ZAMAN SKALASINDA İKİNCİ MERTEBEDEN LİNEER OLMAYAN SINIR DEĞER PROBLEMLERİ

Emel AŞCI

Haziran 2007

DENİZLİ

ZAMAN SKALASINDA İKİNCİ MERTEBEDEN LİNEER OLMAYAN SINIR DEĞER PROBLEMLERİ

Pamukkale Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü

Yüksek Lisans Tezi

Matematik Anabilim Dalı

Emel AŞCI

Danışman: Yard. Doç. Dr. İsmail YASLAN

Haziran 2007
DENİZLİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ ONAY FORMU

Emel Aşcı tarafından Yard. Doç. Dr. İsmail YASLAN yönetiminde hazırlanan "**Zaman Skalasında İkinci Mertebeden Lineer Olmayan Sınır Değer Problemleri**" başlıklı tez tarafımızdan okunmuş, kapsamı ve niteliği açısından bir Yüksek Lisans tezi olarak kabul edilmiştir.

Prof. Dr. Mehmet Ali SARIGÖL
Jüri Başkanı

Doç. Dr. Sadulla JAFAROV
Jüri Üyesi

Yard. Doç. Dr. İsmail YASLAN
Jüri Üyesi (Danışman)

Pamukkale Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun
…../…../……..tarih ve ………..sayılı kararıyla onaylanmıştır.

Prof. Dr. Mehmet Ali SARIGÖL
Müdür

TEŞEKKÜR

Bu çalışmayı hazırlarken değerli vakitlerini ve yardımlarını esirgemeyen, her safhasında bilgi ve tecrübelerine başvurduğum Sayın Hocam Yard. Doç. Dr. İsmail YASLAN' a en içten teşekkürlerimi sunarım. Ayrıca ilk eğitimime başladığım günden bugüne kadar bana maddi manevi her türlü desteği veren annem Melahat Eriş' e ve eşim Mustafa Aşcı' ya teşekkürü bir borç bilirim.

Emel AŞCI

Bu tezin tasarımı, hazırlanması, yürütülmesi, araştırmalarının yapılması ve bulgularının analizlerinde bilimsel etiğe ve akademik kurallara özenle riayet edildiğini; bu çalışmanın doğrudan birincil ürünü olmayan bulguların, verilerin ve materyallerin bilimsel etiğe uygun olarak kaynak gösterildiğini ve alıntı yapılan çalışmalara atfedildiğini beyan ederim.

İmza :

Öğrenci Adı Soyadı : Emel AŞCI

ÖZET

ZAMAN SKALASINDA İKİNCİ MERTEBEDEN LİNEER OLMAYAN SINIR DEĞER PROBLEMLERİ

AŞCI, Emel
Yüksek Lisans Tezi, Matematik ABD
Tez Yöneticisi: Yard. Doç. Dr. İsmail Yaslan

Haziran 2007, 42 sayfa

Bu tez üç bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölümde, ele alınan problem tanıtılmış ve benzer diğer problemlerle karşılaştırılmıştır.

İkinci bölümde, bir sonraki bölümde kullanılacak temel tanım ve teoremler verilmiştir.

Üçüncü bölümde, yardımcı lineer sınır değer probleminin Green fonksiyonu yapılmış ve ardından da Green fonksiyonu kullanılarak lineer olmayan sınır değer problemi lineer olmayan integral denkleme indirgenmiştir. Koni üzerindeki sonuçlar ve Leggett-Williams sabit nokta teoremi ile zaman skalasında ikinci mertebeden lineer olmayan sınır değer problemlerinin bir, iki ve üç pozitif çözümleri araştırılmıştır.

Anahtar kelimeler: Zaman skalası, sabit nokta teoremleri, koni, pozitif çözümler

Prof. Dr. Mehmet Ali SARIGÖL
Doç. Dr. Sadulla JAFAROV
Yard. Doç. Dr. İsmail YASLAN

ABSTRACT

NONLINEAR SECOND ORDER BOUNDARY VALUE PROBLEMS ON TIME SCALES

AŞCI, Emel
M. Sc. Thesis in Mathematics
Supervisor: Asst. Prof. Dr. İsmail Yaslan

June 2007, 42 pages

This thesis consist of three chapters.

In chapter 1, investigated problem is introduced and compared with the similar problems.

In chapter 2, some needed auxiliary theorems and definitions which we used in chapter 3 are given.

In chapter 3, a Green's function of the auxiliary linear boundary value problem is constructed by means of which the nonlinear boundary value problem is reduced to a nonlinear integral equation. By the results on cone and the Leggett-Williams fixed point theorem one, two and three positive solutions of the nonlinear second order boundary value problems on time scales are investigated.

Key Words: Time scale, fixed point theorem, cone, positive solutions

Prof. Dr. Mehmet Ali SARIGÖL
Assoc. Prof. Dr. Sadulla JAFAROV
Asst. Prof. Dr. İsmail YASLAN

İÇİNDEKİLER

SİMGELER ve KISALTMALAR DİZİNİ

Simgeler	Açıklama
$\mathbb{R}$	Reel sayılar
$\mathbb{Z}$	Tamsayılar
$\mathbb{N}$	Doğal sayılar
$\mathbb{N}_0$	Negatif olmayan tamsayılar
$\mathbb{Q}$	Rasyonel sayılar
$\mathbb{C}$	Kompleks sayılar
$\mathbb{T}$	Zaman skalası
σ	İleri atlama fonksiyonu
ρ	Geri atlama fonksiyonu
μ	Graininess fonksiyonu
f^{Δ}	f ' in delta türevi
f'	f fonksiyonunun türevi
Δf	f ' in ileri fark operatörü
H_n	Harmonik fonksiyon
C_{rd}	Sağ-yoğun sürekli fonksiyonlar kümesi
C_{rd}^1	Diferansiyellenebilir, türevi sağ-yoğun sürekli fonksiyonlar kümesi
f^{∇}	f ' in nabla türevi
∇f	f ' in geri fark operatörü
C_{ld}	Sol-yoğun sürekli fonksiyonlar kümesi
C_{ld}^1	Diferansiyellenebilir, türevi sol-yoğun sürekli fonksiyonlar kümesi
$C[a,b]$	$[a,b]$ aralığındaki reel değerli sürekli fonksiyonlar kümesi
$W_t(y,z)$	y ve z fonksiyonlarının t noktasındaki Wronskianı
$G(t,s)$	Green fonksiyonu
$C_{rd}[t_1,t_n]$	$[t_1,t_n]$ aralığındaki sağ-yoğun sürekli fonksiyonlar kümesi
$\|y\|$	y fonksiyonunun normu
i_p	Sabit nokta indeksi

1.GİRİŞ

Bu tez çalışmasında zaman skalası üzerinde ikinci mertebeden lineer olmayan diferansiyel denklemler için sınır değer probleminin bir, iki ve üç çözümünün varlığı incelenmiştir. İncelenen sınır değer problemi uygun bir Green fonksiyonu yardımıyla integral denkleme indirgenmiştir. İntegral denklemin çözümü de Lan ve Guo tarafından verilen bir lemma ve Leggett-Williams sabit nokta teoremi uygulanarak incelenmiştir.

Zaman skalasında ortaya konulmuş sınır değer problemini açıklayalım. $p,q:[t_1,t_n]\to(0,\infty)$ fonksiyonları için $p\in C^{\Delta}[t_1,t_n)$ ve $q\in C[t_1,t_n]$ olsun. $t_i\in\mathbb{T}_K^K$, $i\in\{1,2,3,....,n\}$ için $t_1<t_2<....<t_n$ ve $\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \delta\in[0,\infty)$ için $\alpha\gamma+\alpha\delta+\beta\gamma>0$ koşulları sağlandığında $a_i,b_i\in[0,\infty)$, $i\in\{2,3,....n-1\}$ olmak üzere

$$\left(py^{\nabla}\right)^{\Delta}(t)-q(t)y(t)+h(t)f\left(t,y(t)\right)=0,\qquad t_1<t<t_n$$

$$\alpha y(t_1)-\beta p(t_1)y^{\nabla}(t_1)=\sum_{i=2}^{n-1}a_iy(t_i)$$

$$\gamma y(t_n)+\delta p(t_n)y^{\nabla}(t_n)=\sum_{i=2}^{n-1}b_iy(t_i)$$

ikinci mertebeden lineer olmayan Sturm-Liouville n-nokta sınır değer problemi göz önüne alınmıştır.

Anderson (2002) makalesinde, $[0,T]\subset\mathbb{T}$ olduğunda $\alpha>0$, $\eta\in\left(0,\rho(T)\right)\subset\mathbb{T}$ ve $0<\alpha\eta<T$ olmak üzere

$$u^{\Delta\nabla}(t)+f\left(t,u(t)\right)=0,$$

$$u(0)=0,\qquad \alpha u(\eta)=u(T)$$

üç nokta sınır değer problemine Leggett-Williams sabit nokta teoremi uygulayarak koni üzerindeki en az üç çözüm için koşullar elde edilmiş, ayrıca Krasnoselskii sabit nokta teoremi ile de en az bir pozitif çözüm şartları incelenmiştir. Bu tezde ele alınan problemde $p(t)=1,\ q(t)=0,\ h(t)=1,\ \alpha=1,\ \beta=0,\ \gamma=1,\ \delta=0,\ a_i=0\ (i=2,\ ...,\ n\text{-}1),\ b_2=\alpha,$

$b_i = 0\,(i = 3,\ \ldots,\ n\text{-}1)$

alınırsa, Anderson (2002) makalesindeki probleme karşı geldiğinden bu tezde ele alınan problem daha geneldir.

Ayrıca Atıcı ve Guseinov' un (2002) makalesinde ise

$$-\left[p(t)y^{\nabla}(t)\right]^{\Delta} + q(t)y(t) = f\left(t, y(t)\right),\quad t \in \left[a, \sigma(b)\right]$$
$$\alpha y(a) - \beta p(a)y^{\nabla}(a) = 0$$
$$\gamma y\left(\sigma(b)\right) + \delta p\left(\sigma(b)\right)y^{\nabla}\left(\sigma(b)\right) = 0$$

iki nokta sınır değer problemi incelenmiştir. Bu tezde ele alınan problemde

$h(t) = 1,\ a_i = 0\ (i = 2,\ \ldots,\ n\text{-}1),\ b_i = 0\ (i = 2,\ \ldots,\ n\text{-}1)$

alınırsa, Atıcı ve Guseinov' un (2002) makalesindeki probleme karşı geldiğinden yine bu tezde ele alınan problem daha geneldir.

İncelenen ikinci mertebeden lineer olmayan n-nokta sınır değer problemi, Sun ve Li (2004), Kaufmann (2003) ve Kaufmann ve Raffoul'un (2004) makalelerindeki üç nokta sınır değer problemlerinin de genel halidir. Anderson vd. (2004), Peterson vd. (2004) ve DaCunha vd. (2004) tarafından zaman skalasında diğer bağlantılı üç nokta problemleri incelenmiştir. n-nokta zaman skalası problemleri ile ilgili çalışmalar ise Anderson (2003, 2004), Kong ve Kong da (2003) yer almaktadır. Ayrıca Ma (2003), Ma ve Thompson' ın (2004) makalelerinde de $\mathbb{T} = \mathbb{R}$ için n-nokta problemleri ele alınmıştır. Zaman skalasında dinamik denklemlerin çözümlerinin varlığı ile ilgili çalışmalar ise Chyan ve Henderson (2002), Erbe ve Peterson (1999) ve (2000) ve Henderson (2000) makalelerinde bulunabilir. Zaman skalası üzerindeki dinamik denklemlerle ilgili genel bilgiler Aulbach ve Hilger (1990) ve Hilger de (1990) yer almaktadır. Daha da geniş bilgi için Bohner ve Peterson (2001, 2003) kitapları incelenebilir.

2. ZAMAN SKALASI ve KOMPAKT OPERATÖR İLE İLGİLİ TEMEL BİLGİLER

Bu bölümde üçüncü bölümde kullanılan temel tanım ve teoremler verilmektedir.

2.1 Zaman Skalası ile İlgili Temel Tanım ve Teoremler

Tanım 2.1.1: $\mathbb{R}$ ' nin boş olmayan kapalı altkümesine zaman skalası denir. Örneğin $\mathbb{R}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{N}$, $\mathbb{N}_0$ kümeleri zaman skalasıdır. $[0,1]\cup[2,3]$, $[0,1]\cup\mathbb{N}$ ve Cantor kümesi zaman skalası olmasına rağmen $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$, $\mathbb{C}$, $(0,1)$ kümeleri zaman skalası değildir. Zaman skalası $\mathbb{T}$ ile gösterilir.

Tanım 2.1.2: $\mathbb{T}$ zaman skalası olsun. Her $t\in\mathbb{T}$ için

ileri atlama fonksiyonu

$\sigma:\mathbb{T}\to\mathbb{T}$, $\sigma(t)=\inf\{s\in\mathbb{T}\ ,\ s>t\}$,

geri atlama fonksiyonu

$\rho:\mathbb{T}\to\mathbb{T}$, $\rho(t)=\sup\{s\in\ \mathbb{T}\ ,\ s<t\}$

ve graininess fonksiyonu

$\mu:\mathbb{T}\to[0,\infty)$, $\mu(t)=\sigma(t)-t$

ile tanımlıdır.

Tanım 2.1.3: $t\in\mathbb{T}$ noktası eğer

$\sigma(t)>t$ ise sağ-yayılmış,

$\sigma(t)=t$ ise sağ-yoğun,

$\rho(t)<t$ ise sol-yayılmış,

$\rho(t)=t$ ise sol-yoğun,

$\rho(t)<t<\sigma(t)$ ise izole,

$\rho(t)=t=\sigma(t)$ ise yoğundur denir.

Tanım 2.1.4: Eğer $\mathbb{T}$ sol-yayılmış maksimum m' ye sahipse $\mathbb{T}^{K} = \mathbb{T} - \{m\}$, diğer durumlarda $\mathbb{T}^{K} = \mathbb{T}$ alınır.

Tanım 2.1.5: Kabul edelim ki $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ fonksiyon olsun. $f^{\sigma} : \mathbb{T}^{K} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu $\forall t \in \mathbb{T}$ için $f^{\sigma}(t) = f(\sigma(t))$ ile tanımlanır.

Örnek 2.1.1: Eğer $\mathbb{T} = \mathbb{R}$ ise her $t \in \mathbb{R}$ için

$$\sigma(t) = \inf\{s \in \mathbb{R},\ s > t\} = \inf(t, \infty) = t$$

ve benzer olarak $\rho(t) = t$ bulunur. O halde her $t \in \mathbb{R}$ yoğundur. Ayrıca $\forall t \in \mathbb{R}$ için $\mu(t) = 0$ dır.

Örnek 2.1.2: Eğer $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$ ise her $t \in \mathbb{Z}$ için

$$\sigma(t) = \inf\{s \in \mathbb{Z},\ s > t\} = \inf\{t+1,\ t+2,\ t+3, ...\} = t+1,$$

$\rho(t) = t - 1$ olur. O halde her $t \in \mathbb{Z}$ izoledir. Ayrıca $\forall t \in \mathbb{Z}$ için $\mu(t) = 1$ dir.

Tanım 2.1.6: Kabul edelim ki $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ fonksiyon ve $t \in \mathbb{T}^{K}$ olsun. Herhangi bir $\varepsilon > 0$ için t'nin öyle bir U komşuluğu (herhangi bir $\delta > 0$ için $U = (t-\delta, t+\delta) \cap \mathbb{T}$) vardır ki $f^{\Delta}(t)$ sayısı

$$\forall s \in U \text{ için } \left| \left[f^{\sigma}(t) - f(s)\right] - f^{\Delta}(t)\left[\sigma(t) - s\right] \right| \le \varepsilon \left|\sigma(t) - s\right|$$

şeklinde tanımlanır. Bu $f^{\Delta}(t)$ sayısına f fonksiyonunun t noktasındaki *delta türevi* veya *Hilger türevi* denir.

Örnek 2.1.3:

i. $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu $\alpha \in \mathbb{R}$ olmak üzere $\forall t \in \mathbb{T}$ için $f(t) = \alpha$ şeklinde tanımlansın. O halde $\varepsilon > 0$ olmak üzere $\forall t \in \mathbb{T}$ için

$$\left| \left[f(\sigma(t)) - f(s)\right] - 0.\left[\sigma(t) - s\right] \right| = |\alpha - \alpha| = 0 \le \varepsilon \left|\sigma(t) - s\right|$$

sağlandığından $f^{\Delta}(t) = 0$ dır.

ii. $f:\mathbb{T}\to\mathbb{R}$ fonksiyonu $\forall t\in\mathbb{T}$ için $f(t)=t$ ile verilsin. $\varepsilon>0$ olmak üzere $\forall s\in\mathbb{T}$ için $\left|(f(\sigma(t))-f(s))-1.(\sigma(t)-s)\right|=\left|\sigma(t)-s-(\sigma(t)-s)\right|=0\leq\varepsilon\left|\sigma(t)-s\right|$ sağlandığından $f^{\Delta}(t)=1$ elde edilir.

Teorem 2.1.1: Kabul edelim ki $f:\mathbb{T}\to\mathbb{R}$ ve $t\in\mathbb{T}^{K}$ olsun.

i. Eğer f, t noktasında türevlenebilir ise o zaman f, t noktasında süreklidir.

ii. Eğer f, t noktasında sürekli ve t sağ-yayılmış ise o zaman f, t noktasında

$$f^{\Delta}(t)=\frac{f(\sigma(t))-f(t)}{\mu(t)}$$ türevi ile türevlenebilir.

iii. Eğer t sağ-yoğun ise o zaman f ' in delta türevlenebilmesi için gerek ve yeter şart $\lim\limits_{s\to t}\frac{f(t)-f(s)}{t-s}$ limitinin sonlu bir sayı olarak var olmasıdır. Bu durumda $f^{\Delta}(t)=\lim\limits_{s\to t}\frac{f(t)-f(s)}{t-s}$ dir.

iv. Eğer f, t ' de delta türevlenebilir ise $f(\sigma(t))=f(t)+\mu(t)f^{\Delta}(t)$ dir.

Örnek 2.1.4:

i. $\mathbb{T}=\mathbb{R}$ için Teorem 2.1.1 (iii) sağlanır. $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ fonksiyonunun $t\in\mathbb{R}$ ' de delta türevlenebilir olması için gerek ve yeter şart

$$f'(t)=\lim_{s\to t}\frac{f(t)-f(s)}{t-s}$$

limitinin var olmasıdır. O halde

$$f^{\Delta}(t)=\lim_{s\to t}\frac{f(t)-f(s)}{t-s}=f'(t)$$

bulunur.

ii. $\mathbb{T}=\mathbb{Z}$ ise Teorem 2.1.1 (ii) sağlanır. $f:\mathbb{Z}\to\mathbb{R}$ fonksiyonunun $t\in\mathbb{Z}$ ' de delta türevlenebilmesi için gerek ve yeter şart

$$f^{\Delta}(t)=\frac{f(\sigma(t))-f(t)}{\mu(t)}=\frac{f(t+1)-f(t)}{1}=f(t+1)-f(t)=\Delta f(t)$$

olmasıdır. Burada Δ fark denklemlerinde kullanılan ileri fark operatörüdür.

Teorem 2.1.2: Kabul edelim ki $f,g:\mathbb{T}\to\mathbb{R}$ fonksiyonları $t\in\mathbb{T}^{K}$' da delta türevlenebilir olsun. O zaman

i. $f+g:\mathbb{T}\to\mathbb{R}$ fonksiyonunun t noktasındaki delta türevi $(f+g)^{\Delta}(t)=f^{\Delta}(t)+g^{\Delta}(t)$ dir.

ii. Herhangi bir α sabiti için $\alpha f:\mathbb{T}\to\mathbb{R}$ fonksiyonunun t noktasındaki delta türevi

$$(\alpha f)^{\Delta}(t)=\alpha f^{\Delta}(t)$$

ile verilir.

iii. $fg:\mathbb{T}\to\mathbb{R}$ fonksiyonunun t noktasındaki delta türevi

$$(fg)^{\Delta}(t)=f^{\Delta}(t)g(t)+f(\sigma(t))g^{\Delta}(t)=f(t)g^{\Delta}(t)+f^{\Delta}(t)g(\sigma(t))$$

şeklindedir.

iv. Eğer $f(t)f(\sigma(t))\neq 0$ ise $\frac{1}{f}$ fonksiyonunun t noktasındaki delta türevi

$$\left(\frac{1}{f}\right)^{\Delta}(t)=-\frac{f^{\Delta}(t)}{f(t)f(\sigma(t))}$$

dir.

v. Eğer $g(t)g(\sigma(t))\neq 0$ ise $\frac{f}{g}$ fonksiyonunun t noktasındaki delta türevi

$$\left(\frac{f}{g}\right)^{\Delta}(t)=\frac{f^{\Delta}(t)g(t)-f(t)g^{\Delta}(t)}{g(t)g(\sigma(t))}$$

ile verilir.

Örnek 2.1.5: $h>0$ olmak üzere $\mathbb{T}=h\mathbb{Z}=\{hz: z\in\mathbb{Z}\}$ olsun. $\forall t\in\mathbb{T}$ için

$$\sigma(t)=\inf\{s\in\mathbb{T}: s>t\}=\inf\{t+hn: n\in\mathbb{N}\}=t+h$$

$$\rho(t)=\sup\{s\in\mathbb{T}: s<t\}=\sup\{t-hn: n\in\mathbb{N}\}=t-h$$

$$\mu(t)=\sigma(t)-t=t+h-t=h$$

sağlanır. $f:\mathbb{T}\to\mathbb{R}$ fonksiyonu ve $\forall t\in\mathbb{T}$ için

$$f^{\Delta}(t)=\frac{f(\sigma(t))-f(t)}{\mu(t)}=\frac{f(t+h)-f(t)}{h}$$

türevi ile belirlenir.

Örnek 2.1.6: H_n harmonik sayıları tekrarlı olarak

$$H_0=0 \text{ ve } n\in\mathbb{N} \text{ için } H_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$$

şeklinde verilsin. Zaman skalası olarak $\mathbb{T}=\{H_n : n\in\mathbb{N}_0\}$ tanımlayalım. Bu zaman skalası için

$$\sigma(H_n)=\sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{k},$$

$$\rho(H_n)=\begin{cases}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k} & n\geq 2\\ 0 & n=0,1\end{cases} \qquad \text{ve}$$

$$\mu(H_n)=\frac{1}{n+1}$$

bulunur. Eğer $f:\mathbb{T}\to\mathbb{R}$ bir fonksiyon ise $f^{\Delta}(H_n)=\dfrac{f(H_{n+1})-f(H_n)}{\mu(H_n)}=(n+1)\Delta f(H_n)$

olarak bulunur.

Tanım 2.1.7: Eğer $f:\mathbb{T}\to\mathbb{R}$ fonksiyonunun sağ-yoğun noktalarda sağdan limiti var ve sol-yoğun noktalarda soldan limiti varsa bu fonksiyona *düzenli fonksiyon* denir.

Tanım 2.1.8: Eğer $f:\mathbb{T}\to\mathbb{R}$ fonksiyonu sağ-yoğun noktalarda sürekli ve sol-yoğun noktalarda soldan limiti varsa f fonksiyonuna *sağ-yoğun sürekli* veya *rd-sürekli* denir.

Tanım 2.1.9: $f:\mathbb{T}\to\mathbb{R}$ fonksiyonu için sağ-yoğun sürekli fonksiyonların kümesi

$$C_{rd}=C_{rd}(\mathbb{T})=C_{rd}(\mathbb{T},\mathbb{R})$$

ile gösterilir.

Tanım 2.1.10: $f:\mathbb{T}\to\mathbb{R}$ fonksiyonu türevlenebilir ve türevi sağ-yoğun sürekli ise

$$C_{rd}^{1}=C_{rd}^{1}(\mathbb{T})=C_{rd}^{1}(\mathbb{T},\mathbb{R})$$

ile gösterilir.

Teorem 2.1.3: Kabul edelim ki $f:\mathbb{T}\to\mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun.

i. Eğer f sürekli ise sağ-yoğun süreklidir.

ii. Eğer f sağ-yoğun sürekli ise düzenlidir.

iii. İleri atlama fonksiyonu $\sigma(t)$ sağ-yoğun süreklidir.

iv. Eğer f düzenli veya sağ-yoğun sürekli ise f^{σ} da düzenli veya sağ-yoğun süreklidir.

v. Kabul edelim ki f sürekli olsun. Eğer $g:\mathbb{T}\to\mathbb{R}$ fonksiyonu düzenli veya sağ-yoğun sürekli ise o zaman $f\circ g$ de düzenli veya sağ-yoğun süreklidir.

Tanım 2.1.11: $f:\mathbb{T}\to\mathbb{R}$ bir fonksiyon ve $t\in\mathbb{T}^{K}$ olsun. $F^{\Delta}(t)=f(t)$ şartını sağlayan $F:\mathbb{T}\to\mathbb{R}$ fonksiyonuna f fonksiyonunun *delta antitürevi* denir. O halde antitürev

$a,b\in\mathbb{T}$ için $\int_a^b f(t)\Delta t = F(b)-F(a)$

ile tanımlıdır.

Teorem 2.1.4: Her sağ-yoğun sürekli fonksiyon bir antitüreve sahiptir.

Teorem 2.1.5: Eğer $f\in C_{rd}$ ve $t\in\mathbb{T}^{K}$ ise o zaman

$$\int_t^{\sigma(t)} f(\tau)\Delta\tau = \mu(t)f(t)$$

sağlanır.

Teorem 2.1.6: Kabul edelim ki f ve g sağ-yoğun sürekli fonksiyonlar, $a, b, c\in\mathbb{T}$ ve $k\in\mathbb{R}$ olsun.

i. $\int_a^b [f(t)+g(t)]\Delta t = \int_a^b f(t)\Delta t + \int_a^b g(t)\Delta t$

ii. $\int_a^b kf(t)\Delta t = k\int_a^b f(t)\Delta t$

iii. $\int_a^b f(t)\Delta t = -\int_b^a f(t)\Delta t$

iv. $a < b < c$ için $\int_a^c f(t)\Delta t = \int_a^b f(t)\Delta t + \int_b^c f(t)\Delta t$

v. $\int_a^b f\left(\sigma\left(t\right)\right) g^{\Delta}(t)\Delta t = \left(fg\right)\left(b\right) - \left(fg\right)\left(a\right) - \int_a^b f^{\Delta}(t) g(t)\Delta t$

vi. $\int_a^b f(t) g^{\Delta}(t)\Delta t = \left(fg\right)\left(b\right) - \left(fg\right)\left(a\right) - \int_a^b f^{\Delta}(t) g\left(\sigma\left(t\right)\right)\Delta t$

vii. $\int_a^a f(t)\Delta t = 0$

viii. Eğer $[a,b)$ aralığında $\left|f(t)\right| \leq g(t)$ ise

$$\left|\int_a^b f(t)\Delta t\right| \leq \int_a^b g(t)\Delta t$$

sağlanır.

ix. Eğer $[a,b)$ aralığında $f(t) \geq 0$ ise

$$\int_a^b f(t)\Delta t \geq 0$$

sağlanır.

Örnek 2.1.7: $a,b \in \mathbb{T}$ ve f sağ-yoğun sürekli fonksiyon olsun.

i. Eğer $\mathbb{T} = \mathbb{R}$ ise

$$\int_a^b f(t)\Delta t = \int_a^b f(t)dt$$

olur. Sağ taraftaki integral analizden bildiğimiz Riemann integralidir.

ii. Eğer $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$ ise

$$\int_a^b f(t)\Delta t = \begin{cases} \sum_{t=a}^{b-1} f(t) & a < b \\ 0 & a = b \\ -\sum_{t=b}^{a-1} f(t) & a > b \end{cases}$$

sağlanır.

iii. Eğer $[a,b]$ aralığı sadece izole noktaları içeriyorsa

$$\int_a^b f(t)\Delta t = \begin{cases} \sum_{t\in[a,b)} f(t)\mu(t) & a<b \\ 0 & a=b \\ -\sum_{t\in[b,a)} f(t)\mu(t) & a>b \end{cases}$$

sağlanır.

Tanım 2.1.12: Eğer $\mathbb{T}$ sağ-yayılmış minimum m'ye sahipse $\mathbb{T}_K = \mathbb{T} - \{m\}$, diğer durumlarda $\mathbb{T}_K = \mathbb{T}$ olur.

Tanım 2.1.13: Kabul edelim ki $f:\mathbb{T}\to\mathbb{R}$ bir fonksiyon ve $t\in\mathbb{T}_K$ olsun. Herhangi bir $\varepsilon>0$ için t' nin öyle bir U komşuluğu (herhangi bir $\delta>0$ için $U=(t-\delta,t+\delta)\cap\mathbb{T}$) vardır ki $f^\nabla(t)$ sayısı

$\forall s\in U$ için $\left|\left[f(\rho(t))-f(s)\right]-f^\nabla(t)[\rho(t)-s]\right| \le \varepsilon|\rho(t)-s|$

şeklinde tanımlanır. Bu $f^\nabla(t)$ sayısına f fonksiyonunun t noktasındaki *nabla türevi* denir.

Tanım 2.1.14: $\nu(t):=t-\rho(t)$ ve $f^\rho:\mathbb{T}_K\to\mathbb{R}$ fonksiyonu $\forall t\in\mathbb{T}$ için $f^\rho(t)=f(\rho(t))$ olarak tanımlanır.

Teorem 2.1.7: Kabul edelim ki $f:\mathbb{T}\to\mathbb{R}$ bir fonksiyon ve $t\in\mathbb{T}_K$ olsun.

i. Eğer f, t noktasında nabla türevlenebilir ise o zaman f, t noktasında süreklidir.

ii. Eğer f, t noktasında sürekli ve t sol-yayılmış ise o zaman f, t noktasında

$$f^\nabla(t)=\frac{f(t)-f(\rho(t))}{\nu(t)}$$

türevi ile türevlenebilir.

iii. Eğer t sol-yoğun ise o zaman f' in nabla türevlenebilmesi için gerek ve yeter koşul

$$\lim_{s\to t}\frac{f(t)-f(s)}{t-s}$$

limitinin sonlu bir sayı olarak var olmasıdır. Bu durumda

$$f^{\nabla}(t)=\lim_{s\to t}\frac{f(t)-f(s)}{t-s}$$

dir.

iv. Eğer f, t ' de nabla türevlenebilir ise $f\left(\rho\left(t\right)\right)=f(t)-\nu(t)f^{\nabla}(t)$ dir.

Teorem 2.1.8: Kabul edelim ki $f,g:\mathbb{T}\to\mathbb{R}$ fonksiyonları $t\in\mathbb{T}_{K}$ ' da nabla türevlenebilir olsun. O zaman

i. $f+g:\mathbb{T}\to\mathbb{R}$ fonksiyonunun t noktasındaki nabla türevi

$$\left(f+g\right)^{\nabla}\left(t\right)=f^{\nabla}\left(t\right)+g^{\nabla}\left(t\right)$$

dir.

ii. Herhangi bir α sabiti için $\alpha f:\mathbb{T}\to\mathbb{R}$ fonksiyonunun t noktasındaki nabla türevi

$$\left(\alpha f\right)^{\nabla}\left(t\right)=\alpha f^{\nabla}\left(t\right)$$

ile verilir.

iii. $fg:\mathbb{T}\to\mathbb{R}$ fonksiyonunun t noktasındaki nabla türevi

$$\left(fg\right)^{\nabla}\left(t\right)=f^{\nabla}\left(t\right)g\left(t\right)+f\left(\rho\left(t\right)\right)g^{\nabla}\left(t\right)=f\left(t\right)g^{\nabla}\left(t\right)+f^{\nabla}\left(t\right)g\left(\rho\left(t\right)\right)$$

şeklindedir.

iv. Eğer $f\left(t\right)f\left(\rho\left(t\right)\right)\neq 0$ ise $\dfrac{1}{f}$ fonksiyonunun t noktasındaki nabla türevi

$$\left(\frac{1}{f}\right)^{\nabla}\left(t\right)=-\frac{f^{\nabla}\left(t\right)}{f\left(t\right)f\left(\rho\left(t\right)\right)}$$

dir.

v. Eğer $g\left(t\right)g\left(\rho\left(t\right)\right)\neq 0$ ise $\dfrac{f}{g}$ fonksiyonunun t noktasındaki nabla türevi

$$\left(\frac{f}{g}\right)^{\nabla}\left(t\right)=\frac{f^{\nabla}\left(t\right)g\left(t\right)-f\left(t\right)g^{\nabla}\left(t\right)}{g\left(t\right)g\left(\rho\left(t\right)\right)}$$

ile verilir.

Örnek 2.1.8: i. $\mathbb{T}=\mathbb{R}$ için

$$f^{\nabla}(t) = f'(t) = \lim_{h \to 0} \frac{f(t+h) - f(t)}{h}$$

türevi analizden bildiğimiz türeve dönüşür.

ii. $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$ için

$$f^{\nabla}(t) = \nabla f(t) := f(t) - f(t-1)$$

ifadesi fark analizdeki türevdir.

Tanım 2.1.15: Eğer $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu sol-yoğun noktalarda sürekli ve sağ-yoğun noktalarda sağdan limiti varsa f fonksiyonuna *sol-yoğun sürekli* veya *ld-sürekli* denir.

Tanım 2.1.16: $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu için sol-yoğun sürekli fonksiyonların kümesi

$$C_{ld} = C_{ld}(\mathbb{T}) = C_{ld}(\mathbb{T}, \mathbb{R})$$

ile gösterilir.

Tanım 2.1.17: $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu türevlenebilir ve türevi sol-yoğun sürekli ise

$$C_{ld}^{1} = C_{ld}^{1}(\mathbb{T}) = C_{ld}^{1}(\mathbb{T}, \mathbb{R})$$

ile gösterilir.

Tanım 2.1.18: $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon ve $t \in \mathbb{T}_{K}$ olsun. $F^{\nabla}(t) = f(t)$ şartını sağlayan $F : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ fonksiyonuna f fonksiyonunun *nabla antitürevi* denir. O halde

$a, b \in \mathbb{T}$ için $\displaystyle\int_{a}^{b} f(t)\nabla t = F(b) - F(a)$

ile tanımlıdır.

Teorem 2.1.9: Her sol-yoğun sürekli fonksiyon bir antitüreve sahiptir.

Teorem 2.1.10: Eğer $f \in C_{ld}$ ve $t \in \mathbb{T}_{K}$ ise

$$\int_{\rho(t)}^{t} f(\tau)\nabla\tau = \nu(t) f(t)$$

sağlanır.

Teorem 2.1.11: Kabul edelim ki f ve g sol-yoğun sürekli fonksiyonlar, $a, b, c \in \mathbb{T}$ ve $k \in \mathbb{R}$ olsun.

i. $\int_a^b [f(t)+g(t)]\nabla t = \int_a^b f(t)\nabla t + \int_a^b g(t)\nabla t$

ii. $\int_a^b kf(t)\nabla t = k\int_a^b f(t)\nabla t$

iii. $\int_a^b f(t)\nabla t = -\int_b^a f(t)\nabla t$

iv. $a<b<c$ için $\int_a^c f(t)\nabla t = \int_a^b f(t)\nabla t + \int_b^c f(t)\nabla t$

v. $\int_a^b f\left(\rho(t)\right) g^{\nabla}(t)\nabla t = (fg)(b)-(fg)(a)-\int_a^b f^{\nabla}(t)g(t)\nabla t$

vi. $\int_a^b f(t)g^{\nabla}(t)\nabla t = (fg)(b)-(fg)(a)-\int_a^b f^{\nabla}(t)g\left(\rho(t)\right)\nabla t$

vii. $\int_a^a f(t)\nabla t = 0$

viii. Eğer $[a,b)$ aralığında $|f(t)| \le g(t)$ ise

$$\left|\int_a^b f(t)\nabla t\right| \le \int_a^b g(t)\nabla t$$

olur.

ix. Eğer $[a,b)$ aralığında $f(t)\ge 0$ ise

$$\int_a^b f(t)\nabla t \ge 0$$

elde edilir.

Örnek 2.1.9: Kabul edelim ki $a,b\in\mathbb{T}$ ve f sol-yoğun sürekli fonksiyon olsun.

i. Eğer $\mathbb{T}=\mathbb{R}$ ise

$$\int_a^b f(t)\nabla t = \int_a^b f(t)dt$$

olur. Sağ taraftaki integral analizden bildiğimiz Riemann integralidir.

ii. Eğer $\mathbb{T}=\mathbb{Z}$ ise

$$\int_a^b f(t)\nabla t = \begin{cases} \sum_{t=a+1}^{b} f(t) & a<b \\ 0 & a=b \\ -\sum_{t=b+1}^{a} f(t) & a>b \end{cases}$$

olur.

iii. Eğer $[a,b]$ aralığı sadece izole noktaları içeriyorsa

$$\int_a^b f(t)\nabla t = \begin{cases} \sum_{t\in(a,b]} f(t)v(t) & a<b \\ 0 & a=b \\ -\sum_{t\in(b,a]} f(t)v(t) & a>b \end{cases}$$

olur.

iv. Eğer $\mathbb{T} = h\mathbb{Z}$ ise $h>0$ olmak üzere

$$\int_a^b f(t)\nabla t = \begin{cases} \sum_{k=\frac{a+h}{h}}^{\frac{b}{h}} f(kh)h & a<b \\ 0 & a=b \\ -\sum_{k=\frac{b+h}{h}}^{\frac{a}{h}} f(kh)h & a>b \end{cases}$$

elde edilir.

Teorem 2.1.12: Eğer $f:\mathbb{T}\to\mathbb{R}$ fonksiyonu $\mathbb{T}^K$' da delta türevlenebilir ve f^Δ fonksiyonu $\mathbb{T}^K$' da sürekli ise f fonksiyonu $\mathbb{T}_K$' da nabla türevlenebilirdir ve $\forall t\in\mathbb{T}_K$ için $f^\nabla(t) = f^\Delta(\rho(t))$

sağlanır.

Teorem 2.1.13: Eğer $f:\mathbb{T}\to\mathbb{R}$ fonksiyonu $\mathbb{T}_K$' da nabla türevlenebilir ve f^∇ fonksiyonu $\mathbb{T}_K$' da sürekli ise f fonksiyonu $\mathbb{T}^K$' da delta türevlenebilirdir ve $\forall t\in\mathbb{T}^K$ için $f^\Delta(t) = f^\nabla(\sigma(t))$

sağlanır.

Teorem 2.1.14: $f^{\Delta}(t,s)$ ve $f^{\nabla}(t,s)$ ile sabit her s için $f(t,s)$' nin t'ye göre sırasıyla delta ve nabla türevi gösterilsin. Eğer $f, f^{\Delta}, f^{\nabla}$ fonksiyonları sürekli ise aşağıdakiler sağlanır.

i. $$\left[\int_a^t f(t,s)\Delta s\right]^{\Delta} = \int_a^t f^{\Delta}(t,s)\Delta s + f(\sigma(t),t)$$

ii. $$\left[\int_a^t f(t,s)\Delta s\right]^{\nabla} = \int_a^t f^{\nabla}(t,s)\Delta s + f(\rho(t),\rho(t))$$

iii. $$\left[\int_a^t f(t,s)\nabla s\right]^{\Delta} = \int_a^t f^{\Delta}(t,s)\nabla s + f(\sigma(t),\sigma(t))$$

iv. $$\left[\int_a^t f(t,s)\nabla s\right]^{\nabla} = \int_a^t f^{\nabla}(t,s)\nabla s + f(\rho(t),t)$$

Teorem 2.1.15: $a \le b$ olmak üzere $a, b \in \mathbb{T}$ ve $f(t)$ fonksiyonu $[a,b]$ aralığında sürekli olsun. O zaman

i. $$\int_a^b f(t)\Delta t = \int_a^{\rho(b)} f(t)\Delta t + [b-\rho(b)]f(\rho(b))$$

ii. $$\int_a^b f(t)\Delta t = [\sigma(a)-a]f(a) + \int_{\sigma(a)}^b f(t)\Delta t$$

iii. $$\int_a^b f(t)\nabla t = \int_a^{\rho(b)} f(t)\nabla t + [b-\rho(b)]f(b)$$

iv. $$\int_a^b f(t)\nabla t = [\sigma(a)-a]f(\sigma(a)) + \int_{\sigma(a)}^b f(t)\nabla t$$

sağlanır.

Teorem 2.1.16: Aşağıdaki eşitsizlikler sağlanır.

i. $$\left|\int_a^b f(t)g(t)\Delta t\right| \le \int_a^b |f(t)g(t)|\Delta t \le \left(\max_{a\le t\le \rho(b)} |f(t)|\right)\int_a^b |g(t)|\Delta t$$

ii. $$\left|\int_a^b f(t)g(t)\nabla t\right| \le \int_a^b |f(t)g(t)|\nabla t \le \left(\max_{\sigma(a)\le t\le b} |f(t)|\right)\int_a^b |g(t)|\nabla t$$

2.2 Kompakt Operatör Kavramı

Tanım 2.2.1: $C[a,b]$ içinde sürekli fonksiyonların bir ailesi M olsun. Eğer $\forall t\in[a,b]$ ve $\forall x\in M$ için $x(t)\le c$ olacak şekilde sonlu bir c sayısı varsa M'ye ait fonksiyonlara aynı dereceden sınırlı fonksiyonlar (equibounded) denir.

Dolayısıyla M ailesine ait fonksiyonların aynı dereceden sınırlı olması M kümesinin $C[a,b]$ içinde bir sınırlı küme olması demektir.

Tanım 2.2.2: Eğer $\forall\varepsilon>0$ olmak üzere $\forall t_1, t_2\in[a,b]$ ve $\forall x\in M$ için $|t_1-t_2|<\delta$ iken $|x(t_1)-x(t_2)|<\varepsilon$ olacak şekilde bir $\delta>0$ sayısı varsa M kümesine ait fonksiyonlara aynı dereceden süreklidir (equicontinuous) denir.

Teorem 2.2.1 (Arzela - Ascoli Teoremi): Bir $M\subset C[a,b]$ kümesinin sürekli fonksiyonlar ailesinin prekompakt olması için gerek ve yeter şart M ' ye ait fonksiyonların aynı dereceden sınırlı ve aynı dereceden sürekli olmasıdır.

Tanım 2.2.3: (E,ρ) ve (E_1, ρ_1) metrik uzaylar ve $A:D\subset E\to E_1$ bir operatör olsun. Eğer A operatörü D içindeki her sınırlı kümeyi E_1 içindeki prekompakt kümeye dönüştürüyorsa A ' ya D üzerinde kompakt operatör denir.

Tanım 2.2.4: (E,ρ) ve (E_1,ρ_1) metrik uzaylar ve $A:D\subset E\to E_1$ da bir operatör olsun. Eğer A operatörü D üzerinde hem sürekli hem de kompakt operatör ise A ' ya tamamen sürekli (completely continuous) operatör denir.

Örnek 2.2.1 (l^2 uzayı): $j=1,2,...$ için $\eta_j=\frac{\xi_j}{j}$ olmak üzere $y=(\eta_j)=Tx$ ile tanımlanan $T:l^2\to l^2$ operatörünün kompakt olduğunu gösterelim.

T operatörü lineerdir. Eğer $x=\left(\xi_j\right)\in l^2$ ise $y=\left(\eta_j\right)\in l^2$ dir. O halde $T_n : l^2 \to l^2$ kompakt lineer operatör dizisi olmak üzere $T_n x=\left(\xi_1,\frac{\xi_2}{2},\frac{\xi_3}{3},....\frac{\xi_n}{n},0,0,...\right)$ şeklinde tanımlansın. T_n operatörü lineer ve sınırlıdır. O zaman kompakttır. Ayrıca

$$\left\|\left(T-T_n\right)x\right\|^2 = \sum_{j=n+1}^{\infty}\left|\eta_j\right|^2 = \sum_{j=n+1}^{\infty}\frac{1}{j^2}\left|\xi_j\right|^2 \le \frac{1}{\left(n+1\right)^2}\sum_{j=n+1}^{\infty}\left|\xi_j\right|^2 \le \frac{\|x\|^2}{\left(n+1\right)^2}$$

sağlanır. Bu eşitsizliğin her iki tarafının supremumunu alır ve x' in normunun 1 olduğunu kullanırsak

$\left\|\left(T-T_n\right)x\right\|=\frac{1}{n+1}$ bulunur. Buradan da $T_n \to T$ olur. O halde T operatörü kompakttır.

Örnek 2.2.2: $K\left(x,y\right)$ fonksiyonu $a\le x,y\le b$ aralığında sürekli , $f\left(y,z\right)$ fonksiyonu $a\le y\le b$ aralığı ve tüm z için sürekli olsun.

$\left(Tu\right)x=\int_a^b K\left(x,y\right)f\left(y,u\left(y\right)\right)dy$ şeklinde tanımlanan $T:C\left[a,b\right]\to C\left[a,b\right]$ operatörü kompakttır.

Örnek 2.2.3: Birim operatör $I\left(x\right)=x$ sınırlıdır. Ancak sonsuz boyutlu uzayda kompakt değildir. Birim yuvar sınırlıdır, ama kompakt değildir. Çünkü birim operatör sınırlı birim yuvarı kompakt olmayan birim yuvara dönüştürür.

3. ZAMAN SKALASINDA LİNEER OLMAYAN n-NOKTA PROBLEMLERİNİN ÇÖZÜMÜNÜN VARLIĞI

Bu bölümde

$$\left(py^{\nabla}\right)^{\Delta}\left(t\right)-q\left(t\right)y\left(t\right)+h\left(t\right)f\left(t,y\left(t\right)\right)=0,\qquad t_1<t<t_n$$

$$\alpha y(t_1) - \beta p(t_1) y^{\nabla}(t_1) = \sum_{i=2}^{n-1} a_i y(t_i)$$
$$\gamma y(t_n) + \delta p(t_n) y^{\nabla}(t_n) = \sum_{i=2}^{n-1} b_i y(t_i)$$

ikinci mertebeden lineer olmayan Sturm-Liouville n-nokta sınır değer problemini ele alacağız. Amacımız bu sınır değer probleminin zaman skalasında bir, iki ve üç tane pozitif çözümlerinin varlığı ile ilgili koşulları incelemektir.

3.1 Green Fonksiyonu

Kabul edelim ki

$$\left(py^{\nabla}\right)^{\Delta}(t) - q(t)y(t) + h(t)f\left(t, y(t)\right) = 0, \quad t_1 < t < t_n \tag{3.1.1}$$

$$\begin{aligned} \alpha y(t_1) - \beta p(t_1) y^{\nabla}(t_1) &= \sum_{i=2}^{n-1} a_i y(t_i) \\ \gamma y(t_n) + \delta p(t_n) y^{\nabla}(t_n) &= \sum_{i=2}^{n-1} b_i y(t_i) \end{aligned} \tag{3.1.2}$$

sınır değer probleminde p, q fonksiyonları, $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ sabitleri ve a_i, b_i katsayıları için aşağıdaki koşullar sağlansın.

$$p, q : [t_1, t_n] \to (0, \infty), \quad p \in C^{\Delta}[t_1, t_n), \quad q \in C[t_1, t_n] \tag{3.1.3}$$

$t_i \in \mathbb{T}_K^K$, $i \in \{1, 2, 3, ..., n\}$ için $t_1 < t_2 < .... < t_n$ ve

$$\alpha, \beta, \gamma, \delta \in [0, \infty), \quad \alpha\gamma + \alpha\delta + \beta\gamma > 0, \quad a_i, b_i \in [0, \infty), \; i \in \{2, 3, ...n-1\} \tag{3.1.4}$$

olmak üzere $f : [0, \infty) \to [0, \infty)$ fonksiyonu için

$$f_0 := \lim_{y \to 0^+} \frac{f(., y)}{y} \qquad f_\infty := \lim_{y \to \infty} \frac{f(., y)}{y}$$

şeklinde olsun. Burada sağ-yoğun sürekli $h : [t_1, t_n] \to [0, \infty)$ fonksiyonu için bazı koşullar elde edilecektir.

İlk önce ikinci mertebeden sınır değer problemi için Green fonksiyonunu inceleyeceğiz.

$$\left(py^{\nabla}\right)^{\Delta}(t)-q(t)y(t)+u(t)=0, \qquad t_1<t<t_n \tag{3.1.5}$$

$$\begin{aligned} &\alpha y(t_1)-\beta p(t_1)y^{\nabla}(t_1)=0 \\ &\gamma y(t_n)+\delta p(t_n)y^{\nabla}(t_n)=0 \end{aligned} \tag{3.1.6}$$

sınır değer probleminde $\alpha,\beta,\gamma,\delta$ reel sayılar ve $|\alpha|+|\beta|\neq 0,\ |\gamma|+|\delta|\neq 0$ olsun.

Önce

$$\left(py^{\nabla}\right)^{\Delta}(t)-q(t)y(t)=0, \qquad t\in[t_1,t_n) \tag{3.1.7}$$

homojen denklemin çözümleri ϕ ve ψ olmak üzere

$$\psi(t_1)=\beta, \qquad p(t_1)\psi^{\nabla}(t_1)=\alpha \tag{3.1.8}$$

$$\phi(t_n)=\delta, \qquad p(t_n)\phi^{\nabla}(t_n)=-\gamma \tag{3.1.9}$$

olsun. O zaman ϕ ve ψ (3.1.6)' nın birinci ve ikinci koşullarını sağlar.

Tanım 3.1.1: (3.1.7) denkleminin herhangi iki çözümü y ve z olsun. Bu iki çözümün Wronskian' ı her $t\in\mathbb{T}^{K}$ için $f^{[\nabla]}(t)=p(t)f^{\nabla}(t)$ olmak üzere

$$W_t(y,z)=y(t)z^{[\nabla]}(t)-y^{[\nabla]}(t)z(t)$$

şeklinde tanımlanır.

Lemma 3.1.1: (3.1.7) denkleminin herhangi iki çözümünün Wronskian' ı sabittir.

İspat: (3.1.7) denkleminin iki çözümü y ve z olsun. Her $t\in\mathbb{T}^{K}$ için

$$W_t(y,z)=y(t)z^{[\nabla]}(t)-y^{[\nabla]}(t)z(t)$$

sağlanır.

$$\begin{aligned} \{W_t(y,z)\}^{\Delta} &= \left\{y(t)z^{[\nabla]}(t)-y^{[\nabla]}(t)z(t)\right\}^{\Delta} \\ &= y^{\Delta}(t)z^{[\nabla]}(\sigma(t))+y(t)\left\{z^{[\nabla]}(t)\right\}^{\Delta}-y^{[\nabla]}(\sigma(t))z^{\Delta}(t)-\left\{y^{[\nabla]}(t)\right\}^{\Delta}z(t) \\ &= y^{\Delta}(t)z^{[\nabla]}(\sigma(t))+q(t)y(t)z(t)-y^{[\nabla]}(\sigma(t))z^{\Delta}(t)-q(t)y(t)z(t) \\ &= p(\sigma(t))z^{\nabla}(\sigma(t))y^{\Delta}(t)-p(\sigma(t))y^{\nabla}(\sigma(t))z^{\Delta}(t) \\ &= p(\sigma(t))\left[z^{\nabla}(\sigma(t))y^{\Delta}(t)-y^{\nabla}(\sigma(t))z^{\Delta}(t)\right] \end{aligned}$$

Teorem 2.1.13'ten $y^{\Delta}(t)=y^{\nabla}(\sigma(t))$ ve $z^{\Delta}(t)=z^{\nabla}(\sigma(t))$ olduğundan $\{W_t(y,z)\}^{\Delta}=0$ elde edilir. Buradan da $W_t(y,z)=\text{sabit}$ bulunur.

Şimdi

$$d=-W_t(\psi,\phi)=p(t)\psi^{\nabla}(t)\phi(t)-p(t)\psi(t)\phi^{\nabla}(t) \tag{3.1.10}$$

olsun. Herhangi iki çözümün Wronskian' ı t' den bağımsız olduğundan $t=t_1$ ve $t=t_n$ alıp (3.1.8) ve (3.1.9) sınır koşullarını kullanırsak

$$d=\alpha\phi(t_1)-\beta p(t_1)\phi^{\nabla}(t_1)=\gamma\psi(t_n)+\delta p(t_n)\psi^{\nabla}(t_n) \tag{3.1.11}$$

elde edilir.

Lemma 3.1.2: $d\neq 0$ olması için gerek ve yeter şart (3.1.7) homojen denklemini sağlayan aşikâr çözümün var olmasıdır.

İspat: Eğer $d=0$ ise (3.1.8) ve (3.1.11) den $\psi(t)$ fonksiyonu (3.1.6) ve (3.1.7) sınır değer probleminin aşikâr olmayan çözümüdür.

$d\neq 0$ olsun. (3.1.7) denkleminin çözümleri $\phi(t)$ ve $\psi(t)$ idi. (3.1.6) ve (3.1.7)' nin herhangi bir çözümü bu çözümlerin lineer kombinasyonu olacağından c_1,c_2 sabitler olmak üzere $y(t)=c_1\phi(t)+c_2\psi(t)$ şeklindedir. Bu çözüme (3.1.6) sınır koşulunu uygulayıp (3.1.8) ve (3.1.9) ile düzenlersek

$$\alpha\left(c_1\phi(t_1)+c_2\psi(t_1)\right)-\beta p(t_1)\left(c_1\phi^{\nabla}(t_1)+c_2\psi^{\nabla}(t_1)\right)=0$$
$$\alpha c_1\phi(t_1)+\alpha c_2\psi(t_1)-\beta p(t_1)c_1\phi^{\nabla}(t_1)-\beta p(t_1)c_2\psi^{\nabla}(t_1)=0$$
$$c_1\left(\alpha\phi(t_1)-\beta p(t_1)\phi^{\nabla}(t_1)\right)+c_2\left(\alpha\psi(t_1)-\beta p(t_1)\psi^{\nabla}(t_1)\right)=0$$
$$c_1\left(\alpha\phi(t_1)-\beta p(t_1)\phi^{\nabla}(t_1)\right)+c_2\left(\alpha\beta-\beta\alpha\right)=0$$
$$c_1\left(\alpha\phi(t_1)-\beta p(t_1)\phi^{\nabla}(t_1)\right)=0$$
$$c_1=0$$

ve

$$\gamma\left(c_1\phi(t_n)+c_2\psi(t_n)\right)+\delta p(t_n)\left(c_1\phi^{\nabla}(t_n)+c_2\psi^{\nabla}(t_n)\right)=0$$
$$\gamma c_1\phi(t_n)+\gamma c_2\psi(t_n)+\delta p(t_n)c_1\phi^{\nabla}(t_n)+\delta p(t_n)c_2\psi^{\nabla}(t_n)=0$$

$$c_1\left(\gamma\phi(t_n)+\delta p(t_n)\phi^{\nabla}(t_n)\right)+c_2\left(\gamma\phi(t_n)+\delta p(t_n)\phi^{\nabla}(t_n)\right)=0$$
$$c_1(\gamma\delta-\delta\gamma)+c_2\left(\gamma\phi(t_n)+\delta p(t_n)\phi^{\nabla}(t_n)\right)=0$$
$$c_2\left(\gamma\phi(t_n)+\delta p(t_n)\phi^{\nabla}(t_n)\right)=0$$
$$c_2=0$$

bulunur. O halde $c_1=c_2=0$ ise $y(t)$ aşikâr çözümdür.

Lemma 3.1.3: Kabul edelim ki y_1 ve y_2 (3.1.7) denkleminin çözümleri olmak üzere homojen olmayan

$$\left(py^{\nabla}\right)^{\Delta}(t)-q(t)y(t)=h(t) \tag{3.1.12}$$

denkleminin çözümü t_0 , $\mathbb{T}^{K}$ 'da sabit nokta ve c_1,c_2 sabitler olmak üzere

$$y(t)=c_1y_1(t)+c_2y_2(t)-\frac{1}{d}\int_{t_0}^{t}\left[y_1(t)y_2(s)-y_1(s)y_2(t)\right]h(s)\Delta s \tag{3.1.13}$$

şeklindedir.

İspat: Özel çözümün

$$z(t)=-\frac{1}{d}\int_{t_0}^{t}\left[y_1(t)y_2(s)-y_1(s)y_2(t)\right]h(s)\Delta s \tag{3.1.14}$$

olduğunu göstermek yeterlidir.

$$z^{\nabla}(t)=\left(-\frac{1}{d}\int_{t_0}^{t}\left[y_1(t)y_2(s)-y_1(s)y_2(t)\right]h(s)\Delta s\right)^{\nabla}$$
$$=-\frac{1}{d}\left[y_1(\rho(t))y_2(\rho(t))-y_1(\rho(t))y_2(\rho(t))\right]h(\rho(t))$$
$$-\frac{1}{d}\int_{t_0}^{t}\left[y_1^{\nabla}(t)y_2(s)-y_1(s)y_2^{\nabla}(t)\right]h(s)\Delta s$$

$$z^{\nabla}(t)=-\frac{1}{d}\int_{t_0}^{t}\left[y_1^{\nabla}(t)y_2(s)-y_1(s)y_2^{\nabla}(t)\right]h(s)\Delta s$$

$$\left(p(t)z^{\nabla}(t)\right)^{\Delta}=\left(-\frac{1}{d}\int_{t_0}^{t}\left(p(t)y_1^{\nabla}(t)y_2(s)-p(t)y_1(s)y_2^{\nabla}(t)\right)h(s)\Delta s\right)^{\Delta}$$

$$=-\frac{1}{d}\left[p(\sigma(t))y_1^{\nabla}(\sigma(t))y_2(t)-p(\sigma(t))y_1(t)y_2^{\nabla}(\sigma(t))\right]h(t)$$

$$-\frac{1}{d}\int_{t_0}^{t}\left(\left(p(t)y_1^{\nabla}(t)\right)^{\Delta}y_2(s)-y_1(s)\left(p(t)y_2^{\nabla}(t)\right)^{\Delta}\right)h(s)\Delta s$$

$$=-\frac{1}{d}\left[p(\sigma(t))y_1^{\nabla}(\sigma(t))y_2(t)-p(\sigma(t))y_1(t)y_2^{\nabla}(\sigma(t))\right]h(t)$$

$$-\frac{1}{d}\int_{t_0}^{t}\left(q(t)y_1(t)y_2(s)-y_1(s)q(t)y_2(t)\right)h(s)\Delta s$$

Buradan

$$\left(p(t)z^{\nabla}(t)\right)^{\Delta}-q(t)z(t)=-\frac{1}{d}\left[p(\sigma(t))y_1^{\nabla}(\sigma(t))y_2(t)-p(\sigma(t))y_1(t)y_2^{\nabla}(\sigma(t))\right]h(t)$$

$$-\frac{q(t)}{d}\int_{t_1}^{t}\left(y_1(t)y_2(s)-y_1(s)y_2(t)\right)h(s)\Delta s+\frac{q(t)}{d}\int_{t_1}^{t}\left(y_1(t)y_2(s)-y_1(s)y_2(t)\right)h(s)\Delta s$$ bu

$$=h(t)$$

lunur. Böylece (3.1.12) denkleminin çözümü (3.1.13) şeklindedir.

Lemma 3.1.4: (3.1.3) ve (3.1.4) sağlansın. Eğer $d\neq 0$ ise homojen olmayan sınır değer problemi (3.1.5) ve (3.1.6) sınır değer probleminin tek y çözümü

$t\in\left[\rho(t_1),t_n\right]$ için $y(t)=\int_{t_1}^{t_n}G(t,s)u(s)\Delta s$

şeklindedir. Burada

$$G(t,s)=\frac{1}{d}\begin{cases}\psi(t)\phi(s), & \rho(t_1)\leq t\leq s\leq t_n\\ \psi(s)\phi(t), & \rho(t_1)\leq s\leq t\leq t_n\end{cases} \qquad (3.1.15)$$

Green fonksiyonudur.

İspat: $d\neq 0$ koşulunda homojen (3.1.7) denkleminin $\phi(t)$ ve $\psi(t)$ lineer bağımsız iki çözümü idi. O halde homojen olmayan (3.1.5) denkleminin genel çözümü c_1,c_2 sabitleri için

$$y(t)=c_1\phi(t)+c_2\psi(t)-\frac{1}{d}\int_{t_1}^{t}\left[\phi(s)\psi(t)-\phi(t)\psi(s)\right]u(s)\Delta s \tag{3.1.16}$$

şeklindedir. Burada c_1 ve c_2 bulunacaktır. Bunun için (3.1.6) sınır koşulları sağlatılacaktır. (3.1.16) denkleminden

$$y^{[\nabla]}(t)=c_1\phi^{[\nabla]}(t)+c_2\psi^{[\nabla]}(t)-\frac{1}{d}\int_{t_1}^{t}\left[\phi(s)\psi^{[\nabla]}(t)-\phi^{[\nabla]}(t)\psi(s)\right]u(s)\Delta s \tag{3.1.17}$$

elde edilir. Birinci sınır koşulu $t=t_1$ için

$$\begin{aligned}y(t_1)&=c_1\phi(t_1)+c_2\psi(t_1)-\frac{1}{d}\int_{t_1}^{t_1}\left[\phi(s)\psi(t)-\phi(t)\psi(s)\right]u(s)\Delta s\\&=c_1\phi(t_1)+c_2\psi(t_1)\\&=c_1\phi(t_1)+c_2\beta\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}y^{[\nabla]}(t_1)&=c_1\phi^{[\nabla]}(t_1)+c_2\psi^{[\nabla]}(t_1)-\frac{1}{d}\int_{t_1}^{t_1}\left[\phi(s)\psi^{[\nabla]}(t)-\phi^{[\nabla]}(t)\psi(s)\right]u(s)\Delta s\\&=c_1\phi^{[\nabla]}(t_1)+c_2\psi^{[\nabla]}(t_1)\\&=c_1\phi^{[\nabla]}(t_1)+c_2\alpha\end{aligned}$$

olur. $y(t_1)$' i α ve $y^{[\nabla]}(t_1)$' i de $-\beta$ ile çarpıp toplarsak

$$\begin{aligned}&\alpha\left(c_1\phi(t_1)+c_2\beta\right)-\beta\left(c_1\phi^{[\nabla]}(t_1)+c_2\alpha\right)=0\\&\alpha c_1\phi(t_1)+\alpha c_2\beta-\beta c_1\phi^{[\nabla]}(t_1)-\beta c_2\alpha=0\\&c_1\left[\alpha\phi(t_1)-\beta\phi^{[\nabla]}(t_1)\right]=0\end{aligned}$$

elde edilir. Diğer taraftan $d\neq 0$ olduğundan $c_1=0$ olur. O zaman (3.1.16) ve (3.1.17) denklemleri

$$y(t)=c_2\psi(t)-\frac{1}{d}\int_{t_1}^{t}\left[\phi(s)\psi(t)-\phi(t)\psi(s)\right]u(s)\Delta s \tag{3.1.18}$$

ve

$$y^{[\nabla]}(t)=c_2\psi^{[\nabla]}(t)-\frac{1}{d}\int_{t_1}^{t}\left[\phi(s)\psi^{[\nabla]}(t)-\phi^{[\nabla]}(t)\psi(s)\right]u(s)\Delta s$$

halini alır. Buradan

$$y(t_n)=c_2\psi(t_n)-\frac{1}{d}\int_{t_1}^{t_n}\left[\phi(s)\psi(t_n)-\phi(t_n)\psi(s)\right]u(s)\Delta s$$

$$y^{[\nabla]}(t_n)=c_2\psi^{[\nabla]}(t_n)-\frac{1}{d}\int_{t_1}^{t_n}\left[\phi(s)\psi^{[\nabla]}(t_n)-\phi^{[\nabla]}(t_n)\psi(s)\right]u(s)\Delta s$$

bulunur. İkinci sınır koşulundan

$$0=\gamma y(t_n)+\delta y^{[\nabla]}(t_n)$$

$$=\gamma\left(c_2\psi(t_n)-\frac{1}{d}\int_{t_1}^{t_n}\left[\phi(s)\psi(t_n)-\phi(t_n)\psi(s)\right]u(s)\Delta s\right)$$

$$+\delta\left(c_2\psi^{[\nabla]}(t_n)-\frac{1}{d}\int_{t_1}^{t_n}\left[\phi(s)\psi^{[\nabla]}(t_n)-\phi^{[\nabla]}(t_n)\psi(s)\right]u(s)\Delta s\right)$$

$$=\gamma c_2\psi(t_n)-\frac{\gamma}{d}\int_{t_1}^{t_n}\left[\phi(s)\psi(t_n)-\phi(t_n)\psi(s)\right]u(s)\Delta s$$

$$+\delta c_2\psi^{[\nabla]}(t_n)-\frac{\delta}{d}\int_{t_1}^{t_n}\left[\phi(s)\psi^{[\nabla]}(t_n)-\phi^{[\nabla]}(t_n)\psi(s)\right]u(s)\Delta s$$

$$=c_2\left(\gamma\psi(t_n)+\delta\psi^{[\nabla]}(t_n)\right)-\frac{\gamma\psi(t_n)+\delta\psi^{[\nabla]}(t_n)}{d}\int_{t_1}^{t_n}\phi(s)u(s)\Delta s$$

$$=c_2\left(\gamma\psi(t_n)+\delta\psi^{[\nabla]}(t_n)\right)-\frac{d}{d}\int_{t_1}^{t_n}\phi(s)u(s)\Delta s$$

$$=c_2 d-\int_{t_1}^{t_n}\phi(s)u(s)\Delta s$$

elde edilir. Buradan

$$c_2=\frac{1}{d}\int_{t_1}^{t_n}\phi(s)u(s)\Delta s$$

olur. Bu değeri (3.1.18) denkleminde yerine koyarsak

$$y(t)=c_2\psi(t)-\frac{1}{d}\int_{t_1}^{t}\left[\phi(s)\psi(t)-\phi(t)\psi(s)\right]u(s)\Delta s$$

$$=\frac{1}{d}\int_{t_1}^{t_n}\psi(t)\phi(s)u(s)\Delta s-\frac{1}{d}\int_{t_1}^{t}\left[\phi(s)\psi(t)-\phi(t)\psi(s)\right]u(s)\Delta s$$

$$=\frac{1}{d}\int_{t_1}^{t}\psi(t)\phi(s)u(s)\Delta s+\frac{1}{d}\int_{t}^{t_n}\psi(t)\phi(s)u(s)\Delta s$$

$$-\frac{1}{d}\int_{t_1}^{t}\phi(s)\psi(t)u(s)\Delta s+\frac{1}{d}\int_{t_1}^{t}\phi(t)\psi(s)u(s)\Delta s$$

$$=\frac{1}{d}\int_{t}^{t_n}\psi(t)\phi(s)u(s)\Delta s+\frac{1}{d}\int_{t_1}^{t}\phi(t)\psi(s)u(s)\Delta s$$

$$y(t)=\int_{t}^{t_n}G(t,s)u(s)\Delta s$$

elde edilir.

Lemma 3.1.5: (3.1.3) ve (3.1.4) sağlansın. O zaman ϕ ve ψ fonksiyonları için

$$\psi(t)\geq 0,\ \ t\in\left[\rho(t_1),t_n\right] \qquad \phi(t)\geq 0,\ t\in\left[\rho(t_1),t_n\right]$$
$$\psi(t)>0,\ \ t\in\left(\rho(t_1),t_n\right] \qquad \phi(t)>0,\ t\in\left[\rho(t_1),t_n\right)$$
$$p(t)\psi^{\nabla}(t)\geq 0,\ \ t\in\left[\rho(t_1),t_n\right] \qquad p(t)\phi^{\nabla}(t)\leq 0,\ t\in\left[\rho(t_1),t_n\right]$$

sağlanır.

İspat: Atıcı ve Guseinov' un (2002) makalesindeki Lemma 5.1' in ispatına benzer olarak yapılabilir.

Şimdi D'yi aşağıdaki gibi tanımlayıp bazı sonuçlar elde edelim.

$$D:=\begin{vmatrix}-\sum_{i=2}^{n-1}a_i\psi(t_i) & d-\sum_{i=2}^{n-1}a_i\phi(t_i)\\ d-\sum_{i=2}^{n-1}b_i\psi(t_i) & -\sum_{i=2}^{n-1}b_i\phi(t_i)\end{vmatrix}$$

olsun.

Lemma 3.1.6: (3.1.3) ve (3.1.4) sağlansın. Eğer $D\neq 0$ ve $u\in C_{rd}\left[t_1,t_n\right]$ ise homojen olmayan (3.1.5) denklemi ile (3.1.2) sınır koşulunun tek bir y çözümü

$$t\in\left[\rho(t_1),t_n\right] \text{ için } y(t)=\int_{t_1}^{t_n}G(t,s)u(s)\Delta s+A(u)\psi(t)+B(u)\phi(t) \tag{3.1.19}$$

şeklindedir. Burada $G(t,s)$ Green fonksiyonu ve

$$A(u):=\frac{1}{D}\begin{vmatrix}\sum_{i=2}^{n-1}a_i\int_{t_1}^{t_n}G(t_i,s)u(s)\Delta s & d-\sum_{i=2}^{n-1}a_i\phi(t_i)\\ \sum_{i=2}^{n-1}b_i\int_{t_1}^{t_n}G(t_i,s)u(s)\Delta s & -\sum_{i=2}^{n-1}b_i\phi(t_i)\end{vmatrix} \tag{3.1.20}$$

$$B(u):=\frac{1}{D}\begin{vmatrix}-\sum_{i=2}^{n-1}a_i\psi(t_i) & \sum_{i=2}^{n-1}a_i\int_{t_1}^{t_n}G(t_i,s)u(s)\Delta s\\ d-\sum_{i=2}^{n-1}b_i\psi(t_i) & \sum_{i=2}^{n-1}b_i\int_{t_1}^{t_n}G(t_i,s)u(s)\Delta s\end{vmatrix} \tag{3.1.21}$$

şeklindedir.

İspat: y çözümü (3.1.19) daki gibi olsun.

$$y(t)=\frac{1}{d}\int_{t_1}^{t}\phi(t)\psi(s)u(s)\Delta s+\frac{1}{d}\int_{t}^{t_n}\psi(t)\phi(s)u(s)\Delta s+A\psi(t)+B\phi(t)$$

A ve B sabitlerdir. Bu ifadenin $\nabla-$türevini alır ve p ile çarparsak

$$y^{\nabla}(t)=\frac{\phi^{\nabla}(t)}{d}\int_{t_1}^{t}\psi(s)u(s)\Delta s+\frac{\psi^{\nabla}(t)}{d}\int_{t}^{t_n}\phi(s)u(s)\Delta s+A\psi^{\nabla}(t)+B\phi^{\nabla}(t)$$

$$py^{\nabla}(t)=\frac{p\phi^{\nabla}(t)}{d}\int_{t_1}^{t}\psi(s)u(s)\Delta s+\frac{p\psi^{\nabla}(t)}{d}\int_{t}^{t_n}\phi(s)u(s)\Delta s+Ap\psi^{\nabla}(t)+Bp\phi^{\nabla}(t)$$

bulunur. Bunun da $\Delta-$türevini alırsak

$$\left(py^{\nabla}(t)\right)^{\Delta}=\frac{\left(p\phi^{\nabla}(t)\right)^{\Delta}}{d}\int_{t_1}^{\sigma(t)}\psi(s)u(s)\Delta s+\frac{p\phi^{\nabla}(t)}{d}\psi(t)u(t)$$

$$+\frac{\left(p\psi^{\nabla}(t)\right)^{\Delta}}{d}\int_{\sigma(t)}^{t_n}\phi(s)u(s)\Delta s-\frac{p\psi^{\nabla}(t)}{d}\phi(t)u(t)+A\left(p\psi^{\nabla}(t)\right)^{\Delta}+B\left(p\phi^{\nabla}(t)\right)^{\Delta}$$

olur. Teorem 2.1.5' i kullanırsak

$$\left(py^{\nabla}(t)\right)^{\Delta}=\frac{q(t)}{d}\int_{t_1}^{t}\phi(t)\psi(s)u(s)\Delta s+\frac{q(t)}{d}\int_{t}^{\sigma(t)}\phi(t)\psi(s)u(s)\Delta s+\frac{p\phi^{\nabla}(t)}{d}\psi(t)u(t)$$

$$+\frac{q(t)}{d}\int_{\sigma(t)}^{t}\psi(t)\phi(s)u(s)\Delta s+\frac{q(t)}{d}\int_{t}^{t_n}\psi(t)\phi(s)u(s)\Delta s-\frac{p\psi^{\nabla}(t)}{d}\phi(t)u(t)$$

$$+q(t)\left(A\psi(t)+B\phi(t)\right)$$

$$=\frac{q(t)}{d}\int_{t_1}^{t}\phi(t)\psi(s)u(s)\Delta s+\frac{q(t)}{d}\phi(t)\mu_{\sigma}(t)\psi(t)u(t)+\frac{p\phi^{\nabla}(t)}{d}\psi(t)u(t)$$

$$+\frac{q(t)}{d}\int_{t}^{t_n}\psi(t)\phi(s)u(s)\Delta s-\frac{q(t)}{d}\phi(t)\mu_{\sigma}(t)\psi(t)u(t)-\frac{p\psi^{\nabla}(t)}{d}\phi(t)u(t)$$

$$+q(t)\left(A\psi(t)+B\phi(t)\right)$$

denkleminden $\left(py^{\nabla}\right)^{\Delta}(t)=q(t)y(t)-u(t)$ elde edilir. Buradan

$$y(t_1)=\frac{\psi(t_1)}{d}\int_{t_1}^{t_n}\phi(s)u(s)\Delta s+A\psi(t_1)+B\phi(t_1)$$

ve

$$p(t_1)y^{\nabla}(t_1)=\frac{p(t_1)\psi^{\nabla}(t_1)}{d}\int_{t_1}^{t_n}\phi(s)u(s)\Delta s+Ap(t_1)\psi^{\nabla}(t_1)+Bp(t_1)\phi^{\nabla}(t_1)$$

denklemlerini sırasıyla α ve $-\beta$ ile çarpıp toplarsak

$$B\left[\alpha\phi(t_1)-\beta p(t_1)\phi^{\nabla}(t_1)\right]=\sum_{i=2}^{n-1}a_i\left(\int_{t_1}^{t_n}G(t_i,s)u(s)\Delta s+A\psi(t_i)+B\phi(t_i)\right) \tag{3.1.22}$$

olur. Diğer taraftan

$$y(t_n)=\frac{\phi(t_n)}{d}\int_{t_1}^{t_n}\psi(s)u(s)\Delta s+A\psi(t_n)+B\phi(t_n)$$

ve

$$p(t_n)y^{\nabla}(t_n)=\frac{p(t_n)\phi^{\nabla}(t_n)}{d}\int_{t_1}^{t_n}\psi(s)u(s)\Delta s+Ap(t_n)\psi^{\nabla}(t_n)+Bp(t_n)\phi^{\nabla}(t_n)$$

denklemlerinden

$$A\left[\gamma\psi(t_n)+\delta p(t_n)\psi^{\nabla}(t_n)\right]=\sum_{i=2}^{n-1}b_i\left(\int_{t_1}^{t_n}G(t_i,s)u(s)\Delta s+A\psi(t_i)+B\phi(t_i)\right) \tag{3.1.23}$$

bulunur. (3.1.22) ve (3.1.23) u birleştirsek

$$-A\sum_{i=2}^{n-1} a_i\psi(t_i)+B\left[\alpha\phi(t_1)-\beta p(t_1)\phi^{\nabla}(t_1)-\sum_{i=2}^{n-1} a_i\phi(t_i)\right]=\sum_{i=2}^{n-1} a_i\left(\int_{t_1}^{t_n} G(t_i,s)u(s)\Delta s\right)$$

$$A\left[\gamma\psi(t_n)+\delta p(t_n)\psi^{\nabla}(t_n)-\sum_{i=2}^{n-1} b_i\psi(t_i)\right]-B\sum_{i=2}^{n-1} b_i\phi(t_i)=\sum_{i=2}^{n-1} b_i\left(\int_{t_1}^{t_n} G(t_i,s)u(s)\Delta s\right)$$

elde edilir. Bu lineer denklem sisteminin çözümünden $A(u)$ ve $B(u)$ katsayıları bulunur.

Lemma 3.1.7: (3.1.3) ve (3.1.4) sağlansın.

$$D<0, \quad d-\sum_{i=2}^{n-1} a_i\phi(t_i)>0 \quad d-\sum_{i=2}^{n-1} b_i\psi(t_i)>0 \tag{3.1.24}$$

şartları sağlansın. Eğer $u\in C_{rd}[t_1,t_n]$ ve $u\geq 0$ ise (3.1.19) daki y çözümü $t\in[t_1,t_n]$ için $y(t)\geq 0$ koşulunu sağlar.

İspat: Lemma 3.1.4 ile Lemma 3.1.5' ten ve kabullerden biliyoruz ki Green fonksiyonu

$[\rho(t_1),t_n]\times[\rho(t_1),t_n]$ 'de $G(t,s)\geq 0$

dir. (3.1.3) ve (3.1.4) ile (3.1.20) ve (3.1.21)' deki $A(u)$ ve $B(u)$ 'nun tanımlarından

$A(u)\geq 0$ ve $B(u)\geq 0$

sağlanır.

Örnek 3.1.1: Kabul edelim ki (3.1.24) sağlanmasın. Örneğin

$n=3,\ p(t)\equiv 1=\alpha=\gamma,\ q(t)\equiv 0=\beta=\delta=a_2$ ve $t_1=0$

olsun. O zaman

$y^{\nabla\Delta}(t)+u(t)=0,\ \ t_1<t<t_3,\ \ y(t_1)=0\ \ y(t_3)=b_2y(t_2)$

$\psi(t)=t,\ d=t_3$ ve $D=t_3(b_2t_2-t_3)$

bulunur. Eğer $D>0$ ise $b_2t_2>t_3$ olur ve pozitif çözüm yoktur.

Lemma 3.1.8: (3.1.3) , (3.1.4) ve (3.1.24) sağlansın.

$\rho(t_1)<\xi_1<\xi_2<t_n$ için $\xi_1,\xi_2\in\mathbb{T}_K^K$

sabit olsun. Eğer $u\in C_{rd}[t_1,t_n]$ ve $u\geq 0$ ise (3.1.19)' daki y çözümü için

$\min_{t\in[\xi_1,\xi_2]} y(t)\geq\Gamma\|y\|$ ve $\|y\|:=\max_{t\in[\rho(t_1),t_n]} y(t)$

sağlanır. Burada

$$\Gamma := \min\left\{\frac{\phi(\xi_2)}{\phi(\rho(t_1))}, \frac{\psi(\xi_1)}{\psi(t_n)}\right\} \in (0,1) \tag{3.1.25}$$

dir.

İspat:

$$\|y\| = \max_{t\in[\rho(t_1),t_n]}\left(\int_{t_1}^{t_n} G(t,s)u(s)\Delta s + A(u)\psi(t) + B(u)\phi(t)\right)$$

$$\|y\| = \int_{t_1}^{t_n} G(s,s)u(s)\Delta s + A(u)\psi(t_n) + B(u)\phi(\rho(t_1))$$

olmak üzere (3.1.3), (3.1.15) ve Lemma 3.1.5' ten

$$t\in[\rho(t_1),t_n] \quad \text{için} \quad 0 \le G(t,s) \le G(s,s) \tag{3.1.26}$$

sağlanır. Buradan

$$\forall t\in[\rho(t_1),t_n] \quad \text{için} \quad y(t) \le \int_{t_1}^{t_n} G(s,s)u(s)\Delta s + A(u)\psi(t_n) + B(u)\phi(\rho(t_1))$$

elde edilir. $t\in[\xi_1,\xi_2]$ için

$$\frac{G(t,s)}{G(s,s)} = \begin{cases} \dfrac{\phi(t)}{\phi(s)} : \rho(t_1) \le s \le t \le t_n \\ \dfrac{\psi(t)}{\psi(s)} : \rho(t_1) \le t \le s \le t_n \end{cases} \ge \begin{cases} \dfrac{\phi(\xi_2)}{\phi(\rho(t_1))} \quad : \rho(t_1) \le s \le t \le t_n \\ \dfrac{\psi(\xi_1)}{\psi(t_n)} \quad : \rho(t_1) \le t \le s \le t_n \end{cases} \ge \Gamma \tag{3.1.27}$$

eşitsizliği sağlanır. (3.1.25) deki Γ için

$$y(t) = \int_{t_1}^{t_n} \frac{G(t,s)}{G(s,s)} G(s,s)u(s)\Delta s + A(u)\psi(t) + B(u)\phi(t)$$

$$\ge \int_{t_1}^{t_n} \Gamma G(s,s)u(s)\Delta s + A(u)\psi(\xi_1) + B(u)\phi(\xi_2)$$

$$\geq \int_{t_1}^{t_n} \Gamma G(s,s)u(s)\Delta s + A(u)\frac{\psi(\xi_1)}{\psi(t_n)}\psi(t_n) + B(u)\frac{\phi(\xi_2)}{\phi(\rho(t_1))}\phi(\rho(t_1))$$

$$\geq \int_{t_1}^{t_n} \Gamma G(s,s)u(s)\Delta s + A(u)\Gamma\psi(t_n) + B(u)\Gamma\phi(\rho(t_1))$$

$$\geq \Gamma\left(\int_{t_1}^{t_n} G(s,s)u(s)\Delta s + A(u)\psi(t_n) + B(u)\phi(\rho(t_1))\right)$$

$$\geq \Gamma\|y\|$$

dir.

3.2 Koni Üzerindeki Sonuçlar

Kabul edelim ki sağ-yoğun sürekli $h:[t_1,t_n]\to[0,\infty)$ fonksiyonu öyle ki

$$t_* \in (\sigma(t_1),\rho(t_n)) \quad \text{için} \quad h(t_*) > 0 \tag{3.2.1}$$

şartını sağlasın. Lemma 3.1.8' den öyle ξ_1,ξ_2 vardır ki $\xi_1 < t < \xi_2$ olmak üzere

$$t \in (\rho(t_1),t_n) \quad \text{için} \quad \int_{\xi_1}^{\xi_2} G(t,s)h(s)\Delta s > 0$$

sağlanır. Γ (3.1.25) deki gibi ξ_1,ξ_2 'ya bağlı olarak tanımlanan sabit olsun. $\tau\in[\xi_1,\xi_2]$ için

$$\int_{\xi_1}^{\xi_2} G(\tau,s)h(s)\Delta s = \min_{t\in[\xi_1,\xi_2]} \int_{\xi_1}^{\xi_2} G(t,s)h(s)\Delta s > 0 \tag{3.2.2}$$

tanımlansın. $G(t,s)$ Green fonksiyonu, A ve B (3.1.20) ve (3.1.21)' de tanımlanan sabitler olmak üzere

$$K := \int_{t_1}^{t_n} G(s,s)h(s)\Delta s + A(h)\psi(t_n) + B(h)\phi(\rho(t_1)) \tag{3.2.3}$$

sabiti tanımlansın.

S ile $C[\rho(t_1),t_n]$ Banach uzayı gösterilsin ve $\|y\| := \sup_{t\in[\rho(t_1),t_n]} |y(t)|$ olsun. $P \subset S$ konisi

$$P := \left\{ y \in S : \left[\rho(t_1), t_n \right] \text{ için } y(t) \geq 0 \text{ ve } \left[\xi_1, \xi_2 \right] \text{ için } y(t) \geq \Gamma \|y\| \right\} \tag{3.2.4}$$

şeklinde verilsin.

y çözümünün (3.1.1) ve (3.1.2) sınır değer probleminin çözümü olması için gerek ve yeter şart $t \in \left[\rho(t_1), t_n \right]$ için

$$y(t) = \int_{t_1}^{t_n} G(t,s) h(s) f(s, y(s)) \Delta s + A\big(hf(.,y)\big)\psi(t) + B\big(hf(.,y)\big)\phi(t)$$

olmasıdır.

$y \in P$ için $T : P \to S$ operatörü

$$(Ty)(t) := \int_{t_1}^{t_n} G(t,s) h(s) f(s, y(s)) \Delta s + A\big(hf(.,y)\big)\psi(t) + B\big(hf(.,y)\big)\phi(t) \tag{3.2.5}$$

şeklinde tanımlansın. Eğer $y \in P$ ise (3.1.26)' yı kullanırsak $t \in \left[\xi_1, \xi_2 \right]$ için

$$(Ty)(t) = \int_{t_1}^{t_n} G(t,s) h(s) f(s, y(s)) \Delta s + A\big(hf(.,y)\big)\psi(t) + B\big(hf(.,y)\big)\phi(t)$$

$$\leq \int_{t_1}^{t_n} G(s,s) h(s) f(s, y(s)) \Delta s + A\big(hf(.,y)\big)\psi(t_n) + B\big(hf(.,y)\big)\phi\big(\rho(t_1)\big)$$

elde edilir. Ayrıca

$$
\begin{aligned}
(Ty)(t) &= \int_{t_1}^{t_n} G(t,s)h(s)f(s,y(s))\Delta s + A(hf(.,y))\psi(t) + B(hf(.,y))\phi(t) \\
&\geq \int_{t_1}^{t_n} \frac{G(t,s)}{G(s,s)} G(s,s)h(s)f(s,y(s))\Delta s + A(hf(.,y))\psi(\xi_1) + B(hf(.,y))\phi(\xi_2) \\
&\geq \int_{t_1}^{t_n} \frac{G(t,s)}{G(s,s)} G(s,s)h(s)f(s,y(s))\Delta s + A(hf(.,y))\frac{\psi(\xi_1)}{\psi(t_n)}\psi(t_n) \\
&\quad + B(hf(.,y))\frac{\phi(\xi_2)}{\phi(\rho(t_1))}\phi(\rho(t_1)) \\
&\geq \int_{t_1}^{t_n} \Gamma G(s,s)h(s)f(s,y(s))\Delta s + A(hf(.,y))\Gamma\psi(t_n) + B(hf(.,y))\Gamma\phi(\rho(t_1)) \\
&\geq \Gamma\left(\int_{t_1}^{t_n} G(s,s)h(s)f(s,y(s))\Delta s + A(hf(.,y))\psi(t_n) + B(hf(.,y))\phi(\rho(t_1))\right) \\
&\geq \Gamma\|Ty\|
\end{aligned}
$$

sağlanır. O halde $T: P \to P$ bir operatör olur.

Teorem 3.2.1: (3.2.5) de tanımlanan T operatörü tamamen süreklidir.

İspat: İspat için Arzela-Ascoli teoremini kullanalım.

$\forall t \in [\rho(t_1), t_n]$ ve $\forall\ Ty \in P$ için $c = K.\|f(.,y)\|$ olmak üzere (3.2.3) ile

$$
(Ty)(t) = \int_{t_1}^{t_n} G(t,s)h(s)f(s,y(s))\Delta s + A(hf(.,y))\psi(t) + B(hf(.,y))\phi(t)
$$

$$
\begin{aligned}
|(Ty)(t)| &= \left|\int_{t_1}^{t_n} G(t,s)h(s)f(s,y(s))\Delta s + A(hf(.,y))\psi(t) + B(hf(.,y))\phi(t)\right| \\
&\leq \left|\int_{t_1}^{t_n} G(t,s)h(s)f(s,y(s))\Delta s\right| + |A(hf(.,y))|\psi(t) + |B(hf(.,y))|\phi(t) \\
&\leq \|f(.,y)\|\left(\int_{t_1}^{t_n} G(s,s)h(s)\Delta s + A(h)\psi(t_n) + B(h)\phi(\rho(t_1))\right) \\
&= K.\|f(.,y)\| \\
&= c
\end{aligned}
$$

olur. O halde T operatörü aynı dereceden sınırlıdır.

$\left|t^1-t^2\right|<\delta,\ \ \forall\ t^1,t^2\in\left[\rho\left(t_1\right),t_n\right]$ ve $\forall\ Ty\in P$ için $\left|G\left(t^1,s\right)-G\left(t^2,s\right)\right|<\varepsilon_1$,

$\left|\psi\left(t^1\right)-\psi\left(t^2\right)\right|<\varepsilon_2$, $\left|\phi\left(t^1\right)-\phi\left(t^2\right)\right|<\varepsilon_3$ olmak üzere

$$\varepsilon=\left\|f\left(.,y\right)\right\|.\left(\varepsilon_1\int_{t_1}^{t_n}h\left(s\right)\Delta s+\varepsilon_2.A\left(h\right)+\varepsilon_3.B\left(h\right)\right)$$

alınırsa

$$\begin{aligned}\left|Ty\left(t^1\right)-Ty\left(t^2\right)\right|&=\left|\int_{t_1}^{t_n}G\left(t^1,s\right)h\left(s\right)f\left(s,y\left(s\right)\right)\Delta s+A\left(hf\left(.,y\right)\right)\psi\left(t^1\right)+B\left(hf\left(.,y\right)\right)\phi\left(t^1\right)\right.\\
&\left.-\int_{t_1}^{t_n}G\left(t^2,s\right)h\left(s\right)f\left(s,y\left(s\right)\right)\Delta s-A\left(hf\left(.,y\right)\right)\psi\left(t^2\right)-B\left(hf\left(.,y\right)\right)\phi\left(t^2\right)\right|\\
&=\left|\int_{t_1}^{t_n}\left(G\left(t^1,s\right)-G\left(t^2,s\right)\right)h\left(s\right)f\left(s,y\left(s\right)\right)\Delta s\right.\\
&\left.+A\left(hf\left(.,y\right)\right)\left(\psi\left(t^1\right)-\psi\left(t^2\right)\right)+B\left(hf\left(.,y\right)\right)\left(\phi\left(t^1\right)-\phi\left(t^2\right)\right)\right|\\
&<\varepsilon_1.\left|\int_{t_1}^{t_n}h\left(s\right)f\left(s,y\left(s\right)\right)\Delta s\right|+\varepsilon_2.\left|A\left(hf\left(.,y\right)\right)\right|+\varepsilon_3.\left|B\left(hf\left(.,y\right)\right)\right|\\
&<\left\|f\left(.,y\right)\right\|.\left(\varepsilon_1\int_{t_1}^{t_n}h\left(s\right)\Delta s+\varepsilon_2.A\left(h\right)+\varepsilon_3.B\left(h\right)\right)\\
&=\varepsilon\end{aligned}$$

elde edilir. Bu da T operatörünün aynı dereceden sürekliliğini gösterir. O halde T operatörü prekompakttır. $t\in\left[\xi_1,\xi_2\right]$ için

$$\left(Ty\right)\left(t\right)=\int_{t_1}^{t_n}G\left(t,s\right)h\left(s\right)f\left(s,y\left(s\right)\right)\Delta s+A\left(hf\left(.,y\right)\right)\psi\left(t\right)+B\left(hf\left(.,y\right)\right)\phi\left(t\right)$$

tanımındaki $G\left(t,s\right)$, $f\left(s,y\left(s\right)\right)$, $h\left(s\right)$ ve $\psi\left(t\right)$ ile $\phi\left(t\right)$' nin sürekliliğinden T operatörünün sürekliliği elde edilir. Ayrıca $T:P\rightarrow P$ operatörü P içindeki her sınırlı kümeyi yine P içindeki prekompakt kümeye dönüştürür. O zaman T operatörü P üzerinde kompakt bir operatördür. Sonuçta T operatörü hem sürekli hem de kompakt olduğundan tamamen süreklidir.

Tanım 3.2.1: (Deimling (1985)) X bir Banach uzayı, $\Omega \subset X$ açık sınırlı bir küme, $F:\Omega \to K$ kompakt operatör ve I birim operatör olmak üzere $y \notin (I-F)(\partial\Omega)$ olsun. Aşağıdaki özellikleri sağlayan ve $(I-F,\Omega,y)$ üçlüsünü $\mathbb{Z}$ tamsayılar kümesine götüren D_{LS} fonksiyonuna Leray – Schauder derecesi denir.

$(D1)$ $y \in \Omega$ için $D_{LS}(I,\Omega,y)=1$ dir.

$(D2)$ Ω_1 ve Ω_2, Ω' nın ayrık açık altkümeleri ve $y \notin (I-F)(\overline{\Omega} \setminus (\Omega_1 \cup \Omega_2))$ olduğunda $D_{LS}(I-F,\Omega,y) = D_{LS}(I-F,\Omega_1,y) + D_{LS}(I-F,\Omega_2,y)$ dir.

$(D3)$ $H:[0,1]\times\overline{\Omega} \to X$ kompakt, $y:[0,1] \to X$ sürekli ve $[0,1]$ üzerinde $y(t) \notin (I-H(t,.))(\partial\Omega)$ olduğunda $D_{LS}(I-H(t,.),\Omega,y(t))$, $t \in [0,1]$'den bağımsızdır.

Tanım 3.2.2: X bir Banach uzayı, $P \subset X$ bir koni, $\Omega \subset P$ açık küme, $F:\overline{\Omega} \to P$ kompakt ve $Fix(F)=\{x : F(x)=x\}$ olmak üzere $Fix(F) \cap \partial\Omega = \varnothing$ olsun. Eğer P üzerinde $Rx = x$ olacak şekilde $R: X \to P$ sürekli dönüşümü var ise $D_{LS}(I-FR, R^{-1}(\Omega), 0)$ sayısı X' ten P' ye örten her R fonksiyonu için aynıdır. Bu sayıya, kompakt F için P' ye göre Ω üzerinde sabit nokta indeksi denir ve kısaca $i_p(F,\Omega)$ ile gösterilir.

$M = \{(F,\Omega,P) : P \subset X,\ R: X \to P$ sürekli, $\Omega \subset P$ açık, $F:\overline{\Omega} \to P$ kompakt ve $Fix(F) \cap \partial\Omega = \varnothing\}$ olmak üzere $i_p : M \to \mathbb{Z}$ şeklindedir.

Lemma 3.2.1: (Lan (2001),Guo (1988)) P, S Banach uzayında bir koni olsun. B, S' nin açık ve sınırlı alt kümesi olmak üzere $B_p = B \cap P \neq \varnothing$ ve $\overline{B}_p \neq P$ sağlansın. Kabul edelim ki $T:\overline{B}_p \to P$ operatörü kompakt ve $\forall y \in \partial B_p$ için $y \neq Ty$ olsun. O zaman aşağıdaki koşullar sağlanır.

i. Eğer $y \in \partial B_p$ için $\|Ty\| \leq \|y\|$ ise $i_p(T,B_p)=1$ dir.

ii.Eğer $\forall y \in \partial B_p$ ve $\lambda > 0$ için $y \neq Ty + \lambda\eta$ olacak şekilde $\eta \in P \setminus \{0\}$ varsa $i_p(T,B_p)=0$ dır.

iii. U , P ' nin içinde $\bar{U}_p \subset B_p$ şartını sağlayan açık küme olsun. Eğer $i_p\left(T,B_p\right)=1$ ve $i_p\left(T,U_p\right)=0$ ise T operatörünün $B_p \setminus \overline{U_p}$ ' de bir sabit noktası vardır. Aynı şekilde $i_p\left(T,B_p\right)=0$ ve $i_p\left(T,U_p\right)=1$ için de T operatörünün $B_p \setminus \overline{U_p}$ ' de bir sabit noktası vardır.

(3.2.4) denklemi ile verilen P konisi ve herhangi bir r reel sayısı için konveks küme

$$P_r := \left\{ y \in P : \|y\| < r \right\}$$

ile gösterilsin. (3.1.25)' de tanımlanan Γ için

$$\Omega_r := \left\{ y \in P : \min_{t\in[\xi_1,\xi_2]} y\left(t\right) < \Gamma r \right\}$$

olarak tanımlansın.

Lemma 3.2.2: (Lan (2001)) Ω_r kümesi için aşağıdakiler sağlanır.

i. Ω_r , P ' ye göre açıktır.

ii. $P_{\Gamma r} \subset \Omega_r \subset P_r$

iii. $y \in \partial\Omega_r$ olması için gerek ve yeter şart $\min_{t\in[\xi_1,\xi_2]} y\left(t\right) = \Gamma r$ olmasıdır.

iv. Eğer $y \in \partial\Omega_r$ ise $t \in \left[\xi_1,\xi_2\right]$ için $\Gamma r \le y\left(t\right) \le r$ olur.

İleride kullanacağımız notasyonlar şu şekildedir.

$$f_{\Gamma r}^{r} := \min\left\{ \min_{t\in[\xi_1,\xi_2]} \frac{f\left(t,y\right)}{r} : y \in \left[\Gamma r, r\right] \right\}$$

$$f_0^{r} := \max\left\{ \max_{t\in[\rho(t_1),t_n]} \frac{f\left(t,y\right)}{r} : y \in \left[0, r\right] \right\}$$

$$f^{a} := \lim_{y\to a}\sup \max_{t\in[\rho(t_1),t_n]} \frac{f\left(t,y\right)}{y}$$

$$f_{a} := \lim_{y\to a}\inf \min_{t\in[\xi_1,\xi_2]} \frac{f\left(t,y\right)}{y} \qquad \left(a := 0^{+}, \infty\right)$$

Aşağıdaki iki lemmada f fonksiyonu için $i_p\left(T,P_r\right)=1$ ve $i_p\left(T,\Omega_r\right)=0$ olma şartlarını garantileyeceğiz.

Lemma 3.2.3: K , (3.2.3)' deki gibi tanımlansın. Eğer

$$f_0^r \leq \frac{1}{K} \quad \text{ve} \quad y\in\partial P_r \quad \text{için} \quad y\neq Ty$$

şartları sağlanırsa $i_p\left(T,P_r\right)=1$ dir.

İspat: (3.1.20) ve (3.1.21)' de tanımlanan A ve B için

$$\left|A\left(hf\left(.,y\right)\right)\right|\leq A\left(h\right)\left\|f\left(.,y\right)\right\|$$

$$\left|B\left(hf\left(.,y\right)\right)\right|\leq B\left(h\right)\left\|f\left(.,y\right)\right\|$$

sağlanır. $y\in\partial P_r$ için (3.1.26)' yı kullanarak

$$\left(Ty\right)\left(t\right)=\int_{t_1}^{t_n}G\left(t,s\right)h\left(s\right)f\left(s,y\left(s\right)\right)\Delta s+A\left(hf\left(.,y\right)\right)\psi\left(t\right)+B\left(hf\left(.,y\right)\right)\phi\left(t\right)$$

$$\leq\left\|f\left(.,y\right)\right\|\left(\int_{t_1}^{t_n}G\left(s,s\right)h\left(s\right)\Delta s+A\left(h\right)\psi\left(t_n\right)+B\left(h\right)\phi\left(\rho\left(t_1\right)\right)\right)$$

$$\leq\frac{r}{K}.K$$

$$=r$$

$$=\left\|y\right\|$$

bulunur. Buradan $y\in\partial P_r$ için $\left\|Ty\right\|\leq\left\|y\right\|$ elde edilir. O halde Lemma 3.2.1 (i) den $i_p\left(T,P_r\right)=1$ dir.

Lemma 3.2.4: τ , (3.2.2)' deki gibi ve

$$M^{-1}:=\int_{\xi_1}^{\xi_2}G\left(\tau,s\right)h\left(s\right)\Delta s \tag{3.2.6}$$

olsun. Eğer

$$f_{\Gamma r}^r \geq M\Gamma \quad \text{ve} \quad y\in\partial\Omega_r \quad \text{için} \quad y\neq Ty$$

sağlanırsa $i_p\left(T,\Omega_r\right)=0$ dır.

İspat: $t \in [\rho(t_1), t_n]$ için $\eta(t) \equiv 1$ olsun. O zaman $\eta \in \partial P_1$ dir. Kabul edelim ki öyle $y_* \in \partial\Omega_r$ ve $\lambda_* > 0$ vardır ki $y_* = Ty_* + \lambda_*\eta$ sağlanır. $t \in [\xi_1, \xi_2]$ için

$$
\begin{aligned}
y_*(t) &= (Ty_*)(t) + \lambda_*\eta(t) \\
&\geq \int_{\xi_1}^{\xi_2} G(t,s)h(s)f(s,y(s))\Delta s + \lambda_* \\
&\geq M\Gamma r \int_{\xi_1}^{\xi_2} G(\tau,s)h(s)\Delta s + \lambda_* \\
&\geq \Gamma r + \lambda_*
\end{aligned}
$$

olur. Buradan da $\Gamma r \geq \Gamma r + \lambda_*$ bulunur. Bu ise çelişkidir. Sonuç olarak $y_* \in \partial\Omega_r$ ve $\lambda_* > 0$ için $y_* \neq Ty_* + \lambda_*\eta$ dir. O halde Lemma 3.2.1 (ii)' den $i_p(T, \Omega_r) = 0$ dır.

3.3 Bir veya İki Çözümün Varlığı

Bu bölümde, Bölüm 3.2'deki lemmaları kullanarak (3.2.5) ile verilen T operatörünün P konisindeki sabit noktaları ele alınacaktır. Bu sabit noktalar (3.1.1) ve (3.1.2) sınır değer probleminin pozitif çözümleri olacaktır.

Teorem 3.3.1: Γ (3.1.25) ,K (3.2.3) ve M (3.2.6)' daki gibi olsun. Kabul edelim ki $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$, $0 < c_1 < \Gamma c_2$ ve $c_2 < c_3$ şartlarını sağlayan sabitler olmak üzere

$(H1)$ $\quad f_0^{c_1}, f_0^{c_3} \leq \dfrac{1}{K}$, $f_{\Gamma c_2}^{c_2} \geq M\Gamma$, $y \in \partial\Omega_{c_2}$ için $y \neq Ty$

veya $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$, $0 < c_1 < c_2 < \Gamma c_3$ için

$(H2)$ $\quad f_{\Gamma c_1}^{c_1}, f_{\Gamma c_3}^{c_3} \geq M\Gamma$, $f_0^{c_2} \leq \dfrac{1}{K}$, $y \in \partial P_{c_2}$ için $y \neq Ty$

sağlansın. O zaman (3.1.1) ve (3.1.2) sınır değer probleminin (3.2.4) deki P konisinde iki çözümü vardır. Bununla beraber eğer $(H1)$ koşulundaki $f_0^{c_1} \leq \dfrac{1}{K}$ yerine $f_0^{c_1} < \dfrac{1}{K}$ alınırsa (3.1.1) ve (3.1.2) sınır değer probleminin üç tane pozitif çözümü vardır.

İspat: Kabul edelim ki $(H2)$ sağlansın. $(H1)$ sağlandığında da benzer şekilde yapılabilir. T operatörünün $\partial\Omega_{c_1}$ veya $P_{c_2} \backslash \overline{\Omega}_{c_1}$ de sabit noktası olduğunu göstermeliyiz. Lemma 3.2.4'ten eğer $y \in \partial\Omega_{c_1} \cup \partial\Omega_{c_3}$ için $y \neq Ty$ ise $i_p\left(T, \Omega_{c_1}\right) = 0$ ve $i_p\left(T, \Omega_{c_3}\right) = 0$ elde edilir.

$f_0^{c_2} \leq \dfrac{1}{K}$ ve $y \in \partial P_{c_2}$ için $y \neq Ty$

olduğundan Lemma 3.2.3'ten $i_p\left(T, P_{c_2}\right) = 1$ dir. Lemma 3.2.2 (ii) den $\Omega_{c_1} \subset P_{c_1} \subset P_{c_2}$ dir. Şimdi $\overline{\Omega}_{c_1} \subset P_{c_2}$ olduğunu göstermeliyiz. $\Omega_{c_1} \subset P_{c_1}$ olduğundan $\overline{\Omega}_{c_1} \subset \overline{P}_{c_1}$ dir. $y \in \overline{\Omega_{c_1}}$ alalım. $y \in \overline{\Omega}_{c_1}$ ise $y \in \overline{P}_{c_1}$ bulunur. Bu ise $y \in P$ için $\|y\| \leq c_1 < c_2$ den $\|y\| < c_2$ olmasıdır. O halde $y \in P_{c_2}$ dir. Bu da istenileni verir. Lemma 3.2.1 (iii) den T operatörünün $P_{c_2} \backslash \overline{\Omega}_{c_1}$ de sabit noktası vardır.

Lemma 3.2.2 (ii) den $P_{c_2} \subset P_{\Gamma c_3} \subset \Omega_{c_3}$ sağlanır. Şimdi $\overline{P}_{c_2} \subset \Omega_{c_3}$ olduğunu göstermeliyiz. $y \in \overline{P}_{c_2}$ ise $\|y\| \leq c_2$ olur. $c_2 < \Gamma c_3 < c_3$ olduğundan $\|y\| < c_3$ ve $\min\limits_{t \in [\xi_1, \xi_2]} y(t) < \sup\limits_{t \in [\xi_1, \xi_2]} y(t) = \|y\| < c_3$ elde edilir. Böylece $\overline{P}_{c_2} \subset \Omega_{c_3}$ bulunur. O halde Lemma 3.2.1 (iii) den T operatörünün $\Omega_{c_3} \backslash \overline{P}_{c_2}$ de sabit noktası vardır.

Sonuç 3.3.1: Kabul edelim ki öyle bir $c > 0$ sabiti vardır ki

$(H1')$ $\quad 0 \leq f^0, f^\infty < \dfrac{1}{K}$, $f_{\Gamma c}^c \geq M\Gamma$, $y \in \partial\Omega_c$ için $y \neq Ty$

veya

$(H2')$ $\quad M < f_0, f_\infty \leq \infty$, $f_0^c \leq \dfrac{1}{K}$, $y \in \partial P_c$ için $y \neq Ty$

sağlansın. O zaman (3.1.1) ve (3.1.2) sınır değer probleminin P konisinde iki çözümü vardır.

İspat: $0 \leq f^0 < \dfrac{1}{K}$ ise öyle bir c_1 sabiti vardır ki $c_1 \in (0, \Gamma c)$ için $f_0^{c_1} < \dfrac{1}{K}$ sağlanır.

$0 \le f^{\infty} < \dfrac{1}{K}$ olsun. $\tau \in \left(f^{\infty}, \dfrac{1}{K} \right)$ alalım. O zaman öyle bir $r > c$ vardır ki $y \in [r, \infty)$ için $f(t,y) \le \tau y$ sağlanır. $\beta = \max\{ f(t,y) : 0 \le y \le r \}$ ve $c_3 > \dfrac{\beta}{\left(\dfrac{1}{K} - \tau \right)}$ olsun. O halde

$y \in [0, c_3]$ için $f(t,y) \le \tau y + \beta \le \tau c_3 + \beta < \dfrac{1}{K} c_3$

elde edilir. Buradan da $f_0^{c_3} < \dfrac{1}{K}$ bulunur ki bu da $(H1)$ koşulunu verir.

Teorem 3.3.2: Kabul edelim ki $c_1, c_2 \in \mathbb{R}, \quad 0 < c_1 < \Gamma c_2$ sabitleri için

$(H3) \quad f_0^{c_1} \le \dfrac{1}{K} \quad$ ve $\quad f_{\Gamma c_2}^{c_2} \ge M\Gamma$

veya $c_1, c_2 \in \mathbb{R}, \quad 0 < c_1 < c_2$ için

$(H4) \quad f_{\Gamma c_1}^{c_1} \ge M\Gamma \quad$ ve $\quad f_0^{c_2} \le \dfrac{1}{K}$

sağlansın. O zaman (3.1.1) ve (3.1.2) sınır değer probleminin bir tane pozitif çözümü vardır.

İspat: Burada (H3) koşulunun (H1)' e ve (H4) koşulunun (H2)' ye eşit olacağını söylemeliyiz.

Lemma 3.2.4' ten eğer $y \in \partial\Omega_{c_1}$ için $y \ne Ty$ ise $i_p(T, \Omega_{c_1}) = 0$ olduğunu biliyoruz. Benzer şekilde Lemma 3.2.3' ten eğer $y \in \partial P$ için $y \ne Ty$ ise $i_p(T, P_{c_2}) = 1$'dir. O halde Lemma 3.2.1 (iii)' den T operatörünün $P_{c_2} \setminus \overline{\Omega_{c_1}}$ içinde sabit bir noktası vardır.

Sonuç 3.3.2: Kabul edelim ki

$(H3') \quad 0 \le f^0 < \dfrac{1}{K} \quad$ ve $\quad M < f_{\infty} \le \infty$

veya

$(H4') \quad 0 \le f^{\infty} < \dfrac{1}{K} \quad$ ve $\quad M < f_0 \le \infty$

sağlansın. O zaman (3.1.1) ve (3.1.2) sınır değer probleminin bir tane pozitif çözümü vardır.

3.4 Üç Çözümün Varlığı

(3.1.1) ve (3.1.2) sınır değer probleminin en az üç pozitif çözümü olduğunu ispatlamak için aşağıdaki Leggett-Williams sabit nokta teoremini kullanacağız.

$\varpi : P \to [0,\infty), \ \ \varpi(y) := \min_{t\in[\xi_1,\xi_2]} y(t)$

sürekli konkav fonksiyonel olsun. Ayrıca

$P_c := \{ y \in P : \|y\| < c \}$

$P(\varpi, a, b) := \{ y \in P : \ a \le \varpi(y), \ \|y\| < b \}$

şeklinde tanımlansın.

Teorem 3.4.1 (Leggett-Williams Sabit Nokta Teoremi) : P, S reel Banach uzayında bir koni, $T : \overline{P}_c \to \overline{P}_c$ operatörü tamamen sürekli ve ϖ, P üzerinde negatif olmayan sürekli konkav fonksiyoneli için $y \in \overline{P}_c$ ise $\varpi(y) \le \|y\|$ olsun. Kabul edelim ki $0 < a < b < l \le c$ sabitleri için aşağıdaki koşullar sağlansın.

i. $\{ y \in P(\varpi, b, l) : \varpi(y) > b \} \ne \varnothing$ ve $\forall y \in P(\varpi, b, l)$ için $\varpi(Ty) > b$

ii. $\|y\| \le a$ için $\|Ty\| < a$

iii. Eğer $y \in P(\varpi, b, c)$ ve $\|Ty\| > l$ ise $\varpi(Ty) > b$

O zaman T operatörünün $\overline{P}_c$ içinde

$\|y_1\| < a, \ \varpi(y_2) > b, \ a < \|y_3\|, \ \varpi(y_3) < b$

olacak şekilde en az üç tane sabit noktası vardır.

Teorem 3.4.2: Lemma 3.1.8 deki ξ_1, ξ_2, (3.1.25) deki Γ, (3.2.3) deki K ve (3.2.6) daki M ’ yi alalım. Kabul edelim ki $0 < a < b$ sabitleri için aşağıdakiler sağlansın.

i. $\forall t\in[\xi_1,\xi_2]$ ve $y\in\left[b,\dfrac{b}{\Gamma}\right]$ için $f(t,y)\geq bM$

ii. $\forall t\in[\rho(t_1),t_n]$ ve $y\in[0,a]$ için $f(t,y)<\dfrac{a}{K}$

iii. Aşağıdakilerden biri sağlansın.

A. $\lim\limits_{y\to\infty}\max\limits_{t\in[\rho(t_1),t_n]}\dfrac{f(t,y)}{y}<\dfrac{1}{K}$

B. Öyle bir c sabiti vardır ki $c>\dfrac{a}{\Gamma}$ olmak üzere

$\forall t\in[\rho(t_1),t_n]$ ve $y\in[0,c]$ için $f(t,y)<\dfrac{c}{K}$ dır.

O zaman (3.1.1) ve (3.1.2) sınır değer probleminin

$y_1,y_2,y_3\in\overline{P}_c$ için $\|y_1\|<a,\ \min\limits_{t\in[\xi_1,\xi_2]}y_2(t)>b$ ve $a<\|y_3\|$ için $\min\limits_{t\in[\xi_1,\xi_2]}y_3(t)<b$ olacak şekilde en az üç pozitif çözümü vardır.

İspat: (3.2.5) ile verilen T operatörünün (3.2.4) deki P konisinde sabit noktaları olduğunu Teorem 3.4.1' i kullanarak göstereceğiz. Teoremin ispatı için $l=\dfrac{b}{\Gamma}$ alalım.

Amaç 1: Eğer (A) koşulu sağlanırsa öyle bir c vardır ki $c>l$ ve $T:\overline{P}_c\to P_c$ dir. Eğer $\lim\limits_{y\to\infty}\max\limits_{t\in[\rho(t_1),t_n]}\dfrac{f(t,y)}{y}<\dfrac{1}{K}$ ise öyle bir θ vardır ki $\theta>0$ ve $\varepsilon<\dfrac{1}{K}$ için eğer $y>\theta$ ise $\max\limits_{t\in[\rho(t_1),t_n]}\dfrac{f(t,y)}{y}<\varepsilon$ dur.

$\lambda:=\max\{f(t,y):y\in[0,\theta],\ t\in[\rho(t_1),t_n]\}$

olmak üzere

$y\geq 0$ ve $t\in[\rho(t_1),t_n]$ için $f(t,y)\leq\varepsilon y+\lambda$

elde edilir. $c>\max\left\{l,\dfrac{\lambda}{\frac{1}{K}-\varepsilon}\right\}$ seçelim. O zaman $y\in\overline{P}_c$ olduğundan

$$\|Ty\| = \max_{t\in[\rho(t_1),t_n]} \int_{t_1}^{t_n} G(t,s)h(s)f(s,y(s))\Delta s + A(hf(.,y))\psi(t) + B(hf(.,y))\phi(t)$$

$$\le (\varepsilon\|y\|+\lambda)\left(\max_{t\in[\rho(t_1),t_n]} \int_{t_1}^{t_n} G(t,s)h(s)\Delta s + A(h)\psi(t) + B(h)\phi(t)\right)$$

$$\le (\varepsilon\|y\|+\lambda)K$$

$$\le \varepsilon\|y\|K + \lambda K$$

$$< \varepsilon cK + c(1-\varepsilon K)$$

$$= c$$

olur.

O halde $\|Ty\| < c$ ise $Ty \in P_c$ ve $T:\overline{P}_c \to P_c$ elde edilir.

Amaç 2: Eğer pozitif r sayısı $y \in [0,r]$ olacak şekilde varsa

$t \in [\rho(t_1),t_n]$ için $f(t,y) < \dfrac{r}{K}$

sağlandığında $T:\overline{P}_r \to P_r$ dir. Eğer $y \in \overline{P}_r$ ise

$$\|Ty\| = \max_{t\in[\rho(t_1),t_n]} \int_{t_1}^{t_n} G(t,s)h(s)f(s,y(s))\Delta s + A(hf(.,y))\psi(t) + B(hf(.,y))\phi(t)$$

$$< \frac{r}{K}\left(\max_{t\in[\rho(t_1),t_n]} \int_{t_1}^{t_n} G(t,s)h(s)\Delta s + A(h)\psi(t) + B(h)\phi(t)\right)$$

$$= r$$

olur. Sonuç olarak $\|Ty\| < r$ ise $T:\overline{P}_r \to P_r$ dir.

Bu iki ispatla eğer (A) veya (B) koşulu sağlanırsa öyle bir c sayısı vardır ki $c > l$ ve $T:\overline{P}_c \to P_c$ olduğu gösterildi. Amaç 2' de $r = a$ alırsak ve (ii)' yi kabul edersek $T:\overline{P}_a \to P_a$ bulunur.

Amaç 3: $\{y \in P(\varpi,b,l) : \varpi(y) > b\} \ne \varnothing$ ve $\forall y \in P(\varpi,b,l)$ için $\varpi(Ty) > b$ olduğunu gösterelim. Burada $y(t) = \dfrac{l+b}{2}$ alalım.

$y \in P(\varpi,b,l) = \{y \in P : b \le \varpi(y), \|y\| \le l\}$ için $b < l$ olduğundan $b < \varpi(y)$ ve $\|y\| \le l$ sağlanır. O halde $\{y \in P(\varpi,b,l) : \varpi(y) > b\} \ne \varnothing$ dır. Şimdi $y \in P(\varpi,b,l)$, τ (3.2.2) ve M (3.2.6) daki gibi olsun. (i)' yi kullanırsak

$$\varpi(Ty) = \min_{t\in[\xi_1,\xi_2]} \int_{t_1}^{t_n} G(t,s)h(s)f(s,y(s))\Delta s + A(hf(.,y))\psi(t) + B(hf(.,y))\phi(t)$$

$$> \min_{t\in[\xi_1,\xi_2]} \int_{t_1}^{t_n} G(t,s)h(s)f(s,y(s))\Delta s$$

$$\geq \frac{bM}{M}$$

$$= b$$

olduğundan $\varpi(Ty) > b$ sağlanır.

Amaç 4: Eğer $y \in P(\varpi,b,c)$ ve $\|Ty\| > l$ ise $\varpi(Ty) > b$ dir. Γ (3.1.25) deki gibi bir sayı ve $T : P \to P$ bir operatör olsun. Eğer $y \in P(\varpi,b,c)$ ve $\|Ty\| > l$ ise $\varpi(Ty) = \min_{t\in[\xi_1,\xi_2]} (Ty)(t) \geq \Gamma\|Ty\| > \Gamma l = b$ olur. Leggett-Williams sabit nokta teoreminin tüm koşulları sağlandığından (3.1.1) ve (3.1.2) sınır değer probleminin en az üç tane pozitif çözümü vardır.

4. SONUÇ

Bu tez çalışmasında ikinci mertebeden lineer olmayan Sturm-Liouville n-nokta sınır değer problemi ele alınmıştır. Lan ve Guo tarafından verilen bir lemma ve Legget-Williams sabit nokta teoremi ile koni üzerindeki bir, iki ve üç pozitif çözümün varlığı incelenmiştir.

KAYNAKLAR

Anderson D.R. (2002) Solutions to second-order three-point problems on times scales, J.of Diff. Equ. and Appl. 8:8: 673-688

Anderson D.R. (2003) Extension of a second -order multi-point problem to time scales, Dynamic System and Applications 12:3-4:393-404

Anderson D.R .(2004) Twin n-point boundary value problems, Applied Mathematics Letters 17:9:1053-1059

Anderson D.R. ,Avery R.I. and Henderson J. (2004) Existence of solutions for a one dimensional p-Laplacian on time scales, J.of Diff.Equ.and Appl. 10:10 :889-896

Atıcı F.M. and Guseinov G.Sh. (2002) On Green's functions and positive solutions for boundary value problems on time scales, J.Comput.Appl.141 :75-99

Aulbach B. and Hilger S. (1990) Linear dynamic processes with inhomogeneous time scale, Nonlinear Dynamics and Quantum Dynamical Systems 59:9-20

Bohner M. and Peterson A. (2001) Dynamic Equations on time scales, An introduction with applications, Birkhauser, Boston

Bohner M. and Peterson A. (2003) editors, Advances in Dynamic Equations on time scales, Birkhauser, Boston

Chyan C.J. and Henderson J. (2002) Twin solutions of boundary value problems for differantial equations on measure chains, J.of Comput.and Appl.Math.141:123-131

DaCunha J.J. , Davis J.M. and Singh P.K. (2004) Existence results for singular three point boundary value problems on time scales, J.of Math.Analysis and Appl.295: 378-391

Deimling Klaus (1985) Nonlinear functional analysis, Spring Verlang

Erbe L.H. and Peterson A.C. (1999) Green's functions and comparison theorems for differantial equations on measure chains, Dynam.Continuous, Discrete & Impulsive Systems 6:121-137

Erbe L.H. and Peterson A.C. (2000) Positive solutions for a nonliear differantial equation on measure chain, Math.and Comput.Modelling 32 :571-585

Guo D. and Lakshmikantham V. (1988) Nonlinear problems in abstract cones, Academic press

Henderson J. (2000) Multiple solutions for 2mth-order Sturm-Liouville boundary value problems on measure chain, J.Difference Eq.Appl. 6 :417-429

Hilger S. (1990) Analysis on measure chains-a unified approach to continuous and discrete calculus, Results Math. 18 :18-56

Kaufman E.R. (2003) Positive solutions of a three-point boundary value problem on time scales, Electronic J.of Diff. Equ. 82: 1-11

Kaufman E.R. and Raffoul Y. (2004) Eigenvalue problems for a three-point boundary value problem on a time scale, Electronic J.of Qualitative Theory of Diff.Equ.2 :1-10

Kong L. and Kong Q. (2003) Positive solutions for nonlinear m-point boundary value problems on a measure chain, J. of Diff. Equ. and Appl. 9:1: 121-133

Lan K.Q. (2001) Multiple positive solutions of semilinear differantial equations with singularities, J.of London Math.Soc.63 : 690-704

Ma R. (2003) Existence of positive solutions for superlinear semipositone m-point boundary value problems, Proceeding of the Edinburg Math. Soc. 46:279-292

Ma R. and Thompson B. (2004) Positive solutions for nonlinear m-point eigenvalue problems, J. of Math. Analysis and Appl. 297:24-37

Peterson A.C., Raffoul Y. and Tisdell C.C. (2004) Three-point boundary value problems on time scales, J. Diff. Equ .and Appl. 10:9-10:843-849

Sun H.R. and Li W.T. (2004) Positive solutions for nonlinear three-point boundary value problems on time scales, J. of Math. Analysis and Appl. 299:2: 508-524

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı	: Emel AŞCI
Anne Adı	: Melahat
Baba Adı	: Veli
Doğum Yeri ve Tarihi	: DENİZLİ, 17.07.1982
Yüksek Lisans Eğitimi	: Pamukkale Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü Analiz ve Fonksiyonlar Teorisi Anabilim Dalı, 2006
Lisans Eğitimi ve Mezuniyet Tarihi	:Hacettepe Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü, 2004
Lise Eğitimi	: Denizli Lisesi (Süper Lise), 2000.
Ortaokul Eğitimi	: Denizli Atatürk Ortaokulu, 1996
İlkokul Eğitimi	: 100.Yıl Mehmetçik İlkokulu, 1993
Bildiği Yabancı Diller	: İngilizce, Almanca
Mesleki Etkinlikleri	:Özel Dershanede Matematik Öğretmenliği