MİNKOWSKİ UZAYINDA MEKANİK SİSTEM UYGULAMALARI

Pamukkale Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Yüksek Lisans Tezi
Matematik Anabilim Dalı

Bülent YILDIZ

Danışman: Yrd. Doç. Dr. Şevket CİVELEK

Şubat, 2010
DENİZLİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ TEZ ONAY FORMU

Bülent YILDIZ tarafından Yrd. Doç. Dr. Şevket CİVELEK yönetiminde hazırlanan **"Minkowski Uzayında Mekanik Sistem Uygulamaları"** başlıklı tez tarafımızdan okunmuş, kapsamı ve niteliği açısından bir Yüksek Lisans Tezi olarak kabul edilmiştir.

Y. Doç. Dr. Şevket CİVELEK
Jüri Başkanı

Y. Doç. Dr. Cansel AYCAN
Jüri Üyesi

Y. Doç. Dr. İsmet AYHAN
Jüri Üyesi

Pamukkale Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun 03/03/2010 tarih ve 7/11. sayılı kararı ile onaylanmıştır.

Prof. Dr. Halil KARAHAN
Müdür

TEŞEKKÜR

Bu çalışmanın her aşamasında bana destek olan ve beni yönlendiren değerli hocam Yrd. Doç. Dr. **Şevket CİVELEK**'e , desteğini hiç eksik etmeyen sevgili eşim **Arzu YILDIZ**'a ve iş arkadaşlarıma teşekkürlerimi sunarım.

Bu tezin tasarımı, hazırlanması, yürütülmesi, araştırılmalarının yapılması ve bulguların analizlerinde bilimsel etiğe ve akademik kurallara özenle riayet edildiğini; bu çalışmanın doğrudan birincil ürünü olmayan bulguların, verilerin ve materyallerin bilimsel etiğe uygun olarak kaynak gösterildiğini ve alıntı yapılan çalışmalara atfedildiğini beyan ederim.

İmza :

Öğrenci Adı Soyadı : **Bülent YILDIZ**

ÖZET

MİNKOWSKİ UZAYINDA MEKANİK SİSTEM UYGULAMALARI

YILDIZ, Bülent
Yüksek Lisans Tezi, Matematik ABD
Tez Yöneticisi: Yrd. Doç. Dr. Şevket CİVELEK

Şubat 2010, 103 Sayfa

Bu çalışmanın ilk iki bölümünde Lorentz-Minkowski uzayı tanıtılmış olup daha sonra bu uzayda eğriler ayrıntılı olarak anlatılmıştır. Üçüncü bölümde; Lagrange Sistemleri diferansiyel geometrik kavramlarla ifade edilmiştir. Dördüncü bölümde ise; Galile ve Minkowski uzay-zamanında klasik fizik kavramları verilmiştir. Beşinci bölümde de, Hiperbolid üzerindeki geodezik örnekleri verilmiş ve serbest bir parçacığın yörüngesi Lagrange denklemleri yardımıyla ifade edilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Lorentz-Minkowski Uzay-zamanı, Lagrange Denklemleri

Y. Doç. Dr. Şevket CİVELEK
Y. Doç. Dr. Cansel AYCAN
Y. Doç. Dr. İsmet AYHAN

ABSTRACT

MECHANIC SYSTEM APPLICATIONS IN MINKOWSKI SPACE

YILDIZ, Bülent

M. Sc. Thesis in Mathematics

Supervisor: Yrd. Doç. Dr. Şevket CİVELEK

February 2010, 103 Pages

Lorentz-Minkowski space is introduced in the first two sections of this thesis and the following sections explain the curves in this space in detail. In the third section, Lagrange systems are defined by differential geometric terms. Classical physical concepts in Galileo and Minkowski spacetime are presented in the fourth section. Geodesic examples are given and a free particules orbit is defined using Lagrange equations in the fifth section.

Keywords: Lorentz-Minkowski space-time, Lagrange Equations

Assist. Prof. Şevket CİVELEK

Assist. Prof. Cansel AYCAN

Assist. Prof. İsmet AYHAN

İÇİNDEKİLER

Sayfa

ŞEKİLLER DİZİNİ

Sayfa

1. BÖLÜM : LORENTZ-MİNKOWSKİ UZAYI

1.1 Temel Açıklamalar

R^3 bilinen vektör yapısıyla gerçel bir vektör uzayı olsun. $E_1(1,0,0), E_2(0,1,0), E_3(0,0,1)$ olmak üzere, R^3 ün doğal bazı $B = \{E_1, E_2, E_3\}$ ile gösterilir.

Bir vektörün B 'ye göre koordinatları (x, y, z) ya da (x_1, x_2, x_3) şeklinde gösterilebilir. $\{e_1, ..., e_m\}$ sonlu bir vektör kümesi olmak üzere; $\langle e_1, ..., e_m \rangle$ ile gösterilen vektör altuzayı, e_i vektörlerinin lineer bileşimleri ile, $< e_1, ..., e_m > = \{\sum a_i e_i ; a_i \in R, 1 \le i \le m\}$ şeklinde gösterilebilir.

Tanım 1.1.1.

$u = (u_1, u_2, u_3), v = (v_1, v_2, v_3)$ olmak üzere $\langle u, v \rangle = u_1 v_1 + u_2 v_2 - u_3 v_3$ ile tanımlanan metriğe **Lorentz metriği** ve bu metrikle tanımlanan $E_1^3 = (R^3, \langle , \rangle)$ metrik uzayına **Lorentz-Minkowski uzayı** denir. Lorentz metriği non-dejeneredir ve indeksi 1 dir. Bu metrik şöyle de yazılabilir.

$$\langle u, v \rangle = u^t \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} v := u^t G v$$

Vektör uzayı Öklid metriğini de destekler, burada kavramları karıştırmamak için Öklid metriği $\langle , \rangle_\varepsilon$ ile, E_3 Öklid metrik uzayı ise $(R^3, \langle , \rangle_\varepsilon)$ ile gösterilecektir.

Bundan sonraki tanımlamaların ve sonuçların büyük çoğunluğu, Lorentz metriği yardımıyla daha yüksek boyutlara yani $E_1^n = \left(R^n, \langle , \rangle\right)$ uzayına genellenebilir.

Metriğin matrisi, 1 ve -1 rakamlarından oluşan köşegen matris olduğunda, $B = \{e_1, e_2, e_3\}$ ortonormal bazı düşünülürse, bu matris her zaman $diag[1,1,-1]$ şeklinde gösterilebilir. Genel olarak, verilmiş bir B bazı için, metrik katsayıları $G_{ij} = \langle e_i, e_j \rangle$ ile gösterilir.

Tanım 1.1.2.

$v \in E_1^3$ vektörü;

1. $\langle v,v \rangle > 0 \quad veya \quad v = 0$ ise **space-like**

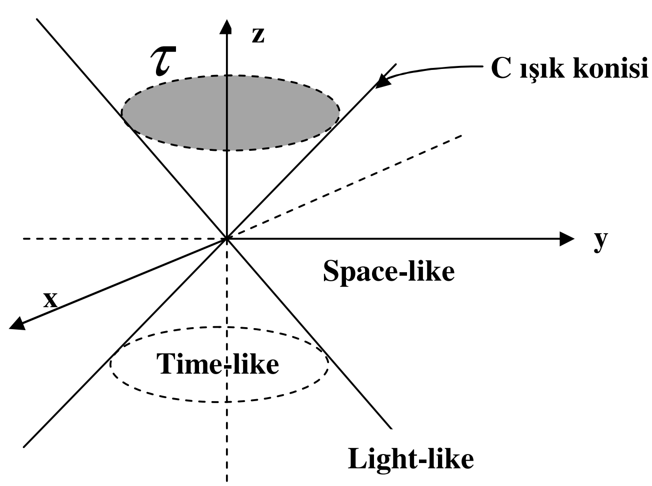
2. $\langle v,v \rangle < 0$ ise **time-like**

3. $\langle v,v \rangle = 0 \; ve \; v \neq 0$ ise **light-like**

olarak isimlendirilir. Ayrıca $v = 0$ vektörü; $\langle v,v \rangle = 0$ denklemini sağlamasına rağmen space-like olarak düşünülür.

$C = \{(x,y,z) \in E_1^3; x^2 + y^2 - z^2 = 0\} - \{(0,0,0)\}$ ile E_1^3 uzayının ışık konisi yani, E_1^3 uzayının light-like vektörlerinin kümesi tanımlanır.

$\tau = \{(x,y,z) \in E_1^3; x^2 + y^2 - z^2 < 0\}$ kümesi Time-like vektörler topluluğunu gösterir.



Şekil 1.1: Minkowski uzayının nedensel karakteri.

Verilen bir $U \subset R^3$ bir alt vektör uzayı için, U üzerinde uyarlanmış (induced) $\langle u,v\rangle_u = \langle u,v\rangle; u,v \in U$ metriğini düşünelim: Eğer uyarlanmış metrik pozitif tanımlıysa, U alt-uzayına **space-like** denir. Eğer metriğin indeksi 1 yani; non-dejenere bu uzay time-like'dır ve metrik dejenere ve $U \neq \{0\}$ doğuruyorsa; o zaman bu uzay **light-like uzay** olarak adlandırılır.

Bir vektör veya altuzayın nedensel karakteri; space-like, time-like veya light-like olmasına bağlıdır. Herhangi bir altuzay yukarıda sayılan üç özellikten birine bağlıdır.

Örnek 1.1:

1. E_1 ve E_2 vektörleri space-like ve E_3 vektörü time-like olup; $E_2 + E_3$ vektörü light-like'dır.

2. $\langle E_1, E_2\rangle$ düzlemi space-like'dır; $\langle E_1, E_3\rangle$ ve $\langle E_2, E_3\rangle$ düzlemleri time-like'dır; $\langle E_1, E_2 + E_3\rangle$ düzlemi light-like'dır.

3. $E_1 + E_2 + E_3$ vektörü space-like'dır fakat $\langle E_1, E_1 + E_2 + E_3\rangle$ düzlemi light-like'dır.

4. $E_2 + E_3$ vektörü light-like'dır, fakat $\langle E_2 + E_3, E_3\rangle$ düzlemi time-like'dır.

Eğer (V, g) metrik uzayında, g metriği non-dejenere bir metrik ise;

$$U^{\perp} = \{v \in V,\ g(u,v) = 0, \quad \forall u \in U\}$$

ile gösterilen uzaya U 'nun **ortogonal uzayı** denir.

Lemma 1.1.3:

g non-dejenere metrik olmak üzere, (V, g) bir metrik uzay olsun. Bu durumda $U \subset V$ bir altuzay olmak üzere;

1. $boy\left(U^{\perp}\right) = boy(V) - boy(U)$

2. $\left(U^{\perp}\right)^{\perp} = U$

3. U non-dejenere bir altuzay ise $U^{\perp}$ da non-dejenere bir altuzaydır.

İspat:

1. $\{e_1,....,e_m\}$ U'nun bir bazı olsun ve bu bazı V'nin $B=\{e_1,....,e_n\}$ bazı olana kadar genişlettiğimizi varsayalım. Eğer,

$$u=\sum_i x_i e_i \in U^\perp \text{ ise; } 0=<\sum_{i=1}^{n} x_i e_i, e_j>=\sum_{i=1}^{n} g_{ij} x_i = 0, ...1 \le j \le m$$

olur. Buradaki m tane denklem matrissel olarak ifade edilirse;

$$\begin{pmatrix} g_{11} & \cdots & g_{n1} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ g_{1m} & \cdots & g_{nm} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \cdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \cdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

veya $AX=0$, $A=(g_{ij})_{m\times n}$. $boy(V)=n$, $boy(U)=m$, $m \le n$ olduğuna göre A matrisinin boyu m olur. (bu metriğin non-dejenere olması ile ilgilidir.). Sonuçta, $AX=0$ denkleminin çözümü (n–m) boyutlu altuzay oluşturur.

2. $(U^\perp)^\perp \subset U$ olduğuna göre $boy(U^\perp)^\perp = boy(U)$ sonucuna varılır.

3. $B=\{e_1,....,e_m\}$ U'nun ortonormal bir bazı olsun, yani $g_{|U}$ metriğinin matrisi 1 ve -1 den oluşan köşegen matris olsun. V'nin ortonormal bazını elde etmek için bu baz genişletilirse, yani; $B=\{e_1,....,e_n\}$ $boy(U^\perp)=n-m$ olduğuna göre, $\{e_{m+1},....,e_n\}$ $U^\perp$ nun bir bazıdır.

Şimdi altuzayların nedensel karakterlerine bağlı olan tanımları verilebilir.

Teorem 1.1.4.

1. $v \in E_1^3$ olsun. v ancak ve ancak $<v>^\perp$ space-like (sır. Time-like) bir altuzay ise time-like (sır. Space-like) vektördür. Bu yüzden $E_1^3 = <v> \oplus <v>^\perp$ yazılır.

2. $U \subset V$ bir altuzay olsun. U ancak ve ancak $U^\perp$ time-like ise space-like'dır.

3. $U \subset V$ bir altuzay olsun. U ancak ve ancak $U^\perp$ light-like ise light-like'dır.

İspat:

1."$\Rightarrow$" v time-like bir vektör olsun; v vektörü E_1^3 uzayına ait olup, $B=\{e_1,e_2,v\}$ ortonormal bazının bir parçası olarak yazılabilir. Bu durumda $<v>^{\perp}=<e_1,e_2>$ dir. Bu ise space-like bir altuzaydır.

"$\Leftarrow$" $<v>^{\perp}$ space-like altuzay olsun; $\{e_1,e_2\}, \langle,\rangle_{|<v>^{\perp}}$ pozitif tanımlı bir metrik iken, $<v>^{\perp}$ nin ortonormal bir bazı olsun. Bu durumda; $\{e_1,e_2,v\}$ metriği köşegenleşen bir bazdır. $g_{11}=g_{22}=1$ olduğuna göre, $g_{33}<0$ yani, v time-like bir vektördür.

2. U time-like bir altuzay olsun. $v\in U$ time-like bir vektör olsun. Bu durumda; $U^{\perp}\subset<v>^{\perp}$ dir. $<v>^{\perp}$ space-like olduğuna göre, $U^{\perp}$ space-like'dır. Tersi benzer şekilde $(U^{\perp})^{\perp}=U$ olacaktır.

3. Bu madde yukarıdaki diğer iki maddenin doğal bir sonucudur.

Öklidyen uzay iyi bilindiğinde, time-like vektörlerin varlığı ve light-like vektörlerin, diğer bir deyişle birbiriyle çarpıldıklarında birbirini yok eden vektörlerin varlığından dolayı Lorentz-Minkowski uzayı bize bazı değişik sonuçlar verir.

Teorem 1.1.5.

1. u ve v iki light-like vektörleri, ancak ve ancak $\langle u,v\rangle=0$ ise lineer bağımlıdır.

2. Eğer u ve v , $\langle u,v\rangle=0$ koşulunu sağlayan iki time-like veya light-like vektör ise; o zaman u,v light-like'dir.

3. U light-like bir altuzay ise, $boy(U\cap U^{\perp})=1$ olur.

İspat:

1. u ve v orantılıysa, bu ortogonal olduklarını gösterir. Farzedelim ki u,v ortogonal olsun. $E_1^3=<E_3>^{\perp}\oplus<E_3>$ ayrışımında, $u=w+x,\quad v=w+y$ yazılabilir. $\langle u,v\rangle=0$ olduğundan ve her iki vektör de light-like olduğundan dolayı,

$$\langle x,y\rangle+\langle w,w\rangle+\langle x,w\rangle+\langle y,w\rangle=0$$

$$\langle x,x\rangle+\langle w,w\rangle+2\langle x,w\rangle=0$$

$$\langle y,y\rangle+\langle w,w\rangle+2\langle y,w\rangle=0$$

yazılabilir. Bu üç eşitlik birleştirilirse; $|x|^2+|y|^2-2\langle x,y\rangle=0$ eşitliği elde edilir, yani, $|x-y|^2=0$. Böylece; $x=y$ olur, çünkü $x-y$ bir space-like vektördür $\left(x-y\in<w>^{\perp}\right)$. Buradan $u=v$ sonucu çıkar.

2. Eğer iki vektörde time-like ise, $\langle u,v\rangle\neq 0$ olup; $<v>^{\perp}$ space-like bir altuzay olduğundan $E_1^3=<v>^{\perp}\oplus<v>$ eşitliğini kullanarak, $u=x+\lambda v$ yazılır; bundan dolayı; $\langle u,v\rangle=\langle v,x\rangle+\lambda\langle v,v\rangle=\lambda\langle v,v\rangle$ dir. $\langle u,v\rangle=0$ olursa, $\lambda=0$ *ve* $u=x$ vektörü space-like olurdu. Bu bir çelişkidir. Bundan dolayı; her iki vektör de light-like olmalıdır.

3. $u,v\in U\cap U^{\perp}$ ise; $\langle u,v\rangle=0$ olur. Buradan u ve v lineer bağımlıdırlar. Bu da; $\dim(U\cap U^{\perp})\leq 1$ olduğunu kanıtlar. Boyut tam olarak; 0 ise, $E_1^3=U^{\perp}\oplus U$ ve bundan dolayı E_1^3 ün herhangi bir vektörü light-like olacaktır.

Teorem 1.1.6:

$U\subset E_1^3$ iki-boyutlu bir altuzay olsun. Bu durumda aşağıdaki önermeler denktir:

1. U time-like bir altuzaydır.

2. U iki lineer bağımsız light-like vektör içerir.

3. U time-like bir vektör içerir.

İspat:

"$1\Rightarrow 2$" $\{e_1,e_2,e_3\}$ E_1^3 'ün ortonormal bir bazı olsun. Bu durumda; e_2+e_3 ve e_2-e_3 lineer bağımsız light-like vektörlerdir.

“$2 \Rightarrow 3$” u ve v iki lineer bağımsız light-like vektörlerse, $u+v$ veya $u-v$ time-like vektördür. Çünkü; $\langle u \pm v, u \pm v \rangle = \mp 2\langle u, v \rangle$ dir ve her iki vektörün time-like olmasına bağlı olarak $\langle u, v \rangle \neq 0$ dır.

“$3 \Rightarrow 1$” $v \in U$ time-like bir vektör olsun. Buradan $U^{\perp} \subset <v>^{\perp}$, ve $<v>^{\perp}$ space-like bir altuzay olur. Bundan dolayı $U^{\perp}$ space-like’dır, ve U time-like’dır.

Yukarıdaki sonuç, U’nun hiperdüzlem olduğunu gözönünde bulundurarak, isteğe bağlı boyutlarda genellenebilir.

Teorem 1.1.7.

$U \subset E_1^3$ bir altuzay olsun. Bu durumda aşağıdaki önermeler denktir:

1. U light-like bir altuzaydır.

2. U light-like bir vektör içerir ama hiç bir time-like vektör içermez.

3. $U \cap C = L - \{0\}$, ve $boy(L) = 1$.

İspat:

“$1 \Rightarrow 2$” U’daki metrik dejenere bir metrik olduğundan, light-like bir vektör vardır. Teorem 1.1.6 ya göre hiçbir time-like vektör yoktur.

“$2 \Rightarrow 3$” Light-like vektörler var olduğuna göre; $U \cap C$ boş küme değildir. Teorem 1.1.6 yı kullanarak; eğer iki lineer bağımsız light-like vektör varsa; aynı zamanda time-like vektör de olacak. Buradan sadece bir light-like vektör olduğu görülür.

“$3 \Rightarrow 1$” Teorem 1.1.6 U’nun space-like ve time-like olmadığını söyler.

Teorem 1.1.8.

P düzlemi, E_1^3 ‘ün bir düzlemi olsun. Öklid metriğiyle ortogonal bir vektör n ile gösterilirse, n vektörü ancak ve ancak P düzlemi space-like (sır. time-like, light-like) ise time-like’dir (sır. space-like, light-like).

İspat:

$P=\left\{(x,y,z)\in R^3; ax+by+cz=0\right\}$ şeklinde yazılabilir. Buradan, n vektörü, (a,b,c) vektörü ile orantılı demektir. P şu şekilde de yazılabilir.

$$P=\left\{(x,y,z)\in R^3; ax+by-(-c)z=0\right\}=<(a,b,-c)>^{\perp}$$

Bu; $(a,b,-c)$ vektörü P düzlemine ortogonal demek olur, n vektörü de P'ye ortogonal idi yani; $(a,b,-c)$ ile n vektörlerinin nedensel karakteri ile aynıdır.

Tanım 1.1.9.

Verilen bir $u\in E_1^3$ vektörü için $|u|=\sqrt{|<u,u>|}$ sayısına u'nun normu denir. $|u|=1$ ise, bu vektöre birim denir. Buradan; u space-like (sır. Time-like) bir vektörse $|u|=\sqrt{<u,u>}$ (sır. $|u|=\sqrt{-<u,u>}$) olur.

Teorem 1.1.10.

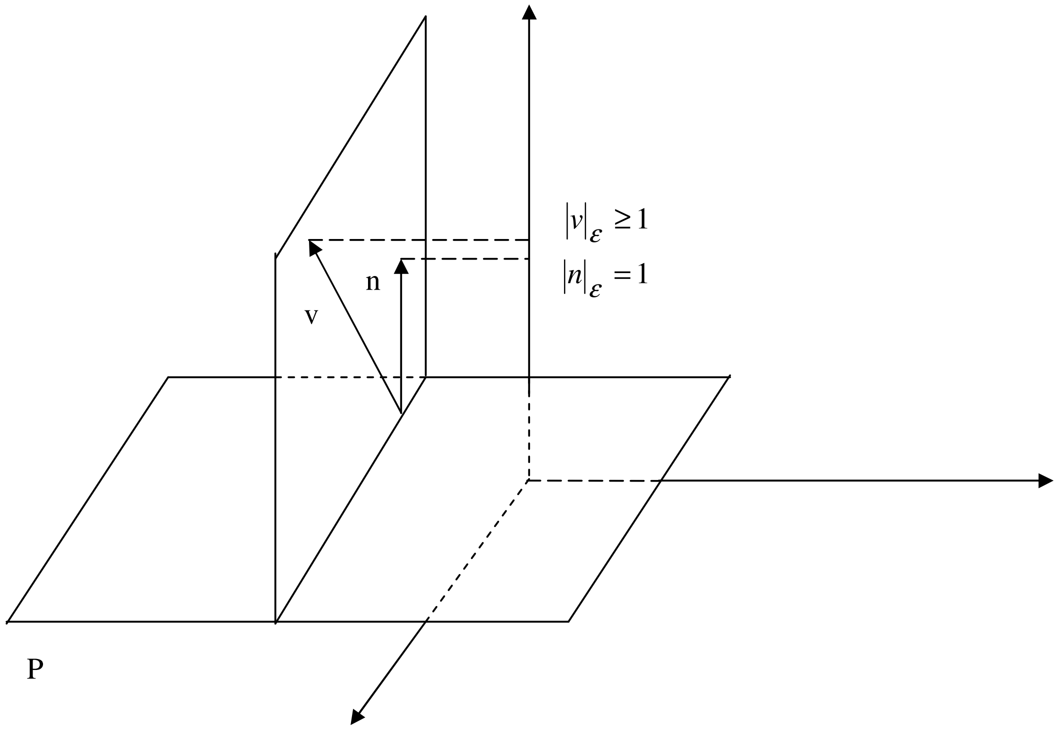
$P=<v>^{\perp}$, $\langle v,v\rangle=-1$ koşuluyla space-like bir düzlem ise $|v|_{\varepsilon}\geq 1$ dir.

İspat:

$P=\left\{(x,y,z)\in R^3; ax+by+cz=0\right\}$, $n=(a,b,c)$ ve $a^2+b^2+c^2=1$ yazılabilir. Buradan, $\langle v,v\rangle=-1$ olacak şekilde, $v=\dfrac{(a,b,-c)}{\sqrt{c^2-a^2-b^2}}$ seçersek, $P=<v>^{\perp}$ olur. v'nin Öklid normunu hesaplayarak, aşağıdaki sonuç elde edilir:

$$|v|_{\varepsilon}^2=\frac{a^2+b^2+c^2}{c^2-a^2-b^2}=\frac{1}{c^2-a^2-b^2}\geq 1$$

Bu sonuç, space-like bir düzleme ortogonal bir vektör çizildiğinde onun öklidyen büyüklüğü , neden öklid birim ortogonal vektörden büyük olduğunu açıklar.(Şekil 1.2)



Şekil 1.2: P space-like düzlemine ortogonal olan v vektörü, P'nin Öklid normal vektörü $\vec{n}$ den daha büyük görünür.

1.2 Time-like vektörler

τ ile E_1^3 ün time-like vektörler kümesi gösterilsin. Her bir $u \in \tau$ için, u'nun time-like konisi $C(u) = \{v \in \tau; \langle u, v \rangle < 0\}$ şeklinde tanımlanır. $u \in C(u)$ olduğuna göre bu küme boş küme değildir. Ayrıca; τ ; $C(u)$ ve $C(-u)$ nin ayrık bileşimidir. Eğer $v \in \tau$ ise $\langle u, v \rangle \neq 0$ olur, ve bu yüzden $v \in C(u)$ veya $v \in C(-u)$ olur. Dahası; $C(u) \cap C(-u) = \varnothing$ olur. Time-like konilerin bazı özellikleri şunlardır:

Teorem 1.2.1.

1. u ve v iki time-like vektör olmak üzere, u,v ancak ve ancak $\langle u, v \rangle < 0$ ise aynı time-like koni içinde yer alırlar.

2. $C(u) = C(v)$ ancak ve ancak $u \in C(v)$

3. Time-like koniler yakınsak kümelerdir.

İspat:

1. $\langle u,v\rangle<0$ ise; $u\in C(v)$ olur. Farzedelim ki $u,v\in C(w)$ olsun. Buradan $\langle w,w\rangle=-1$ olduğu kabul edilebilir. $u=x+aw\ ve\ v=y+bw$ yazılırsa,

$x,y\in<w>^{\perp}$ olur. $<w>^{\perp}$ space-like altuzay olduğuna göre;

$|\langle x,y\rangle|\leq|x||y|$ olur ve $\langle u,v\rangle=-ab+\langle x,y\rangle\leq-ab+|x||y|$ olur.

$\langle x,x\rangle<a^2$ ve $\langle y,y\rangle<b^2$ olduğundan $\langle u,v\rangle\leq-ab+|x||y|<0$ istenen sonuç çıkar.

2. $u\in C(v)$ ise, $\langle u,v\rangle<0$ olur. Bu durumda $v\in C(u)$ anlamına gelir.

3. $u,v\in C(w)$ ve $t\in[0,1]$ olduğu kabul edilirse,

$\langle tu+(1-t)v,w\rangle=t\langle u,w\rangle+(1-t)\langle v,w\rangle<0$, bu da; $tu+(1-t)v\in C(w)$ demektir.

Teorem 1.2.2.

u ve v iki time-like vektör olsun. Bu halde; $|\langle u,v\rangle|\geq\sqrt{-\langle u,u\rangle}\sqrt{-\langle v,v\rangle}$ eşitsizliği sadece u ve v vektörleri orantılı ise sağlanır. Her iki vektörün aynı time-like koni üzerinde yer aldığı durumda $\langle u,v\rangle=-|u||v|\cosh\varphi$ denkleminden; $\varphi\geq0$ olan unik bir sayı ortaya çıkar ki, bu φ sayısı u ve v arasındaki hiperbolik açının değeridir.

İspat:

u ve v lineer bağımsız time-like vektörlerini düşünülürse, $U=<u,v>$ time-like bir düzlem olur. Teorem 1.1.6 ya göre a ve b üzerindeki eşitlik şu şekildedir:

$$\langle au+bv,au+bv\rangle=a^2\langle u,u\rangle+b^2\langle v,v\rangle+2ab\langle u,v\rangle=0$$

Buradan $a\neq0$ olur. Zira $a=0$ olsaydı v light-like olurdu, halbuki v time-like'tır. $b/a=\lambda$ denirse; $\langle u,u\rangle+2\lambda\langle u,v\rangle+\lambda^2\langle v,v\rangle=0$ denklemi elde edilir. Bu denklemin bir çözümü vardır. Dolayısıyla denklemin diskriminantı pozitif olmalıdır. Yani;

$$\Delta=4\langle u,v\rangle^2-4\langle u,u\rangle\langle v,v\rangle>0\ yani\ \langle u,v\rangle^2>\langle u,u\rangle\langle v,v\rangle$$

olmalıdır.

Denkleme göre $\Delta>0$ ise u ve v lineer bağımsız, $\Delta=0$ ise u ve v orantılıdır.

Teoremin ikinci kısmı için, şu yazılır:

$$\frac{<u,v>^2}{(-<u,u>)(-<v,v>)} \geq 1 \qquad (1.1)$$

u ve v aynı time-like koni içinde ise, $\langle u,v\rangle < 0$ olur ve (1.1) ifadesinden

$$\frac{-<u,v>}{\sqrt{-<u,u>}\sqrt{-<v,v>}} \geq 1$$

olduğunu gösterir. Hiperbolik kosinüs fonksiyonu $\cosh:[0,\infty)\to[1,\infty)$ birebir olduğundan burada unik bir sayı olup;

$$\cosh\varphi = \frac{-<u,v>}{\sqrt{-<u,u>}\sqrt{-<v,v>}}$$

olur.

Sonuç 1.2.3.

u,v time-like koni içinde yer alan iki time-like vektör ise, $|u+v| \geq |u|+|v|$ eşitliği ancak ve ancak u ve v orantılı olursa sağlanır.

$u=(0,\cosh(t),\sinh(t))$ ve $v=(0,1,0)$ birim vektörleri için, $\langle u,v\rangle=\cosh(t)$ düzlemi time-like olur, bu da 1'den büyük gelişigüzel bir değer ortaya çıkmasına yol açar. Buna karşın; u ve v space-like düzlem ortaya çıkarırlarsa, P üzerindeki uyarlanmış metrik pozitif olur ve buradan, Genel Cauchy-Schwarz eşitsizliği elde edilir. Buradaki u,v spacelike vektörleri arasındaki açı $\langle u,v\rangle=|u||v|\cos\theta$ ile verilebilir.

Bu bölümü time-like yönelim tanımıyla bitirelim. Öncelikle herhangi bir vektör uzayında yönelim kavramını hatırlayalım. Bunun için, R^3ün $B\ ve\ B'$ bazlarının değişim matrisinin determinantının pozitif olduğu, BRB' ile verilen R denklik bağıntısını gözönüne alalım. R^3 ün yönelimleri olarak adlandırılan tam olarak iki denklik sınıfı vardır. Bunlardan herhangi biri sabitlenirse R^3 bu yönelim ile yönlendirilmiştir denir. Tam olarak R^3 yönlendirilmiş denildiğinde bunun anlamı $\left(R^3,[B]\right)$ sıralı çiftidir. Böyle bir durumda B' herhangi bir baz olmak üzere eğer $B'\in[B]$ ise pozitif yönlü, aksi halde **negatif yönlü** denir.

R^3 metrik uzay olarak değil, vektör uzayı olarak tanımlandığından, Minkowski uzayında yani E_1^3 'de, tekrar yönelimden bahsetmeye gerek yoktur. Tanıtılmak istenen time-like yönelim, Lorentz metriği kullanıldığı için metrik bir kavramdır.

E_1^3 de bütün ortonormal bazların kümesi ß yı gözönüne alalım. Eğer e_3 ve e_3' aynı time-like koni içindeyse yani $\langle e_3, e_3' \rangle < 0$ ise $B \sim B'$ ile denklik bağıntısı tanımlanır. Time-like yönelimler olarak adlandırılan iki adet denklik sınıfı vardır. Dahası, herbir denklik sınıfı; unik bir time-like koniyi belirler, diğer taraftan, bir time-like koni verildiğinde, öyle bir unik time-like yönelim vardır ki bu yönelime ait olan tüm bazların son vektörleri bu tür bir time-like koni içerisinde yer alır.

Yönelim sabitlendiğinde diğer bir deyişle bazı B ler için $\left(R^3, [B]\right)$ sıralı ikilisi gözönünde bulundurulduğunda E_1^3 time-like yönlendirilmiştir denir.

Tanım 1.2.4.

$E_3 = (0,0,1)$ olsun. v time-like bir vektör olmak üzere, $v \in C(E_3)$ ise, $\langle v, E_3 \rangle < 0$ yani v **ileri-yönlenmiştir**, $v \in C(-E_3)$ ise $\langle v, E_3 \rangle > 0$ yani v **geri-yönlenmiştir**. $v = (v_1, v_2, v_3)$ vektörü $v_3 > 0$ ise **ileri yönlenmiş** demeye eşdeğerdir. Her zaman E_1^3 time-like koni $C(E_3)$ ile yönlendirilir, yani, $\left(E_1^3, [B_u]\right)$ dir. B_u R^3 ün doğal bazıdır.

1.3 Lorentz Vektör Çarpımı

Vektör çarpımının tanımı, Öklid sistemindeki ile aynıdır.

Tanım 1.3.1.

$u, v \in E_1^3$ ise; u ve v'nin **Lorentz vektör çarpımı** $u \times v$ ile gösterilen tek bir vektörle tanımlanır.

Bu da şu eşitliği sağlar:

$$\langle u \times v, w \rangle = \det(u, v, w) \tag{1.2}$$

u, v ve w vektörlerinin koordinatlarını kolonlara koyarak elde edilen matrisin determinantı $\det(u, v, w)$ ile gösterilir.

Doğal bazın vektörlerinin bir tanesi w yerine konursa;

$$u \times v = \begin{vmatrix} i & j & -k \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} \tag{1.3}$$

şu sonuca varılır.

Metriğin bilineerliği vektörün unikliğini ve varlığını garantiler. Böylece; Öklid çarpımı $u \times_{\varepsilon} v$ ile gösterilirse, $u \times v$ vektörü $u \times_{\varepsilon} v$ nin $\{z = 0\}$ düzlemine göre yansıması olur.

Teorem 1.3.2.

Vektör çarpımı aşağıdaki özellikleri sağlar:

1. $u \times v = -v \times u$

2. $u \times v$; u ve v ye ortogonaldir.

3. $u \times v = 0$ ancak ve ancak $\{u, v\}$ orantılı ise sağlanır.

4. $u \times v \neq 0$ vektörü, ancak ve ancak P light-like olursa $P = < u, v >$ düzleminde yer alır.

1.4 E_1^3 İzometrileri

Bu bölümde E_1^3 Minkowski uzayının izometrileri üzerinde durulacaktır. E_1^3 'ün bütün vektör izometrilerinin kümesini $O_1(3)$ ile gösterelim. B ve B' iki ortonormal baz ise, A koordinat değişimi matrisi; $A^t GA = G$ eşitliğini sağlar. Bu;

$$O_1(3) = \{A \in Gl(3,R); A^t GA = G\} \text{ demektir.}$$

Özellikle $\det(A) = \pm 1$ dir. Bu da $O_1(3)$ ün en azından iki bağlantılı öğesi olduğu anlamına gelir. $SO_1(3)$ ile determinantı 1 olan izometrilerin kümesini gösterilir. Bu kümeye **Özel Lorentz Grubu** denir. Bu grup R^3 ün yönelimi kavramı ile ilgili olarak ortaya çıkar. Tam olarak; doğal baz ile verilen yön sabitlenirse ve B ortonormal bazı ancak ve ancak pozitif yönlendirilmiş ise $B \in SO_1(3)$ demektir.

$O_1^+(3) = \{A \in O_1(3); A \text{ } timelike \text{ } yönlüdür\}$ şeklinde tanımlanan gruba **Ortokron grup** denir. Verilen bir B ortonormal bazı ileri-yönelimli ise ve $B' = AB$ sonucunda elde edilen baz da ileri-yönelimli olursa A 'ya **time-like-yönelimli** denir. Ortokron grubun başka bir tanımı da $O_1^+(3) = \{A \in O_1(3) \Leftrightarrow a_{33} > 0\}$ şeklindedir. $O_1^+(3)$ kümesi iki bileşeni olan bir gruptur. Bunlardan bir tanesi $O_1^+(3) \cap SO_1(3)$ bir diğeri ise $O_1^+(3) - O_1^+(3) \cap SO_1(3)$ dir.

Biz; $O_1^{++}(3) = SO_1(3) \cap O_1^+(3) = \{A \in O_1(3);\quad \det(A) = 1,\quad A \text{ } timelike \text{ } yönlüdür\}$ şeklinde tanımlanan ve **Özel Lorentz Ortokron** grubu olarak isimlendirilen grupla ilgileneceğiz. $I \in O_1^{++}(3)$ dir. Topolojik bakımdan $O_1^{++}(3)$ kompakt bir küme değildir. Örneğin;

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cosh(t) & \sinh(t) \\ 0 & \sinh(t) & \cosh(t) \end{bmatrix} ; t \in R \right\}$$

alt kümesi sınırlı değildir.

Teorem 1.4.1

$O_1(3)$ ün bağlı bileşenleri;

1. $O_1^{++}(3)$,

2. $O_1^{+-}(3)=\{A\in SO_1(3); a_{33}<0\}$,

3. $O_1^{-+}(3)=\{A\in O_1^{+}(3); \det(A)=-1\}$,

4. $O_1^{--}(3)=\{A\in O_1\ (3); \det(A)=-1,\ a_{33}<0\}$ dir.

Eğer T_1=diag[1,1,-1] ve T_2=diag[1,-1,1] ile verilen izometriler ise, son üç bileşen sırasıyla $T_1.T_2.O_1^{++}(3),\quad T_2.O_1^{++}(3),\quad T_1.O_1^{++}(3)$ şeklinde ifade edilebilir.

E_1^3 ün rijid hareketleri, bir vektör izometrisi ve E_1^3 ün bir dönüşümünün birleşimidir. Bundan sonra iki boyutlu E_1^2 Lorentz-Minkowski uzayının izometrileri üzerinde duralım. Bu sayede time-like yönelimi sağlayan veya sağlamayan izometrilerin ayırt edilmesinin sebebi anlaşılır.

$A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ şeklinde verilmiş bir matris olsun.

$A\in O_1(2)$ ise $A^t GA=G$ olmalı;

$$\begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Bu matris çarpımından;

$a^2-c^2=1 : ab-cd=0 : d^2-b^2=1$

eşitlikleri ortaya çıkar. Bu üç eşitliğin çözümlenmesinden dört ihtimal ortaya çıkar.

1. $a = \cosh(t)$ ve $c = \sinh(t)$ $\quad d = \cosh(s)$ ve $b = \sinh(s) \quad \Rightarrow s = t$

2. $a = \cosh(t)$ ve $c = \sinh(t)$ $\quad d = -\cosh(s)$ ve $b = \sinh(s) \quad \Rightarrow s = -t$

3. $a = -\cosh(t)$ ve $c = \sinh(t)$ $\quad d = \cosh(s)$ ve $b = \sinh(s) \quad \Rightarrow s = -t$

4. $a = -\cosh(t)$ ve $c = \sinh(t)$ $\quad d = -\cosh(s)$ ve $b = \sinh(s) \quad \Rightarrow s = t$

Sonuç olarak, dört çeşit izometri elde edilmiş olur. Yukarıdaki sıraya göre izometriler şu şekilde sıralanır:

$$\begin{pmatrix} \cosh(t) & \sinh(t) \\ \sinh(t) & \cosh(t) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \cosh(t) & \sinh(t) \\ -\sinh(t) & -\cosh(t) \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -\cosh(t) & \sinh(t) \\ -\sinh(t) & \cosh(t) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\cosh(t) & \sinh(t) \\ \sinh(t) & -\cosh(t) \end{pmatrix}$$

Bu matrislerin her biri sırasıyla Teorem 1.4.1 deki gösterim ile, $O_1^{++}(2), O_1^{--}(2), O_1^{-+}(2), O_1^{+-}(2)$ kümelerine aittir. Bu izometriler ile $E^2(=R^2)$ nin izometrileri arasındaki farkın ne olduğu görülebilir. $A^t GA = G$ eşitliğini kullanarak, $x^2 + y^2 = 1$ tipinde eşitlikler bulunur, bunun da çözümü $x = \cos\theta$ ve $y = \sin\theta$ şeklindedir. Bu durum $x^2 - y^2 = 1$ durumundan farklıdır, burada x değerinin pozitif mi negatif mi olduğuna bakmak gerekir.

Sabit bir L doğrusu bırakan, $O_1^{++}(3)$ izometrilerine boost denir. Bu tip izometriler, L'nin nedensel karakterine bağlı olarak, üç çeşide ayrılır.

1. L time-like'dır. $L = < E_3 >$ olsun.

$$A.E_3 = E_3 \quad \Rightarrow \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Buradan $a_{13} = a_{23} = 0,\ a_{33} = 1$ olur.

$$G = A^t G A = G \quad \Rightarrow \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Buradan;

$$a_{31} = a_{32} = 0 : a_{11}^2 + a_{21}^2 = 1 : a_{11}a_{12} + a_{21}a_{22} = 0 : a_{12}^2 + a_{22}^2 = 1$$

denklemleri çıkar. Denklemlerin çözümü yapılırsa A matrisi;

$$A = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

gibi olur.

2. L space-like'dır. $L = < E_1 >$ olsun.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cosh\varphi & \sinh\varphi \\ 0 & \sinh\varphi & \cosh\varphi \end{bmatrix}$$

olur.

3. L light-like'dır. $L = < E_2 + E_3 >$ olsun.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & \theta & -\theta \\ -\theta & 1 - \frac{\theta^2}{2} & \frac{\theta^2}{2} \\ -\theta & -\frac{\theta^2}{2} & 1 + \frac{\theta^2}{2} \end{bmatrix}$$

olur.

Son olarak sıklıkla kullandığımız düzlemsel eğrilerden birini inceleyelim. Bu eğriler tam olarak Öklid sistemindeki dairelerle aynı şekilde hareket ederler. Öklid dairesini tanımlamanın bir yolu şudur:

G, L doğrusunu bırakan rotasyonların bir grubu ve $p_0 \notin L$ olsun. $\{A \cdot p_0; A \in G\}$ kümesi, p_0 noktasını içeren L'ye ortogonal düzlemde yer alan bir dairedir.

E_1^3 Minkowski uzayında, doğrunun nedensel karakterine bağlı olarak, üç duruma bakmak gerekir. G; L'ye ait boostların grubu olsun ve $p_0 \notin L$ olsun. E_1^3 ün bir izometrisinden sonra, L aşağıdaki üç durumdan birine dahildir:

1. L time-like'dır. $L = < E_3 >$ olsun.

$$G = \left\{ T_\theta = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \theta \in R \right\}$$

Şimdi G grubuna göre bir p_0 noktasının yörüngesine bakalım.

$$\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

Matris çarpımı yapılırsa;

$$x_0 \cos\theta - y_0 \sin\theta = x$$
$$x_0 \sin\theta + y_0 \cos\theta = y$$
$$z_0 = z$$

çıkar. İlk iki eşitliğin kareleri alınıp; taraf tarafa toplanırsa; $x^2 + y^2 = x_0^2 + y_0^2$ sonucuna ulaşılır. Bu, $\{z = z_0\}$ düzleminde ve $\sqrt{x_0^2 + y_0^2}$ yarıçaplı bir dairedir.

2. L space-like'dır. $L = < E_1 >$ olsun.

$$G = \left\{ T_\varphi = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cosh\varphi & \sinh\varphi \\ 0 & \sinh\varphi & \cosh\varphi \end{bmatrix} \right\}$$

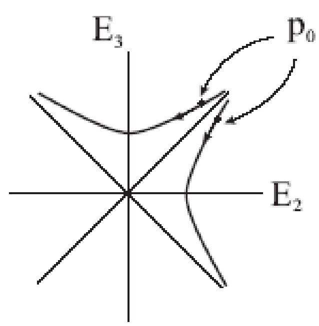
p_0 'ın yörüngesi $y^2 - x^2 = y_0^2 - z_0^2$ hiperbolünün, $\{x = x_0\}$ düzleminde bir koludur.

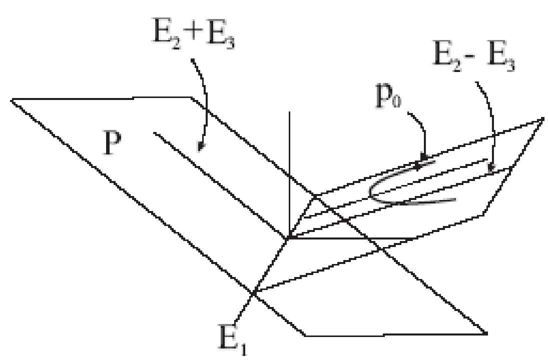
3. L light-like'dır. $L=<E_2+E_3>$ olsun.

$$G=\left\{T_\theta=\begin{bmatrix}1 & \theta & -\theta\\ -\theta & 1-\dfrac{\theta^2}{2} & \dfrac{\theta^2}{2}\\ -\theta & -\dfrac{\theta^2}{2} & 1+\dfrac{\theta^2}{2}\end{bmatrix};\theta\in R\right\}$$

$T_\theta(E_1)=E_1-\theta(E_2+E_3)$ olduğuna göre, G'nin $<E_1,E_2+E_3>$ düzlemini sabit bıraktığı görülebilir. $\langle v,E_2+E_3\rangle=1$ olacak şekilde E_1 e ortogonal unik bir light-like vektör v'yi alalım. Bu durumda, $v=E_2-E_3$ olur ve $P=\langle E_1,E_2-E_3\rangle$ düzlemi göz önüne alalım. A bir izometri olduğuna göre $A(E_2-E_3)$ light-like vektörü, $A(E_1)=E_1-\theta(E_2+E_3)$ ve $A(E_2+E_3)=E_2+E_3$ 'e ortogonaldir. Buradan $v=E_2-E_3$ olduğu görülür. $A(P)=P$ demektir. $\{T_\theta(p_0)\ \theta\in R\}$ kümesi $p_0\in P$ iken, P düzlemi içinde yer alan bir paraboldür, ve ekseni p_0 boyunca E_2-E_3 e paraleldir.

$T_\theta(x,y,z)=\left(x+2y\theta,y-x\theta-y\theta^2,-y-x\theta-y\theta^2\right)$ $X=x+2y\theta$ ve $Y=y-x\theta-y\theta^2$ olursa, $Y=y+\dfrac{x^2}{4y}+\dfrac{1}{4y}X^2$ ilişkisi elde edilir.





Şekil 1.3: Boostların etkisiyle şekillenen bir nokta yörüngesi. Solda bir hiperbol, sağda ise parabol elde edildiği görülür.

Tam olarak yukarıdaki düzlemlerde yer aldıklarında, bu yörüngelerin daire, hipebol ve parabol oldukları görülür. Örneğin, $L =< (0,1,2) >$ time-like doğrusuna göre olan rotasyonlar dikkate alınırsa; bir noktanın yörüngesi $P =< e_1(1,0,0), e_2(0,2,1) >$ düzlemine paralel bir düzlemde yer alan $q + \cos(t)e_1 + \sin(t)e_2$ yani afin bir elipstir. Diğer durumlarda; sırasıyla afin hiperboller ve paraboller elde edilir.

2. BÖLÜM : MİNKOWSKİ UZAYINDA EĞRİLER

Bu bölümde E_1^3 deki eğriler için Frenet üçyüzlüsünün teorisi geliştirilecektir. Bu bağlamda; Öklid ortamında neler olduğuna benzer sorular irdelenecektir. Örneğin; eğriliği sabit olan bütün düzlemsel eğriler bulunacaktır. Ayrıca; bütün helisler ve Bertrand eğrileri üzerinde durulacaktır.

I aralığı R de bir açık aralık olmak üzere; regüler bir $\alpha : I \to R^3$ eğrisi türevlenebilir olsun. I ile ilgili olarak gözönünde bulundurulması gereken husus, α nın, uyarlanmış metriği türevlenebilir geometrik kavrama dönüştürmesidir. Yapılması gereken E_1^3 deki Öklid eğrileri için yapılması gerekenle aynıdır. Bununla beraber; E_1^3 de bir doğruya sahip olabilen farklı nedensel karakterler bu incelemeyi daha da zorlaştıracaktır. Çünkü her bir nedensel karakterin ayrıca değerlendirilmesi gerekmektedir.

Bu bölümde I; $0 \in I$ olacak şekilde bir açık aralık olsun. $\alpha : I \subset R \to E_1^3$ nin türevlenebilirliği tanımlanacaktır.

2.1 Parametrize Eğriler

Tanım 2.1.1.

α, E_1^3 de bir eğri olsun. $\alpha'(t)$ space-like (sır. time-like,light-like) bir vektör ise, α eğrisi t noktasında **space-like**'dir (sır. **time-like,light-like**) denir. α eğrisi $\forall t \in I$ için space-like (sır. time-like,light-like) ise α **space-like'tır** (sır. **time-like,light-like**) denir.

Eğri örneklerini göstermeden önce; genelde E_1^3 'deki herhangi bir eğrinin yukarıdaki tiplerden biri olmadığına dikkat etmek gerekir. Tabii ki, her $t \in I$ için, $\alpha'(t)$ space-like, time-like veya light-like olacaktır ama bu özellik her I aralığında geçerli olmaz.

Örneğin; $\alpha(t)=\left(\cosh(t),t^2,\sinh(t)\right)$ eğrisi düşünülürse; $\langle \alpha'(t),\alpha'(t)\rangle = 4t^2-1$ elde edilir. Böylelikle, eğri;

$(-\infty,-1/2)\cup(1/2,\infty)$ aralığında space-like,

$(1/2,1/2)$ aralığında time-like,

$\{1/2,1/2\}$ noktalarında ise light-like'dir.

Space-like (veya time-like) koşulunun açık bir özellik olduğunu da burada vurgulamak gerekir, yani, $\alpha : t_0 \in I$ noktasında space-like (veya time-like) iken, α 'nın aynı nedensel karaktere sahip olduğu $(t_0-\delta, t_0+\delta)$ aralığı vardır. $t_0 \in I$ noktasında, $\langle \alpha'(t_0),\alpha'(t_0)\rangle > 0\ (<0)$ ise, eğrinin sürekliliği t_0 civarında $\langle \alpha'(t_0),\alpha'(t)\rangle > 0\ (<0)$ olan bir aralığın varlığını gösterir.

Nedensel karakterin tanımını doğrulamanın bir yolu da şu şekildedir.

$\alpha : I \to E_1^3$ türevlenebilir bir eğri olsun. $\forall t \in I$ için

$$(d\alpha)_t : T_t I \equiv R \to T_{\alpha(t)}E_1^3 \equiv R^3$$

ile gösterilen diferansiyel eşlemi gözönüne alalım. Bu;

$$(d\alpha)_t(s) = \frac{d}{du\,|_{u=0}}\alpha(t+su) = s.\alpha'(t)\ veya\ (d\alpha)_t = \alpha'(t)$$

dir. Şimdi; $(d\alpha)_t\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)=\alpha'(t)$ olduğunu inceleyelim.

$\alpha^*\langle,\rangle_t(m,n)=\langle (d\alpha)_t(m),(d\alpha)_t(n)\rangle >= mn\langle \alpha'(t),\alpha'(t)\rangle$ ile tanımlanan $R=T_tI$ da α daki uyarlanmış metrik $\alpha^*\langle,\rangle$ yi gözönüne alalım. $\frac{\partial}{\partial t}$ ile tanımlanan T_tI daki doğal baz gözönüne alınırsa, $\alpha^*\langle,\rangle_t\left(\frac{\partial}{\partial t},\frac{\partial}{\partial t}\right)=\langle \alpha'(t),\alpha'(t)\rangle$ olur.

$\left(T_t I, \alpha^* \langle , \rangle\right)$ bir boyutlu metrik uzaydır. α nın t noktasındaki nedensel karakteri $\left(T_t I, \alpha^* \langle , \rangle\right)$ metrik uzayının nedensel karakteri ile aynıdır. Yani;

α eğrisi t noktasında;

Uzay pozitif tanımlıysa, veya $\alpha'(t) = 0$ ise space-like,

Uzay negatif tanımlıysa, time-like,

Uzay dejenere ise light-like olduğunu söylenir.

$t_0 \in I$ noktasında $\alpha'(t_0) \neq 0$ ise α eğrisi t_0 noktasında regüler denir. I açık aralığında her bir t_0 için $\alpha'(t_0) \neq 0$ ise o eğriye regüler denir.

E_1^3'deki düzlemsel eğrilerden, yani, R^3'ün afin bir düzlemindeki eğrilerden, bazı örnekler verelim. $p, v \in R^3$ ve $r > 0$ olsun.

1. $\alpha(t) = p + tv$ doğrusu v ile aynı nedensel karaktere sahiptir.

2. $\alpha(t) = p + r(\cos(t), \sin(t), 0)$ dairesi space-like bir düzlemde space-like bir eğridir.

3. $\alpha(t) = p + r(0, \sinh(t), \cosh(t))$ hiperbolü time-like bir düzlemde space-like'tır.

4. $\alpha(t) = p + r(0, \cosh(t), \sinh(t))$ hiperbolü time-like bir düzlemde time-like'tır

Şimdi de düzlemsel eğrilerin örneklerini görelim:

1. $\alpha(t) = (\cos(t), \sin(t), at) \quad a \neq 0$ helisi. Bu eğri bir Öklid helisidir.

2. $\alpha(t) = (at, \sinh(t), \cosh(t)) \quad a \neq 0$

3. $\alpha(t) = (at, \cosh(t), \sinh(t)) \quad a \neq 0$

Minkowski uzayındaki bir eğrinin nedensel karakteri eğrilerin regülerliği ve topolojisi üzerinde etkilidir.

Teorem 2.1.2

Herhangi bir time-like veya light-like eğri regülerdir

İspat:

α eğrisi time-like olsun. $\alpha(t)=(x(t),y(t),z(t))$ yazalım. *x,y,z* fonksiyonları *t*'ye gore türevlenebilir olsun. $\langle \alpha'(t),\alpha'(t)\rangle = x'(t)^2 + y'(t)^2 - z'(t)^2 < 0$ özellikle $z'(t) \neq 0$ dır. Bu da α eğrisinin regüler olduğu anlamına gelir.

α eğrisi light-like ise yine $z'(t) \neq 0$ dır. Dolayısıyla eğri regülerdir. Çünkü $z'(t) = 0$ olsaydı $x'(t) = y'(t) = 0$ olurdu ve $\alpha'(t) = 0$ olurdu. Bu ise eğrinin space-like olduğunu gösterirdi.

İspatın sonucu olarak t_0 civarlarında herhangi bir time-like veya light-like eğri lokal olarak f ve g gibi düzgün fonksiyonlar için şu şekilde yazılabilir:

$$\alpha(t) = (f(t), g(t), t), \quad t \in (t_0 - \delta, t_0 + \delta)$$

Space-like bir eğri için $t_0 \in I; \quad \delta > 0$ şöyle ki;

$\alpha(t) = (f(t), t, g(t))$ veya $\alpha(t) = (t, f(t), g(t))$ sonucuna varılır.

Nedensel karakter ile ilgili bir sonuçta şu şekildedir.

Teorem 2.1.3

α eğrisi E_1^3 de P afin düzleminde yer alan kapalı bir eğri olsun.

1. α eğrisi space-like ise P space-like bir düzlemdir.

2. Eğri time-like veya light-like değildir.

İspat:

1. Genelliği bozmadan P düzlemini bir vektör düzlemi kabul edelim ve $P=\langle E_2,E_3\rangle$ time-like düzlemini gözönüne alalım. Bu durumda $\alpha(t)=(0,y(t),z(t))$ olur. $y:R\to R$ olarak verilen eşlem t_0 a yakın bir noktada maksimuma ulaşır. Bu durumda $y'(t_0)=0$ olur ve $\alpha'(t)=(0,0,z'(t))$ time-like bir vektördür.

$P=\langle E_1,E_2+E_3\rangle$ light-like düzlemini gözönüne alalım. $\alpha(t)=(x(t),y(t),y(t))$ olur. t_0, $x(t)$ fonksiyonunun maksimum noktası olsun. Bu durumda; $\alpha'(t_0)=(0,y'(t_0),y'(t_0))$ light-like bir vektördür: Çelişki, buradan P düzleminin space-like olduğu ortaya çıkar.

2. α time-like bir eğri olsun. Bu durumda; space-like veya light-like düzlemlerde time-like vektörler olmadığına göre, düzlem time-like olmak zorundadır. $P=\langle E_2,E_3\rangle$ ise, $z(t)$ fonksiyonunun maksimuma ulaştığı t_0 noktası $\alpha'(t_0)=(0,y'(t_0),0)$ denklemini sağlar: bu vektör space-like'dır. Bu bir çelişkidir. Benzer mantık light-like eğriler için de yürütülebilir.

Sonuç 2.1.4

E_1^3 'de time-like veya light-like olan kapalı eğriler yoktur.

Space-like olmayan düzlemlerde (kapalı olmayan) space-like olan eğrilerin olduğu görülebilir. Örneğin $\alpha(s)=(0,\sinh(s),\cosh(s))$ eğrisi, $\langle E_2,E_3\rangle$ time-like düzleminde space-like bir eğridir. Benzer şekilde; $\langle E_1,E_2+E_3\rangle$ light-like düzleminde yer alan $\alpha(s)=\left(s,s^2,s^2\right)$ eğrisi ise space-like'dır.

Buradan itibaren bahsedilen eğrilerin regüler olduğu kabul edilmiştir.

Lemma 2.1.5

α eğrisi space-like veya time-like olsun. Bu durumda $\left|\alpha'(s)\right| = 1$ olacak şekilde bir parametre değişimi vardır. Tam olarak; verilen bir t_0 noktasında $\delta, \in > 0$ ve $\Phi : (-\in, \in) \to (t_o - \delta, t_o + \delta)$ diffeomorfizmi vardır öyle ki $\beta = \alpha \circ \Phi$ ile verilen $\beta : (-\in, \in) \to E_1^3$ eğrisi $\left|\beta'(s)\right| = 1$ özelliğini sağlar. Böyle bir durumda eğrinin yay uzunluğu parametrelendirilmiştir denir.

İspat:

Time-like eğriler için ispat yapılırasa; $S : I \to R$ eşlemini şu şekilde tanımlanır.

$$S(t) = -\int_{t_0}^{t} \langle \alpha'(u), \alpha'(u) \rangle \, du$$

$S'(t_0) > 0$ olduğundan, $S : t = t_0$ noktası civarında lokal bir diffeomorfizmdir. Çünkü $S(t_0) = 0$ dır ve $\delta, \in > 0$ vardır $S : (-\in, \in) \to (t_o - \delta, t_o + \delta)$ diffeomorfizmdir. Aranan eşlem $\Phi = S^{-1}$ dir.

Light-like eğriler için, $\alpha'(t)$ vektörü light-like'dir ve yay uzunluğunu tekrar paremetrelerle ifade etmek işe yaramaz. Ama $\langle \alpha'(t), \alpha'(t) \rangle = 0$, ifadesinin türevi alınırsa $\langle \alpha''(t), \alpha'(t) \rangle = 0$ eşitliği elde edilir. Farzedelim ki; $\alpha''(t) \neq 0$ olsun. $\alpha''(t)$ space-like bir vektördür ve $\left|\alpha''(t)\right| = 1$ i elde etmek için α parametrelerle ifade edilebilir.

Lemma 2.1.6

α eğrisi E_1^3 de light-like bir eğri olsun. Verilen $\beta(s) = \alpha(\Phi(s))$, $\left|\beta''(s)\right| = 1$ ile α eğrisinin yeniden parametrizesi vardır. α yay-uzunluğu rastgele-parametrizedir denir.

İspat:

$\beta(s) = \alpha(\Phi(s))$, Φ bilinmeyen fonksiyondur. Bu ifadenin iki kez türevi alınırsa; $\beta''(s) = \Phi''(s)\alpha'(t) + \Phi'(s)^2 \alpha''(t)$ olur. Bu durumda; $\langle \beta''(s), \beta''(s) \rangle = \Phi'(s)^4 \, |\, \alpha''(t) \,|^2$ dir. Böylece; Φ fonksiyonu; $\Phi'(s) = \dfrac{1}{\sqrt{|\, \alpha''(\Phi(s)) \,|}}$, $\Phi(0) = t_0$ diferansiyel denkleminin çözümü olacak şekilde tanımlanır.

2.2 Eğrilik ve Burulma

Bu bölüm bu konu için anahtar konumundadır. Regüler bir eğri verildiğinde; eğrinin herhangi bir noktası için eğrinin geometrisini tanımlamak için gereken ortonormal baz Frenet üçyüzlüsüyle ifade edilir. Bu bazın eğri boyunca değişimi, eğrinin ortam uzayında nasıl deforme olduğu hakkında bilgi verir.

Eğrilerin en basit şekli doğrudur. $p \in E_1^3$ ve $v \neq 0$ iken, p noktası boyunca, v vektörü yönündeki doğru $\alpha(t) = p + tv$ şeklinde parametrelerle ifade edilir ve $\alpha''(s) = 0$ olur. İvmenin katsayısı sıfırdır, doğrunun eğriliğinin sıfır olduğu söylenir.

Diğer taraftan, α eğrisi, herhangi bir s noktasında $\alpha''(s) = 0$ şartını sağlayan regüler bir eğri olsun. Bazı $v \neq 0$ vektörleri ve $\alpha(s) = p + sv$ için $\alpha'(s) = v$ şartını sağlar. Bu da α nın p noktasından geçen v vektörü yönündeki bir doğruyu parametrize ettiğini gösterir. R^3 ‘de bir doğru verildiğinde, bu doğru başka parametrelerle de ifade edilebilir. Örneğin $\alpha(s) = s^3 E_1$ doğrusu $< E_1 >$ in parametrelerle ifade edilmesidir ve $\alpha''(s) = 0$ eşitliğini sağlamaz.

Yay-uzunluğu veya sahte-yay-uzunluğu parametreleriyle ifade edilen regüler bir eğri düşünelim. $T(s) = \alpha'(s)$ vektörüne s noktasındaki teğet vektörü denir. Özellikle, $\langle T(s), T'(s) \rangle = 0$ olur. $T'(s) \neq 0$ olduğu ve her s noktası için $T'(s)$ nin $T(s)$ e orantılı olmadığı varsayılır. Bu da eğrinin doğru olmasını engeller.

Şimdi nedensel karakterlerine göre eğrilerin eğrilik burulma ve Frenet denklemlerini bulalım.

2.2.1 Time-like durum

α eğrisi time-like bir eğri olsun. $T'(s) \neq 0$ space-like vektörü, $T(s)$ den bağımsız bir vektördür. α eğrisinin s noktasında eğriliği $\kappa(s) = |T'(s)|$ olarak tanımlanır. $N(s) = \dfrac{T'(s)}{\kappa(s)} = \dfrac{\alpha''(s)}{|\alpha''(s)|}$ ile Normal vektörü, $B(s) = T(s) \times N(s)$ ile Binormal vektörü tanımlanır. Buradan $\kappa(s) = \langle T'(s), N(s) \rangle$ yazılabilir.

$B(s)$ birim vektördür ve space-like'dır. Her s için, $\{T,N,B\}$ E_1^3 ün ortonormal bir bazıdır ve buna α'nın **Frenet üç yüzlüsü** denir. α nın s noktasındaki **burulması** $\tau(s)=\langle N'(s),B(s)\rangle$ şeklinde tanımlanır:

Frenet vektörlerinin türevlerinin, aynı Frenet bazına bağlı olarak ifade edilmesiyle Frenet denklemleri elde edilir. Yani; *T* time-like, *N* ve *B* space-like vektörlerdir.

$$
\begin{aligned}
&N' = aT + bN + cB\\
&< N'.T >= a < T,T > +b < N,T > +c < B,T >= -a\\
&< N,T >' = < N',T > + < N,T' > \quad \Rightarrow 0 = -a + < N,\kappa N > \quad \Rightarrow a = \kappa\\
&< N'.N >= a < T,N > +b < N,N > +c < B,N > \quad \Rightarrow b = 0\\
&< N'.B >= a < T,B > +b < N,B > +c < B,B > \quad \Rightarrow \tau = c
\end{aligned}
$$

$$N' = \kappa T + \tau B$$

$$
\begin{aligned}
&B' = aT + bN + cB\\
&< B'.T >= a < T,T > +b < N,T > +c < B,T >= -a\\
&< B,T >' = < B,T' > + < B'.T > \quad \Rightarrow 0 = -a + < B,\kappa N > \quad \Rightarrow a = 0\\
&< B',N >= a < T,N > +b < N,N > +c < B,N >, \quad \Rightarrow b = -\tau\\
&< B',B >= a < T,B > +b < N,B > +c < B,B >, \quad \Rightarrow c = 0
\end{aligned}
$$

$$B' = -\tau N$$

Frenet denklemleri $\begin{pmatrix} T' \\ N' \\ B' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \kappa & 0 \\ \kappa & 0 & \tau \\ 0 & -\tau & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T \\ N \\ B \end{pmatrix}$ olur.

2.2.2 Space-like durum

α space-like bir eğri olsun. $T'(s)$ in nedensel karakterine bağlı olarak üç olasılık vardır:

1. $T'(s)$ vektörü space-like'dır.

$$\kappa(s) = | T'(s) |, \ N(s) = \frac{T'(s)}{\kappa(s)} \text{ ve } B(s) = T(s) \times N(s)$$

olarak yazılır. α nın burulması $\tau(s) = -\langle N'(s), B(s)\rangle$ ile tanımlanır.

T ve N space-like ve B ise time-like vektörlerdir.

$$N' = aT + bN + cB$$
$$< N'.T >= a < T,T > +b < N,T > +c < B,T >= a$$
$$< N,T >' =< N',T > + < N,T' > \quad 0 = a+ < N,\kappa N > \quad \Rightarrow a = -\kappa$$
$$< N'.N >= a < T,N > +b < N,N > +c < B,N >, \quad \Rightarrow b = 0$$
$$< N'.B >= a < T,B > +b < N,B > +c < B,B >, \quad \Rightarrow \tau = c$$

$$N' = -\kappa T + \tau B$$

$$B' = aT + bN + cB$$
$$< B'.T >= a < T,T > +b < N,T > +c < B,T >= a$$
$$< B,T >' =< B',T > + < B,T' > \quad 0 = a+ < B,\kappa N > \quad \Rightarrow a = 0$$
$$< B',N >= a < T,N > +b < N,N > +c < B,N > \quad \Rightarrow b = \tau$$
$$< B',B >= a < T,B > +b < N,B > +c < B,B > \quad \Rightarrow c = 0$$

$$B' = \tau N$$

Frenet denklemleri $\begin{pmatrix} T' \\ N' \\ B' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \kappa & 0 \\ -\kappa & 0 & \tau \\ 0 & \tau & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T \\ N \\ B \end{pmatrix}$ olur.

2. $T'(s)$ vektörü time-like'dır.

$\kappa(s) = \sqrt{-< T'(s), T'(s) >}$ olduğunda $N(s) = \dfrac{T'(s)}{\kappa(s)}$, $B(s) = T(s) \times N(s)$ dir.

α nın burulması $\tau(s) = \langle N'(s), B(s) \rangle$ ile tanımlanır.

T *space* − *like*, N *time* − *like ve* B *space* − *like vektörlerdir*

$$N' = aT + bN + cB$$
$$< N'.T >= a < T,T > +b < N,T > +c < B,T >= a$$
$$< N,T >' =< N',T > + < N,T' >= 0 \quad \Rightarrow 0 = a+ < N,\kappa N > \quad \Rightarrow a = \kappa$$
$$< N'.N >= a < T,N > +b < N,N > +c < B,N > \quad \Rightarrow b = 0$$
$$< N'.B >= a < T,B > +b < N,B > +c < B,B > \quad \Rightarrow \tau = c$$

$$N' = \kappa T + \tau B$$

$B' = aT + bN + cB$

$< B'.T >= a < T,T > +b < N,T > +c < B,T >= a$

$< B,T >' =< B',T > + < B,T' > \quad \Rightarrow 0 = a + < B, \kappa N > \quad \Rightarrow a = 0$

$< B', N >= a < T, N > +b < N, N > +c < B, N > \quad \Rightarrow b = \tau$

$< B', B >= a < T, B > +b < N, B > +c < B, B > \quad \Rightarrow c = 0$

$B' = \tau N$

Frenet denklemleri;

$$\begin{pmatrix} T' \\ N' \\ B' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \kappa & 0 \\ \kappa & 0 & \tau \\ 0 & \tau & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T \\ N \\ B \end{pmatrix}$$

olur.

3. $T'(s)$ herhangi bir s için light-like'dır.

($T'(s) \neq 0$ olduğunu ve $T(s)$ ile orantılı olmadığını anımsayalım). Normal vektör; $N(s) = T'(s)$ dir ve $T(s)$ ile lineer bağımsızdır. B unik (tek türlü) bir light-like vektör olsun öyle ki $\langle N, B \rangle = 1$ olup T'ye ortogonal olsun. $B(s)$ vektörü s noktasında α nın binormal bir vektörüdür. *T* space-like, *N* light-like ve *B* light –like vektörlerdir.

$N' = aT + bN + cB$

$< N'.T >= a < T,T > +b < N,T > +c < B,T >= a$

$< N,T >' =< N',T > + < N,T' > \quad \Rightarrow 0 = a + < N, \kappa N > \quad \Rightarrow a = 0$

$< N'.N >= a < T, N > +b < N, N > +c < B, N > \quad \Rightarrow c = 0$

$< N'.B >= a < T, B > +b < N, B > +c < B, B > \quad \Rightarrow \tau = b$

$N' = \tau N$

$B' = aT + bN + cB$

$< B'.T >= a < T,T > +b < N,T > +c < B,T >= a$

$< B,T >' =< B',T > + < B,T' > \quad \Rightarrow 0 = a + < B, N > \quad \Rightarrow a = -1$

$< B', N >= a < T, N > +b < N, N > +c < B, N > \quad \Rightarrow c = -\tau$

$< B', B >= a < T, B > +b < N, B > +c < B, B > \quad \Rightarrow b = 0$

$B' = -T - \tau B$

Frenet denklemleri;

$$\begin{pmatrix} T' \\ N' \\ B' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & \tau & 0 \\ -1 & 0 & -\tau \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T \\ N \\ B \end{pmatrix}$$

olur.

τ fonksiyonuna eğrinin **burulması** denir. Eğrinin eğriliğinin bir tanımı yoktur.

2.2.3 Light-like durum

α sahte-yay-uzunluğu ile parametrize edilen light-like bir eğri olsun, yani, $\alpha''(s)$, space-like tipinde birim vektördür. $T = \alpha'$ teğet vektörü göz önünde bulundurularak normal vektörü $N(s) = T'(s)$ şeklinde tanımlanır. B binormal vektörü ise unik bir light-like vektör olsun öyle ki $\langle T, B \rangle = 1$ olup N'ye ortogonal olsun.

$$T \; light-like,\; N \; space-like \; ve \; B \, light-like \; vektörlerdir$$

$$\begin{aligned}
&N' = aT + bN + cB \\
&< N'.T >= a < T,T > +b < N,T > +c < B,T >= c \\
&< N,T >' =< N',T > + < N,T' > \quad \Rightarrow 0 = c+ < N,N > \quad c = -1 \\
&< N'.N >= a < T,N > +b < N,N > +c < B,N > \quad \Rightarrow b = 0 \\
&< N'.B >= a < T,B > +b < N,B > +c < B,B > \quad \Rightarrow \tau = a
\end{aligned}$$

$$N' = \tau T - B$$

$$\begin{aligned}
&B' = aT + bN + cB \\
&< B'.T >= a < T,T > +b < N,T > +c < B,T >= c \\
&< B,T >' =< B',T > + < B,T' > \quad \Rightarrow 0 = c+ < B,N > \quad \Rightarrow c = 0 \\
&< B',N >= a < T,N > +b < N,N > +c < B,N > \quad \Rightarrow b = -\tau \\
&< B',B >= a < T,B > +b < N,B > +c < B,B > \quad \Rightarrow a = 0
\end{aligned}$$

$$B' = -\tau N$$

olup, Frenet vektörleri;

$$\begin{pmatrix} T' \\ N' \\ B' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \tau & 0 & -1 \\ 0 & -\tau & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T \\ N \\ B \end{pmatrix}$$

olur. τ fonksiyonu α nın burulmasıdır.

α nın light-like, T' nün space-like olduğu durum gösterilmişti, eğrinin eğriliği tanımlanmamıştır.

Bu bölümü eğrilerin genel teorisi üzerine bazı noktalara dikkat çekerek bitirelim. Eğrilik kavramı ve burulmanın izometrik sabit olduğu gösterilebilir. Yani, $M : E_1^3 \to E_1^3$, eşlemi E_1^3 ün rijid hareketi iken $\beta(s) = M \circ \alpha(s)$ eğrisi gözönüne alınırsa; buradan $\kappa_\beta(s) = \kappa_\alpha(s)$ ve $\tau_\beta(s) = \pm\tau_\alpha(s)$ olur.

Benzer şekilde Öklid ortamında olduğu gibi, eğri, yay-uzunluğu parametrileri ile ifade edilmediği durumda eğrilik ve burulmanın formülü bulunabilir. İlk olarak; bu tip eğriler için eğrilik ve burulmayı tanımlamamız gerekir.

$\beta = \alpha \circ \alpha$ yay-uzunluğunun herhangi bir parametre ile ifade edilen şekli olsun. $\kappa_\alpha(t) = \kappa_\beta \circ \Phi^{-1}$ ile eğrilik, benzer şekilde de burulma tanımlanır. Bu tanımlamanın tekrar parametre ile ifade edilmesine bağlı olmadığı gösterilebilir. Örneğin; time-like eğriler için aşağıdaki denklemler geçerlidir.

$$|\alpha'| = v, \quad T' = v\kappa N, \quad N' = v(\kappa T + \tau B), \quad B' = -v\tau N$$

$$T = \alpha'/v \Rightarrow \alpha' = vT$$

$$\alpha'' = v'T + T'v = v'T + v^2\kappa N$$

$$\alpha' \times \alpha'' = v^3\kappa B, \quad \Rightarrow \kappa = \frac{\alpha' \times \alpha''}{v^3 B} \Rightarrow \kappa = \frac{|\alpha' \times \alpha''|}{|\alpha'|^3}$$

$$\alpha''' = v''T + v'(v\kappa N) + 2vv'\kappa N + v^2\kappa' N + v^2\kappa(v\kappa T + v\tau B)$$

$$\alpha''' = T(v'' + v^3\kappa^2) + N(3vv'\kappa + v^2\kappa') + B(v^3\kappa\tau)$$

$$\langle \alpha' \times \alpha'', \alpha''' \rangle = v^6\kappa^2\tau B$$

$$\tau = \frac{\langle \alpha' \times \alpha'', \alpha''' \rangle}{(\alpha' \times \alpha'')^2}, \quad \Rightarrow \quad \tau = \frac{\det\langle \alpha', \alpha'', \alpha''' \rangle}{|(\alpha' \times \alpha'')|}$$

Düzlemsel eğrilerden bahsederken, time-like eğriler için aşağıdaki sonuçlara varılır ve bu sonuçlar Öklid düzlemsel eğrilerindeki sonuçlara benzerdir.

Teorem 2.2.4.

$\kappa : I \to R$ düzgün bir fonksiyon ve P time-like bir düzlem olsun. P düzleminde, eğriliği κ olan unik bir space-like eğri vardır. Aynı sonuç, κ eğrilik fonksiyonu olduğu durumda P düzleminde time-like bir eğrinin varlığını garantiler.

İspat:

1. Genelliği kaybetmeden, $P =< E_1, E_3 >$ ve $p_0 = (0,0,0)$ olduğunu varsayalım. $\alpha(0) = (0,0,0)$, $\alpha'(0) = E_1$ *ve* $\kappa_\alpha(s) = \kappa(s)$ eşitliğini sağlayan α space-like eğrisi bulunabilir.

$\theta(s) : I \to R$ fonksiyonu olsun.

$$\theta(s) = \int_0^s \kappa(t)dt, \ \ ve \ \ x(s) = \int_0^s \cosh(\theta(t))dt, \quad z(s) = \int_0^s \sinh(\theta(t))dt$$

$\alpha(s) = (x(s), z(s))$ aranan eğridir. Öncelikle; $\alpha(0) = (0,0)$ olur.

$$\alpha'(s) = (\cosh(\theta(s)), \sinh(\theta(s)))$$

$$\alpha''(s) = \kappa(s)(\sinh(\theta(s)), \cosh(\theta(s)))$$

$\alpha(s)$ eğrisi $\alpha'(s) = (\cosh(0), \sinh(0)) = (1,0)$ ile yay-uzunluğuna göre parametrize edilen space-like bir eğridir. $\alpha(s)$ nın eğriliği $\kappa(s) = |\alpha''(s)|$ dir.

2. Eğer E_3 hızıyla başlayan time-like bir eğri aranırsa,

$$\theta(s) = \int_0^s \kappa(t)dt, \ \ ve \ \ x(s) = \int_0^s \sinh(\theta(t))dt, \quad z(s) = \int_0^s \cosh(\theta(t))dt$$

olur.

2.3 Sabit Eğriliği Olan Düzlemsel Eğriler

Düzlemsel bir eğri gözönüne alalım, yani afin bir düzlemde yer alan E_1^3’in bir eğrisini düşünelim. Rijid bir hareketten sonra, bu düzlemin bir vektör düzlemi olduğu kabul edilebilir. Bu bölümde sabit eğriliği olan düzlemsel eğriler incelenecektir. Öncelikle Öklid düzlemindeki bir eğri Lorentz ortamına uyarlanabilir. α E^2 de, yay-uzunluğu ile parametrik ifade edilmiş düzlemsel bir eğriyse ve v sabit birim yön ise, $T(s)$ ve v arasındaki olan $\theta(s)$ açısı $\cos(\theta(s)) = \langle T(s), v\rangle$ şartını sağlar. α eğrisinin eğriliğinin $|\theta'(s)|$ olduğu kanıtlanabilir.

Lorentz ortamında, açıdan bahsetmek gerekli olduğu halde, bu sonuç genişletilemez. Bu sadece time-like eğriler için yapılabilir.

Teorem 2.3.1.

α yay-uzunluğu ile parametrik ifade edilmiş time-like bir düzlemde yer alan time-like bir eğri ve v ileriyi gösteren düzlemin birim sabit vektörü olmak üzere; $\Phi(s)$, $T(s)$ ve v arasındaki hiperbolik açı olsun. $\kappa(s) = |\Phi'(s)|$ olur.

İspat:

Genellemeyi kaybetmeden $P = < E_2, E_3 >$ ve $v = (0, v_2, v_3)$, $v_3 > 0$. Şunu anımsanırsa;

$$-\cosh\Phi(s) = \langle T(s), v\rangle$$

Bu ifadenin türevi alınırsa şu elde edilir:

$$-\Phi'(s)\sinh\Phi(s) = \kappa(s)\langle N(s), v\rangle$$

$\{N, T\}$ P’nin bazı olduğuna göre $v = aT + bN$ yazılabilir. a,b sabitlerini bulabilmek için eşitliğin iki tarafını sırasıyla *T* ve *N* ile çarparız:

$$\langle v,T\rangle = a\langle T,T\rangle + b\langle N,T\rangle \Rightarrow a = -\langle v,T\rangle$$
$$\langle v,N\rangle = a\langle T,N\rangle + b\langle N,N\rangle \Rightarrow b = \langle v,N\rangle$$

$$v = \langle v,N(s)\rangle N(s) - \langle v,T(s)\rangle T(s)$$

olarak bulunur. Bulunan eşitliğin her iki tarafı v ile çarpılırsa;

$$-1 = \langle v,N(s)\rangle^2 - \langle v,T(s)\rangle^2 = \langle v,N(s)\rangle^2 - \cosh(\Phi(s))^2$$
$$\langle v,N(s)\rangle^2 = -1 + \cosh(\Phi(s))^2 \quad \Rightarrow \langle v,N(s)\rangle = \pm\sinh(\Phi(s))$$

Buradan $|\Phi'(s)| = \kappa(s)$ sonucuna ulaşılır.

Aşağıda eğriliği sıfırdan farklı ve sabit olan düzlemsel eğriler üzerinde durulacaktır. (eğrilik sıfır olursa, eğri doğru olur). Bu eğrilerin üzerinde çalışırken eğrilerin nedensel karakteri ayırt edici olmalıdır. Bölüm 1 deki Eğrileri bir boost grubunun hareketleri vasıtasıyla bir noktanın yörüngeleri olarak yeniden keşfedilebilir.

1. (**Time-like durum**) Eğriyi içeren düzlem time-like olmalıdır. Böylece; $P = < E_2, E_3 >$ olduğu kabul edilir. Böylece $\alpha(s) = y(s)E_2 + z(s)E_3$ olur. Eğri yay-uzunluğu ile parametrik ifade edilebildiğine göre;

$\langle \alpha', \alpha' \rangle = y'(s)^2 - z'(s)^2 = -1$ Bu durumda;

$$z'(s) = \cosh\Phi(s), \quad y'(s) = \sinh\Phi(s),$$

α nın eğriliğini şu şekilde hesaplanır:

$\kappa(s) = |\alpha''(s)| = |\Phi'(s)| := a$ dersek, $\Phi(s) = as + b$ olur. Bu da şunu getirir;

$y'(s) = \sinh(as+b) \quad z'(s) = \cosh(as+b)$

Sonra; $\alpha(s) = \dfrac{1}{a}\left(\cosh(as+b)E_2 + \sinh(as+b)E_3\right)$

Bu eğri P düzleminde bir Öklid hiperbolüdür.

2. (**Space-like durum**) Sabit eğriliği olan düzlemsel space-like eğriler bulunabilir.

(a) $P =< E_1, E_2 >$ olduğu kabul edilirse, P üzerinde Lorentz metriği ile uyarlanmış metrik Öklid metriği ile uyum sağlar. Böylece; eğriliğin göstergeleri her iki durumda aynıdır. Yani α bir Öklid dairesidir.

(b) Düzlem time-like ise, $\{y=0\}$ ile verilen düzlem alınırsa, $\alpha(s)=(x(s),0,z(s))$ olarak; $\langle\alpha',\alpha'\rangle = x'(s)^2 - z'(s)^2 = 1$ yazılabilir. Böylece; $\theta \in R$ fonksiyonu vardır ve şunu sağlar:

$$x'(s)=\cosh(\theta(s)) \quad z'(s)=\sinh(\theta(s)) \qquad \Phi(s)=as+b \text{ olarak düşünürsek;}$$

$$\alpha(s)=(x(s),z(s))=\left(\frac{1}{a}\sinh(as+b),\frac{1}{a}\cosh(as+b)\right)=\frac{1}{a}(\sinh(as+b),\cosh(as+b))$$

Bu eğri bir Öklid hiperbolüdür.

(c) Düzlemin light-like olduğunu varsayalım. Bu durumda; bir eğrinin eğriliğinin göstergesi yoktur. Rijid bir hareketten sonra; α eğrisini içeren düzlemin $\{y-z=0\}$ olduğu kabul edilirse eğri $\alpha(s)=(x(s),y(s),y(s))$ şeklinde yazılabilir., α yay-uzunluğu ile parametrik ifade edilen, space-like bir eğri olduğuna göre: $\langle\alpha',\alpha'\rangle = x'(s)^2 = 1$.

$x(s)=s+c_1$ olur. $T'(s)=(0,y''(s),z''(s))$ vektörü light-like olduğuna ve. düzlemde tek bir light-like yön olduğuna göre; $T'(s)$ vektörü sabit bir vektör ile mesela, $v=(0,1,1)$ vektörüyle orantılıdır. İntegral yardımı ile;

$$y''=1 \Rightarrow y'=s+c_2 \Rightarrow y=\frac{s^2}{2}+c_2s+c_3$$

$$\begin{aligned}\alpha(s)&=(s+c_1)E_1+\left(\frac{s^2}{2}+c_2s+c_3\right)(E_2+E_3)\\ &=p_0+sE_1+\left(\frac{s^2}{2}+c_2s\right)(E_2+E_3)\end{aligned}$$

α, P düzleminde, ekseni light-like yöne paralel olan bir paraboldür.

3. (**Light-like durum**) α , P düzleminde yer alan light-like bir eğri olsun. P düzlemi light-like ya da time-like olabilir.

(**a**) Düzlem light-like ise, $P =< E_1, E_2 + E_3 >$ olsun. $\alpha'(s)$ light-like olduğuna ve sadece bir light-like yön olduğuna göre, bu durumda bazı türevlenebilir f fonksiyonları için $\alpha'(s) = f(s)(E_2 + E_3)$ olur. Böyle bir durumda; α düz bir çizgidir. Bu durumda Frenet üç yüzlüsü dikkate alınmaz.

(**b**) Düzlem time-like ise, $P =< E_2, E_3 >$olsun. Sadece iki yön olduğuna ve her ikisi de lineer bağımsız, yani, $E_2 + E_3$ ve $E_2 - E_3$ olduğuna göre ve $\alpha'(s) = f(s)(E_2 \pm E_3)$ olduğuna göre, $v = 0$ vektörünün light-like olmadığının kanıtı şunu gösterir: I aralığında $\alpha'(s) = f(s)(E_2 + E_3)$ veya $\alpha'(s) = f(s)(E_2 - E_3)$ olur. Her durumda; eğri düz bir çizgidir.

Buna benzer bir konu hatırlanacak olursa; α space-like ve N light-like olduğu durumda, I aralığında $\tau = 0$ ise eğrinin sabit bir eğriliği olduğu söylenebilir. Böylece $N'(s) = 0$. İntegrasyon ile $N(s) = v$ nin space-like bir vektör olduğu durumda; $\alpha'(s) = sv + w$ olur. Ama $\langle T, N \rangle = 0$ olduğunda, her s için $s + \langle v, w \rangle = 0$: çelişki. Tek olasılık $v = 0$, yani, α nın düz bir çizgi olmasıdır.

Teorem 2.3.2.

E_1^3 ün rijid bir hareketinden sonra; Öklid daireleri, hiperboller ve paraboller sabit eğriliği(sıfır olmayan) olan düzlemsel eğrilerdir.

2.4 E_1^3 Helisler ve Bertrand Eğrileri

Öklid uzayında; teğet doğrularının sabit yönde sabit açı yaptığı bir eğriye **helis** denir. Bu yöne **helisin ekseni** denir. Lancret'e göre bir eğrinin helis olaması ancak ve ancak τ/κ nın sabit bir fonksiyon olmasıdır. Örneğin düzlemsel eğriler helistir. Eğriliği ve burulması sabit olan helise **silindirik helis** denir.

Bu ifade Lorentz anlamında şu şekilde genişletilebilir. Vektörler arasında bir açıdan bahsedilemememesine rağmen; sabit bir v yönü için $\langle T, v\rangle$ fonksiyonu gözönüne alınabilir ve bu fonksiyonun da sabit olduğu söylenebilir.

Tanım 2.4.1

E_1^3 de helisler reguler eğrilerdir, öyle ki bazı sabit $v \neq 0$ vektörleri için $\langle T(s), v\rangle$ fonksiyonu sabittir. v yönünde herhangi bir paralele de **helis ekseni** denir.

Eğrinin düzlemsel olmadığını düşünelim.

Teorem 2.4.2.

E_1^3 de α eğrisi (time-like veya space-like) helis ise, τ/κ fonksiyonu sabittir.

İspat:

Space-like ve time-like olan durumları ayıralım:

1. α space-like bir eğri olsun. Bu durumda üç olasılık vardır:

(a) T' space-like bir vektördür. $\langle T, v\rangle = sbt$ türevi alınırsa; $\kappa\langle N, v\rangle = 0$. Buradan, $\langle N, v\rangle = 0$ $v = aT + bB$ olacak şekilde a, b fonksiyonları vardır. s 'e göre türev ve Frenet denklemlerini kullanarak şu elde edilir:

$$v = aT + bB$$
$$< v, T >= a \Rightarrow < v, T' > + < v', T >= a' \Rightarrow < v, \kappa N >= a' = 0$$
$$< v, B >= b \Rightarrow < v, B' > + < v', B >= b' \Rightarrow < v, B >=< v, \tau N >= 0$$
$$a' = b' = 0$$
$$v = aT + bB \Rightarrow v' = a'T + aT' + b'B + bB' = a\kappa N + b\tau N$$
$$0 = a\kappa + b\tau \Rightarrow \tau/\kappa = -b/a$$
$$a' = b' = 0, \quad a\kappa + b\tau = 0$$

sonucuna ulaşılmış olur.

(b) T' time-like bir vektör ise, ispat (a) dakine benzer olarak yapılır.

(c) T' light-like bir vektör olsun. Türev ve Frenet denklemleri ile:

$v = aT + bB \Rightarrow v' = a'T + a(N) + b'B + b(-T + \tau B) = 0$
$0 = (a' - b)T + aN + (b' - b\tau)B,\ bu\, da \quad a = b = 0,$

$v = 0$

elde edilir ki bu çelişkidir.

2. α nın time-like olduğu durum ile α ve N nin her ikisinin space-like olduğu durum benzerdir.

Bu teoremin tersini söylemek için, eğriliğin ve burulmanın ifadelerine ihtiyacımız vardır. Bu nedenle;

Teorem 2.4.3.

α, time-like bir eğri olsun veya normal vektörü light-like olmayan space-like bir eğri olsun. O zaman τ / κ sabit ise, α bir helisdir.

İspat:

$\tau = c\kappa, c \in R$ olduğunu varsayalım. Sadece α'nın time-like olduğu durum incelenirse;. Vektör fonksiyonu şu şekilde tanımlanır: $v(s) = cT(s) + B(s)$ dir. Türev alınırsa, $v' = c'T + cT' + B' = c\kappa N + (-\tau)N = 0$ olur. Buradan da v'nin sabit bir fonksiyon olduğu görülür. Ayrıca; $\langle T, v \rangle = c = sabit$ olur, yani α bir helistir.

α, normal vektörü light-like olan space-like bir eğri olduğu durum veya α nın light-like bir eğri olduğunda neler olduğu üzerinde düşünülebilir.

α nın normal vektörü light-like olan space-like bir eğri olduğunu düşünelim. Herhangi bir düzlemsel eğrinin bir helis olduğunu gösterelim:

$P =< E_1, E_2 + E_3 >$ alınırsa; $\alpha'(s)$ bu düzleme ait olduğuna göre ve $E_2 + E_3 \in P^{\perp}$ olduğuna göre; $\langle T(s), E_2 + E_3 \rangle = 0$ olur.

Diğer yandan; α, $\langle T(s), v \rangle = a$ eşitliğini sağlarsa, Frenet denklemleri kullanılarak, v vektörü $v = aT + b(s)N(s)$ şeklinde yazılabilir. Bu ifadenin türevi alınırsa,

$b' + b\tau + a = 0$ elde edilir. Şimdi normal vektörü light-like olan space-like eğrinin helis olduğunu görelim. $b'(s) + b(s)\tau(s) + a = 0$ denkleminin çözümü $b = b(s)$ olsun. $v(s) = aT(s) + b(s)N(s)$ şeklinde tanımlanır.

$$v' = a'T + aT' + b'N + bN' = aN + b'N + b\tau N = N(b' + b\tau + a)$$

Bu fonksiyon $v'(s) = (b' + b\tau + a)N = 0$ olduğuna göre bir sabittir. Ayrıca $\langle T, v \rangle = a$, ve bu yüzden, α bir helisdir. Bu durumda; v vektörlerinin kümesi sonsuz bir küme olduğu ortaya çıkar.

Şimdi bertrand eğrilerine bir göz atalım.

Öklid ortamında bir bertrand eğrisi öyle bir reguler eğridir ki, bu eğriyle eş noktalarındaki teğetleri paralel olan başka bir β eğrisi vardır. β eğrisine α eş eğrisi denir. Bu yüzden; düzlemsel eğriler Bertrand olur. $\tau \neq 0$ olduğu durumda, bir Bertrand eğrisinin özelliği şu şekildedir:

α eğrisi, ancak ve ancak bazı A ve B sabitleri için $A\kappa + B\tau = 1$ olduğu durumda bir Bertrand eğrisidir.($A\kappa + B\tau = 0$ olursa, helis olur). κ ve τ nin sabit fonksiyonlar olduğu silindirik helisler Bertrand Eğrilerine örnektir.

E_1^3 de Bertrand eğrisinin tanımı aynı Öklid sistemindeki gibidir. Şimdi time-like eğrileri gözönüne alalım.

Teorem 2.4.4.

α, E_1^3 de time-like bir eğri olsun. α'nın bir Bertrand eğrisi olaması için gerek ve yeter şart A ve B gibi iki sabit olmak üzere; $A\kappa + B\tau = 1$ olmasıdır.

İspat:

"$\Rightarrow$" α bir Bertrand eğrisi ve β ise α nın eş eğrisi olsun. Bu durumda; β şu şekilde parametrik ifade edilir:

$\beta(s)=\alpha(s)+\lambda(s)N(s)$ Frenet denklemlerini kullanarak,

$$\beta'(s)=\alpha'(s)+\lambda'(s)N(s)+\lambda(s)N'(s)$$

$$\beta' = T+\lambda' N+\lambda(\tau B+\kappa T)=(1+\lambda\kappa)T+\lambda' N+\lambda\tau B$$

$$\beta'(s)=(1+\lambda\kappa)T+\lambda' N+\lambda\tau B$$

elde edilir. Böylece; $\lambda'=0$, yani, λ sabit bir fonksiyondur.

β nin light-like bir vektör olduğunu kabul edelim. $1+\lambda\kappa=\pm\lambda\tau$ olur ve sonuca ulaşılır.

β nin non-dejenere eğri olduğu duruma bakalım. Örneğin, β bir space-like eğri olsun. β nin normal yönünü bulalım. Bunun için; β yi yay-uzunluğu parametresiyle ifade edelim.

$\gamma(s)=\beta(\Phi(s))$. Bu durumda β nin normal yönü $\gamma''(s)$ şeklindedir. Şimdi;

$\gamma'(s)=\Phi'(s)\beta'(s)$ *ve* $\gamma''=\Phi''\beta'+\Phi'^2\beta''$

$$\langle\gamma',\gamma'\rangle=\langle\Phi'\beta',\Phi'\beta'\rangle=1 \quad \Phi'^2\langle\beta',\beta'\rangle=1\Rightarrow\Phi'^2=\frac{1}{\langle\beta',\beta'\rangle}$$

$$\langle\gamma',\gamma''\rangle=\left\langle\Phi'\beta',\Phi''\beta'+\Phi'^2\beta''\right\rangle=0 \quad \Phi'^3\langle\beta',\beta''\rangle+\Phi'\Phi''\langle\beta',\beta'\rangle=0$$

$$\Rightarrow\Phi'^2\langle\beta',\beta''\rangle+\Phi''\langle\beta',\beta'\rangle=0\Rightarrow\Phi''=-\frac{\langle\beta',\beta''\rangle}{\langle\beta',\beta'\rangle\langle\beta',\beta'\rangle}=-\frac{\langle\beta',\beta''\rangle}{\langle\beta',\beta'\rangle^2}$$

Bu durumda; γ'' nin α nın Frenet üç yüzlüsü cinsinden tanımı vardır. *T* ve *B* de koordinatlar sıfırlanır.

Bu da şu anlama gelir:

$$(1+\lambda\kappa)\frac{\lambda\kappa'(1+\lambda\kappa)-\lambda^2\tau\tau'}{\left[\lambda^2\tau^2-(1+\lambda\kappa)^2\right]^2}+\frac{\lambda\kappa'}{\lambda^2\tau^2-(1+\lambda\kappa)^2}=0$$

$$\lambda\tau\frac{\lambda\kappa'(1+\lambda\kappa)-\lambda^2\tau\tau'}{\left[\lambda^2\tau^2-(1+\lambda\kappa)^2\right]^2}+\frac{\lambda\kappa'}{\lambda^2\tau^2-(1+\lambda\kappa)^2}=0$$

veya

$$\lambda\tau(\lambda\kappa'\tau-\tau'-\lambda\kappa\tau')=0$$

$$\lambda(1+\lambda\kappa)(\lambda\kappa'\tau-\tau'-\lambda\kappa\tau')=0$$

Bir noktada $\tau=0$ ise, $\tau\equiv 0$ olur ve α düzlemsel bir eğridir. $\tau\neq 0$, bu durumda,

$\lambda\kappa'\tau-\tau'-\lambda\kappa\tau'=0$, bu da $\lambda\left(\frac{\kappa}{\tau}\right)' = -\left(\frac{1}{\tau}\right)$ sonucunu getirir;

$\frac{\lambda\kappa}{\tau}+\frac{1}{\tau}=b$ olacak şekilde bir $b\in R$ gibi bir değer vardır. $A=-\lambda$ *ve* $B=b$ ise, teoremin bir kısmı ispatlanmış olur.

"$\Leftarrow$" $A,B\in R$ gibi sabitler için $A\kappa+B\tau=1$ olsun. Bu durumda $\beta(s)=\alpha(s)+AN(s)$ şeklinde tanımlanan eğri α 'nın eş eğrisi olur.

3. BÖLÜM : LAGRANGE SİSTEMLERİ

3.1. Lagrange Sistemleri ve Yaklaşık Tanjant Geometri

Bu bölümde; J yaklaşık tanjant yapısı kullanılarak; klasik mekanikte önemli bir yer tutan Lagrange formülasyonu üzerinde durulacaktır.

Kabul edelim ki; M bir m-boyutlu manifold ve $\tau_M : TM \to M$ **kanonik projeksiyonu** ile birlikte TM, M'nin tanjant demeti olsun. TM, M **konfigürasyon manifoldunun konum-hız uzayı** ve $L : TM \to R$ türevlenebilir fonksiyonu **Lagrange fonksiyonu** olarak adlandırılır. TM üzerinde;

$$\omega_L = -dd_J L$$

ile tanımlı kapalı 2-formunu göz önüne alalım. Bu durumda,

$$E_L = CL - L$$

TM üzerinde L'ye **birleşmiş enerji fonksiyonu** olarak adlandırılır.

Teorem 3.1.1:

$i_J \omega_L = 0$'dır.

İspat: Aslında;

$$\begin{aligned} i_J \omega_L &= -i_J dd_J L = i_J d_J dL && (dd_J = -d_J d) \\ &= d_J i_J dL = d_J^2 L = 0 && (d_J i_J = i_J d_J) \end{aligned}$$

$$i_X \omega_L = dE_L \tag{3.1.1}$$

eşitliğini göz önüne alındığında, o zaman (3.1.1) X üzerinde belli bir şart altında **Euler-Lagrange hareket denklemleri** veren bir denklem olduğu görülür.

Teorem 3.1.2:

TM üzerindeki herhangi bir (q^i, v^i) koordinat sistemi için ω_L form, TM üzerinde bir simplektik formdur ancak ve ancak; $\left[\frac{\partial^2 L}{\partial v^i \partial v^j}\right]$ Hessian matrisi maksimal ranka sahiptir.

İspat:

$$\omega_L = \frac{\partial^2 L}{\partial q^j \partial v^i} dq^i \wedge dq^j + \frac{\partial^2 L}{\partial v^i \partial v^j} dq^i \wedge dv^j$$

formunun m kez dış çarpımı;

$$\omega_L^m = \omega_L \wedge \ldots \wedge \omega_L = c \det\left(\frac{\partial^2 L}{\partial v^i \partial v^j}\right) dq^1 \wedge \ldots \wedge dq^m \wedge dv^1 \wedge \ldots \wedge dv^m$$

olup, burada c sıfır olmayan sabit fonksiyonudur. Böylece; ω_L simplektik ise ancak ve ancak ω_L^m bir hacim elementidir, yani;

$$\det\left(\frac{\partial^2 L}{\partial v^i \partial v^j}\right) \neq 0$$

dır.

Eğer ω_L simplektik ise, bu durumda $L: TM \to R$ lagrange fonksiyonu **regüler** veya **dejenere olmayan**; aksi takdirde, L'nin **tekil, irregüler** veya **dejenere** olduğu söylenebilir.

L'nin regüler olduğunu farz edelim. O zaman (3.1.1) denkleminin tek bir ξ çözümü vardır. Yani, ω_L simplektik olduğundan $i_\xi \omega_L = dE_L$' dir.

Teorem 3.1.3:

(3.1.1) ile verilen ξ vektör alanı bir yarı püskürtmedir. (yani ikinci mertebeden diferansiyel denklemdir)

İspat:

Teoremin ispatı için $J\xi = C$ olduğunu göstermek yeterdir. Bunun için;

$$\begin{aligned}
i_C w_L &= -i_C dd_J L = i_C d_J dL && (dd_J = -d_J d) \\
&= i_J dL - d_J i_C dL = d_J L - d_J (CL) && (i_C d_J + d_J i_C = i_J) \\
&= d_J (L - CL) = -d_J E_L \\
&= -i_J dE_L = -i_J i_\xi \omega_L \\
&= i_\xi i_J \omega_L - i_J i_\xi \omega_L = i_{J\xi} \omega_L
\end{aligned}$$

dir. Böylece; $J\xi = C$ olup, ω_L simplektiktir. Eğer ξ, (3.1.1) ile verilen bir yarı püskürtme ise, o zaman lokal olarak;

$$\xi = v^i \frac{\partial}{\partial q^i} + \xi^i \frac{\partial}{\partial v^i}$$

eşitliği yazılabilir. Ayrıca bu eşitlik yardımıyla, $i_\xi \omega_L$ hesaplanacak olursa,

$$i_\xi \omega_L = \left(\frac{\partial^2 L}{\partial q^i \partial v^j} v^i - \frac{\partial^2 L}{\partial q^j \partial v^i} v^j - \frac{\partial^2 L}{\partial v^i \partial v^j} \xi^j \right) dq^i + \frac{\partial^2 L}{\partial v^i \partial v^j} v^j dv^i \tag{3.1.2}$$

olur. $E_L = v^j \dfrac{\partial L}{\partial v^j} - L$ olup,

$$dE_L = \left(\frac{\partial^2 L}{\partial q^i \partial v^j} v^j - \frac{\partial L}{\partial q^i} \right) dq^i + \frac{\partial^2 L}{\partial v^i \partial v^j} v^j dv^i \tag{3.1.3}$$

denklemi elde edilir. $i_\xi \omega_L = dE_L$ eşitliği gözönüne alınırsa, dq^i ve dv^i terimlerinin katsayıları eşit olmalı. Buradan;

$$\frac{\partial^2 L}{\partial q^j \partial v^i} v^j + \frac{\partial^2 L}{\partial v^i \partial v^j} \xi^i - \frac{\partial L}{\partial q^i} = 0 \qquad , \qquad 1 \le i \le m \tag{3.1.4}$$

eşitliğine ulaşılır.

$\sigma: R \to M$, ξ vektör alanın izi, yani $\dot{\sigma}: R \to TM$, ξ'nin bir integral eğrisi olsun. Eğer $\sigma(t) = \left(q^i(t)\right)$ ise, o zaman, $\dot{\sigma}(t) = \left(q^i(t), \dfrac{dq^i(t)}{dt}\right)$ olup, σ eğrisi;

$$\frac{\partial^2 L}{\partial q^j \partial q^i} \dot{q}^j + \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^i \partial \dot{q}^j} \ddot{q}^j - \frac{\partial L}{\partial q^i} = 0 \ , \ 1 \le i \le m$$

eşitliğini gerçekler. Türevlerin zincir kuralı gereğince;

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q^i} = 0 \ , \ 1 \le i \le m \tag{3.1.5}$$

eşitliğine ulaşılır. (3.1.5) eşitliği ile verilen denklemler Euler -Lagrange denklemleri olarak bilinir.

Teorem 3.1.4:

Euler-Lagrange denklemlerinin çözümleri, ξ 'nin integral eğrileridir.

Tanım 3.1.5:

$L: TM \to R$ bir regüler lagranjyen olmak üzere; $i_\xi \omega_L = dE_L$ eşitliğini gerçekleyen bir tek ξ yarı püskürtmesi vardır, ve buna **Euler-Lagrange vektör alanı** olarak adlandırılır. Genellikle ξ_L ile gösterilir.

Teorem 3.1.6: (Enerji korunumu yasası)

$L_{\xi_L} E_L = \xi_L E_L = 0$ olduğundan, E_L, ξ_L 'nin integral eğrileri boyunca sabittir.

Örnek 3.1.7:

$L\colon TR^2 \to R$ lagrange fonksiyonu; $L(x,y,u,v)=\frac{1}{2}\left[\left(u^2-v^2\right)-x^2-y^2\right]$ şeklinde tanımlansın. Bu durumda;

$$d_J L = udx - vdy \qquad \text{ve} \qquad \omega_L = -dd_J L = dx \wedge du - dy \wedge dv$$

olup, L'nin Hessian matrisi, $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ dir.

Böylece, L regüler ve ω_L, TR^2 üzerinde bir simplektik formdur. L için Euler-Lagrange vektör alanı da;

$\xi_L = u\frac{\partial}{\partial x} + v\frac{\partial}{\partial y} - x\frac{\partial}{\partial u} + y\frac{\partial}{\partial v}$ şeklinde olup, $J\xi_L = u\frac{\partial}{\partial u} + v\frac{\partial}{\partial v} = C$

eşitliğini gerçekler. Ayrıca; tanımlanan bu L lagrange fonksiyonu için, Euler-lagrange denklemleri;

$$\frac{d^2x}{dt^2} = x(t) \qquad \frac{d^2y}{dt^2} = y(t)$$

şeklinde ifade edilir.

Tanım 3.1.8:

M n boyutlu bir manifold, F TM üzerinde bir türevlenebilir fonksiyon ve ρ, TM üzerinde kuvvet alanı olarak adlandırılan yarı basit bir form ise bu durumda $\mathcal{M} = (M, F, \rho)$ üçlüsüne bir **mekanik sistem** denir.

Teorem 3.1.9:

$\mathrm{M} = (M, F, \rho)$ bir mekanik sistem ve $\omega_F = -dd_j F$ simplektik 2-form olsun. Bu durumda F'nin enerji fonksiyonu $E_F = CF - F$ olmak üzere;

$$i_\xi \omega_F = dE_F + \rho \tag{3.1.6}$$

denklemini gerçekleyen bir tek ξ yarı püskürtmesinin integral eğrileri, $\rho = \rho_i dq^i$ olmak üzere; $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial F}{\partial \dot{q}^i}\right) - \frac{\partial F}{\partial q^i} = -\rho_i \quad 1 \le i \le m$ denklem sisteminin çözümleridir.

İspat:

$J\xi = C$ sonucu ve (3.1.6)'den;

$$\frac{\partial^2 F}{\partial q^j \partial v^i} v^j + \frac{\partial^2 F}{\partial v^i \partial v^j} \xi^i - \frac{\partial F}{\partial qi} = -\rho_i \qquad , \qquad 1 \le i \le m \tag{3.1.7}$$

olup, eğer $\sigma(t) = (q^i(t))$, ρ'nun bir izi ise, (3.1.7)'den;

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial F}{\partial \dot{q}^i}\right) - \frac{\partial F}{\partial q^i} = -\rho_i \qquad 1 \le i \le m \tag{3.1.8}$$

eşitliği kolayca elde edilir.

Tanım 3.1.10:

Eğer ρ kuvvet alanı kapalı bir yarı basit form ise; bu durumda $\mathrm{M} = (M, F, \rho)$ mekanik sistemine **korumalı sistem** denir. Eğer, $\mathrm{M} = (M, F, \rho)$ korumalı bir mekanik sistem ise, o zaman;

$$L_\xi \omega_F = di_\xi \omega_F = d(dE_F + p) = 0$$

denkleminden ρ kuvvet alanının kapalı olduğu,

$$\rho = dV \text{ için} \qquad L_\xi (E_F + V) = 0$$

olup, enerjinin de korunduğu sonucuna varılır.

Tanım 3.1.11:

$\mathrm{M} = (M, F, \rho)$ korumalı bir mekanik sistem ise; $\rho = \tau_M^*(dU) = d(U \circ \tau_M)$ ile tanımlı türevlenebilir bir $U: M \to R$ fonksiyonu varsa; bu mekanik sisteme **Lagrange mekanik sistemi** denir.

Eğer $L = F + U \circ TM$ şeklinde alınırsa; o zaman (3.1.6) ve (3.1.8) denklemlerinden,

$$i_{\xi}\omega_L = dE_L$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q^i} = 0 \ , \ 1 \leq i \leq m$$

eşitlikleri yazılabilir.

Sonuç 3.1.10:

Korumalı mekanik sistemler Lagranjyen sistemlerdir. ρ kuvvet alanı kapalı olmayan yarı basit form ise, bu durumda mekanik sistem korumasız bir mekanik sistemdir.

3.2. Homojen Lagranjyenler

Bu bölümde, homojen Lagranjyenler için Klein formülasyonunu geliştirilecektir.

Tanım 3.2.1:

Eğer $L\colon TM \to R$ Lagranjyen fonksiyonu 2. Dereceden homojen, yani $CL = 2L$ ise o zaman L'ye **homojen Lagranjyen** denir.

Sonuç olarak; L bir homojen Lagranjyen ise, $v^i \dfrac{\partial L}{\partial v^i} = 2L(q,v)$ olup, enerji fonksiyonu E_L=L şekline dönüşür.

Teorem 3.2.2:

L homojen bir Lagranjyen olsun. O zaman;

1. ω_L, 1. Dereceden homojendir.

2. Euler-Lagranjyen vektör alanı ξ_L bir spraydır.

İspat:

1. Eğer, L homojen ise, o zaman $\omega_L = -dd_j L$ ve $L_C \omega_L = \omega_L$ yazılabilir. Yani, ω_L, 1. Dereceden homojendir.

2. $i_{\xi_L} \omega_L = dE_L$ ve ω_L simplektik olduğu için;

$$i_{[c,\xi_L]}\omega_L = L_c i_{\xi_L}\omega_L - i_{\xi_L} L_c \omega_L = L_c dE_L - i_{\xi_L}\omega_L$$

$$= L_c dL - dE_L = d(L_c L) - dL = d(CL - L) = dE_L$$

Buradan $[c, \xi_L] = \xi_L$ olup, Euler-Lagrange vektör alanı ξ_L bir spraydır.

Teorem 3.2.3:

F ve ρ k. dereceden homojen olmak üzere; $M = (M, F, \rho)$ bir mekanik sistem olsun. O zaman $i_\xi \ \omega_F = dE_F + \rho$ denklemini gerçekleyen ξ bir yarı püskürtmedir.

İspat:

$$i_{[c,\xi]}\omega_F = L_c i_\xi \omega_F - i_\xi L_c \omega_F$$

$$E_F = CF - F = kF - F = (k-1)F$$

$$L_c i_\xi \omega_F = L_c(dE_F + \rho) = d(L_c E_F) + L_c \rho = k(k-1)dF + k\rho$$

$$L_c \omega_F = (k-1)\omega_F$$

$$i_\xi L_c \omega_F = (k-1) i_\xi \omega_F = (k-1)dE_F + (k-1)\rho = (k-1)^2 dF + (k-1)\rho$$

olup,

$$i_{[c,\xi]}\omega_F = k(k-1)dF + k\rho - (k-1)^2 dF - (k-1)\rho$$

$$= (k-1)dF + \rho = dE_F + \rho = i_\xi \omega_F$$

olduğundan ω_F simplektiktir. Yani, $[C,\xi] = \xi$ dir.

3.3 Konneksiyonlar ve Lagranjyen Sistemler

TM üzerinde ξ herhangi bir yarı püskürtme olsun. O zaman, her Y∈ TM vektör alanı için; $\Gamma(Y) = -[\xi, JY] + J[\xi, Y]$ denklemini gerçekleyen $\Gamma = -L_\xi J$ endomorfizmi TM'de bir konneksiyondur. Ayrıca;

$$h = \frac{1}{2}\left(Id + L_\xi J\right) \text{ , } v = \frac{1}{2}\left(Id - L_\xi J\right)$$

eşitlikleri sırasıyla Γ' nın yatay ve dikey projektörleri olsun. Böylece her $Z \in TM$ tanjant vektörü yatay ve düşey bileşenlerine ayrılabilir ve

$$T(TM) = \operatorname{Im} h \otimes \operatorname{Im} v \qquad (Boy \operatorname{Im} h = \frac{1}{2} Boy(TM) = m, BoyM = m) \text{ dir.}$$

Bu ayrışımdan çıkan ilginç iki sonuç, aşağıdaki lemma ve Teoremle verilebilir.

Lemma 3.3.1:

N manifoldunda tanımlı Ω 2-form ve F (1,1) tipinde tensör alanı olsun. O zaman;

$$(X,Y) \to (F \rfloor \Omega)(X,Y) = \Omega(FX,Y)$$

eşitliği ile tanımlı Ω, N üzerinde (0,2) tipinden bir tensör alanıdır. Ayrıca X, N üzerinde herhangi bir vektör alanı ise, o zaman;

$$L_X(F \rfloor \Omega) = L_X F \rfloor \Omega + F \rfloor (L_X \Omega) \text{ dır.}$$

Teorem 3.3.2:

L TM üzerinde regüler bir Lagranjyen olsun. Bu durumda TM'nin her bir noktasındaki tanjant uzaylarını ω_L için birer Lagranjyen olacak şekilde düşey ve yatay alt uzaylara ayıran TM'de tek bir Γ_L konneksiyonu vardır.

İspat:

L için Euler-lagranjyen vektör alanını ξ_L ve simplektik 2-form $\omega_L = -dd_j L$ olmak üzere; Lemma 3.3.1 ve $L_{\xi_L}\omega_L = 0$ kullanılarak;

$$L_{\xi_L}(J \rfloor \omega_L) = (L_{\xi_L} J) \rfloor \omega_L$$

Ayrıca, $\Gamma_L = -L_{\xi_L} J$'den $L_{\xi_L}(J \rfloor \omega_L) = -\Gamma_L \rfloor \omega_L$ elde edilir. Ayrıca, $i_J \omega_L = 0$ olduğu için, $J \rfloor \omega_L$ ve $L_{\xi_L}(J \rfloor \omega_L)$ simetrik yani, $i_{\Gamma_L}\omega_L = 0$ olur. Böylece TM üzerinde tanımlı tüm X ve Y vektör alanları için,

$$\omega_L(\Gamma_L X, Y) + \omega_L(X, \Gamma_L Y) = 0$$

denklemi elde edilir. Ayrıca Γ_L'nin

$$h = \frac{1}{2}(Id + L_{\xi_L} J), \; v = \frac{1}{2}(Id - L_{\xi_L} J)$$

yatay ve düşey projektörleri kullanılarak;

$$\omega_L(hX, Y) + \omega_L(X, hY) = \omega_L(X, Y)$$
$$\omega_L(vX, Y) + \omega_L(X, vY) = \omega_L(X, Y)$$
$$\omega_L(hX, Y) - \omega_L(X, vY) = 0$$
$$\omega_L(hX, hY) = \omega_L(vX, vY) = 0$$

elde edilir.

Teorem 3.3.3:

L, TM üzerinde regüler bir Lagranjyen olsun. Bu durumda; $\overline{g}(JX, JY) = -\omega_L(JX, Y)$ denklemi $V(TM)$ düşey demeti üzerinde bir $\overline{g}$ metriği tanımlar.

İspat:

1. $\overline{g}$ iyi tanımlı olup, eğer $JX = JY'$ olacak biçimde TM üzerindeki iki vektör alanı Y ve Y' ise, o zaman $J(Y - Y') = 0$ olup $Y - Y'$ düşey vektör alanlarıdır. Böylece ;

$\omega_L(JX, Y) = \omega_L(JX, Y')$ dir.

2. $\overline{g}$ simetriktir, yani;

$$\overline{g}(JX, JY) = -\omega_L(JY, X) = \omega_L(X, JY) = -\omega_L(JX, Y) = \overline{g}(X, Y)$$

3. $\overline{g}$ dejenere değildir. Çünkü; TM üzerinde herhangi bir JY vektör alanı için $\overline{g}(JX, JY) = 0$ olup, $\omega_L(JX, Y) = 0$'dır. ω_L dejenere olmadığından $JX = 0$ olur.

Ayrıca, TM'nin (q^i, v^i) Lokal koordinatları yardımıyla;

$$\overline{g}\left(\frac{\partial}{\partial v^i}, \frac{\partial}{\partial v^j}\right) = -\omega_L\left(\frac{\partial}{\partial v^i}, \frac{\partial}{\partial v^j}\right) = \frac{\partial^2 L}{\partial v^i \partial v^j}$$

olur.

Böylece Γ, TM için herhangi bir konneksiyon ise, $\overline{g}$ TM üzerinde bir g_Γ Riemann metriği tanımlar. Ayrıca, (TM,F, g_Γ) yaklaşık Hermit yapısını göz önüne alınırsa; aşağıdaki Teorem elde edilir.

Teorem 3.3.4:

K_Γ, (TM,F, g_Γ)'nın Köhler formu olsun. Bu durumda $K_\Gamma = i_v \omega_L$'dir.

İspat:

$$i_v\omega_L(X,Y)=\omega_L(vX,Y)+\omega_L(X,vY)=\omega_L(vX,Y)-\omega_L(vY,X)$$
$$=-g_\Gamma(vX,JY)+g_\Gamma(vY,JX)=-g_\Gamma(X,JY)+g_\Gamma(JX,Y)=K_\Gamma(X,Y)$$

olur.

Teorem 3.3.5:

Eğer, L bir homojen Lagranjyen ise, o zaman, Euler-Lagrange denklemlerinin çözüm eğrileri geodezikler olan, TM'de bir tek Γ_L homojen konneksiyonu vardır.

Homojen olmayan Lagranjyenler göz önüne alındığında, TM'de tanımlı, ξ_L yarı-sprayi ile birleştirilmiş bir konneksiyon oluşturulmak istenirse, O zaman ayrışım teoreminden TM üzerinde tanımlı $T^o+\xi_L^*=0$ eşitliğini gerçekleyen yarıbasit bir T vektör 1-formuna ihtiyaç duyulacaktır.

Teorem 3.3.3. de belirlenmiş $V(TM)$ üzerinde tanımlı $\overline{g}$ metriğini ele alalım. Yani;

$\overline{g}(JX,JY)=\omega_L(JX,Y)$ olsun. Eğer aşağıdaki denklem kurulursa;

$$\Theta(X,Y)=\overline{g}(TX,JY) \tag{3.3.1}$$

o zaman;

$$\Theta(JX,Y)=\overline{g}(TJX,JY)=0$$
$$\Theta(X,JY)=\overline{g}(TX,JY)=0$$

sonuçları elde edilir. (Burada, Θ yarı-basit 2-formdur.)

$$\Theta^o(Y)=(i_{\xi_L}\Theta)(Y)=\Theta(\xi_L,Y)=\overline{g}(T\xi_L,JY)$$

$$\omega_L(T^o,Y)=(i_{T^o}\omega_L)(Y)$$

$$\Theta^o=i_{T^o}\omega_L \tag{3.3.2}$$

Şimdi T, $T^o=-\xi_L^*$ gibi olmalıdır. Böylece (3.3.2); $\Theta^o=-i_{\xi_L^*}\omega_L$ olur.

$\Theta = (i_c\omega_L) \odot \gamma$ ile tanımlı 2-formu göz önüne alalım. Burada γ, $\gamma(JX) = 0$ koşulunu gerçekleyen TM üzerinde bir 1-form ve $\odot$ simetrik çarpımı ifade eder. Böylece; Θ (1) ve (2)'yi gerçekler. Eğer Θ'nın potansiyeli oluşturulursa, o zaman;

$$\Theta^{\circ} = (i_c\omega_L)^{\circ}\gamma + \gamma^{\circ}(i_c\omega_L)$$

yani;

$$-i_{\xi_L^*}\omega_L = (i_c\omega_L)^{\circ}\gamma + \gamma^{\circ}(i_c\omega_L)$$

denklemi elde edilir. Buradan,

$$(-i_{\xi_L^*}\omega_L)^{\circ} = 2(i_c\omega_L)^{\circ}\gamma^{\circ}$$

$$\gamma^{\circ} = -\frac{1}{2}\frac{(i_{\xi_L^*}\omega_L)^{\circ}}{(i_c\omega_{L)^{\circ}}} = -\frac{1}{2}\frac{\omega_L(\xi_L^*, \xi_L)}{\omega_L(c, \xi_L)}$$

Buradan da;

$$\gamma = \frac{1}{\omega(c, \xi_L)}\left(-i_{\xi_L^*}\omega_L + \frac{1}{2}\frac{\omega_L(\xi_L^*, \xi_L)}{\omega_L(c, \xi_L)}(i_c\omega_L)\right) \tag{3.3.3}$$

eşitliği elde edilir.

Teorem 3.3.6:

L, TM üzerinde bir regüler Lagranjyen olsun. Bu durumda L için Euler-Lagrange denklemlerinin çözümleri, TM'de Γ'nın eğrileri olan bir tek kanonik Γ konneksiyonu vardır. Bu konneksiyon; $\overline{\Gamma_L} = \Gamma_L + T = -L\xi_L J + T$ denklemi ile verilir. Buradaki T (3.3.1) ve (3.3.3) ile tanımlanmıştır.

Tanım 3.3.7:

Eğer $i_\Gamma \omega_L = 0$ ise Γ **basittir** denir.

Teorem 3.3.8:

Γ'nın basit olması için $\Leftrightarrow$ K_Γ Köhler formunun ω_L ile uyumlu olması gerekir.

İspat:

Teorem 3.3.4'ten $K_\Gamma = i_v \omega_L$ olup, v, Γ'nın düşey projektörüdür. Böylece;

$$K_\Gamma = i_v \omega_L = i_{\frac{1}{2}(I-\Gamma)} \omega_L = \frac{1}{2} i_I \omega_L - \frac{1}{2} i_\Gamma \omega_L = \omega_L - \frac{1}{2} i_\Gamma \omega_L$$

olur.

$K_\Gamma = \omega_L$ olması için $\Leftrightarrow$ $i_\Gamma \omega_L = 0$'dır.

Şimdi, $E_L = CL - L$'nin L regüler lagranjyen ile birleştirilmiş enerji fonksiyonu olduğunu kabul edelim.

Tanım 3.3.9:

Eğer $d_h E_L = 0$ ise, Γ **koruyucudur** denir. (h, Γ'nın yatay projektörüdür.)

İspat:

$d_h E_L = 0$ olması, E_L'nin Γ'ya göre yatay eğriler boyunca sabit olduğu sonucunu doğurur. Yani;

$$d_h E_L = i_h dE_L = h^*(dE_L)$$

olup,

$$(d_h L)(Z) = (dE_L)(hZ) = (hZ)E_L \text{ dir.}$$

Teorem 3.3.10:

Γ basit olsun. O zaman, Γ değişmelidir ancak ve ancak ξ_L nin ξ yarı püskürtmesi ile birleşmelidir.

İspat:

Γ basit olsun. O zaman, $K_\Gamma = \omega_L$ eşitliği yazılabilir. Böylece, ξ yatay olduğundan;

$$(i_\xi \omega_L)(X) = \omega_L(\xi, X) = K_\Gamma(\xi, X) = g_\Gamma(J\xi, X) - g_\Gamma(\xi, JX) = g_\Gamma(C, X)$$

denklemleri yazılabilir. Bu denklemlerden de:

$$(i_\xi \omega_L)(X) = g_\Gamma(C, vX) = g_\Gamma(C, JFX) \qquad (v = JF)$$
$$= \overline{g}(C, JFX) = -\omega_L(\xi, JX) = -(i_C \omega_L)(FX) = -(i_F i_C \omega_L)(X)$$

olup,

$$i_\xi \omega_L = -i_F i_C \omega_L$$

eşitliği elde edilir. Teorem 1.1.3 e göre $i_C \omega_L = -d_j E_L$ olduğundan;

$$i_\xi \omega_L = i_F d_j E_L = i_F i_j dE_L = i_{jF} dE_L = i_v dE_L = d_v E_L$$

eşitliği elde edilir. Fakat $dE_L = d_h E_L + d_v E_L$ $(Id = h + v)$ olup, $d_h E_L = 0$ ise o zaman $i_\xi \omega_L = dE_L$dir . Başka bir deyişle $\xi = \xi_L \Leftrightarrow d_h E_L = 0$ dır.

Teorem 3.3.11:

L homojen bir Lagranjyen olsun. Bu durumda torsiyonu sıfır olan bir tek korumalı konneksiyon vardır.

İspat:

L homojen olduğundan $E_L = L$'dir. ξ_L bir püskürtme ve $\Gamma_L = -L_{\xi_L} J$ olup ξ_L ile birleştirilmiş bir yarı püskürtme konneksiyondur. Yani Γ_L basittir. Bundan dolayı Γ_L korumalıdır. Şimdi Γ sıfır torsiyonlu korumalı bir konneksiyon olsun. Bu durumda; $\left[i_h, d_j\right] = i_h d_j + d_j i_h = d_j \quad d_h L = 0$ denklemlerinden faydalanarak,

$$i_h \omega_L = -i_h dd_j L = i_h d_j dL = d_j i_h dL + d_j dL = d_j dL = -dd_j L = \omega_L$$

olur, böylece;

$$\frac{1}{2} i_\Gamma \omega_L = \frac{1}{2} i_{2h-Id} \omega_L = i_h \omega_L - \omega_L = 0$$

olur.

Uyarı 3.3.12:

Eğer L, M üzerinde tanımlı bir g Riemann metriği ile belirlenen kinetik enerji ise, o zaman Teorem 3.3.11 Riemann geometrisinin temel teoremidir.

3.4 Yarı Püskürtmeler ve Lagranjyen Sistemler

Yukarıdaki sonuçlardan, klasik mekanikteki Lagranjyen formülasyonun aslında bir simplektik yapı için de geliştirilebileceği görüldü. Bununla birlikte bu formülasyon Lagranjyen fonksiyonun seçimine direk olarak bağlıdır. Bu Hamiltonyen durumundan özel bir farklılık gösterir. Hamiltonyen durumu olduğu yerde bir asıl simplektik yapı, Hamiltonyen fonksiyon seçiminden bağımsız verilen bir konfigürasyon manifoldun kotanjant demeti üzerinde kanonik bir şekilde belirlenir.

Birinci mertebeden diferansiyel denklemler (vektör olanları) simplektik yapı ile Hamiltonyen fonksiyonları ile ilgilidir. Şimdi Lagranjyen sistemler ile ikinci mertebeden Diferansiyel denklemler(semi-sprays)(yarı-püskürtmeler) ile ilgili bazı sonuçları inceleyelim.

ξ TM üzerinde bir keyfi yarı püskürtme olsun. O zaman ξ tarafından tanımlanan konneksiyon $\Gamma = -L_\xi J$ ile ifade edilsin. Bu durumda; $\xi = v^i \dfrac{\partial}{\partial q^i} + \xi^i \dfrac{\partial}{\partial v^i}$ olmak üzere;

$$\Gamma\left(\frac{\partial}{\partial q^i}\right) = \frac{\partial}{\partial q^i} + \frac{\partial \xi^j}{\partial q^i}\frac{\partial}{\partial v^j}, \qquad \Gamma\left(\frac{\partial}{\partial v^i}\right) = -\frac{\partial}{\partial v^i}$$

$$X^H = X^i \frac{\partial}{\partial q^i} - \frac{1}{2} X^i \frac{\partial \xi^j}{\partial q^i}\frac{\partial}{\partial v^j} \tag{3.4.1}$$

olup, X, M üzerinde bir vektör alanıdır. (3.4.1) kullanarak;

$$\begin{aligned}
\left[\xi, X^{\mathrm{v}}\right] &= [v^i \frac{\partial}{\partial q^i} + \xi^i \frac{\partial}{\partial v^i}, X^j \frac{\partial}{\partial v^j}] \\
&= -X^i \frac{\partial}{\partial q^i} + v^j \frac{\partial X^i}{\partial q^j}\frac{\partial}{\partial v^i} - X^j \frac{\partial \xi^i}{\partial v^j}\frac{\partial}{\partial v^i} \\
&= -2X^i \frac{\partial}{\partial q^i} - X^j \frac{\partial \xi^i}{\partial v^j}\frac{\partial}{\partial v^i} + X^i \frac{\partial}{\partial q^i} + v^j \frac{\partial X^i}{\partial v^j}\frac{\partial}{\partial v^i} \\
&= -2X^H + X^C
\end{aligned}$$

olup, $\left[\xi, X^{\mathrm{v}}\right] = -X^H - (X^H - X^C)$ eşitliğinden $X^H - X^C$, $\left[\xi, X^{\mathrm{v}}\right]$'nin düşey bileşenleridir.

Teorem 3.4.1:

ω TM üzerinde tanımlı bir 2-form olsun. O zaman

1. $L_\xi \omega = 0$

2. Her $Z \in TM$ noktasındaki düşey alt uzayı ω ve $i_Y d\omega$ 'ya göre Lagranjyen ve Y keyfi bir yatay vektör alanı olup ω kapalıdır.

İspat :

$$d\omega(\mathrm{X},\mathrm{Y},\mathrm{Z}) = \mathrm{X}\omega(\mathrm{Y},\mathrm{Z}) - \mathrm{Y}\omega(\mathrm{X},\mathrm{Z}) + \mathrm{Z}\omega(\mathrm{X},\mathrm{Z})$$
$$= -\omega([\mathrm{X},\mathrm{Y}],\mathrm{Z}) + \omega([\mathrm{X},\mathrm{Z}],\mathrm{Y}) - \omega(\mathrm{X},[\mathrm{Y},\mathrm{Z}])$$

ifadesinden; $d\omega\left(\mathrm{X}^{v},\mathrm{Y}^{v},\mathrm{Z}^{v}\right) = 0$ olup,

$$d\omega\left(W,\mathrm{Y}^{v},\mathrm{Z}^{v}\right) = d\omega\left(hW + vW,\mathrm{Y}^{v},\mathrm{Z}^{v}\right)$$
$$= d\omega\left(hW,\mathrm{Y}^{v},\mathrm{Z}^{v}\right)$$
$$= \left(\dot{I}_{hW}\, d\omega\right)\left(\mathrm{Y}^{v},\mathrm{Z}^{v}\right)$$
$$= 0$$

olur. Şimdi

$$\left(L_{\xi} d\omega\right)(\mathrm{X},\mathrm{Y},\mathrm{Z}) = \xi d\omega(\mathrm{X},\mathrm{Y},\mathrm{Z}) - d\omega([\xi,\mathrm{X}],\mathrm{Y},\mathrm{Z})$$
$$- d\omega(\mathrm{X},[\xi,\mathrm{Y}],\mathrm{Z}) - d\omega(\mathrm{X},\mathrm{Y},[\xi,\mathrm{Z}])$$

Böylece 1. den;

$$\xi\, d\omega(\mathrm{X}^{H},\mathrm{Y}^{v},\mathrm{Z}^{v}) = 0$$

$$d\omega\left(\left[\xi,\mathrm{X}^{H}\right],\mathrm{Y}^{v},\mathrm{Z}^{v}\right) + d\omega\left(\mathrm{X}^{H},\left[\xi,\mathrm{Y}\right],\mathrm{Z}^{v}\right) + d\omega\left(\mathrm{X}^{H},\mathrm{Y}^{v}\left[\xi,\mathrm{Z}^{v}\right]\right) = 0$$

denklemleri elde edilir. İkinci denklemdeki birinci terimde iki dikey yükseltme olduğundan, sıfıra eşit olup, $\left[\xi,\mathrm{Y}^{v}\right]$ ve $\left[\xi,Z^{v}\right]$' nin bileşenleri;

$$\left[\xi,\mathrm{Y}^{v}\right] = -\mathrm{Y}^{H} - \left(\mathrm{Y}^{H} - \mathrm{Y}^{C}\right)$$

$$\left[\xi,\mathrm{Z}^{v}\right] = -\mathrm{Z}^{H} - \left(\mathrm{Z}^{H} - \mathrm{Z}^{C}\right)$$

şeklinde elde edilir. Böylece;

$$d\omega\left(\mathrm{X}^{H},\mathrm{Y}^{H},\mathrm{Z}^{v}\right) = d\omega\left(\mathrm{X}^{H},\mathrm{Z}^{H}\mathrm{Y}^{v}\right)$$

olup,

$$d\omega\left(X^H, Y^H, Z^v\right) = d\omega\left(X^H, Z^H, Y^v\right) = -d\omega\left(Z^H, X^H, Y^v\right)$$
$$= -d\omega\left(Z^H, Y^H, X^v\right) = d\omega\left(Y^H, Z^H, X^v\right)$$
$$= d\omega\left(Y^H, X^H, Z^v\right) = -d\omega\left(X^H, Y^H, Z^v\right)$$

denkleminden;

$$d\omega\left(X^H, Y^H, Z^v\right) = 0$$

elde edilir.

Böylece; $Z^H - Z^C$ düşey olup, $d\omega\left(X^H, Y^H, \left[\xi, Z^v\right]\right) = -d\omega\left(X^H, Y^H, Z^H\right)$ ve (1) eşitliği kullanılarak;

$$d\omega\left(X^H, Y^H, Z^v\right) \text{ için; } d\omega\left(X^H, Y^H, \left[\xi, Z^v\right]\right) = 0$$

denklemine ulaşılır.

Teorem 3.4.2:

ω Teorem 3.4.1 gerçekleyen bir form olsun. J TM üzerinde kanonik yaklaşık tanjant yapı olmak üzere, $\omega = -dd_J K$ olacak biçimde TM 'nin bir açık altcümlesi üzerinde tanımlı bir C^∞ K fonksiyonu vardır.

Teorem 3.4.3:

TM üzerinde tanımlı bir ξ yarı püskürtmesinin (regüler) bir Euler-Lagrange vektör alanı olması için gerek ve yeter şart Teorem 3.4.1 'in (1) ve (2) koşullarını gerçekleyen TM üzerinde bir ω 2- formu vardır.

Teorem 3.4.4:

$$\left(L_X J\right) \circ J = J, J \circ \left(L_X J\right) = -J \tag{3.4.2}$$

denklemini gerçekleyen TM üzerinde bir X vektör alanı, TM nin bir (q^i, v^i) lokal koordinat sistemine göre;

$$X=\left(v^{i}+\lambda(q)\right)\frac{\partial}{\partial q^{i}}+X^{i}(q,v)\frac{\partial}{\partial v^{i}}$$

bileşenlerine sahip olup, X aynı zamanda, $\lambda^{i}(q)\dfrac{\partial}{\partial q^{i}}\in\chi(M)$'ye iz düşürülebilir bir yarı püskürtmedir.

Şimdi, bir J integral tanjant yapısına bağlı olarak; W 2m-boyutlu bir manifold ve γ, (3.4.2) eşitliğini gerçekleyen W üzerinde bir vektör alanı olsun.

Tanım 3.4.5:

Eğer ω, W üzerinde bir simplektik form olmak üzere;

1. her $z\in W$ için ω_{z} ye göre $T_{z}W$'nin $(\mathrm{Im}J)_z$ altuzayları birer lagranjyen,

2. $L_{\gamma}\omega=0$

koşulları gerçekleniyorsa, γ'ya bir **regüler Lagranjyen dinamik sistem** denir. Eğer γ, bir integrallenebilir dinamik sistem ise o zaman; L lagrange fonksiyonu için;

$$\omega=-dd_{J}L$$
$$i_{\gamma}\omega=d\mathrm{E}_{L}\quad,\ \mathrm{E}_{L}=\left(J_{\gamma}\right)L-L$$

eşitlikleri daima gerçeklenir.

3.5. Lagrange Dinamiklerinde Bir Ters Problemin Geometrik Yaklaşımı

Bu bölümde Teorem 3.4.2. 'nin Mekanikteki eski bir problemin bir geometrik uygulamasını verdiği gösterilecektir. Helmholtz tarafından ortaya atılan; "**TM üzerinde verilen bir ξ yarı püskürtme için, ξ'yi bir Euler-Lagrange vektör alanı yapan bir L Lagrange fonksiyonunu bulmak mümkün müdür?**" problemi Lagrange dinamiklerinin ters sonuç problemi olarak bilinir. Bu problemin çözümü ise, Helmholtz şartları olarak bilinen ve bir $(\alpha_{ij}(q,\dot{q}))$ matrisinin belirlenebilmesi ile mümkündür.

Eğer $(q,\dot{q})$ lokal koordinatlarına bağlı olarak Euler-Lagrange denklemlerini geliştirirsek o zaman;

$$g_{ij}\ddot{q}^{j}+h_i=0$$

olup, burada g_{ij} ve h_i, $(q^k,\dot{q}^k)$ lokal koordinatlarına bağlı fonksiyonlar olup,

$$g_{ij}=\frac{\partial^2 L}{\partial\dot{q}^i\partial\dot{q}^j} \text{ dir.}$$

İkinci mertebeden bir diferansiyel denklem sisteminin türevlenebilmesi için Lagranjyenin matrisi self adjoint olmalıdır. Self adjointlik şartları incelenirse;

$$\ddot{q}^i=f^i(q,\dot{q})$$

şeklindeki ikinci mertebeden diferansiyel denklemlerini gözönüne alalım. O zaman Lagrange'nin türevlenebilmesinden, (g_{ij}) matrisi regüler bir matristir yani;

$$g_{ij}\ddot{q}^{j}-g_{ij}f^i=0$$

olup sef adjointtir. Buradaki f^i fonksiyonlarının gerçeklediği şartları ise

$$\det(g_{ij})\neq 0 \tag{3.5.1}$$

$$g_{ij}=g_{ji} \tag{3.5.2}$$

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial\dot{q}^k}=\frac{\partial g_{ik}}{\partial\dot{q}^j} \tag{3.5.3}$$

$$\frac{d}{dt}g_{ij}+\frac{1}{2}\frac{\partial f^k}{\partial\dot{q}^j}g_{ik}+\frac{1}{2}\frac{\partial f^k}{\partial\dot{q}^i}g_{kj}=0 \tag{3.5.4}$$

$$g_{ik}\left(\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial f^k}{\partial\dot{q}^j}\right)-2\frac{\partial f^k}{\partial q^j}-\frac{1}{2}\frac{\partial f^l}{\partial\dot{q}^i}\frac{\partial f^k}{\partial\dot{q}^l}\right)=g_{ik}\left(\frac{d}{dt}\left(\frac{df^k}{\partial\dot{q}^i}\right)-2\frac{\partial f^k}{\partial q^i}-\frac{1}{2}\frac{\partial f^l}{\partial\dot{q}^i}\frac{\partial f^k}{\partial\dot{q}^l}\right) \tag{3.5.5}$$

şeklinde olacaktır. Bu ise (3.5.1)-(3.5.5) denklemlerinin yeniden elde edilebileceğini, yani;

$$\xi = v^i \frac{\partial}{\partial q^i} + f^i \frac{\partial}{\partial v^i}$$

olacak şekilde bir ξ yarı püskürtmesi için $\Gamma = -L_\xi J$, ξ ile belirlenmiş bir konneksiyon olur. Böylece; yatay dağılım (Γ'ya göre)

$$D_i = \frac{\partial}{\partial q_i} + \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{\partial f^j}{\partial v^i}\right)\frac{\partial}{\partial v^j}$$

ile gerilir. Eğer $\left\{D_i, V_i = \frac{\partial}{\partial v^i}\right\}$'nin dual bazı $\left\{\theta^i, \eta^i\right\}$ ise o zaman;

$$\theta^i = dq^i \quad , \qquad \eta^i = -\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{\partial f^i}{\partial v^j}\right)dq^j + dv^i$$

şeklinde olup, ξ ile bu 1-formlarının Lie türevleri de aşağıdaki gibidir.

$$L_\xi \theta^i = \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{\partial f^i}{\partial v^j}\right)\theta^j + \eta_i \tag{3.5.6}$$

$$L_\xi \eta^i = -\frac{1}{2}\gamma^i_j \theta^j + \left(\frac{1}{2}\right)\left(\partial f^i\right)\left(\partial v^j\right)_{n_j} \tag{3.5.7}$$

burada;

$$\gamma^i_j = \xi\left(\frac{\partial f^i}{\partial v^j}\right) - \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{\partial f^i}{\partial v^j}\right) - 2\left(\frac{\partial f^i}{\partial q^j}\right)$$

olup, Teorem 3.4.2.'nin koşullarını gerçekleyen ω formu; $\omega = a_{ij}\theta^i \wedge \theta^j + g_{ij}\theta^i \wedge \eta^j$ ile lokal olarak ifade edilebilir. Burada $a_{ij} + a_{ji} = 0$ olup, eğer (3.5.6) ve (3.5.7) kullanılırsa aşağıdaki denklemlere varılır.

$$L_\xi \omega = \left(\xi(a_{ij}) + a_{ik}\left(\frac{\partial f^k}{\partial v^j}\right) - \frac{1}{2} g_{ik}\gamma_j^k \right)\theta^i \wedge \theta^j +$$

$$\left(2a_{ij} + \xi(g_{ij}) + \frac{1}{2} g_{ik}\frac{\partial f^k}{\partial v^j} + \frac{1}{2} g_{kj}\left(\frac{\partial f^k}{\partial v^i}\right)\right)\theta^i \wedge \theta^j + g_{ij}\eta^i \wedge \eta^j$$

$L_\xi \omega = 0$ olduğundan;

$g_{ij} = g_{ji}$ ve $a_{ij} = 0$ olup,

$$\xi(g_{ij}) + \frac{1}{2} g_{ik}\frac{\partial f^k}{\partial v^j} + \frac{1}{2} g_{kj}\frac{\partial f^k}{\partial v^i} = 0$$

$$g_{ik}\gamma_j^k = g_{ik}\gamma_i^k$$

eşitlikleri yazılabilir. Böylece, $\omega = g_{ij}\eta^i \wedge \eta^j$ maksimal ranka sahip((g_{ij}) regüler) yani; $\det(g_{ij}) \neq 0$ olur.

Sonuç olarak; $d\omega = 0$ dan (3.5.3) şartı elde edilir. $d\omega$ içindeki $\theta^i \wedge \eta^j \wedge \eta^k$ terimlerin katsayıları $\left(\frac{\partial g_{ij}}{\partial v^k}\right)$ olup,

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial v^k} = \frac{\partial g_{ik}}{\partial v^j}$$

koşulunu gerçekler. Böylece,

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial v^k} = \frac{\partial g_{jk}}{\partial v^i} = \frac{\partial g_{ij}}{\partial v^k}$$

Teorem 3.4.2. yi gerçekleyen ω'nın self-adjointlik şartına denktir.

3.6. Legendre Transformasyonu

$L:TM \to R$ bir lagranjyen ve $\alpha_L = d_J L$ 1-form olmak üzere; α_L,

$$\alpha_L = \frac{\partial L}{\partial v^i} dq^i$$

şeklinde lokal olarak ifade edilir.

Böylece, α_L, TM üzerinde bir yarı basit 1-formdur.

Teorem 3.6.1:

$$\begin{tikzcd} TM \arrow[rr, "Leg"] \arrow[dr, "\tau_M"'] & & T^*M \arrow[dl, "\pi_M"] \\ & M & \end{tikzcd}$$

Şekil 3.1 Diyagram değişmeli olacak biçimde bir $Leg:TM \to T^* M$ dönüşümü vardır. (τ_M ve π_M kanonik projeksiyonlardır.)

Lokal olarak; $Leg:\left(q^i, v^i\right) \to \left(q^i, p_i\right)$ olup, $p_i = \frac{\partial L}{\partial v^i}$ ve λ_M, $T^* M$ üzerinde Liouville formu olmak üzere;

$Leg^* \lambda_{\mathrm{M}} = \alpha_L$ olur.

Böylece, $\omega_L = -d\lambda_M$, $T^* M$ üzerinde kanonik simplektik form olup, $\omega_L = -dd_J L$ olmak üzere;

$$Leg^* \omega_{\mathrm{M}} = \omega_L$$

eşitliği elde edilir.

Teorem 3.6.2:

Aşağıdaki önermeler denktir.

1. L regüler bir Lagranjyendir.

2. ω_L , TM üzerinde bir simplektik formdur.

3. $Leg: TM \to T^*M$ bir lokal diffeomorfizmdir.

Tanım 3.6.3:

Teorem 3.6.2.'nin koşullarını gerçekleyen Leg dönüşümüne L tarafından belirlenen **Legendre transformasyonu** denir.

$\sigma: R \to M$ M de bir eğri ve $\dot{\sigma}: R \to TM$ de TM'de nın doğal prolangasyonu olsun. O zaman σ boyunca;

$v^i = \dfrac{dq^i}{dt}$, $\dot{\sigma}(t) = (q^i(t)), \dot{q}^i(t))$ olmak üzere;

$p_i = \dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}$ elde edilir. Böylece $\dot{\sigma}$ boyunca,

$Leg:\left(q^i, \dot{q}^i\right) \to (q^i, \dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}^i})$ olup, $\dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} = p_i$ $1 \le i \le m$ **momentum** olarak adlandırılır.

Genel olarak regüler bir Lagrange tarafında belirlenmiş Legendre transformasyonu, global olarak bir diffeomorfizm değildir. Eğer Legendre transformasyonu global olarak bir diffeomorfizm ise o zaman L Lagrange fonksiyonu **hiperregüler** olarak adlandırılır.

$\pi_M \circ Leg = \tau_M$ olup Leg'in bir global diffeomorfizm olması için gerek ve yeter şart $\tau_M : TM \to M$ 'nin her bir life kısıtlanmışı birebirdir.

L regüler olsun. $E_L = CL - L$ L'nin enerjisi olmak üzere $i_{\xi_L}\omega_L = dE_L$ denklemini ele alalım.

Bu durumda $T^* M$ üzerinde tanımlı bir $\bar{\xi} = TLeg \circ \xi_L \circ Leg^{-1}$ vektör alanı için;

$$i_{\xi}\omega_M = d(E_L \circ Leg^{-1})$$

$$i_{\xi}\omega_M = i_{\bar{\xi}}((Leg^{-1})^* \omega_L) = (Leg^{-1})^* (i_{\xi_L}\omega_L)$$

$$(Leg^{-1})^* (dE_L) = d(E_L \circ Leg^{-1})$$

eşitlikleri gerçeklenir.

Teorem 3.6.4:

Eğer γ, ξ_L'nin bir integral eğrisi ise, $\gamma = Leg \circ \sigma$, $\bar{\xi}$'nin bir integral eğrisi olup, $\pi_M \circ \gamma = \tau_M \circ \sigma$ eşitliğini gerçekler./16/

Regüler bir L Lagrange'nin enerji fonksiyonu hiperregüler olmak üzere, $T^* M$ üzerinde $E_L \circ Leg^{-1}$ ile tanımlı E_L enerji fonksiyonuna L' nin yerini tutan **Hamilton enerjisi** olarak adlandırılıp, H ile gösterilirler. *Leg* Legendre dönüşümü, bir regüler Lagrange formülasyonundan bir Hamilton formülasyonuna geçmeye izin verir. Böylece yukarıdaki $\bar{\xi}$ vektör alanı, $\mathrm{H} = \mathrm{E}_L \circ Leg^{-1}$ Hamilton enerji fonksiyonunun Hamilton vektör alanı olarak bilinir. Ayrıca hiperregülerlik durumunun klasik mekanikteki Hamilton ve Lagrange formülasyonları arasındaki bağıntıyı verdiği görülür.

$L{:}TM \to R$'nin bir Lagrange fonksiyonu olduğunu kabul edelim. Bu durumda her $v \in T_x M$ tanjant vektörü için;

$$\varphi_v{:}T_x M \to T_v(T_x M) \text{ ve } \varphi_v^*{:}T^*{}_x M \to T_v^*(T_x M)$$

dönüşümlerini tanımlayalım. $L_x{:}T_x M \to R$ L'nin $T_x M$'ye kısıtlanmaşı olmak üzere; $Leg_L{:}TM \to T^* M$ dönüşümü; $Leg_L(v) = (\varphi_v^*)^{-1}(dL_x(v))$ ile tanımlansın. Böylece (q^i, v^i) ve (q^i, p_i) sırası ile TM ve T*M lokal koordinatlar olmak üzere;

$$\varphi_v\left(\left(\frac{\partial}{\partial q^i}\right)_x\right)=\left(\frac{\partial}{\partial q^i}\right)_v \tag{3.6.1}$$

ile verilen φ_v bir izomorfizmdir. Ayrıca;

$$\varphi_v^*\left(\left(dq^i\right)_x\right)=(dq^i)_v \tag{3.6.2}$$

olup, (3.6.1) ve (3.6.2) 'ten her biri $LegL\left(q^i,v^i\right)=\left(q^i,\frac{\partial L}{\partial v^i}\right)$ yani, Leg_L ile Leg aynı anda gerçeklenir. Bu durum literatürde Leg_L için Leg'nin **lifli türevi** olarak geçmektedir.

Örnek 3.6.5:

M üzerinde bir g Riemann metriğine bağlı kinetik enerji fonksiyonu L olmak üzere; $L(v)=\frac{1}{2}g_x(v,v)$, $v\in T_xM$ olup, (q^i,v^i) lokal koordinatları için;

$$L\left(q^i,v^i\right)=\frac{1}{2}g_{ij}v^iv^j$$

elde edilir. Böylece $E_L=L$ olup, L regülerdir yani; $\frac{\partial^2 L}{\partial v^i\partial v^j}=g_{ij}$

Legendre transformasyonu $Leg\left(q^i,v^i\right)=\left(q^i,g_{ij}v^j\right)$ şeklinde tanımlanır.

$Leg(v)\in T_x^*M$ kotanjant vektörü için; $<u,Leg(v)>=g_x(u,v),\forall u\in T_xM$ ile tanımlanan $Leg{:}TM\to T^*M$ bir global diffeomorfizmdir.

Aynı durum, $\overline{L}=L+V\circ\tau_M$ eşitliği ile tanımlı $\overline{L}{:}TM\to R$ lagrange fonksiyonu için de geçerlidir. Burada L, M üzerinde bir g Riemann metriğinin kinetik enerji fonksiyonu ve $V{:}M\to R$ potansiyel enerji fonksiyonudur.

4. BÖLÜM: KLASİK MEKANİK TEORİLERİ

4.1 Galile Uzay-zamanında Hareket Prensipleri

4.1.1 Euler-Lagrange Denklemleri:

Bir mikroskopik sistemin durumu, sistemin parçalarının hızları ve konumları tarafından tekil olarak belirlenir. (Hareket denklemleri zamana göre 2. derecedir)

$L = L(\mathrm{q},\dot{\mathrm{q}},t)$ Lagranjyen, $\{\mathrm{q}\} = \{q_i\}$, $\{\dot{\mathrm{q}}\} = \{\dot{q}_i\}$ sırasıyla genelleştirilmiş koordinatlar ve hız olmak üzere sistemin S hareketi

$S = \int_{t_1}^{t_2} L dt$ şeklinde tanımlanır.

En küçük hareket prensibine göre $\delta S = 0$ olur. Einstein'in kısa notasyonu kullanılırsa,

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \delta L \, dt = \int_{t_1}^{t_2} dt \left[\frac{\partial L}{\partial \mathrm{q}} \delta \mathrm{q} + \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathrm{q}}} \delta \dot{\mathrm{q}} \right] = \int_{t_1}^{t_2} dt \left[\frac{\partial L}{\partial q_i} \delta q_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta \dot{q}_i \right]$$

$\delta \dot{q}_i = \frac{d}{dt} \delta q_i$, $t = t_1$ *veya* $t = t_2$ iken $\delta q_i = 0$

eşitlikleri kullanılarak,

$$\int_{t_1}^{t_2} dt \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta \dot{q}_i = \int_{t_1}^{t_2} dt \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \frac{d}{dt} \delta q_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \Big|_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} dt \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \delta q_i$$

$$= -\int_{t_1}^{t_2} dt \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \delta q_i = -\int_{t_1}^{t_2} dt \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathrm{q}}} \right) \delta \mathrm{q}$$

olur. Buradan,

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} dt \left[\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right] \delta q_i = 0$$

δq_i ler bağımsız olduklarından Euler-Lagrange denklemleri olarak adlandırılan

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = 0 \tag{4.1.1}$$

denklemler elde edilir. $\mathrm{q} = \{q_i\}$ koordinatlarına bağlı olarak $\mathrm{p} = \{p_i\}$ genelleştirilmiş momentumu $p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$ *veya* $\mathrm{p} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathrm{q}}}$ şeklinde tanımlanır. $L = T - V$ için, T ve V sistemin kinetik ve potansiyel enerjisi olmak üzere; (4.1.1) denkleminde Newton'un 2. Kanunu elde edilir.

$$\frac{\partial p_i}{dt} = \frac{\partial L}{\partial q_i} = -\frac{\partial V}{\partial q_i} = f_i \quad veya \quad \frac{\partial \mathrm{p}}{dt} = \frac{\partial L}{\partial \mathrm{q}} = -\frac{\partial V}{\partial \mathrm{q}} = f \ .$$

Burada f genelleştirilmiş kuvveti göstermektedir.

4.1.2 Uzay-zaman ve Simetriler

4.1.2.a) Zaman Ötelemesi Altında Değişmezlik

$g(t)$ bir boyutlu metrik tensör ve τ zaman manifoldunun lineer ölçüsü olmak üzere yani $d\tau$ t *ve* $t + dt$ arasındaki mesafe olacak şekilde Galile zamanı $d\tau^2 = g(t)dt^2$ şeklinde tanımlanan metriğe sahiptir. Açıkça eğer zaman koordinatı olarak τ kullanılırsa, metrik tensör $g(\tau) = 1$ şartını sağlayan sabit bir skaler olacaktır.

t koordinatı $g(t) = 1$ şartı ile birlikte gerçek zaman olarak adlandırılır. t'nin gerçek zaman olup olmadığını anlamak için Newton'un 1. yasası kullanılabilir.

Tanıma göre serbest bir parçacığın lagranjyeni tüm t gerçek zamanları için aynı olmalıdır. Yani $L(x, \dot{x}, t + t') = L(x, \dot{x}, t) = L(x, \dot{x})$

Başka bir deyişle L zaman ötelemesi altında değişmezdir.

4.1.2.b) Uzaysal Öteleme Altında Değişmezlik

Galile uzay-zamanında bahsedilen uzay öklidyendir. Bu nedenle, kartezyen koordinatlar gözönüne alınırsa tüm x değerleri için metrik tensör sabit bir tensör alanıdır ve $g(x) = I$ şartını sağlar.

Açıkça g metriği uzaysal öteleme altında değişmezdir $x \to x + x_0$.

Bu yüzden, Öklidyen uzay homojendir. Sabit bir düzlemde, serbest bir parçacığın Lagranjyeni her noktada aynı olmalıdır. Yani

$$L(x, \dot{x}) = L(x + x', \dot{x}) = L(\dot{x}) \quad \leftrightarrow x \, sabit \; düzlem$$

4.1.2.c) Rotasyon Altında Değişmezlik

Önceki konuda belirtildiği gibi g Öklidyen metrik tensörü, uzaysal dönüşüm altında değişmez olduğu belirtilmişti. Buradan öklidyen uzayın izotropik olduğu söylenebilir. Sabit bir düzlemde serbest bir parçacık için Lagranjyen herhangi bir rotasyon altında değişmez olmalıdır. Yani;

R rotasyonel operatör ve $|\dot{x}| = \sqrt{\dot{x}.\dot{x}}$ olmak üzere $L(R\dot{x}) = L(\dot{x}) = L(|\dot{x}|)$

4.1.2.d) Galile Dönüşümü Altında Değişmezlik

S ve S' sistemlerinin koordinatları v izafi hızla bağlantılı olarak Galile dönüşümleri ile aşağıdaki gibidir.

$$x' = x - vt \quad t' = t \tag{4.1.2}$$

Özellikle, eğer S, Newton'un 1. yasasını sağlayan eylemsiz bir sistem ise S'de eylemsiz bir sistemdir. Böylece, Newton fiziği Galile dönüşümü altında değişmezdir.

Serbest bir parçacık için $X = \frac{1}{2}|\dot{x}|^2$ iken $L(|\dot{x}|) = L(X)$ olur.

$$\frac{\partial X}{\partial \dot{x}} = \frac{\partial}{\partial \dot{x}}\left(\frac{1}{2}\dot{x}^2\right) = \dot{x}$$

yardımıyla, Euler-Lagrange denklemleri

$$0 = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial X}{\partial \dot{x}}\frac{dL}{dX}\right) = \frac{d}{dt}\left(\dot{x}\frac{dL}{dX}\right) \tag{4.1.3}$$

olur. Buradan,

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{dL}{dX}\right) = \ddot{x}\frac{\partial}{\partial \dot{x}}\left(\frac{dL}{dX}\right) = \ddot{x}\,\dot{x}\frac{d^2 L}{dX^2}$$

çıkar. (4.1.3) denklemi kullanılarak,

$$0 = \ddot{x}\left(\frac{dL}{dX}\right) + \dot{x}\frac{d}{dt}\left(\frac{dL}{dX}\right) = \ddot{x}\frac{dL}{dX} + \dot{x}(\ddot{x}\,\dot{x})\frac{d^2 L}{dX^2} \tag{4.1.4}$$

elde edilir.

Galile dönüşümü altında (4.1.2) denklemleri;

$$\dot{x} \quad \rightarrow \quad \dot{x}' = \dot{x} - v \qquad\qquad \ddot{x} \quad \rightarrow \quad \ddot{x}' = \ddot{x}$$
$$X \quad \rightarrow \quad X' = \frac{1}{2}(\dot{x} - v)(\dot{x} - v) = X - \dot{x}v + \frac{1}{2}v^2$$

haline gelir. (4.1.4) denklemi değişmez kalırsa;

$$\frac{d^2 L}{dX^2} = 0 \qquad\qquad \frac{dL}{dX} = sabit \equiv m$$

Buradan,

$$L = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + c$$

olur.

4.1.3 Lagranjyen

Özet olarak serbest bir parçacığın lagranjyeni veya kinetik enerjisi galile uzay-zamanı tarafından kararlı hale getirilir. Benzer şekilde birbirine etkisi olmayan parçalar sisteminin lagranjyeni tüm parçaların kinetik enerjilerinin toplamı olmalıdır.

Eğer parçalar bir $V(\{x_i\};\{\dot{x}_i\})$ potansiyeli yardımıyla;

Uzaysal öteleme altında değişmezlik $V = V(\{x_i - x_j\};\{\dot{x}_i\})$ olmasını gerektirir.

Galile dönüşümü altında değişmezlik $V(\{x_i - x_j\};\{\dot{x}_i - \dot{x}_j\})$ olmasını gerektirir.

Rotasyon altında değişmezlik V'nin sadece aşağıdaki gibi bir rotasyonel skalere bağlı olmasını gerektirir:

$$(x_i - x_j)(x_k - x_l), \quad [(x_i - x_j)\times(x_k - x_l)](\dot{x}_m - \dot{x}_n)$$

$r_{ij} = x_j - x_i$ kabul edilirse

$$L = \sum_i \frac{1}{2} m_i \dot{x}_i^2 + V(\{r_{ij};\{\dot{r}_{kl}\}\})$$ yazılır.

Bununla beraber, buradaki V(x), "küçük" sistemimiz tarafından etkilenmeyen dinamiklere sahip "Büyük" bir sistem tarafından desteklenen bir dış potansiyel olarak düşünülmelidir.

Böylece; spacetime simetrileri küçük sistem tarafından korunmamakla birlikte, simetriler birleşik izole sistem tarafından korunmaktadır.

4.2 Simetri ve Korunum Kanunları

4.2.1 Enerjinin Korunumu:

Zaman ötelemesi altında değişmezlik bize $L = L(\mathrm{q}, \dot{\mathrm{q}})$ *veya* $\frac{\partial L}{\partial t} = 0$ olduğunu söyler. Buradan,

$$\frac{dL}{dt}=\frac{dq_i}{dt}\frac{\partial L}{\partial q_i}+\frac{d\dot{q}_i}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}=\dot{q}_i\frac{\partial L}{\partial q_i}+\ddot{q}_i\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}=\dot{\mathrm{q}}\frac{\partial L}{\partial \mathrm{q}}+\ddot{\mathrm{q}}\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathrm{q}}}$$

$\mathrm{q}=\{q_i\}$ ve $\dot{\mathrm{q}}=\{\dot{q}_i\}$ sistemin gerçek yörüngeleri olduğunda, Euler-Lagrange denklemlerini sağlarlar Yani,

$$\frac{dL}{dt}=\dot{q}_i\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right)+\frac{d\dot{q}_i}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}=\frac{d}{dt}\left(\dot{q}_i\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right)$$

$$E=\dot{q}_i\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}-L=\dot{\mathrm{q}}\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathrm{q}}}-L \tag{4.2.1}$$

denkleminden faydalanılarak aşağıdaki denkleme ulaşılır.

$$\frac{d}{dt}\left(\dot{q}_i\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}-L\right)=\frac{dE}{dt}=0 \tag{4.2.2}$$

E ifadesine sistemin enerjisi adı verilir. Böylece (4.2.2) denklemi, zaman ötelemesinin değişmezliğinden dolayı, izole bir sisteminin enerjinin korunduğunu gösterir.

4.2.2 Noether Teoremi

Sonsuz küçük koordinat ötelemesi düşünülürse $f=f(\mathrm{q},\dot{\mathrm{q}},t)$ *ve* $\varepsilon\to 0$ olmak üzere,

$q_i\to q_i+\varepsilon f_i$ *için* $\dot{q}_i\to\dot{q}_i+\varepsilon\dot{f}_i$ veya $q\to q+\varepsilon f$ *ve* $\dot{q}\to\dot{q}+\varepsilon\dot{f}$,

yazılabilir. Buradan Lagranjyen

$$L\left(q+\varepsilon f,\dot{q}+\varepsilon\dot{f},t\right)=L(q,\dot{q},t)+\varepsilon\left[\frac{\partial L}{\partial q}f+\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\dot{f}\right]+O\left(\varepsilon^2\right)$$

şeklinde ifade edilebilir.

$$\frac{dL}{d\varepsilon}=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{L\left(q+\varepsilon f,\dot{q}+\varepsilon\dot{f},t\right)-L(q,\dot{q},t)}{\varepsilon}=0 \quad \left(\frac{\partial L}{\partial q}f+\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\dot{f}=0\right)$$

şartları altında L **değişmezdir** denir.

Euler-Lagrange denklemlerini kullanarak; Noether teoremi olarak bilinen;

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right) f + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \dot{f} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} f\right) = \frac{d}{dt}(p.f) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} f = p f = F = sabit$$

denklemi elde edilir.

4.2.3 Örnek: (Toplam lineer momentumun korunumu)

Bir sistemin parçaları için, $x_j \to x_j + \varepsilon a$ uzaysal ötelemesini düşünelim. (j parçacık indisi ve a sabit bir vektör) Burada $\dot{x}_j$ değişmez olduğu görülebilir. Eğer L bu öteleme altında değişmez ise Noether teoremi bize $\sum_j a.p_j = a.P = sabit$ sonucunu verir. Yani L uzaysal öteleme altında değişmez olduğunda toplam momentum $P = \sum_j p_j$ korunur.

4.3 Hamiltonyen

Lagrange formüllerine göre sistemin durumu $(\mathrm{q}, \dot{\mathrm{q}})$ ile belirlenir. Hamilton formüllerinde $p = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}$ olmak üzere (q, p) tarafından belirlenir. $H(\mathrm{q}, \mathrm{p})$ Hamiltonyeni Legendre dönüşümü ile $L(\mathrm{q}, \dot{\mathrm{q}})$ lagranjyeninden elde edilir.

$$H(\mathrm{q}, \mathrm{p}) = \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathrm{q}}} \dot{\mathrm{q}} - L(\mathrm{q}, \dot{\mathrm{q}}) = \mathrm{p}\dot{\mathrm{q}} - L(\mathrm{q}, \dot{\mathrm{q}}) \tag{4.3.1}$$

H bütün (q, p) değerleri için tanımlıdır. Tersi olarak (4.2.1) denkleminde geçen E sadece sistemin gerçek yörüngesi üzerinde tanımlıdır.

$$dL = \frac{\partial L}{\partial \mathrm{q}} d\mathrm{q} + \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathrm{q}}} d\dot{\mathrm{q}} = \frac{\partial L}{\partial \mathrm{q}} d\mathrm{q} + \mathrm{p} d\dot{\mathrm{q}} \tag{4.3.2}$$

(4.1.1) ve (4.1.2) denklemleri kullanılarak;

$$dH = \dot{q}d\text{p} + \text{p}d\dot{q} - dL = \dot{q}d\text{p} + \text{p}d\dot{q} - \frac{\partial L}{\partial \text{q}}d\text{q} - \text{p}d\dot{q} = \dot{q}d\text{p} - \frac{\partial L}{\partial \text{q}}d\text{q} \qquad (4.3.3)$$

denklemi elde edilir.

Gerçekten de H fonksiyonu (q,p) bağımsız değişkenlerine bağlıdır. Şimdi,

$dH = \frac{\partial H}{\partial \text{p}}d\text{p} + \frac{\partial H}{\partial \text{q}}d\text{q}$ denklemi ile (4.1.3) denkleminin eşitliğinden faydalanarak

$$\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial \text{p}} \qquad \frac{\partial H}{\partial \text{p}} = -\frac{\partial L}{\partial \text{q}} = \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = -\dot{p}$$

elde edilir. Bu denklemler Hamilton denklemleri olarak bilinir.

4.4 Poisson Parantezi ve Öteleme Operatörleri

4.4.1 Poisson Parantezi

Newton mekaniği alanının ötesinde yeni teorilerin dizaynında çok önemli olan Lagranjyen ve Hamiltonyen formülleri, klasik mekanikte kullanılan önemli matematiksel özellikler ortaya çıkarmıştır.

$A(\text{q},\text{p})$ rastgele fonksiyonunu düşünelim. Fonksiyonun zaman göre türevi alınırsa,

Poisson parantezi, (q,p) koordinatlarında, $\{A,B\}_P = \frac{\partial A}{\partial \text{q}}\frac{\partial B}{\partial \text{p}} - \frac{\partial A}{\partial \text{p}}\frac{\partial B}{\partial \text{q}}$ şeklinde tanımlanır ve $\{A,B\}_P$ ile gösterildiği düşünülürse;

$$\frac{dA(\text{q},\text{p})}{dt} = \frac{\partial A}{\partial \text{q}}\dot{q} + \frac{\partial A}{\partial \text{p}}\dot{p} = \frac{\partial A}{\partial \text{q}}\frac{\partial H}{\partial \text{p}} - \frac{\partial A}{\partial \text{p}}\frac{\partial H}{\partial \text{q}} = \{A,H\}_P \qquad (4.4.1)$$

yazılabilir.

Sadece (q,p) koordinatları için sistemin gerçek yörüngeleri üstünde uygulanabileceğinden (4.4.1) denkleminde hamiltonyen denklemlerinden yararlanılmıştır.

$\mathcal{H}$ yardımıyla aşağıdaki lineer diferansiyel operatör tanımlanabilir.

$$\mathcal{H} = i\{\mathcal{H},\}_P = i\left(\frac{\partial H}{\partial \mathrm{q}}\frac{\partial}{\partial \mathrm{p}} - \frac{\partial H}{\partial \mathrm{p}}\frac{\partial}{\partial \mathrm{q}}\right) \tag{4.4.2}$$

Bu tüm (q,p) değerleri için geçerlidir ve i faktörü kuantum mekaniği ile sadece daha yakın benzerlikler için dahil edilir. (4.4.1) denklemi aşağıdaki şekilde de ifade edilebilir.

$$\frac{dA}{dt} = i\mathcal{H}A \quad veya \quad i\frac{dA}{dt} = -\mathcal{H}A \tag{4.4.3}$$

(q,p) yi sağlamak sistemin $[\mathrm{q}(t),\mathrm{p}(t)]$ gerçek yörüngesi üzerindedir, yoğunluk fonksiyonunu kullanırız:

$$\rho(\mathrm{q},\mathrm{p},t) = \delta[\mathrm{q}-\mathrm{q}(t)]\delta[\mathrm{p}-\mathrm{p}(t)] = \prod_i \delta[\mathrm{q}-\mathrm{q}(t)]\delta[\mathrm{p}-\mathrm{p}(t)]$$

$$\rightarrow A(t) = A[\mathrm{q}(t),\mathrm{p}(t)] = \int d\mathrm{q}\int d\mathrm{p}\,\rho(\mathrm{q},\mathrm{p},t)A(\mathrm{q},\mathrm{p})$$

buradan, (4.4.1) aşağıdaki gibi olur.

$$\frac{dA}{dt} = \int d\mathrm{q}\int d\mathrm{p}\frac{\partial\rho(\mathrm{q},\mathrm{p},t)}{\partial t}A(\mathrm{q},\mathrm{p}) = i\mathcal{H}A = \int d\mathrm{q}\int d\mathrm{p}\;\rho(\mathrm{q},\mathrm{p},t)\,[i\mathcal{H}A(\mathrm{q},\mathrm{p})]$$

$$\frac{dA}{dt} = \int d\mathrm{q}\int d\mathrm{p}\; i\mathcal{H}(\rho A) - \int d\mathrm{q}\int d\mathrm{p}\;(i\mathcal{H}\rho)A \tag{4.4.4}$$

Şimdi,

$$\int d\mathrm{q}\int d\mathrm{p}\; i\mathcal{H}(\rho A) = -\int d\mathrm{q}\int d\mathrm{p}\left(\frac{\partial H}{\partial \mathrm{q}}\frac{\partial\rho A}{\partial \mathrm{p}} - \frac{\partial H}{\partial \mathrm{p}}\frac{\partial\rho A}{\partial \mathrm{q}}\right)$$

$$= -\int d\mathrm{q}\int d\mathrm{p}\frac{\partial}{\partial q}\left(H\frac{\partial\rho A}{\partial \mathrm{p}}\right) - \frac{\partial}{\partial \mathrm{q}}\left(H\frac{\partial\rho A}{\partial \mathrm{q}}\right) = 0$$

Son eşitlik içerisindeki tüm terimler bir yüzey integralidir. ve sonucu 0 dır.

Buradan (4.4.4) denklemi $\frac{dA}{dt} = \int dq \int dp \frac{\partial \rho}{\partial t} A = -\int dq \int dp \left(i\mathcal{H}\rho \right) A$ haline gelir.

Bu denklem herhangi bir A fonksiyonu için geçerlidir.

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -i\mathcal{H}\rho \rightarrow i\frac{\partial \rho}{\partial t} = \mathcal{H}\rho$$

Bu denklem Liouville denklemi olarak isimlendirilir.

4.4.2 Öteleme Operatörleri

$A^{(n)}(0)$ ile $A(t)$ fonksiyonunun $t = 0$ noktasında zamana göre n. dereceden türevi gösterilsin. $A(t) = \exp(it\mathcal{H})A(0) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}(it\mathcal{H})^n A(0) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} A^{(n)}(0)$ (taylor serisi) şeklinde formal çözümü olan $i\frac{dA}{dt} = -\mathcal{H}A$ denklemi (4.4.1) denkleminden ayrılmalıdır.

Burada $\exp(it\, H)$ ile A yı zaman içinde t kadar öteleyen zamansal öteleme operatörü gösterilir. Burada H ise zaman öteleme üretecidir.

Benzer şekilde, P uzaysal öteleme üreteci iken $\exp(ia\, P)$ uzaysal öteleme operatörü yardımıyla $f(x)$ fonksiyonunu a kadar $f(x+a)$ ya ötelenebilir.

Taylor serisinden yararlanılırak,

$$f(x+a) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\left(a\frac{\partial}{\partial x} \right)^n f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}(ia.\mathcal{P})^n f(x)$$

$\mathcal{P} = -i\frac{\partial}{\partial x}$ elde edilir. 3 boyutlu öklidyen uzaydaki N parçacıklı bir sistem için bu denklem,

$$\mathcal{P} = -i\sum_{j=1}^{N} \frac{\partial}{\partial x_j} = i\{\mathcal{P},\ \}_P$$

şeklinde genelleştirilebilir. Aynı şekilde x_j "a" kadar yer değiştirirse $x_j + a$ olur. (4.4.2) de bahsedildiği üzere, P total lineer momentum olmak üzere; $\mathcal{P} = i\{\mathrm{P},\ \}_p$ için

$$\mathcal{P}_\alpha = i\sum_{j=1}^{N}\left(\frac{\partial P_\alpha}{\partial x_j}\frac{\partial}{\partial p_j} - \frac{\partial P_\alpha}{\partial p_j}\frac{\partial}{\partial x_j}\right) = -i\sum_{j=1}^{N}\left(\frac{\partial P_\alpha}{\partial p_j}\frac{\partial}{\partial x_j}\right)$$

$$= -i\sum_{j=1}^{N}\left(\frac{\partial}{\partial p_j}\sum_{k=1}^{N} p_{k\alpha}\right)\frac{\partial}{\partial x_j} = -i\sum_{j=1}^{N}\frac{\partial}{\partial x_{j\alpha}}$$

şeklinde yazılabilir.

4.5 Minkowski Uzay-zamanında Hareket Prensipleri

4.5.1 Minkowski Uzay-Zamanı

Rölativistik uzay-zamanlar bir metrikle beraber 4 boyutlu uzaylardır. Manifold üzerinde iki nokta arasındaki uzaklığa **gerçek zaman aralığı** denir ve $\Delta\tau$ ile gösterilir. Sonsuz küçük bölünmeler için g bir metrik tensör olmak üzere,

$$d\tau^2 = g_{\mu\nu}(x)dx^\mu dx^\nu \quad \mu,\nu = 1,2,3,0$$

yazılır. Minkowski uzayı, içinde bir çeşit eylemsiz kartezyen koordinat sistemi barındıran bir uzay olarak tanımlanır öyle ki metriği aşağıdaki gibidir.

$$g_{\mu\nu}(x) = \eta_{\mu\nu} = \begin{cases} -1 & \mu = \nu = 0 \\ 1 & \mu = \nu = 1,2,3 \quad \forall x \\ 0 & \mu \neq \nu \end{cases}$$

Eğer $g_{\mu\nu}(x) = \eta_{\mu\nu}$ olusa zaman $t = \frac{x^0}{c}$ şekliden tanımlanır. Burada c ışık hızıdır.

Uzaysal öteleme 3 boyutlu $x = x^i$ vektörü ile verilir. Genel olarak, bir koordinat sistemi, g metriğinin değişmediği bir öteleme tarafından sabit bir kartezyen koordinat sisteminden elde edilebiliyorsa **sabittir** denir

4.5.2 İzometriler

Simetri dönüşümü yapıldığında g değişmiyorsa bu dönüşüme izometri denir. Şimdi metrik tensörü farklı koordinat sistemlerinde tanımlarını görelim.

$$(g)_{\mu\nu} = g_{\mu\nu}$$
$$(g')_{\mu\nu} = g_{\mu'\nu'}$$
$$(\Lambda)_{\mu\nu} = \Lambda^{\mu}_{\nu'} = \frac{\partial x^{\mu}}{\partial x^{\nu'}}$$
$$\left(\Lambda^{T}\right)_{\mu\nu} = \Lambda^{\nu}_{\mu'}$$
$$\left(\Lambda^{-1}\right)_{\mu\nu} = \Lambda^{\mu'}_{\nu} = \frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^{\nu}}$$
$$\left(\left(\Lambda^{T}\right)^{-1}\right)_{\mu\nu} = \Lambda^{\nu'}_{\mu}$$

olmak üzere;

$$ds^2 = g_{\mu\nu}dx^{\mu}dx^{\nu} = g_{\mu'\nu'}dx^{\mu'}dx^{\nu'} = g_{\mu'\nu'}\Lambda^{\mu'}_{\mu}\Lambda^{\nu'}_{\nu}dx^{\mu}dx^{\nu}$$

$$\rightarrow g_{\mu\nu} = g_{\mu'\nu'}\Lambda^{\mu'}_{\mu}\Lambda^{\nu'}_{\nu} \quad veya \quad g_{\mu'\nu'} = \Lambda^{\mu'}_{\mu}\Lambda^{\nu'}_{\nu}g_{\mu\nu}$$

Yukarıdaki ifade matris formatında da yazılabilir.

$$g' = \Lambda^{T} g \Lambda \quad \Rightarrow g = \left(\Lambda^{T}\right)^{-1} g' \Lambda^{-1}$$

Λ izometri $\leftrightarrow$ g ve g' aynı fonksiyonel yapıdadır. İzometriler sabit bir sistemi bir başka sabit sisteme çevirir.

İzometri örnekleri

a) **Ötelemeler**: a sabit bir vektör olmak üzere ötelemeler $x^{\mu'} = x^{\mu} + a^{\mu}$ formundadır.

Buradan $dx^{\mu'} = dx^{\mu}$ için

$$ds^2 = g_{\mu\nu}dx^{\mu}dx^{\nu} = g_{\mu\nu}dx^{\mu'}dx^{\nu'} \equiv g_{\mu'\nu'}dx^{\mu'}dx^{\nu'} \Rightarrow g_{\mu\nu} = g_{\mu'\nu'}$$ olur.

b) **Lorentz Dönüşümü:**

İzometrik dönüşümlere **Lorentz dönüşümü** denir. Bu dönüşümlerin grubuna Lorentz grubu denir ve aşağıdaki gibi ifade edilir.

$$x^{\mu'} = \Lambda^{\mu'}_{\mu} x^{\mu}$$

$$\det\left|\Lambda^{\mu'}_{\mu}\right| = 1 \quad \textit{gerçek Lorentz grubu}$$

$$\det\left|\Lambda^{\mu'}_{\mu}\right| = -1 \quad \textit{sanal Lorentz grubu}$$

x^1 koordinatı etrafında θ açısı kadar dönüş

$$\Lambda = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos\theta & \sin\theta \\ 0 & 0 & -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

x^1 koordinatı boyunca v vektörü kadar boost

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \cosh\alpha & -\sinh\alpha & 0 & 0 \\ -\sinh\alpha & \cosh\alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Burada $\sinh\alpha = \gamma\beta \quad \cosh\alpha = \gamma \qquad \beta = \frac{v}{c} \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$ kabul edilmiştir.

c) Poincare Dönüşümü:

Hem ötelemeleri hemde ortogonal dönüşümleri içeren İzometrilere **Poincare dönüşümleri** denir. Bu dönüşümler poincare grubu adıyla bir grup oluştururlar ve aşağıdaki gibi ifade edilirler.

$$x^{\mu'} = \Lambda^{\mu'}_{\mu} x^{\mu} + a^{\mu'}$$

$$\det\left|\Lambda^{\mu'}_{\mu}\right| = 1 \quad \textit{gerçek Poincare grubu}$$

$$\det\left|\Lambda^{\mu'}_{\mu}\right| = -1 \quad \textit{sanal Poincare grubu}$$

Poincare grubu Minkowski uzayı için aynı zamanda bir izometri grubudur.

4.5.3 Tensörler

$f(x)$; x^{μ} kartezyen koordinatlarında tanımlı skaler bir fonksiyon olsun.

Poincare dönüşümü ile $x^{\mu'} = \Lambda^{\mu'}_{\mu} x^{\mu} + a^{\mu'}$

$$dx^{\mu'} = \Lambda^{\mu'}_{\mu} dx^{\mu} \qquad \partial_{\mu'} f \equiv \frac{\partial f}{\partial x^{\mu'}} = \Lambda^{\mu}_{\mu'} \frac{\partial f}{\partial x^{\mu}} = \Lambda^{\mu}_{\mu'} \partial_{\mu} f$$

olur.

V^{μ}, 4 bileşenli ve dönüşümler dx^{μ} ile aynı olduğundan Kontravaryant 4-vektör denir. Aynı şekilde V_{μ} 4 bileşenli olduğundan ve $\partial_{\mu} f$ 'ye benzediğinden **kovaryant 4-vektör** denir.

Nesnemiz m,n indisler olmak üzere dönüşümü aşağıdaki gibiyse **karışık 4-tensör** denir ya da m. Dereceden kontravaryant n. Dereceden kovaryant 4-tensör denir.

$$T^{\nu'_1,\ldots.\nu'_n}_{\mu'_1,\ldots.\mu'_n} = \Lambda^{\nu'_1}_{\nu_1} \cdots \Lambda^{\nu'_m}_{\nu_m} \Lambda^{\mu_1}_{\mu'_1} \cdots \Lambda^{\mu_n}_{\mu'_n}$$

Son olarak, bütün tensör indislerinin kısaltması Tüm Lorentz dönüşümleri altında değişmez Lorentz skaleridir. Yani $\eta_{\mu\nu} U^{\mu} V^{\nu}$

4.5.4 Serbest Bir Parçacığın Lagranjyeni

Bir parçacığın hareketi τ gerçek zaman olmak üzere minkowski uzayında bir $x^{\mu}(\tau)$ yoluyla tanımlanır. Eğer τ skaler olursa, yolun tanjantı $\rightarrow \dot{x}^{\mu} = \dfrac{dx^{\mu}}{d\tau}$ 4-vektör olur ve buna **4-hız** denir.

Rölativite prensibi tüm koordinat sistemlerinde aynı metrik tensöre sahip olması için izole bir sistemin denklemlerine ihtiyaç duyar. Başka bir deyişle hepsi tüm izometrik (Poincare) dönüşümler altında değişmezdir.

Bu, hareketin Lorentz skaleri olması ve ötelenebilir şekilde değişmez kalması durumunda sağlanır. Buradan , serbest bir parçacık için, $X = \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}\dot{x}^{\mu}\dot{x}^{\nu}$ iken,

$$S_0 = \int d\tau L\left(\eta_{\mu\nu}\dot{x}^{\mu}\dot{x}^{\nu}\right) = \int d\tau L(X) \tag{4.5.1}$$

Olur. Aynı şekilde, $\frac{\partial L}{\partial x^{\mu}} = 0 \qquad \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^{\mu}} = \frac{\partial X}{\partial \dot{x}^{\mu}}\frac{\partial L}{\partial X}$

$$\frac{\partial X}{\partial \dot{x}^{\mu}} = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\dot{x}^{\mu}}\left(\eta_{\alpha\beta}\dot{x}^{\alpha}\dot{x}^{\beta}\right) = \frac{1}{2}\left(\eta_{\alpha\beta}\delta_{\mu}^{\alpha}\dot{x}^{\beta} + \eta_{\alpha\beta}\dot{x}^{\alpha}\delta_{\mu}^{\beta}\right) = \frac{1}{2}\left(\eta_{\mu\beta}\dot{x}^{\beta} + \eta_{\alpha\mu\beta}\dot{x}^{\alpha}\right) = \dot{x}_{\mu}$$

$$\frac{d}{d\tau}\left(\frac{dL_0}{dX}\right) = \frac{dX}{d\tau}\frac{d^2 L_0}{dX^2}$$

Euler-lagrange denklemlerinden yaralanarak

$$\frac{d}{d\tau}\left(\frac{dL_0}{d\dot{x}^{\mu}}\right) = \frac{d}{d\tau}\left(\dot{x}^{\mu}\frac{dL_0}{dX}\right) = \ddot{x}_{\mu}\frac{dL_0}{dX} + \dot{x}^{\mu}\frac{d}{d\tau}\left(\frac{dL_0}{dX}\right)$$

$$= \ddot{x}_{\mu}\frac{dL_0}{dX} + \dot{x}^{\mu}\frac{dX}{d\tau}\frac{d^2 L_0}{dX^2} = 0 \tag{4.5.2}$$

sonucuna varılır.

Galile uzayında, $L(X)$ fonksiyonu ancak bu fonksiyonun Galile dönüşümü altında değişmez olması halinde belirlenir.

Burada, benzer Lorentz değişmezliği zaten bizim X seçimimizden etkilenir.

Parçacığın gerçek yörüngesi üstünde $X = \frac{1}{2}c^2$ olduğu için $L(X)$ aslında önemsizdir. Yani (4.5.2) denklemi $\ddot{x}_{\mu}\frac{dL}{dX} = 0$ haline döner. Bu nedenle $\frac{dL}{dX} \neq 0$ olduğu sürece hareketin denklemi herzaman $\ddot{x}_{\mu} = 0$ olur.

İşlemleri basitleştirmek için m parçacığın kütlesi olmak üzere:

$$L = -mX = -\frac{1}{2} m \eta_{\mu\nu} \dot{x}^{\mu} \dot{x}^{\nu} \tag{4.5.3}$$

Eksi işareti L'ye, göreli olmayan doğru bir limit vermek için konulmuştur. yani,

$$v = |v| = \left|\frac{dx}{dt}\right| \text{ iken } L = -\frac{1}{2}\left(c^2 - v^2\right)$$

olur.

4.5.5 Enerji-Momentum 4-Vektörü

x^{μ} ye karşılık gelen $p_{\mu} = -\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^{\mu}}$ kanonik momentuma enerji-momentum 4-vektör veya 4-momentum denir. kartezyen koordinatlarda,

$$\eta = \left(\eta_{\mu\nu}\right) = diag(1,-1,-1,-1) \tag{4.5.4}$$

Serbest bir parçacık için,

$$p_{\mu} = -\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^{\mu}} = m\eta_{\mu\nu}\dot{x}^{\nu} = m(c,-\dot{x})$$

Ötelemelere karşı korunur. Kanonik momentumlar tanıma göre 1-formlardır yani kovaryant vektörlerdir. Bunlara karşılık gelen kontravaryant vektörler ise;

$$p^{\mu} = \eta^{\mu\nu} p_{\nu} = m\dot{x}^{\mu} = m(c,\dot{x})$$

Yukarıda $\eta^{\mu\nu}$ ile $\eta_{\mu\nu}$ birbirinin tersidir. $\eta^{\mu\sigma}\eta_{\sigma\nu} = \delta^{\mu}_{\nu}$ (4.5.4) denklemine göre $\eta_{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu}$ olur. Parçacığın hızı ve koordinatları $\left(ct, x^1, x^2, x^3\right) = (ct, x)$, $\mathrm{u} = \frac{d\mathrm{x}}{dt}$ denkleminden ;

$$\frac{d\tau}{dt} = \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}} \equiv \frac{1}{\gamma}$$

4-hız: $\dot{x}^{\mu} = \frac{dx^{\mu}}{d\tau} = \frac{dt}{d\tau}\frac{dx^{\mu}}{dt} = \gamma(c,u)$

4-momentum: $p^{\mu} \equiv \left(p^{0}, p\right) = m\dot{x}^{\mu} = \gamma m(c, u)$

Serbest bir parçacık korunduğu için, zaman bileşeni ile E enerjisi arasında ilişki kurulabilir ve $p^{0} = \frac{E}{c}$ olmak üzere;

$$p_{\mu} p^{\mu} = m^{2} \eta_{\mu\nu} \dot{x}_{\mu} \dot{x}^{\nu} = m^{2} \gamma^{2} \left(c^{2} - u^{2}\right) = m^{2} c^{2}$$

yazılabilir.

4.5.6 Serbest Bir Parçacık Grubu İçin Lagranjyen

Birbirini etkilemeyen N parçacıklı bir sistem için (4.5.1-4.5.3) denklemlerini genellersek $S = -\sum_{i=1}^{N} d\tau_{i} \frac{1}{2} m_{i} n_{\mu\nu} \dot{x}_{i}^{\mu} \dot{x}_{i}^{\nu}$ olur.

Galile uzayında, Parçacık yoğunluğu “n” ve geçerli yoğunluk “j” aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$n(t, x) = \sum_{i} \delta^{3}\left(x - x_{i}(t)\right) \tag{4.5.5}$$

$$j(t, x) = \sum_{i} \frac{dx_{i}(t)}{dt} \delta^{3}\left(x - x_{i}(t)\right) \quad .(4.5.6)$$

Bunlar süreklilik denlemini sağlarlar.

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \nabla . j = 0 \tag{4.5.7}$$

$\frac{dx^{0}}{dt} = c$ kullanılarak (4.5.5-4.5.6) denklemleri tekil bir 4-vektör içinde birleştirilebilir.

$$j^{\mu}(x) = (cn(x), j(x)) = \sum_i \frac{dx_i^{\mu}(t)}{dt} \delta^3 (x - x_i(t))$$

Bu gerçekten bir 4-vektördür ve yeniden düzenlenirse aşağıdaki gibi görülür.

$$j^{\mu}(x) = c \sum_i d\tau_i \frac{dx_i^{\mu}(\tau_i)}{d\tau_i} \delta^4 (x - x_i(\tau_i))$$

(4.5.7) denkleminden $\partial_{\mu} j^{\mu} = 0$ çıkar. Bu denklemi sağlayan A 4-akım korunumludur denir.

Benzer şekilde, A miktarında bir değerin parçacıklarca taşınmasıyla ilgili akım $j_A^{\mu}(x) = c \sum_i d\tau_i A_i \frac{dx_i^{\mu}(\tau_i)}{d\tau_i} \delta^4 (x - x_i(\tau_i))$ şeklinde tanımlanır.

A elektrik şarjı olarak düşünülürse elektromanyetik akım elde edilir. A 4-momentum olarak düşünülürse enerji-momentum gerilim tensörü elde edilmiş olur.

$$T^{\mu\nu}(x) = c \sum_i \int d\tau_i m_i \frac{dx^{\mu}(\tau_i)}{d\tau_i} \frac{dx^{\nu}(\tau_i)}{d\tau_i} \delta^4 (x - x_i(\tau_i))$$

T nin simetrik ($T_{\mu\nu} = T_{\nu\mu}$) ve korunumlu ($\partial_{\nu} T^{\mu\nu} = 0$) olduğu kolayca görülebilir.

Serbest parçacıklar sisteminin enerji ve momentum korunumu ifadesinden dolayı T korunumludur demek basittir.

İdeal akışkanın yoğunluğu uzaysal olarak sabit ve parçacıklarının ortalama hızı sıfır olan bir durgun yüzeyi vardır.

T = $(T^{\mu\nu}) = diag(\rho, p, p, p)$. Burada ρ enerji yoğunluğunu ve p ise basıncı ifade etmektedir.

4.6 Klasik Elektrodinamik

4.6.1 Maxwell Denklemleri

Heaviside-lorentz içindeki mikroskobik Maxwell denklemlerini düşünelim.

Gauss Yasası: $\nabla E = \rho_e$ (4.6.1)

Kutup yok: $\nabla B = 0$ (4.6.2)

Faraday Yasası: $\nabla \times E + \frac{1}{c}\frac{\partial B}{\partial t} = 0$ (4.6.3)

Ampere Yasası: $\nabla \times B - \frac{1}{c}\frac{\partial E}{\partial t} = \frac{1}{c} j_e$ (4.6.4)

Bazı geçerli birleşmiş teoriler, manyetik uçların varlığını kabul etsede,bu iddialar henüz deneylerle desteklenmemiştir. Homojen denklem (4.6.2-4.6.3); (ϕ, A) potansiyalleri kullanılarak sağlanabilir:

$$E = -\nabla\phi - \frac{1}{c}\frac{\partial A}{\partial t} \qquad\qquad B = \nabla \times A$$

4-vektör $A^{\mu} = (\phi, A)$ ile $A_{\mu} = (\phi, A)$ kullanarak, 4-tensor anti-simetrik alan gücü aşağıdaki gibi tanımlanabilir.

$$F_{\mu\nu} = \partial_{\mu} A_{\nu} - \partial_{\nu} A_{\mu} \qquad\qquad F^{\mu\nu} = \partial^{\mu} A^{\nu} - \partial^{\nu} A^{\mu}$$

Kartezyen Koordinatlarında;

$$\partial_{\mu} = \left(\frac{\partial}{\partial x^0}, \frac{\partial}{\partial x^i}\right) = \left(\frac{1}{c}\partial_t, \partial_t\right) = \left(\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}, \nabla\right)$$

$$\partial^{\mu} = \left(\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}, -\nabla\right)$$

$$F^{\mu\nu} = -F^{\nu\mu} \qquad F^{\mu\mu} = -F^{\mu\mu} = 0$$

$$F^{0j} = \frac{1}{c}\frac{\partial A^j}{\partial t} + \frac{\partial \phi}{\partial x^j} = -E^j$$

$$F^{ij} = -\frac{\partial A^j}{\partial x^i} + \frac{\partial A^i}{\partial x^j} = -\varepsilon_{ijk}\frac{\partial A^j}{\partial x^i} = -\varepsilon_{ijk}B^k$$

Son 2 denklem tensor denklemi değildir. Öyleyse,

$$F = \left(F^{\mu\nu}\right) = \begin{pmatrix} 0 & -E^1 & -E^2 & -E^3 \\ E^1 & 0 & -B^3 & B^2 \\ E^2 & B^3 & 0 & -B^1 \\ E^3 & -B^2 & B^1 & 0 \end{pmatrix}$$

(4.6.1-4.6.4) denklemleri birleştirilirse;

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = \frac{1}{c} j_e^\mu$$

olur. Burada;

$j_e^\mu = \left(c\rho_e, j_e\right)$ ile 4-akım yoğunluğu gösterilmektedir.

4.6.2 Lagranjyen Alan

Maxwell denklmeleri enküçük hareket prensibinden türetilebilir. $A_\mu(x)$ 4-vektörü için; L Lagranjyen yoğunluk olmak üzere aşağıdaki denklem yazılabilir.

$$S = \int dt \;\; L = \int dt \int d^3x \; \mathcal{L} = \frac{1}{c}\int d^4x \; \mathcal{L}$$

$$\mathcal{L}(x) = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}(x)F^{\mu\nu}(x) - \frac{1}{c} j_e^\mu(x) A_\mu(x) \tag{4.6.5}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\mu} = -\frac{1}{c} j_e^\mu$$

$$\frac{\partial F_{\alpha\beta}}{\partial A_{\mu}} = 0 \qquad\qquad \frac{\partial F_{\alpha\beta}}{\partial(\partial_{\mu} A_{\nu})} = \delta_{\alpha\mu}\delta_{\beta\nu} - \delta_{\alpha\nu}\delta_{\beta\mu}$$

$$\frac{\partial\left(F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta}\right)}{\partial(\partial_{\mu}A_{\nu})} = \eta^{\alpha\gamma}\eta^{\beta\delta}\frac{\partial\left(F_{\alpha\beta}F_{\gamma\delta}\right)}{\partial(\partial_{\mu}A_{\nu})}$$

$$= \eta^{\alpha\gamma}\eta^{\beta\delta}\left[\left(\delta_{\alpha}^{\mu}\delta_{\beta}^{\nu} - \delta_{\alpha}^{\nu}\delta_{\beta}^{\mu}\right)F_{\gamma\delta} + F_{\alpha\beta}\left(\delta_{\gamma}^{\mu}\delta_{\delta}^{\nu} - \delta_{\gamma}^{\nu}\delta_{\delta}^{\mu}\right)\right]$$

$$= \left(\eta^{\mu\gamma}\eta^{\nu\delta} - \eta^{\nu\gamma}\eta^{\mu\delta}\right)F_{\gamma\delta} + F_{\alpha\beta}\left(\eta^{\alpha\mu}\eta^{\beta\nu} - \eta^{\alpha\nu}\eta^{\beta\mu}\right)$$

$$= F^{\mu\nu} - F^{\nu\mu} + F^{\mu\nu} - F^{\nu\mu} = 4F^{\mu\nu}$$

Euler-Lagrange denklemleri kullanılarak;

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial A_{\nu}} - \partial_{\mu}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_{\mu}A_{\nu})} = 0$$

$$-\frac{1}{c}j_{e}^{\nu} + \partial_{\mu}F^{\mu\nu} = 0$$

istenen denklem elde edilir.

4.6.3 Yüklü Parçacıkla Etkileşim

4.6.3.a) Lagranjyen

Bir parçacığın q şarjı için, akım yoğunluğu:

$$\frac{1}{c}j_{e}^{\mu}(x) = cq\int d\tau\,\dot{x}^{\mu}(\tau)\,\delta^{4}(x - x(\tau))$$

olup; Buradan;

$$\frac{1}{c^{2}}\int d^{4}x j_{e}^{\mu}(x)A_{\mu}(x) = -\frac{q}{c}\int d^{4}x\int d\tau\,\dot{x}^{\mu}(\tau)\,\delta^{4}(x - x(\tau))A_{\mu}(x)$$

$$= -\frac{q}{c}\int d\tau\,\dot{x}^{\mu}(\tau)\,A_{\mu}[x(\tau)]$$

(4.5.1) ve (4.6.5) denklemleri birleştirilerek, elektromanyetik alana maruz kalan yüklü bir parçacığın hareketi;

$$L = -\frac{1}{2} m\eta_{\mu\nu}\dot{x}^{\mu}\dot{x}^{\nu} \qquad L_{\text{int}} = -\frac{q}{c}\dot{x}^{\mu}A_{\mu}(x)$$

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4c}F_{\mu\nu}(x)F^{\mu\nu}(x) \qquad \mathcal{L}_{\text{int}} = -\frac{1}{c}j_e^{\mu}(x)A_{\mu}(x) \text{ olmak üzere}$$

$$S = \int d\tau\, L + \int d^4x\, \mathcal{L}_{\text{int}} + \int d^4x\, \mathcal{L} = \int d\tau\, L + \int d\tau\, L_{\text{int}} + \int d^4x\, \mathcal{L}$$

şeklinde olacaktır.

4.6.3.b) Hareket Denklemleri

Dinamik değişkenler, $x^{\mu}(\tau)$ ve $A^{\mu}(x)$ 'dir ve $A^{\mu}(x)$ 'teki x terimi için 2 tanım bulunmaktadır.

$A^{\mu}(x)$ dinamik bir değişken gibi davranırken x; L and $\mathcal{L}_{\text{int}}$ içerisinde sadece bir değişkendir. Ancak, $A^{\mu}(x)$ L_{int}'teki gibi bir parçacık üzerinde potansiyel olarak işlediğinde, x dinamik bir değişken olarak işlem görür. Benzer bir yorumlama $j_e^{\mu}(x)$'e de uygundur.

Bir dinamik değişkenin varyasyonlarında, tüm diğerleri sabit olarak alınmalıdır.

Bu durumda, parçacık serbestlik derecesi için $x^{\mu}(\tau)$, $\delta A^{\mu} = 0$ olarak belirlenir, böylece $\delta\mathcal{L} = 0$ ve

$$\begin{aligned}
\delta S &= \int d\tau\delta\left(L + L_{\text{int}}\right) \\
&= \int d\tau\delta\left[-\frac{1}{2}m\eta_{\mu\nu}\,\dot{x}^{\mu}\,\dot{x}^{\nu} - \frac{q}{c}\dot{x}^{\mu}A_{\mu}(x)\right] \\
&= -\int d\tau\left\{\left[m\eta_{\mu\nu}\dot{x}^{\nu} + \frac{q}{c}A_{\mu}(x)\right]\delta\dot{x}^{\mu} + \frac{q}{c}\dot{x}^{\nu}\frac{\partial A_{\nu}}{\partial x^{\mu}}\delta x^{\mu}\right\} \\
&= -\int d\tau\left\{-\frac{d}{d\tau}\left[m\eta_{\mu\nu}\dot{x}^{\nu} + \frac{q}{c}A_{\mu}(x)\right] + \frac{q}{c}\dot{x}^{\nu}\frac{\partial A_{\nu}}{\partial x^{\mu}}\right\}\delta x^{\mu}
\end{aligned}$$

$$m\eta_{\mu\nu}\ddot{x}^{\nu}+\frac{q}{c}\dot{A}_{\mu}-\frac{q}{c}\dot{x}^{\nu}\frac{\partial A_{\nu}}{\partial x^{\mu}}=0 \tag{4.6.6}$$

olur. Şimdi, $\dot{A}_{\mu}=\dfrac{dA_{\mu}}{d\tau}=\dfrac{dx^{\nu}}{d\tau}\dfrac{\partial A_{\mu}}{\partial x^{\nu}}=\dot{x}^{\nu}\partial_{\nu}A_{\mu}$ (4.6.6)'dan;

$$m\eta_{\mu\nu}\ddot{x}^{\nu}=\frac{q}{c}\dot{x}^{\nu}\left(\partial_{\mu}A_{\nu}-\partial_{\nu}A_{\mu}\right)=\frac{q}{c}\dot{x}^{\nu}F_{\mu\nu}$$

$$\Rightarrow \quad m\ddot{x}_{\mu}=\frac{q}{c}\dot{x}^{\nu}F_{\mu\nu}$$

$$m\ddot{x}_{\mu}=\frac{q}{c}\dot{x}^{\nu}F_{\nu}^{\mu}=\frac{q}{c}\dot{x}^{\nu}F^{\mu\nu}=\frac{q}{c}\eta_{\nu\sigma}\dot{x}^{\sigma}F^{\mu\nu}$$

veya

$$m\begin{pmatrix} c\ddot{t} \\ \ddot{x}^1 \\ \ddot{x}^2 \\ \ddot{x}^3 \end{pmatrix}=\frac{q}{c}\begin{pmatrix} 0 & -E^1 & -E^2 & -E^3 \\ E^1 & 0 & -B^3 & B^2 \\ E^2 & B^3 & 0 & -B^1 \\ E^3 & -B^2 & B^1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c\dot{t} \\ \dot{x}^1 \\ \dot{x}^2 \\ \dot{x}^3 \end{pmatrix}=\frac{q}{c}\begin{pmatrix} E\,\dot{x} \\ cE^1\dot{t}+B^3\dot{x}^2-B^2\dot{x}^3 \\ cE^2\dot{t}-B^3\dot{x}^1+B^1\dot{x}^3 \\ cE^3\dot{t}+B^2\dot{x}^1-B^1\dot{x}^2 \end{pmatrix}$$

olup; $E=\left(E^1,E^2,E^3\right)$ 3 boyutlu öklidyen vektör. Buradan;

$$\dot{t}=\frac{dt}{d\tau}=\gamma=\frac{1}{\sqrt{1-\dfrac{u^2}{c^2}}} \qquad \ddot{t}=\frac{d\gamma}{d\tau}=\gamma\frac{d\gamma}{dt} \qquad u=\frac{dx}{dt}$$

$$\dot{x}=\frac{dx}{d\tau}=\gamma u \qquad \ddot{x}=\frac{d}{d\tau}(\gamma u)=\frac{\gamma}{m}\frac{dp}{dt} \qquad p=m\gamma u$$

için,

$$\begin{pmatrix} mc\gamma\dfrac{d\gamma}{dt} \\ \gamma\dfrac{dp^1}{dt} \\ \gamma\dfrac{dp^2}{dt} \\ \gamma\dfrac{dp^3}{dt} \end{pmatrix}=\frac{q}{c}\gamma\begin{pmatrix} Eu \\ cE^1+B^3u^2-B^2u^3 \\ cE^2-B^3u^1+B^1u^3 \\ cE^3+B^2u^1-B^1u^2 \end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix} mc^2\dfrac{d\gamma}{dt} \\ \dfrac{dp}{dt} \end{pmatrix}=q\begin{pmatrix} E\,u \\ E+\dfrac{1}{c}u\times B \end{pmatrix}$$

x^{μ} ‘e karşılık gelen kanonik momentler ise,

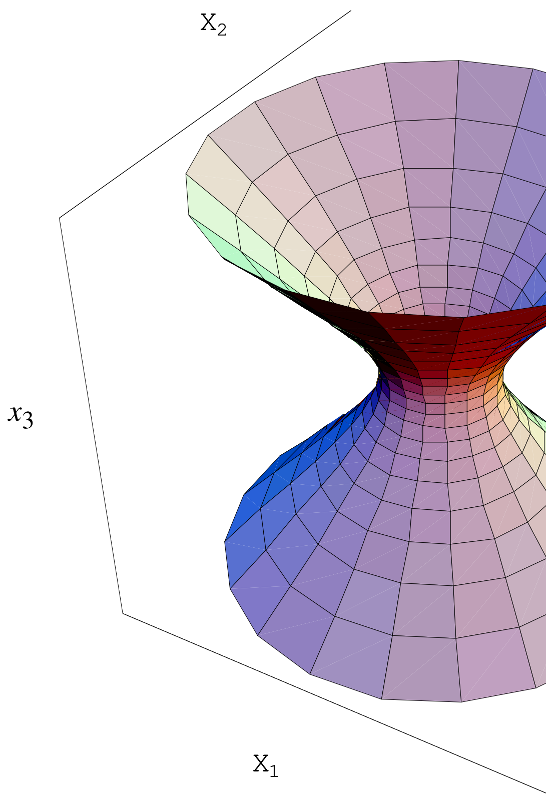
$$p_{\mu} = -\frac{\partial}{\partial \dot{x}^{\mu}}(L + L_{\text{int}}) = m\eta_{\mu\nu}\dot{x}^{\nu} + \frac{q}{c}A_{\mu}$$

$$\Rightarrow$$

$$p^{\mu} = m\dot{x}^{\mu} + \frac{q}{c}A^{\mu}$$

olur.

5. BÖLÜM : HİPERBOLİD UYGULAMASI



Şekil 5.1 Hiperbolid Negatif eğriliğe sahip bir uzay

$x_1 = Cosh(a).Cos(\theta);$
$x_2 = Cosh(a).Sin(\theta);$
$x_3 = Sinh(a);$

denklemleri parametrik olarak $x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 1$ denkleminin çözümüdür.

Buradan uyarlanmış metrik elde edilebilir.

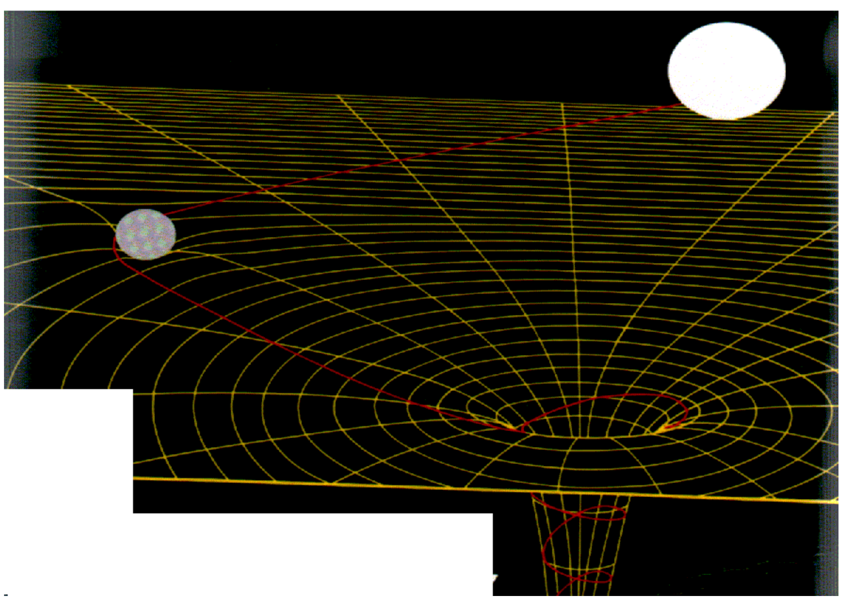
$$dx_1 = Sinh(a).Cos(\theta)da - Cosh(a).Sin(\theta)d\theta;$$
$$dx_2 = Sinh(a).Sin(\theta)da + Cosh(a).Cos(\theta)d\theta;$$
$$dx_3 = Cosh(a)da;$$

$$ds^2 = dx_1^2 + dx_2^2 - dx_3^2$$
$$= \frac{1}{2}\left(-2da^2 + d\theta^2 + d\theta^2 \cosh[2a]\right) \qquad -\infty < a < \infty, \quad 0 < \theta < 2\pi$$

a ve θ ile uzayın koordinatlarını göstermektedir. Metrik üç boyutlu Lorentz metriğidir. Bu metrik yardımıyla eğrinin uzunluğu hesaplanabilir. Yüzey üzerindeki bir eğri t parametresine bağlı olarak verilen koordinat fonksiyonları tarafından belirlenir. Bu durumda; eğri üzerindeki t_A noktası ile t_B noktası arasındaki yayın uzunluğu aşağıdaki integral vasıtasıyla hesaplanabilir.

$$l_{AB} = \int_{t_A}^{t_B} \sqrt{\left(\frac{dx_1}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dx_2}{dt}\right)^2 - \left(\frac{dx_3}{dt}\right)^2}\, dt$$

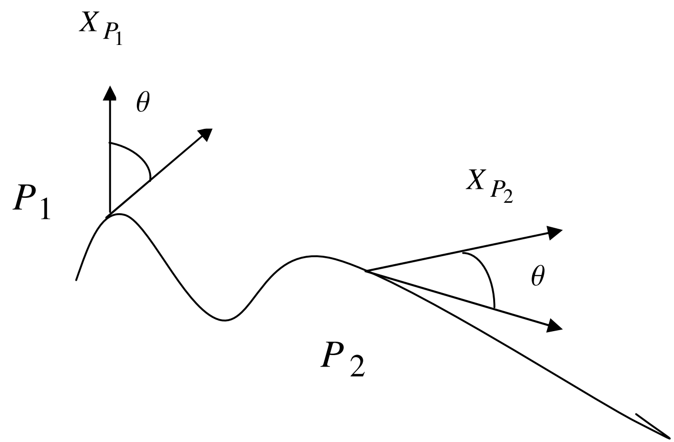
Bu değere **gravitasyonel alan** denir.



Şekil 5.2 Hiperbolidin boğazında hareket eden top

Bükümlü uzaydaki doğru ile düz uzaydaki doğrular birbirinden farklıdır. Örneğin şekildeki hiperbolidin boğazının içinde hareket eden topun takip ettiği görülen kırmızı çizgi bir doğrudur (geodezik). Diğer taraftan uzay-zaman, içinde hareket eden maddenin ağırlığı tarafından bükülür.

Eğrilerin geodezikleri küçük deformasyonlar karşısında değişmezler. Geodezikler vektörlerimize paralel taşıma yaptığımız eğrilerdir.



Şekil 5.3 Paralel taşıma esnasında açı ve tanjant vektör değişmez.

Hiperbolid üzerinde 3 tip geodezik vardır:

1. $ds^2 < 0$ Time-like geodezik: Kütleli bir parçacık için evren çizgisi (worldline) olabilir.

2. $ds^2 > 0$ Space-like geodezik: Herhangi bir parçacık takip edilemez. Çünkü ışıktan hızlı hareket etmektedir.

3. $ds^2 = 0$ Light-like geodezik: Foton benzeri kütleli bir parçacık için evren çizgisi olabilir.

τ gerçek zaman aralığı olmak üzere uyarlanmış metriğe göre $d\tau = \sqrt{-ds^2}$ ve $s = \int d\tau = l$ yazılabilir. Buradan uzunluk,

$l = \int \sqrt{-\left(-\left(\frac{da}{dt}\right)^2 + \cosh^2 a \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\right)}\, dt$ integrali vasıtasıyla hesaplanır.

$$l = \int \sqrt{\left(\frac{da}{dt}\right)^2 - \cosh^2 a \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2}\, dt \equiv \int \sqrt{\mathcal{L}}\, dt$$

$$\delta\, \mathsf{l} = \int \frac{1}{\sqrt{\mathcal{L}}} \delta \mathcal{L}\, dt = 0 \quad \Rightarrow \delta \mathcal{L} = 0$$

Buradan $\mathcal{L} = \dot{a}^2 - \cosh^2 a\, \dot{\theta}^2$ sıradan bir mekanik problemin Lagranjyeni yerine düşünülebilir.

Euler-Lagrange denklemleri:

$$0 = \partial_t \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} = \partial_t \left(-2\cosh^2 a\, \dot{\theta}\right)$$

$$0 = \partial_t \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{a}} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial a} = 2\, \partial_t \left(-\partial_t \dot{a} + \cosh a \sinh a\, \dot{\theta}\right)$$

Yukarıdaki denklemlerin 1.si, θ ‘nın periyodik bir değişken olduğunu gösterir ve bu denklemin çözümü yapılacak olursa,

$\cosh^2 a\, \dot{\theta} = p = sabit$ olur.

Time-like ve light-like durumlarında p değeri, geodezik üzerindeki parçacığın enerjisini ifade eder.

$$\mathcal{L} = g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{ds} \frac{dx^\nu}{ds} = \dot{a}^2 - \cosh^2 a\, \dot{\theta}^2 = k = \begin{cases} 1\,; & space-like \\ 0\,; & light-like \\ -1\,; & time-like \end{cases}$$

Bu bölümlenmeden direkt olarak yörüngelerin denklemlerini elde edebiliriz:

$$\dot{a}^2 = \cosh^2 a\, \dot{\theta}^2 + k$$

$$\left(\frac{da}{d\theta}\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = \cosh^2 a \frac{p^2}{\cosh^4 a} + k \qquad \left(\frac{da}{d\theta}\right)^2 \frac{p^2}{\cosh^4 a} = \cosh^2 a \frac{p^2}{\cosh^4 a} + k$$

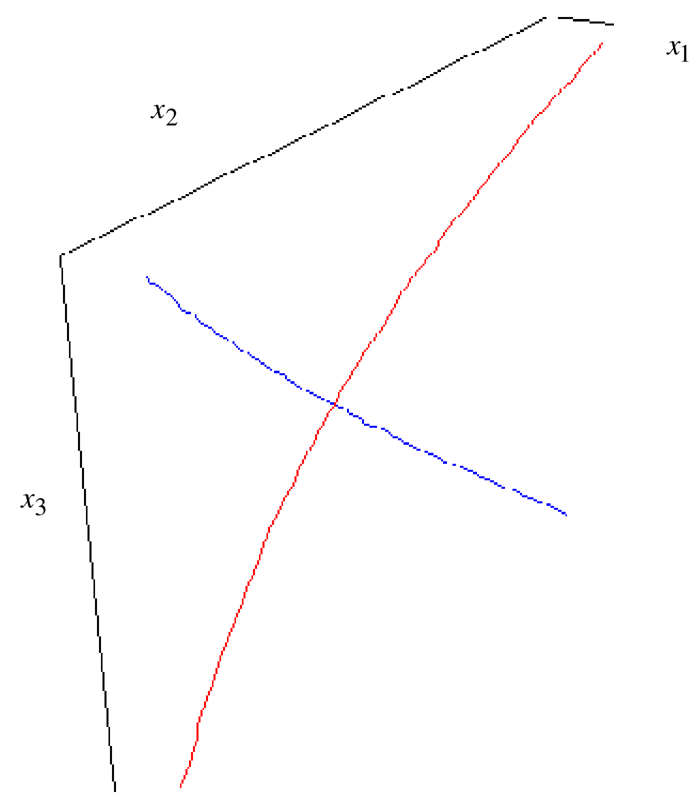
$$\frac{da}{d\theta}=\frac{\sqrt{p^2\cosh^2 a+k\cosh^4 a}}{p}$$

Yörüngelerin diferansiyel denklemini elde etmek için bu model, daha gerçekçi olan 4 boyutlu modellere uyarlanabilir.

Genelde bu uyarlama 3 tip geodezik ailesi verir.

1. Space-like tipi geodezikler:

$$\tan\theta = p\frac{\sinh a}{\sqrt{p^2+\cosh^2 a}}$$

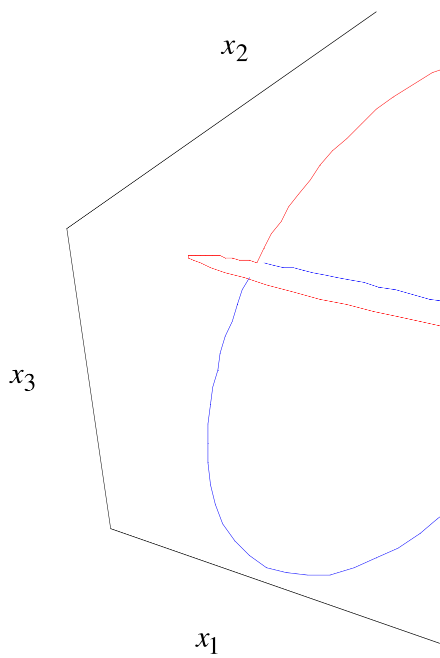


Şekil 5.4: Space-Like geodezik

Hiperbolid üzerindeki bu eğriler space-like tipindedir. $-\infty$ dan $+\infty$ a gerilir. Bu eğriler hiperbolidin boğazının etrafında bir miktar dönerler fakat asla tam tur atamazlar.

2. Time-like tipi geodezikler:

$$\tan\theta = p\frac{\sinh a}{\sqrt{p^2 - \cosh^2 a}}$$

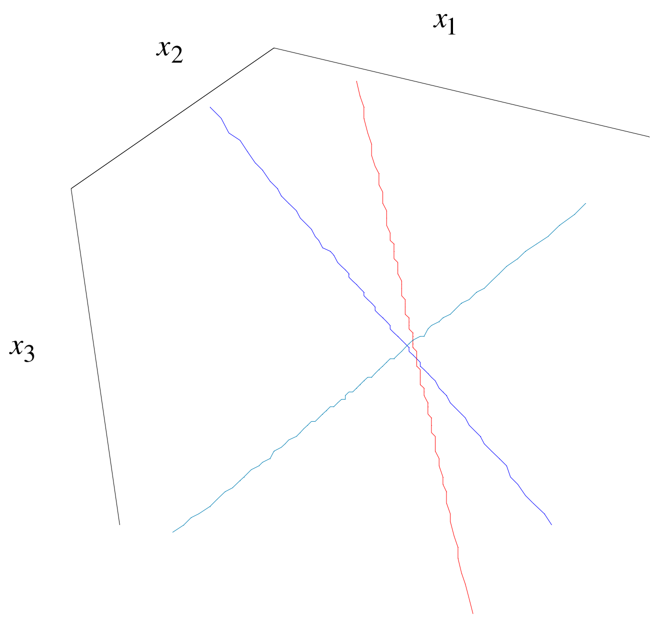


Şekil 5.5: Burada nedensellik açısından kapalı Time-like eğrilerde bir problem olabilir.

Bunlar hiperbolid üzerindedirler ve hiperbolidin boğazının etrafında dönebilirler. Fakat asla sonsuzluğa uzanmazlar. Bu eğriler hareketin ilk integrali tarafından da sınıflandırılabilirler. Burada E enerjisinden yararlanılabilir.

3. Light-like tipi geodezikler

$$\tanh\frac{a}{2} = \tan\frac{\theta}{2} + \alpha$$



Şekil 5.6: Light-Like geodezikler konformal dönüşümler altında korunurlar.

Hiperbolid üzerindeki bu eğriler doğrudurlar ve açısı α kadar döndürülen hareketin ilk integrali tarafından tanımlanırlar.

KAYNAKLAR

Chinea D., De Leon., M., Marrero, J.C., *The Constant Algorithm for Time-Dependent Lagrangians*, Ms Classification 58F05, 70H35, 53C15, Spain(1991).

Civelek, Ş., *Yaklaşık Tanjant ve Kotanjant Demette Tanımlı Lagranjyen ve Hamiltonyein k. Mertebeden Yükseltilmişleri*, Altınoluk Matematik Günleri, Balıkesir Univ., (1996)

Civelek, Ş., *The Lifts of Lagrange and Hamilton Equations to The Extended Vektör Bundles*, Math. Comp. Appl., vol. 1, No. 1, pp. 21-28, (1996)

De Andres., L.C., De Leon., M., Rodrugues, P.R.., *Connections on Tangent Bundles of Higher Order Associated to Regular Lagrangians*, Geometriae Dedicata vol. 39, pp. 17-28, (1991).

De Leon., M., Marrero, J.C., *Time Dependent Linear Lagrangians: The Inverse Problem, Symmetries and Constants of Motion*, Ms Classification Primary 58F05, Secondary 70H35, Spain(1991).

De Leon., M., Rodrugues, P.R.., *Second-Order Differential equations and non-conservative Lagrangian Mechanics*, J. Phys. A: Math. Gen. 20, pp. 5393-5396, UK, (1987).

De Leon., M., Rodrugues, P.R.., *Generalized Clasical Mechanics and Field Theory* , North Holland Amsterdam Math. Studies 112, 1985.

De Leon., M., Rodrugues, P.R.., *Methods of Differential Geometry in Analytical Mechanics*, North Holland Amsterdam Math.Studies 159, 1989.

De Leon., M., Rodrugues, P.R. (1988), *Degenerate Lagrangian Systems and Their Associated Dynamics*, Rendiconti di Math. Serie VII Vol. 8, Roma, pp 105-130.

FRE, P. (06-Oct-2007), http://personalpages.to.infn.it/~fre/PPT/virgolect.ppt,

Hazar, M., *Yaklaşık Tanjant Manifoldlar ve Mekanik Sistemler*, Yüksek Lisans Tezi, PAU Fen Bilimleri Enstitüsü, Mat. ABD. (1998)

Lopez, R., (2008) Differential Geometry of Curves and Surfaces in Lorentz Minkowski Space, **IME-USP,** Brasil, 1-28

Özar, M., *Klasik Mekanikteki Mekanik Sistemlerin Bilgisayar Programlama İle Modellenmesi*, Yüksek Lisans Tezi, PAU Fen Bilimleri Enstitüsü, Mat. ABD. (2007)

Popp K., (2000) Non-Smooth Mechanical Systems, ***J. Appl. Maths.,*** 5:765-772

Rızaoğlu, E. ve **Sünel, N.,** (2002) Klasik Mekanik, ***Seçkin Yayıncılık***, Ankara, 570s

Udwadia, F. E. and **Kalaba, R. E.,** (1992) A New Perspective On Constrained Motion, ***Proc. Roy. Soc.***, 439:407-410

Udwadia, F. E. and **Kalaba, R. E.,** (1996) Analytical Dynamics: A New Approach, ***Cambridge University Press,*** New York, 272p

Udwadia, F. E., (2000) Fundamental Principles of Lagrangian Dynamics: Mechanical Systems with Non-ideal, Holonomic and Nonholonomic Constraints, ***J. Maths. Analysis and Appl.***, 251:341-345

Wonk, C. .K., (25-Nov-2009), http://ckw.phys.ncku.edu.tw/public/pub/Notes/TheoreticalPhysics/pdf/3._ClassicalPhysics.pdf, (Nov-2009) (Nov-2009)

ÖZGEÇMİŞ

Bülent YILDIZ

15.11.1972 tarihinde İzmir'in Kiraz ilçesinde doğdu. İlköğrenimini Ödemiş Atatürk İlkokulu'nda, orta ve lise eğitimini Ödemiş Ortaokulu ve Lisesi'nde tamamladı. 1989 yılında girdiği İTÜ Matematik Mühendisliği bölümünden 1994 yılında mezun oldu. 1995 yılında Pamukkale Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim dalında yüksek lisans eğitimine başladı. 1996 yılında T.C. Başbakanlık'ta mühendis olarak göreve başladı. Halen çalışmaya devam etmektedir.