç boyutlu iki tabakalı model için xy düzleminde elde edilen anlık enerji yayılımları

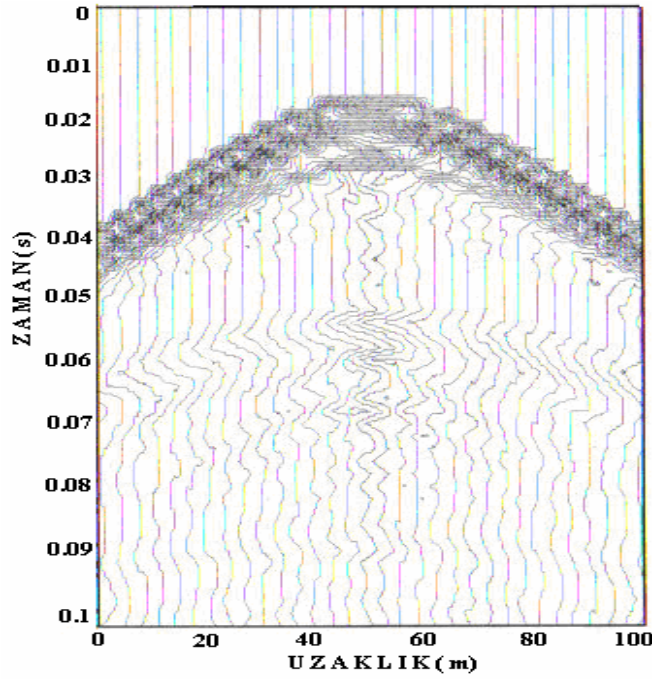
Şekil 5.32’de verilen modele xy düzleminde bakıldığında homojen bir modele benzemektedir. Bu nedenle, bu düzlemden elde edilecek anlık enerji yayılımı, homojen bir yapıdan elde edilecek anlık enerji yayılımına benzeyecektir. xy düzleminde bakıldığında ortamın homojen bir yapı şeklinde görüldüğü Şekil 5.36’da verilen anlık enerji yayılımlarında da gözlenebilmektedir.



Şekil 5.37 Şekil 5.32’de verilen model için SFM ile soğuran sınır şartı kullanılarak, elde edilen yapay sismogram



Şekil 5.38 Şekil 5.32’de verilen model için SFM ile Dirichlet sınır şartı kullanılarak, elde edilen yapay sismogram



Şekil 5.39 Şekil 5.32’de verilen model için Sarı’nın SIEM ile elde ettiği yapay sismogram

Şekil 5.37’de soğuran sınır koşulları kullanılarak SFM ile elde edilen sismogram görülmektedir. Bu sismogramda alıcıya ulaşan ilk dalga, ara yüzden yansıyan dalga ve alt tabandan yansıyor gelen dalgalar görülmektedir. Ara yüzden yansıyor gelen dalga $0,05\ sn'$ den sonra, alt tabandan yansıyor gelen dalga $0,09\ sn'$ den sonra görülmektedir. Diğer sınırlar soğuran olduğundan, başka yansıma olmamaktadır. Şekil 5.38’de ise Dirichlet sınır koşulları kullanılarak elde edilen sismogram görülmektedir. Bu sismogramda da ilk gelen dalga, ara yüzden, alt tabandan ve modelin yan kenarlarından gelen yansımalar görülmektedir. Burada ara yüzden yansıyor gelen dalganın ilk ulaşan dalgaya göre daha zayıf olduğu görülmektedir. Sarı’nın SIEM ile elde etmiş olduğu yapay sismogramlar Şekil 5.39’da verilmiştir. Bu sismogramda, ara yüzden ve alt tabandan gelen yansımaların daha zayıf olduğu görülmektedir. Bu sismogramların, SFM ile elde edilen sismogramlara kalitatif olarak benzer olduğu görülmektedir.

5.6 Sonuçlar

Bu bölümde çeşitli jeolojik yapıların SFM ile modellenmesiyle elde edilen sonuçların, literatürde elde edilen sonuçlarla uyumluluğu ortaya konmuştur. Verilen tüm örnekler göz önünde bulundurularak, SFM’nin düzgün yapıların modellenmesinde kullanışlı bir yöntem olduğu söylenebilir.

SONUÇ VE ÖNERİLER

Sonlu farklar yöntemi oldukça geniş uygulama alanı ile son yıllarda önem kazanan nümerik analizin en önemli konularından birisidir. Bilgisayar uygulamalarında bir türev ya da integral analitik olarak hesaplanamaz. Bu durumda işlemleri bilgisayarın yapabileceği hesaplamalar cinsinden tanımlamak gerekir. Bu hesaplamalar ve teknikler nümerik analizin kapsamını oluşturmaktadır. Sonlu farklar metodu, diferansiyel denklemlerde türevlerin yerine ona uygun sonlu fark yaklaşımının yazılmasından ibarettir.

Sismik incelemelerde jeolojik modellere ait sismik kesitleri hesaplayabilmek için, kayaçların yoğunluk ve hızlarını içeren dalga denklemlerinden yararlanılmaktadır. Böylece elde edilen sismik kesitlerle arazi sismogramları karşılaştırılarak yeraltı incelenmeye çalışılmaktadır. Sadece araziden elde edilen kayıtlara bağlı kalınarak yapılan sismik yorumun yetersiz olacağı bir gerçektir. Sonlu farklar yöntemi, karmaşık yeraltı modellerine ait yapay sismogramları hesaplayarak modellemeye yardımcı olmaktadır.

Bu çalışmada bir, iki ve üç boyutlu skaler dalga denklemleri sonlu farklar yöntemi ile modellenmiştir. Bir boyutlu dalga denkleminin sonlu fark çözümü için kararlılık analizi, analitik sonuçlarla karşılaştırılarak yapılmıştır. Dalga denklemleri ile yapılan iki ve üç boyutlu modellemelerde dalga alanının herhangi bir zamanda nasıl yayıldığını görme, kaynağı istenilen bir derinliğe ve uzaklığa koyma imkânı olmaktadır. İki boyutlu jeolojik modeller yatay ve düşey doğrultuda 96 noktalı bir gride hesaplanmıştır (96×96). Üç boyutlu modellemeler ise yatay ve düşey doğrultuda 50 noktalı bir gride hesaplanmıştır (50×50). Kararlılık, sınır şartları ve grid dispersiyonu gibi koşullara bağlı kalınması sonlu fark yaklaşımlarının, dalga denklemlerine uygulanması kadar önemlidir. Bu yüzden bu koşullar incelenmiş, modellemelerde kullanılacak Δt , zaman örnekleme aralığı, Δx , uzaklık örnekleme aralığı ve f_p , kaynak frekansı, bu koşullara uygun seçilerek hesaplamalar gerçekleştirilmiştir.

Homojen ve izotrop bir ortamda, dalga denklemlerinin sonlu fark formülasyonlarına dayalı FORTRAN programları ile yapılan modellemeler sonucu anlık enerji yayılımını

gösteren fotoğraflar ve sismogramlar elde edilmiştir. Bu sismogramlarda ilk varışlar, serbest yüzeyden, ara yüzeylerden, kenarlardan gelen yansımalar ve enerjide meydana gelen azalmalar iyi bir şekilde gözlenmiştir. Soğuran sınır koşulları uygulandığında, modelin taban ve kenarlarından gelen yansımalar ortadan kalkmaktadır.

Yeraltı üç boyutlu olduğundan en gerçekçi modelleme üç boyutlu modellemedir. Üç boyutlu modellemede istenilen yerden sismogram alma imkânı vardır ve dalga alanının herhangi bir yönde nasıl yayıldığı görülebilir. Bu işlem, yorumlama açısından da yararlı bilgiler sağlamaktadır. Skaler dalga denklemi sadece P dalgalarını içerdiğinden, bu yolla üretilen yapay sismogramlar S dalgalarını içermemektedir. Bunun gerçekçi bir yaklaşım olmadığı düşünülebilir. Fakat S dalgaları için içine girdiğinde, dalga türlerini tanımlayarak kesitleri yorumlamak oldukça güç olmaktadır. Çünkü S dalgalarının hesaplara girmesiyle kesitler daha karmaşık hale gelmektedir.

Bundan sonra yapılacak sismik çalışmalarda, SFM'de kapalı yaklaşımın kullanılması tartışılabilir. Ayrıca bu çalışmada yapılan jeolojik kısıtlamaların bir ya da birkaçı ortadan kaldırılarak karmaşık ortamlar için daha gerçekçi olan, elastik dalga modellemesi, bir hibrit metodu ile yapılabilir. Daha karmaşık ve daha derin jeolojik yapılar modellenmek istendiğinde fiziksel boyutlar genişlemekte ve doğal olarak modeldeki grid noktaları artmaktadır. Bunun sonucu olarak bilgisayar belleği ve hesaplama zamanının da artacağı hesaba katılmalıdır.

KAYNAKLAR

- Alford, R. M., Kelly, K. R and Boree, D.M. (1974) Accuracy of Finite Difference Modelling Of The Acoustic Wave Equation, Geophysics, Vol. 39, s. 834–842
- Alptekin, Ö. (1985) Teorik Sismoloji, Fakülte Ders Notları, No 9, K.T.Ü Trabzon.
- Bath, M. (1976) Spectral Analysis in Geophysics, Elsevier Scientific Publishing Company, Amsterdam- Oxford- New York. s.128–129
- Bayrak, Y. (1993) İki ve Üç Boyutlu Akustik Dalga Yayılımının Sonlu Farklar, Hartley ve Fourier Metotları ile Modellenmesi., Yüksek Lisans Tezi, K.T.Ü Fen Bilimleri Enstitüsü, Trabzon, s. 26-30
- Bayram, M. (2002) Nümerik Analiz, Aktif Yayınevi. s. 430–473
- Camtez, N. (1997) Jeofizikte Modelleme, Literatür Yayıncılık. Sayfa 314- 334
- Demir, I, (1998) Seismic Wave Modelling Using the Finite Difference Methods, University of Glamongam, PhD Thesis, UK
- Dominguez, J and Meise, T. (1991) On The Use of The BEM For Wave Propagation in Infinite Domains, Engineering Analysis with Boundary Elements, Vol. 8, s.132–138
- Doyle, H.A. (1995) Seismology, Wiley, England. s.35–43
- Emerman, S.H., Schimidt, W.and Stephen, R.A. (1982) An Implicit Finite-Difference Formulation of The Elastic Wave Equation, Geophysics, s. 47, 1521.
- Kara, V. (1992) Sismik Prospeksiyon, K.T.Ü. Mühendislik ve Mimarlık Fakültesi, Jeofizik Mühendisliği Bölümü, Trabzon.
- Karaoğlu, B. (2004) Sayısal Fizik, Seyir Yayıncılık. s. 21–25
- Kelly, K.R., Ward, R.W., Tretiel, S. And Alford, R.M. (1976) Synthetic Seismograms A Finite Difference Approach, Geophysics, 41, s. 2–27
- Kreyszig, E. (1999) Advanced Engineering Mathematics, 8 th Edition, Ohio State University Columbus, Ohio. s.585–592
- Lay, T. and Wallace, T.C. 1995. Modern Global Seismology, International Geophysical Series, 58.
- Lavergne, M. (1989) Seismic Methods, Graham-Trotman Limited.
- Reynolds, A. C. (1978) Boundary Conditions For The Numerical Solition of Wave Propagation Problems, Geophysics, Vol. 43, Vol . 6, s. 1099–1110
- Sari, M. (2000) Seismic Wave Modelling Using the Boundary Element Method, Univ. of Glamongam, PhD Thesis, UK
- Smith G. D. (1985) Numerical Solition of Partial Differential Equations Finite Difference Methods, Third Edition, Clarendon Pres, Clas. 6–13
- Sokolnikoff, I. S. (1956) Mathematical Theory of Elasticity, London, New York, McGraw-Hill.
- Us, E. (1993) Sismik Yöntemler ve Yorumlamaya Giriş, TMMOB Jeofizik Mühendisleri Odası Eğitim Yayınları, No:2, Ankara.

ÖZGEÇMİŞ

Timur KOPARAN

1975 yılında Çameli'de doğdu. İlk, orta ve lise öğrenimini Denizli'de tamamladı. 1997 yılında Karadeniz Teknik Üniversitesi Fatih Eğitim Fakültesi Matematik Öğretmenliği programından mezun oldu. 2002 yılında Pamukkale Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalında yüksek lisans eğitimine başladı. Ayrıca 1998 yılından bu yana Milli Eğitim'e bağlı okullarda öğretmenlik yapmaktadır. İngilizce bilmektedir. Evli ve bir çocuk babasıdır.