

**DİFERANSİYEL DÖNÜŞÜM METODU VE
UYGULAMALARI**

**Pamukkale Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Yüksek Lisans Tezi
Matematik Anabilim Dalı**

Duygu ESKİN(İLAN)

Danışman: Yard. Doç. Dr. İbrahim ÇELİK


Haziran, 2009


DENİZLİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ ONAY FORMU

Duygu ESKİN(İLAN) tarafından Yard. Doç. Dr. İbrahim ÇELİK yönetimiyle hazırlanan ‘**Diferansiyel Dönüşüm Metodu ve Uygulamaları**’ başlıklı tez tarafımızdan okunmuş, kapsamı ve niteliği açısından bir Yüksek Lisans Tezi olarak kabul edilmiştir.


Doç. Dr. Harun Kemal ÖZTÜRK
Jüri Başkanı


Doç. Dr. Ayşegül Daşcıoğlu
Jüri Üyesi


Yrd. Doç. Dr. İbrahim Çelik
Jüri Üyesi(Danışman)

Pamukkale Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun
08./07/2009 tarih ve ..16/6... sayılı kararıyla onaylanmıştır.

Prof. Dr. Halil KARAHAN

Müdür

TEŞEKKÜR

Yüksek lisans çalışması olarak bu tezin hazırlanmasında beni yönlendirerek değerli tecrübe ve bilgi birikimlerini benimle paylaşan öncelikle çok değerli tez danışmanı sayın hocam Yard. Doç. Dr. İbrahim ÇELİK'e sonsuz teşekkür ve saygılarımı sunarım. Bununla birlikte çalışmalarım sırasında göstermiş olduğu sabır, yardım ve teşviklerinden dolayı eşime, bana olan güvenlerinden dolayı anneme, babama, ağabeyime ve eşine teşekkürlerimi sunarım.

Duygu ESKİN(İLAN)

Bu tezin tasarımı, hazırlanması, yürütülmesi, araştırmaların yapılması ve bulguların analizinde bilimsel etiğe ve akademik kurallara özenle riayet edildiğini; bu çalışmanın doğrudan birincil ürünü olmayan bulguların, verilerin ve materyallerin bilimsel etiğe uygun olarak kaynak gösterildiğini ve alıntı yapılan çalışmalara atfedildiğini beyan ederim.

İmza :

Öğrenci Adı Soyadı: Duygu ESKİN(İLAN)

ÖZET

DİFERANSİYEL DÖNÜŞÜM METODU VE UYGULAMALARI

Eskin(İlan), Duygu

Yüksek Lisans Tezi, Matematik ABD

Tez Yöneticisi: Yard. Doç. Dr. İbrahim ÇELİK

Haziran 2009, 73 Sayfa

Bu tez çalışmasında; Diferansiyel Dönüşüm Metodunun tanımı ve bazı genel özellikleri verilmiştir. Diferansiyel Dönüşüm Metodu bazı örneklere uygulanmış ve bulunan sonuçlar diğer metotlar ve tam çözümlerle karşılaştırılmıştır.

Birinci bölümde; bu metot hakkında genel bir literatür özeti verilmiştir.

Bu tezin ikinci bölümünde; Diferansiyel Dönüşüm Metodunun bazı tanımları verilmiştir.

Üçüncü bölüm; farklı boyutlardaki Diferansiyel Dönüşüm Metodu için bazı teoremlerin ispatları verilmiştir.

Dördüncü bölümde; bu yöntemle ilgili uygulamalar verilmiştir. Nümerik çözümlerin grafikleri çizilerek tam çözümlerle karşılaştırılmıştır.

En son olarak da çalışmamızda elde edilen sonuçlar yorumlanmıştır.

Anahtar Kelimeler: Diferansiyel Dönüşüm Metodu, Manyetik hidrodinamik Akı Denklemi, mKdv Lattice Denklemi, Schrödinger Denklemi, Toda Lattice Denklemi

Doç. Dr. Harun Kemal Öztürk

Doç. Dr. Ayşegül Daşcıoğlu

Yrd. Doç. Dr. İbrahim Çelik

ABSTRACT**DIFFERENTIAL EQUATIONS SOLUTIONS WITH DIFFERENTIAL
TRANSFORMATION METHOD**

Eskin(İlan), Duygu

M.Sc. Thesis in Mathematics

Supervisor: Asst. Prof. Dr. İbrahim ÇELİK

June 2009, 73 Pages

In the present thesis; some definition and properties of the Differential Transform Method have been presented. The Differential Transformation Method has been applied to some examples and results have been compared with those of other methods and exact solution.

In the first section; a general literature about this method have been summarized in detail.

Some definitions of DTM have been present in the second section of this thesis. Thus, it was aimed to establish a relationship between the sections of this thesis.

Section three begins with some proofs of theorems some properties of the Differential Transform Method for different dimensions.

In section four, applications about the method (DTM) have been given. Drawn graphics of the numerical results have been compared with the exact solutions.

In the last section, findings of this investigation and discussions of the results have been presented.

Keywords: Differential Transformation Method, Magnetohydrodynamic flow Equations, mKdv Lattice Equations, Schrödinger Equations, Toda Lattice Equations

Assoc. Prof. Dr. Harun Kemal Öztürk

Assoc. Prof. Dr. Ayşegül Daşcıoğlu

Asst. Prof. Dr. İbrahim Çelik

İÇİNDEKİLER

	Sayfa
İçindekiler	vii
Şekiller Dizini.....	viii
Tablolar Dizini.....	x
Simgeler ve Kısaltmalar Dizini.....	xi
1. DİFERANSİYEL DÖNÜŞÜM METODUNUN TARİHÇESİ.....	1
1.1. Giriş	1
2. DİFERANSİYEL DÖNÜŞÜM METODU.....	6
2.1. Bir Boyutlu Diferansiyel Dönüşüm Metodu.....	6
2.2. İki Boyutlu Diferansiyel Dönüşüm Metodu.....	7
2.3. Üç Boyutlu Diferansiyel Dönüşüm Metodu.....	8
2.4. m Boyutlu Diferansiyel Dönüşüm Metodu.....	8
3. BAZI TEMEL MATEMATİKSEL TEOREMLER.....	10
3.1. Bir Boyutlu Diferansiyel Dönüşümünün Temel Teoremleri.....	10
3.2. İki Boyutlu Diferansiyel Dönüşümünün Temel Teoremleri.....	13
3.3. Üç Boyutlu Diferansiyel Dönüşümünün Temel Teoremleri.....	18
3.4. Fark Denklemleri ile İlgili Temel Teoremler.....	22
3.5. İntegro Diferansiyel Denklemleri İçin Temel Teoremler.....	28
4. DİFERANSİYEL DÖNÜŞÜM METODU UYGULAMALARI.....	32
Sonuç	63
Kaynaklar.....	64
Özgeçmiş.....	66
Ekler.....	67

ŞEKİLLER DİZİNİ

Sayfa

Şekil 4.1. $N = 5, k_1 = 0.1, t = 0.5$ için u 'nun DTM ve Tam çözümlerinin karşılaştırılması.....	36
Şekil 4.2. $N = 5, k_1 = 0.1, t = 1.5$ için u 'nun DTM ve Tam çözümlerinin karşılaştırılması.....	36
Şekil 4.3. $N = 5, d = 0.1, c = 0.1, t = 1$ için u 'nun DTM ve Tam çözümlerinin karşılaştırılması	39
Şekil 4.4. $N = 5, k_1 = 0.1, t = 1, p = 0.5$ için u 'nun DTM değerinin mutlak hatası	39
Şekil 4.5. $N = 5, d = 0.1, c = 0.1, t = 1$ için v 'nin DTM ve Tam çözümlerinin karşılaştırılması	43
Şekil 4.6. $N = 5, d = 0.1, c = 0.1, t = 3$ için u 'nun DTM ve Tam çözümlerinin karşılaştırılması	43
Şekil 4.7. $N = 5, d = 0.1, c = 0.1, t = 3$ için v 'nin DTM ve Tam çözümlerinin karşılaştırılması	44
Şekil 4.8. $N = 5, k_1 = 0.1, t = 1, p = 0.5, t = 1$ için u 'nun DTM ve Tam çözümlerinin karşılaştırılması	45
Şekil 4.9 $N = 5, d = 0.1, c = 0.1, t = 0.5$ için u 'nun DTM değerinin mutlak hatası.....	45
Şekil 4.10 $N = 5, d = 0.1, c = 0.1, t = 0.5$ için v 'nin DTM değerinin mutlak hatası.....	46
Şekil 4.11. $N = 13, M = 10, \alpha = \pi/2$ için Hızın DTM ve Tam çözümlerinin karşılaştırılması.....	50
Şekil 4.12. $N = 13, M = 10, \alpha = \pi/2$ için Manyetik alanın DTM ve Tam çözümlerinin karşılaştırılması.....	50
Şekil 4.13. $N = 49, M = 50, \alpha = \pi/2$ için Hızın DTM ve Tam çözümlerinin karşılaştırılması.....	51
Şekil 4.14. $N = 49, M = 50, \alpha = \pi/2$ için Manyetik alanın DTM ve Tam çözümlerinin karşılaştırılması.....	51

Şekil 4.15. $N = 75$, $M = 100$, $\alpha = \pi/2$ için Hızın DTM ve Tam çözümlerinin karşılaştırılması.....	52
Şekil 4.16. $N = 75$, $M = 100$, $\alpha = \pi/2$ için Manyetik alanın DTM ve Tam çözümlerinin karşılaştırılması.....	52
Şekil 4.17. $N = 91$, $M = 200$, $\alpha = \pi/2$ için Hızın DTM ve Tam çözümlerinin karşılaştırılması.....	53
Şekil 4.18. $N = 91$, $M = 200$, $\alpha = \pi/2$ için Manyetik alanın DTM ve Tam çözümlerinin karşılaştırılması.....	53
Şekil 4.19. $N = 13$, $M = 10$, $\alpha = \pi/3$ için Hız.....	54
Şekil 4.20. $N = 13$, $M = 10$, $\alpha = \pi/3$ için Manyetik alan.....	54
Şekil 4.21. $N = 49$, $M = 50$, $\alpha = \pi/3$ için Hız.....	55
Şekil 4.22. $N = 49$, $M = 50$, $\alpha = \pi/3$ için Manyetik alan.....	55
Şekil 4.23. $N = 75$, $M = 100$, $\alpha = \pi/3$ için Hız.....	56
Şekil 4.24. $N = 75$, $M = 100$, $\alpha = \pi/3$ için Manyetik alan.....	56
Şekil 4.25. $N = 91$, $M = 200$, $\alpha = \pi/3$ için Hız.....	57
Şekil 4.26. $N = 91$, $M = 200$, $\alpha = \pi/3$ için Manyetik alan.....	57
Şekil 4.27. $N = 13$, $M = 10$, $\alpha = \pi/4$ için Hız.....	58
Şekil 4.28. $N = 13$, $M = 10$, $\alpha = \pi/4$ için Manyetik alan.....	58
Şekil 4.29. $N = 49$, $M = 50$, $\alpha = \pi/4$ için Hız.....	59
Şekil 4.30. $N = 49$, $M = 50$, $\alpha = \pi/4$ için Manyetik alan.....	59
Şekil 4.31. $N = 75$, $M = 100$, $\alpha = \pi/4$ için Hız.....	60
Şekil 4.32. $N = 75$, $M = 100$, $\alpha = \pi/4$ için Manyetik alan.....	60
Şekil 4.33. $N = 91$, $M = 200$, $\alpha = \pi/4$ için Hız.....	61
Şekil 4.34. $N = 91$, $M = 200$, $\alpha = \pi/4$ için Manyetik alan.....	61

TABLOLAR DİZİNİ

Sayfa

Tablo 4.1. $N = 3$, $k_1 = 0.1$, $t = 0.5$ için DTM ile tam çözümlerinin karşılaştırılması...	35
Tablo 4.2. $N = 5$, $k_1 = 0.1$, $t = 0.5$ için DTM, ADM ile tam çözümlerinin karşılaştırılması.....	35
Tablo 4.3. $N = 3$, $k_1 = 0.1$, $t = 1.5$ için DTM ile tam çözümlerinin karşılaştırılması...	35
Tablo 4.4. $N = 5$, $k_1 = 0.1$, $t = 1.5$ için DTM, ADM ile tam çözümlerinin karşılaştırılması.....	37
Tablo 4.5. $N = 5$, $k_1 = 0.1$, $t = 1, p = 0.1$ için DTM ile tam çözümlerinin karşılaştırılması.....	38
Tablo 4.6. $N = 3$, $d = 0.1$, $c = 0.1$, $t = 1$ için DTM ile tam çözümlerinin karşılaştırılması.....	42
Tablo 4.7. $N = 5$, $d = 0.1$, $c = 0.1$, $t = 1$ için DTM ile tam çözümlerinin karşılaştırılması.....	42
Tablo 4.8. $N = 3$, $d = 0.1$, $c = 0.1$, $t = 3$ için DTM ile tam çözümlerinin karşılaştırılması.....	44
Tablo 4.9. $N = 5$, $d = 0.1$, $c = 0.1$, $t = 3$ için DTM ile tam çözümlerinin karşılaştırılması.....	44

SİMGE VE KISALTMALAR DİZİNİ

ADM	Adomian Decomposition Metodu
BEM	Sınır Elemanı Metodu
DQM	Diferansiyel Quadrature Metodu
DTM	Diferansiyel Dönüşüm Metodu
FEM	Sonlu Eleman Metodu
MHD	Manyetikhidrodinamik Akı Denklemi

1. DİFERANSİYEL DÖNÜŞÜM METODUNUN TARİHÇESİ

1. 1. Giriş

Bu yüksek lisans tez çalışmasında, Diferansiyel Dönüşüm Metodu (DTM) kullanılarak, bazı adi, kısmi ve fark denklemlerinin nümerik ve analitik çözümlerinin bulunması amaçlanmıştır. Çeşitli mühendislik bilimleri, doğa bilimleri (fizik, kimya v.b) ve ekonomi problemlerinin matematiksel modellemelerinde karşılaşılan diferansiyel denklemler ve verilen şartlar altındaki çözümlerinin bulunması problemi ile karşılaşmaktadır.

Herhangi bir diferansiyel denklemin çözümünün yapılabilmesi için bir çok farklı yöntem geliştirildiği bilinmektedir. Son yıllarda bu tür problemlerin teorik çözümlerinin bulunmasına ilaveten, bu çözümlerin teknolojide kullanılabilir olması çok daha büyük bir önem kazanmıştır. Bu ise diferansiyel denklem problemlerinin çözümünün; aşikâr formunda bulunması sorununu veya herhangi bir başka yöntem kullanarak nümerik çözümlerinin bulunması problemini ortaya çıkarmıştır. Bu şekilde birbirlerini etkileyen yeni gereksinimler, problemlerin çözülebilmesi için nümerik ve yaklaşık çözüm yöntemlerinin geliştirilmesinin gerekliliğini ortaya koymuştur.

Lineer problemlerden ziyade lineer olmayan problemlerin de varlığı diferansiyel denklemlerin çözümlerinin analitik biçimde verilmesini daha da zorlaştırmaktadır. Bu sorun nümerik ve yaklaşık çözüm yöntemlerin geliştirilmesini daha da önemli kılmaktadır.

Hızlı bilgisayarların varlığı, mühendislik dallarında ortaya çıkan karmaşık problemlerin teorisinin pratikte uygulanabilirliği bakımından nümerik yöntemler çok önemli rol oynamaktadır. Daha basit algoritmalarla daha hızlı ve daha az bir hata miktarı ile sonuca ulaşan çözüm yöntemlerine ihtiyaç duyulmaktadır.

Son dönemde en çok çalışılan nümerik yöntemlerden bazıları şu şekilde sıralanabilir:

Laplace Yöntemi, Fourier Yöntemi, Adomian Decomposition Yöntemi, Wawelet Galerkin Yöntemi, Runge-Kutta Yöntemi, Newton Yöntemi, Diferansiyel Dönüşüm Metodu

Çalışmamızda diğer metotlardan daha kolay ve daha iyi çözüm veren Diferansiyel Dönüşüm metodu incelenip metodun

mKdv Lattice (Ablowitz ve Ladic 1977) ;

$$\frac{du_n(t)}{dt} = (\alpha - u_n^2(t))(u_{n+1}(t) - u_{n-1}(t))$$

Schrödinger (Dai ve Zhang 2006) ;

$$i \frac{du_n(t)}{dt} = (u_{n+1}(t) + u_{n-1}(t) - 2u_n(t)) - |u_n(t)|^2 (u_{n+1}(t) + u_{n-1}(t))$$

Toda Lattice (Suris 1997) ;

$$\frac{du_n(t)}{dt} = u_n(t)(v_n(t) - v_{n-1}(t))$$

$$\frac{dv_n(t)}{dt} = v_n(t)(u_{n+1}(t) - u_n(t))$$

Manyetik hidro dinamik akı (Shercliff 1953);

$$\nabla^2 V + M_x \frac{\partial B}{\partial x} + M_y \frac{\partial B}{\partial y} = -1$$

$$\nabla^2 B + M_x \frac{\partial V}{\partial x} + M_y \frac{\partial V}{\partial y} = 0$$

denklemler ve denklemler sistemlerine uygulanması incelenecektir.

İlk olarak Zhou (1986) tarafından ortaya atılan diferansiyel dönüşüm metodunun en önemli avantajlarından birisi, verilen bir adi veya kısmi diferansiyel denklemi sade ve basit bir dönüşüm yardımıyla cebirsel bir denkleme dönüştürüyor olmasıdır. Laplace ve Fourier gibi diğer yöntemlerde denklemin mertebesiyle ilgili olarak karmaşık integrallerle karşılaşmaktadır. DTM de sadece türev ifadeleri olduğu için hem daha hızlı sonuç vermekte hem de çok daha basit hesaplamalar gerektirmektedir. Lineer olmayan denklemlere de rahatlıkla uygulanabilmektedir.

Zhou (1986) çalışmasında ilk olarak bu yöntemi, elektrik devre analizlerinde ortaya çıkan lineer ve lineer olmayan başlangıç değer problemlerini çözmek için ortaya koymuştur.

Chen ve Ho (1996) makalesinde, diferansiyel dönüşüm metodunu, öz değer problemlerine uygulamışlardır. Öz değerlerin ve öz fonksiyonların bulunmasında Ritz ve Galerkin yöntemlerinde $i \geq 2$ için i . öz değerinin bulunması oldukça güç olup

Chen ve Ho yaptıkları çalışmada diferansiyel dönüşüm metodu ile öz değerleri ve öz fonksiyonları elde etmiştir.

Jang ve Chen (1997) çalışmasında, lineer olmayan sönümlü bir sistemin tepkisinin analizinde diferansiyel dönüşüm yöntemi kullanılmış olup elde edilen sonuçlarla, sistemin Runge-Kutta yöntemi ile çözülmesiyle elde edilen sonuçlar karşılaştırılarak diferansiyel dönüşüm metodu ile daha hassas sonuçlar elde etmişlerdir.

Yu ve Chen (1998) ise yaptıkları çalışmada, Blasius diferansiyel denklemi olarak bilinen ve üçüncü mertebeden lineer olmayan bir adi diferansiyel denklem olan denklemin diferansiyel dönüşüm yöntemi ile çözümünü yapmışlardır.

Chen ve Liu (1998) diferansiyel dönüşüm yardımıyla lineer olmayan ısı iletimi problemlerinin çözümü ile birlikte analitik çözümün spektrumunun elde edilebilmesi için bir yöntem geliştirmişler ve çözümü Taylor serileri yardımıyla ifade etmişlerdir.

Chen ve Ho (1999-1) dönerek bükülmüş Timoshenko kirişinin serbest titreşim problemini çözmek için diferansiyel dönüşüm yöntemini kullanmış, çözümler ise analitik olarak bu çalışmada verilmiştir.

Chen ve Ho (1999-2) makalesinde yalnızca adi diferansiyel denklemler için uygulanabilen diferansiyel dönüşüm metodunu, ilk olarak kısmi türevli diferansiyel denklemlere genişleterek iki boyutlu diferansiyel dönüşümü tanımlamışlardır.

Jang ve diğerleri (2000) de yaptıkları araştırmada, ilk olarak lineer ve lineer olmayan başlangıç değer problemleri gridler yardımıyla diferansiyel dönüşüm yöntemi kullanılarak çözmüşlerdir. Nümerik yöntemlerde sıklıkla gridlerden faydalanılmasına rağmen, ilk olarak böyle bir çalışmada dikkate alınmış olmakla birlikte hem daha iyi sonuçlar elde edilmiş hem de çözümün global hatası kontrol altına alınmıştır.

Hassan Abdel-Halim (2002-1) makalesinde, diferansiyel dönüşüm yöntemi yardımıyla, Sturm-Liouville öz değer problemi için öz değer ve normalleştirilmiş öz fonksiyonu elde edilmiştir. Bununla birlikte öz değerlerin yakınsaklığı incelenmiş ve bilinen analitik sonuçlar ile elde edilen sonuçlar karşılaştırılmıştır.

Hassan Abdel-Halim (2002-2) diğer bir çalışmasında, bir boyutlu diferansiyel dönüşüm yöntemini ikinci ve dördüncü mertebeye diferansiyel denklemlerin öz değer ve normalleştirilmiş öz fonksiyonlarının bulunmasını incelemiştir. İki boyutlu diferansiyel dönüşüm yardımıyla sabit katsayılı birinci ve ikinci mertebeye kısmi diferansiyel denklemlerin çözümleri elde edilmiş elde edilen sonuçlar, aynı

problemlerin fark denklemleri yardımıyla bulunan sonuçlar ve analitik sonuçlar ile karşılaştırılmıştır.

Jang ve diğerleri (2003) DTM den faydalanılarak parametre tanımlama probleminde maksimum ihtimal değerlerinin bulunmasını sağlamışlardır. Bu parametrelerin tanıtım kriterleri fonksiyonu diferansiyel dönüşüm metodu yardımıyla kurulmuştur. Böylece; sistem modelinin spektrumunun bilinmeyen parametre ve önceden belirlenmiş değişkenin başlangıç değeri yardımıyla bulunuyor olması, süngülerlik ve duyarlılık probleminin ters probleme gerek olmadan çözülebilmesi, çözülen problemin iterasyonla yapılıyor olması ve kolaylıkla nümerik hesaplamalara dönüşmesi ve hem lineer, hem de lineer olmayan problemler için farklı yöntemlere gerek kalmadan aynı yöntemle çözülmesi problemin çözümünde diferansiyel dönüşüm yönteminin tercih edilmesindeki öneme dikkat çekmektedirler.

Ayaz (2003) yaptığı araştırmada iki boyutlu diferansiyel dönüşüm için bazı temel teoremler vermiş ve bununla birlikte lineer ve lineer olmayan kısmi türevli başlangıç değer problemleri çözmüştür.

Ayaz (2004) makalesinde ise lineer, cebirsel diferansiyel denklemlerin çözümü diferansiyel dönüşüm metodu ile inceleyerek konuyla ilgili örneklerden elde edilen sonuçlar analitik çözümlerle karşılaştırmıştır.

Chen ve Ju (2004) makalesinde, süreksiz adjective dispersive taşınım denkleminin çözümü diferansiyel dönüşüm metodunun sonlu fark metodu sonuçları ile karşılaştırılıp sonuçların daha hassas elde edilmesi ile önemini ortaya koymuştur.

Chen ve Chen (2004) makalesinde, lineer olmayan serbest conservative sistemin çözümü diferansiyel dönüşüm yöntemi ile incelenmiş, elde edilen sonuçlar Runge-Kutta Yönteminden elde edilen sonuçlarla karşılaştırılmış ve daha iyi sonuçlar verdiği gözlenmiştir.

Arikoğlu ve Özkol (2005) makalesinde, integral denklemler için diferansiyel dönüşüm teorisi verilerek, nadiren analitik çözümleri bulunabilen bu denklemler için analitik çözümleri bilinen bir takım lineer ve lineer olmayan integro diferansiyel denklemlerin çözümlerini araştırmış, Wawelet-Galerkin ve ADM ile çözülen bu örnekler için karşılaştırmaları yapılmıştır.

Kurnaz ve Oturanç (2005) çalışmasında, diferansiyel dönüşüm metodu çözümün arandığı aralıktaki çözüm fonksiyonu gridlere bölünerek sistemlere uygulanmış böylece çözüm fonksiyonu her bir alt aralık için bulunarak çözüme yaklaşılmıştır.

Bununla birlikte hata kontrolü yapılarak hata için sisteme girilen üst sınıra bağlı olarak, alınması gereken minimum grid sayısı tespit edilmiştir.

Kurnaz ve diğerleri (2005) yaptıkları incelemelerde, kısmi türevli diferansiyel denklemlerin çözümü için genelleştirme yapmış ve n boyutlu diferansiyel dönüşüm metodunu tanımlamışlardır. Bazı lineer ve lineer olmayan kısmi diferansiyel denklemleri çözerek sonuçları test edip metodun üstünlüğünü göstermişlerdir.

Özkan ve Keskin Y (2005) makalesinde, integro diferansiyel denklem sistemlerinin çözümleri belirli sınır şartları için incelemiştir. İntegro diferansiyel denklem sistemleri için de DTM nin iyi sonuçlar verdiğini göstermişlerdir.

Bildik ve diğerleri (2006) incelemede, farklı türlerdeki kısmi diferansiyel denklemlerin çözümünü hem diferansiyel dönüşüm metodu ile hem de ADM ile yapmış olup elde edilen sonuçları karşılaştırmışlardır. Metodun üstünlüğü bir kez daha ortaya konmuştur.

Ertürk ve diğerleri (2008) makalesinde, caputo anlamında türevlere sahip çoklu mertebeli lineer ve lineer olmayan kesirli diferansiyel denklemlerin sayısal çözümleri için DTM uygulanmasını ve çeşitli örnekleri içermektedir. Aynı zamanda DTM nin bir genelleştirilmesi sunup bununla ilgili çeşitli örnekler çözmüşlerdir.

Singh ve Lal (1978) makalesinde, sonlu fark ve sonlu eleman metotları yardımıyla küçük Hartman sayıları için MHD çözülmüştür.

Gardner ve Gardner (1995) makalesinde, 100'den daha küçük Hartman sayıları için bi-cubic B-spline elementleri FEM ile kullanılmıştır.

Tezer ve Sezgin (2004) makalesinde MHD denklemini, DQM ile M=10 dan 50 ye kadar Hartman sayıları civarında çözmüşlerdir.

Wu ve diğerleri (2007) makalesinde, lineer olmayan diferansiyel fark denklemlerini (mKdv, Schödinger, Toda Lattice) ADM yardımıyla çözmüşlerdir.

2. DİFERANSİYEL DÖNÜŞÜMÜ METODU

Diferansiyel dönüşümü metodu ile lineer veya lineer olmayan adi ve kısmi diferansiyel denklem ve denklem sistemlerinde başlangıç koşulları kullanılarak kolayca çözümler bulunabilir. Bu metot matematiğin birçok alanında kullanıldığı gibi mühendislik ve fizik bilimlerinde, elektrik devresi analizlerinde, dalgalarda, nüfus artış modellerinde de karşımıza çıkmaktadır. Bu metot ilk olarak Zhou tarafından ortaya atılmış daha sonra geliştirilmiştir. Bu bölümde bir, iki, üç ve son olarak da m boyutlu diferansiyel dönüşüm metodu incelenecektir.

2.1. Bir Boyutlu Diferansiyel Dönüşüm Metodu

İlk olarak bir boyutlu diferansiyel dönüşüm metodu tanımlanacaktır.

Tanım 2.1

$y(x)$: orijinal fonksiyon

$Y(k)$: diferansiyel dönüşüm fonksiyonu

$$Y(k) = \frac{1}{k!} \left[\frac{d^k}{dx^k} y(x) \right]_{x=x_0} \quad (2.1)$$

$Y(k)$ 'nin ters diferansiyel dönüşüm fonksiyonu

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(x-x_0)^k}{k!} Y(k) \quad (2.2)$$

(2.1) ve (2.2) den

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(x-x_0)^k}{k!} \left[\frac{d^k y(x)}{dx^k} \right]_{x=x_0} \quad (2.3)$$

olur.

$x_0 = 0$ için ;

$$Y(k) = \frac{1}{k!} \left[\frac{d^k}{dx^k} y(x) \right]_{x=0} \quad (2.4)$$

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \left[\frac{d^k}{dx^k} y(x) \right]_{x=0} \quad (2.5)$$

olur. $y(x)$ fonksiyonu, $\sum_{k=n+1}^{\infty} x^k Y(k)$ ifadesi artık terim olduğundan

$$y(x) = \sum_{k=0}^n x^k Y(k) \quad (2.6)$$

sonlu seri şeklinde de alınabilir.

2.2. İki Boyutlu Diferansiyel Dönüşüm

Şimdi de iki boyutlu diferansiyel dönüşüm metodu tanımlanacaktır.

Tanım 2.2

$w(x, y)$: orijinal fonksiyon

$W(k, h)$: dönüşüm fonksiyonu

$$W(k, h) = \frac{1}{k!h!} \left[\frac{\partial^{k+h} w(x, y)}{\partial x^k \partial y^h} \right]_{(0,0)} \quad (2.7)$$

$W(k, h)$ 'in ters diferansiyel dönüşüm fonksiyonu;

$$w(x, y) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{h=0}^{\infty} W(k, h) x^k y^h \quad (2.8)$$

(2.7) ve (2.8) den sonuç olarak;

$$w(x, y) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{h=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \cdot \frac{1}{h!} \left[\frac{\partial^{k+h} w(x, y)}{\partial x^k \partial y^h} \right]_{(0,0)} x^k y^h \quad (2.9)$$

bulunur. $w(x, y)$ fonksiyonu, $w(x, y) = \sum_{k=n+1}^{\infty} \sum_{h=n+1}^{\infty} x^k y^h W(k, h)$ ifadesi artık terim olduğundan

$$w(x, y) = \sum_{k=0}^n \sum_{h=0}^n x^k y^h W(k, h) \quad (2.10)$$

sonlu seri şeklinde alınabilir.

2.3. Üç Boyutlu Diferansiyel Dönüşüm:

Aynı şekilde devam ederek üç boyutlu diferansiyel dönüşüm tanımlanacaktır.

Tanım 2.3

$w(x, y, t)$: orijinal fonksiyon

$W(k, h, m)$: dönüşüm fonksiyonu

$$W(k, h, m) = \frac{1}{k!h!m!} \left[\frac{\partial^{k+h+m} w(x, y, t)}{\partial x^k \partial y^h \partial t^m} \right]_{(0,0,0)} \quad (2.11)$$

$W(k, h, m)$ 'in ters dönüşüm fonksiyonu

$$w(x, y, t) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{h=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} W(k, h, m) x^k y^h t^m \quad (2.12)$$

şeklindedir. (2.11) ve (2.12) den sonuç olarak;

$$w(x, y, t) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{h=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{k!h!m!} \left[\frac{\partial^{k+h+m} w(x, y, t)}{\partial x^k \partial y^h \partial t^m} \right]_{(0,0,0)} x^k y^h t^m \quad (2.13)$$

bulunur. $w(x, y, t)$ fonksiyonu $w(x, y, t) = \sum_{k=n+1}^{\infty} \sum_{h=n+1}^{\infty} \sum_{m=n+1}^{\infty} x^k y^h t^m W(k, h, m)$ ifadesi artık terim olduğundan

$$w(x, y, t) = \sum_{k=0}^n \sum_{h=0}^n \sum_{m=0}^n x^k y^h t^m W(k, h, m) \quad (2.14)$$

sonlu seri şeklinde alınabilir.

2.4. m Boyutlu Diferansiyel Dönüşüm:

Son olarak da diferansiyel dönüşüm metodunun genellenmesi verilecektir.

Tanım 2.4

$w(x_1, x_2, x_3, \dots, x_m)$: orijinal fonksiyon

$W(k_1, k_2, k_3, \dots, k_m)$: dönüşüm fonksiyonu

$$W(k_1, k_2, k_3, \dots, k_m) = \frac{1}{k_1! k_2! \dots k_m!} \left[\frac{\partial^{k_1+k_2+k_3+\dots+k_m} w(x_1, x_2, x_3, \dots, x_m)}{\partial x_1^{k_1} \partial x_2^{k_2} \partial x_3^{k_3} \dots \partial x_m^{k_m}} \right]_{(0,0,\dots,0)} \quad (2.15)$$

$W(k_1, k_2, k_3, \dots, k_m)$ 'in diferansiyel dönüşüm fonksiyonu

$$w(x_1, x_2, \dots, x_m) = \sum_{k_1=0}^{\infty} \sum_{k_2=0}^{\infty} \sum_{k_3=0}^{\infty} \dots \sum_{k_m=0}^{\infty} W(k_1, k_2, k_3, \dots, k_m) x_1^{k_1} x_2^{k_2} x_3^{k_3} \dots x_m^{k_m} \quad (2.16)$$

şeklindedir. (2.15) ve (2.16) den sonuç olarak;

$$w(x_1, x_2, x_3, \dots, x_m) = \sum_{k_1=0}^{\infty} \sum_{k_2=0}^{\infty} \dots \sum_{k_m=0}^{\infty} \frac{1}{k_1! k_2! \dots k_m!} \left[\frac{\partial^{k_1+k_2+k_3+\dots+k_m} w(x_1, x_2, x_3, \dots, x_m)}{\partial x_1^{k_1} \partial x_2^{k_2} \partial x_3^{k_3} \dots \partial x_m^{k_m}} \right]_{(0,0,\dots,0)} x_1^{k_1} x_2^{k_2} \dots x_m^{k_m} \quad (2.17)$$

bulunur. $w(x_1, x_2, x_3, \dots, x_m)$ fonksiyonu

$$w(x_1, x_2, \dots, x_m) = \sum_{k_1=n+1}^{\infty} \sum_{k_2=n+1}^{\infty} \sum_{k_3=n+1}^{\infty} \dots \sum_{k_m=n+1}^{\infty} W(k_1, k_2, k_3, \dots, k_m) x_1^{k_1} x_2^{k_2} x_3^{k_3} \dots x_m^{k_m}$$

ifadesi artık terim olduğundan

$$w(x_1, x_2, \dots, x_m) = \sum_{k_1=0}^n \sum_{k_2=0}^n \sum_{k_3=0}^n \dots \sum_{k_m=0}^n W(k_1, k_2, k_3, \dots, k_m) x_1^{k_1} x_2^{k_2} x_3^{k_3} \dots x_m^{k_m} \quad (2.18)$$

sonlu seri şeklinde alınabilir.

3. TEMEL TEOREMLER

Bu bölümde DTM uygulamaları için kullanılacak bütün teoremler ayrıntılı bir şekilde verilmiştir.

3.1. Bir Boyutlu Diferansiyel Dönüşümün Temel Teoremleri:

Literatürde iyi bilinen aşağıdaki 3.1.1-3.1.8 teoremleri 2.bölümde verilen (2.4) ve (2.5) denklemlerinden gösterilebilir.

Teorem 3.1.1 c sabit, $g(x)$ analitik fonksiyon ise $f(x) = c.g(x)$ fonksiyonunun diferansiyel dönüşümü $F(k) = c.G(k)$ dır.

Teorem 3.1.2 $g(x)$ ve $h(x)$ analitik fonksiyon ise $f(x) = g(x) \pm h(x)$ fonksiyonunun diferansiyel dönüşümü $F(k) = G(k) \pm H(k)$ dır.

İspat: $f(x) = g(x) \pm h(x)$

$$F(k) = \frac{1}{k!} \left[\frac{d^k}{dx^k} g(x) \pm h(x) \right]_{x=0} = \frac{1}{k!} \left[\frac{d^k}{dx^k} g(x) \right]_{x=0} \pm \frac{1}{k!} \left[\frac{d^k}{dx^k} h(x) \right]_{x=0} = G(k) \pm H(k)$$

Teorem 3.1.3 $g(x)$ analitik fonksiyon ise $f(x) = \frac{dg(x)}{dx}$ fonksiyonunun diferansiyel dönüşümü $F(k) = (k+1)G(k+1)$ dır.

İspat:

$$F(k) = \frac{1}{k!} \left[\frac{d^k}{dx^k} \frac{dg(x)}{dx} \right]_{x=0} = \frac{1}{k!} \left[\frac{d^{k+1}}{dx^{k+1}} g(x) \right]_{x=0} = \frac{k+1}{(k+1)!} \left[\frac{d^{k+1}}{dx^{k+1}} g(x) \right]_{x=0} = (k+1).G(k+1)$$

Teorem 3.1.4 $g(x)$ analitik fonksiyon ise $f(x) = \frac{d^n g(x)}{dx^n}$ fonksiyonunun diferansiyel dönüşümü

$$F(k) = \frac{(k+n)!}{k!} \cdot G(k+n)$$

dır.

İspat: $f(x) = \frac{d^n g(x)}{dx^n}$ fonksiyonunun diferansiyel dönüşümü alınırsa,

$$\begin{aligned} F(k) &= \frac{1}{k!} \left[\frac{d^k}{dx^k} \frac{dg^n(x)}{dx^n} \right]_{x=0} = \frac{1}{k!} \left[\frac{d^{k+n}}{dx^{k+n}} g(x) \right]_{x=0} \\ &= \frac{(k+1) \cdot (k+2) \dots (k+n)}{(k+n)!} \left[\frac{d^{k+n}}{dx^{k+n}} g(x) \right]_{x=0} \\ &= (k+1) \cdot (k+2) \dots (k+n) G(k+n) = \frac{(k+n)!}{k!} \cdot G(k+n) \end{aligned}$$

dır.

Teorem 3.1.5 $g(x)$ ve $h(x)$ analitik fonksiyon ise $f(x) = g(x)h(x)$ fonksiyonunun diferansiyel dönüşümü $F(k) = \sum_{l=0}^k G(l)H(k-l)$ dır.

İspat: $f(x) = g(x)h(x)$ fonksiyonunun ters diferansiyel dönüşümü kullanılırsa,

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{k=0}^N G(k) \cdot x^k \cdot \sum_{l=0}^N H(l) x^l \\ &= [G(0) + G(1)x + \dots + G(n)x^n] [H(0) + H(1)x + \dots + H(n)x^n] \\ &= [G(0)H(0)] + [G(0)H(1) + G(1)H(0)]x + [G(0)H(2) + G(1)H(1) + G(2)H(0)]x^2 \\ &\quad + \dots + [G(0)H(n) + G(1)H(n-1) + \dots + G(n-1)H(1) + G(n)H(0)]x^n + \dots \\ f(x) &= \sum_{k=0}^N \sum_{l=0}^k G(l)H(k-l)x^l \quad \Rightarrow \quad F(k) = \sum_{l=0}^k G(l)H(k-l) \end{aligned}$$

Teorem 3.1.6 (Arıkoğlu ve Özkol 2005) $g_1(x), g_2(x), \dots, g_n(x)$ analitik fonksiyon ise $f(x) = g_1(x) \cdot g_2(x) \dots g_{n-1}(x) \cdot g_n(x)$ fonksiyonunun diferansiyel dönüşümü

$$F(k) = \sum_{k_{n-1}=0}^k \sum_{k_{n-2}=0}^{k_{n-1}} \dots \sum_{k_2=0}^{k_3} \sum_{k_1=0}^{k_2} G_1(k_1).G_2(k_2 - k_1) \dots G_{n-1}(k_{n-1} - k_{n-2}).G_n(k - k_{n-1})$$

dır.

Teorem 3.1.7 $f(x) = x^n$ fonksiyonunun diferansiyel dönüşümü

$$F(k) = \delta(k - n) = \begin{cases} 1, & k = n \\ 0, & k \neq n \end{cases}$$

dır.

Teorem 3.1.8 c sabit ise $f(x) = e^{cx}$ fonksiyonunun diferansiyel dönüşümü

$$F(k) = \frac{(c)^k}{k!}$$

dır.

Teorem 3.1.9 $f(x) = (1 + x)^m$ fonksiyonunun diferansiyel dönüşümü

$$F(k) = \frac{m.(m-1) \dots (m-k+1)}{k!}$$

dır.

Teorem 3.1.10 $f(x) = \sin(wx + \alpha)$ fonksiyonunun diferansiyel dönüşümü

$$F(k) = \frac{w^k}{k!} \cdot \sin\left(\frac{\pi k}{2} + \alpha\right)$$

dır.

İspat: $f(x) = \sin(wx + \alpha)$

$$\begin{aligned} F(k) &= \frac{1}{k!} \left[\frac{d^k}{dx^k} \sin(wx + \alpha) \right]_{x=0} \\ &= \frac{1}{k!} \left[\frac{d^{k-1}}{dx^{k-1}} w \cdot \cos(wx + \alpha) \right]_{x=0} \\ &= \frac{1}{k!} \left[\frac{d^{k-2}}{dx^{k-2}} (-w^2) \cdot \sin(wx + \alpha) \right]_{x=0} \\ &\vdots \\ &= \frac{w^k}{k!} \cdot \sin\left(\frac{\pi k}{2} + \alpha\right) \end{aligned}$$

Teorem 3.1.11 $f(x) = \cos(wx + \alpha)$ fonksiyonunun diferansiyel dönüşümü

$$F(k) = \frac{w^k}{k!} \cdot \cos\left(\frac{\pi k}{2} + \alpha\right)$$

dir.

İspat: 3.1.10'a benzer şekilde ispatlanabilir.

3.2. İki Boyutlu Diferansiyel Dönüşümünün Temel Teoremleri

Bu bölümde iki boyutlu diferansiyel dönüşümün temel teoremleri verilecektir.

Teorem 3.2.1 (Chen ve Ho 1999) $u(x, y)$, $v(x, y)$ analitik fonksiyon ise

$w(x, y) = u(x, y) \pm v(x, y)$ fonksiyonunun diferansiyel dönüşümü

$W(k, h) = U(k, h) \pm V(k, h)$ dir.

$$\begin{aligned} \text{İspat: } W(k, h) &= \frac{1}{k!h!} \left[\frac{\partial^{k+h} w(x, y)}{\partial x^k \partial y^h} \right]_{(0,0)} \\ &= \frac{1}{k!h!} \left[\frac{\partial^{k+h} (u(x, y) \pm v(x, y))}{\partial x^k \partial y^h} \right]_{(0,0)} \\ &= \frac{1}{k!h!} \left[\frac{\partial^{k+h} u(x, y)}{\partial x^k \partial y^h} \pm \frac{\partial^{k+h} v(x, y)}{\partial x^k \partial y^h} \right]_{(0,0)} \\ &= \frac{1}{k!h!} \left[\frac{\partial^{k+h} u(x, y)}{\partial x^k \partial y^h} \right]_{(0,0)} \pm \frac{1}{k!h!} \left[\frac{\partial^{k+h} v(x, y)}{\partial x^k \partial y^h} \right]_{(0,0)} \\ &= U(k, h) \pm V(k, h) \end{aligned}$$

Teorem 3.2.2 (Chen ve Ho 1999) $u(x, y)$ analitik fonksiyon ise $w(x, y) = c.u(x, y)$

fonksiyonunun diferansiyel dönüşümü $W(k, h) = c.U(k, h)$ dir.

$$\text{İspat: } W(k, h) = \frac{1}{k!h!} \left[\frac{\partial^{k+h} c.u(x, y)}{\partial x^k \partial y^h} \right]_{(0,0)} = \frac{c}{k!h!} \left[\frac{\partial^{k+h} u(x, y)}{\partial x^k \partial y^h} \right]_{(0,0)} = c.U(k, h)$$

Teorem 3.2.3 (Chen ve Ho 1999) $u(x, y)$ analitik fonksiyon ise $w(x, y) = \frac{\partial u(x, y)}{\partial x}$

fonksiyonunun diferansiyel dönüşümü $W(k, h) = (k+1)U(k+1, h)$ dir.

İspat:

$$W(k, h) = \frac{1}{k!h!} \left[\frac{\partial^{k+h} \partial u(x, y)}{\partial x^k \partial y^h} \right]_{(0,0)} = \frac{(k+1)}{(k+1)!h!} \left[\frac{\partial^{k+h+1} u(x, y)}{\partial x^{k+1} \partial y^h} \right]_{(0,0)} = (k+1)U(k+1, h)$$

Teorem 3.2.4 (Chen ve Ho 1999) $u(x, y)$ analitik fonksiyon ise $w(x, y) = \frac{\partial u(x, y)}{\partial y}$

fonksiyonunun diferansiyel dönüşümü $W(k, h) = (h+1)U(k, h+1)$ dır.

İspat:

$$W(k, h) = \frac{1}{k!h!} \left[\frac{\partial^{k+h} \partial u(x, y)}{\partial x^k \partial y^h} \right]_{(0,0)} = \frac{(h+1)}{(h+1)!k!} \left[\frac{\partial^{k+h+1} u(x, y)}{\partial x^k \partial y^{h+1}} \right]_{(0,0)} = (h+1)U(k, h+1)$$

Teorem 3.2.5 (Chen ve Ho 1999) $u(x, y)$ analitik fonksiyon ise

$w(x, y) = \frac{\partial^{r+s} u(x, y)}{\partial x^r \partial y^s}$ fonksiyonunun diferansiyel dönüşümü

$$W(k, h) = (k+1)(k+2)\dots(k+r)(h+1)(h+2)\dots(h+s)U(k+r, h+s)$$

dır.

İspat:

$$\begin{aligned} W(k, h) &= \frac{1}{k!h!} \left[\frac{\partial^{k+h} \partial^{r+s} w(x, y)}{\partial x^k \partial y^h \partial x^r \partial y^s} \right]_{(0,0)} \\ &= \left[\frac{(k+1)(k+2)\dots(k+r)(h+1)(h+2)\dots(h+s)}{(k+r)!(h+r)!} \cdot \frac{\partial^{k+h+r+s}}{\partial x^{k+r} \partial y^{h+s}} \right]_{(0,0)} \\ &= (k+1)(k+2)\dots(k+r)(h+1)(h+2)\dots(h+s)U(k+r, h+s) \end{aligned}$$

Teorem 3.2.6 (Chen ve Ho 1999) $u(x, y), v(x, y)$ analitik fonksiyon ise

$w(x, y) = u(x, y)v(x, y)$ fonksiyonunun diferansiyel dönüşümü

$$W(k, h) = \sum_{r=0}^k \sum_{s=0}^h U(r, h-s)V(k-r, s)$$

dır.

İspat: $w(x, y) = u(x, y)v(x, y)$ fonksiyonunda ters diferansiyel dönüşüm kullanılırsa

$$\begin{aligned}
w(x, y) &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{h=0}^{\infty} U(k, h)x^k y^h \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{h=0}^{\infty} V(k, h)x^k y^h \\
&= [U(0,0)+U(1,0).x + U(0,1).y + U(2,0).x^2 + U(1,1)x.y + \dots + U(0,n).y^n + \dots] \\
&\quad [V(0,0)+V(1,0).x + V(0,1).y + V(2,0).x^2 + V(1,1)x.y + \dots + V(0,n).y^n + \dots] \\
&\quad + V(2,0).x^2 + V(1,1)x.y + V(0,2).y^2 + \dots + V(0,n).y^n + \dots] \\
&= [U(0,0).V(0,0)] + [U(1,0).V(0,0) + U(0,0).V(1,0)].x + \\
&\quad + [U(0,1).V(0,0) + U(0,0).V(0,1)].y \\
&\quad + [U(2,0).V(0,0) + U(1,0).V(1,0) + V(2,0).U(0,0)].x^2 \\
&\quad + [U(0,2).V(0,0) + U(0,1).V(0,1) + V(0,2).U(0,0)].y^2 + \dots \\
&\quad + [U(n,0).V(0,0) + U(n-1,0).V(1,0) + \dots + U(0,0).V(n,0)].x^n \\
&\quad + [U(0,n).V(0,0) + U(0,n-1).V(0,1) + \dots + U(0,0).V(0,n)].y^n + \dots
\end{aligned}$$

dönüşüm fonksiyonu

$$W(k, h) = \sum_{r=0}^k \sum_{s=0}^h U(r, h-s)V(k-r, s)$$

şeklinde ifade edilebilir.

Teorem 3.2.7 (Ayaz 2003) $u(x, y)$, $v(x, y)$, $\omega(x, y)$ analitik fonksiyon ise $w(x, y) = u(x, y)v(x, y)\omega(x, y)$ fonksiyonunun diferansiyel dönüşümü

$$W(k, h) = \sum_{r=0}^k \sum_{t=0}^{k-r} \sum_{s=0}^h \sum_{p=0}^{h-s} U(r, h-s-p)V(t, s)\Psi(k-r-t, p)$$

dır.

İspat: $w(x, y) = u(x, y)v(x, y)\omega(x, y) \Rightarrow W(k, h) = \sum_{r=0}^k \sum_{s=0}^h U(r, h-s)V(k-r, s)$

$$w(x, y) = u(x, y)v(x, y)\omega(x, y) \Rightarrow$$

$$W(k, h) = \sum_{r=0}^k \sum_{t=0}^{k-r} \sum_{s=0}^h \sum_{p=0}^{h-s} U(r, h-s-p)V(t, s)\Psi(k-r-t, p)$$

Teorem 3.2.8 (Chen ve Ho 1999) $w(x, y) = x^m y^n$ fonksiyonunun diferansiyel dönüşümü

$$W(k, h) = \delta(k - m, h - n) = \delta(k - m) \cdot \delta(h - n) = \begin{cases} 1, & k = m \text{ ve } h = n \\ 0, & k \neq m \text{ veya } h \neq n \end{cases}$$

dır.

Teorem 3.2.9 (Ayaz 2003) $u(x, y)$, $v(x, y)$ analitik fonksiyon ise

$w(x, y) = \frac{\partial u(x, y)}{\partial x} \cdot \frac{\partial v(x, y)}{\partial x}$ fonksiyonunun diferansiyel dönüşümü

$$W(k, h) = \sum_{r=0}^k \sum_{s=0}^h (r+1)(k-r+1)U(r+1, h-s)V(k-r+1, s)$$

dır.

İspat: $w(x, y) = \frac{\partial u(x, y)}{\partial x} \Rightarrow W(k, h) = (k+1)U(k+1, h)$

$$w(x, y) = \frac{\partial v(x, y)}{\partial x} \Rightarrow W(k, h) = (k+1)V(k+1, h)$$

$$w(x, y) = u(x, y)v(x, y) \Rightarrow W(k, h) = \sum_{r=0}^k \sum_{s=0}^h U(r, h-s)V(k-r, s)$$

$$w(x, y) = \frac{\partial u(x, y)}{\partial x} \cdot \frac{\partial v(x, y)}{\partial x} \Rightarrow$$

$$W(k, h) = \sum_{r=0}^k \sum_{s=0}^h (r+1)(k-r+1)U(r+1, h-s)V(k-r+1, s)$$

Teorem 3.2.10 (Ayaz 2003) $u(x, y)$, $v(x, y)$ analitik fonksiyon ise $w(x, y) = \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{\partial v}{\partial y}$

fonksiyonunun diferansiyel dönüşümü

$$W(k, h) = \sum_{r=0}^k \sum_{s=0}^h (s+1)(h-s+1)U(r, h-s+1)V(k-r, s+1)$$

dır.

İspat: $w(x, y) = \frac{\partial u(x, y)}{\partial y} \Rightarrow W(k, h) = (h+1)U(k, h+1)$

$$w(x, y) = \frac{\partial v(x, y)}{\partial y} \Rightarrow W(k, h) = (h+1)V(k, h+1)$$

$$w(x, y) = u(x, y)v(x, y) \Rightarrow W(k, h) = \sum_{r=0}^k \sum_{s=0}^h U(r, h-s)V(k-r, s)$$

$$w(x, y) = \frac{\partial u(x, y)}{\partial y} \cdot \frac{\partial v(x, y)}{\partial y} \Rightarrow$$

$$W(k, h) = \sum_{r=0}^k \sum_{s=0}^h (s+1)(h-s+1)U(r, h-s+1)V(k-r, s+1)$$

Teorem 3.2.11 (Ayaz 2003) $u(x, y)$, $v(x, y)$ analitik fonksiyon ise

$w(x, y) = \frac{\partial u(x, y)}{\partial x} \cdot \frac{\partial v(x, y)}{\partial y}$ fonksiyonunun diferansiyel dönüşümü

$$W(k, h) = \sum_{r=0}^k \sum_{s=0}^h (h-s+1)(k-r+1)U(k-r+1, s)V(r, h-s+1)$$

dır.

İspat: $w(x, y) = \frac{\partial u(x, y)}{\partial x} \Rightarrow W(k, h) = (k+1)U(k+1, h)$

$$w(x, y) = \frac{\partial v(x, y)}{\partial y} \Rightarrow W(k, h) = (h+1)V(k, h+1)$$

$$w(x, y) = u(x, y)v(x, y) \Rightarrow W(k, h) = \sum_{r=0}^k \sum_{s=0}^h U(r, h-s)V(k-r, s)$$

dönüşüm formüllerinden yararlanılarak diferansiyel dönüşüm fonksiyonu

$$W(k, h) = \sum_{r=0}^k \sum_{s=0}^h (h-s+1)(k-r+1)U(k-r+1, s)V(r, h-s+1)$$

şeklinde ifade edilebilir.

Teorem 3.2.12 (Ayaz 2003) $u(x, y)$, $v(x, y)$ ve $\omega(x, y)$ analitik fonksiyon ise

$w(x, y) = u(x, y) \cdot \frac{\partial v(x, y)}{\partial x} \cdot \frac{\partial \omega(x, y)}{\partial x}$ fonksiyonunun diferansiyel dönüşümü

$$W(k, h) = \sum_{r=0}^k \sum_{t=0}^{k-r} \sum_{s=0}^h \sum_{p=0}^{h-s} (t+1)(k-r-t+1)U(r, h-s-p)V(t+1, s)\Psi(k-r-t+1, p)$$

dır.

İspat: $w(x, y) = u(x, y) \Rightarrow W(k, h) = U(k, h)$

$$w(x, y) = \frac{\partial v(x, y)}{\partial x} \Rightarrow W(k, h) = (k+1)V(k+1, h)$$

$$w(x, y) = \frac{\partial \omega(x, y)}{\partial x} \Rightarrow W(k, h) = (k+1)\Psi(k+1, h)$$

dönüşüm formüllerinden yararlanılarak diferansiyel dönüşüm fonksiyonu

$$W(k, h) = \sum_{r=0}^k \sum_{t=0}^{k-r} \sum_{s=0}^h \sum_{p=0}^{h-s} (t+1)(k-r-t+1)U(r, h-s-p)V(t+1, s)\Psi(k-r-t+1, p)$$

şeklinde ifade edilebilir.

Teorem 3.2.13 (Ayaz 2003) $u(x, y)$, $v(x, y)$ ve $\omega(x, y)$ analitik fonksiyon ise

$w(x, y) = u(x, y)v(x, y) \cdot \frac{\partial^2 \omega(x, y)}{\partial x^2}$ fonksiyonunun diferansiyel dönüşümü

$$W(k, h) = \sum_{r=0}^k \sum_{t=0}^{k-r} \sum_{s=0}^h \sum_{p=0}^{h-s} (k-r-t+2)(k-r-t+1)U(r, h-s-p)V(t, s)\Psi(k-r-t+2, p)$$

dır.

İspat: $w(x, y) = u(x, y) \Rightarrow W(k, h) = U(k, h)$

$$w(x, y) = v(x, y) \Rightarrow W(k, h) = V(k, h)$$

$$w(x, y) = \frac{\partial^2 \omega(x, y)}{\partial x^2} \Rightarrow W(k, h) = (k+2)(k+1)\Psi(k+2, h)$$

$$w(x, y) = u(x, y)v(x, y)\omega(x, y) \Rightarrow$$

$$W(k, h) = \sum_{r=0}^k \sum_{t=0}^{k-r} \sum_{s=0}^h \sum_{p=0}^{h-s} U(r, h-s-p)V(t, s)\Psi(k-r-t, p)$$

dönüşüm formüllerinden yararlanılarak diferansiyel dönüşüm fonksiyonu

$$W(k, h) = \sum_{r=0}^k \sum_{t=0}^{k-r} \sum_{s=0}^h \sum_{p=0}^{h-s} (k-r-t+2)(k-r-t+1)U(r, h-s-p)V(t, s)\Psi(k-r-t+2, p)$$

şeklinde ifade edilebilir.

3.3. Üç Boyutlu Diferansiyel Dönüşümün Temel Teoremleri

Teorem 3.3.1 $u(x, y, t)$, $v(x, y, t)$ analitik fonksiyon ise $w(x, y, t) = u(x, y, t) \pm v(x, y, t)$ fonksiyonunun diferansiyel dönüşümü

$$W(k, h, m) = U(k, h, m) \pm V(k, h, m)$$

dır.

İspat:
$$W(k, h, m) = \frac{1}{k!h!m!} \left[\frac{\partial^{k+h+m} w(x, y, t)}{\partial x^k \partial y^h \partial t^m} \right]_{(0,0,0)}$$

$$= \frac{1}{k!h!m!} \left[\frac{\partial^{k+h+m} (u(x, y, t) \pm v(x, y, t))}{\partial x^k \partial y^h \partial t^m} \right]_{(0,0)}$$

$$= \frac{1}{k!h!m!} \left[\frac{\partial^{k+h+m} u(x, y, t)}{\partial x^k \partial y^h \partial t^m} \pm \frac{\partial^{k+h+m} v(x, y, t)}{\partial x^k \partial y^h \partial t^m} \right]_{(0,0,0)}$$

$$= \frac{1}{k!h!m!} \left[\frac{\partial^{k+h+m} u(x, y, t)}{\partial x^k \partial y^h \partial t^m} \right]_{(0,0,0)} \pm \frac{1}{k!h!m!} \left[\frac{\partial^{k+h+m} v(x, y, t)}{\partial x^k \partial y^h \partial t^m} \right]_{(0,0,0)}$$

$$= U(k, h, m) \pm V(k, h, m)$$
(Ayaz 2004-2)

Teorem 3.3.2 $u(x, y, t)$ analitik fonksiyon ise $w(x, y, t) = c.u(x, y, t)$ fonksiyonunun diferansiyel dönüşümü

$$W(k, h, m) = c.U(k, h, m)$$

dır.

İspat:

$$W(k, h, m) = \frac{1}{k!h!m!} \left[\frac{\partial^{k+h+m} c.u(x, y, t)}{\partial x^k \partial y^h \partial t^m} \right]_{(0,0,0)} = \frac{c}{k!h!m!} \left[\frac{\partial^{k+h+m} u(x, y, t)}{\partial x^k \partial y^h \partial t^m} \right]_{(0,0,0)} = c.U(k, h, m)$$
(Ayaz 2004-2)

Teorem 3.3.3 $u(x, y, t)$ analitik fonksiyon ise $w(x, y, t) = \frac{\partial u(x, y, t)}{\partial x}$ fonksiyonunun

diferansiyel dönüşümü

$$W(k, h, m) = (k+1).U(k+1, h, m)$$

dır.

İspat:

$$W(k, h) = \frac{1}{k!h!m!} \left[\frac{\frac{\partial^{k+h+m} \partial u(x, y, t)}{\partial x}}{\partial x^k \partial y^h \partial t^m} \right]_{(0,0,0)} = \frac{1}{k!h!m!} \left[\frac{\partial^{k+h+m+1} u(x, y, t)}{\partial x^{k+1} \partial y^h \partial t^m} \right]_{(0,0)}$$

$$= \frac{(k+1)}{(k+1)!h!m!} \left[\frac{\partial^{k+h+m+1} u(x, y, t)}{\partial x^{k+1} \partial y^h \partial t^m} \right]_{(0,0,0)} = (k+1).U(k+1, h, m)$$

(Ayaz 2004-2)

Teorem 3.3.4 (Ayaz 2004-2) $u(x, y, t)$ analitik fonksiyon ise $w(x, y, t) = \frac{\partial u(x, y, t)}{\partial y}$

fonksiyonunun diferansiyel dönüşümü

$$W(k, h, m) = (h + 1)U(k, h + 1, m)$$

dır.

$$\begin{aligned} \text{İspat: } W(k, h, m) &= \frac{1}{k!h!m!} \left[\frac{\partial^{k+h+m} \partial u(x, y, t)}{\partial y \partial x^k \partial y^h \partial t^m} \right]_{(0,0,0)} = \frac{1}{k!h!m!} \left[\frac{\partial^{k+h+m+1} u(x, y, t)}{\partial x^k \partial y^{h+1} \partial t^m} \right]_{(0,0,0)} \\ &= \frac{(h+1)}{(h+1)!k!m!} \left[\frac{\partial^{k+h+m+1} u(x, y, t)}{\partial x^k \partial y^{h+1} \partial t^m} \right]_{(0,0,0)} \\ &= (h+1)U(k, h+1, m) \end{aligned}$$

Teorem 3.3.5 $u(x, y, t)$ analitik fonksiyon ise $w(x, y, t) = \frac{\partial^{r+s+p} u(x, y, t)}{\partial x^r \partial y^s \partial t^p}$

fonksiyonunun diferansiyel dönüşümü

$$W(k, h, m) = (k+1)(k+2)\dots(k+r)(h+1)(h+2)\dots(h+s)(m+1)(m+2)\dots(m+p)$$

$$U(k+r, h+s, m+p)$$

dır.

$$\text{İspat: } w(x, y, t) = \frac{\partial^{r+s+p} u(x, y, t)}{\partial x^r \partial y^s \partial t^p}$$

$$\begin{aligned} W(k, h, m) &= \frac{1}{k!h!m!} \left[\frac{\partial^{m+k+h}}{\partial x^k \partial y^h \partial t^m} \left[\frac{\partial^{r+s+p} u(x, y, t)}{\partial x^r \partial y^s \partial t^p} \right] \right]_{(0,0,0)} \\ &= \frac{(k+1)\dots(k+r)(h+1)\dots(h+s)(m+1)\dots(m+p)}{(k+r)!(h+s)!(m+p)!} \left[\frac{\partial^{k+r+h+s+m+p} u(x, y, t)}{\partial x^{k+r} \partial y^{h+s} \partial z^{m+p}} \right]_{(0,0,0)} \\ &= (k+1)(k+2)\dots(k+r)(h+1)(h+2)\dots(h+s)(m+1)(m+2) \\ &\quad \dots(m+p)U(k+r, h+s, m+p) \end{aligned}$$

(Ayaz 2004-2)

Teorem 3.3.6 $u(x, y, t)$, $v(x, y, t)$ analitik fonksiyon ise $w(x, y, t) = u(x, y, t)v(x, y, t)$ fonksiyonunun diferansiyel dönüşümü

$$W(k, h, m) = \sum_{r=0}^k \sum_{s=0}^h \sum_{p=0}^m U(r, h-s, m-p)V(k-r, s, p)$$

dır.

İspat: $w(x, y, t) = u(x, y, t)v(x, y, t)$ fonksiyonunun ters diferansiyel dönüşümünden yararlanılırsa

$$W(0,0,0) = [u(x, y, t)v(x, y, t)]_{(0,0,0)} = U(0,0,0)V(0,0,0)$$

$$W(1,0,0) = \frac{1}{1!0!0!} \frac{\partial}{\partial x} [u(x, y, t)v(x, y, t)]_{(0,0,0)} = \frac{1}{1!0!0!} \left[\frac{\partial u}{\partial x} \cdot v + \frac{\partial v}{\partial x} \cdot u \right]_{(0,0,0)}$$

$$= U(1,0,0)V(0,0,0) + V(1,0,0)U(0,0,0)$$

$$W(1,1,0) = \frac{1}{1!1!0!} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} [u(x, y, t)v(x, y, t)]_{(0,0,0)} = U(1,1,0)V(0,0,0)$$

$$+ U(1,0,0)V(0,1,0) + U(0,0,0)V(1,1,0) + U(0,1,0)V(1,0,0)$$

$$W(1,1,1) = \frac{1}{1!1!1!} \frac{\partial^3}{\partial x \partial y \partial t} [u(x, y, t)v(x, y, t)]_{(0,0,0)} = U(1,1,1)V(0,0,0) + U(1,1,0)V(0,0,1)$$

$$+ U(1,0,1)V(0,1,0) + U(1,0,0)V(0,1,1) + U(1,1,1)V(0,0,0) + U(0,0,1)V(1,1,0)$$

$$+ U(1,0,1)V(0,1,0) + U(1,0,0)V(0,1,1)$$

$$W(2,0,0) = \frac{1}{2!0!0!} \frac{\partial^2}{\partial x^2} [u(x, y, t)v(x, y, t)]_{(0,0,0)}$$

$$= U(2,0,0)V(0,0,0) + U(1,0,0)V(1,0,0) + U(0,0,0)V(2,0,0)$$

$$W(2,1,0) = U(2,1,0)V(0,0,0) + U(2,0,0)V(0,1,0) + U(1,1,0)V(1,0,0) + U(1,0,0)V(1,1,0)$$

$$+ U(0,1,0)V(2,0,0) + U(0,0,0)V(2,1,0)$$

$$W(1,0,2) = U(1,0,2)V(0,0,0) + U(0,0,2)V(1,0,0) + U(1,0,1)V(0,0,1) + U(0,0,1)V(1,0,1)$$

$$+ U(0,0,0)V(1,0,2) + U(1,0,0)V(0,0,2)$$

⋮

$w(x, y, t) = u(x, y, t)v(x, y, t)$ fonksiyonunun diferansiyel dönüşümü

$$W(k, h, m) = \sum_{r=0}^k \sum_{s=0}^h \sum_{p=0}^m U(r, h-s, m-p)V(k-r, s, p)$$

bulunur.

(Ayaz 2004-2)

Teorem 3.3.7 $u(x, y, t)$, $v(x, y, t)$ analitik fonksiyon ise $w(x, y, t) = \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial v}{\partial y}$

fonksiyonunun diferansiyel dönüşümü

$$W(k, h, m) = \sum_{r=0}^k \sum_{s=0}^h \sum_{p=0}^m (k-r+1)(h-s+1)U(k-r+1, s, p)V(r, h-s+1, m-p)$$

dır.

İspat: $w(x, y, t) = \frac{\partial u(x, y, t)}{\partial x} \Rightarrow W(k, h, m) = (k+1)U(k+1, h, m)$

$$w(x, y, t) = \frac{\partial u(x, y, t)}{\partial y} \Rightarrow W(k, h, m) = (h+1)U(k, h+1, m)$$

$$w(x, y, t) = u(x, y, t)v(x, y, t) \Rightarrow$$

$$W(k, h, m) = \sum_{r=0}^k \sum_{s=0}^h \sum_{p=0}^m U(r, h-s, m-p)V(k-r, s, p)$$

formüllerinden yararlanılarak $w(x, y, t) = \frac{\partial u(x, y, t)}{\partial x} \cdot \frac{\partial v(x, y, t)}{\partial y}$ fonksiyonunu

diferansiyel dönüşü fonksiyonu

$$W(k, h, m) = \sum_{r=0}^k \sum_{s=0}^h \sum_{p=0}^m (k-r+1)(h-s+1)U(k-r+1, s, p)V(r, h-s+1, m-p)$$

elde edilir.

(Ayaz 2004-2)

3.4.Fark Denklemleri ile İlgili Teoremler

Teorem3.4.1 (Arıkoğlu ve Özkol 2006-1) Eğer $f(x) = g(x+a)$ analitik ise $N \rightarrow \infty$ için fonksiyonun diferansiyel dönüşümü

$$F(k) = \sum_{h_1=k}^N \binom{h_1}{k} a^{h_1-k} \cdot G(h_1)$$

şeklindedir.

İspat: $f(x) = g(x+a) = g(x) + \frac{g'(x)}{1!} \cdot a + \frac{g''(x)}{2!} \cdot a^2 + \dots + \frac{g^{(n)}(x)}{n!} \cdot a^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{g^{(n)}(x)}{n!} \cdot a^n$

fonksiyonunun diferansiyel dönüşümü alınırsa

$$\begin{aligned}
F(k) &= \frac{1}{k!} \frac{d^k}{dx^k} g(x+a) = \frac{1}{k!} \frac{d^k}{dx^k} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{g^{(n)}(x)}{n!} \cdot a^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \cdot a^n \frac{d^{n+k}}{dx^{n+k}} \frac{g(x)}{n!} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{n! \cdot k!} \frac{d^{n+k}}{dx^{n+k}} g(x) \quad , \quad (n = h_1 - k) \quad \text{dönüşümü yapılırsa;} \\
&= \sum_{h_1=k}^{\infty} \frac{a^{h_1-k}}{(h_1-k)! \cdot k!} \cdot \frac{d^{h_1}}{dx^{h_1}} g(x) \\
&= \sum_{h_1=k}^{\infty} \frac{a^{h_1-k}}{(h_1-k)! \cdot k!} \cdot \frac{d^{h_1}}{dx^{h_1}} g(x) \cdot \frac{h_1!}{h_1!} \\
&= \sum_{h_1=k}^{\infty} \binom{h_1}{k} \cdot a^{h_1-k} \cdot G(h_1)
\end{aligned}$$

olduğu görülür.

Teorem 3.4.2 Eğer $f(x) = \frac{d^n}{dx^n} [g(x+a)]$ analitik ise $N \rightarrow \infty$ için fonksiyonun diferansiyel dönüşümü

$$F(k) = \frac{(k+n)!}{k!} \sum_{h_1=k+n}^N \binom{h_1}{k+n} a^{h_1-k-n} \cdot G(h_1)$$

şeklindedir.

İspat: $f(x) = \frac{d^n g(x)}{dx^n} \Rightarrow F(k) = \frac{(k+n)!}{k!} G(k+n)$

$$G(k+n) = \sum_{h_1=k+n}^N \binom{h_1}{k+n} a^{h_1-k-n} \cdot G(h_1)$$

formülünü göz önüne alınırsa $f(x) = \frac{d^n}{dx^n} [g(x+a)]$ fonksiyonunu diferansiyel dönüşümü

$$F(k) = \frac{(k+n)!}{k!} \sum_{h_1=k+n}^N \binom{h_1}{k+n} a^{h_1-k-n} \cdot G(h_1)$$

elde edilir.

(Arıkoğlu ve Özkol 2006-1)

Teorem 3.4.3 Eğer $f(x) = p(x).g^{(n)}(x+a)$ analitik ise $N \rightarrow \infty$ için fonksiyonun diferansiyel dönüşümü

$$F(k) = \sum_{k_1=0}^k \sum_{h_1=k-k_1+n}^N \frac{(k-k_1+n)!}{(k-k_1)!} \binom{h_1}{k-k_1+n} a^{h_1-k+k_1-n} P(k_1) G(h_1)$$

şeklindedir.

İspat: Diferansiyel dönüşüm göstermek için $g^{(n)}(x+a) = c(x)$ diyelim.

$$y(x) = p(x)c(x) \Rightarrow Y(k) = \sum_{k_1=0}^k P(k_1)C(k-k_1)$$

$$C(k-k_1) = \frac{(k-k_1+n)!}{(k-k_1)!} \sum_{h_1=k-k_1+n}^N \binom{h_1}{k-k_1+n} a^{h_1-k+k_1-n} G(h_1)$$

formüllerinden yararlanılırsa $f(x) = p(x).g^{(n)}(x+a)$ fonksiyonunun diferansiyel dönüşümü,

$$F(k) = \sum_{k_1=0}^k \sum_{h_1=k-k_1+n}^N \frac{(k-k_1+n)!}{(k-k_1)!} \binom{h_1}{k-k_1+n} a^{h_1-k+k_1-n} P(k_1) G(h_1)$$

elde edilir.

(Arikoğlu ve Özkol 2006-1)

Teorem 3.4.4 Eğer $f(x) = g_1^{(n_1)}(x+a_1).g_2^{(n_2)}(x+a_2)$ analitik ise $N \rightarrow \infty$ için fonksiyonun diferansiyel dönüşümü

$$F(k) = \sum_{k_1=0}^k \sum_{h_1=k_1+n_1}^N \sum_{h_2=k_1+n_2}^N \frac{(k_1+n_1)!}{k_1!} \frac{(k-k_1+n_2)!}{(k-k_1)!} \binom{h_1}{k_1+n_1} \binom{h_2}{k-k_1+n_2} a_1^{h_1-k_1-n_1} a_2^{h_2-k+k_1-n_2} G_1(h_1) G_2(h_2)$$

şeklindedir.

İspat: Diferansiyel dönüşümü göstermek için $c_1(x) = g_1^{(n_1)}(x+a_1)$, $c_2(x) = g_2^{(n_2)}(x+a_2)$ diyelim.

$$y(x) = c_1(x)c_2(x) \Rightarrow Y(k) = \sum_{k_1=0}^k C_1(k_1)C_2(k-k_1)$$

$$C_1(k_1) = \frac{(k_1+n_1)!}{(k_1)!} \sum_{h_1=k_1+n_1}^N \binom{h_1}{k_1+n_1} a_1^{h_1-k-n_1} G_1(h_1)$$

$$C_2(k-k_1) = \frac{(k-k_1+n_2)!}{(k-k_1)!} \sum_{h_2=k-k_1+n_2}^N \binom{h_2}{k-k_1+n_2} a_2^{h_2-k+k_1-n_2} G_2(h_2)$$

formüllerinden yararlanılırsa $f(x) = g_1^{(n_1)}(x+a_1).g_2^{(n_2)}(x+a_2)$ fonksiyonunun diferansiyel dönüşümü

$$F(k) = \sum_{k_1=0}^k \sum_{h_1=k_1+n_1}^N \sum_{h_2=k_1+n_2}^N \frac{(k_1+n_1)!(k-k_1+n_2)!}{k_1!(k-k_1)!} \binom{h_1}{k_1+n_1} \binom{h_2}{k-k_1+n_2} \\ a_1^{h_1-k_1-n_1} a_2^{h_2-k+k_1-n_2} .G_1(h_1).G_2(h_2)$$

elde edilir.

(Arıkoğlu ve Özkol 2006-1)

Teorem 3.4.5 Eğer $f(x) = g_1^{(m_1)}(x+a_1).g_2^{(m_2)}(x+a_2) \dots g_{n-1}^{(m_{n-1})}(x+a_{n-1}).g_n^{(m_n)}(x+a_n)$

analitik ise $N \rightarrow \infty$ için fonksiyonun diferansiyel dönüşümü

$$F(k) = \sum_{k_{n-1}=0}^k \sum_{k_{n-2}=0}^{k_{n-1}} \dots \sum_{k_2=0}^{k_3} \sum_{k_1=0}^{k_2} \sum_{h_1=k_1+m_1}^N \dots \sum_{h_{n-1}=k_{n-1}-k_{n-2}+m_{n-1}}^N \sum_{h_n=k-k_{n-1}+m_n}^N \frac{(k_1+m_1)!}{k_1!} \\ \cdot \frac{(k_2-k_1+m_2)!}{(k_2-k_1)!} \dots \frac{(k_{n-1}-k_{n-2}+m_{n-1})!}{(k_{n-1}-k_{n-2})!} \cdot \frac{(k-k_{n-1}+m_n)!}{(k-k_{n-1})!} \binom{h_1}{k_1+m_1} \binom{h_2}{k_2-k_1+m_2} \\ \dots \binom{h_{n-1}}{k_{n-1}-k_{n-2}+m_{n-1}} \binom{h_n}{k-k_{n-1}+m_n} a_1^{h_1-k_1-m_1} .a_2^{h_2-k_2+k_1-m_2} \dots a_{n-1}^{h_{n-1}-k_{n-1}+k_{n-2}-m_{n-1}} \\ .a_n^{h_n-k+k_{n-1}-m_n} G_1(h_1).G_2(h_2) \dots G_n(h_n)$$

şeklindedir.

İspat: Diferansiyel dönüşümü göstermek için $c_i(x) = g_i^{(m_i)}(x+a_i) \quad i = 1,2,\dots,n$

diyelim. $f(x) = c_1(x).c_2(x) \dots c_{n-1}(x).c_n(x) \Rightarrow$

$$F(k) = \sum_{k_{n-1}=0}^k \sum_{k_{n-2}=0}^{k_{n-1}} \dots \sum_{k_2=0}^{k_3} \sum_{k_1=0}^{k_2} C_1(k_1).C_2(k_2-k_1) \dots C_{n-1}(k_{n-1}-k_{n-2}).C_n(k_n-k_{n-1})$$

$$C_1(k_1) = \frac{(k_1+m_1)!}{(k_1)!} \sum_{h_1=k_1+m_1}^N \binom{h_1}{k_1+m_1} .a_1^{h_1-k-m_1} .G_1(h_1)$$

$$C_2(k_2-k_1) = \frac{(k_2-k_1+m_2)!}{(k_2-k_1)!} \sum_{h_2=k_2-k_1+m_2}^N \binom{h_2}{k_2-k_1+m_2} .a_2^{h_2-k_2+k_1-m_2} G_2(h_2)$$

⋮

$$C_n(k_n-k_{n-1}) = \frac{(k-k_{n-1}+m_n)!}{(k_n-k_{n-1})!} \sum_{h_n=k-k_{n-1}+m_n}^N \binom{h_n}{k_n-k_{n-1}+m_n} .a_n^{h_n-k+k_{n-1}-m_n} G_n(h_n)$$

formüllerinden yararlanılırsa

$$f(x) = g_1^{(m_1)}(x+a_1).g_2^{(m_2)}(x+a_2)..g_{n-1}^{(m_{n-1})}(x+a_{n-1}).g_n^{(m_n)}(x+a_n)$$

fonksiyonunun diferansiyel dönüşümü

$$\begin{aligned} F(k) = & \sum_{k_{n-1}=0}^k \sum_{k_{n-2}=0}^{k_{n-1}} \dots \sum_{k_2=0}^{k_3} \sum_{k_1=0}^{k_2} \sum_{h_1=k_1+m_1}^N \dots \sum_{h_{n-1}=k_{n-1}-k_{n-2}+m_{n-1}}^N \sum_{h_n=k-k_{n-1}+m_n}^N \frac{(k_1+m_1)!}{k_1!} \\ & \cdot \frac{(k_2-k_1+m_2)!}{(k_2-k_1)!} \dots \frac{(k_{n-1}-k_{n-2}+m_{n-1})!}{(k_{n-1}-k_{n-2})!} \cdot \frac{(k-k_{n-1}+m_n)!}{(k-k_{n-1})!} \binom{h_1}{k_1+m_1} \binom{h_2}{k_2-k_1+m_2} \\ & \dots \binom{h_{n-1}}{k_{n-1}-k_{n-2}+m_{n-1}} \binom{h_n}{k-k_{n-1}+m_n} \cdot a_1^{h_1-k_1-m_1} \cdot a_2^{h_2-k_2+k_1-m_2} \dots a_{n-1}^{h_{n-1}-k_{n-1}+k_{n-2}-m_{n-1}} \\ & \cdot a_n^{h_n-k+k_{n-1}-m_n} G_1(h_1).G_2(h_2)..G_n(h_n) \end{aligned}$$

elde edilir.

(Arıkoğlu ve Özkol 2006-1)

Teorem 3.4.6 Eğer

$$f(x) = g_1^{(m_1)}(x+a_1).g_2^{(m_2)}(x+a_2)..g_{n-1}^{(m_{n-1})}(x+a_{n-1}).g_n^{(m_n)}(x+a_n)p_1(x).p_2(x)..p_{m-1}(x).p_m(x)$$

analitik ise $N \rightarrow \infty$ için fonksiyonun diferansiyel dönüşümü

$$\begin{aligned} F(k) = & \sum_{k_{m+n-1}=0}^k \sum_{k_{m+n-2}=0}^{k_{m+n-1}} \dots \sum_{k_2=0}^{k_3} \sum_{k_1=0}^{k_2} \sum_{h_1=k_1+m_1}^N \dots \sum_{h_{n-1}=k_{n-1}-k_{n-2}+m_{n-1}}^N \sum_{h_n=k_n-k_{n-1}+m_n}^N \frac{(k_1+m_1)!}{k_1!} \cdot \frac{(k_2-k_1+m_2)!}{(k_2-k_1)!} \\ & \dots \frac{(k_{n-1}-k_{n-2}+m_{n-1})!}{(k_{n-1}-k_{n-2})!} \cdot \frac{(k-k_{n-1}+m_n)!}{(k-k_{n-1})!} \binom{h_1}{k_1+m_1} \binom{h_2}{k_2-k_1+m_2} \dots \binom{h_{n-1}}{k_{n-1}-k_{n-2}+m_{n-1}} \\ & \binom{h_n}{k_n-k_{n-1}+m_n} \cdot a_1^{h_1-k_1-m_1} \cdot a_2^{h_2-k_2+k_1-m_2} \dots a_{n-1}^{h_{n-1}-k_{n-1}+k_{n-2}-m_{n-1}} \cdot a_n^{h_n-k+k_{n-1}-m_n} G_1(h_1).G_2(h_2).. \\ & \cdot G_{n-1}(h_{n-1}).G_n(h_n).P_1(k_{n+1}-k_n).P_2(k_{n+2}-k_{n+1})..P_{m-1}(k_{m+n-1}-k_{m+n-2}).P_m(k-k_{m+n-1}) \end{aligned}$$

şeklindedir.

İspat: Diferansiyel dönüşümü göstermek için $c_i(x) = g_i^{(m_i)}(x+a_i) \quad i = 1,2,\dots,n$

diyelim.

$$f(x) = c_1(x).c_2(x)..c_{n-1}(x).c_n(x).p_1(x).p_2(x)..p_{m-1}(x).p_m(x) \Rightarrow$$

$$F(k) = \sum_{k_{n-1}=0}^k \sum_{k_{n-2}=0}^{k_{n-1}} \dots \sum_{k_2=0}^{k_3} \sum_{k_1=0}^{k_2} C_1(k_1).C_2(k_2-k_1)..C_{n-1}(k_{n-1}-k_{n-2}).C_n(k_n-k_{n-1}).$$

$$P_1(k_{n+1}-k_n).P_2(k_{n+2}-k_{n+1})..P_{m-1}(k_{m+n-1}-k_{m+n-2}).P_m(k_{m+n}-k_{m+n-1})$$

$$\begin{aligned}
C_1(k_1) &= \frac{(k_1 + m_1)!}{(k_1)!} \sum_{h_1=k_1+m_1}^N \binom{h_1}{k_1 + m_1} a_1^{h_1-k-m_1} G_1(h_1) \\
C_2(k_2 - k_1) &= \frac{(k_2 - k_1 + m_2)!}{(k_2 - k_1)!} \sum_{h_2=k_2-k_1+m_2}^N \binom{h_2}{k_2 - k_1 + m_2} a_2^{h_2-k_2+k_1-m_2} G_2(h_2) \\
&\vdots \\
C_{n-1}(k_{n-1} - k_{n-2}) &= \frac{(k_{n-1} - k_{n-2} + m_{n-1})!}{(k_{n-1} - k_{n-2})!} \\
&\quad \cdot \sum_{h_{n-1}=k_{n-1}-k_{n-2}+m_{n-1}}^N \binom{h_{n-1}}{k_{n-1} - k_{n-2} + m_{n-1}} a_{n-1}^{h_{n-1}-k_{n-1}+k_{n-2}-m_{n-1}} G_{n-1}(h_{n-1}) \\
C_n(k_n - k_{n-1}) &= \frac{(k - k_{n-1} + m_n)!}{(k_n - k_{n-1})!} \\
&\quad \cdot \sum_{h_n=k-k_{n-1}+m_n}^N \binom{h_n}{k_n - k_{n-1} + m_n} a_n^{h_n-k+k_{n-1}-m_n} G_n(h_n)
\end{aligned}$$

formüllerinden yararlanılırsa

$$f(x) = g_1^{(m_1)}(x + a_1) \cdot g_2^{(m_2)}(x + a_2) \cdots g_{n-1}^{(m_{n-1})}(x + a_{n-1}) \cdot g_n^{(m_n)}(x + a_n) p_1(x) \cdot p_2(x) \cdots p_{m-1}(x) \cdot p_m(x)$$

fonksiyonunun diferansiyel dönüşümü

$$\begin{aligned}
F(k) &= \sum_{k_{m+n-1}=0}^k \sum_{k_{m+n-2}=0}^{k_{m+n-1}} \cdots \sum_{k_2=0}^{k_3} \sum_{k_1=0}^{k_2} \sum_{h_1=k_1+m_1}^N \cdots \sum_{h_{n-1}=k_{n-1}-k_{n-2}+m_{n-1}}^N \sum_{h_n=k_n-k_{n-1}+m_n}^N \frac{(k_1 + m_1)!}{k_1!} \cdot \frac{(k_2 - k_1 + m_2)!}{(k_2 - k_1)!} \\
&\quad \cdots \frac{(k_{n-1} - k_{n-2} + m_{n-1})!}{(k_{n-1} - k_{n-2})!} \cdot \frac{(k - k_{n-1} + m_n)!}{(k - k_{n-1})!} \cdot \binom{h_1}{k_1 + m_1} \binom{h_2}{k_2 - k_1 + m_2} \cdots \binom{h_{n-1}}{k_{n-1} - k_{n-2} + m_{n-1}} \\
&\quad \left(\binom{h_n}{k_n - k_{n-1} + m_n} \right) a_1^{h_1-k_1-m_1} \cdot a_2^{h_2-k_2+k_1-m_2} \cdots a_{n-1}^{h_{n-1}-k_{n-1}+k_{n-2}-m_{n-1}} \cdot a_n^{h_n-k+k_{n-1}-m_n} G_1(h_1) G_2(h_2) \cdots \\
&\quad \cdot G_{n-1}(h_{n-1}) G_n(h_n) P_1(k_{n+1} - k_n) P_2(k_{n+2} - k_{n+1}) \cdots P_{m-1}(k_{m+n-1} - k_{m+n-2}) P_m(k - k_{m+n-1})
\end{aligned}$$

elde edilir.

(Arıkoğlu ve Özkol 2006-1)

3.5. İntegro Diferansiyel Denklemleri İçin Temel Teoremler

Teorem 3.5.1 Eğer $f(x) = \int_{x_0}^x g(t)dt$ analitik ise $k \geq 1$ için diferansiyel dönüşümü

$$F(k) = \frac{G(k-1)}{k}$$

şeklindedir.

İspat: Diferansiyel dönüşümü göstermek için $f(x) = \int_{x_0}^x g(t)dt$ fonksiyonunda ters diferansiyel dönüşüm kullanılırsa

$$\begin{aligned} f(x) &= \int_{x_0}^x g(t)dt \\ &= \int_{x_0}^x \sum_{k=0}^{\infty} G(k)(t-x_0)^k dt \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \int_{x_0}^x G(k)(t-x_0)^k dt && (t-x_0 = u, dt = du) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{G(k)}{k+1} (t-x_0)^{k+1} \Big|_{x_0}^x && (k = k-1) \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{G(k-1)}{k} (x-x_0)^k \end{aligned}$$

Böylece

$$F(0) = 0 \text{ ve } F(k) = \frac{G(k-1)}{k} \quad k \geq 1$$

dönüşüm fonksiyonu elde edilir.

(Arıkoğlu ve Özkol 2005)

Teorem 3.5.2 Eğer $f(x) = \int_{x_0}^x \int_{x_0}^{x_{n-1}} \dots \int_{x_0}^{x_2} \int_{x_0}^{x_1} g(t)dt.d x_1.d x_2.d x_3 \dots d x_{n-1}$ analitik ise $k \geq n$ için

diferansiyel dönüşümü

$$F(k) = \frac{(k-n)!}{k!} G(k-n)$$

şeklindedir.

İspat: Diferansiyel dönüşümü göstermek için

$$f(x) = \int_{x_0}^x \int_{x_0}^{x_{n-1}} \dots \int_{x_0}^{x_3} \int_{x_0}^{x_2} \int_{x_0}^{x_1} g(t) dt dx_1 dx_2 dx_3 \dots dx_{n-1} \text{ fonksiyonunda ters diferansiyel dönüşüm}$$

kullanılırsa

$$\begin{aligned} f(x) &= \int_{x_0}^x \int_{x_0}^{x_{n-1}} \dots \int_{x_0}^{x_3} \int_{x_0}^{x_2} \int_{x_0}^{x_1} g(t) dt dx_1 dx_2 dx_3 \dots dx_{n-1} \\ &= \int_{x_0}^x \int_{x_0}^{x_{n-1}} \dots \int_{x_0}^{x_3} \int_{x_0}^{x_2} \int_{x_0}^{x_1} \sum_{k=0}^{\infty} G(k) (t - x_0)^k dt dx_1 dx_2 dx_3 \dots dx_{n-1} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \int_{x_0}^x \int_{x_0}^{x_{n-1}} \dots \int_{x_0}^{x_3} \int_{x_0}^{x_2} \int_{x_0}^{x_1} G(k) (t - x_0)^k dt dx_1 dx_2 dx_3 \dots dx_{n-1} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \int_{x_0}^x \int_{x_0}^{x_{n-1}} \dots \int_{x_0}^{x_3} \int_{x_0}^{x_2} \frac{G(k)}{k+1} \cdot (x_1 - x_0)^{k+1} dx_1 dx_2 dx_3 \dots dx_{n-1} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \int_{x_0}^x \int_{x_0}^{x_{n-1}} \dots \int_{x_0}^{x_3} \frac{G(k)}{(k+1)(k+2)} \cdot (x_2 - x_0)^{k+2} dx_2 dx_3 \dots dx_{n-1} \\ &\vdots \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{G(k)}{(k+1)(k+2)\dots(k+n)} \cdot (x - x_0)^{k+n} \quad , k = k - n \\ &= \sum_{k=n}^{\infty} \frac{G(k-n)}{(k+1-n)(k+2-n)\dots(k)} \cdot (x - x_0)^k \\ &= \sum_{k=n}^{\infty} \frac{(k-n)!}{k!} \cdot G(k-n) \cdot (x - x_0)^k \end{aligned}$$

Böylece

$$F(k) = \frac{(k-n)!}{k!} G(k-n) \quad , \quad k \geq n$$

diferansiyel dönüşümü elde edilir.

(Arıkoğlu ve Özkol 2005)

Teorem 3.5.3 Eğer $f(x) = g(x) \cdot \int_{x_0}^x h(t) dt$ analitik ise $k \geq 1$ için diferansiyel dönüşümü

$$F(k) = \sum_{k_1=1}^k \frac{1}{k_1} \cdot G(k-k_1) \cdot H(k_1-1)$$

şeklindedir.

İspat: $f(x) = g(x) \cdot \int_{x_0}^x h(t) dt$ fonksiyonunun diferansiyel dönüşümü gösterilirken ters

diferansiyel dönüşümü göz önüne alınırsa

$$F(0) = \frac{1}{0!} \left[g(x) \int_{x_0}^x h(t) dt \right]_{x=x_0} = 0$$

$$F(1) = \frac{1}{1!} \frac{d}{dx} \left[g(x) \int_{x_0}^x h(t) dt \right]_{x=x_0} = g(x)' \int_{x_0}^x h(t) dt + g(x) \cdot h(x) \Big|_{x=x_0} = G(0) \cdot H(0)$$

$$\begin{aligned} F(2) &= \frac{1}{2!} \frac{d^2}{dx^2} \left[g(x) \int_{x_0}^x h(t) dt \right]_{x=x_0} = \frac{1}{2!} \cdot g''(x) \int_{x_0}^x h(t) dt + 2 \cdot g'(x) \cdot h(x) + g(x) \cdot h'(x) \Big|_{x=x_0} \\ &= G(1) \cdot H(0) + \frac{1}{2} G(0) \cdot H(1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F(3) &= \frac{1}{3!} \cdot \frac{d^3}{dx^3} \left[g(x) \int_{x_0}^x h(t) dt \right]_{x=x_0} \\ &= \frac{1}{3!} \left[g'''(x) \int_{x_0}^x h(t) dt + 3 \cdot g''(x) \cdot h(x) + 3 \cdot g'(x) \cdot h'(x) + g(x) \cdot h''(x) \right]_{x=x_0} \\ &= G(2) \cdot H(0) + \frac{1}{2} G(1) \cdot H(1) + \frac{1}{3} G(0) \cdot H(2) \end{aligned}$$

Böylece

$$F(k) = \sum_{k_1=1}^k \frac{1}{k_1} \cdot G(k - k_1) \cdot H(k_1 - 1), \quad k \geq 1$$

diferansiyel dönüşüm fonksiyonu elde edilir.

(Arıkoğlu ve Özkol 2005)

Teorem 3.5.4 Eğer $f(x) = \int_{x_0}^x g_1(t) \cdot g_2(t) dt$ analitik ise $k \geq 1$ için diferansiyel dönüşüm fonksiyonu

$$F(k) = \frac{1}{k} \sum_{k_1=0}^{k-1} G_1(k_1) \cdot G_2(k - k_1 - 1)$$

şeklindedir.

İspat: $f(x) = \int_{x_0}^x g_1(t) \cdot g_2(t) dt = \int_{x_0}^x \sum_{k=0}^{\infty} G_1(k) \cdot (x - x_0)^k \sum_{l=0}^{\infty} G_2(l) \cdot (x - x_0)^l$ fonksiyonunun

diferansiyel dönüşümü gösterilirken ters diferansiyel dönüşümü göz önüne alınırsa

$$F(0) = \frac{1}{0!} \left[\int_{x_0}^x g_1(t)g_2(t)dt \right]_{x=x_0} = 0$$

$$F(1) = \frac{1}{1!} \frac{d}{dx} \left[\int_{x_0}^x g_1(t)g_2(t)dt \right]_{x=x_0} = [g_1(x)g_2(x)]_{x=x_0} = G_1(0)G_2(0)$$

$$\begin{aligned} F(2) &= \frac{1}{2!} \frac{d^2}{dx^2} \left[\int_{x_0}^x g_1(t)g_2(t)dt \right]_{x=x_0} = \frac{1}{2!} [g'_1(x)g_2(x) + g_1(x)g'_2(x)]_{x=x_0} \\ &= \frac{1}{2!} [G_1(1)G_2(0) + G_1(0)G_2(1)] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F(3) &= \frac{1}{3!} \frac{d^3}{dx^3} \left[\int_{x_0}^x g_1(t)g_2(t)dt \right]_{x=x_0} \\ &= \frac{1}{3!} [g''_1(x)g_2(x) + 2.g'_1(x)g'_2(x) + g_1(x)g''_2(x)]_{x=x_0} \\ &= \frac{1}{3!} [G_1(2)G_2(0) + G_1(1)G_2(1) + G_1(0)G_2(2)] \end{aligned}$$

Böylece

$$F(k) = \frac{1}{k} \sum_{k_1=0}^{k-1} G_1(k_1)G_2(k-k_1-1), \quad k \geq 1$$

diferansiyel dönüşüm fonksiyonu elde edilir.

(Arıkoğlu ve Özkol 2005)

4.DİFERANSİYEL DÖNÜŞÜM METODU UYGULAMALARI

Bu bölümde DTM, mKdV Lattice, Schrödinger, Toda Lattice ve Manyetik hidrodinamik Akı denklemlerinin yaklaşık çözümlerinin bulunmasında kullanılmıştır. Sonuçlar tam çözümlerle birlikte grafikler ve tablolarla birlikte verilmiştir. Problemlerin çözümünde ve grafik çiziminde Matlab 7.5 programı kullanılmıştır. Algoritmasının kolay oluşu, hızlı ve yüksek hassasiyette çözüme ulaşması ve de çözüm için karmaşık integraller yerine kolay türevler kullanmasından dolayı gayet kullanışlı bir metottür.

Örnek 4.1 $n \in Z, t \in IR$ olmak üzere,

$$\frac{du_n(t)}{dt} = (\alpha - u_n(t)^2)(u_{n+1}(t) - u_{n-1}(t)) \quad (4.1)$$

biçimindeki mKdV Lattice denkleminde

$$u_n(0) = \tanh(k_1) \cdot \tanh(k_1 n), \quad k_1 \in IR \quad (4.2)$$

başlangıç koşulunu dikkate alarak diferansiyel dönüşüm metoduyla çözelim.

Denklemin genel çözümü, $k_1 \in IR$

$$u_n(t) = \tanh(k_1) \cdot \tanh(k_1 n + 2 \tanh(k_1) t), \quad k_1 \in IR$$

dir. (Ablowitz ve Ladic 1977)

Burada $u_n(t) = u(t, n)$ ile gösterilecek ve çözüm yapılırken n sabit, t değişken alınıp

$$u(t, n) = \sum_{k=0}^N t^k U(k, n) \quad (4.3)$$

adi diferansiyel olarak alınıp yaklaşık çözüm hesaplanacaktır.

(4.1) denkleminin diferansiyel dönüşümünü alınırsa, $k = 0, 1, 2, \dots, N$ için;

$$(k+1)U(k+1, n) = \alpha(U(k, n+1) - U(k, n-1)) -$$

$$\sum_{m=0}^k \sum_{l=0}^m U(l, n) \cdot U(m-l, n) \cdot [U(k-m, n+1) - U(k-m, n-1)]$$

elde edilir. (4.2) başlangıç koşulunun diferansiyel dönüşümünü alınırsa;

$$U(0, n) = \tanh(k_1) \cdot \tanh(k_1 n)$$

elde edilir. Denklemde $k = 0$ için;

$$U(1, n) = \alpha(U(0, n+1) - U(0, n-1)) - U^2(0, n) \cdot [U(0, n+1) - U(0, n-1)]$$

$$U(1, n) = [U(0, n+1) - U(0, n-1)] \cdot (\alpha - U^2(0, n))$$

elde edilir. $k = 1$ için;

$$2.U(2, n) = \alpha(U(1, n+1) - U(1, n-1)) \cdot [\alpha - U^2(0, n)] - 2.U(0, n)U(1, n) \\ [U(0, n+1) - U(0, n-1)]$$

elde edilir. $k = 2$ için;

$$3.U(3, n) = \alpha(U(2, n+1) - U(2, n-1)) \\ - \sum_{m=0}^2 \sum_{l=0}^m U(l, n) \cdot U(m-l, n) \cdot [U(2-m, n+1) - U(2-m, n-1)]$$

$$3.U(3, n) = \alpha(U(2, n+1) - U(2, n-1)) \cdot [\alpha - U^2(0, n)] \\ - 2.U(0, n)U(1, n) \cdot [U(1, n+1) - U(1, n-1)] \\ - [2.U(0, n)U(2, n) + U^2(1, n)] \cdot [U(0, n+1) - U(0, n-1)]$$

elde edilir. $k = 3$ için;

$$4.U(4, n) = \alpha(U(3, n+1) - U(3, n-1)) - \\ \sum_{m=0}^3 \sum_{l=0}^m U(l, n) \cdot U(m-l, n) \cdot [U(3-m, n+1) - U(3-m, n-1)]$$

$$4.U(4, n) = \alpha(U(3, n+1) - U(3, n-1)) \cdot [\alpha - U^2(0, n)] \\ - 2.U(0, n)U(1, n) \cdot [U(2, n+1) - U(2, n-1)] \\ - [2.U(0, n)U(2, n) + U^2(1, n)] \cdot [U(1, n+1) - U(1, n-1)] \\ - [2.U(0, n)U(3, n) + 2.U(1, n)U(2, n)] \cdot [U(0, n+1) - U(0, n-1)]$$

elde edilir. $k = 4$ için;

$$5.U(5, n) = \alpha(U(4, n+1) - U(4, n-1))$$

$$- \sum_{m=0}^4 \sum_{l=0}^m U(l, n)U(m-l, n)[U(4-m, n+1) - U(4-m, n-1)]$$

$$5.U(5, n) = \alpha(U(4, n+1) - U(4, n-1)).[\alpha - U^2(0, n)]$$

$$- 2.U(0, n).U(1, n).[U(3, n+1) - U(3, n-1)]$$

$$- [2.U(0, n).U(2, n) + U^2(1, n)][U(2, n+1) - U(2, n-1)]$$

$$- [2.U(0, n).U(3, n) + 2.U(1, n).U(2, n)][U(1, n+1) - U(1, n-1)]$$

$$- [2.U(0, n).U(4, n) + 2.U(1, n).U(3, n) + U^2(2, n)][U(0, n+1) - U(0, n-1)]$$

elde edilir. $k = 5$ için;

$$6.U(6, n) = \alpha(U(5, n+1) - U(5, n-1)) -$$

$$\sum_{m=0}^5 \sum_{l=0}^m U(l, n)U(m-l, n)[U(5-m, n+1) - U(5-m, n-1)]$$

düzenlenirse

$$6.U(6, n) = \alpha(U(5, n+1) - U(5, n-1)).[\alpha - U^2(0, n)]$$

$$- 2.U(0, n).U(1, n).[U(4, n+1) - U(4, n-1)]$$

$$- [2.U(0, n).U(2, n) + U^2(1, n)][U(3, n+1) - U(3, n-1)]$$

$$- [2.U(0, n).U(3, n) + 2.U(1, n).U(2, n)][U(2, n+1) - U(2, n-1)]$$

$$- [2.U(0, n).U(4, n) + 2.U(1, n).U(3, n) + U^2(2, n)][U(1, n+1) - U(1, n-1)]$$

$$- [2.U(0, n).U(5, n) + 2.U(1, n).U(4, n) + 2.U(2, n).U(3, n)].$$

$$[U(0, n+1) - U(0, n-1)]$$

elde edilir.

Bulunan bu değerler (4.3) de yerine yazılırsa;

$$u_n(t) = U(0, n) + U(1, n)t + U(2, n)t^2 + U(3, n)t^3 + U(4, n)t^4 + U(5, n)t^5 + U(6, n)t^6$$

fonksiyonun yaklaşık değeri (DTM) hesaplanabilir. Tablo 4.1'de $N = 3$, $k_1 = 0.1$, $t = 0.5$ ve Tablo 4.3'de $N = 3$, $k_1 = 0.1$, $t = 1.5$ için DTM ile tam çözüm karşılaştırılmıştır. Tablo 4.2 ve Tablo 4.4'de N değerleri arttırılıp $N = 5$, $k_1 = 0.1$, $t = 0.5$ ve $t = 1.5$ için DTM, ADM (Wu, Xie, Zhang 2007) ile tam

çözümlerin karşılaştırmaları yapılarak N değeri arttıkça hatanın daha aza indirildiği ve DTM nin ADM den daha üstün olduğu görülmüştür. Tam çözüm ile DTM arasındaki bu yakınsama da Şekil 4. 1 ve Şekil 4. 2’de gösterilmiştir.

Tablo 4.1. $N = 3$, $k_1 = 0.1$, $t = 0.5$ için DTM ile tam çözümlerinin karşılaştırılması.

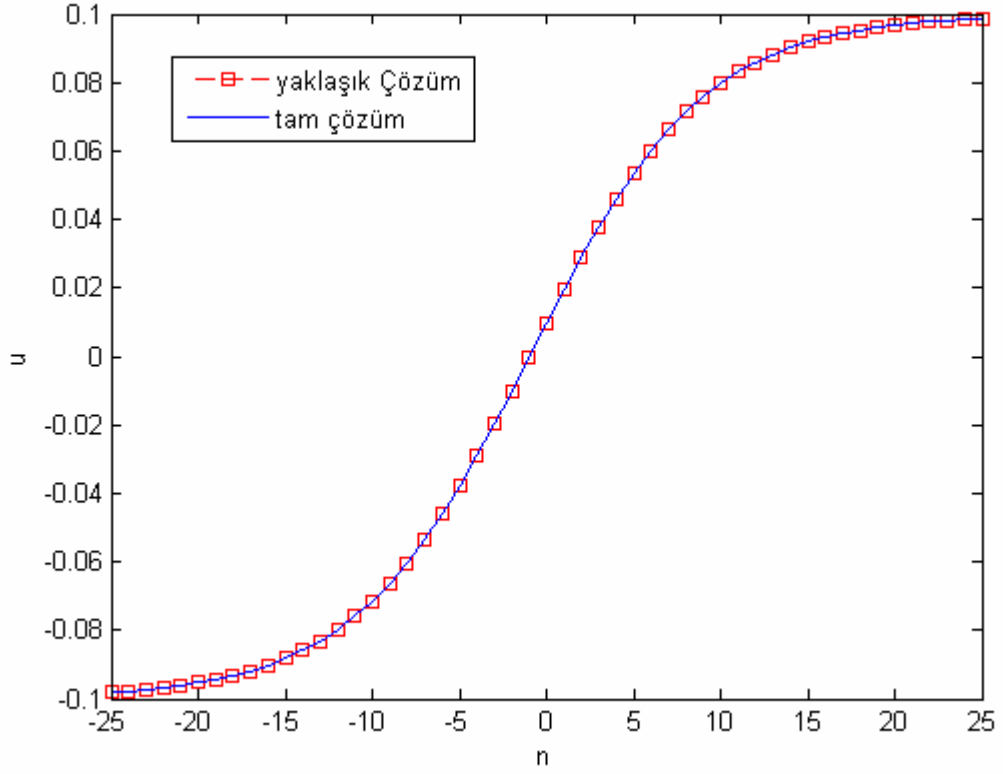
n	Tam Çözüm	DTM	Mutlak Hata
-25	-0.0980419716685	-0.0980419745404	2.87192E-09
-15	-0.0882483737640	-0.0882483704241	3.33984E-09
-5	-0.0378970609082	-0.0378970394159	2.14922E-08
0	0.0099009464692	0.0099008162933	1.30176E-07
5	0.0535031028299	0.0535031341523	3.13225E-08
15	0.0918558740145	0.0918558759662	1.95171E-09
25	0.0985736553800	0.0985736526486	2.73135E-09

Tablo 4.2. $N = 5$, $k_1 = 0.1$, $t = 0.5$ için DTM, ADM ile tam çözümlerinin karşılaştırılması.

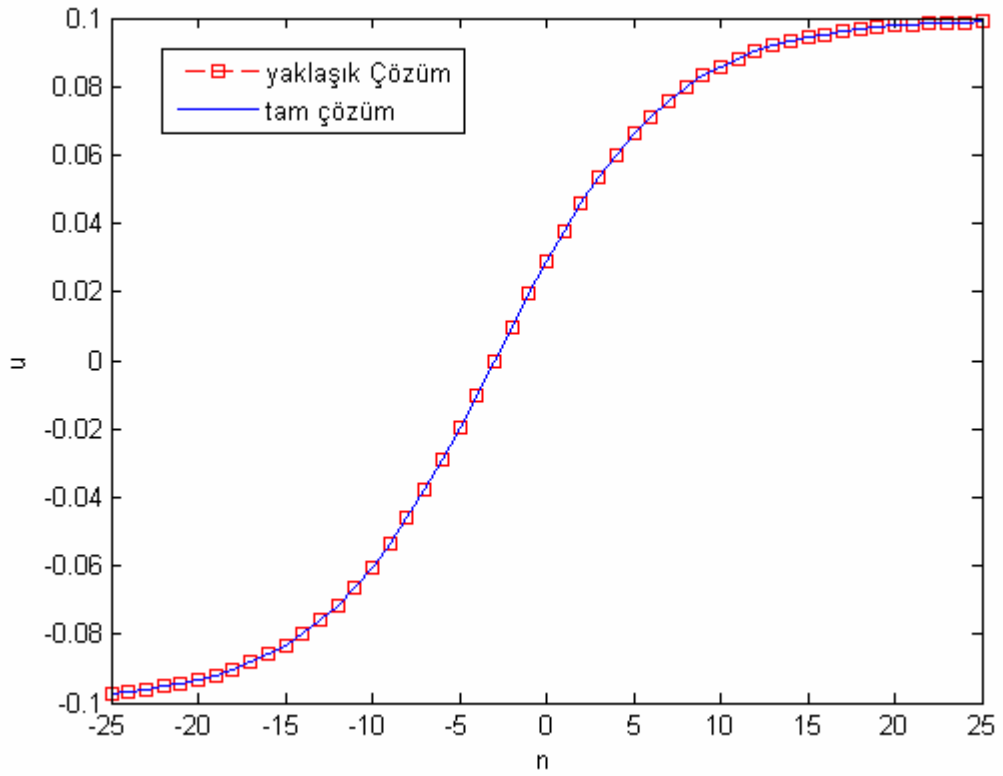
n	Tam Çözüm	ADM	Mutlak Hata (ADM)	DTM	Mutlak Hata (DTM)
-25	-0.0980419716685	-0.09804197166	8.5E-12	-0.0980419716679	6E-13
-15	-0.0882483737640	-0.08824837298	7.84E-10	-0.0882483736885	7.55E-11
-5	-0.0378970609082	-0.03789706610	5.19E-09	-0.0378970622547	1.35E-09
0	0.0099009464692	0.009900946992	5.23E-10	0.0099009464588	1.04E-11
5	0.0535031028299	0.05350309813	4.7E-09	0.0535031039771	1.15E-09
15	0.0918558740145	0.09185587327	7.45E-10	0.0918558740072	7.3E-12
25	0.0985736553800	0.09857365542	4E-11	0.0985736553765	3.5E-12

Tablo 4.3. $N = 3$, $k_1 = 0.1$, $t = 1.5$ için DTM ile tam çözümlerinin karşılaştırılması.

n	Tam Çözüm	DTM	Mutlak Hata
-25	-0.097255114012016	-0.097255847240229	7.33228E-07
-15	-0.083118937378073	-0.083117708245280	1.22913E-06
-5	-0.019767387202623	-0.019765023755796	2.36345E-06
0	0.028943671058017	0.028913020259932	3.06508E-05
5	0.066127678611751	0.066137115576502	9.43696E-06
15	0.094355966562706	0.094356172616496	2.06054E-07
25	0.098932134016150	0.098931502773966	6.31242E-07



Şekil 4.1. $N = 5$, $k_1 = 0.1$, $t = 0.5$ için u 'nun DTM ve Tam çözümlerinin karşılaştırılması



Şekil 4.2. $N = 5$, $k_1 = 0.1$, $t = 1.5$ için u 'nun DTM ve Tam çözümlerinin karşılaştırılması

Tablo 4.4. $N = 5$, $k_1 = 0.1$, $t = 1.5$ için DTM, ADM ile tam çözümlerinin karşılaştırılması.

n	Tam Çözüm	ADM	Mutlak Hata (ADM)	DTM	Mutlak Hata (DTM)
-25	-0.09725511401	-0.09725516662	5.2608E-08	-0.09725511510	1.08514E-09
-15	-0.08311893738	-0.08311834180	5.95578E-07	-0.08311883901	9.83698E-08
-5	-0.01976738720	-0.01977150813	4.12093E-06	-0.01976821576	8.28553E-07
0	0.02894367106	0.02894478018	1.10912E-06	0.02894469576	1.0247E-06
5	0.06612767861	0.06613063122	2.95261E-06	0.06612739719	2.81422E-07
15	0.09435596656	0.09435553904	4.27523E-07	0.09435603464	6.80752E-08
25	0.09893213402	0.09893218337	4.93538E-08	0.09893213166	4.93538E-08

Örnek 4.2 $n \in Z$, $t \in IR$, $i = \sqrt{-1}$

$$i \frac{du_n(t)}{dt} = (u_{n+1}(t) + u_{n-1}(t) - 2u_n(t)) - |u_n(t)|^2 (u_{n+1}(t) + u_{n-1}(t)) \quad (4.4)$$

biçimindeki Schrödinger denklemini

$$u_n(0) = \tanh(k_1) \exp(ipn) \tanh(k_1 n), \quad k_1 \in IR \quad (4.5)$$

başlangıç koşulu ile dikkate alarak çözelim.

Denklemin genel çözümü, $k_1 \in IR$

$$u_n(t) = \tanh(k_1) \exp(ipn + (2 - 2 \cos(p) \operatorname{sech}(k_1))t) \tanh(k_1 n + 2 \sin(p) \tanh(k_1) t)$$

dir. (Dai ve Zhang 2006)

Burada $u_n(t) = u(t, n)$ ile gösterilecek ve çözüm yapılırken n sabit, t değişken alınıp

$$u(t, n) = \sum_{k=0}^N t^k U(k, n) \quad (4.6)$$

adi diferansiyel olarak alınıp yaklaşık çözüm hesaplanacaktır.

(4.4) denkleminin diferansiyel dönüşümünü alınırsa, $k = 0, 1, 2, \dots, N$ için; denkleminin diferansiyel dönüşümü alınırsa

$$i(k+1)U(k+1, n) = [U(k, n+1) + U(k, n-1) - 2U(k, n)] - \sum_{m=0}^k \sum_{l=0}^m U(l, n) U(m-l, n) [U(k-m, n+1) + U(k-m, n-1)]$$

elde edilir. (4.5) denkleminin diferansiyel dönüşümü alınırsa

$$U(0, n) = \tanh(k_1) \exp(ipn) \tanh(k_1 n)$$

elde edilir. $k = 0$ için

$$iU(1,n) = U(0,n+1) + U(0,n-1) - 2U(0,n) - U^2(0,n)[U(0,n+1) + U(0,n-1)]$$

elde edilir. $k = 1$ için

$$2iU(2,n) = U(1,n+1) + U(1,n-1) - 2U(1,n) - U^2(0,n)[U(1,n+1) + U(1,n-1)]$$

elde edilir. $k = 2$ için

$$3iU(3,n) = U(2,n+1) + U(2,n-1) - 2U(2,n) - U^2(0,n)[U(2,n+1) + U(2,n-1)]$$

elde edilir. $k = 3$ için

$$4iU(4,n) = U(3,n+1) + U(3,n-1) - 2U(3,n) - U^2(0,n)[U(3,n+1) + U(3,n-1)]$$

elde edilir. $k = 4$ için

$$5iU(5,n) = U(4,n+1) + U(4,n-1) - 2U(4,n) - U^2(0,n)[U(4,n+1) + U(4,n-1)]$$

elde edilir. $k = 5$ için

$$6iU(6,n) = U(5,n+1) + U(5,n-1) - 2U(5,n) - U^2(0,n)[U(5,n+1) + U(5,n-1)]$$

elde edilir.

Bulunan bu değerler (4.6) denkleminde yerine yazılırsa

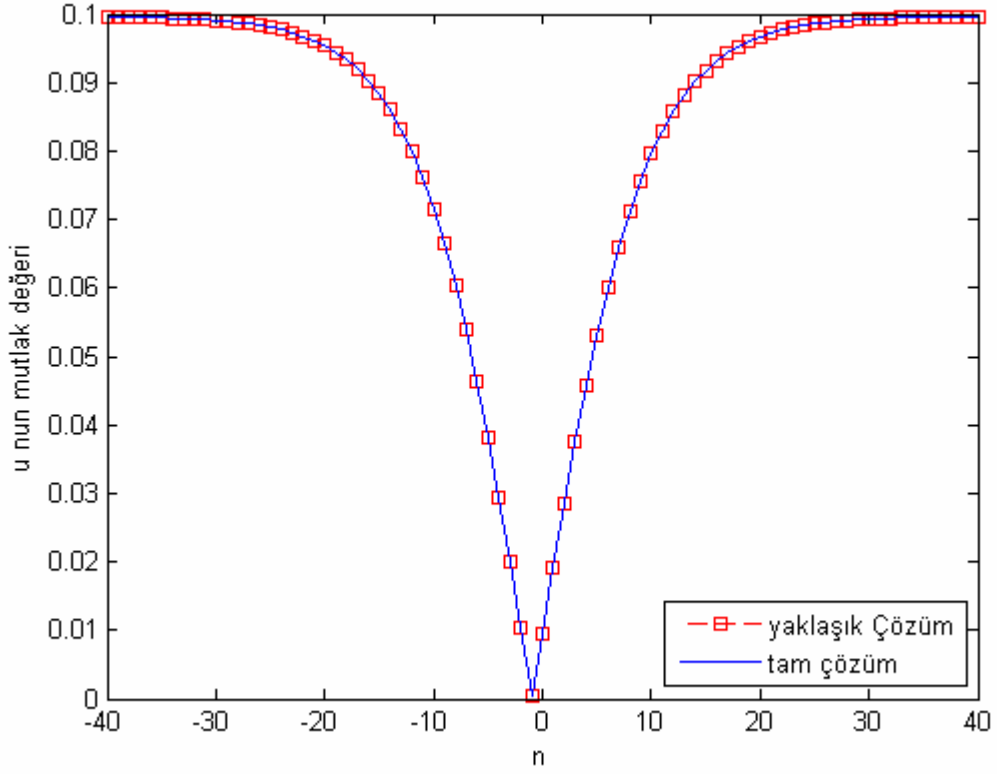
$$u_n(t) = U(0,n) + U(1,n)t + U(2,n)t^2 + U(3,n)t^3 + U(4,n)t^4 + U(5,n)t^5 + U(6,n)t^6$$

fonksiyonun yaklaşık değeri (DTM) hesaplanabilir. Tablo 4.5’de değişik n ve t değerleri için DTM ile tam çözüm arasındaki mutlak hata (Dai ve Zhang 2006) karşılaştırılmış, mutlak hatalarıyla birlikte verilmiştir. Tam çözüm ile DTM arasındaki yakınsama Şekil 4.3’de $N = 5$, $k_1 = 0.1$, $t = 1$, $p = 0.1$ için grafiği verilmiştir.

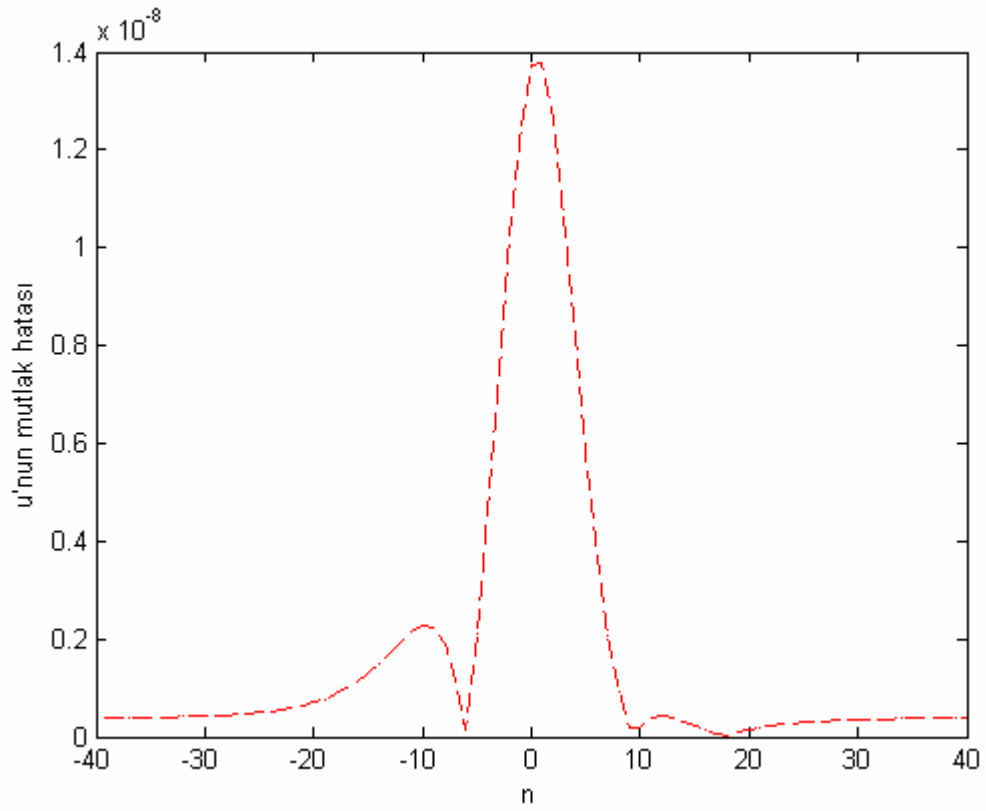
Tablo 4.5 DTM ile tam çözüm arasındaki mutlak hata

	t=1	t=1.5	t=2	t=2.5	t=3
n=-40	3.889763e-010	9.813534e-009	9.623932e-008	5.609540e-007	2.348130e-006
n=-20	6.978906e-010	1.526501e-008	1.378812e-007	7.608852e-007	3.060422e-006
n=0	1.375211e-008	2.285186e-007	1.645200e-006	7.442950e-006	2.494993e-005
n=20	1.456220e-010	6.101938e-009	7.206301e-008	4.640887e-007	2.070075e-006
n=40	3.795945e-010	9.658237e-009	9.512766e-008	5.559651e-007	2.331590e-006

Tablo 4.5’den görüldüğü gibi t değerleri 0’dan uzaklaştıkça hata miktarı artmaktadır. Bu da $t = 0$ için DTM’nun uygulanmasından kaynaklanmaktadır.



Şekil 4.3. $N = 5, k_1 = 0.1, t = 1, p = 0.5$ için u 'nun DTM ve Tam çözümlerinin karşılaştırılması



Şekil 4.4 $N = 5, k_1 = 0.1, t = 1, p = 0.5$ için u 'nun DTM değerinin mutlak hatası

Şekil 4.4 incelenirse hatanın 0 ile $1,4 \cdot 10^{-8}$ arasında olduğunu görebiliriz. Ancak ADM (Wu ve diğerleri, 2007) de bu hata 0 ile $15 \cdot 10^{-8}$ arasında değişmektedir. Bu da DTM sonucunun tam çözüme bir basamak daha yakın olduğunu göstermektedir.

Örnek 4.3 $n \in Z, d, c, t \in IR$ için

$$\left. \begin{aligned} \frac{du_n(t)}{dt} &= u_n(t)(v_n(t) - v_{n-1}(t)) \\ \frac{dv_n(t)}{dt} &= v_n(t)(u_{n+1}(t) - u_n(t)) \end{aligned} \right\} \quad (4.7)$$

Toda lattice denklem sistemini

$$u_n(0) = -\coth(d)c + c \tanh(dn), \quad v_n(0) = -\coth(d)c - c \tanh(dn) \quad (4.8)$$

başlangıç koşulunu dikkate alarak diferansiyel dönüşüm metoduyla çözelim.

Denklem sisteminin genel çözümü

$$u_n(t) = -\coth(d)c + c \tanh(dn + ct), \quad v_n(t) = -\coth(d)c - c \tanh(dn + ct)$$

dir. (Suris 1997)

Burada $u_n(t) = u(t, n)$, $v_n(t) = v(t, n)$ ile gösterilecek ve çözüm yapılırken n sabit, t değişken alınıp

$$u(t, n) = \sum_{k=0}^N t^k U(k, n), \quad v(t, n) = \sum_{k=0}^N t^k V(k, n) \quad (4.9)$$

adi diferansiyel olarak alınıp yaklaşık çözüm hesaplanacaktır.

(4.7) denklemlerinin diferansiyel dönüşümü alınırsa $k = 0, 1, 2, \dots, N$ için

$$(k+1)U(k+1, n) = \sum_{l=0}^k U(l, n)V(k-l, n) - \sum_{l=0}^k U(l, n)V(k-l, n-1) \quad (4.10)$$

$$(k+1)V(k+1, n) = \sum_{l=0}^k V(l, n)U(k-l, n+1) - \sum_{l=0}^k V(l, n)U(k-l, n) \quad (4.11)$$

elde edilir.

(4.8) başlangıç koşullarının da diferansiyel dönüşümleri alınırsa

$$U(0, n) = -\coth(d)c + c \tanh(dn), \quad V(0, n) = -\coth(d)c - c \tanh(dn)$$

elde edilir. (4.10) ve (4.11) denklemlerinde $k = 0, 1, 2, 3, 4, 5$ değerleri yazılarak aşağı-

daki denklemler elde edilir. $k = 0$ için

$$U(1, n) = U(0, n)V(0, n) - U(0, n)V(0, n-1)$$

$$V(1, n) = V(0, n)U(0, n+1) - V(0, n)U(0, n)$$

$k = 1$ için

$$2U(2,n) = U(0,n)V(1,n) + U(1,n)V(0,n) - [U(0,n)V(1,n-1) + U(1,n)V(0,n-1)]$$

$$2V(2,n) = V(0,n)U(1,n+1) + V(1,n)U(0,n+1) - [V(0,n)U(1,n) + V(1,n)U(0,n)]$$

$k = 2$ için

$$3U(3,n) = U(0,n)V(2,n) + U(1,n)V(1,n) + U(2,n)V(0,n) \\ - [U(0,n)V(2,n-1) + U(1,n)V(1,n-1) + U(2,n)V(0,n-1)]$$

$$3V(3,n) = V(0,n)U(2,n+1) + V(1,n)U(1,n+1) + V(2,n)U(0,n+1) \\ - [V(0,n)U(2,n) + V(1,n)U(1,n) + V(2,n)U(0,n)]$$

$k = 3$ için

$$4U(4,n) = U(0,n)V(3,n) + U(1,n)V(2,n) + U(2,n)V(1,n) + U(3,n)V(0,n) \\ - [U(0,n)V(3,n-1) + U(1,n)V(2,n-1) + U(2,n)V(1,n-1) \\ + U(3,n)V(0,n-1)]$$

$$4V(4,n) = V(0,n)U(3,n+1) + V(1,n)U(2,n+1) + V(2,n)U(1,n+1) + V(3,n)U(0,n+1) \\ - [V(0,n)U(3,n) + V(1,n)U(2,n) + V(2,n)U(1,n) + V(3,n)U(0,n)]$$

$k = 4$ için

$$5U(5,n) = U(0,n)V(4,n) + U(1,n)V(3,n) + U(2,n)V(2,n) \\ + U(3,n)V(1,n) + U(4,n)V(0,n) - [U(0,n)V(4,n-1) + U(1,n)V(3,n-1) \\ + U(2,n)V(2,n-1) + U(3,n)V(1,n-1) + U(4,n)V(0,n-1)]$$

$$5V(5,n) = V(0,n)U(4,n+1) + V(1,n)U(3,n+1) + V(2,n)U(2,n+1) \\ + V(3,n)U(1,n+1) + V(4,n)U(0,n+1) - [V(0,n)U(4,n) + V(1,n)U(3,n) \\ + V(2,n)U(2,n) + V(3,n)U(1,n) + V(4,n)U(0,n)]$$

$k = 5$ için

$$6U(6,n) = U(0,n)V(5,n) + U(1,n)V(4,n) + U(2,n)V(3,n) + U(3,n)V(2,n) \\ + U(4,n)V(1,n) + U(5,n)V(0,n) - [U(0,n)V(5,n-1) + U(1,n)V(4,n-1) \\ + U(2,n)V(3,n-1) + U(3,n)V(2,n-1) + U(4,n)V(1,n-1) + U(5,n)V(0,n-1)]$$

$$\begin{aligned}
6V(6,n) = & V(0,n)U(5,n+1) + V(1,n)U(4,n+1) + V(2,n)U(3,n+1) \\
& + V(3,n)U(2,n+1) + V(4,n)U(1,n+1) + V(5,n)U(0,n+1) \\
& - [V(0,n)U(5,n) + V(1,n)U(4,n) + V(2,n)U(3,n) \\
& + V(3,n)U(2,n) + V(4,n)U(1,n) + V(5,n)U(0,n)]
\end{aligned}$$

Bulunan bu değerler (4.9) denklemlerinde yerlerine yazılırsa

$$u_n(t) = U(0,n) + U(1,n)t + U(2,n)t^2 + U(3,n)t^3 + U(4,n)t^4 + U(5,n)t^5 + U(6,n)t^6$$

$$v_n(t) = V(0,n) + V(1,n)t + V(2,n)t^2 + V(3,n)t^3 + V(4,n)t^4 + V(5,n)t^5 + V(6,n)t^6$$

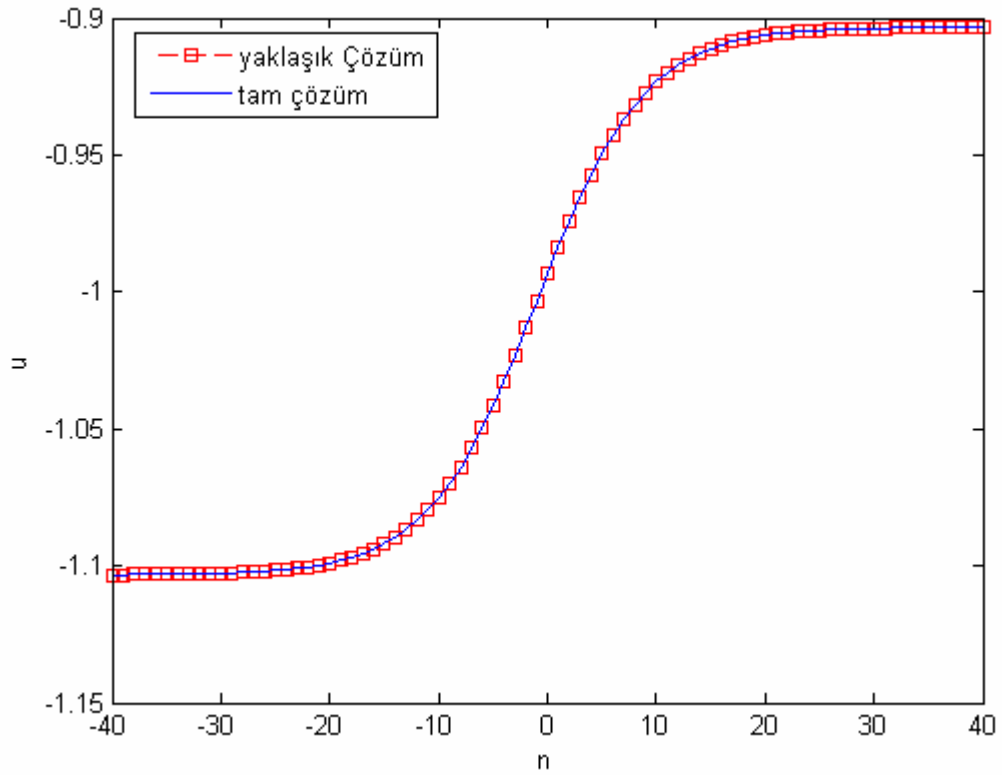
fonksiyonların yaklaşık değeri hesaplanabilir. Tablo 4.6'da $N = 3$, $d = 0.1$, $c = 0.1$, $t = 1$ ve Tablo 4.8'de $N = 3$, $d = 0.1$, $c = 0.1$, $t = 3$ için DTM ile tam çözüm karşılaştırılmıştır. Tablo 4.7 ve Tablo 4.9'da N değerleri artırılıp $N = 5$, $d = 0.1$, $c = 0.1$, $t = 1$ ve $t = 3$ için DTM ile tam çözümlerin karşılaştırmaları yapılarak N değeri arttıkça hatanın daha aza indirildiği ve DTM nin çok iyi sonuçlar verdiği gösterilmiştir. Tam çözüm ile DTM arasındaki bu yakınsama da Şekil 4.4, Şekil 4.5, Şekil 4.6 ve Şekil 4.7'de gösterilmiştir.

Tablo 4.6 $N = 3$, $d = 0.1$, $c = 0.1$, $t = 1$ için DTM ile tam çözümlerinin karşılaştırılması.

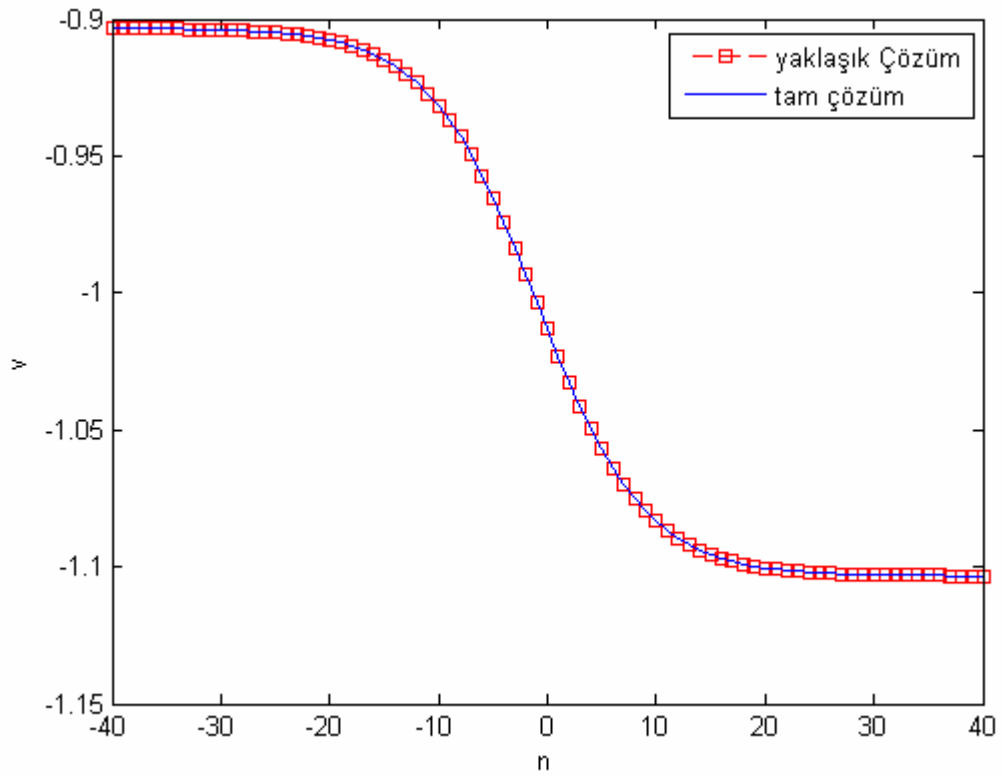
n	Tam Çözüm u_n	DTM u_n	Mutlak Hata u_n	Tam Çözüm v_n	DTM v_n	Mutlak Hata v_n
-40	-1.10324919979	-1.10324919998	1.9E-10	-0.90341302665	-0.90341302647	1.8E-10
-20	-1.09895485904	-1.09895486383	4.79E-09	-0.90770736741	-0.90770736262	4.79E-09
-10	-1.07496090025	-1.07496085208	4.82E-08	-0.93170132620	-0.93170137437	4.817E-08
0	-0.99336431376	-0.99336444656	1.33E-07	-1.01329791268	-1.01329777989	1.3279E-07
10	-0.92328121105	-0.92328116665	4.44E-08	-1.08338101540	-1.08338105979	4.439E-08
20	-0.90628591956	-0.90628592432	4.76E-09	-1.10037630688	-1.10037630212	4.76E-09
40	-0.90338602886	-0.90338602903	1.7E-10	-1.10327619759	-1.10327619742	1.7E-10

Tablo 4.7 $N = 5$, $d = 0.1$, $c = 0.1$, $t = 1$ için DTM ile tam çözümlerinin karşılaştırılması.

n	Tam Çözüm u_n	DTM u_n	Mutlak Hata u_n	Tam Çözüm v_n	DTM v_n	Mutlak Hata v_n
-40	-1.10324919979	-1.10324919979	2E-12	-0.90341302665	-0.90341302665	2E-12
-20	-1.09895485904	-1.09895485903	1E-11	-0.90770736741	-0.90770736741	1E-11
-10	-1.07496090025	-1.07496090028	3E-11	-0.93170132620	-0.93170132617	3E-11
0	-0.99336431376	-0.99336431323	5.3E-10	-1.01329791268	-1.01329791322	5.4E-10
10	-0.92328121105	-0.92328121107	2E-11	-1.08338101540	-1.08338101538	2E-11
20	-0.90628591956	-0.90628591956	4E-12	-1.10037630688	-1.10037630689	1E-11
40	-0.90338602886	-0.90338602886	1E-12	-1.10327619759	-1.10327619759	1E-12



Şekil 4.5 $N = 5$, $d = 0.1$, $c = 0.1$, $t = 1$ için u 'nun DTM ve Tam çözümlerinin karşılaştırılması



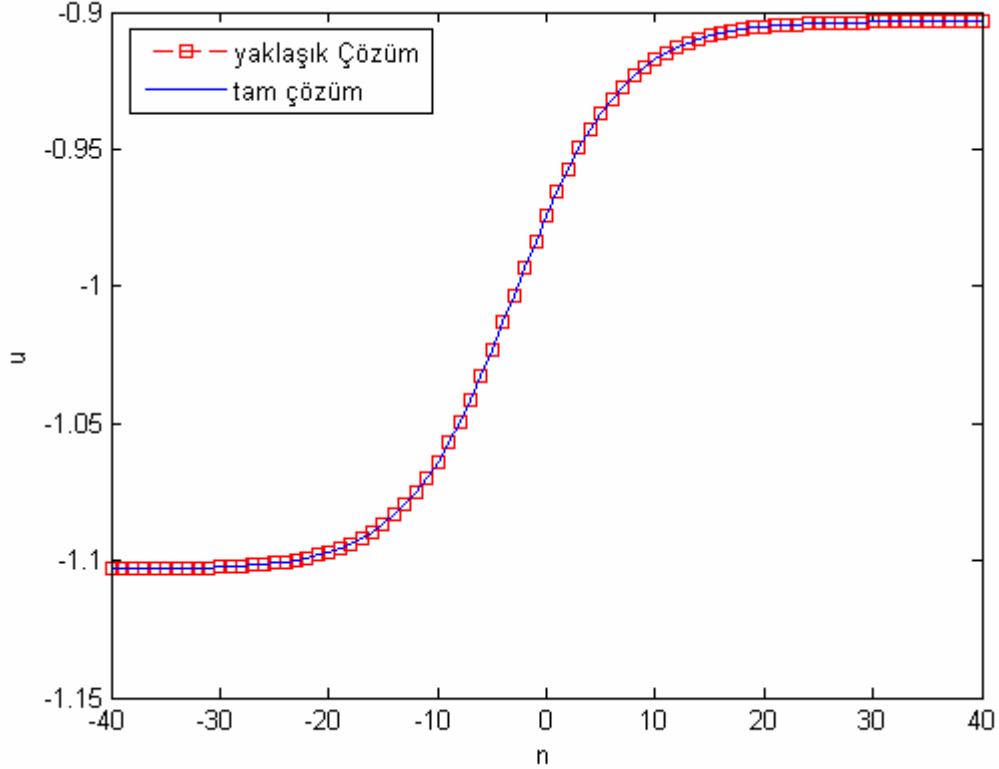
Şekil 4.6 $N = 5$, $d = 0.1$, $c = 0.1$, $t = 1$ için v 'nin DTM ve Tam çözümlerinin karşılaştırılması

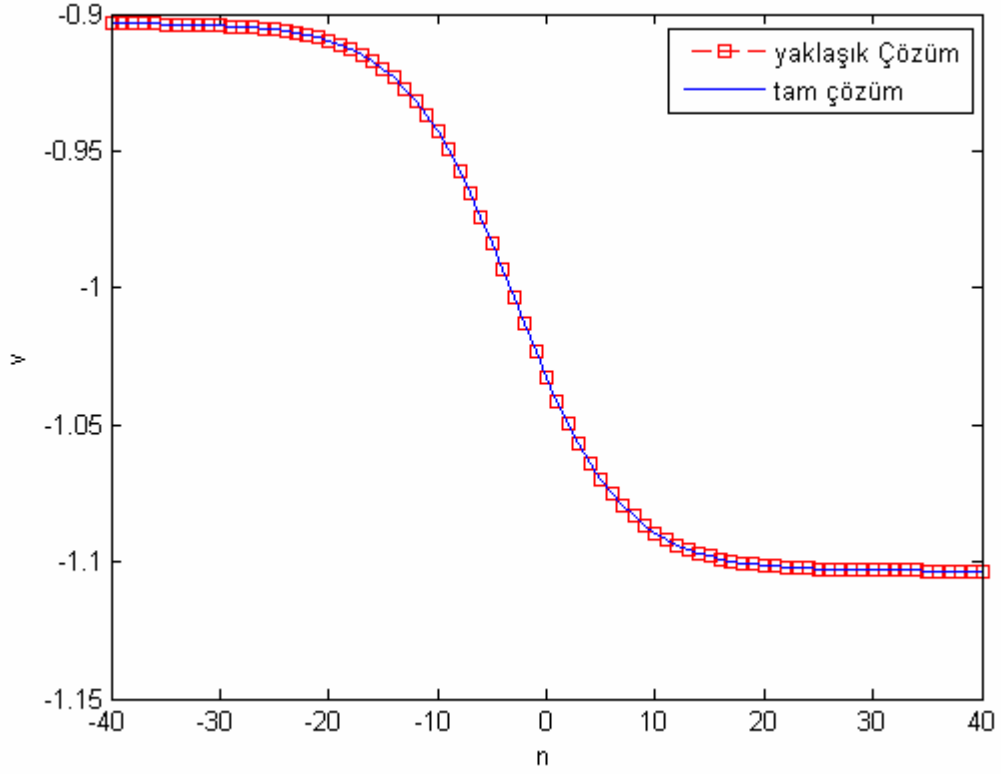
Tablo4.8 $N = 3, d = 0.1, c = 0.1, t = 3$ için DTM ile tam çözümlerinin karşılaştırılması.

n	Tam Çözüm u_n	DTM u_n	Mutlak Hata u_n	Tam Çözüm v_n	DTM v_n	Mutlak Hata v_n
-40	-1.10320893735	-1.10320898500	4.7647E-08	-0.90345328909	-0.90345324144	4.765E-08
-20	-1.09687202028	-1.09687317624	1.15595E-06	-0.90979020616	-0.90978905020	1.15596E-06
-10	-1.06376789093	-1.06375536335	1.25276E-05	-0.94289433551	-0.94290686309	1.25276E-05
0	-0.97419985198	-0.97423111322	3.12612E-05	-1.03246237447	-1.03243111322	3.12613E-05
10	-0.91715879729	-0.91714893859	9.8587E-06	-1.08950342915	-1.08951328786	9.85871E-06
20	-0.90532147359	-0.90532261205	1.13845E-06	-1.10134075285	-1.10133961439	1.13846E-06
40	-0.90336792760	-0.90336796669	3.909E-08	-1.10329429884	-1.10329425975	3.909E-08

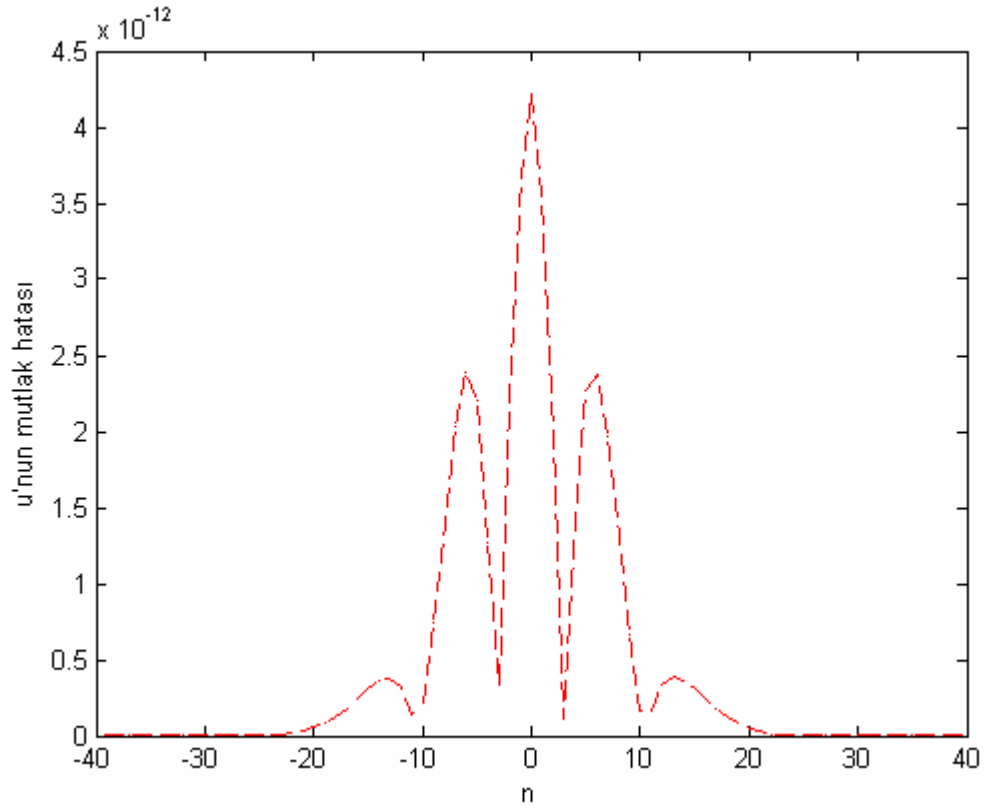
Tablo4.9 $N = 5, d = 0.1, c = 0.1, t = 3$ için DTM ile tam çözümlerinin karşılaştırılması.

n	Tam Çözüm u_n	DTM u_n	Mutlak Hata u_n	Tam Çözüm v_n	DTM v_n	Mutlak Hata v_n
-40	-1.10320893735	-1.103208937737	3.87E-10	-0.90345328909	-0.90345328871	3.8E-10
-20	-1.09687202028	-1.096872002812	1.7468E-08	-0.90979020616	-0.90979022363	1.747E-08
-10	-1.06376789093	-1.063767995498	1.04568E-07	-0.94289433551	-0.94289423095	1.0456E-07
0	-0.97419985198	-0.974198713225	1.13876E-06	-1.03246237447	-1.03246351322	1.1387E-06
10	-0.91715879729	-0.917158811862	1.4568E-08	-1.08950342915	-1.08950341458	1.457E-08
20	-0.90532147359	-0.905321461811	1.1787E-08	-1.10134075285	-1.10134076463	1.178E-08
40	-0.90336792760	-0.903367927939	3.33E-10	-1.10329429884	-1.10329429851	3.3E-10

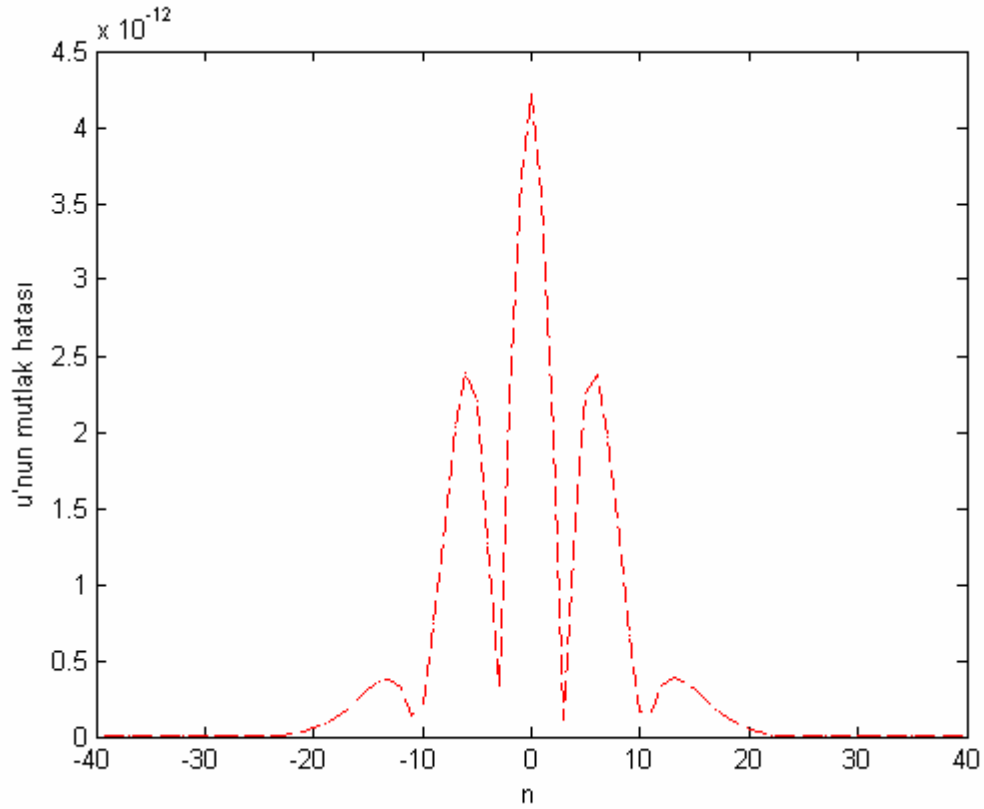
**Şekil 4.7** $N = 5, d = 0.1, c = 0.1, t = 3$ için u 'nun DTM ve Tam çözümlerinin karşılaştırılması



Şekil 4.8 $N = 5$, $d = 0.1$, $c = 0.1$, $t = 3$ için v 'nin DTM ve Tam çözümlerinin karşılaştırılması



Şekil 4.9 $N = 5$, $d = 0.1$, $c = 0.1$, $t = 0.5$ için u 'nun DTM değerinin mutlak hatası



Şekil 4.10 $N = 5$, $d = 0.1$, $c = 0.1$, $t = 0.5$ için v' 'nin DTM değerinin mutlak hatası

Şekil 4.9 ve Şekil 4.10 incelenirse hatanın 0 ile $4,5 \cdot 10^{-12}$ arasında olduğunu görebiliriz. Ancak ADM (Wu ve diğerleri, 2007) de bu hata 0 ile $15 \cdot 10^{-9}$ arasında değişmektedir. Bu da DTM sonucunun tam çözüme üç basamak daha yakın olduğunu göstermektedir.

Örnek 4.4 Manyetik hidro dinamik akı; problemi nükleer reaktörlerde, jeneratörlerde, pompalarda ve kan akışı ölçümlerinde sıkça karşımıza çıkmaktadır. Manyetik hidro dinamik; akışkan mekaniği ile elektrodinamiğin birleşiminden oluştuğu için basit koşullarda tam çözümünü bulmak mümkündür. Bu örnekte dikdörtgenel bir boru içinde oluşan manyetik alan ve hızı farklı değerler için DTM ile hesaplanacaktır.

$$\left. \begin{aligned} \nabla^2 V + M_x \frac{\partial B}{\partial x} + M_y \frac{\partial B}{\partial y} &= -1 \\ \nabla^2 B + M_x \frac{\partial V}{\partial x} + M_y \frac{\partial V}{\partial y} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (4.12)$$

Manyetik hidro dinamik akı denklemini

$$V(-1, y) = V(1, y) = V(x, -1) = V(x, 1) = 0$$

$$B(-1, y) = B(1, y) = B(x, -1) = B(x, 1) = 0$$

başlangıç koşullarını göz önüne alarak çözelim. Burada $V(x, y)$, Hız ve $B(x, y)$, oluşan manyetik alanı ifade etmektedir ;

$$M = (M_x, M_y), \quad M_x = M \sin \alpha, \quad M_y = M \cos \alpha, \quad M = (M_x^2 + M_y^2)^{\frac{1}{2}}$$

dır.

Denklemlerinde $u_1 = V + B$, $u_2 = V - B$ değişken dönüşümü yapılırsa

$$\nabla^2 u_1 + M_x \frac{\partial u_1}{\partial x} + M_y \frac{\partial u_1}{\partial y} = -1 \quad (4.13)$$

$$\nabla^2 u_2 - M_x \frac{\partial u_2}{\partial x} - M_y \frac{\partial u_2}{\partial y} = -1 \quad (4.14)$$

şekline dönüşür. Ters dönüşümü ise

$$V = \frac{u_1 + u_2}{2}, \quad B = \frac{u_1 - u_2}{2}$$

şeklindedir. Sınır koşulları ise ;

$$u_1(-1, y) = u_1(1, y) = u_1(x, -1) = u_1(x, 1) = 0$$

$$u_2(-1, y) = u_2(1, y) = u_2(x, -1) = u_2(x, 1) = 0$$

şekline dönüşür.

Eğer $\alpha = \frac{\pi}{2}$ ise (4.13) ve (4.14) denklemleri aşağıdaki gibi olur.

$$\nabla^2 u_1 + M \frac{\partial u_1}{\partial x} = -1 \quad (4.15)$$

$$\nabla^2 u_2 - M \frac{\partial u_2}{\partial x} = -1 \quad (4.16)$$

(4.13) ve (4.14) denklemleri arasındaki fark sadece – işaretidir. u_1 çözümünde M yerine $-M$ alınırsa $u_2 = u_1(-M)$ çözümüne ulaşılır. (4.12) denklemlerinin diferansiyel dönüşümü alınır

$$(k+1)(k+2)U_1(k+2, h) + (h+1)(h+2)U_1(k, h+2) + M \sin(\alpha)(k+1)U_1(k+1, h) + M \cos(\alpha)(k+1)U_1(k+1, h) = -\delta(k)\delta(h) \quad (4.17)$$

denklemi elde edilir. $u_1(-1, y) = u_1(1, y) = u_1(x, -1) = u_1(x, 1) = 0$ sınır koşullarının diferansiyel dönüşümlerinden elde edilen denklem sistemiyle, (4.17) denkleminde $k = \{0, 1, \dots, N\}$, $h = \{0, 1, \dots, N\}$ değerlerinin yazılmasıyla elde edilen cebirsel denklem sisteminin birleşiminin çözümünden $U_1(k, h)$ diferansiyel dönüşüm katsayıları bulunur. Ters diferansiyel dönüşüm ifadesinde yerine yazılarak $u_1(x, y)$ çözümü bulunur.

$$u_2 = u_1(-M)$$

ifadesinden yararlanarak $u_2(x, y)$ çözümü bulunur. Böylece

$$V = \frac{u_1 + u_2}{2}, \quad B = \frac{u_1 - u_2}{2}$$

çözümü bulunur. Şekil 4.11 ve Şekil 4.12 da $N = 13$, $M = 10$ değerleri için hız(V) ve oluşan manyetik alanın(B) dik iz düşümleri tam çözümleriyle karşılaştırılmıştır. Şekil 4.13 ve Şekil 4.14 de $M = 50$ için tam çözüme yaklaşmamız için $N = 49$ değeri alınarak hız ve manyetik alanın tam çözümle karşılaştırmaları yapılmıştır. Benzer şekilde devam edilerek Şekil 4.15 ve Şekil 4.16 de $N = 75$, $M = 100$, Şekil 4.17 ve Şekil 4.18 de $N = 91$, $M = 200$ değeri alınarak hız ve manyetik alanın tam çözümle karşılaştırmaları yapılmıştır. M , Hartman numarasını yükselterek N değerlerini tam çözüme yaklaşacak şekilde arttırılmıştır. Grafiklerden de görüleceği gibi sonuçlar tam çözüme oldukça yakındır.

Daha sonra da $\alpha = \frac{\pi}{3}$ alınırsa (4.13) denklemi

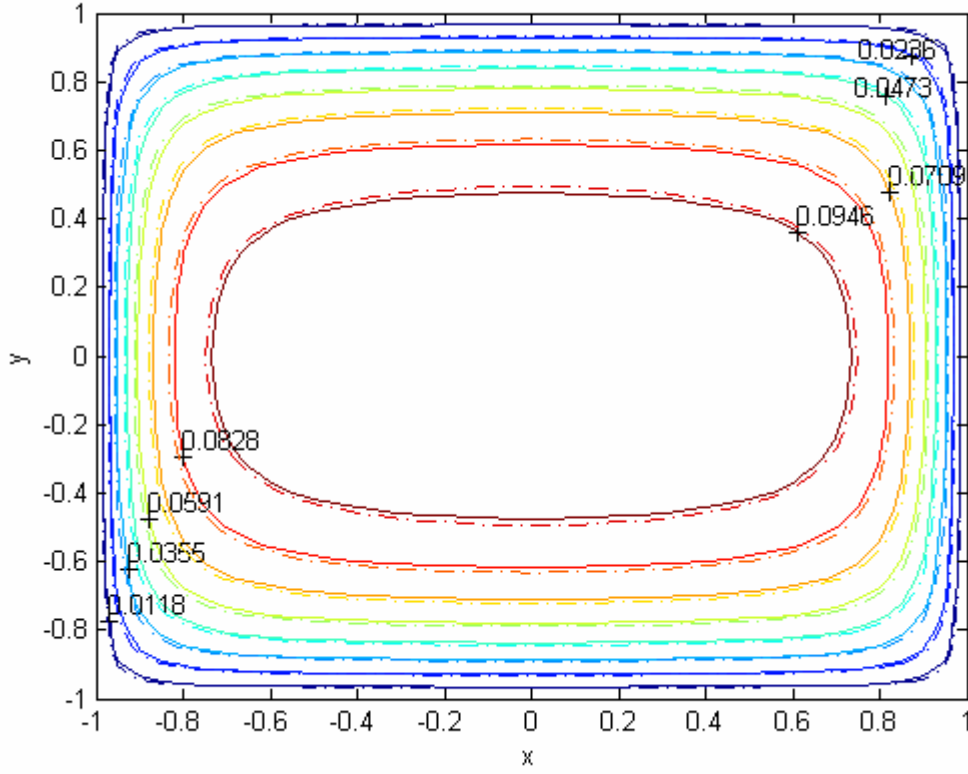
$$\left. \begin{aligned} \nabla^2 u_1 + M \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{\partial u_1}{\partial x} + M \frac{1}{2} \frac{\partial u_1}{\partial y} &= -1 \\ \nabla^2 u_2 - M \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{\partial u_2}{\partial x} - M \frac{1}{2} \frac{\partial u_2}{\partial y} &= -1 \end{aligned} \right\} \quad (4.14)$$

şekline dönüşür. $\alpha = \frac{\pi}{2}$ için yapılan işlemleri tekrarlayarak DTM yaklaşık çözümleri elde edilebilir. $N = 13, M = 10$ için sırasıyla hız ve manyetik alanın dik iz düşümleri Şekil 4.19 ve Şekil 4.20’de gösterilmiştir. $\alpha = \frac{\pi}{3}$ için tam çözüm bulunmadığı için sadece DTM sonuçları çizdirilmiştir. Benzer şekilde aynı açı değeri için $N = 49, M = 50$ için Şekil 4.21 ve Şekil 4.22. $N = 75, M = 100$ için Şekil 4.23 ve Şekil 4.24. $N = 91, M = 200$ için Şekil 4.25 ve Şekil 4.26 çizdirilmiştir.

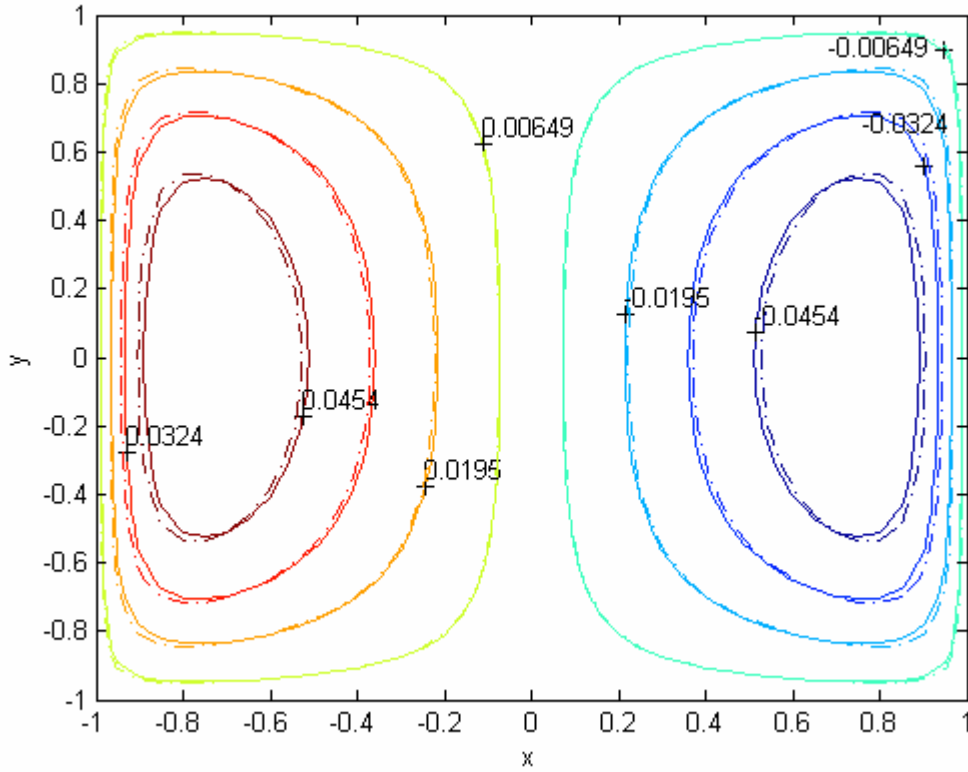
Son olarak da $\alpha = \frac{\pi}{4}$ açı değeri alınırsa (4.13) denklemi

$$\left. \begin{aligned} \nabla^2 u_1 + M \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{\partial u_1}{\partial x} + M \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{\partial u_1}{\partial y} &= -1 \\ \nabla^2 u_2 - M \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{\partial u_2}{\partial x} - M \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{\partial u_2}{\partial y} &= -1 \end{aligned} \right\} \quad (4.15)$$

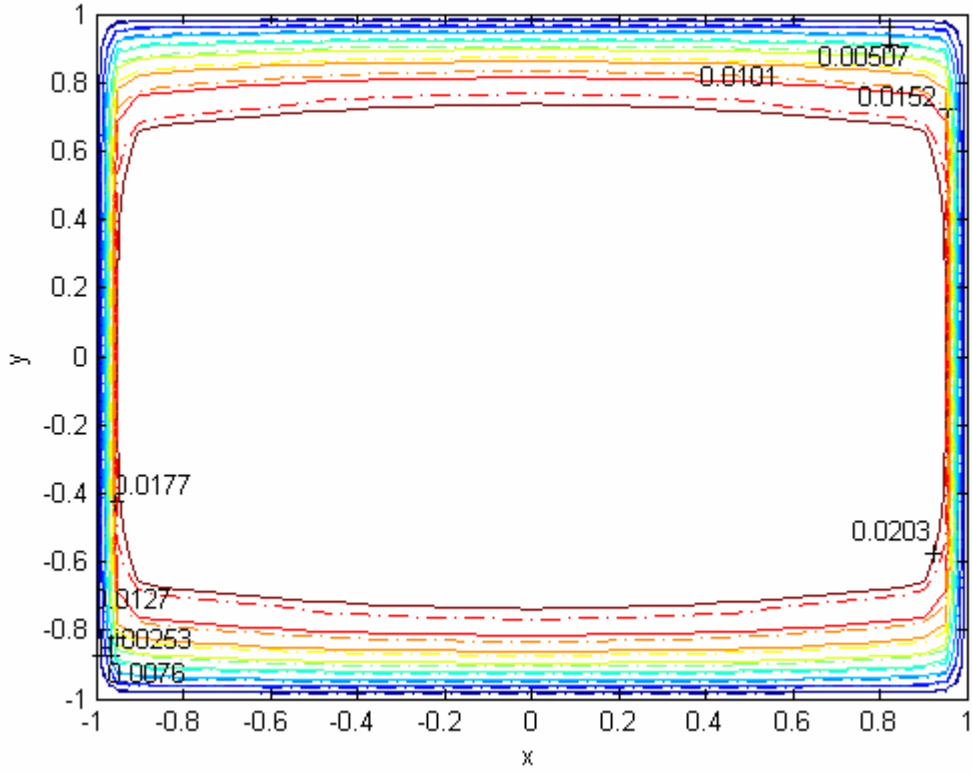
şekline dönüşür. $\alpha = \frac{\pi}{2}$ için yapılan işlemleri tekrarlayarak DTM yaklaşık çözümleri elde edilebilir. $N = 13, M = 10$ hız ve manyetik alanın dik iz düşümleri Şekil 4.27 ve Şekil 4.28’de gösterilmiştir. $\alpha = \frac{\pi}{4}$ için tam çözüm bulunmadığı için sadece DTM sonuçları çizdirilmiştir. Benzer şekilde aynı açı değeri için $N = 49, M = 50$ için Şekil 4.29 ve Şekil 4.30, $N = 75, M = 100$ için Şekil 4.31 ve Şekil 4.32. $N = 91, M = 200$ için Şekil 4.33 ve Şekil 4.34 çizdirilmiştir. $\alpha = \frac{\pi}{2}$ için yaptığımız çalışmada tam çözüme çok yaklaştığımız tezine dayanarak $\alpha = \frac{\pi}{3}$ ve $\alpha = \frac{\pi}{4}$ deki çizimlerin de iyi olduğu düşünülebilir. Bu problem Tezer (2004) tarafından DQM ile çözülmüştür. Kullandığı metotta M Hartman sayısını en fazla 50’ye kadar alabilmiştir. Daha büyük değerler için çözüm bulamamıştır. Bizim metodumuzda ise yöntemin kullanılmasının basit olmasından dolayı M ’nin 200 değerine kadar çözüm yapılabilmiştir.



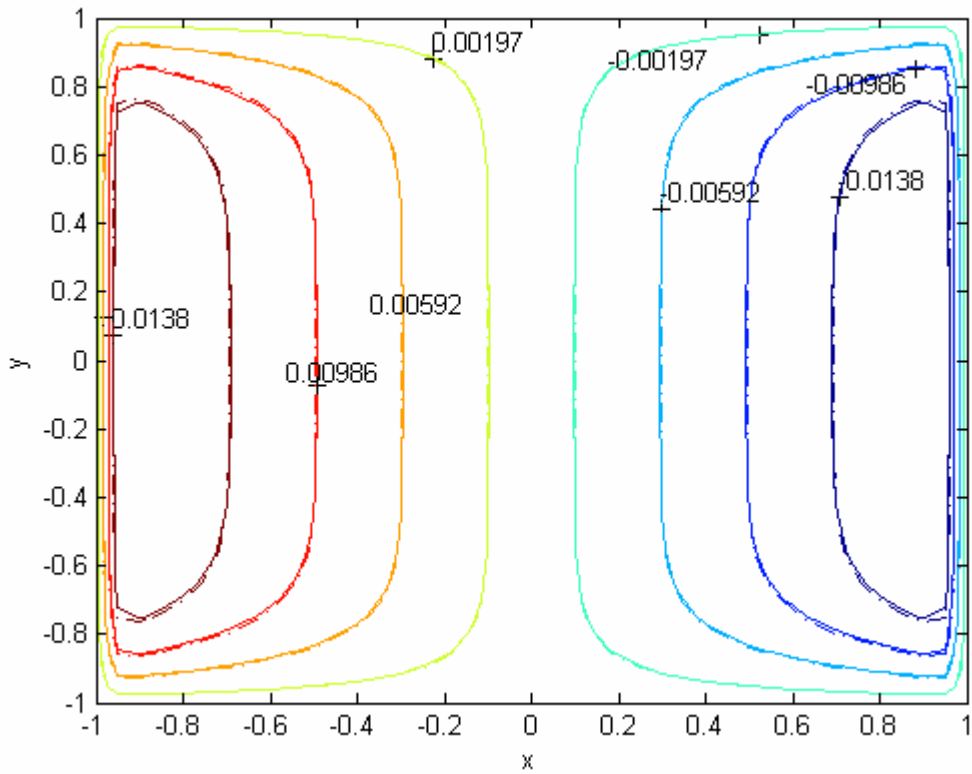
Şekil 4.11 $N=13, M=10, \alpha = \pi/2$ için Hızın DTM(—) ve Tam çözümlerinin (-.-) karşılaştırılması



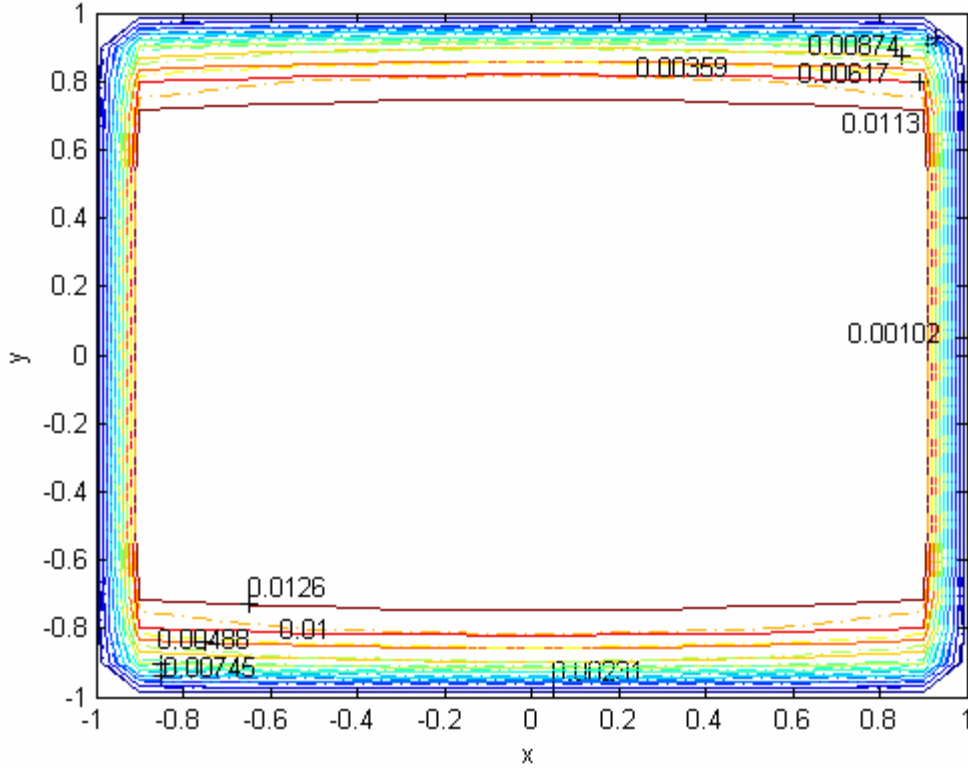
Şekil 4.12 $N=13, M=10, \alpha = \pi/2$ için Manyetik alanın DTM (—) ve Tam çözümlerinin (-.-) karşılaştırılması



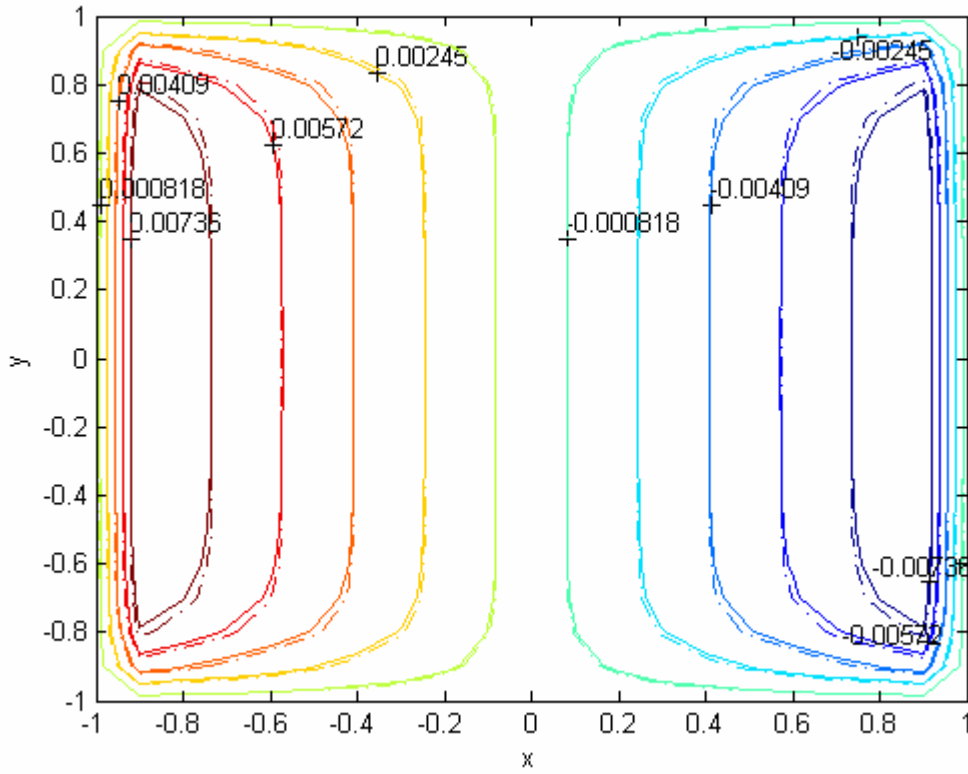
Şekil 4.13 $N=49$, $M=50$, $\alpha = \pi/2$ için Hızın DTM (—) ve Tam çözümlerinin (---) karşılaştırılması,



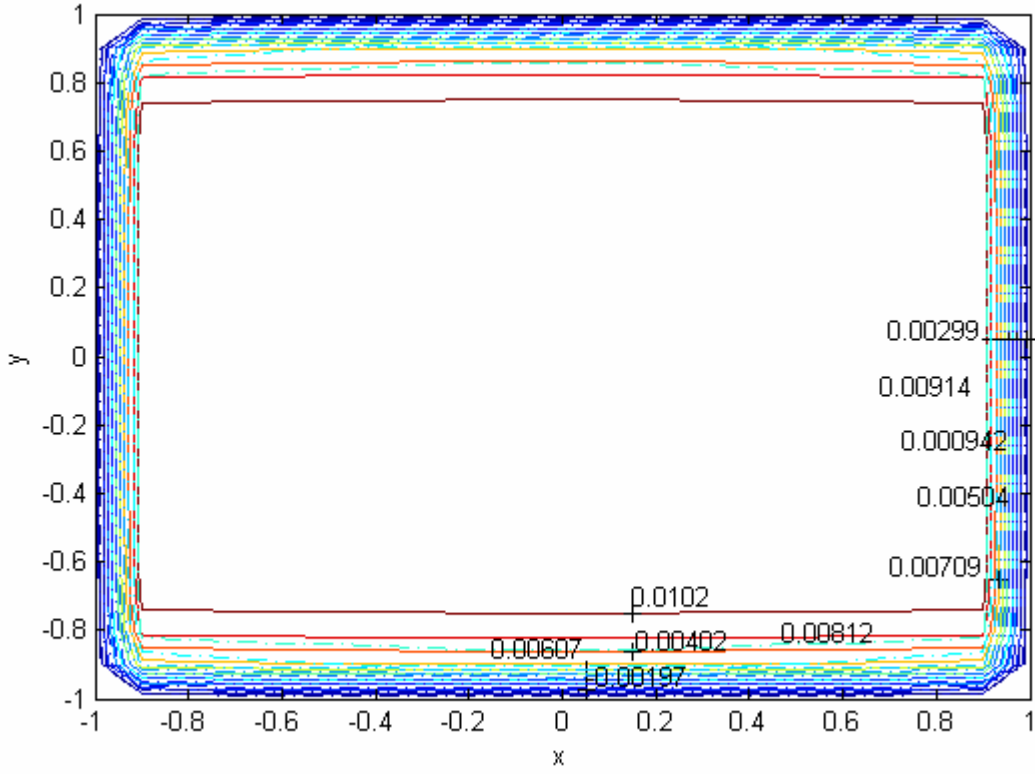
Şekil 4.14 $N=49$, $M=50$, $\alpha = \pi/2$ için Manyetik alanın DTM (—) ve Tam çözümlerinin (---) karşılaştırılması,



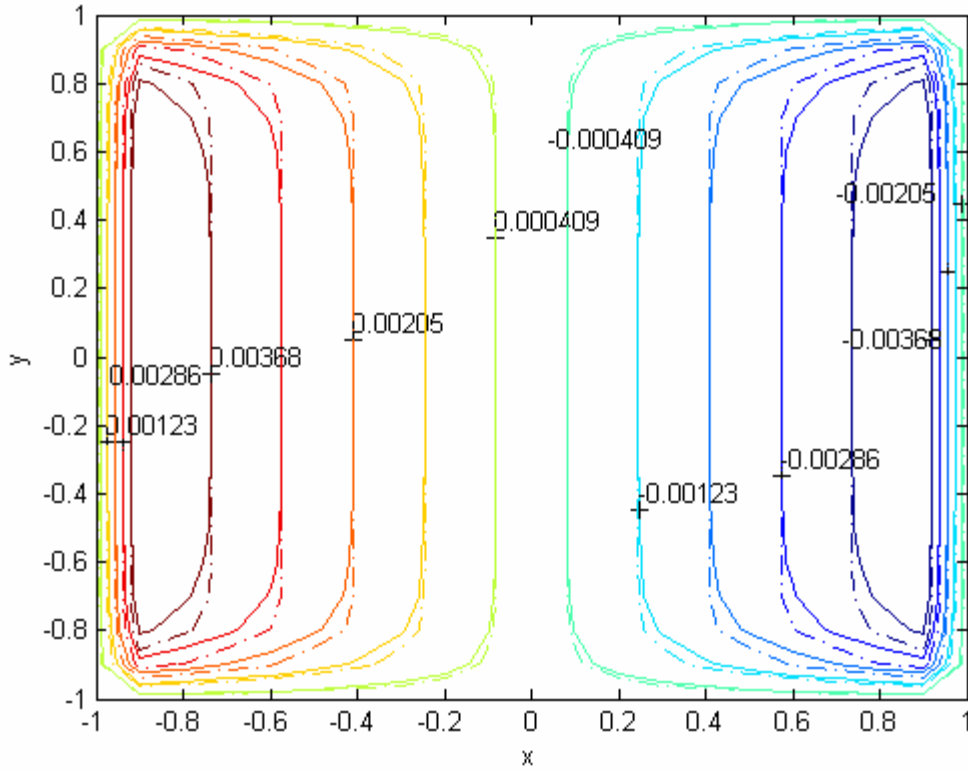
Şekil 4.15 $N=75, M=100, \alpha = \pi/2$ için Hızın DTM (—) ve Tam çözümlerinin (---) karşılaştırılması



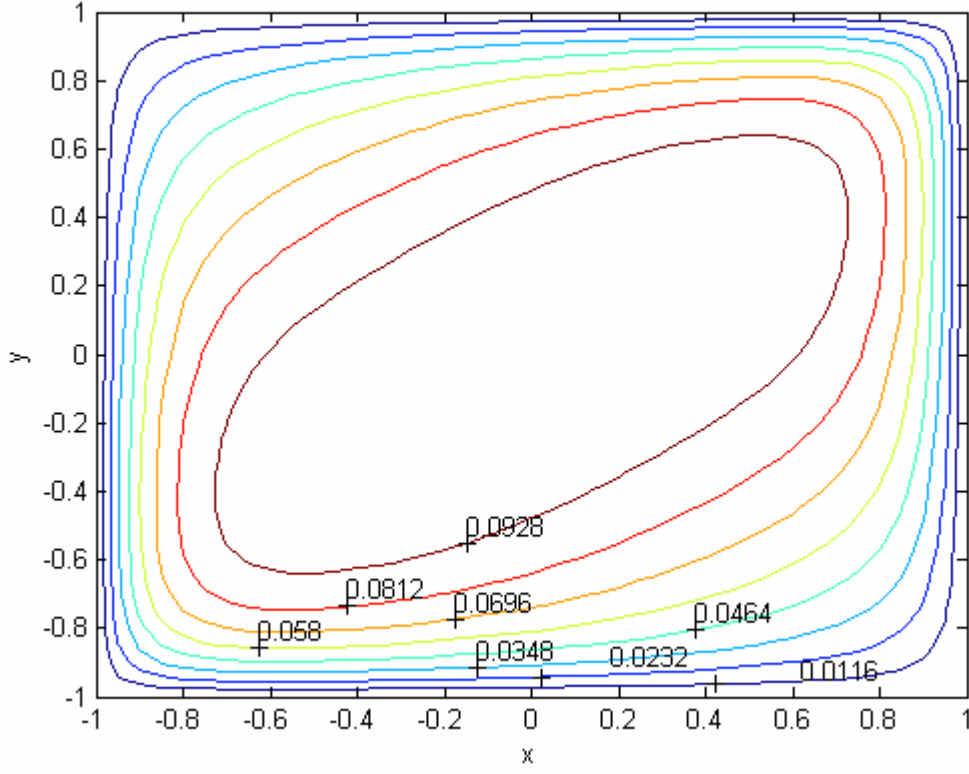
Şekil 4.16 $N=75, M=100, \alpha = \pi/2$ için Manyetik alanın DTM (—) ve Tam çözümlerinin (---) karşılaştırılması,



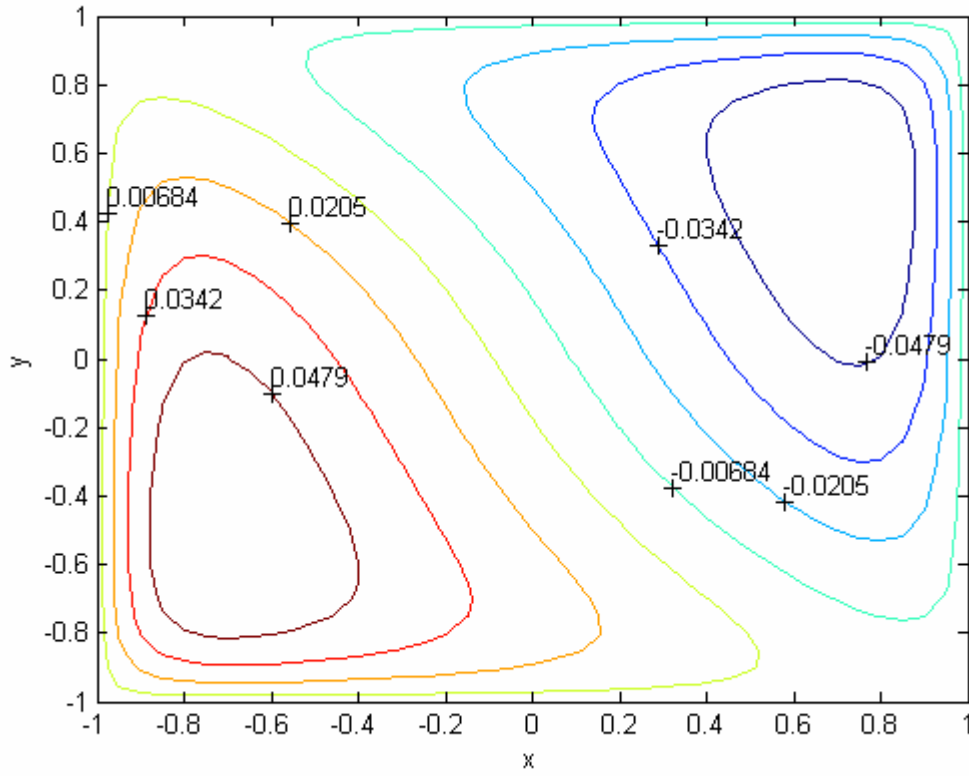
Şekil 4.17 $N=91$, $M=200$, $\alpha = \pi/2$ için Hızın DTM (—) ve Tam çözümlerinin (---) karşılaştırılması



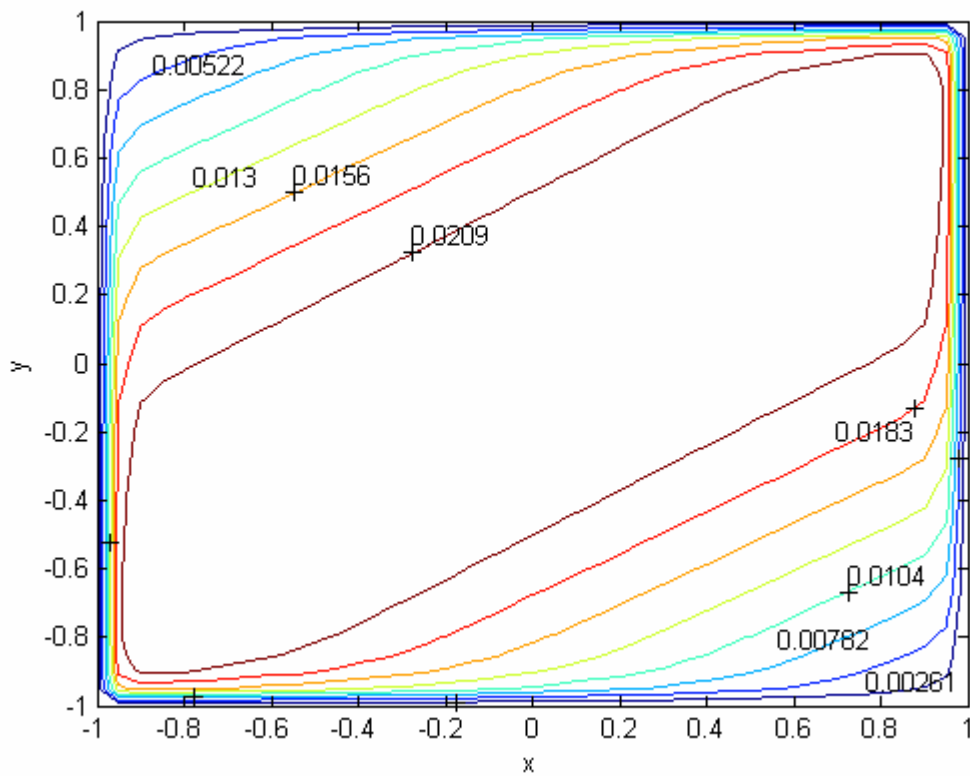
Şekil 4.18 $N=91$, $M=200$, $\alpha = \pi/2$ için Manyetik alanın DTM (—) ve Tam çözümlerinin (---) karşılaştırılması



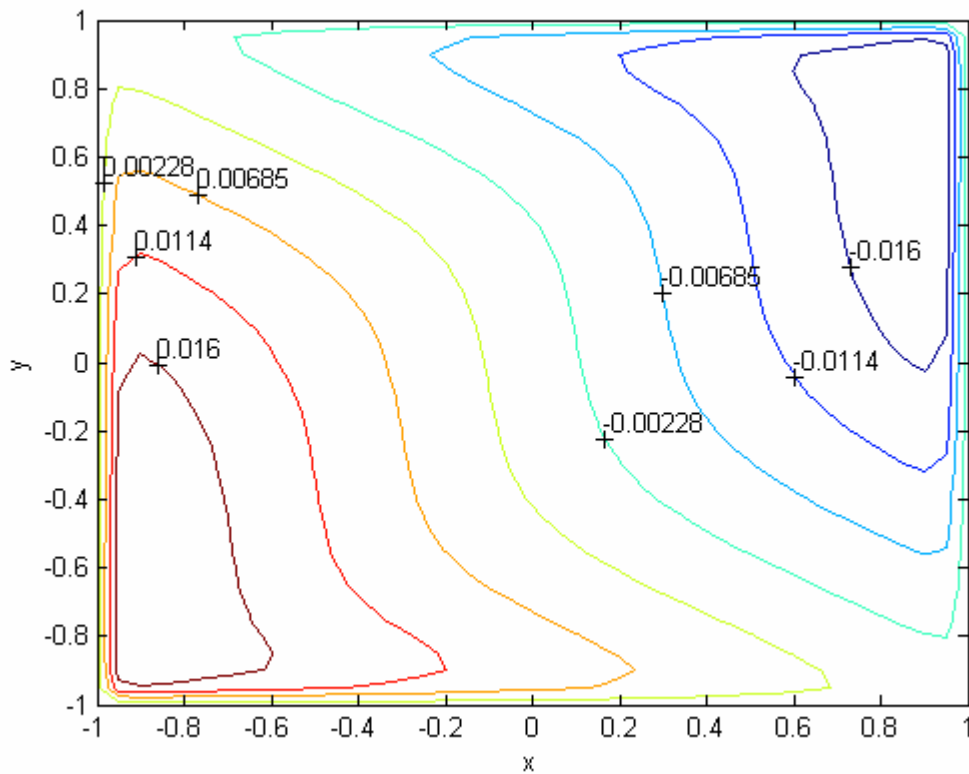
Şekil 4.19 $N=13, M=10, \alpha = \pi/3$ için Hız



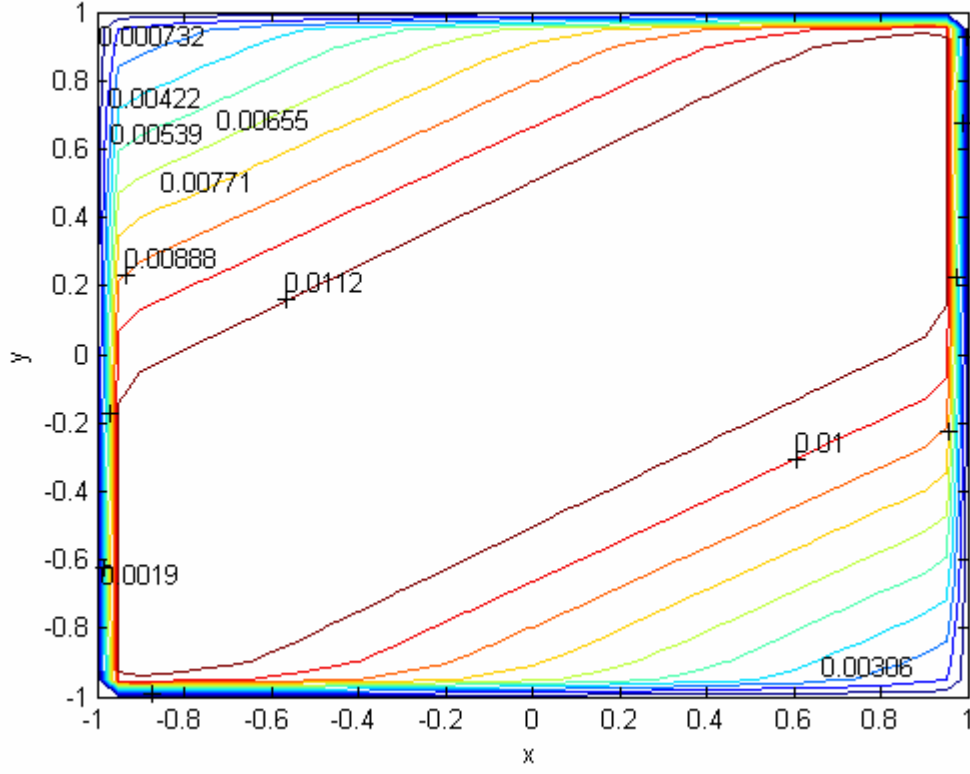
Şekil 4.20 $N=13, M=10, \alpha = \pi/3$ için Manyetik alan



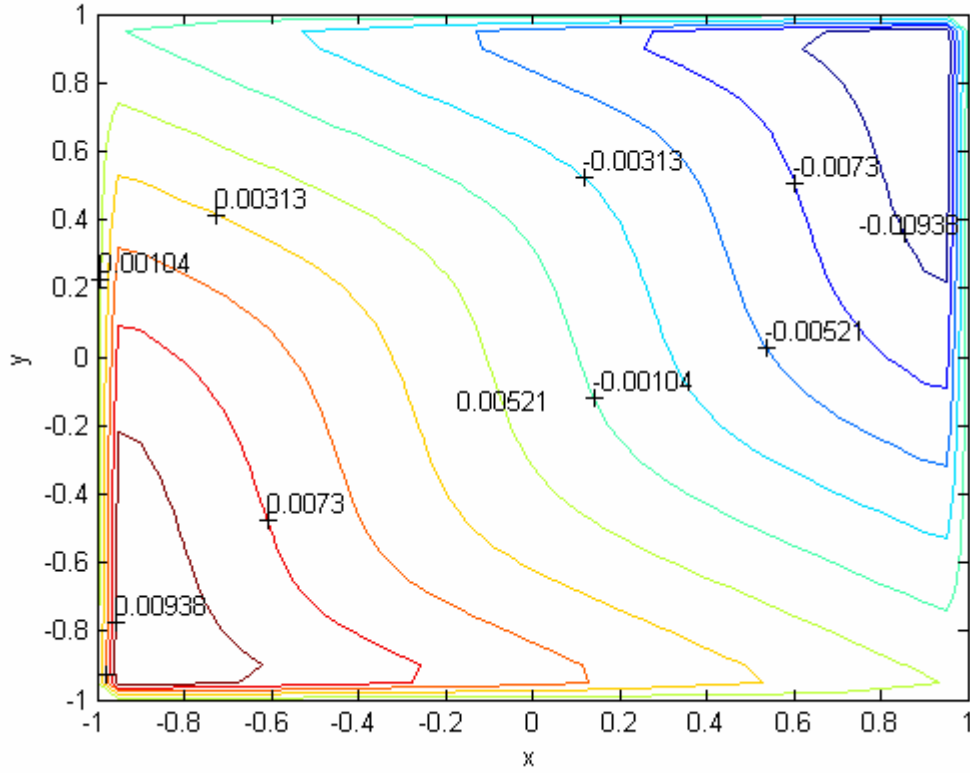
Şekil 4.21 $N=49, M=50, \alpha = \pi/3$ için Hız



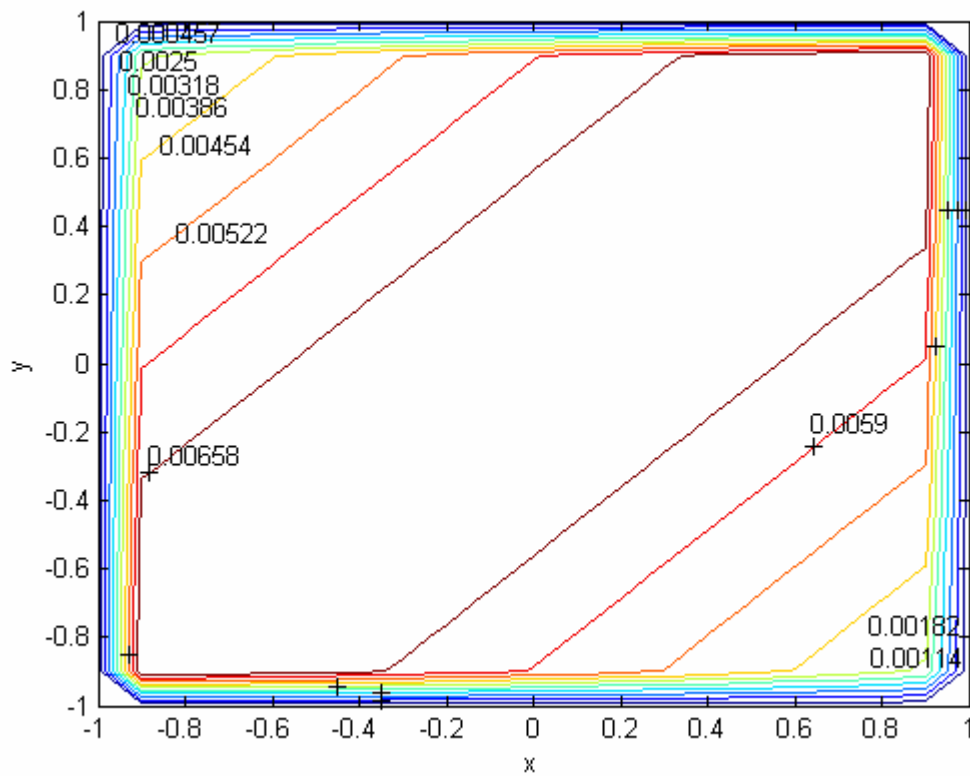
Şekil 4.22 $N=49, M=50, \alpha = \pi/3$ için Manyetik alan



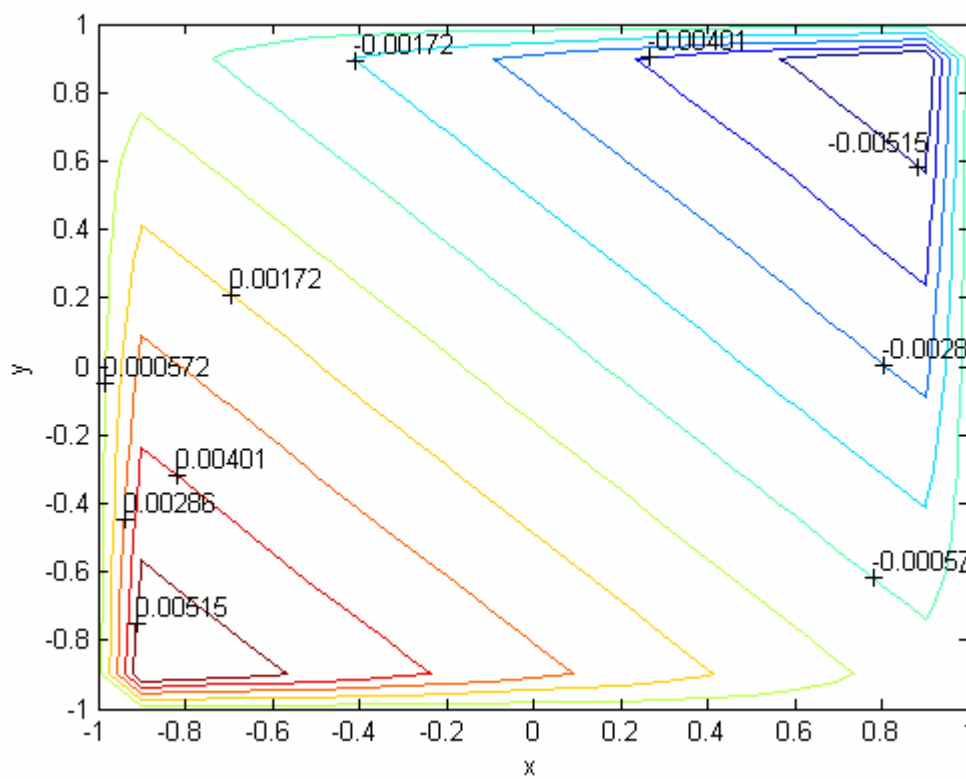
Şekil 4.23 $N=75, M=100, \alpha = \pi/3$ için Hız



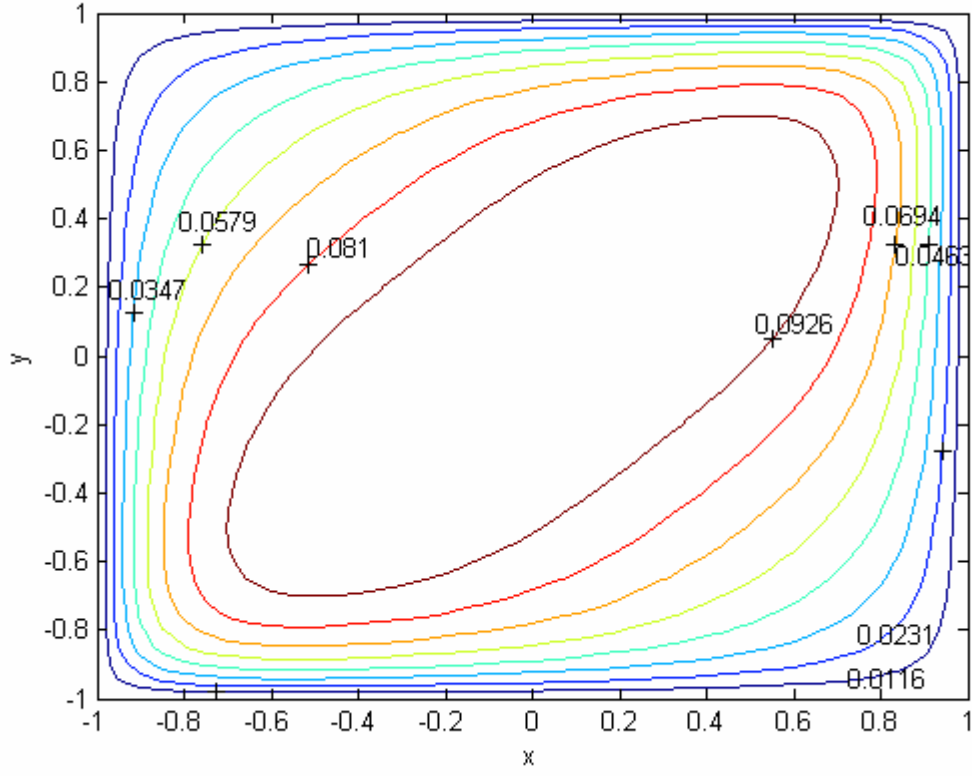
Şekil 4.24 $N=75, M=100, \alpha = \pi/3$ için Manyetik alan



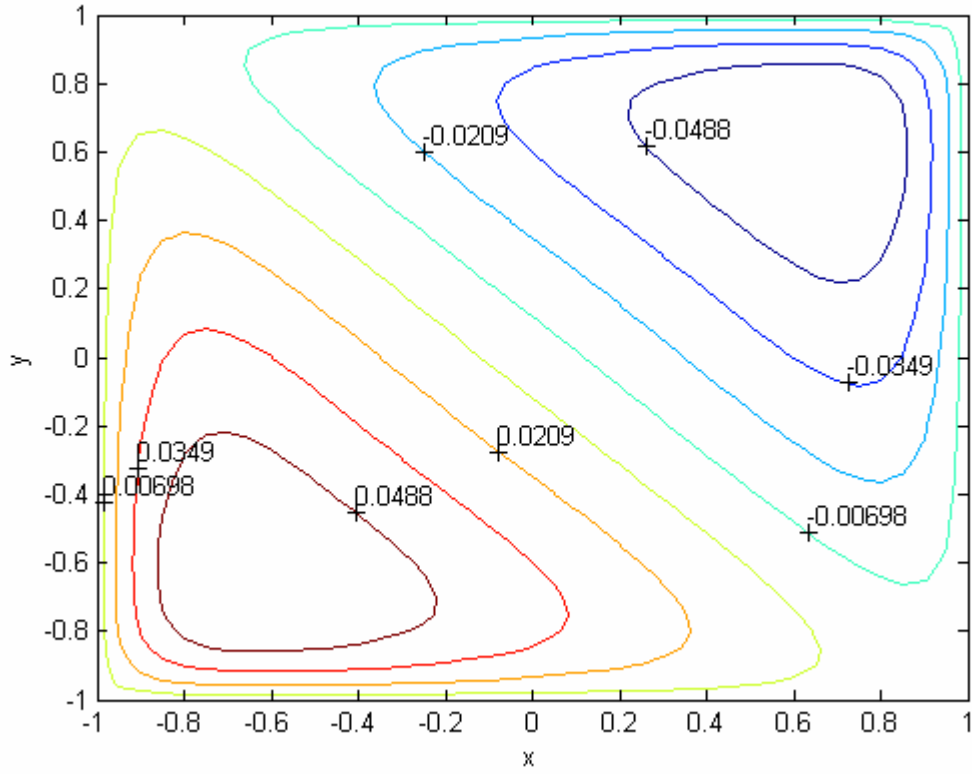
Şekil 4.25 $N=91$, $M=200$, $\alpha = \pi/3$ için Hız



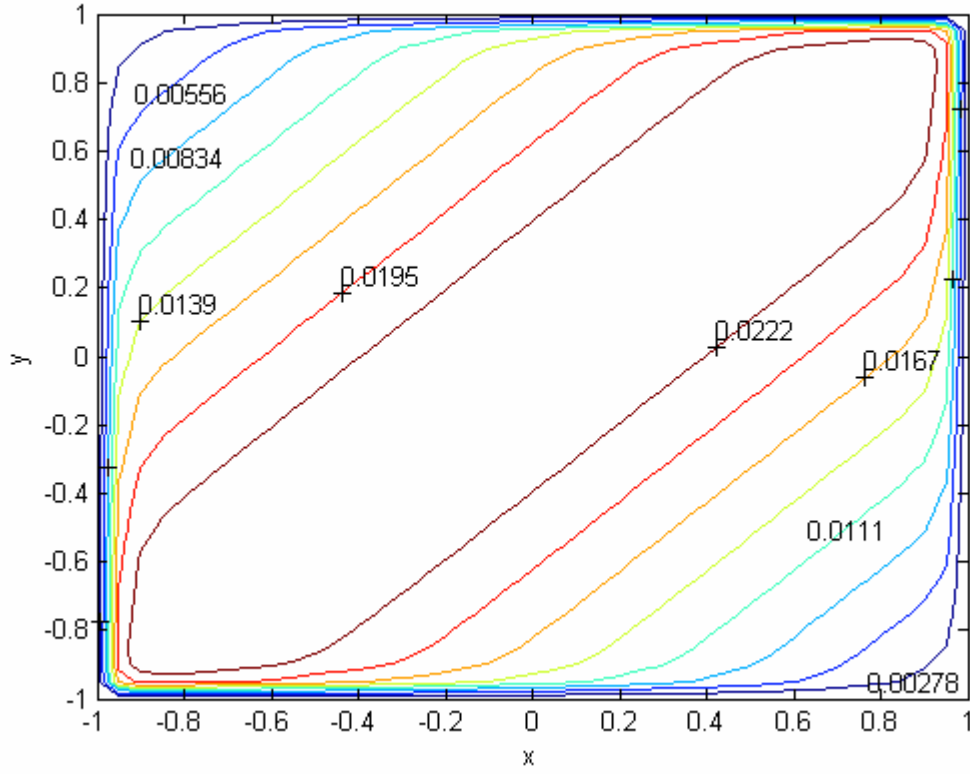
Şekil 4.26 $N=91$, $M=200$, $\alpha = \pi/3$ için Manyetik alan



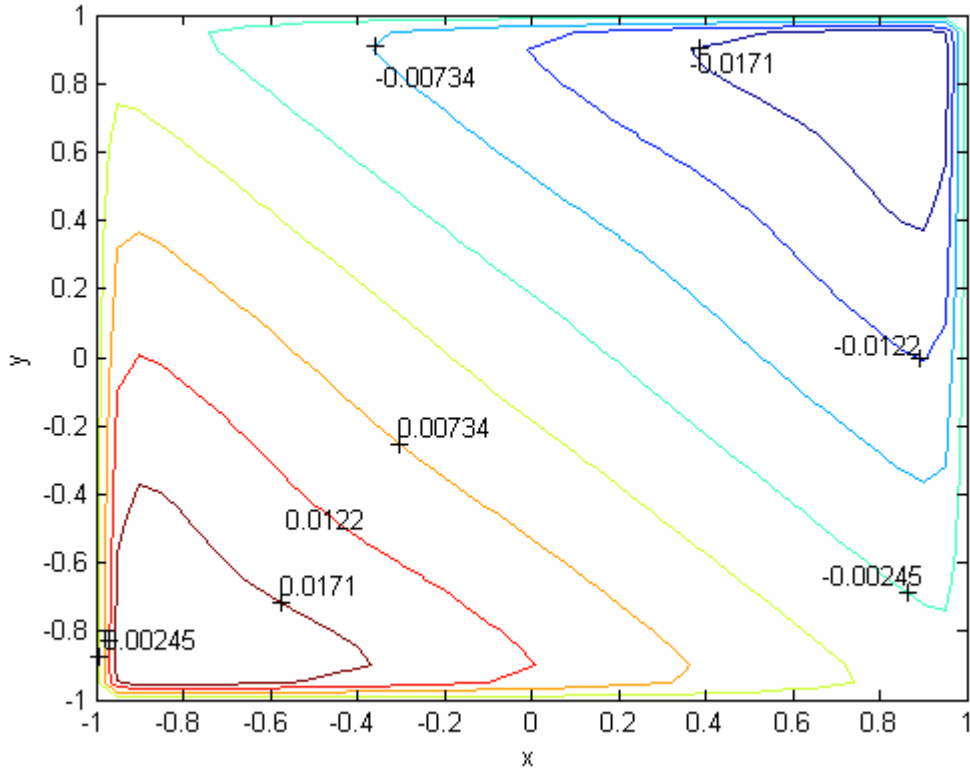
Şekil 4.27 $N=13, M=10, \alpha = \pi/4$ için Hız



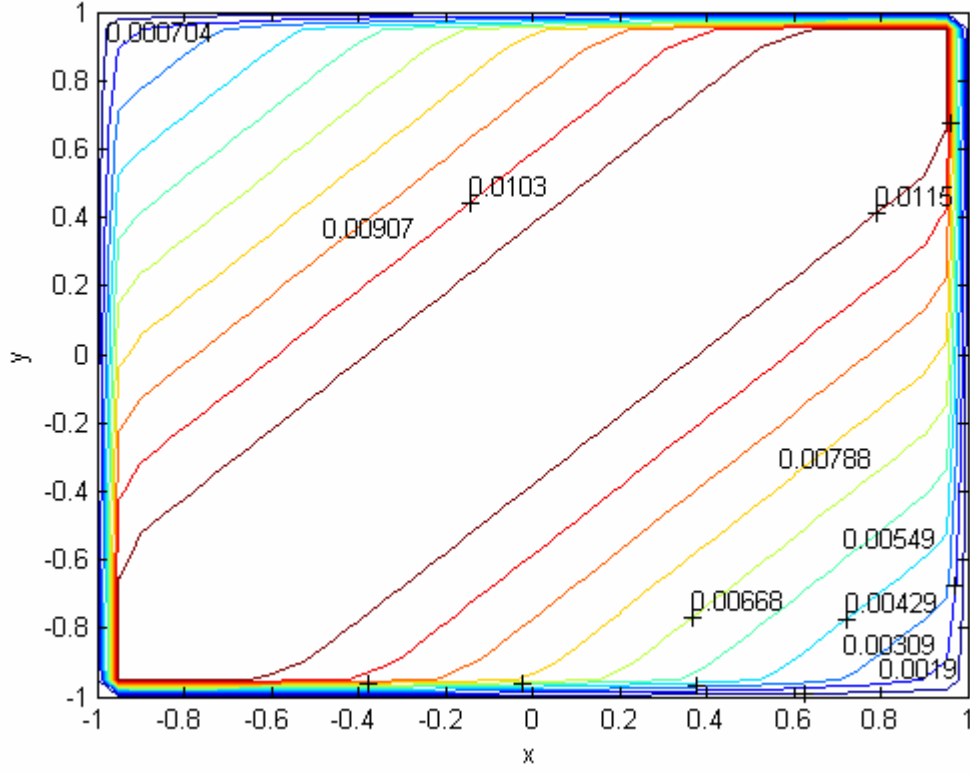
Şekil 4.28 $N=13, M=10, \alpha = \pi/4$ için Manyetik alan



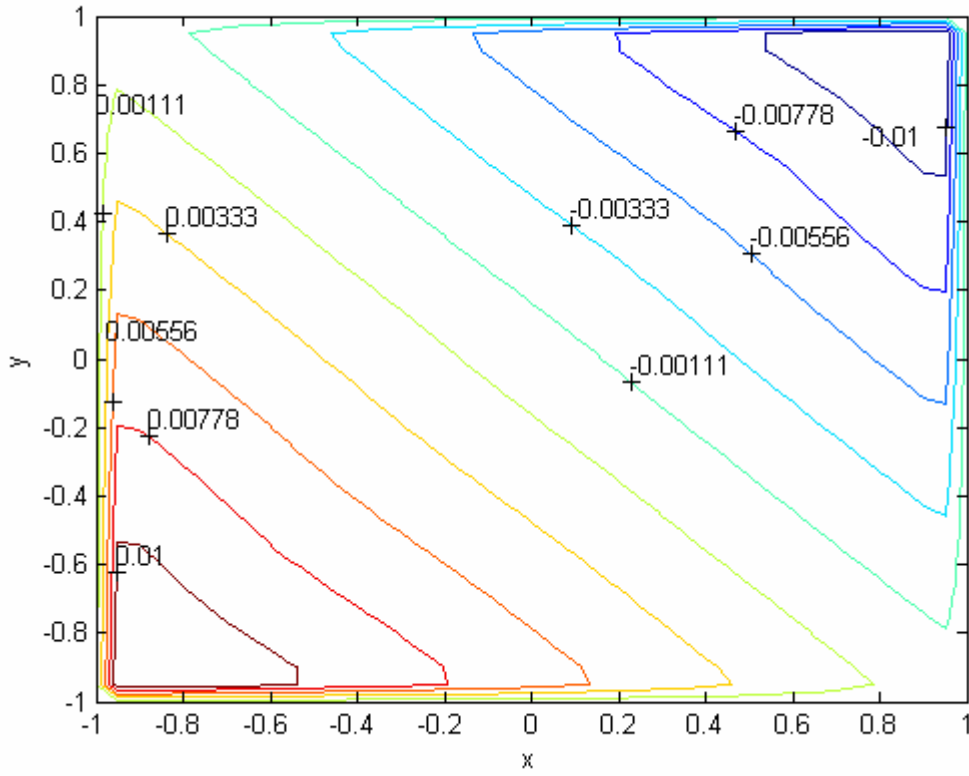
Şekil 4.29 $N=49, M=50, \alpha = \pi/4$ için Hız



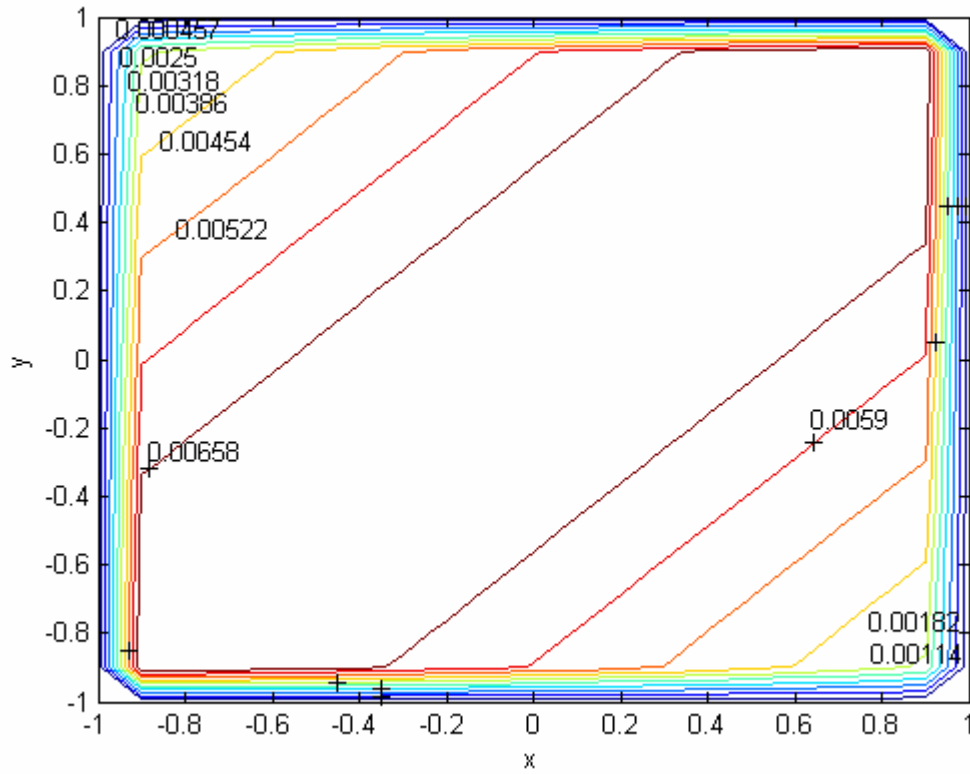
Şekil 4.30 $N=49, M=50, \alpha = \pi/4$ için Manyetik alan



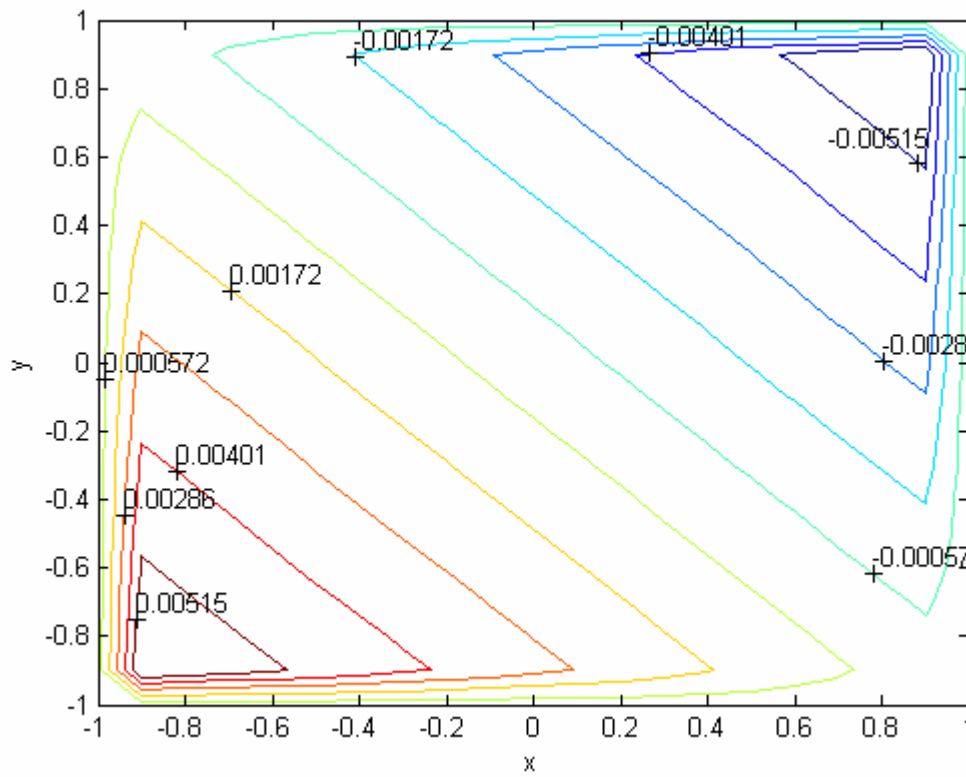
Şekil 4.31 $N=75, M=100, \alpha = \pi/4$ için Hız



Şekil 4.32 $N=75, M=100, \alpha = \pi/4$ için Manyetik alan



Şekil 4.33 $N=91$, $M=200$, $\alpha = \pi/4$ için Hız



Şekil 4.34 $N=91$, $M=200$, $\alpha = \pi/4$ için Manyetik alan

İndüklenen manyetik alan ve hız için dikdörtgen borunun çeperlerine yakın sınır katman formasyonu yüksek Hartmann sayıları için iyi gözlenmiştir. Şekillerden de anlaşılacağı gibi borunun merkezi civarında hız düzenli, akış durgundur. Sınır tabakaları hız ve indüklenen manyetik alanın her ikisi için uygulanan manyetik alan doğrultusundaki köşeler civarında yoğunlaşmıştır.

SONUÇ

Fizik ve Mühendislik gibi uygulamalı bilimlerde karşılaşılan bir çok matematik modelin çözümlerinin araştırılmasında artık analitik yöntemlerden daha ziyade belirli doğrulukta sayısal yöntemler ön plana çıkmaktadır. Çünkü hızlı sonuç veren, kolay algoritması yapılabilen ve hassasiyeti yüksek olan yöntemler hem zamandan hem de maliyetten tasarruf sağlamaktadır. Bu durum özellikle lineer olmayan modellerde daha çok önem taşımaktadır. Lineer olmayan denklemlerin çözümünde karmaşık integrallerle karşılaşılmaktadır. Bu da tam çözüme ulaşılmasını zorlaştırmaktadır.

Hazırlanan bu yüksek lisans tezinde ilk olarak 1986 yılında Adi türevli diferansiyel denklemler için Zhou tarafından ortaya konulan ancak son dönemlere kadar pek de rağbet görmeyen, bununla birlikte algoritmasının kolay oluşu, hızlı ve yüksek hassasiyette çözüme ulaşması ve de çözüm için karmaşık integraller yerine kolay türevler kullanmasından dolayı dikkat çeken bu yöntem, mKdv, Schrödinger, Toda Lattice ve Manyetik hidrodinamik Akı Denklemlerinin çözümü için kullanılmıştır. Ayrıca bu yöntemle çözülmüş olan örnekler ADM ve DQM ile karşılaştırılarak sonuçlar tablolar ve grafiklerle verilmiştir. Ekler bölümünde de Örnek 4.1 ve Örnek 4.4'e ait Matlab 7.5 algoritmaları verilmiştir.

Görüyoruz ki DTM karışık görünen adi, kısmi ve fark diferansiyel denklemleri kolay cebirsel denklemlere dönüştürmektedir. Sonuçların da yakınlığı göz önünde bulundurulursa tercih edilmesi gereken yöntemlerden biridir.

Sonuç olarak benzerlerinden daha etkili ve uygulaması kolay olan diferansiyel dönüşüm metodu günümüzde çokça karşılaşılan birçok problemin çözümüne yardımcı olmaya aday yeni ve oldukça etkili bir yöntemdir. Bu metotla ilgili araştırmaların artması ile birlikte metodun geliştirilip birçok bilim dalında daha etkin kullanılabileceğini söylemek mümkündür.

KAYNAKLAR

- Ablowitz, MJ and Ladic, JF. (1977) On the solution of a class of nonlinear partial difference equations. **Study Applied Mathematics**, 57: 1-12.
- Arikoğlu, A. and Özkol, İ. (2005) Solution of boundary value problems for integro-differential equations by using differential transform method. **Applied and Computation**, 168, 1145-1158.
- Ayaz, F. (2003) On the two dimensional differential transform method. **Applied Mathematics and Computation**, 143, 361-374.
- Ayaz, F. (2004) Solutions of the system of differential equations by differential transform method. **Applied Mathematics and Computation**, 147, 547-567.
- Bildik, N. and Konuralp, A. (2006) The use of variational iteration method, differential transform method and Adomian decomposition method for solving different of nonlinear partial equations. **International Journal of Nonlinear Sciences and Numerical Simulation**, 7, 65-70.
- Chen, C. K. and Ho, S. H. (1996) Application of differential transformation to eigenvalue problems. **Applied Mathematics and Computation**, 79, 179-188.
- Chen, C. L. and Liu, Y. C. (1998) Differential transformation technique for steady nonlinear heat conduction problems. **Applied Mathematics and Computation**, 95, 155-164.
- Chen, C. K. and Ho, S. H. (1999) Solving partial differential equations by two dimensional differential transform method. **Applied Mathematics and Computation**, 106, 171-179.
- Chen, C. K. and Ho, S. H. (1999) Transverse vibration of a rotating twisted Timoshenko beams under axial loading using differential transform. **International Journal of Mechanical Science**, 41-42, 1339-1356.
- Chen, C. K. and Chen, S. S. (2004) Application of the differential transformation method to a non-linear conservative system. **Applied Mathematics and Computation**, 154, 431-441.
- Chen, C. K. and Ju, S.P. (2004) Application of differential transformation to transient advective-dispersive transport equation. **Applied Mathematics and Computation**, 155, 25-38.

- Dai, C. Q and Zhang, J. F. (2006) Jacobian elliptic function method for nonlinear differential-difference equations. **Chaos Solution Fract**, 27: 1042-7.
- Ertürk, V. S. , Momani, S. and Odibat Z. (2008) Application of generalized differential transform method to multi-order fractional differential equations. **Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation**, 1642-1654.
- Hassan, A. H. and I. H. (2002) On solving some eigenvalue problems by using a differential transformation. **Applied Mathematics and Computation**, 127: 1-22.
- Hassan, A. H. and I. H. (2002) Different applications for the differential transformation in the differential equations. **Applied Mathematics and Computation**, 129, 183-201.
- Jang, M. J. and Chen, C. L. (1997) Analysis of the response of a strongly nonlinear damped system using a differential transform method. **Applied Mathematics and Computation**, 88, 137-151.
- Jang, M. J. , Chen, C. L. and Liu, Y. C. (2000) On solving the initial-value problems using the differential transformation method. **Applied Mathematics and Computation**, 115, 145-160.
- Jang, M. J. , Wang, J-S. and Liu, Y. C. (2003) Applying differential transform method to parameter identification problems. **Applied Mathematics and Computation**, 139, 2-3, 491-502.
- Kurnaz, A. and Oturanç, G. (2005) The differential transform approximation for the system of ordinary differential equation. **International Journal of Computer Mathematics**, 82, 709-719.
- Kurnaz, A. , Oturanç, G. Kiriş and M. E. (2005) 'n dimensional differential transformation method for solving PDE's. **International Journal of Computer Mathematics**, 82, 3, 369-380.
- Özkan, O. and Keskin, Y. (2005) An application of the differential transform method to boundary value problems of the system of integro differential equations. **Selçuk Journal of Applied Mathematics**, 6, 43-53.
- Singh, B. and Lal, J. (1978) MHD axial flow in a triangular pipe under traverse magnetic field. **Ind. J. Pure. Applied Mathematics**, 9, 101-115.
- Suris and Yu B. (1997) New integrable systems related to relativistic Toda lattice. **J. Phys A: Math Gen**, 30: 2235-49.
- Tezer and M. Sezgin. (2004) BEM solution of MHD flow in a rectangular duct by differential quadrature method. **Computers & Fuilds**, 33, 533-547.
- Wu, L. , Xie, J. and Zhang (2007) Adomian decomposition method for nonlinear differential-difference equations. **Science Direct**.

ÖZGEÇMİŞ

Duygu Eskin, 1983 yılında Nazilli’de doğdu. İlk, orta ve lise eğitimini Nazilli’de tamamladı. Lisans eğitimini Balıkesir Necatibey Eğitim Fakültesi Ortaöğretim Matematik Öğretmenliği Bölümünde tamamladı. 2006 yılında Nazilli Sınav Dergisi Dershanesinde göreve başladı. 2006 yılında Pamukkale Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü’nde yüksek lisansa başladı. 2008 de evlilik nedeniyle Balıkesir’in Bigadiç ilçesinde Merkez ABC Dergisi Dershanesinde görevine devam etti. Halen aynı yerde görevine devam etmektedir.

Ek1: Örnek 4.1'in Matlab 7.5 programı için çözüm algoritması

```

clc
clear all
syms k n t al
format long
s=0
k=0.1
t=0.5
al=1
h=figure
for n=-25:1:25

u0n=tanh(k)*tanh(k*n)
u0na1=tanh(k)*tanh(k*(n+1))

u0na2=tanh(k)*tanh(k*(n+2))
u0na3=tanh(k)*tanh(k*(n+3))
u0na4=tanh(k)*tanh(k*(n+4))
u0na5=tanh(k)*tanh(k*(n+5))
u0na6=tanh(k)*tanh(k*(n+6))

u0ne1=tanh(k)*tanh(k*(n-1))
u0ne2=tanh(k)*tanh(k*(n-2))
u0ne3=tanh(k)*tanh(k*(n-3))
u0ne4=tanh(k)*tanh(k*(n-4))
u0ne5=tanh(k)*tanh(k*(n-5))
u0ne6=tanh(k)*tanh(k*(n-6))

u1n=(u0na1-u0ne1)*(al-u0n^2)
u1na1=(u0na2-u0n)*(al-u0na1^2)
u1na2=(u0na3-u0na1)*(al-u0na2^2)
u1na3=(u0na4-u0na2)*(al-u0na3^2)
u1na4=(u0na5-u0na3)*(al-u0na4^2)
u1na5=(u0na6-u0na4)*(al-u0na5^2)

u1ne1=(u0n-u0ne2)*(al-u0ne1^2)
u1ne2=(u0ne1-u0ne3)*(al-u0ne2^2)
u1ne3=(u0ne2-u0ne4)*(al-u0ne3^2)
u1ne4=(u0ne3-u0ne5)*(al-u0ne4^2)
u1ne5=(u0ne4-u0ne6)*(al-u0ne5^2)

u2n=(1/2)*((u1na1-u1ne1)*(al-u0n^2)-2*u0n*u1n*(u0na1-u0ne1))
u2na1=(1/2)*((u1na2-u1n)*(al-u0na1^2)-2*u0na1*u1na1*(u0na2-u0n))
u2na2=(1/2)*((u1na3-u1na1)*(al-u0na2^2)-2*u0na2*u1na2*(u0na3-u0na1))
u2na3=(1/2)*((u1na4-u1na2)*(al-u0na3^2)-2*u0na3*u1na3*(u0na4-u0na2))
u2na4=(1/2)*((u1na5-u1na3)*(al-u0na4^2)-2*u0na4*u1na4*(u0na5-u0na3))

u2ne1=(1/2)*((u1n-u1ne2)*(al-u0ne1^2)-2*u0ne1*u1ne1*(u0n-u0ne2))
u2ne2=(1/2)*((u1ne1-u1ne3)*(al-u0ne2^2)-2*u0ne2*u1ne2*(u0ne1-u0ne3))
u2ne3=(1/2)*((u1ne2-u1ne4)*(al-u0ne3^2)-2*u0ne3*u1ne3*(u0ne2-u0ne4))
u2ne4=(1/2)*((u1ne3-u1ne5)*(al-u0ne4^2)-2*u0ne4*u1ne4*(u0ne3-u0ne5))

```

```

u3n=(1/3)*((u2na1-u2ne1)*(al-u0n^2)-2*u0n*u1n*(u1na1-u1ne1)-
(2*u0n*u2n+u1n^2)*(u0na1-u0ne1))
u3na1=(1/3)*((u2na2-u2n)*(al-u0na1^2)-2*u0na1*u1na1*(u1na2-u1n)-
(2*u0na1*u2na1+u1na1^2)*(u0na2-u0n))
u3na2=(1/3)*((u2na3-u2na1)*(al-u0na2^2)-2*u0na2*u1na2*(u1na3-u1na1)-
(2*u0na2*u2na2+u1na2^2)*(u0na3-u0na1))
u3na3=(1/3)*((u2na4-u2na2)*(al-u0na3^2)-2*u0na3*u1na3*(u1na4-u1na2)-
(2*u0na3*u2na3+u1na3^2)*(u0na4-u0na2))

u3ne1=(1/3)*((u2n-u2ne2)*(al-u0ne1^2)-2*u0ne1*u1ne1*(u1n-u1ne2)-
(2*u0ne1*u2ne1+u1ne1^2)*(u0n-u0ne2))
u3ne2=(1/3)*((u2ne1-u2ne3)*(al-u0ne2^2)-2*u0ne2*u1ne2*(u1ne1-u1ne3)-
(2*u0ne2*u2ne2+u1ne2^2)*(u0ne1-u0ne3))
u3ne3=(1/3)*((u2ne2-u2ne4)*(al-u0ne3^2)-2*u0ne3*u1ne3*(u1ne2-u1ne4)-
(2*u0ne3*u2ne3+u1ne3^2)*(u0ne2-u0ne4))

u4n=(1/4)*((u3na1-u3ne1)*(al-u0n^2)-2*u0n*u1n*(u2na1-u2ne1)-
(2*u0n*u2n+u1n^2)*(u1na1-u1ne1)-(2*u0n*u3n+2*u1n*u2n)*(u0na1-u0ne1))
u4na1=(1/4)*((u3na2-u3n)*(al-u0na1^2)-2*u0na1*u1na1*(u2na2-u2n)-
(2*u0na1*u2na1+u1na1^2)*(u1na2-u1n)-
(2*u0na1*u3na1+2*u1na1*u2na1)*(u0na2-u0n))
u4na2=(1/4)*((u3na3-u3na1)*(al-u0na2^2)-2*u0na2*u1na2*(u2na3-u2na1)-
(2*u0na2*u2na2+u1na2^2)*(u1na3-u1na1)-
(2*u0na2*u3na2+2*u1na2*u2na2)*(u0na3-u0na1))

u4ne1=(1/4)*((u3n-u3ne2)*(al-u0ne1^2)-2*u0ne1*u1ne1*(u2n-u2ne2)-
(2*u0ne1*u2ne1+u1ne1^2)*(u1n-u1ne2)-(2*u0ne1*u3na1*u1ne1*u2ne1)*(u0n-
u0ne2))
u4ne2=(1/4)*((u3ne1-u3ne3)*(al-u0ne2^2)-2*u0ne2*u1ne2*(u2ne1-u2ne3)-
(2*u0ne2*u2ne2+u1ne2^2)*(u1ne1-u1ne3)-(2*u0ne2*u3n*u1ne2*u2ne2)*(u0ne1-
u0ne3))

u5n=(1/5)*((u4na1-u4ne1)*(al-u0n^2)-2*u0n*u1n*(u3na1-u3ne1)-
(2*u0n*u2n+u1n^2)*(u2na1-u2ne1)-(2*u0n*u3n+2*u1n*u2n)*(u1na1-u1ne1)-
(2*u0n*u4n+2*u1n*u3n+u2n^2)*(u0na1-u0ne1))
u5na1=(1/5)*((u4na2-u4n)*(al-u0na1^2)-2*u0na1*u1na1*(u3na2-u3n)-
(2*u0na1*u2na1+u1na1^2)*(u2na2-u2n)-
(2*u0na1*u3na1+2*u1na1*u2na1)*(u1na2-u1n)-
(2*u0na1*u4na1+2*u1na1*u3na1+u2na1^2)*(u0na2-u0n))
u5ne1=(1/5)*((u4n-u4ne2)*(al-u0ne1^2)-2*u0ne1*u1ne1*(u3n-u3ne2)-
(2*u0ne1*u2ne1+u1ne1^2)*(u2n-u2ne2)-(2*u0ne1*u3ne1+2*u1ne1*u2ne1)*(u1n-
u1ne2)-(2*u0ne1*u4ne1+2*u1ne1*u3ne1+u2ne1^2)*(u0n-u0ne2))

u6n=(1/6)*((u5na1-u5ne1)*(al-u0n^2)-2*u0n*u1n*(u4na1-u4ne1)-(2*u0n*u2n-
u1n^2)*(u3na1-u3ne1)-(2*u0n*u3n+2*u1n*u2n)*(u2na1-u2ne1)-
(2*u0n*u4n+2*u1n*u3n+u2n^2)*(u1na1-u1ne1)-
(2*u0n*u5n+2*u1n*u4n+2*u2n*u3n)*(u0na1-u0ne1))
s=s+1
u(s,1)=u0n+u1n*t+u2n*t^2+u3n*t^3+u4n*t^4+u5n*t^5+u6n*t^6;

ut(s,1)=tanh(k)*tanh(k*n+2*tanh(k)*t);
end

```

```
n=-25:1:25;  
figure  
plot(n,u,'--rs','MarkerSize',5)  
hold on  
plot(n,ut)  
xlabel('n');  
ylabel('u');  
legend('yaklaşık Çözüm','tam çözüm')
```


Ek2 Örnek 4.4'ün Matlab 7.5 programı için çözüm algoritması

```

clear all
Digits= 40
format long
N=92
al=(pi)/2
m=300
M=zeros(N);
for i=1:N
for j=1:N
if (i==j)&(j~=N)
M(i,j+1)=j;
end
end
end
M;
M2=M*M;
I=eye(N);
X=zeros(N^2+2*N,N^2);
for i=1:N
i
for L=1:N
for j=1:N
for k=1:N
X((i-1)*N+L,(j-
1)*N+k)=M2(i,j)*I(k,L)+I(i,j)*M2(L,k)+m*sin(al)*M(i,j)*I(k,L)+m*cos(al)*I(i,j)*
M(L,k);
if mod((i-1)*N+L,N)==0
X((i-1)*N+L,(j-1)*N+k)=0;
X((i-1)*N+L-1,(j-1)*N+k)=0;
end
end
end
end
end
end
B=zeros(N^2+2*N,1);
for i=1:N*N+2*N-1
if (i==1)
B(i,1)=-1;
else B(i,1)=0;
end
end
BCX=zeros(N,1);
BCY=zeros(N,1);
for i=1:N
for j=1:N
BCX(i,1)=(-1)^(i-1);
BCY(i,1)=1;
end

```

```

end
for l=1:N
for j=1:N
for k=1:N
s1=k;
s2=(j-1)*N+1;
X(N^2-2*N-1+s1,s2)=BCX(j,1)*I(k,1);
X(N^2-N-1+s1,s2)=BCY(j,1)*I(k,1);
X(N^2-1+s1,s2)=BCX(l,1)*I(k,j);
X(N^2+N-1+s1,s2)=BCY(l,1)*I(k,j);
end
end
end
m
T1=X\B;
clear X
X1=zeros(N^2+2*N,N^2);
for i=1:N
i
for L=1:N
for j=1:N
for k=1:N
X1((i-1)*N+L,(j-1)*N+k)=M2(i,j)*I(k,L)+I(i,j)*M2(L,k)-m*sin(al)*M(i,j)*I(k,L)-
m*cos(al)*I(i,j)*M(L,k);
if mod((i-1)*N+L,N)==0
X1((i-1)*N+L,(j-1)*N+k)=0;
X1((i-1)*N+L-1,(j-1)*N+k)=0;
end
end
end
end
end
clear M M2
for l=1:N
for j=1:N
for k=1:N
s1=k;
s2=(j-1)*N+1;
X1(N^2-2*N-1+s1,s2)=BCX(j,1)*I(k,1);
X1(N^2-N-1+s1,s2)=BCY(j,1)*I(k,1);
X1(N^2-1+s1,s2)=BCX(l,1)*I(k,j);
X1(N^2+N-1+s1,s2)=BCY(l,1)*I(k,j);
end
end
end
m
T2=X1\B;
clear X1
syms x y n
T=(T1+T2)/2;

```

```

T3=(T1-T2)/2;
for i=1:N
for j=1:N
XY(((i-1)*N+j))=x^(i-1)*y^(j-1);
end
end
U=XY*T;
V=XY*T3;

m
r11=-1/2*m+1/2*(m^2+pi^2+4*pi^2*n^2+4*pi^2*n)^(1/2);
r12=-1/2*m-1/2*(m^2+pi^2+4*pi^2*n^2+4*pi^2*n)^(1/2);
r21=1/2*m+1/2*(m^2+pi^2+4*pi^2*n^2+4*pi^2*n)^(1/2);
r22=1/2*m-1/2*(m^2+pi^2+4*pi^2*n^2+4*pi^2*n)^(1/2);
Top1=0;
Top2=0;
for n=0:1:N;
Top1=Top1+eval((-1)^n/(2*n+1)^3*(1+(exp(r11*x)*sinh(r12)-
exp(r12*x)*sinh(r11))/sinh(r11-r12)+(1+(exp(r21*x)*sinh(r22)-
exp(r22*x)*sinh(r21))/sinh(r21-r22)))*cos((2*n+1)*pi*y/2));
Top2=Top2+eval((-1)^n/(2*n+1)^3*(1+(exp(r11*x)*sinh(r12)-
exp(r12*x)*sinh(r11))/sinh(r11-r12)-(1+(exp(r21*x)*sinh(r22)-
exp(r22*x)*sinh(r21))/sinh(r21-r22)))*cos((2*n+1)*pi*y/2));

end
v1=16/pi^3*Top1/2
b1=16/pi^3*Top2/2
Z=zeros(41,41);
Z1=zeros(41,41);
ZT=zeros(41,41);
ZT1=zeros(41,41);
for i=1:1:41
i
x=-1+0.05*(i-1);
for j=1:1:41;
y=-1+0.05*(j-1);
Z(i,j)=eval(U);
Z1(i,j)=eval(V);
ZT(i,j)=eval(v1);
ZT1(i,j)=eval(b1);
end
end
[ty tx]=meshgrid(-1:.05:1,-1:.05:1);
figure
surf(tx,ty,Z);
figure
surf(tx,ty,Z1);
figure
c1=contour(tx,ty,Z,10);
clabel(c1)

```

```
figure
c1=contour(tx,ty,Z,10);
clabel(c1)
hold on
c2=contour(tx,ty,ZT,10,'-.');
set(gcf,'renderer','zbuffer');
figure
c1=contour(tx,ty,Z1,10);
clabel(c1)
figure
c1=contour(tx,ty,Z1,10);
clabel(c1)
hold on
c2=contour(tx,ty,ZT1,10,'-.');
set(gcf,'renderer','zbuffer');
```