bv^p, BK UZAYLARI VE MATRİS DÖNÜŞÜMLERİ ÜZERİNE

Pamukkale Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Yüksek Lisans Tezi
Matematik Anabilim Dalı

Ebru MUTLU

Danışman: Prof. Dr. Mehmet Ali SARIGÖL

Temmuz 2009
DENİZLİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ ONAY FORMU

Ebru MUTLU tarafından Prof. Dr. Mehmet Ali SARIGÖL yönetiminde hazırlanan "bv^p, BK Uzayları ve Matris Dönüşümleri Üzerine" başlıklı tez tarafımızdan okunmuş, kapsamı ve niteliği açısından bir Yüksek Lisans Tezi olarak kabul edilmiştir.

Prof. Dr. Sadulla JAFAROV
Jüri Başkanı

Prof. Dr. Mehmet Ali SARIGÖL
Jüri Üyesi (Danışman)

Doç.Dr.MuzaffeADAK
Jüri Üyesi

Pamukkale Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun …./…./2009 tarih ve …….. sayılı kararıyla onaylanmıştır.

Prof. Dr. Halil Karahan
Müdür

Bu tezin tasarımı, hazırlanması, yürütülmesi, araştırılmalarının yapılması ve bulgularının analizlerinde bilimsel etiğe ve akademik kurallara özenle riayet edildiğini; bu çalışmanın doğrudan birincil ürünü olmayan bulguların, verilerin ve materyallerin bilimsel etiğe uygun olarak kaynak gösterildiğini ve alıntı yapılan çalışmalara atfedildiğini beyan ederim.

İmza :

Öğrenci Adı Soyadı : Ebru MUTLU

TEŞEKKÜR

Yüksek lisans öğrenimim ve tez çalışmalarım boyunca gösterdiği sabır, her türlü destek ve yardımdan dolayı çok değerli sayın hocam Prof. Dr. Mehmet Ali SARIGÖL'e en içten dileklerimle teşekkür ederim.

Ayrıca bu çalışmanın yapılması sırasında, değerli olduğunu bildiğim vaktini benim için ayıran kıymetli dostum Arş. Gör. Dr. Özlem GİRGİN ATLIHAN' a, desteğini hiç eksik etmeyen sevgili eşim Yrd. Doç.Dr. Özcan MUTLU' ya, biricik oğlum Onur MUTLU ve aileme teşekkür ederim.

ÖZET

$\mathbf{bv^p}$, BK UZAYLARI VE MATRİS DÖNÜŞÜMLERİ ÜZERİNE

MutluU Ebru
Yüksek Lisans Tezi, Matematik ABD
Tez Yöneticisi: Prof. Dr. Mehmet Ali SARIGÖL

Temmuz 2009, 41 Sayfa

Üç bölümden oluşan bu tezde, $\mathbf{bv^p}$ uzayları ile bazı BK- uzayları arasındaki matris dönüşümleri ile kompakt operatörler incelenmiştir.

Birinci bölümde sonraki bölümler dikkate alınarak bazı temel kavram ve teoremler ifade edilmiştir.

İkinci bölümde $\left(\mathbf{bv^p}\right)^\beta$ duali, $\left(\mathbf{bv^p},\ell_\infty\right),\left(\mathbf{bv^p},\mathbf{c}\right),\left(\mathbf{bv^p},\mathbf{c}_0\right),\left(\mathbf{bv^p},\ell_1\right)$ ve $\left(\mathbf{bv^p},\mathbf{bv}\right)$ matris sınıflarını karakterize eden Malkowsky, Rakočević ve Žıvković (2002) tarafından yapılan teoremlerinin ispatları verilmiştir.

Üçüncü bölümde çokça faydalandığımız Hausdorff kompaktsızlık ölçüsünün temel teoremleri ile bir sonsuz matrisin $\mathbf{bv^p}$ uzayları ile bazı BK- uzayları arasında kompakt operatör olmasını karakterize eden teoremlerin ispatları detaylı olarak verilmiştir.

Anahtar Kelimeler: $\mathbf{bv^p}$ uzayı, FK uzayı, BK uzayı, AK uzayı, Hausdorff kompaktsızlık ölçüsü, matris dönüşümleri

Prof. Dr. Mehmet Ali SARIGÖL
Prof. Dr. Sadulla JAFAROV
Doç. Dr. Muzaffer ADAK

ABSTRACT

On $\mathbf{bv^p}$, BK Spaces and Matrix Transformations

Mutlu Ebru
M. Sc. Thesis in Mathematics
Supervisor: Prof. Dr. Mehmet Ali SARIGÖL

July 2009, 41 Pages

In this thesis consisting of three chapters, the matrices and compact operators between the spaces $\mathbf{bv^p}$ and BK- spaces are studied.

In the first chapter, by considering subsequent chapters, some basic concepts and theorems are stated.

In the second chapter, the proofs of theorems of Malkowsky, Rakočević and Živković (2002) characterizing $\left(\mathbf{bv^p}\right)^{\beta}$-duals and classes matrices, $\left(\mathbf{bv^p}, \ell_\infty\right), \left(\mathbf{bv^p}, \mathbf{c}\right), \left(\mathbf{bv^p}, \mathbf{c}_0\right), \left(\mathbf{bv^p}, \ell_1\right)$ and $\left(\mathbf{bv^p}, \mathbf{bv}\right)$ are given.

In the third chapter, with theorems that we make use of so much, stating the basic properties of Hausdorff measure of noncompactness, the theorems characterizing an infine matrix to be compact operator between the spaces $\mathbf{bv^p}$ and some BK- spaces, are given in detail.

Keywords: $\mathbf{bv^p}$ space, FK space, BK space, AK space, Hausdorff measure of noncompactness, matrix transformations

Prof. Dr. Mehmet Ali SARIGÖL
Prof. Dr. Sadulla JAFAROV
Assoc. Prof. Dr. Muzaffer ADAK

İÇİNDEKİLER

Sayfa

1 TEMEL TANIM VE TEOREMLER

Bu bölümde daha sonraki bölümlerde kullanacağımız temel tanım ve teoremler verilmiştir.

1.1. Temel Tanım ve Teoremler

Tanım 1.1.1 (Bazı gösterim ve diziler) **:**

ω : Reel veya kompleks terimli bütün dizilerin kümesi

ϕ : $\phi \subset \omega$ olacak şekilde sonlu dizilerin kümesi

c_0 : $c_0 = \left\{ x = (x_n) \in \omega : \lim\limits_n x_n = 0 \right\}$

c : $c = \left\{ x = (x_n) \in \omega : \lim\limits_n x_n \text{ mevcut} \right\}$

ℓ_∞ : $\ell_\infty = \left\{ x = (x_n) \in \omega : \sup\limits_n |x_n| < \infty \right\}$

c_s : Reel veya kompleks terimli yakınsak serilerin kümesi, yani;

$$c_s = \left\{ x = (x_n) \in \omega : \left(\sum_{k=0}^{n} x_k \right) \in c \right\}$$

b_s : Kısmi toplamlar dizisi sınırlı olan reel veya kompleks terimli serilerin kümesi,

yani;

$$b_s = \left\{ x = (x_n) \in \omega : \left(\sum_{k=0}^{n} x_k \right) \in \ell_\infty \right\}$$

ℓ_1 : $\ell_1 = \left\{ x = (x_n) \in \omega : \sum\limits_{k=0}^{\infty} |x_k| < \infty \right\}$

ℓ_p : $1 \leq p < \infty$ olmak üzere p. kuvvetleri mutlak yakınsak seri oluşturan dizilerin kümesi, yani;

$$\ell_p = \left\{ x = (x_k) \in \omega : \sum_{k=0}^{\infty} |x_k|^p < \infty,\ 1 \leq p < \infty \right\}$$

bv : Reel veya kompleks terimli sınırlı salınımlı dizilerin kümesi,

$$bv = \left\{ x = (x_k) \in \omega : \sum_{k=1}^{\infty} |x_k - x_{k-1}| < \infty \right\}$$

bv^p : $p \geq 1$ olmak üzere

$$bv^p = \left\{ x = (x_k) \in \omega : \sum_{k=1}^{\infty} |x_k - x_{k-1}|^p < \infty \right\}$$

$e^{(k)}$: $e_n^{(k)} = \begin{cases} 1, & n = k \\ 0, & n \neq k \end{cases}$ ve $e^{(k)} = \left(e_n^{(k)}\right)$ dizisidir.

$B(X, Y)$: X normlu uzayından Y normlu uzayı içine olan bütün sınırlı lineer dönüşümlerin kümesi

Tanım 1.1.2 (Vektör uzayı): L boştan farklı bir küme ve K reel veya kompleks sayıların cismini göstersin. Eğer $\forall\ x, y, z \in L$ ve $\alpha, \beta \in K$ olmak üzere

$$+ : L \times L \to L \quad \text{ve} \quad \cdot : K \times L \to L$$

fonksiyonları için

$l_1)$ $x + y \in L$ (kapalılık özelliği),

$l_2)$ $x + (y + z) = (x + y) + z$ (birleşme özelliği),

$l_3)$ $x + \theta = \theta + x$ olacak şekilde $\theta \in L$ vardır (birim eleman),

$l_4)$ $x + (-x) = (-x) + x = \theta$ olacak şekilde $-x \in L$ vardır (ters eleman),

$l_5)$ $x + y = y + x$ (değişme özelliği),

$l_6)$ $\alpha \cdot x \in L$ (skalerle çarpma işleminde kapalılık),

$l_7)$ $\alpha \cdot (x+y) = \alpha \cdot x + \alpha \cdot y$

$l_8)$ $(\alpha + \beta) \cdot x = \alpha \cdot x + \beta \cdot x$

$l_9)$ $(\alpha\beta) \cdot x = \alpha \cdot (\beta \cdot x)$

$\mathrm{l}_{10})$ $1 \in \mathrm{K}$ birim eleman olmak üzere $1 \cdot \mathrm{x} = \mathrm{x}$

şartları sağlanıyorsa, L ye bir vektör uzayı veya lineer uzay denir.

Tanım 1.1.3 (Normlu Uzay): X, K cismi üzerinde bir lineer uzay olsun. Eğer $\|.\| : \mathrm{X} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu için

$\mathrm{n}_1)$ $\forall \mathrm{x} \in \mathrm{X}$, $\mathrm{x} \neq \theta$ için $\|\mathrm{x}\| > 0$, $\|\mathrm{x}\| = 0 \Leftrightarrow \mathrm{x} = \theta$

$\mathrm{n}_2)$ $\forall \lambda \in \mathrm{K}$, $\forall \mathrm{x} \in \mathrm{X}$ için $\|\lambda \mathrm{x}\| = |\lambda| \cdot \|\mathrm{x}\|$

$\mathrm{n}_3)$ $\forall \mathrm{x}, \mathrm{y} \in \mathrm{X}$ için $\|\mathrm{x}+\mathrm{y}\| \leq \|\mathrm{x}\| + \|\mathrm{y}\|$

şartları sağlanıyorsa $\|\cdot\|$ fonksiyonuna, X üzerinde bir norm ve X uzayına da normlu uzay denir.

Tanım 1.1.4 (Banach Uzayı): Norma göre tam olan uzaya yani her Cauchy dizisinin yakınsak olduğu uzaya Banach uzayı adı verilir.

Teorem 1.1.5: Eğer Y bir Banach uzayı ise $\mathrm{B}(\mathrm{X},\mathrm{Y})$ bir Banach uzayıdır (Kreyszig 1989).

Teorem 1.1.6 (Banach-Steinhause Teoremi): X bir Frechet uzayı yani tam lineer metrik uzay olsun. Eğer (f_n), X üzerinde tanımlı sürekli lineer fonksiyonellerin noktasal yakınsak bir dizisi ise bu taktirde

$$\mathrm{f}(\mathrm{x}) = \lim_{\mathrm{n}} \mathrm{f}_\mathrm{n}(\mathrm{x})$$

ile tanımlı $\mathrm{f} : \mathrm{X} \to \mathbb{C}$ fonksiyonu süreklidir (Wilansky 1964).

Tanım 1.1.7 (FK Uzayı): Koordinat fonksiyonelleri sürekli olan ω nın tam lineer alt metrik uzayına FK uzayı denir (Malkowsky ve Rakočević 2004).

X, ϕ yi kapsayan FK uzayı olsun. Eğer $\forall x = (x_k) \in X$ dizisi için $x = \sum_{k=0}^{\infty} x_k e^{(k)}$, yani;

$$d\left(x - \sum_{k=0}^{n} x_k e^{(k)} \right) \to 0 \ (n \to \infty)$$

olacak şekilde bir tek gösterimi varsa, X' e AK özelliğe sahiptir veya kısaca AK uzayı adı verilir.

Normlu FK uzayına ise BK uzayı adı verilir.

Tanım 1.1.8 (Schauder Bazı): X lineer metrik uzay olsun. Eğer $\forall x \in X$ için

$$x = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n b^{(n)} \quad \text{yani} \quad d\left(x - \sum_{k=0}^{n} \lambda_k b^{(k)} \right) \to 0 \ (n \to \infty)$$

olacak şekilde skalerlerin bir tek $(\lambda_n)_{n=0}^{\infty}$ dizisi bulunabiliyorsa, $(b_n)_{n=0}^{\infty}$ dizisine X lineer metrik uzayında Schauder bazı adı verilir.

Önerme 1.1.9: bv^p uzayı

$$\|x\|_{bv^p} = \left(\sum_{k=0}^{\infty} |x_k - x_{k-1}|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

normuna göre BK uzayıdır. Üstelik

$$b_j^k = \begin{cases} 0, & j < k \\ & \\ 1, & j \geq k \end{cases} \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots)$$

olmak üzere $\left(b^{(k)} \right)$ dizisi bu uzay için bir Schauder bazıdır (Malkowsky, Rakočević, Živković, 2002).

Tanım 1.1.10 (Sınırlı Lineer Operatör) : X ve Y iki normlu uzay ve $T : X \to Y$ bir lineer operatör olsun. Eğer $\forall \, x \in X$ için

$$\|Tx\| \leq c\|x\|$$

olacak şekilde bir $c \geq 0$ reel sayısı varsa T ye sınırlı lineer operatör denir. (Burada eşitsizliğin soldaki norm Y uzayındaki, sağdaki norm ise X uzayındaki normdur.) Bu eşitsizliği sağlayan c sayılarının en büyük alt sınırına yani

$$\|T\| = \inf\left\{c : \forall x \in X \text{ için } \|T(x)\| \leq c\|x\|\right\}$$

sayısına T nin normu denir. Bu norm aynı zamanda

$$\|T\| = \sup_{\substack{x \in X \\ x \neq 0}} \frac{\|Tx\|}{\|x\|}$$

eşitliği ile de verilebilir. Ayrıca $B(X, Y)$, bu norma göre bir normlu uzaydır.

X üzerindeki bütün sınırlı lineer operatörlerin oluşturduğu $B(X, \mathbb{C})$ normlu uzayına X in duali denir ve $X^{/}$ ile gösterilir. Açıktır ki $X^{/}$ üzerindeki norm

$$\|f\| = \sup_{\substack{x \in X \\ x \neq 0}} \frac{|f(x)|}{\|x\|} = \sup_{\substack{x \in X \\ \|x\|=1}} |f(x)|$$

dir (Kreyszing, 1980).

Tanım 1.1.11: X ve Y metrik uzay ve $f : X \to Y$ dönüşümü verilmiş olsun. Eğer her sınırlı $Q \subset X$ kümesi için $\overline{f(Q)}$ kapanış kümesi Y de kompakt ise f ye kompakttır denir ve kompakt dönüşümlerin kümesi K(X, Y) ile gösterilir.

Kompakt dönüşüm diziler cinsinden aşağıdaki biçimde karakterize edilebilir.

Teorem 1.1.12: X ve Y normlu uzay ve $L : X \to Y$ lineer operatör olsun. Bu durumda L nin kompakt olması için gerek ve yeter şart X' deki her sınırlı (x_n) dizisi için $(L(x_n))$ dizisinin Y de yakınsak bir alt diziye sahip olmasıdır (Şuhubi, 2001).

Tanım 1.1.13 (Çarpım Uzayı): X ve Y , ω nın iki alt kümesi olsun. Bu durumda

$$M(X,Y) = \left\{a = (a_n) \in \omega : \ \forall x = (x_n) \in X \text{ için } ax = (a_n x_n) \in Y\right\}$$

kümesine X ile Y nin çarpım uzayı denir (Malkowsky, Rakočević, Živković, 2002).

Eğer özel olarak $Y = c_s$ alınırsa

$$X^{\beta} = M(X, c_s) = \left\{ a = (a_n) \in \omega : \ \forall x \in X \text{ için} \left(\sum_{k=0}^{n} a_k x_k \right) \in c \right\}$$
$$= \left\{ a = (a_n) \in \omega : \forall x \in X \ \text{ için } \ \sum_{k=0}^{\infty} a_k x_k \text{ yakınsaktır} \right\}$$

elde edilir. Buna X in β duali adı verilir. Eğer $X \supset \phi$ bir BK uzayı ise $a \in \omega$ dizisinin normu tanımlı olmak üzere

$$\|a\|_X^* = \|a\|^* = \sup \left\{ \left| \sum_{k=o}^{\infty} a_k x_k \right| : x \in X \text{ ve } \|x\| = 1 \right\}$$

biçiminde tanımlanır. Örneğin, $a \in X^{\beta}$ ise bu norm mevcuttur (Wilansky, 1984).

Aşağıdaki kısımlarda $1 < p < \infty$ ve $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ olmak üzere $(n+1)^{\frac{1}{q}}$ ile

$$(n+1)^{\frac{1}{q}} = \left((n+1)^{\frac{1}{q}} \right)_{n=0}^{\infty} = \left(1, 2^{\frac{1}{q}}, 3^{\frac{1}{q}}, \ldots, (n+1)^{\frac{1}{q}}, \ldots \right)$$

dizisini göstereceğiz.

Tanım 1.1.14: $A = (a_{nk})$ reel veya kompleks terimli bir sonsuz matris ve $x = (x_k)$ herhangi bir dizi olsun. Eğer $\forall n = 0, 1, 2, \ldots$ için

$$A_n(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_{nk} x_k$$

serileri yakınsak ise $A(x) = (A_n(x))$ dizisine x dizisinin A matrisi ile elde edilen dönüşüm dizisi denir. Ayrıca $\forall x \in X$ için $A(x)$ dönüşüm dizisi mevcut ve Y uzayına ait ise A ya X uzayından Y uzayına bir matris dönüşümü denir ve bu tür matris dönüşümlerinin kümesi (X, Y) ile gösterilir.

Tanım 1.1.15: X, ω nın bir alt kümesi olmak üzere $X_A = \{ x \in \omega : A(x) \in X \}$ kümesine, A matrisinin X deki toplama alanı denir.

$A=(a_{nk})$ sonsuz matrisinin n. satır elemanlarının dizisini A_n $(n=0,1,2,...)$ ile göstereceğiz, yani

$$A_n=(a_{nk})_{k=0}^{\infty}=(a_{n0},a_{n1},...,a_{nk},...)$$

alacağız. Bu durumda

$$A_n(x)=\sum_{k=0}^{\infty}a_{nk}x_k$$

ve

$$\|A_n\|_X^*=\|A_n\|^*=\sup\{|A_n(x)|:x\in X,\|x\|=1\}=\sup\left\{\left|\sum_{k=o}^{\infty}a_{nk}x_k\right|:x\in X,\ \|x\|=1\right\}$$

olur.

Teorem 1.1.16: T üçgen matris ve X ile Y, ω nın iki alt kümesi olsun. Bu taktirde $A\in(X,Y_T)$ olması için gerek ve yeter şart $B=TA\in(X,Y)$ olmasıdır. Ayrıca eğer X, Y BK uzayı ve $A\in(X,Y_T)$ ise bu taktirde

$$\|L_A\|=\|L_B\|$$

dir (Malkowsky ve Rakočević 2004).

p > 1 olmak üzere $\Delta=(\Delta_{nk})$ matrisi $n\geq 1$ için

$$\Delta_{nk}=\begin{cases}1 & k=n=0\\ -1 & k=n-1\\ 1, & k=n\\ 0, & \text{diğer durumlarda}\end{cases}$$

biçiminde tanımlayalım. Bu durumda Δ bir üçgensel matris ve $bv^p=(\ell_p)_\Delta$ dir.

$\sum=(\sum_{nk})$ ve $E=(E_{nk})$ matrislerini

$$\sum_{nk}=\begin{cases}1, & 0\leq k\leq n\\ 0, & k>n\end{cases}$$

ve

$$\mathrm{E_{nk}} = \begin{cases} 0, & 0 \le \mathrm{k} \le \mathrm{n}-1 \\ 1, & \mathrm{k} \ge \mathrm{n} \end{cases}$$

şeklinde alacağız.

Tanım 1.1.17: X, ω nın bir alt kümesi olsun. Eğer $x \in X$ verildiğinde $|y_k| \le |x_k|$ $(k = 0,1,2,...)$ eşitsizliğini sağlayan her $y \in \omega$ için $y \in X$ oluyorsa, *X'* e normal küme denir.

Teorem 1.1.18: X , ϕ yi kapsayan AK özelliğine sahip normal bir FK uzayı olsun. Bu taktirde *E* matrisi için

$$(X_\Delta)^\beta = \left(X^\beta \cap M(X_\Delta, c)\right)_E$$

dir (Malkowsky, 2002).

Teorem 1.1.19: $\mathrm{p} > 1$ olsun. $A \in (\ell_p, \ell_\infty)$ olması için gerek ve yeter şart

$$\sup_n \sum_{k=0}^{\infty} |\mathrm{a_{nk}}|^q < \infty$$

olmasıdır (Stieglitz ve Tiesz, 1977).

Teorem 1.1.20: $\mathrm{p} > 1$ olsun. $A \in (\ell_p, c_0)$ olması için gerek ve yeter şart

$$\sup_n \sum_{k=0}^{\infty} |\mathrm{a_{nk}}|^q < \infty \quad \text{ve} \quad \lim_n \mathrm{a_{nk}} = 0 \ (\mathrm{k} = 0,1,...)$$

olmasıdır (Stieglitz ve Tiesz, 1977).

Önerme 1.1.21: X , ϕ yi kapsayan AK özelliğine sahip normal ve Y bir lineer uzay olsun. Eğer $M(X_\Delta, c) = M(X_\Delta, c_0)$ ise bu taktirde $A \in (X_\Delta, Y)$ olması için gerek ve yeter şart $R^A \in (X, Y)$olmasıdır. Burada

$$r_{nk}^A = \sum_{j=k}^{\infty} a_{nj} \ (n, k = 0,1,...) \tag{1.1}$$

ve her n=*0, 1, 2…* için

$$\mathrm{R_n^A} \in \mathrm{M}(\mathrm{X_\Delta}, \mathrm{c}) \tag{1.2}$$

(Malkowsky, 2002).

Teorem 1.1.22: X, ϕ yi kapsayan bir uzay ve Y, BK uzayı olsun. Bu taktirde

a-) $A \in (X, \ell_\infty)$ olması için gerek ve yeter şart

$$\|A\|_X^* = \sup_n \|A_n\|_X^* < \infty \tag{1.3}$$

olmasıdır. Eğer $A \in (X, \ell_\infty)$ ise

$$\|L_A\| = \|A\|_X^*$$

dır.

b-) Eğer $\left(b^{(k)}\right)_{k=0}^{\infty}$, X 'in bir Schauder bazı ve Y_1, Y nin kapalı bir BK uzayı ise bu taktirde, $A \in (X, Y_1)$ olması için gerek ve yeter şart

$$A \in (X, Y) \text{ ve k= 0, 1,2,… için } A\left(b^{(k)}\right) \in Y_1$$

olmasıdır (Malkowsky ve Rakočević 2004).

Teorem 1.1 23 $1 < p < \infty$ ve $M(bv^p) = \left\{ a \in \omega : (n+1)^{\frac{1}{q}} a \in \ell_\infty \right\}$ olsun. Bu taktirde

a-) $\left(bv^p\right)^\beta = \left(\ell_q \cap M\left(bv^p\right)\right)_E$

b-) Her $a \in \left(bv^p\right)^\beta$ için $\|a\|_{bv^p}^* = \|E(a)\|_q$

dır (Malkowsky, Rakočević, Žıvković, 2002).

1.2. Hausdorff Kompaktsızlık Ölçüsü Tanımı

Tanım 1.2.1 (Hausdorff Kompaktsızlık Ölçüsü): (X,d) metrik uzay ve Q X in bir alt kümesi olsun.

a-) Eğer $\forall \varepsilon > 0$ için $Q \subset \bigcup\limits_{i=1}^{n} B(x_i, r_i),\ r_i < \in\ (i = 1, 2, ..., n)$ olacak şekilde bir $n = n(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ sayısı bulunabiliyorsa, Q ya X de total sınırlıdır denir ve $\{x_1, x_2, ..., x_n\}$ kümesine ise Q'nun ε-neti (ağı) adı verilir.

Total sınırlı her küme sınırlıdır. Fakat tersi genel olarak doğru değildir.

b-) Eğer Q sınırlı ise

$$\chi(Q) = \inf\left\{\varepsilon > 0 :\ Q \subset \bigcup\limits_{i=1}^{n} B\left(x_i, r_i\right),\ x_i \in X,\ r_i < \in\ (i = 1, ..., n)\right\} \qquad (1.4)$$

sayısına Q kümesinin Hausdorff Kompaktsızlık Ölçüsü ve χ fonksiyonuna ise Hausdorff Kompaktsızlık Ölçüsü denir.

Q'yu örten yuvarların merkezlerinin Q ya ait olmak zorunda olmadığına dikkat edilmelidir. Dolayısıyla $\chi(Q)$ Hausdorff Kompaktsızlık Ölçüsü denk olarak

$$\chi(Q) = \inf\{\varepsilon > 0 : Q,\ X\,\text{de sonlu}\ \varepsilon - \text{ağına sahiptir}\}$$

biçiminde ifade edilebilir.

Tanım 1.2.2: χ_1 ve χ_2 sırasıyla X ve Y Banach uzayları üzerinde tanımlı Hausdorff Kompaktsızlık Ölçüleri ve μ_X, X' in boştan farklı bütün sınırlı alt kümelerinin sınıfı olsun. $L : X \to Y$ operatörü verilsin. Eğer

$$\forall Q \in \mu_X \ \text{için}\ L(Q) \in \mu_Y$$

ve

$$\chi_2\left(L(Q)\right) \leq k\,\chi_1(Q)$$

olacak şekilde $0 \leq k < \infty$ sayısı varsa, L ye $\left(\chi_1, \chi_2\right)$- sınırlıdır denir. Bu operatörün $\left(\chi_1, \chi_2\right)$ - normu veya kısaca kompaktsızlık normu

$$\|L\|_{\chi_1, \chi_2} = \inf\left\{k \geq 0 : \forall Q \in \mu_X \text{ için } \chi_2\left(L(Q)\right) \leq k\,\chi_1(Q)\right\}$$

biçiminde tanımlanır.

Eğer $\chi_1 = \chi_2$ ise $\|L\|_{\chi_1, \chi_2}$ in yerine $\|L\|_{\chi_1}$ yazılır.

2 bv^p UZAYININ β - DUALİ VE MATRİS DÖNÜŞÜMLERİ

Bu bölümde Malkowsky, Rakočevič ve Žıvković, (2002) ye ait olan $\left(bv^p\right)^\beta$ duali ile $\left(bv^p,\ell_\infty\right),\left(bv^p,c\right),\left(bv^p,c_0\right),\left(bv^p,\ell_1\right)$ ve $\left(bv^p,bv\right)$ matris sınıflarını karakterize eden teoremlerin ispatlarını vereceğiz.

2.1. bv^p Uzayının β - Duali

Teorem 2.1.1: $1<p<\infty$ ve $M(bv^p)=\left[(n+1)^{\frac{1}{q}}\right]^{-1} * \ell_\infty$ olsun. Bu taktirde

a-) $\left(bv^p\right)^\beta=\left(\ell_q\cap M\left(bv^p\right)\right)_E$

b-) $\|a\|^*_{bv^p}=\|E(a)\|_q \left(\forall a\in\left(bv^p\right)^\beta\right)$

dır.

İspat: $\left(bv^p\right)^\beta=\left(\ell_q{}^\beta\cap M\left(bv^p,c\right)\right)_E=\left(\ell_q\cap M\left(bv^p,c\right)\right)_E$ olduğunu biliyoruz (Malkowsky, 2002). Buna göre

$$M\left(bv^p,c\right)\subset M\left(bv^p\right)\subset M\left(bv^p,c_0\right)\subset M\left(bv^p,c\right)$$

yani $M\left(bv^p,c\right)=M\left(bv^p\right)$ olduğunu göstermek yeterlidir. $a\in M\left(bv^p,c\right)$ alalım. Bu durumda $\forall x\in bv^p$ için $ax\in c$ olur. Öte yandan $x\in bv^p$ olması durumunda gerek ve yeter şart $y=\Delta x\in\ell_p$ olmasıdır. Daha açık bir ifadeyle

$$y_k=x_k-x_{k-1}\left(x_{-1}=0\right)$$

olmak üzere $x \in bv^p$ olması için gerek ve yeter şart $y \in \ell_p$ dir. Buna göre

$$x_n = \sum_{k=0}^{n} y_k$$

ve

$$a_n x_n = \sum_{k=0}^{n} a_n y_k$$

yazılabilir. Şimdi $C = (c_{nk})$ matrisini

$$c_{nk} = \begin{cases} a_n , & 0 \le k \le n \\ 0 , & k > n \end{cases}$$

biçiminde tanımlayalım. Bu durumda $C \in (\ell_p, c)$ olacağından Teorem 1.1.19'dan

$$\sup_n \sum_{k=0}^{\infty} |c_{nk}|^q = \sup_n \sum_{k=0}^{n} |a_n|^q = \sup_n a.(n+1)^{\frac{1}{q}} < \infty$$

olur. Dolayısıyla $a.(n+1)^{\frac{1}{q}} \in \ell_\infty$ dur. Bu ise

$$M(bv^p, c) \subset M(bv^p)$$

olmasıdır.

Karşıt olarak $a \in M(bv^p)$ olsun. Bu durumda $a.(n+1)^{\frac{1}{q}} \in \ell_\infty$ olduğuna göre $\forall n \in \mathrm{N}$ için $(n+1)^{\frac{1}{q}} |a_n| \le K$ yani $|a_n| \le \dfrac{K}{(n+1)^{\frac{1}{q}}}$ olacak şekilde K sabiti vardır. Fakat $\dfrac{K}{(n+1)^{\frac{1}{q}}} \to 0 (n \to \infty)$ olduğuna göre

$$(a_n) \in c_0 \tag{2.1}$$

dır. Tekrar C matrisini yukarıdaki gibi tanımlarsak

$$\sup_n \sum_{k=0}^{\infty} |c_{nk}|^q = \sup_n \sum_{k=0}^{n} |a_n|^q = \sup_n (n+1)|a_n|^q < \infty \tag{2.2}$$

olur. Ayrıca (2.1) ve (2.2) göz önüne alınırsa Teorem 1.1.20'dan $C \in (bv^p, c_0)$ dır. Bu ise

$$M(bv^p) \subset M(bv^p, c)$$

olmasıdır. Tanımdan ise $M(bv^p, c_0) \subset M(bv^p, c)$ olduğu açıktır. Şu halde istenen eşitlik elde edilir.

b-) $a \in (bv^p)^\beta$ olsun. Biliyoruz ki $x \in bv^p$ olması için gerek ve yeter şart $y = \Delta x \in \ell_p$ dir. Abel kısmi toplamasından

$$R = (E(a)) = \left(\sum_k e_{nk} a_k \right) = \underbrace{\left(\sum_{k=n}^{\infty} a_k \right)}_{R_n}$$

ve

$$\sum_{k=0}^{n} a_k x_k = \sum_{k=0}^{n+1} R_k y_k - R_{n+1} x_{n+1} \; (n = 0,1,...) \tag{2.3}$$

dır. $a \in (bv^p)^\beta$ olduğuna göre (a) şıkkı nedeniyle $a \in (\ell_q \cap M(bv^p))_E$ olacağından, $R = E(a) \in \ell_q \cap M(bv^p) \Rightarrow R = E(a) \in M(bv^p)$ olur. (a) şıkkındaki ispat yöntemiyle $R \in M(bv^p, c_0)$ bulunur ve (2.3) den ise

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k x_k = \sum_{k=0}^{\infty} R_k y_k \tag{2.4}$$

elde edilir. $\|x\|_{bv^p} = \|y\|_p$ eşitliği göz önüne alınırsa (2.4) den

$$\|a\|_{bv^p}^* = \|R\|_{\ell_p}^*$$

olur. Diğer taraftan $\ell_p \sim \ell_q$ olduğu dikkate alınırsa

$$\|a\|_{bv^p}^* = \|E(a)\|_q$$

olduğu görülür.

2.2. bv^p Uzayı Üzerine Matris Dönüşümleri

Teorem 2.2.1:

a-) $A \in \left(bv^p, \ell_\infty\right)$ olması için gerek ve yeter şart

$$\|A\|_{\left(bv^p \ell_\infty\right)} = \sup_n \left(\sum_{k=0}^{\infty} \left| \sum_{j=k}^{\infty} a_{nj} \right|^q \right)^{\frac{1}{q}} < \infty \tag{2.5}$$

ve her k için

$$\sup_n \left(k^{\frac{1}{q}} \left| \sum_{j=k}^{\infty} a_{nj} \right| \right) < \infty \tag{2.6}$$

olmasıdır.

b-) $A \in \left(bv^p, c_0\right)$ olması için gerek ve yeter şart (2.5), (2.6) nın sağlanması ve

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{j=k}^{\infty} a_{nj} = 0 \ (k = 0,1,2,...) \tag{2.7}$$

olmasıdır.

c-) $A \in \left(bv^p, c\right)$ olması için gerek ve yeter şart (2.5), (2.6) in sağlanması ve

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{j=k}^{\infty} a_{nj} = a_k \quad (k = 0,1,2,...) \tag{2.8}$$

olmasıdır.

d-) Y, ℓ_∞, c_0 veya c uzaylarından herhangi birini göstersin. Eğer $A \in \left(bv^p, Y\right)$ ise bu taktirde

$$\|L_A\| = \|A\|_{\left(bv^p, \ell_\infty\right)}$$

dur.

İspat:

a-) Teorem 2.1.1 nedeniyle $M(bv^p, c) = M(bv^p, c_0)$ olur. Buna göre Teorem 1.1.21 göz önüne alınırsa $A \in (bv^p, \ell_\infty)$ olması için gerek ve yeter şart $R = (r_{nk}) \in (\ell_p, \ell_\infty)$ ve n= 0, 1,… için $R_n \in M(bv^p, c)$ olmasıdır. Burada

$$r_{nk} = \sum_{j=k}^{\infty} a_{nj} \; (n, k = 0, 1, 2, ...)$$

ve

$$R_n = (r_{nk})_{k=0}^{\infty}$$

dur. Şimdi

$$M(bv^p, c) = \left\{ a = (a_n) \in \omega : \; n^{\frac{1}{q}} a = \left(n^{\frac{1}{q}} a \right)_{n=0}^{\infty} \in \ell_\infty \right\}$$

olduğundan

$$R_n \in M(bv^p, c) \Leftrightarrow k^{\frac{1}{q}} R_n \in \ell_\infty \Leftrightarrow k^{\frac{1}{q}} (r_{nk}) \in \ell_\infty \Leftrightarrow \sup_k k^{\frac{1}{q}} |r_{nk}| = \sup_k k^{\frac{1}{q}} \left| \sum_{j=k}^{\infty} a_{nj} \right| < \infty$$

olur. Bu ise (2.6) şartıdır. Bunun yanı sıra Teorem 1.1.19 nedeniyle

$$R \in (\ell_p, \ell_\infty) \Leftrightarrow \sup_n \sum_{k=0}^{\infty} |r_{nk}|^q = \sup_n \sum_{k=0}^{\infty} \left| \sum_{j=k}^{\infty} a_{nj} \right|^q < \infty$$

dır. Bu da (2.5) şartıdır. Böylece elde edilen şartların denkliğinden ispat tamamlanır.

b-) $j < k$ için $b_j^{(k)} = 0$ ve $j \geq k$ için $b_j^{(k)} = 1 \; (k = 0, 1, ...)$ olmak üzere Teorem 1.1.9'dan $\left(b^{(k)} \right)_{k=0}^{\infty}$ dizisi bv^p uzayının bir Schauder bazı olduğundan $k = 0, 1, 2, ...$ için

$$A_n\left(b^{(k)} \right) = \sum_{j=0}^{\infty} a_{nj} b_j^{(k)} = \sum_{j=k}^{\infty} a_{nj}$$

elde edilir.

Teorem 1.1.21 (b) şıkkına göre $A\in(bv^p,c_0)$ olması için gerek ve yeter şart $A\in(bv^p,\ell_\infty)$ ve $k=0,1,2,\ldots$ için $A(b^{(k)})\in c_0$ olmasıdır. Öte yandan $A(b^{(k)})\in c_0$ olması

$$\lim_n \sum_{j=k}^{\infty} a_{nj}=0$$

demektir. Böylece (b) şıkkının ispatı (a) şıkkı göz önüne alınarak tamamlanır.

c-) Bu şıkkın ispatı da benzer olarak verilir.

d) Teorem 1.1.21'den biliyoruz ki, eğer $A\in(bv^p,\ell_\infty)$ ise

$$\|A\|_{bv^p}^{*}=\|L_A\|$$

dır. Burada

$$\|A\|_{bv^p}^{*}=\sup_n \|A_n\|_{bv^p}^{*}=\sup_n\left\{\sup\left\{\left|\sum_{k=0}^{\infty}a_{nk}x_k\right| : \|x\|=1\right\}\right\}$$

dır. Şimdi $n=0,1,\ldots$ için $A_n=(a_{nk})_{k=0}^{\infty}$ olduğu göz önüne alınırsa, Teorem 2.1.1 'den

$$\|A_n\|_{bv^p}^{*}=\|E(A_n)\|_q=\left\|\left(\sum_{k=m}^{\infty}a_{nk}\right)_{m=0}^{\infty}\right\|_q=\left(\sum_{m=0}^{\infty}\left|\sum_{k=m}^{\infty}a_{nk}\right|^q\right)^{\frac{1}{q}}$$

olup dolayısıyla (a) şıkkından

$$\|A\|_{bv^p}^{*}=\sup_n\|A_n\|_{bv^p}^{*}=\sup_n\left(\sum_{m=0}^{\infty}\left|\sum_{k=m}^{\infty}a_{nk}\right|^q\right)^{\frac{1}{q}}=\|A\|_{(bv,\ell_\infty)}$$

elde edilir.

Eğer $Y=c_0$ veya $Y=c$ ise

$$(bv^p,c_0)\subset(bv^p,c)\subset(bv^p,\ell_\infty)$$

kapsama bağıntıları göz önüne alınarak ispat yukarıdaki gibi verilebilir.

Teorem 2.2.2: X, ϕ yi kapsayan BK uzayı olsun. Bu taktirde $A \in (X, \ell_1)$ olması için gerek ve yeter şart

$$\|A\|_{(X,\ell_1)} = \sup_{\substack{N \subset N_0 \\ N \text{ sonlu}}} \left\| \sum_{n \in N} A_n \right\| < \infty$$

olmasıdır (Malkowsky, 1987). Ayrıca, $A \in (X, \ell_1)$ ise

$$\|A\|_{(X,\ell_1)} \leq \|L_A\| = 4.\|A\|_{(X,\ell_1)} \tag{2.9}$$

dır.

İspat: Sadece (2.9) un sağlandığını gösterelim. $A \in (X, \ell_1), m \in N_0$ olsun. Bu durumda $\forall N \subset \{0,1,...,m\}$ ve $\|x\| = 1$ olan $\forall x \in X$ için

$$\left| \sum_{n \in N} A_n(x) \right| \leq \sum_{n=0}^{m} |A_n(x)| \leq \sum_{n=0}^{\infty} |A_n(x)| = \|A(x)\|_{\ell_1} \leq \|L_A\|$$

olur. Buradan da

$$\|A\|_{(X,\ell_1)} \leq \|L_A\| \tag{2.10}$$

elde edilir. Öte yandan supremumun özelliğinden $\forall \varepsilon > 0$ için

$$\|A\|_{(X,\ell_1)} = \sum_{n=0}^{\infty} |A_n(x)| > \|L_A\| - \frac{\varepsilon}{2}$$

ve

$$\|x\| = 1$$

olacak şekilde bir $x \in X$ vardır. Aynı şekilde

$$\sum_{n}^{m(x)} |A_n(x)| \geq \|A(x)\|_{\ell_1} - \frac{\varepsilon}{2}$$

olacak şekilde bir m(x) tamsayısı vardır. Böylece

$$\sum_{n=0}^{m(x)} |A_n(x)| \geq \|A(x)\|_{\ell_1} - \frac{\varepsilon}{2} > \|L_A\| - \frac{\varepsilon}{2} - \frac{\varepsilon}{2} = \|L_A\| - \varepsilon$$

elde edilir. Fakat (Malkowsky ve Rakočevič 2004) den biliyoruz ki

$$4\left(\operatorname*{maks}_{N\subset\{0,\dots,m(x)\}} \left| \sum_{n\in N} A_n(x) \right| \right) \geq \sum_{n=0}^{m(x)} |A_n(x)| \geq \|L_A\| - \in$$

dır. Demek ki $\forall \in > 0$ için

$$4.\|A\|_{(X,\ell_1)} \geq \|L_A\| - \in$$

dır ve dolayısıyla

$$4.\|A\|_{(X,\ell_1)} \geq \|L_A\| \tag{2.11}$$

dır. Şu halde (2.10) ve (2.11)'den (2.9) eşitsizliği elde edilir.

Teorem 2.2.3:

a-) $A \in (bv^p, \ell_1)$ olması için gerek ve yeter şart (2.6) nin sağlanması ve

$$\|A\|_{(bv^p,\ell_1)} = \sup_{\substack{N\subset N_0 \\ N sonlu}} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \left| \sum_{n\in N} \left(\sum_{j=k}^{\infty} a_{nk} \right)^q \right| \right)^{\frac{1}{q}} < \infty \tag{2.12}$$

olmasıdır. Ayrıca $A \in (bv^p, \ell_1)$ ise

$$\| A \|_{(bv^p,\ell_1)} \leq \|L_A\| \leq 4.\| A \|_{(bv^p,\ell_1)} \tag{2. 13}$$

dir.

b-) $A \in (bv^p, bv)$ olması için gerek ve yeter koşul (2.6) nin sağlanması ve

$$\| A \|_{(bv^p, bv)} = \sup_{\substack{N \subset N_0 \\ N sonlu}} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \left| \sum_{n \in N} \left(\sum_{j=k}^{\infty} (a_{nk} - a_{n-1,k}) \right) \right|^q \right)^{\frac{1}{q}} < \infty \tag{2.14}$$

olmasıdır. Ayrıca $A \in (bv^p, bv)$ ise

$$\| A \|_{(bv^p, bv)} \leq \| L_A \| = 4. \| A \|_{(bv^p, bv)} \tag{2.15}$$

dır.

İspat:

(a) şıkkının ispatı Teorem 2.2.2 ve Teorem 1.1.23’den, (b) şıkkının ispatı ise (a) şıkkı ve Teorem 1.1.16’dan görülür. (2.15) eşitsizliğine gelince, $bv = (\ell_1)_\Delta$ eşitliği ve Teorem 2.2.2 nedeniyle

$A \in (bv^p, bv)$ olması için gerek ve yeter şart $B = \Delta A \in (bv^p, \ell_1)$

dir. Buna göre $A \in (bv^p, bv)$ ise $B \in (bv^p, \ell_1)$ olacağından (2.13) eşitsizliğinden

$$\| B \|_{(bv^p, \ell_1)} \leq \| L_B \| \leq 4. \| B \|_{(bv^p, \ell_1)}$$

yazılabilir. Fakat $B = (b_{nk}) = (a_{nk} - a_{n-1,k})$ olduğuna göre (2.12) ve (2.14) ten

$$\| B \|_{(bv^p, \ell_1)} = \sup_{\substack{N \subset N_0 \\ N sonlu}} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \left| \sum_{n \in N} \left(\sum_{j=k}^{\infty} (a_{nk} - a_{n-1,k}) \right) \right|^q \right)^{\frac{1}{q}} = \| A \|_{(bv^p, bv)}$$

elde edilir. Böylece $\| L_B \| = \| L_A \|$ olduğu göz önüne alınarak (2.15) eşitsizliği bulunur.

3 HAUSDORFF KOMPAKTSIZLIK ÖLÇÜSÜ İLE KOMPAKT DÖNÜŞÜMLERİN ÖZELLİKLERİ

Bu bölümde çokça faydalandığımız Hausdorff Kompaktsızlık Ölçüsünün temel özelliklerini içeren teoremleri ispat ettikten sonra sonsuz matrisin bv^p uzayları arasında kompakt olması için gerek ve yeter şartları ifade eden teoremlerin ispatlarını vereceğiz.

3.1. Hausdorff Kompaktsızlık Ölçüsünün Özellikleri

Bu kısımda matris dönüşümleri ile kompakt dönüşümler arasındaki ilişkileri ifade eden teoremleri ve ispatlarını vereceğiz.

Lemma3.1.1: (X,d) metrik uzay ve Q, Q_1, Q_2, X' in sınırlı alt kümeleri olsun. Bu taktirde

a-) $\chi(Q)=0$ olması için gerek ve yeter şart Q nun total sınırlı olmasıdır.

b-) $Q_1 \subset Q_2$ ise $\chi(Q_1) \leq \chi(Q_2)$

c-) $\chi(Q)=\chi(\overline{Q})$

d-) $\chi(Q_1 \cup Q_2)=\text{maks}\{\chi(Q_1), \chi(Q_2)\}$

e-) $\chi(Q_1 \cap Q_2) \leq \min\{\chi(Q_1), \chi(Q_2)\}$

dir.

İspat:

a-) $\chi(Q)=\inf\left\{\varepsilon>0 : Q \subset \bigcup_{i=1}^{n} B(x_i, r_i),\ r_i<\varepsilon,\ i=1,\ldots,n\right\}=0$ ise infumumun özelliğinden $\forall\delta>0$ için $\varepsilon<0+\delta$ ve $Q \subset \bigcup_{i=1}^{n} B(x_i, r_i)$, $r_i<\varepsilon$ olacak şekilde $\varepsilon>0$ vardır.

Buna göre $\forall\delta>0$ için $r_i<\delta$ ve $Q\subset\bigcup_{i=1}^{n}B(x_i,r_i)$ olacak şekilde sonlu $n\in\mathbb{N}$ bulunur ki, bu Q nun total sınırlı olmasıdır. Tersi ise tanımdan açıktır.

b-) $Q_1\subset Q_2$ ise

$$\left\{\varepsilon>0:\ Q_2\subset\bigcup_{i=1}^{n}B(x_i,r_i),\ \ r_i<\varepsilon\right\}\subset\left\{\varepsilon>0:\ Q_1\subset\bigcup_{i=1}^{n}B(x_i,r_i),\ \ r_i<\varepsilon\right\}$$

olduğundan infumum özelliğinden istenen eşitsizlik elde edilir.

c-) $Q\subset\overline{Q}$ ise (b) şıkkından $\chi(Q)\le\chi(\overline{Q})$ dır. Tersine gelince, $\chi(Q)$ nun tanımından $\forall\delta>0$ için $\varepsilon<\chi(Q)+\delta$ ve $Q\subset\bigcup_{i=1}^{n}B(x_i,r_i)$, $r_i<\varepsilon$ olacak şekilde $\varepsilon>0$ vardır. Buradan $\overline{Q}\subset\bigcup_{i=1}^{n}\overline{B(x_i,r_i)}$ bulunur. Fakat $\overline{B(x_i,r_i)}$ ile $B(x_i,r_i)$ yuvarlarının yarıçapları aynı olduğundan $\chi(\overline{Q})\le\varepsilon$ olur. Demek ki $\forall\delta>0$ için

$$\chi(Q)\le\varepsilon<\chi(Q)+\delta\Rightarrow\chi(\overline{Q})<\chi(Q)+\delta$$

dır ve dolayısıyla $\chi(\overline{Q})\le\chi(Q)$ bulunur.

d-) $Q_1\subset Q_1\cup Q_2$ ve $Q_2\subset Q_1\cup Q_2$ olduğundan (b) şıkkından

$$\chi(Q_1)\le\chi(Q_1\cup Q_2)\ \text{ ve }\ \chi(Q_2)\le\chi(Q_1\cup Q_2)$$

bulunur. Buradan ise

$$\text{maks}\{\,\chi(Q_1),\chi(Q_2)\,\}\le\chi(Q_1\cup Q_2)$$

elde edilir. Tersi için $\text{maks}\{\,\chi(Q_1),\chi(Q_2)\,\}=s$ ve $\varepsilon>0$ verilsin. Tanımdan

$$Q_1\subset\bigcup_{i=1}^{n}B(x_i,r_i),\ Q_2\subset\bigcup_{j=1}^{m}B(y_j,r_j^{'}),\ r_i,r_j<s+\varepsilon$$

olacak şekilde $m,n\in\mathbb{N}$ vardır. Buradan ise

$$Q_1 \cup Q_2 \subset \bigcup_{i=1}^{n}\bigcup_{j=1}^{m}\left\{B(x_i, r_i) \cup B(y_j, r_j^{'}\right\} = \bigcup_{k=1}^{m+n} B(z_i, r_i^{''})$$

ve $r_i^{''} < s + \varepsilon$ yazılabilir. Şu halde $\forall \varepsilon > 0$ için. $\chi(Q_1 \cup Q_2) \leq s + \varepsilon$ olup dolayısıyla $\chi(Q_1 \cup Q_2) \leq s$ bulunur.

e-) Bu şıkta da benzer olarak ispatlanabilir.

Teorem 3.1.2: X normlu uzay ve Q, Q_1, Q_2, X in sınırlı alt kümeleri olsun. Bu taktirde

a-) $\chi(Q_1 + Q_2) \leq \chi(Q_1) + \chi(Q_2)$

b-) $\forall \lambda \in \mathbb{C}$ için $\chi(\lambda Q) = |\lambda| \chi(Q)$

c-) $\forall x \in X$ için $\chi(Q + x) = \chi(Q)$

dır.

İspat:

a-) $\varepsilon > 0$ verilsin. Şimdi $\{x_1, ..., x_n\}$ ve $\{y_1, ..., y_m\}$ sırasıyla Q_1 ve Q_2 nin $[\chi(Q_1) + \varepsilon]$ ve $[\chi(Q_2) + \varepsilon]$ -ağı olsun. Bu durumda

$$Q_1 \subset \bigcup_{i=1}^{n} B(x_i, r_i),\ r_i^{'} < \chi(Q_1) + \varepsilon$$

ve

$$Q_2 \subset \bigcup_{j=1}^{m} B(y_j, r_j^{'}),\ r_j < \chi(Q_2) + \varepsilon$$

olur. Buradan

$$Q_1 + Q_2 \subset \bigcup_{i=1}^{n}\bigcup_{j=1}^{m}\left\{B(x_i, r_i) + B(y_j, r_j^{'})\right\} = \bigcup_{i=1}^{n}\bigcup_{j=1}^{m}\left\{x_i + y_j + B(\theta, r_i) + B(\theta, r_j^{'})\right\}$$

yazılabilir. Öte yandan

$$B(\theta, r_i) + B(\theta, r_j^{'}) \subset B(\theta, r_i + r_j^{'})$$

olduğundan

$$B(x_i, r_i) + B(y_j, r_j') = x_i + y_j + B(\theta, r_i) + B(\theta, r_j')$$

$$\subset x_i + y_j + B(\theta, r_i + r_j') = B(x_i + y_j, r_i + r_j')$$

bulunur. Demek ki,

$$Q_1 + Q_2 \subset \bigcup_{i=1}^{n}\bigcup_{j=1}^{m} B(x_i + y_j, r_i + r_j'),\ r_i + r_j' < \chi(Q_1) + \chi(Q_2) + 2\varepsilon$$

dır. Buradan da $\forall\varepsilon > 0$ için

$$\chi(Q_1 + Q_2) \le \chi(Q_1) + \chi(Q_2) + 2\varepsilon$$

elde edilir ki, bu ise

$$\chi(Q_1 + Q_2) \le \chi(Q_1) + \chi(Q_2)$$

eşitsizliğini verir.

b-) Eğer $\lambda = 0$ ise eşitlik açıktır. $\lambda \ne 0$ alalım. $\varepsilon > 0$ ve $Q \subset \bigcup_{i=1}^{n} B(x_i, r_i),\ r_i < \varepsilon$ olsun. Bu durumda

$$\lambda Q \subset \bigcup_{i=1}^{n}\{\lambda B(x_i, r_i)\} = \bigcup_{i=1}^{n}\{\lambda(x_i + B(\theta, r_i)\} = \bigcup_{i=1}^{n}\{\lambda x_i + B(\theta, |\lambda| r_i)\}$$

$$= \bigcup_{i=1}^{n} B(\lambda x_i, |\lambda| r_i) = \bigcup_{i=1}^{n} B(\lambda x_i, |\lambda| r_i'),\ r_i' = |\lambda| r_i < |\lambda|\varepsilon$$

yazılabilir. Tanım göz önüne alınırsa $\chi(\lambda Q) \le |\lambda|\varepsilon$ bulunur. Buna göre

$$\chi(\lambda Q) \le |\lambda|\chi(Q)$$

elde edilir.

Tersini göstermek için $\varepsilon > 0,\ \lambda Q \subset \bigcup_{i=1}^{n} B(x_i, r_i'),\ r_i' < \varepsilon$ verilsin. Bu durumda

$$Q \subset \bigcup_{i=1}^{n} B\left(\frac{x_i}{\lambda}, \frac{r_i^{'}}{|\lambda|}\right)$$

olur. $i = 1, 2, ..., n$ için $r_i^{'} < \delta$ olduğuna göre $r_i = \frac{r_i^{'}}{|\lambda|}$ dersek $r_i < \frac{\delta}{|\lambda|}$ olacağından

$\chi(Q) \leq \frac{\delta}{|\lambda|}$ bulunur. Buradan da

$$|\lambda|\chi(Q) \leq \delta \Rightarrow |\lambda|\chi(Q) \leq \chi(\lambda Q)$$

olduğu görülür. Bu da ispatı tamamlar.

Teorem 3.1.3: X sonsuz boyutlu normlu uzay ve $B_X = \{x \in X : \|x\| \leq 1\}$ kapalı birim yuvar olsun. Bu durumda $\chi(B_X) = 1$ dir.

İspat: $\forall \varepsilon > 0$ için $B_X \subset B(\theta, 1+\varepsilon)$ olduğuna göre $\chi(B_X) \leq 1+\varepsilon$ ve dolayısıyla $\chi(B_X) \leq 1$ dir. $\chi(B_X) < 1$ olamaz. Çünkü, $\chi(B_X) = q < 1$ olsaydı $\varepsilon > 0$ sayısını $q + \varepsilon < 1$ olacak şekilde seçelim. Bu durumda B_X in bir ($q+\varepsilon$)- ağı mevcuttur. Bu ağı $\{x_1, ..., x_k\}$ ile gösterirsek

$$B_X \subset \bigcup_{i=1}^{k} B(x_i, r_i) = \bigcup_{i=1}^{k} \{x_i + r_i B(\theta, 1)\} \subset \bigcup_{i=1}^{k} \{x_i + (q+\varepsilon) B_X\}$$

yazılabilir. Böylece Lemma 3.1.1, Teorem 3.1.2'den

$$q = \chi(B_X) \leq \operatorname*{maks}_{1 \leq i \leq k} \chi(\{x_i + (q+\varepsilon)B_X\}) = (q+\varepsilon).q \qquad (3.1.)$$

bulunur. $q + \varepsilon < 1$ olduğundan (3.1) nedeniyle $q = 0$ elde edilir, yani B_X total sınırlıdır. Fakat X sonsuz boyutlu uzay olduğuna göre bu mümkün değildir. Şu halde $\chi(B_X) = 1$ dir.

Şimdi Schauder bazına sahip Banach uzaylarında Hausdorff kompaktsızlık ölçüsünü hesaplamada önemli kolaylık sağlayan Gadenštein, Gohberg ve Marcus'un teoremini verelim. X Banach uzayı ve $\{e_1, e_2, ...\}$ bir Schauder bazı olsun. Bu durumda her bir $x \in X$ için $x = \sum_{i=1}^{\infty} x_i e_i$ olacak şekilde bir tek (x_i) skaler dizisi vardır. $P_n : X \to X, \{e_1, e_2, ...\}$ kümesinin lineer gereni üzerine bir projektör dönüşümü yani, $P_n(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$ olsun. Bu durumda aşağıdaki teoremi ifade edebiliriz.

Teorem 3.1.4 (Gadenštein, Gohberg ve Marcus Teoremi): X, $\{e_1, e_2, ...\}$ Schauder bazına sahip Banach uzayı ve Q, X 'in sınırlı bir alt kümesi ve $P_n : X \to X$ bir projektör dönüşümü olsun. Bu taktirde

$$\frac{1}{a} \limsup_n \left(\sup_{x \in Q} \left\| \left(I - P_n \right)(x) \right\| \right) \leq \chi(Q) \leq \inf_n \sup_{x \in Q} \left\| \left(I - P_n \right)(x) \right\|$$
$$\leq \limsup_n \left(\sup_{x \in Q} \left\| \left(I - P_n \right)(x) \right\| \right)$$

dir. Burada $a = \limsup_n \| I - P_n \|$ dir.

İspat: Açıktır ki $\forall n \in \mathbb{N}$ için

$$Q \subset P_n Q + \left(I - P_n \right) Q \tag{3.2}$$

dir. Lemma 3.1.1, Teorem 3.1.2 ve (3.2) göz önüne alınırsa

$$\chi(Q) \leq \chi(P_n Q) + \chi\left((I - P_n) Q \right) = \chi\left((I - P_n) Q \right) \leq \sup_{x \in Q} \| (I - P_n)(x) \|$$

bulunur. Buradan ise

$$\chi(Q) \leq \inf_n \sup_{x \in Q} \| (I - P_n)(x) \| \leq \limsup_n \left(\sup_{x \in Q} \| (I - P_n)(x) \| \right)$$

olur. Şimdi teoremdeki eşitsizliğin diğer tarafını gösterelim. $\varepsilon > 0$ ve $\{x_1, x_2, ..., x_k\}$ Q nun $[\chi(Q) + \varepsilon]$- ağı olsun. Bu durumda, B_X kapalı birim yuvar olmak üzere

$$Q \subset \bigcup_{i=1}^{k} B\left(x_i, \left[\chi(Q)+\varepsilon\right]\right) \subset \left\{x_1, x_2, ..., x_k\right\} + \left[\chi(Q)+\varepsilon\right] B_x$$

yazılabilir. Bu demektir ki her bir $x \in X$ için $x = z + \left[\chi(Q)+\varepsilon\right].s$ olacak şekilde $x \in \left\{x_1, x_2, ..., x_k\right\}$ ve $s \in B_X$ mevcuttur. Buna göre

$$\sup_{x\in Q}\left\|(I-P_n)(x)\right\| \leq \sup_{1\leq i\leq k}\left\|(I-P_n)(x_i)\right\| + \left[\chi(Q)+\varepsilon\right]\left\|I-P_n\right\|$$

olup buradan da

$$\limsup_{n}\left(\sup_{x\in Q}\left\|\left(I-P_n\right)(x)\right\|\right) \leq \left[\chi(Q)+\varepsilon\right]\limsup_{n}\left\|I-P_n\right\|$$

elde edilir. Bu ise ispatı tamamlar.

Teorem 3.1.5: X ve Y Banach uzayı ve $L \in B(X,Y)$ olsun. Bu taktirde

$$\left\|L\right\|_\chi = \chi\left(L\left(B_X\right)\right)$$

İspat: $\left\|L\right\|_\chi$ nin tanımından $\forall \varepsilon > 0$ için $\exists k > 0$ vardır öyle ki

$$k < \left\|L\right\|_\chi + \varepsilon \text{ ve her } Q \in \mu_X \text{ için } \chi\left(L(Q)\right) \leq k\chi(Q) \qquad (3.4)$$

eşitsizliği sağlanır. Bu durumda (3.4) ten $\forall \varepsilon > 0$ ve $\forall Q \in \mu_X$ için

$$\chi\left(L(Q)\right) \leq \left[\left\|L\right\|_\chi + \varepsilon\right].\chi(Q)$$

olur. Buradan ise $\forall Q \in \mu_X$ için $\chi\left(L(Q)\right) \leq \left\|L\right\|_\chi \chi(Q)$ bulunur. Eğer $Q = B_X$ alınırsa, $\chi(B_X) = 1$ olduğu göz önüne alınarak

$$\chi\left(L(B_X)\right) \leq \left\|L\right\|_\chi \qquad (3.5)$$

elde edilir. Şimdi bu eşitsizliğin tersini göstermek için keyfi bir $Q \in \mu_X$ ve Q nun bir $\{x_1, x_2, ..., x_n\}$, r-ağını alalım. Bu durumda $Q \subset \bigcup_{i=1}^{n} \left(B(x_i, r_i)\right)$, $r_i < r$ ve buradan

$$L(Q) \subset \bigcup_{i=1}^{n} \left(B(x_i, r_i)\right) \subset \bigcup_{i=1}^{n} \left(B(x_i, r)\right) \tag{3.6}$$

yazılabilir. Lemma 3.1.1, Teorem 3.1.2 ve (3.6) nedeniyle

$$\chi\left(L(Q)\right) \le \chi\left(\bigcup_{i=1}^{n} \left(B(x_i, r)\right)\right) = \chi\left(\bigcup_{i=1}^{n} L\left(x_i + r\,B(\theta,1)\right)\right)$$

$$= \chi\left(\bigcup_{i=1}^{n} \left\{L(x_i) + r\,L(B(\theta,1))\right\}\right)$$

$$\le \underset{1\le i\le n}{\text{maks}} \left\{r\,\chi\left(L\left(B_x\right)\right)\right\} = r\chi\left(L\left(B_x\right)\right)$$

bulunur. Öte yandan $\forall \varepsilon > 0$ için Q nun $\{x_1, x_2, ..., x_n\}$, r-ağını $r < \chi(Q) + \varepsilon$ biçiminde seçersek

$$\chi\left(L(Q)\right) \le \left[\chi(Q) + \varepsilon\right].\chi\left(L(B_X)\right)$$

elde edilir**.** $\varepsilon \to 0$ için limite geçilirse, $\forall Q \in \mu_X$ için

$$\chi\left(L(Q)\right) \le \chi\left(L(B_X)\right).\chi(Q)$$

bulunur ki, bu ise (3.6) ve (3.7) den istenen eşitliği verir.

Sonuç 3.1.6: X, Y Banach uzayı ve $L \in B(X,Y)$ olsun. Bu taktirde $\|.\|_\chi$, $B(X,Y)$ üzerinde bir yarı normdur ve

a-) $\|L\|_\chi = 0$ olması için gerek ve yeter şart $L \in K(X,Y)$ olmasıdır.

b-) $\|L\|_\chi \le \|L\|$

c-) $K \in K(X,Y)$ için $\|L + K\|_\chi = \|L\|_\chi$

dır.

İspat:

a-) $\|.\|_{\chi}$ nin yarı norm olduğu Teorem 3.1.2'den kolayca görülebilir. $\|L\|_{\chi}=0$ ise Lemma 3.1.1'den $L(B_x)$ total sınırlıdır. Şimdi (x_n), X de keyfi sınırlı bir dizi olsun. Bu durumda $\forall n$ için $\|x_n\|\leq M$ olacak şekilde $M>0$ sayısı mevcut olacağından $y_n=\dfrac{x_n}{M}$ dersek $\|y_n\|\leq 1$ olur. Yani $\forall n$ için $y_n\in B_x$ olur. Dolayısıyla $\left(L(y_n)\right), L(B_X)$ de bir dizidir. Total sınırlılığı nedeniyle $L(B_X)$ in bir sonlu 1-ağı vardır ve bu ağın açık yuvarlarından en az biri $\left(y_n\right)$ dizisinin bir $\left(y_n^{(1)}\right)$ alt dizisini içerir. Diyelim ki bu yuvar $B(z,1)$ olsun. Aynı şekilde $\left(y_n^{(1)}\right)$ dizisinin $\left(y_n^{(2)}\right)$ alt dizisini içeren $\dfrac{1}{2}$- ağı ve bir $B\left(z,\dfrac{1}{2}\right)$ yuvarı vardır. Bu şekilde devam edilirse $\left(y_1^{(1)},y_2^{(2)},...,y_n^{(n)},...\right)$ alt dizisi elde edilir. Öte yandan bu alt dizi bir Cauchy dizisidir, çünkü $m,n>N$ için $y_n^{(n)},y_m^{(m)}\in B\left(z,\dfrac{1}{N}\right)$ yani

$$\left\|y_n^{(n)}-y_m^{(m)}\right\|\leq\left\|y_n^{(n)}-z\right\|+\left\|z-y_m^{(m)}\right\|<\frac{2}{N}$$

dir. Y bir Banach uzayı olduğuna göre $y_n^{(n)}\rightarrow z\,(n\rightarrow\infty)$ olur. Böylece L kompakt operatördür.

Tersi için L kompakt olsun. Bu durumda $\overline{L(B_X)}$ kompakttır. Dolayısıyla $\forall\varepsilon>0$ için $\overline{L(B_X)}\subset\bigcup_{i=1}^{n}B\left(x_i,\varepsilon\right)$ olacak şekilde $n=n(\varepsilon)\in\mathbb{N}$ vardır. Buradan $\forall\varepsilon>0$ için $\|L\|_{\chi}=\chi\left(L\left(B_X\right)\right)\leq\chi\left(\overline{L(B_X)}\right)\leq\varepsilon$ elde edilir ki bu ise

$$\|L\|_{\chi}=0$$

olması demektir.

b-) $\|L\| = \inf\{k : \forall x \in X \text{ için } \|L(x)\| \leq k\|x\|\}$ olduğundan $\forall \varepsilon > 0$ için $k < \|L\| + \varepsilon$ ve $\forall x \in X$ için $\|L(x)\| \leq k\|L\|$ olacak şekilde $k \geq 0$ vardır. Şimdi $L(B_X)$ in sonlu k-ağını alalım. Bu durumda $L(B_X) \subset \bigcup_{i=1}^{n} B(x_i, k)$ olup dolayısıyla $\forall \varepsilon > 0$ için

$$\|L\|_\chi = \chi(L(B_X)) \leq k < \|L\| + \varepsilon$$

bulunur. Bu ise

$$\|L\|_\chi \leq \|L\|$$

demektir.

c-) Eğer $K \in K(X,Y)$ ise yukarıda olduğu gibi $\|L\|_\chi = 0$ olur. Teorem 3.1.2 nedeniyle

$$\begin{aligned} \|L+K\|_\chi &= \chi[(L+K)(B_X)] = \chi[L(B_X) + K(B_X)] \\ &\leq \chi(L(B_X)) + \chi(K(B_X)) = \|L\|_\chi + \|K\|_\chi = \|L\|_\chi \end{aligned} \tag{3.8}$$

bulunur. Öte yandan $\|L+K\|_\chi$ tanımından $\forall \varepsilon > 0$ için

$$\delta < \|L+K\|_\chi + \varepsilon \quad \text{ve} \quad L(B_X) + K(B_X) \subset \bigcup_{i=1}^{n} B(x_i, \delta)$$

olacak şekilde $\delta > 0$ vardır. Buradan ise

$$L(B_X) \subset \bigcup_{i=1}^{n} B(x_i, \delta) - K(B_X)$$

yazılabilir. Teorem 3.1.2'den $\forall \varepsilon > 0$ için

$$\|\mathrm{L}\|_{\chi} = \chi\left(\mathrm{L}(\mathrm{B}_{\mathrm{X}})\right) \leq \chi\left[\bigcup_{i=1}^{n} \mathrm{B}(\mathrm{x}_i, \delta) - \mathrm{K}(\mathrm{B}_{\mathrm{X}})\right]$$

$$\leq \delta + \chi\left(\mathrm{K}(\mathrm{B}_{\mathrm{X}})\right) = \delta + \|\mathrm{K}\|_{\chi} = \delta$$

$$< \|\mathrm{L} + \mathrm{K}\|_{\chi} + \varepsilon$$

bulunur. Bu ise

$$\|\mathrm{L}\|_{\chi} \leq \|\mathrm{L} + \mathrm{K}\|_{\chi} \tag{3.9}$$

demektir. Şu halde (3.8) ve (3.9) dan istenen elde edilir.

3.2. Kompakt Dönüşümlerin Özellikleri

Teorem3.2.1: A sonsuz matris, $1<p<\infty$, $q = \frac{p}{(p-1)}$ olsun Ayrıca $n>r$ olacak şekildeki her n ve r doğal sayıları için

$$\|A\|_{(bv^p,\ell_\infty)}^{(r)} = \sup_{n>r}\left(\sum_{k=0}^{\infty}\left|\sum_{j=k}^{\infty} a_{nj}\right|^q\right)^{\frac{1}{q}}$$

alalım.

a-) Eğer $A \in (bv^p, c_0)$ ise bu taktirde

$$\|L_A\|_{\chi} = \lim_{r\to\infty}\|A\|_{(bv^p,\ell_\infty)}^{(r)} \tag{3.10}$$

dır.

b-) Eğer $A \in (bv^p, c)$ ise bu taktirde

$$\frac{1}{2}\lim_{r\to\infty}\|A\|_{(bv^p,\ell_\infty)}^{(r)} \leq \|L_A\|_{\chi} \leq \lim_{r\to\infty}\|A\|_{(bv^p,\ell_\infty)}^{(r)} \tag{3.11}$$

c-) Eğer $A \in \left(bv^p, \ell_\infty\right)$ ise bu taktirde

$$0 \le \|L_A\|_\chi \le \lim_{r\to\infty} \|A\|_{\left(bv^p, \ell_\infty\right)}^{(r)} \tag{3.12}$$

dır.

İspat: Teorem 2.1.1 nedeniyle (3.10), (3.11), (3.12) deki limitler mevcuttur.

a-) Kısalık için $K = B_X = \left\{x \in X : \|x\| \le 1\right\}$ olsun. Önce $r = 0,1,2,...$ için $P_r : c_0 \to c_0$, $P_r(x) = \left(x_0, x_1, ..., x_r, 0, 0, ...\right)$ olmak üzere

$$\|L_A\|_\chi = \chi\left(AK\right) = \lim_{r\to\infty}\left[\sup_{x\in K}\left\|\left(I - P_r\right)Ax\right\|\right] \tag{3.13}$$

olduğunu gösterelim. Şimdi

$$\begin{aligned} \|I - P_r\| &= \sup_{\substack{x\ne\theta \\ x\in c_0}} \frac{\left\|\left(I - P_r\right)(x)\right\|}{\|x\|} \\ &= \sup_{x\ne\theta} \frac{\left\|\left(0, 0, ..., x_{r+1}, x_{r+2}, ...\right)\right\|}{\|x\|} = \sup_{x\ne\theta} \frac{\sup\limits_{n\ge r+1} |x_n|}{\sup\limits_{n\ge 0} |x_n|} \le 1 \end{aligned} \tag{3.14}$$

olduğu açıktır. Ayrıca $\forall x \in c_0$ için $\left\|\left(I - P_r\right)(x)\right\| \le \|I - P_r\|\|x\|$ olduğuna göre

$x = \left(x_k\right) = \left(0, ..., x_{r+1}, x_{r+2}, ...\right) \in c_0$ alınırsa

$$\frac{\left\|\left(I - P_r\right)(x)\right\|}{\|x\|} = 1 \tag{3.15}$$

bulunur. (3.14) ve (3.15) ten demek ki

$$\|I - P_r\| = 1 \tag{3.15}$$

dır. Böylece Teorem 3.1.5 gereğince (3.13) eşitsizliği elde edilir. Şimdi $A(r) = \left(\tilde{a}_{nk}\right)$ sonsuz matrisini

$$\tilde{a}_{nk} = \begin{cases} 0 \quad , & 0 \le n \le r \\ a_{nk}, & n > r \end{cases}$$

biçiminde tanımlayalım. Bu durumda Teorem 2.2.1 (d) şıkkından

$$\sup_{x \in K} \| (I - P_r) Ax \| = \| L_{A_{(r)}} \| = \| A_{(r)} \|_{(bv^p, \ell_\infty)} = \|A\|^{(r)}_{(bv^p, \ell_\infty)} \tag{3.16}$$

bulunur. Böylece (3.13) ve (3.16) dan (3.10) elde edilir.

b-) Dikkat edelim ki $\{e, e_1, e_2, ...\}$, c nin Schauder bazı olduğundan $\forall x \in (x_k)_{k=0}^{\infty} \in c$**,** için

$$x = \ell e + \sum_{k=0}^{\infty} (x_k - \ell) e^{(k)}$$

olacak şekilde $\ell \in \mathbb{C}$ ve skalerlerin (x_k) dizisi mevcuttur. Eğer $r = 0, 1, 2, ...$ için $P_r : c \to c$ dönüşümünü

$$P_r(x) = \ell e + \sum_{k=0}^{r} (x_k - \ell) e^{(k)} = (\ell, \ell, ...) + ((x_0 - \ell), (x_1 - \ell), ..., (x_r - \ell), 0, 0, ...)$$

$$= (x_0, x_1, ..., \ell, \ell, ...)$$

biçiminde tanımlarsak bu durumda

$$(I - P_r)(x) = (0, 0, ..., 0, x_{r+1} - \ell, x_{r+2} - \ell, ...)$$

olacağından her $x \in c$ için

$$\|(I - P_r)(x)\| = \|x - P_r(x)\| \le \|x\| + \|P_r(x)\| \le 2\| x \|$$

bulunur. Buradan ise $\|I - P_r\| \le 2$ olur. Öte yandan özel olarak $x = (x_k) = (\ell, ..., \ell, \underset{r+1}{-\ell}, \ell, ...) \in c$ alınırsa

$$\|(I-P_r)(x)\| = 2\|\ell\| = 2\|x\|$$

bulunur. Dolayısıyla $\|I-P_r\| = 2$ elde edilir. Böylece Teorem 3.1.5 te $a = 2$ alınırsa (3.11) eşitsizliğinin sağlandığı görülür.

c-) $r = 0,1,...$ için $P_r(x) = (x_0, x_1, ..., x_r, 0, 0, ...)$ ile tanımlı $P_r : \ell_\infty \to \ell_\infty$ dönüşümünü göz önüne alalım. Bu taktirde

$$AK \subset P_r(AK) + (I - P_r)(AK)$$

yazabiliriz. Gerçekten $y \in AK$ ise $y = A(x)$ olacak şekilde $x \in X$ vardır. Öte yandan $x \in K$ için

$$P_r Ax = (A_0(x), ..., A_r(x), 0, ...) \text{ ve } (I-P_r)A(x) = (0, 0, ..., A_{r+1}(x), ...)$$

olduğuna göre

$$P_r Ax + (I - P_r)Ax = A(x) = y$$

dır. Bu ise

$$y \in P_r(AK) + (I - P_r)(AK)$$

olmasıdır. χ ölçüsünün özelliklerinden ise

$$\chi(AK) \le \chi\left(\left(P_r(AK)\right) + (I - P_r(AK)\right)$$

$$\le \chi P_r(AK) + \chi(I - P_r)(AK)$$

$$= \chi\left((I-P_r)(AK)\right) \le \sup_{y \in (I-P_r)AK} \|(I-P_r)y\|$$

olur. Öte yandan $y \in (I-P_r)AK \Leftrightarrow y = (I-P_r)Ax,$ olacak şekilde $x \in K$ vardır.

Buna göre

$$\sup_{y\in(I-P_r)AK}\|(I-P_r)y\| = \sup_{x\in K}\Big\|(I-P_r).\underbrace{(I-P_r)Ax}_{(0,\dots,0,A_{r+1}(x),\dots}\Big\|$$

$$= \sup_{x\in K}\|(I-P_r)Ax\| = \|L_{A_{(r)}}\|$$

yazılabilir. Böylece

$$\|A\|_{\chi} = \chi(AK) \le \|L_{A_{(r)}}\| \tag{3.17}$$

olup dolayısıyla Teorem 2.1.1 ve (3.17) den istenen eşitsizlik elde edilir.

Şimdi bu teoremin bir sonucunu verelim.

Sonuç 3.2.2: Eğer $A \in (bv^p, c_0)$ veya $A \in (bv^p, c)$ ise bu taktirde L_A kompakt dönüşümünün olması için gerek ve yeter şart

$$\lim_{r\to\infty}\|A\|^{(r)}_{(bv^p,\ell_\infty)} = 0 \tag{3.18}$$

olmasıdır. Ayrıca $A \in (bv^p, \ell_\infty)$ olsun. Eğer $\lim_{r\to\infty}\|A\|^{(r)}_{(bv^p,\ell_\infty)} = 0$ ise bu durumda L_A kompakttır.

İspat: (Yeterlilik). $A \in (bv^p, c_0)$ ve $\lim_{r\to\infty}\|A\|^{(r)}_{(bv^p,\ell_\infty)} = 0$ olsun. Bu durumda Teorem 3.2.1 (a) şıkkı nedeniyle

$$\|L_A\|_{\chi} = \lim_{r\to\infty}\|A\|^{(r)}_{(bv^p,\ell_\infty)} = 0$$

elde edilir. Şu halde Sonuç 3.1.6 (a) şıkkından L_A kompakttır.

(Gereklilik). L_A kompakt ise aynı teorem ve sonuçtan

$$\lim_{r\to\infty}\|A\|^{(r)}_{(bv^p,\ell_\infty)} = 0$$

elde edilir.

Eğer $A \in (bv^p, \ell_\infty)$ ise benzer olarak L_A nın kompakt olduğu görülür.

Dikkat edelim ki, $A \in (bv^p, \ell_\infty)$ olduğunda L_A nın kompaktlığı için

$$\lim_{r\to\infty}\|A\|^{(r)}_{(bv^p,\ell_\infty)}=0$$

yeter şart olup fakat gerek şart değildir. Bunu görmek için aşağıdaki örneği inceleyelim.

Örnek 3.2.3 $n=0,1,...$ için $A_n=e^{(0)}$ biçiminde tanımlanan $A=(a_{nk})$ matrisini göz önüne alalım. Bu durumda $\forall n$ için

$$\left\{\sum_{k=0}^{\infty}\left|\sum_{j=k}^{\infty}a_{nj}\right|^q\right\}^{\frac{1}{q}}=\left(\left|\sum_{j=0}^{\infty}a_{nj}\right|^q+\left|\sum_{j=1}^{\infty}a_{nj}\right|^q+\left|\sum_{j=2}^{\infty}a_{nj}\right|^q+...\right)^{\frac{1}{q}}=1$$

olduğundan

$$\sup_n\left(\sum_{k=0}^{\infty}\left|\sum_{j=k}^{\infty}a_{nj}\right|^q\right)^{\frac{1}{q}}=1<\infty$$

bulunur ve ayrıca

$$\sup_k\left(k^{\frac{1}{q}}\left|\sum_{j=k}^{\infty}a_{nj}\right|^q\right)^{\frac{1}{q}}=0<\infty$$

elde edilir. Şu halde Teorem 2.2.1 (a) şıkkından dolayı $A\in(bv^p,\ell_\infty)$ dur. Ayrıca $\forall n$ için

$$\|A\|^{(r)}_{(bv^p,\ell_\infty)}=\sup_{n>r}\left(\sum_{k=0}^{\infty}\left|\sum_{j=k}^{\infty}a_{nj}\right|^q\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$=\sup_{n>r}\left|\sum_{j=0}^{\infty}a_{nj}\right|=1$$

olduğundan

$$\lim_{r\leftarrow\infty}\|A\|^{(r)}_{(bv^p,\ell_\infty)}=1>0$$

dır. Buna rağmen $\forall x\in bv^p$ için

$$L_A(x) = A(x) = \sum_{k=o}^{\infty} a_{nk} x_k = (\underbrace{a_{n_0}}_{1} x_0) = (x_0) = x_0 e$$

dönüşümü kompakttır.

Teorem 3.2.4.: A sonsuz matris, $1 < p < \infty$, $q = \dfrac{p}{(p-1)}$ ve r pozitif tamsayı olsun. Ayrıca

$$\|A\|_{(bv^p, \ell_1)}^{(r)} = \sup_{\substack{N \subset N_o / \{0,1,\ldots,r\} \\ N \text{ sonlu}}} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \left| \sum_{n \in N} \left(\sum_{j=k}^{\infty} a_{nj} \right) \right|^q \right)^{\frac{1}{q}}$$

alalım. Eğer $A \in (bv^p, \ell_1)$ ise bu taktirde

$$\lim_{r \to \infty} \|A\|_{(bv^p, \ell_1)}^{(r)} \leq \left\| L_A \right\|_{\chi} \leq 4. \lim_{r \to \infty} \|A\|_{(bv^p, \ell_1)}^{(r)} \tag{3.19}$$

dır.

İspat: $\forall x = (x_k)_{k=0}^{\infty} \in \ell_1$ dizisinin $x = \sum_{k=0}^{\infty} x_k e^{(k)}$ biçiminde tek bir gösterimi vardır. Şimdi $r = 0,1,\ldots$ için $P_r : \ell_1 \to \ell_1$ dönüşümünü $P_r(x) = (x_0, x_1, \ldots, x_r, 0, 0, \ldots)$ biçiminde tanımlayalım. Bu durumda

$$\|I - P_r\| = \sup_{x \in \ell_1} \frac{\|(I - P_r)(x)\|}{\|x\|} = \sup_{x \in \ell_1} \frac{\|(0, 0, \ldots, 0, x_{r+1}, \ldots)\|}{\sum_{k=0}^{n} |x_k|}$$

$$= \sup_{x \in \ell_1} \frac{\sum_{k=r+1}^{\infty} |x_k|}{\sum_{n=0}^{\infty} |x_k|} \leq 1$$

olur. Ayrıca $x = (0, 0, \ldots, 0, x_{r+1}, \ldots) \in \ell_1$ için

$$\frac{\|(\mathrm{I}-\mathrm{P_r})(\mathrm{x})\|}{\|\mathrm{x}\|}=1$$

olduğuna göre $\|\mathrm{I}-\mathrm{P_r}\|=1$ bulunur. Buradan Teorem 3.1.5 nedeniyle

$$\lim_{\mathrm{r}\to\infty}\underbrace{\sup_{\mathrm{x}\in\mathrm{Q}}\|(\mathrm{I}-\mathrm{P_r})(\mathrm{x})\|}_{\|\mathrm{A}\|^{(\mathrm{r})}_{(\mathrm{bv^p},\ell_1)}}=\chi(\mathrm{Q})=\|\mathrm{L_A}\|_\chi$$

olur. $\sup_{\mathrm{x}\in\mathrm{Q}}\|(\mathrm{I}-\mathrm{P_r})(\mathrm{x})\|=\|\mathrm{A}^{(\mathrm{r})}\|_{(\mathrm{bv^p},\ell_1)}$ olduğu göz önüne alınırsa (3.19) elde edilir.

(3.19) eşitsizliği nedeniyle aşağıdaki sonuç verilebilir.

Sonuç 3.2.5: A matrisi Teorem 3.2.4 şartlarını sağlasın ve $A\in\left(bv^p,\ell_1\right)$ olsun. Bu taktirde

L_A nın kompakt olması için gerek ve yeter şart $\lim_{r\to\infty}\|A\|^{(r)}_{(bv^p,\ell_\infty)}=0$ olmasıdır.

Teorem 3.2.6: A sonsuz matris, $1<p<\infty$, $q=\dfrac{p}{(p-1)}$ ve r pozitif tamsayı olsun. Ayrıca

$$\|A\|^{(r)}_{(bv^p,bv)}=\sup_{\substack{N\subset\mathrm{N}_o/\{0,1,\ldots,r\}\\ N\ sonlu}}\left(\sum_{k=0}^{\infty}\left|\sum_{n\in N}\left(\sum_{j=k}^{\infty}a_{nj}-a_{n-1,j}\right)\right|^q\right)^{\frac{1}{q}}$$

diyelim. Bu taktirde

$$A\in\left(bv^p,bv\right)$$

olduğunda

$$\lim_{r\leftarrow\infty}\|A\|^{(r)}_{(bv^p,bv)}\le\|L_A\|_\chi\le 4.\lim_{r\leftarrow\infty}\|A\|^{(r)}_{(bv^p,bv)} \tag{3.20}$$

İspat: $(b^{(k)})_{k=0}^{\infty}$, bv nin Schauder bazı olsun. Bu durumda her $x\in bv$ için

$$x=\sum_{k=0}^{\infty}\left(x_k-x_{k-1}\right)b^{(k)},\ \text{dir.}$$

tek türlü yazılabilir. Eğer $P_r : bv \to bv$ dönüşümü

$$P_r(x) = \sum_{k=0}^{r} \left(x_k - x_{k-1} \right) b^{(k)}$$

ile tanımlarsak

$$P_r(x) = (I - P_r)(x) = (x_0 - x_{-1})b^{(0)} + (x_1 - x_0)b^{(1)} + \ldots + (x_r - x_{r-1})b^{(r)}$$

$$= \left(x_0, x_0, \ldots\right) + \left(0, x_1 - x_0, x_1 - x_0, \ldots\right) + \ldots + \left(0, \ldots, 0, \overset{\substack{x_{-1}=0 \\ r.\text{yer}}}{x_r - x_{r-1}}, x_r - x_{r-1}, \ldots \right)$$

$$= \left(x_0, x_1, \ldots, x_{r-1}, x_r, x_r, \ldots\right)$$

olacağından

$$(I - P_r)(x) = x - P_r(x) = \left(0, 0, \ldots, 0, x_{r+1} - x_r, x_{r+2} - x_r, \ldots \right)$$

yazılabilir. Böylece Teorem 3.2.4 ve Teorem 3.1.5 göz önüne alınarak (3.20) eşitsizliği elde edilir.

Teorem 3.2.6 ve Sonuç 3.1.6’dan aşağıdaki sonuç verilebilir.

Sonuç 3.2.7: A matrisi Teorem 3.2.6 daki şartları sağlasın ve $A \in \left(bv^p, bv\right)$ olsun. Bu taktirde

L_A nın kompakt olması için gerek ve yeter koşul $\lim_{r\to\infty} \|A\|_{(bv^p, bv)}^{(r)} = 0$ olmasıdır.

KAYNAKLAR

Akhmerov, R. R., (1992) Measures of Noncompactness and Condensing Operators, Operator Theory: Advances and Applications, 55 ***Birkhauser Verlag***, Basel

Banás, J., Goebl, K., (1980) Measures of Noncompactness in Banach Spaces, Lecture Notes in Pure and Applied Mathematics 60, ***Marcel Dekker***, New York and Basel

Jarrah, A. M., (1998) BK Spaces, Bases and Linear Operators, ***Rend. Circ. Mat. Palermo I***I, 52: 177-191

Kreyszig, E. (1989) Introductory Functional Analysis with Applications. ***John Wiley & Sons Inc***, New York, Chichester, Brisbane, Toronto, 688s

Maddox, I.J. (1970) Elements of Functional Analysis. ***Cambridge University Pres***, 208s

Malkowsky, E., Rakočević, V., (1998) The Measures of Noncompactness of Linear Operators Between Certain Sequence Spaces, ***Acta Sci. Math (Szeged)***, 64: 151-170

Malkowsky, E., Rakočević, V., Žıvković, S., (2002) Matrix Transformations BetweenThe Sequence Space BV^p and Certain BK Spaces, Bulletin, Classe des Sciences Mathématiques et Naturelles, Sciences Mathématiques Naturelles/ Sciences Mathematiques Vol. CXXIII27: 33-46

Malkowsky, E., Rakočević, V.,(2000) An Introduction into TheTheory of Sequence Spaces and Measures of Noncompactness, Zbornik radova9: 7, ***Matematički Institut SANU***, Belgrade 143-234

Malkowsky, E.,(1987) Klassen von Matrix Abbildungen in Paranormierten ***FR-Räumen, Analysis****7*: 275-292

Malkowsky, E.,(2002) Linear Operators Between Some Matrix Domains, ***Rend. Circ. Mat. Palermo II***, 68: 641-655

Stieglitz, M., Tiesz H., (1977) Matrixtransformationen von Folgenraumen Eine Ergebnisübersicht, ***Math. Z.***, 154, 1-16.

Şuhubi, E.S., (2001) Fonsiyonel Analiz, ***İstanbul Teknik Üniversitesi Vakfı*** No:38, s638

Wilansky, A., (1964) Functional Analysis, ***Blaisdell Publishing Company***, New York, s291

Wilansky, A., (1984) Summability Through Functional Analysis, ***Nort-Holland Mathematics Studies*** Nort-Holland, 85, s318

ÖZGEÇMİŞ

Ebru MUTLU 1978 yılında Burdur'da doğdu. İlkokulu Uşak Mehmetçik İlkokulunda, ortaokulu Uşak Besim Atalay Ortaokulu ve lise öğretimini ise Uşak Lisesi'nde tamamladıktan sonra 1999 yılında Pamukkale Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümünden mezun oldu.

Bir yıl özel bir dershanede çalıştıktan sonra, dört yıl özel bir bankada çalıştı. 2004 yılından itibaren Pamukkale Üniversitesi Eğitim Fakültesi Sınıf Öğretmenliği Bölümünde Öğretim Görevlisi olarak çalışmaktadır.

2006 yılında Pamukkale Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Yüksek Lisans programına başladı. Halen Pamukkale Üniversitesi Eğitim Fakültesi Sınıf Öğretmenliği Bölümünde Öğretim Görevlisi olarak çalışmaktadır.