SINIR ELEMANLARI METODUNDA ZAMAN İNTEGRALLERİ

Pamukkale Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Yüksek Lisans Tezi
Matematik Anabilim Dalı

Seda YILDIRIM

Danışman:Yrd. Doç. Dr. Murat SARI

Ağustos, 2006
DENİZLİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ ONAY FORMU

Seda YILDIRIM tarafından Yrd. Doç. Dr. Murat SARI yönetiminde hazırlanan "**Sınır Elemanları Metodunda Zaman İntegralleri**" başlıklı tez tarafımızdan okunmuş, kapsamı ve niteliği açısından bir yüksek lisans tezi olarak kabul edilmiştir.

Yrd. Doç. Dr. Murat SARI
Jüri Başkanı

Prof. Dr. İdiris DAĞ
Jüri Üyesi

Yrd. Doç. Dr. Uğur YÜCEL
Jüri Üyesi

Pamukkale Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun
.../.../..... tarih ve .... sayılı kararıyla onaylanmıştır.

Prof. Dr. Mehmet Ali SARIGÖL
Müdür

Bu tezin tasarımı, hazırlanması, yürütülmesi, araştırmalarının yapılması ve bulgularının analizlerinde bilimsel etiğe ve akademik kurallara özenle riayet edildiğini; bu çalışmanın doğrudan birincil ürünü olmayan bulguların, verilerin ve materyallerin bilimsel etiğe uygun olarak kaynak gösterildiğini ve alıntı yapılan çalışmalara atfedildiğini beyan ederim.

İmza :
Öğrenci Adı Soyadı : Seda YILDIRIM

TEŞEKKÜR

Bu çalışmanın hazırlanmasında, kaynakların temini, çalışmanın yürütülmesi ve sonuçlandırılması sırasındaki tüm yardımlarından dolayı değerli hocam Yrd. Doç. Dr. Murat SARI'ya, Pamukkale Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü öğretim elemanlarına ve benden manevi desteklerini esirgemeyen aileme teşekkürlerimi sunarım.

ÖZET

SINIR ELEMANLARI METODUNDA ZAMAN İNTEGRALLERİ

Yıldırım, Seda
Yüksek Lisans Tezi, Matematik ABD
Tez Yöneticisi: Yrd. Doç. Dr. Murat SARI

Ağustos 2006, 112 sayfa

Sınır Elemanları Metodu, kimi uygulamalı matematik problemlerini çözmede kullanılan önemli bir nümerik metottur.

Bu çalışmada, Sınır Elemanları Metodunun (SIEM) teorik alt yapısında yer alan zaman bölge formülasyonu içindeki zamana bağlı integraller üzerinde çalışılmıştır. Söz konusu integraller farklı zaman interpolasyon fonksiyonu yaklaşımlarıyla analitik olarak hesaplanmıştır. Bu bağlamda kullanılan interpolasyon fonksiyonları, çeşitli problemlerin nümerik çözümlerinde hep ilgi konusu olagelmiştir. Dinamik problemlerden skaler ve elastik dalga denklemlerinin SIEM yardımıyla çözümlerinde de durum böyledir. Aranan alan değişkenlerinin zamana bağlı değişimlerinin öngörülmesinde sabit, lineer ve kuadratik fonksiyonlar benimsenmiş ve bunlara dayalı çekirdekler çıkarılmıştır. Sabit ve lineer değişimler kullanılarak elde edilen çekirdekler literatürle uyum içinde olup, kuadratik değişimle elde edilenler ilk kez çıkarılmıştır. Ayrıca sabit ve lineer değişimlerin kullanıldığı Israil ve Mansur'un yaklaşımları da karşılaştırılmıştır.

Anahtar Kelimeler: Sınır Elemanları Metodu, Zaman İnterpolasyon Fonksiyonu, Potansiyel, Akı, Yer Değiştirme, Gerilim

Prof. Dr. İdris DAĞ
Yrd. Doç. Dr. Murat SARI
Yrd. Doç. Dr. Uğur YÜCEL

ABSTRACT

TIME INTEGRALS IN BOUNDARY ELEMENT METHOD

Yıldırım, Seda
M. Sc. Thesis in Mathematics
Supervisor: Asst. Prof. Dr. Murat SARI

August 2006, 112 Pages

Boundary Element Method, is an important numerical method used to solve some applied mathematical problems.

In this thesis, time domain formulation and time related integrals in the theorical basement of Boundary Element Method (BEM) are studied. This time related integrals are evaluated analytically with the help of different time interpolation function approximations. Those interpolation functions have always been studied for the numerical solution of several problems. In dynamical problems, the solution of scalar and elastic wave equations with the help of BEM is similar. The field variables are interpolated with constant, linear and quadratic interpolation functions and kernels are evaluated related to those interpolation functions. The kernels evaluated with constant and linear time variations are in agreement with the ones in literature. The kernels evaluated with quadratic time variation are found out for the first time. Besides, Mansur's and Israil's approximations using constant and linear time variations are compared.

Keywords: Boundary Element Method, Time Interpolation Function, Potential, Flux, Displacement, Stress.

Prof. Dr. İdris DAĞ
Asst. Prof. Dr. Murat SARI
Asst. Prof. Dr. Uğur YÜCEL

İÇİNDEKİLER

ŞEKİLLER DİZİNİ

TABLOLAR DİZİNİ

SİMGE VE KISALTMALAR DİZİNİ

b	Kaynak fonksiyon
c	Dalga hızı
i	Sınırdaki düğüm noktası
j	Her bir düğüm noktası
SFM	Sonlu Farklar Metodu
SEM	Sonlu Elemanlar Metodu
SPEM	Spektral Elemanlar Metodu
SIEM	Sınır Elemanları Metodu
∇	Nabla operatörü
δ	Dirac delta fonksiyonu
H	Heaviside Fonksiyonu
u	Potansiyel
u^*	Potansiyel fundamental çözümü
u^*_{lk}	3B elastodinamik yer değiştirme fundamental çözümü
r	Kaynak nokta ile alan noktası arasındaki uzaklık
$r_{,l}$, $r_{,k}$	Uzaklığın l ve k yönlerindeki türevleri
$\delta_{\ell k}$	Kronecker deltası
q	Akı
q^*	Akı fundamental çözümü
x	Alan noktası
x^i	Kaynak nokta
t	Dalganın ulaşma zamanı
τ	Dalganın harekete başladığı an
Γ	Çözüm bölgesinin sınırı
$\mu^m(\tau)$	Zamana bağlı sabit interpolasyon fonksiyonu
$\eta^m(\tau)$	Zamana bağlı lineer interpolasyon fonksiyonu
U	Potansiyel Çekirdekleri

Q	Akı Çekirdekleri
$M_1(\tau)$, $M_2(\tau)$	Zamana bağlı lineer interpolasyon fonksiyonları
$M_{QF}(\tau)$, $M_{QM}(\tau)$, $M_{QF}(\tau)$	Zamana bağlı kuadratik interpolasyon fonksiyonları

1. GİRİŞ

Fiziksel problemlerin çözümlerine analitik yöntemlerle ulaşmak her zaman mümkün değildir. Analitik çözümün elde edilemediği problemler için nümerik yöntemler kullanılır.

Nümerik yöntemlerin en önemli avantajı nümerik modellemeye elverişli olmalarıdır. Nümerik modelleme herhangi bir fiziksel problemin matematiksel olarak ifade edilmesidir. Örneğin sismik yer hareketleri nümerik modelleme ile simüle edilebilir. Bir deprem gerçekte olmadan, herhangi bir ortamdaki etkisi hesaplanabilir ve bu etki bilgisayar ortamında yorumlanabilir.

Nümerik modellemenin uygulanması için çoğunlukla kullanılan metotlar üç grupta incelenebilir:

i) Bölge Metotları: Sonlu Farklar Metodu (SFM), Sonlu Elemanlar Metodu (SEM), Spektral Eleman Metodu (SPEM),

ii) Sınır Metotları: Sınır Elemanları Metodu (SIEM),

iii) Hibrit Metotlar: Birden fazla metodun nümerik bir çözümün içinde kullanılması anlamına gelir. Örneğin bir problemin geometrisinin bir kısmı SEM, diğer bir kısmı SIEM ile formüle edilebilir.

Nümerik metotlar, tüm çözüm bölgesini daha küçük parçalara ayırır ve bazı bağıntıları kullanarak bu parçaları bir araya getirir.

Bu çalışmada nümerik modellemeye temel oluşturabilecek metotlardan biri olan Sınır Elemanları Metodunun teorik alt yapısında yer alan; iki ve üç boyutlu skaler dalga denkleminde farklı zaman interpolasyon fonksiyonları kullanılıp potansiyel ve akı çekirdekleri ile üç boyutlu elastodinamik dalga denkleminde gerilim ve yer değiştirme çekirdekleri çıkarılacaktır.

Nümerik metotların içinde regüler geometrilerde uygulanmaya en elverişli metot Sonlu Farklar Metodudur.

Sonlu Farklar Metodu: Bir diferansiyel denklemin sonlu fark yaklaşımında denklemdeki türevler yerine, bölgenin ağ noktalarındaki çözüm değerlerini verecek olan sonlu fark denklemleri konulur. Bu denklemler sınır koşulları uygulandıktan sonra o noktalar için çözülür. SFM, basit olması ve programlamaya elverişli bir yöntem olması gibi avantajlarının yanı sıra; yaklaştırılmış çözümün türevlerinin hatalı oluşu, düzgün olmayan sınırlar boyunca sınır koşullarını uygulamadaki güçlük, geometrik olarak düzgün olmayan bölgeyi tam olarak ifade etmekteki güçlük gibi dezavantajlara da sahiptir. Bu konuda geniş bilgi için Demir'e (1998) başvurulabilir.

Sonlu Elemanlar Metodu: Yöntem; geometrisi ne olursa olsun, çözüm bölgesinin sonlu elemanlar denilen, geometrik olarak basit alt bölgelere ayrılması esasına dayanır. Bölgeler düğüm noktalarıyla birbirine bağlanır. Bu yöntemde; eleman sayısı ile artan çok sayıda denklemle işlem yapma zorluğu vardır. Bu zorluk bilgisayarların gelişimi ile azalsa da tam olarak çözümlenememiştir. Çözüm bölgesinde düğüm adını alan noktalar seçilir. Bu noktalar birleştirilerek çözüm bölgesi kesişmeyen sonlu sayıda alt bölgelere ayrılır. Her bir bölgeye sonlu eleman denir.

Sonlu eleman olarak; düzgün veya düzgün olmayan ağ kullanılabilir. Bir boyutlu bölgeler, doğru parçalarına; iki boyutlu bölgeler, üçgen veya dörtgenlere; çok boyutlu bölgeler tetrahedrallere ayrılır.

Yöntem; çözüm bölgesindeki düğüm noktalarının belirli bir kurala göre seçimi, interpolasyon fonksiyonlarının seçimi ve yaklaşık çözümün seçilen bu noktalardaki değerleri olan belirsiz parametrelerin sayısal olarak belirlenmesi esasına dayanır. Elde edilen belirsiz parametrelerin bu değerleri; seçilen düğüm noktalarında, bilinmeyen çözüm fonksiyonunun yaklaşık sayısal değerlerini verir.

Daha karmaşık geometrilerde ise boyut indirgeme avantajına sahip olan Sınır Elemanları Metodu uygulanabilir.

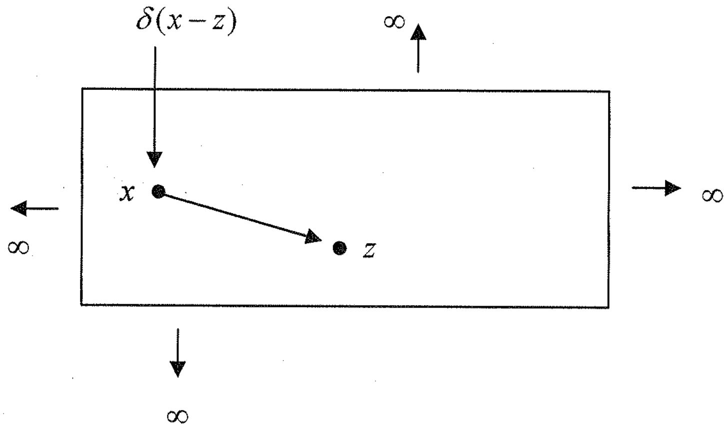
Sınır Elemanları Metodu: İsminden de anlaşılacağı gibi bu metotta; bazı diferansiyel denklemler, önce sınırda uygulanabilir integral denklemlere dönüştürülür ve daha sonra ihtiyaca göre iç noktalara uygulanır. Sınır Elemanları Metodu, Green Fonksiyonuna (Fundamental Çözüme) dayanır.

Green Fonksiyonu; Dirac Delta Fonksiyonunu kaynak kabul eden diferansiyel denklemin çözümüdür. Bir noktaya uygulanan noktasal kuvvetin, aynı bölgedeki başka bir nokta üzerindeki etkisini temsil eder.

Örneğin; Laplace Denkleminin fundamental çözümü, $\nabla^2 G(x,z) + \delta(x-z) = 0$; $x,\ z \in D^{\infty}$, denkleminin çözümüdür.

Bu denklemde, x noktası keyfi ve hareketsizdir. $\delta(x-z)$ ise Dirac delta fonksiyonu olup, sonsuz bir bölgede x noktasına etki eden fazlasıyla büyük bir kuvveti temsil eder. Dirac Delta fonksiyonu ile ilgili geniş bilgi için Greenberg'e (1971) başvurulabilir.

$$\delta(x-z)=\begin{cases}0, & x\neq z \ \ ise\\ \infty, & x=z \ \ ise\end{cases}$$

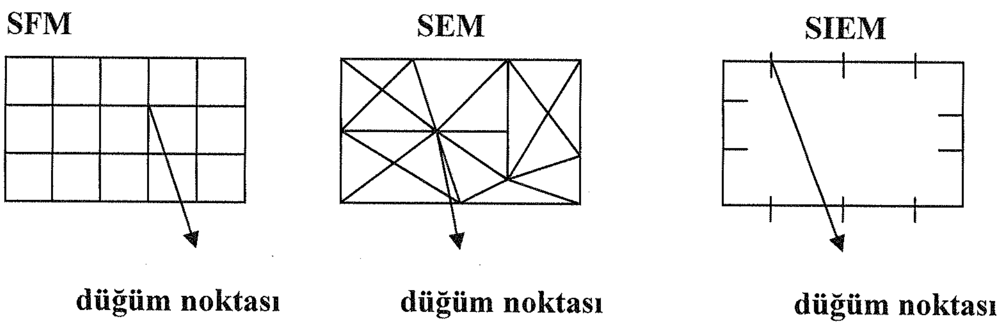


Şekil 1.1 Dirac Delta fonksiyonunun fiziksel ifadesi

Şekil 1.1'de x ve z noktalarının içinde bulunduğu bölge sonsuz bir bölgedir ve yukarıda D^{∞} ifadesiyle gösterilmiştir. Bu şekilde, herhangi bir x noktasına etki eden noktasal kuvvetin başka bir nokta olan z noktası üzerindeki etkisi anlatılmak istenmiştir. x ve z arasındaki mesafe sıfıra yaklaştıkça; $G(x,z)$ sonsuza gider. Bu yüzden Green Fonksiyonunu veya türevini içeren integraller nümerik çözüm gerektirir.

SIEM; geometrinin düzgün olmadığı problemlerde, düğümleri sınıra taşıyarak geometrinin zorluğunu azaltır. En önemli avantajı boyut indirgemesidir.

Tüm nümerik metotlar çözüm bölgesi ve problem tipine bağlı olarak avantaj ve dezavantajlar içerir.



Şekil 1.2 SFM, SEM ve SIEM'in bölge diskritizasyonları

Şekil 1.2'de bir çözüm bölgesinin SFM ile diskritize edilişi ifade edilmiştir. Şekil 1.3'te aynı çözüm bölgesi sonlu elemanlara ayrılmıştır. Şekil 1.4'te ise teorik alt yapısında çalışılacak olan SIEM ifade edilmiştir. Şekilden de anlaşılacağı gibi bölgenin içi değil, sınırları elemanlara ayrılmıştır. SEM'de olduğu gibi SIEM'de de elemanların birleştikleri yerler, düğüm adını alır.

Problem çözümünde hangi nümerik yöntemi kullanacağımıza karar vermek için:

i) Problem tipi (lineer, non lineer),

ii) İhtiyaç duyulan kesinlik,

iii) Zamanın değişimi (dinamik problemlerde),

iv) Problem geometrisi

kriterleri göz önünde bulundurulur.

Söze konu olan nümerik yöntemlerin avantaj ve dezavantajları aşağıdaki tabloda verilmiştir

Tablo 1.1 SFM, SEM ve SIEM yöntemlerinin karşılaştırılması

SFM	SEM	SIEM
Matematiksel olarak oldukça basittir.	Matematiksel karmaşası kısmen azdır.	Matematiksel karmaşası vardır.
Düzensiz geometrilerde kullanışlı değildir.	Düzensiz geometrilere uygulanabilir.	Karmaşık geometrilere uygulanabilir.
Hızla değişen değişkenli problemler için uygun değildir.	Bu tip problemlere uygulanır ancak eleman sayısı artmalı	Bu tip problemlerde avantajlıdır.
Kesinlik bakımından zayıftır.	Kesinliği artırmak için eleman sayısı artırılır.	Az sayıda elemanla aynı kesinlik sağlanır.
Zaman dezavantajı vardır.	Zaman dezavantajı vardır.	Zaman avantajı vardır.
Çözüm matrisi yoktur.	Çözüm matrisi boyutça büyük ama simetriktir.	Çözüm matrisi boyutça küçüktür ama simetrik değildir.
Fundamental çözüme ihtiyaç duymaz.	Fundamental çözüme ihtiyaç duymaz.	Fundamental çözüme ihtiyaç duyar.

Genel olarak değerlendirilirse; SIEM çoğunlukla, lineer problemler için uygundur. Kompleks ve non lineer problemlerde SEM daha iyi sonuç verir (Zienkiewicz, 1977). Regüler olmayan geometrilerde; SIEM, diğer yaklaşımlara kıyasla daha iyi sonuç verir.

SEM, Sınır Elemanları Metoduna göre matematiksel olarak daha basittir (Sarı, 2000). Zamandan tasarruf için daha az elemanla kesinliği yüksek olan SIEM daha avantajlıdır.

Sınır Elemanları Metodunun Tarihçesi:

Yöntem, 1960'lı yılların başlarında çalışılmaya başlanmış ve günümüze kadar geliştirilerek yaygınlaştırılmıştır (Sarı, 2000). Öncelikle, dalga denklemi üzerinde çalışılacağından, Sınır Elemanları Metodunun zaman bölge formülasyonuna değinmek gerekir. Zaman bölge formülasyonu sönümlü (transient) problemler için oldukça uygundur ve bu çalışma zaman bölge formülasyonundan yola çıkılarak gerçekleştirilmiştir.

Elastostatik problemlerin analizinde çalışan birçok araştırmacı vardır. Somiglina (1889), Fredholm(1905), Kellog (1953), Kupradze (1963), Miskhelishvili (1953), Mikhlin (1957,1965), SIEM nun statik problemlere uygulanışı üzerine çalışmalarda bulunmuşlardır.

Friedman ve Shaw (1962), ilk zaman bölge formülasyonunu oluşturdular ve skaler dalga denklemleri üzerinde çalışmalarına devam ettiler. Cruse (1974), üç boyutlu elastik gerilim analizi için yeni bir sınır integral denklem formülasyonu geliştirdi. Cruse ve Meyers (1977), mekanik problemlerinde SIEM'i uygulamışlardır.

Das (1976) ve Das ve Aki (1977), iki boyutlu dinamik problemleri zaman bölge formülasyonlu sınır integral denklemi ile çözmüşlerdir. Fakat bu formülasyonlar genel bir formülasyon değildi. İlk genel zaman bölge formülasyonunu, Cole ve ark. (1978), oluşturmuş ve buna bağlı uygulamaları elastodinamik problemler üzerinde gerçekleştirmişlerdir.

Zamana bağlı Sınır Elemanları formülasyonu üzerine çalışmalar 1980'lerden sonra hız kazanmıştır. Niwa ve ark. (1980), iki boyutlu elastodinamik problemlerde integral denklemlere dayalı uygulamalar yaptılar. Banerjee ve Butterfield (1981), mühendislikte SIEM üzerine çalıştılar. Manolis (1983), elastodinamik problemlerini üç boyutlu formülasyonu kullanarak analiz etmişlerdir. Mansur ve Brebbia (1982), çalışmalarında iki boyutlu skaler dalga yayılımı problemlerinde, sınır elemanları metoduyla nümerik formülasyon ve çözümlere yer vermişlerdir.

Mansur'un (1983), çalışması pek çok çalışmaya temel oluşturmuştur. Skaler dalgalar ile elastodinamik problemler için genel bir zaman bölge formülasyonu oluşturmuştur. Bu konuda bir ilktir ve sonraki çalışmalarda, kendisinin çalışmalarına alternatif yöntem ve uygulamalar getirilmiştir. Karabalis ve Beskos (1984) ve Spyrakos ve Beskos (1986), geometri ve zamana bağlı sabit yaklaşımla iki ve üç boyutlu formülasyonu geliştirdiler. Antes (1985), Mansur'un yaklaşımını, başlangıç koşulu sıfırdan farklı olan problemler için geliştirmiştir. Gallego ve Dominguez (1989), Mansur'un algoritmasını mekanik problemlere uygulamışlardır. Dominguez ve Gallego (1990), Mansur'un (1983) genel formülasyonu üzerine çalışmalar yaptılar. Ahmad ve Banerjee (1988 a,b), iki ve üç boyutlu elastodinamik problemlerinde SIEM üzerinde yoğunlaştılar.

Israil ve Banerjee (1990,1991), iki ve üç boyutlu sönümlü elestodinamik problemler için yeni bir zaman bölge formülasyonu geliştirdiler. Onların formülasyonları bazı singülerlikler içermekle beraber, Mansur (1983) ve Antes (1985) ile aynı sonuçlara ulaşmıştır.

Wang ve Takemiya (1992), skaler dalga denkleminin geometriye ve zamana bağlı integrasyonunu analitik yöntemlerle yapmışlardır. Dominguez (1993), dinamik problemlerde SIEM konusundaki çalışmalarını toparladı. Venturini (1994), üç boyutlu dinamik problemleri konu almıştır. Rizos ve Karabalis (1994), üç boyutlu elastodinamik problemler için farklı bir zaman-bölge formülasyonu geliştirdiler. Coda ve Venturini (1995), SIEM ve SEM metotları ile hibrit bir formülasyon oluşturarak bazı problemlere uyguladılar. Carrer ve Mansur (1996), iki boyutlu skaler dalga denkleminin SIEM analizi konusunda çalışmalarda bulundular. Wang ve ark. (1997) çalışmalarunda iki boyutlu elastodinamik dalga analizinde kuadratik interpolasyon fonksiyonu yaklaşımını kullandılar ve metodun kesinliğinin arttığını bazı problemlerle örneklediler.

Richter (1997), elastodinamik problemlerinde Green fonksiyonu zaman-bölge formülasyonu üzerine çalışmıştır.

Pierce ve Siebrits (1996, 1997), metodun kararlılığı konusunda çalışmışlardır.

Mansur ve ark. (1998), sınır gerilimlerini hesaplamak için, lineer zaman interpolasyon fonksiyonlarının kullanımını önerdiler.

Buraya kadar olan literatür çalışmasında Sarı (2000) temel alındı

Sarı (2000), SIEM'unu kullanarak sismik dalga modellemesi üzerine çalışmalar yaptı.

Mansur ve ark. (2000), SEM ve SIEM yöntemlerini aynı formülasyonda kullanarak iki boyutlu skaler dalga denklemi ile ilgili çalışmalar yapmıştır.

Rizos ve Wang (2002), Stokes fundamental çözümünü kullanarak SIEM ile zaman bölge formülasyonunu konu almıştır.

Dominguez ve Marrero (2003), üç boyutlu sönümlü elastodinamik problemlerinin SIEM zaman bölge formülasyonu ile elde edilen çözümlerin kesinliği üzerine çalışmalarda bulundular.

Dominguez ve ark. (2004), anizotrop katılarda sınır gerilimleri ile ilgili çalıştılar.

Tan ve ark. (2005), anizotrop katılarda iki boyutlu dalga yayılımının SIEM zaman bölge formülasyonu ile ilgili çalışmalarda bulundular.

Bu çalışma ise; Mansur' un (1983) temellendirdiği iki ve üç boyutlu skaler dalga denkleminin zaman bölge formülasyonu ile potansiyel ve akı çekirdeklerinin elde edilişine yer verilecektir. Ayrıca elastodinamik dalga denklemindeki çekirdeklerin farklı interpolasyon fonksiyonları için çıkarılışına yer verilecektir.

Sınır Elemanları Metodunun Adımları

Bir sınır integral denklemini çözmek için kullanılacak sınır elemanları metodu ile ilgili temel adımlar kısaca:

1)Sınır Diskritizasyonu: Sınır integral denklemi için çözüm bölgesi sınırı, sınır elemanlarına ayrılır. Bu elemanlar sabit, lineer veya kuadratik olabilirler. Eleman seçimi problemin geometrisine uygun olmalıdır. Örneğin regüler geometrilerde sabit elemanlar kullanılabilirken daha karmaşık geometrilerde lineer ve kuadratik interpolasyon fonksiyonlarının kullanımı kesinliği artırır (Rizos ve Karabalis, 1994).

2)Sınır Elemanları Matris Formülasyonu:

Sınır elmanları denklemlerinden AX=B biçiminde bir lineer cebirsel denklem sistemi oluşturulur. A bilinmeyen terimlerinin katsayılar matrisi, X bilinmeyenler matrisi, B bilinenler matrisidir.

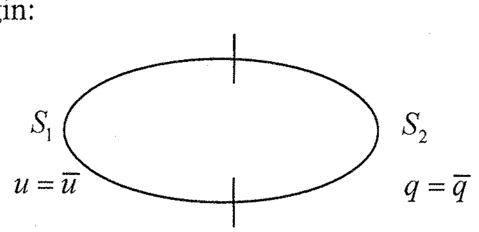
3)Sınır Koşullarının Uygulanışı: Üç farklı sınır koşulu uygulanışı vardır:

i)Essential (Dirichlet) Sınır Koşulları ($u=\overline{u}$)

ii)Natural (Neumann) Sınır Koşulları ($q=\overline{q}$)

iii)Karışık Sınır Koşulları (bölgenin bir kısmında $u=\overline{u}$ ve kalan kısmında $q=\overline{q}$ verilmektedir.)

Örneğin:



$S=S_1 \cup S_2, \quad S_1 \cap S_2 = \varnothing$

S_1 üzerinde $u=\overline{u}$ ve S_2 üzerinde $q=\overline{q}$ sınır koşulları uygulanır. Burada $\overline{u}$ ve $\overline{q}$ bilinen fonksiyonlardır.

4)Sınır Parametreleri için Çözüm

i)Sınırdaki bilinmeyenler hesaplanır.

ii)Sınırdaki değerlerden yaralanarak, iç noktalardaki bilinmeyenler elde edilir.

Sönümlü Skaler Dalga Denklemi İçin Sınır İntegral Formülasyonu

$$\nabla^2 u + \frac{1}{c^2} b = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \tag{1.1}$$

u, skaler alanı; c, dalga hızını; b, kaynak kuvvetini temsil eder. (1.1) denklemi skaler dalga denklemidir. Fundamental çözüm, (1.1) dekleminin sonsuz bölgede $\frac{1}{c^2} b(x,t) = \delta(t)\delta(x-x^i)$ kaynak kuvveti alınarak elde edilen çözümüdür. Fiziksel olarak $t = 0$ anında x^i'ye uygulanan darbesel kuvvetin etkisidir. Kaynak kuvvet Dirac delta fonksiyonu olduğunda, (1.1) denklemi şu hale gelir:

$$\nabla^2 u^* + \delta(t)\delta(x-x^i) = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u^*}{\partial t^2} \tag{1.2}$$

Bu denklemdeki fundamental çözüm (Eringen ve Suhubi, 1975) üç boyutlu problemler için

$$u^*_{3B}(x,t;x^i) = \frac{1}{4\pi R}\delta\left[t - \frac{R}{c}\right] = \frac{c}{4\pi R}\delta(ct - R), \tag{1.3}$$

R=$\left|x - x^i\right|$,

iki boyutlu problemler için

$$u^*_{2B} = \int_{-\infty}^{+\infty} u^*_{3B} dx_3 \tag{1.4}$$

$$u^*_{2B}(x,t;x^i) = \frac{c}{2\pi(c^2t^2 - r^2)^{\frac{1}{2}}} H\left[ct - r\right] \tag{1.4a}$$

ya da açık olarak

$$u^*_{2B}(x,t;x^i) = \begin{cases} \dfrac{c}{2\pi(c^2t^2 - r^2)^{\frac{1}{2}}}, & ct > r \quad ise \\ 0 & , \ ct \le r \quad ise \end{cases} \tag{1.4b}$$

yazılabilir. Burada $r = \left|x - x^i\right|$.

İntegral Formülasyonu

Tüm başlangıç koşulları sıfır kabul edilir ve kaynak kuvvet ihmal edilirse, u ve u^* skaler alanları arasındaki karşılıklı (reciprocal) ilişkiden (Banerjee, 1994);

$$\int_\Gamma (\frac{\partial u}{\partial n} * u^*) d\Gamma = \int_\Gamma (\frac{\partial u^*}{\partial n} * u) d\Gamma \tag{1.5}$$

yazılabilir. Burada

$$q^* = \frac{\partial u^*}{\partial n} = \frac{\partial u^*}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial n} \quad . \tag{1.5a}$$

(1.5) açık olarak yazılırsa

$$\int_0^t \int_\Gamma u^*(x,t-\tau;x^i)q(x,\tau)d\Gamma(x)d\tau = \int_0^t \int_\Gamma q^*(x,t-\tau;x^i)u(x,\tau)d\Gamma(x)d\tau \tag{1.5b}$$

elde edilir.

(1.5b) denkleminde konvolüsyon çarpımları açık olarak yazılmıştır. (Banerjee, 1994) Bu denkleme sınır ve bölge dışındaki noktalar da dahil edilirse

$$c^i\, u^i(x^i,t) = \int_0^t \int_\Gamma u^*(x,t-\tau;x^i)q(x,t)d\Gamma(x)d\tau - \int_0^t \int_\Gamma q^*(x,t-\tau;x^i)u(x,t)d\Gamma(x)d\tau \tag{1.6}$$

şeklini alır ve Volterra Sınır İntegral Denklemi diye adlandırılır.

Burada $c^i = \dfrac{\alpha}{2\pi}$ ve α, iki eleman arasındaki iç açıdır. u^i; x^i noktasında t zamanında oluşan skaler alanı, x^i; kaynak noktası, τ; kaynak noktasına kuvvet etki ettiği anki zamanı, x; alan noktasını, t de etkinin alan noktasına ulaştığı zamanı temsil eder.

1.1 Sınır Elemanları Metodu

Her bir aralık Δt kadar olmak üzere, sınır n eşit parçaya bölünür. Skaler potansiyel ve akı için zaman interpolasyon fonksiyonları kullanılır.

$$u(x,\tau) = \sum_j \sum_m \phi^j(x)\mu^m(\tau)u^{mj} \tag{1.7}$$

$$q(x,\tau) = \sum_j \sum_m \varphi^j(x)\eta^m(\tau)q^{mj} \tag{1.8}$$

(1.7) ve (1.8) denklemlerinde; i, sınırdaki düğüm sayısını; j, her bir düğümü; m, her bir zaman aralığını; n, toplam zaman aralığını; u^{mj}, j düğümünde $m\Delta t$ anındaki potansiyeli; q^{mj}, j düğümünde $m\Delta t$ anındaki potansiyeli; $\phi^j(x)$ ve $\varphi^j(x)$, geometriye bağlı interpolasyon fonksiyonlarını; $\mu^m(\tau)$ ve $\eta^m(\tau)$, zaman interpolasyon fonksiyonlarını temsil eder.

n tane zaman aralığı ve i düğüm noktası için integral denklemi;

$$c^i u^{ni} = \sum_{m=1}^{n} \left[\int_\Gamma q(x) \int_0^t u^* \mu^m(\tau) d\tau d\Gamma - \int_\Gamma u(x) \int_0^t q^* \eta^m(\tau) d\tau d\Gamma \right] \tag{1.9}$$

yazılabilir.

Burada μ^m ve η^m kulanılarak u ve q nicelikleri aşağıdaki şekilde öngörülebilir:

$$u(x,\tau) = u(x).\mu^m(\tau) \tag{1.9a}$$

$$q(x,\tau) = q(x).\eta^m(\tau) \tag{1.9b}$$

(1.9a) ve (1.9b) kullanılarak (1.9) denklemi,

$$c^i u^{ni} = \sum_{m=1}^{n} \left[\int_\Gamma q(x) U^{nm} \, d\Gamma - \int_\Gamma u(x) Q^{nm} \, d\Gamma \right] \tag{1.10}$$

şeklini alır.

Çalışmamızın bundan sonraki kısmı farklı durumlarda alınacak olan bu interpolasyon fonksiyonlarına göre şekillenecektir. Dolayısıyla söz konusu interpolasyon fonksiyonlarının sabit, lineer ya da kuadratik olmasına göre U^{nm} ve Q^{nm} çekirdekleri analitik olarak çıkarılacaktır. Çalışmada bir boyutlu problemlerin formülasyonundaki zaman integrallerine yer verilmemesinin nedeni bu problemlerin çözümlerinde Sınır Elemanları Metodunun elverişli olmamasıdır. Çünkü Sınır Elemanları Metodunun en önemli avantajı boyut indirgemesidir. Bir boyutta ise bu avantaj bir anlam taşımamaktadır (Banerjee, 1994).

2. POTANSİYEL VE AKI ÇEKİRDEKLERİ-SABİT VE LİNEER DEĞİŞİM

2.1 Çekirdeklerin Çıkarılışı

Bu bölümde iki boyutlu skaler dalga denklemine ait potansiyel ve akı çekirdekleri sabit ve lineer interpolasyon fonksiyonu yaklaşımıyla çıkarılacaktır.

İlk olarak sabit interpolasyon fonksiyonu yaklaşımı ile potansiyel ve akı çekirdekleri elde edilecektir.

$$U^{nm} = \int_0^t u^*(x,\tau)\,\mu^m(\tau)\,d\tau, \tag{2.1}$$

yazılabilir. Burada u^*, fundamental çözümü (Mansur, 1983), Riemann zaman konvolüsyonu dikkate alınarak,

$$u^*_{2B} = \frac{c}{2\pi\left[c^2(t-\tau)^2 - r^2\right]^{\frac{1}{2}}} H\left[c(t-\tau)-r\right] \qquad (2.1a)$$

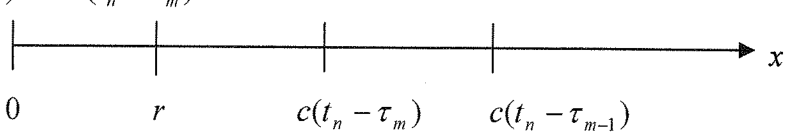
ile verilir. Sabit zaman interpolasyon fonsiyonu (Dominguez, 1993):

$$\mu^m = \begin{cases} 1 \ , \ \tau_{m-1} < \tau < \tau_m \ \text{ise} \\ 0 \ , \ \text{diğer durumlarda} \end{cases} \qquad (2.1b)$$

olarak yazılabilir. Burada interpolasyon fonksiyonunun tanım aralığından dolayı (2.1) integralinin sınırları aşağıdaki durum incelemelerinde τ_{m-1}'den τ_m'e alınmıştır.

(2.1) integrali, pertürbasyonun alan noktasına ulaşmış olup olmamasına bağlı olarak üç farklı durum için ele alınır:

1) $r < c(t_n - \tau_m)$



$r < c(t_n - \tau_m)$ için tüm aralıklarda $u^* = \dfrac{c}{2\pi\left[c^2(t-\tau)^2 - r^2\right]^{\frac{1}{2}}}$ olur. O halde,

$$U^{nm}=\int_{\tau_{m-1}}^{\tau_m}\frac{c}{2\pi\left[c^2(t-\tau)^2-r^2\right]^{\frac{1}{2}}}d\tau=\frac{1}{2\pi}\int_{\tau_{m-1}}^{\tau_m}\frac{d\tau}{\left[(t-\tau)^2-\frac{r^2}{c^2}\right]^{\frac{1}{2}}}$$

$t_n-\tau=\frac{r}{c}\cosh\theta$, $-d\tau=\frac{r}{c}\sinh\theta\, d\theta$ dönüşümü yapılır.

$\theta=\operatorname{arccos h}\frac{c(t_n-\tau)}{r}$,

$$U^{nm}=-\frac{1}{2\pi}\int_{\theta_2}^{\theta_1}\frac{\sinh\theta}{(\cosh\theta^2-1)^{\frac{1}{2}}}d\theta,$$

$\theta_1=\operatorname{arccos h}\frac{c(t_n-\tau_{m-1})}{r},\quad \theta_2=\operatorname{arccos h}\frac{c(t_n-\tau_m)}{r}.$

O halde,

$$U^{nm}=-\frac{1}{2\pi}\int_{\theta_2}^{\theta_1}\frac{\sinh\theta}{\sinh\theta}d\theta=-\frac{1}{2\pi}\theta$$

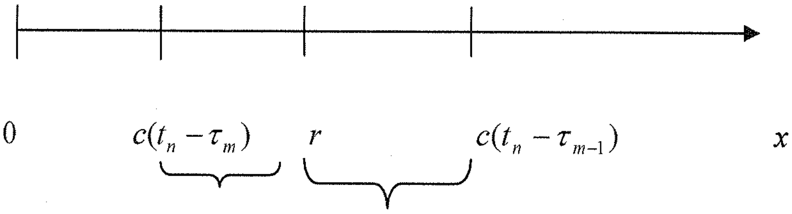
$$U^{nm}=-\frac{1}{2\pi}\operatorname{arccos h}\frac{c(t_n-\tau)}{r}\Big|_{\tau_{m-1}}^{\tau_m}=\frac{1}{2\pi}\operatorname{arccos h}\frac{c(t_n-\tau)}{r}\Big|_{\tau_m}^{\tau_{m-1}}$$

$$U^{nm}=\frac{1}{2\pi}\left[\ln\left(\frac{c(t_n-\tau_{m-1})}{r}+\sqrt{\frac{c^2(t_n-\tau_{m-1})}{r^2}-1}\right)-\ln\left(\frac{c(t_n-\tau_m)}{r}+\sqrt{\frac{c^2(t_n-\tau_m)^2}{r^2}-1}\right)\right]$$

$a_0=\frac{c(t_n-\tau_{m-1})}{r}$ ve $a_1=\frac{c(t_n-\tau_m)}{r}$ olsun. Buna göre

$U^{nm}=\frac{1}{2\pi}\ln\left(\frac{a_0+\sqrt{a_0^{\,2}-1}}{a_1+\sqrt{a_1^{\,2}-1}}\right)$ olarak yazılabilir.

2) $c(t_n-\tau_m)\le r<c(t_n-\tau_{m-1})$



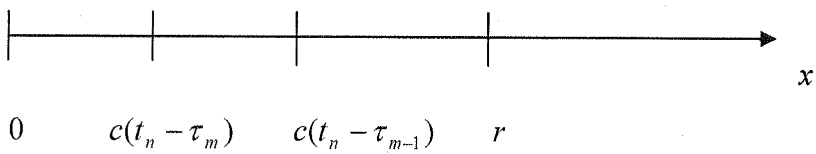
$$u^*=0 \qquad u^*=\frac{c}{2\pi\left[c^2(t_n-\tau)^2-r^2\right]^{\frac{1}{2}}}$$

$$U^{nm}=\int_{\tau_{m-1}}^{t_n-\frac{r}{c}}\frac{c}{2\pi\left[c^2(t_n-\tau)^2-r^2\right]^{\frac{1}{2}}}d\tau$$

Birinci koşuldaki integral ile aynı çözüm yolu izlenir.

$$U^{nm}=\frac{1}{2\pi}\ln(a_0+\sqrt{a_0^{\,2}-1})$$

3) $c(t_n-\tau_{m-1})<r$



Tüm aralıklarda $H=0$. Çünkü dalga alan noktasına hiçbir aralıkta ulaşmamıştır. Bu durumda $U^{nm}=0$ olur.

Akı çekirdekleri lineer interpolasyon fonksiyonları yardımıyla aşağıdaki gibi çıkarılır:

$$Q^{nm}=\int_0^t q^*\eta^m(\tau)d\tau \tag{2.2}$$

Burada q^*, iki boyutlu fundamental çözüm olup aşağıdaki (Mansur, 1983) gibidir:

$$q^*=\begin{cases}\dfrac{\partial r}{\partial n}\dfrac{cr}{2\pi\left[c^2(t-\tau)^2-r^2\right]^{\frac{3}{2}}}, & c(t-\tau)>r \text{ ise}\\ 0, & c(t-\tau)\le r \text{ ise}\end{cases} \tag{2.2a}$$

Bu formülasyonda kullanılan $\eta^m(\tau)$ zaman interpolasyon fonksiyonu ve grafiksel gösterimi (Dominguez , 1993),

$$\eta^m(\tau)=\begin{cases}\dfrac{1}{\Delta t}(\tau-\tau_{m-1}), & \tau_{m-1}\le\tau\le\tau_m \text{ ise}\\ \dfrac{1}{\Delta t}(\tau_{m+1}-\tau), & \tau_m\le\tau\le\tau_{m+1} \text{ ise}\end{cases} \tag{2.2b}$$

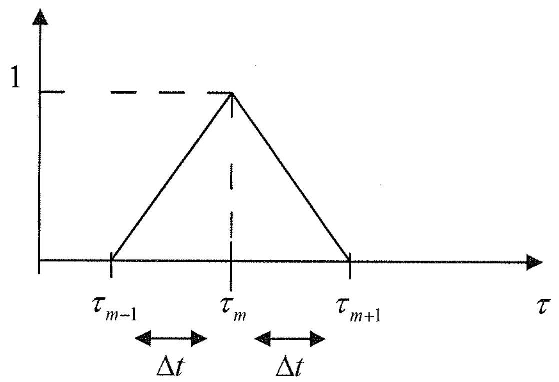
Aşağıdaki şekilde (Şekil 2.1),

$\tau_{m-1} = (m-1)\,\Delta t$,

$\tau_m = m\,\Delta t$,

$\tau_{m+1} = (m+1)\,\Delta t$

$\eta^m(\tau)$

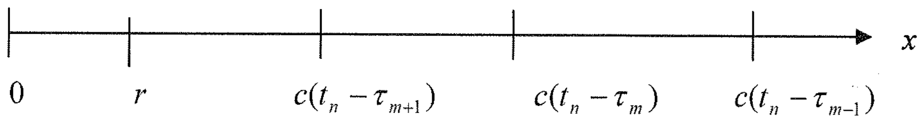


Şekil 2.1 Lineer İnterpolasyon Fonksiyonu

olarak verilebilir.

Burada ise kaynak ve alan noktaları arasındaki uzaklığa (pertürbasyonun ulaşıp ulaşmamasına) bağlı olarak dört farklı durum söz konusudur:

1) $r < c(t_n - \tau_{m+1})$



Tüm aralıklarda, $c(t_n - \tau\,) > r$ olduğundan, pertürbasyon etkisi ulaşmıştır.

$$Q^{nm} = \frac{cr}{2\pi}\frac{\partial r}{\partial n}\frac{1}{\Delta t}\int_{\tau_{m-1}}^{\tau_m}(\tau - \tau_{m-1})\frac{1}{\left[c^2(t-\tau)^2 - r^2\right]^{\frac{3}{2}}}d\tau$$

$$+\frac{cr}{2\pi}\frac{\partial r}{\partial n}\frac{1}{\Delta t}\int_{\tau_m}^{\tau_{m+1}}(\tau_{m+1} - \tau\,)\frac{1}{\left[c^2(t-\tau)^2 - r^2\right]^{\frac{3}{2}}}d\tau$$

$$Q_1 = \int_{\tau_{m-1}}^{\tau_m}(\tau - \tau_{m-1})\frac{1}{\left[c^2(t-\tau)^2 - r^2\right]^{\frac{3}{2}}}d\tau\,,$$

$$Q_2 = \int_{\tau_m}^{\tau_{m+1}}(\tau_{m+1} - \tau)\frac{1}{\left[c^2(t-\tau)^2 - r^2\right]^{\frac{3}{2}}}d\tau\,,$$

$$Q^{nm}=\frac{cr}{2\pi}\frac{\partial r}{\partial n}\frac{1}{\Delta t}(Q_1+Q_2)\,.$$

$$Q_{11}=\int_{\tau_{m-1}}^{\tau_m}\frac{\tau}{\left[c^2(t-\tau)^2-r^2\right]^{\frac{3}{2}}}d\tau\,,\quad Q_{12}=\int_{\tau_{m-1}}^{\tau_m}-\frac{\tau_{m-1}}{\left[c^2(t-\tau)^2-r^2\right]^{\frac{3}{2}}}d\tau$$

$Q_1=Q_{11}+Q_{12}$. Burada;

$$Q_{21}=\int_{\tau_m}^{\tau_{m+1}}\frac{\tau_{m+1}}{\left[c^2(t-\tau)^2-r^2\right]^{\frac{3}{2}}}d\tau\,,\quad Q_{22}=\int_{\tau_m}^{\tau_{m+1}}\frac{-\tau}{\left[c^2(t-\tau)^2-r^2\right]^{\frac{3}{2}}}d\tau\,.$$

$Q_2=Q_{21}+Q_{22}$.

Bu integralleri alırken de $t-\tau=\frac{r}{c}\cosh\theta$ dönüşümü kullanılır.

$$Q_{11}=\frac{1}{r^3}\int_{\theta_1}^{\theta_2}\frac{(t-\frac{r}{c}\cosh\theta)(-\frac{r}{c}\sinh\theta)}{(\cosh^2\theta-1)^{\frac{3}{2}}}d\theta$$

$$\theta_1=\operatorname{arccos h}\frac{c(t_n-\tau_{m-1})}{r}\,,\quad \theta_2=\operatorname{arccos h}\frac{c(t_n-\tau_m)}{r}$$

$$Q_{11}=-\frac{t_n}{r^2c}\int_{\theta_1}^{\theta_2}\frac{1}{\sinh^2\theta}d\theta+\frac{1}{c^2r}\int_{\theta_1}^{\theta_2}\frac{\cosh\theta}{\sinh^2\theta}d\theta$$

$$Q_{11}=\frac{t_n}{r^2c}\frac{\cosh\theta}{\sinh\theta}\Big|_{\theta_1}^{\theta_2}-\frac{1}{rc^2}\frac{1}{\sinh\theta}\Big|_{\theta_1}^{\theta_2}$$

$$Q_{11}=\left[\frac{t_n}{r^2c}\frac{\frac{c(t_n-\tau)}{r}}{\sqrt{\frac{c^2(t_n-\tau)^2}{r^2}-1}}-\frac{1}{rc^2}\frac{1}{\sqrt{\frac{c^2(t_n-\tau)^2}{r^2}-1}}\right]_{\tau_{m-1}}^{\tau_m}$$

$$Q_{12}=-\tau_{m-1}\int_{\tau_{m-1}}^{\tau_m}\frac{1}{\left[c^2(t-\tau)^2-r^2\right]^{\frac{3}{2}}}d\tau=-\tau_{m-1}\int_{\theta_1}^{\theta_2}\frac{\frac{-r}{c}\sinh\theta}{r^3\left[\cosh^2\theta-1\right]^{\frac{3}{2}}}d\theta$$

$$Q_{12}=\frac{\tau_{m-1}}{r^2c}\int_{\theta_1}^{\theta_2}\frac{1}{\sinh^2\theta}d\theta=-\frac{\tau_{m-1}}{r^2c}\left(\frac{\cosh\theta}{\sinh\theta}\right)\Big|_{\theta_1}^{\theta_2}$$

$$Q_{12} = \left[-\frac{\tau_{m-1}}{r^2 c} \frac{\frac{c(t_n-\tau)}{r}}{\sqrt{\frac{c^2(t_n-\tau)^2}{r^2}-1}} \right]_{\tau_{m-1}}^{\tau_m}$$

$a_0 = \dfrac{c(t_n-\tau_{m-1})}{r}$ ve $a_1 = \operatorname{arccos h}\dfrac{c(t_n-\tau_m)}{r}$ olsun.

$$Q_1 = \frac{t_n}{r^2 c}\frac{a_1}{\sqrt{a_1^2-1}} - \frac{1}{r^2 c}\frac{1}{\sqrt{a_1^2-1}} - \frac{t_n}{r^2 c}\frac{a_0}{\sqrt{a_0^2-1}} + \frac{1}{r^2 c}\frac{1}{\sqrt{a_0^2-1}}$$

$$-\frac{\tau_{m-1}}{r^2 c}\frac{a_1}{\sqrt{a_1^2-1}} + \frac{\tau_{m-1}}{r^2 c}\frac{a_0}{\sqrt{a_0^2-1}}.$$

$$Q_{21} = \tau_{m+1}\int_{\tau_m}^{\tau_{m+1}} \frac{1}{\left[c^2(t-\tau)^2-r^2\right]^{\frac{3}{2}}}d\tau$$

Q_{21} ve Q_{12} integralleri aynıdır. Ancak sınırlar farklıdır.

$$Q_{21} = \left[\frac{\tau_{m+1}}{r^2 c} \frac{\frac{c(t_n-\tau)}{r}}{\sqrt{\frac{c^2(t_n-\tau)^2}{r^2}-1}} \right]_{\tau_m}^{\tau_{m+1}}$$

$$Q_{22} = -\int_{\tau_m}^{\tau_{m+1}} \frac{\tau}{\left[c^2(t-\tau)^2-r^2\right]^{\frac{3}{2}}}d\tau$$

Q_{22} integrali ile Q_{11} integrali aynıdır. Sınırlar değişirse

$$Q_{22} = \left[-\frac{t_n}{r^2 c} \frac{\frac{c(t_n-\tau)}{r}}{\sqrt{\frac{c^2(t_n-\tau)^2}{r^2}-1}} + \frac{1}{rc^2}\frac{1}{\sqrt{\frac{c^2(t_n-\tau)^2}{r^2}-1}} \right]_{\tau_m}^{\tau_{m+1}}.$$

$a_2 = \dfrac{c(t_n-\tau_{m+1})}{r}$ alınırsa,

$$Q_2 = \frac{\tau_{m+1}}{r^2 c}\frac{a_2}{\sqrt{a_2^2-1}} - \frac{\tau_{m+1}}{r^2 c}\frac{a_1}{\sqrt{a_1^2-1}} - \frac{t_n}{r^2 c}\frac{a_2}{\sqrt{a_2^2-1}} + \frac{1}{rc^2}\frac{1}{\sqrt{a_2^2-1}}$$

$$+\frac{t_n}{r^2 c}\frac{a_1}{\sqrt{a_1^2-1}} - \frac{1}{rc^2}\frac{1}{\sqrt{a_1^2-1}}$$

$$Q^{nm} = \frac{cr}{2\pi}\frac{\partial r}{\partial n}\frac{1}{\Delta t}(Q_1 + Q_2)$$

$$Q^{nm} = \frac{cr}{2\pi}\frac{\partial r}{\partial n}\frac{1}{\Delta t}\{\frac{1}{rc^2}\frac{a_1}{\sqrt{a_1^2-1}}\frac{c(t_n-\tau_{m-1})}{r} + \frac{1}{rc^2}(\frac{1}{\sqrt{a_0^2-1}} - \frac{1}{\sqrt{a_1^2-1}})$$

$$-\frac{1}{rc^2}\frac{a_0}{\sqrt{a_0^2-1}}\frac{c(t_n-\tau_{m-1})}{r} + \frac{1}{rc^2}\frac{a_1}{\sqrt{a_1^2-1}}\frac{c(t_n-\tau_{m+1})}{r}$$

$$-\frac{1}{rc^2}\frac{a_2}{\sqrt{a_2^2-1}}\frac{c(t_n-\tau_{m+1})}{r} + \frac{1}{rc^2}(\frac{1}{\sqrt{a_2^2-1}} - \frac{1}{\sqrt{a_1^2-1}})\}.$$

$$Q^{nm} = \frac{\partial r}{\partial n}\frac{1}{\Delta t}\frac{1}{2\pi c}(\frac{a_1 a_0}{\sqrt{a_1^2-1}} - \frac{a_0^2}{\sqrt{a_0^2-1}} + \frac{a_1 a_2}{\sqrt{a_1^2-1}} - \frac{a_2}{\sqrt{a_2^2-1}}$$

$$+\frac{1}{\sqrt{a_0^2-1}} - \frac{2}{\sqrt{a_1^2-1}} + \frac{1}{\sqrt{a_2^2-1}}).$$

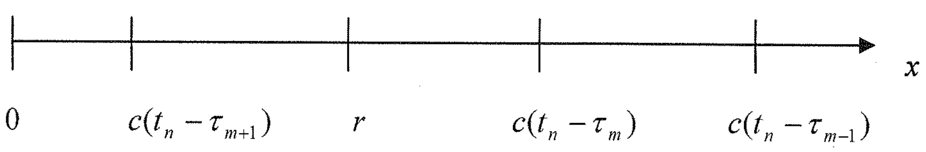
$$\frac{a_0^2-1}{\sqrt{a_0^2-1}} = \sqrt{a_0^2-1}, \quad \frac{a_2^2-1}{\sqrt{a_2^2-1}} = \sqrt{a_2^2-1}, \quad -\frac{(a_1a_0+a_1a_2-2)}{\sqrt{a_1^2-1}} = -\frac{a_1(a_0+a_2)-2}{\sqrt{a_1^2-1}},$$

$$a_0 + a_2 = \frac{2c(t-\tau_m)}{r}, \quad a_0 + a_2 = 2a_1 \text{ ve}$$

$$-\frac{(a_1a_0+a_1a_2-2)}{\sqrt{a_1^2-1}} = \frac{a_1^2-1}{\sqrt{a_1^2-1}} = -2\sqrt{a_1^2-1}$$ olur. Buradan,

$$Q^{nm} = -\frac{\partial r}{\partial n}\frac{1}{2\pi c}\frac{1}{\Delta t}(\sqrt{a_0^2-1} - 2\sqrt{a_1^2-1} + \sqrt{a_2^2-1}).$$

2) $c(t_n - \tau_{m+1}) \le r < c(t_n - \tau_m)$



İlk aralıkta pertürbasyon etkisi alan noktasına henüz ulaşmamıştır.

Diğer iki aralıkta ise ulaşmıştır.

$$Q^{nm} = \underbrace{\int_{\tau_{m-1}}^{\tau_m} q^* \frac{1}{\Delta t}(\tau - \tau_{m-1})\, d\tau}_{Q_3} + \underbrace{\int_{\tau_m}^{t_n - \frac{r}{c}} q^* \frac{1}{\Delta t}(\tau_{m+1} - \tau)\, d\tau}_{Q_4} .$$

$$Q_{31} = \int_{\tau_{m-1}}^{\tau_m} \frac{\tau}{\left[c^2(t-\tau)^2 - r^2\right]^{\frac{3}{2}}} d\tau$$

Q_{31} ve Q_{11} integralleri aynıdır. O halde,

$$Q_{31} = \left[\frac{t_n}{r^2 c} \frac{\frac{c(t_n - \tau)}{r}}{\sqrt{\frac{c^2(t_n-\tau)^2}{r^2} - 1}} - \frac{1}{rc^2} \frac{1}{\sqrt{\frac{c^2(t_n-\tau)^2}{r^2} - 1}} \right]_{\tau_{m-1}}^{\tau_m} .$$

$$Q_{32} = Q_{12} = \int_{\tau_{m-1}}^{\tau_m} - \frac{\tau_{m-1}}{\left[c^2(t_n-\tau)^2 - r^2\right]^{\frac{3}{2}}} d\tau$$

Q_{32} ve Q_{12} inregralleri aynıdır. Sınırlar değişir.

$$Q_{32} = \left[-\frac{\tau_{m-1}}{r^2 c} \frac{\frac{c(t_n - \tau)}{r}}{\sqrt{\frac{c^2(t_n-\tau)^2}{r^2} - 1}} \right]_{\tau_{m-1}}^{\tau_m} .$$

$$Q_3 = \frac{cr}{2\pi} \frac{\partial r}{\partial n} \frac{1}{\Delta t} (Q_{31} + Q_{32}).$$

$$Q_{41} = \tau_{m+1} \int_{\tau_m}^{t_n - \frac{r}{c}} \frac{1}{\left[c^2(t-\tau)^2 - r^2\right]^{\frac{3}{2}}} d\tau$$

Q_{41} ve Q_{21} integralleri aynıdır.

$$Q_{41} = Q_{21} = \left[\frac{\tau_{m+1}}{r^2 c} \frac{\frac{c(t_n - \tau)}{r}}{\sqrt{\frac{c^2(t_n-\tau)^2}{r^2} - 1}} \right]_{\tau_m}^{t_n - \frac{r}{c}} .$$

$$Q_{42} = -\int_{\tau_m}^{\tau_{m+1}} \frac{\tau}{\left[c^2(t-\tau)^2 - r^2\right]^{\frac{3}{2}}} d\tau$$

$$Q_{42} = \left[-\frac{t_n}{r^2 c} \frac{\dfrac{c(t_n-\tau)}{r}}{\sqrt{\dfrac{c^2(t_n-\tau)^2}{r^2}-1}} + \frac{1}{rc^2} \frac{1}{\sqrt{\dfrac{c^2(t_n-\tau)^2}{r^2}-1}} \right]_{\tau_m}^{t_n-\frac{r}{c}} .$$

$$Q_4 = \frac{cr}{2\pi} \frac{\partial r}{\partial n} \frac{1}{\Delta t} (Q_{41} + Q_{42}).$$

$Q^{nm} = Q_3 + Q_4$ kullanılarak,

$$Q^{nm} = \frac{cr}{2\pi} \frac{\partial r}{\partial n} \frac{1}{\Delta t} \{ \frac{1}{rc^2} \frac{a_1}{\sqrt{a_1^2-1}} \frac{c(t_n-\tau_{m-1})}{r} + \frac{1}{rc^2} (\frac{1}{\sqrt{a_0^2-1}} - \frac{1}{\sqrt{a_1^2-1}})$$

$$- \frac{1}{rc^2} \frac{a_0}{\sqrt{a_0^2-1}} \frac{c(t_n-\tau_{m-1})}{r} + \frac{1}{rc^2} \frac{a_1}{\sqrt{a_1^2-1}} \frac{c(t_n-\tau_{m+1})}{r} - \frac{1}{rc^2} \frac{1}{\sqrt{a_1^2-1}} \}$$

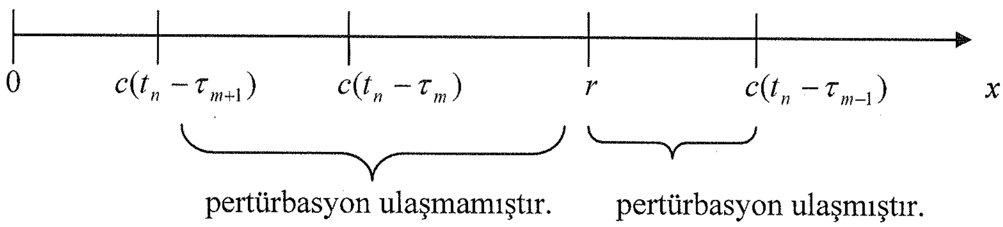
ya da

$$Q^{nm} = \frac{\partial r}{\partial n} \frac{1}{\Delta t} \frac{1}{2\pi c} (\frac{a_1 a_0}{\sqrt{a_1^2-1}} - \frac{a_0^2}{\sqrt{a_0^2-1}} + \frac{a_1 a_2}{\sqrt{a_1^2-1}} + \frac{1}{\sqrt{a_0^2-1}} - \frac{2}{\sqrt{a_1^2-1}}) \text{ bulunur.}$$

$$Q^{nm} = -\frac{\partial r}{\partial n} \frac{1}{2\pi c} \frac{1}{\Delta t} (\frac{a_0^2-1}{\sqrt{a_0^2-1}} - \frac{(a_1 a_0 + a_1 a_2 - 2)}{\sqrt{a_1^2-1}}),$$

$$Q^{nm} = -\frac{\partial r}{\partial n} \frac{1}{2\pi c} \frac{1}{\Delta t} (\sqrt{a_0^2-1} - 2\sqrt{a_1^2-1}).$$

3) $c(t_n - \tau_m) \le r < c(t_n - \tau_{m-1})$



$$Q^{nm} = \frac{cr}{2\pi} \frac{\partial r}{\partial n} \frac{1}{\Delta t} \underbrace{\int_{\tau_{m-1}}^{t_n-\frac{r}{c}} \frac{\tau}{\left[c^2(t-\tau)^2 - r^2\right]^{\frac{3}{2}}} d\tau}_{Q_{51}} - \frac{cr}{2\pi} \frac{\partial r}{\partial n} \frac{1}{\Delta t} \underbrace{\int_{\tau_{m-1}}^{t_n-\frac{r}{c}} \frac{\tau_{m-1}}{\left[c^2(t-\tau)^2 - r^2\right]^{\frac{3}{2}}} d\tau}_{Q_{52}}$$

$$Q^{nm} = \frac{cr}{2\pi} \frac{\partial r}{\partial n} \frac{1}{\Delta t} (Q_5 + Q_6)$$

$$Q_{51} = \int_{\tau_{m-1}}^{t_n - \frac{r}{c}} \frac{\tau}{\left[c^2(t-\tau)^2 - r^2\right]^{\frac{3}{2}}} d\tau$$ aynı dönüşümlerle Q_{51} integrali Q_{11} ile aynı olur.

$$Q_{51} = \left[\frac{t_n}{r^2 c} \frac{\frac{c(t_n-\tau)}{r}}{\sqrt{\frac{c^2(t_n-\tau)^2}{r^2} - 1}} - \frac{1}{rc^2} \frac{1}{\sqrt{\frac{c^2(t_n-\tau)^2}{r^2} - 1}} \right]_{\tau_{m-1}}^{t_n - \frac{r}{c}}$$

$$Q_{52} = -\tau_{m-1} \int_{\tau_{m-1}}^{t_n - \frac{r}{c}} \frac{1}{\left[c^2(t-\tau)^2 - r^2\right]^{\frac{3}{2}}} d\tau .$$ Q_{52} integrali Q_{12} ile aynı olur.

$$Q_{52} = \left[-\frac{\tau_{m-1}}{r^2 c} \frac{\frac{c(t_n-\tau)}{r}}{\sqrt{\frac{c^2(t_n-\tau)^2}{r^2} - 1}} \right]_{\tau_{m-1}}^{t_n - \frac{r}{c}} .$$

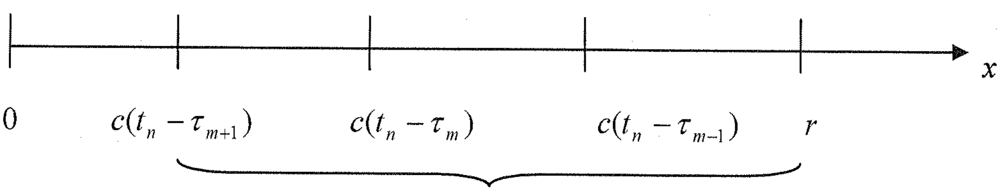
Sınırlarda $t_n - \frac{r}{c}$ yerleştirildiğinde Q değeri sıfırlanır. Çünkü $t_n - \frac{r}{c}$ zamanı, dalganın alan noktasına ulaşmasından çok az önceki bir anı temsil eder. Dalga henüz ulaşmadığı için akı sıfırdır. O halde,

$$Q^{nm} = \frac{cr}{2\pi} \frac{\partial r}{\partial n} \frac{1}{\Delta t} \left\{ -\frac{t_n}{r^2 c} \frac{a_0}{\sqrt{a_0^2 - 1}} + \frac{1}{rc^2} \frac{1}{\sqrt{a_0^2 - 1}} + \frac{\tau_{m-1}}{r^2 c} \frac{a_0}{\sqrt{a_0^2 - 1}} \right\}$$

$$Q^{nm} = -\frac{cr}{2\pi} \frac{\partial r}{\partial n} \frac{1}{\Delta t} \left\{ \frac{1}{r^2 c} \frac{a_0}{\sqrt{a_0^2 - 1}} \frac{c(t_n - \tau_{m-1})}{r} - \frac{1}{r^2 c} \frac{1}{\sqrt{a_0^2 - 1}} \right\}$$

$$= -\frac{cr}{2\pi} \frac{\partial r}{\partial n} \frac{1}{\Delta t} \left(\frac{a_0^2 - 1}{\sqrt{a_0^2 - 1}} \right) = -\frac{cr}{2\pi} \frac{\partial r}{\partial n} \frac{1}{\Delta t} \sqrt{a_0^2 - 1} .$$

4) $c(t_n - \tau_m) \le r$



pertürbasyon henüz ulaşmamıştır.

Pertürbasyon, alan noktasına hiçbir aralıkta ulaşmaz. Bu sebeple akı sıfır olur. Bu durumda $Q^{nm} = 0$ olur.

Israil ve Banerjee (1990,1991) çalışmalarında yine lineer olmakla birlikte, yaklaşım olarak farklı zaman interpolasyon fonksiyonları kullanarak potansiyel ve akı çekirdeklerini elde etmişlerdir. Söz konusu çalışmalarda lineer interpolasyon fonksiyonları kullanılırken, Mansur'un (1983) çalışmasından farklı olarak tek zaman aralığına bağlı iki tane lineer interpolasyon fonksiyonu esas alınmıştır. Ancak sonuç olarak her iki yaklaşım da aynı çekirdeklere ulaşır. Zira Şekil 2.2'de $M_2(\tau)$, Δt kadar sağa ötelendiğinde, Şekil (2.1)'deki ifade ve görünüm elde edilir. Bu öteleme yapıldığında çekirdeklerde karşılaşılan $r^{\frac{-1}{2}}$ singülerliği daha basit bir yapıya dönüşmektedir. Aşağıdaki tartışmada ise Israil ve Banerjee'nin (1990,1991) aldığı zaman interpolasyon fonksiyonları kullanılmıştır.

2.2 Farklı Yaklaşımla Potansiyel ve Akı Çekirdeklerinin Çıkarılışı:

$t = n \cdot \Delta t$

$u(x,\tau)$; τ zamanında x konumundaki potansiyeli, $q(x,\tau)$; τ zamanında x konumundaki akıyı temsil eder. Burada da sabit ve lineer zaman interpolasyon fonksiyonları kullanılmıştır (Israil ve Banerjee; 1990,1991).

Sabit zaman değişimi:

$$u(x,\tau) = \sum_{m=1}^{n} u^m(x)\mu^m(\tau) \tag{2.3}$$

$\mu^m(\tau)$, (2.1b) ile ifade edilen sabit interpolasyon fonksiyonudur.

$\tau_{m-1} = (m-1)\Delta t$ ve $\tau_m = m\Delta t.$

$$u^* * q = \sum_{m=1}^{n} q^m(x) \int_{\tau_{m-1}}^{\tau_m} u^*\left(x, n\Delta t; x^i, \tau\right) d\tau = \sum_{m=1}^{n} q^m(x) U^{n-m+1} \tag{2.4}$$

u^m; $t = m \cdot \Delta t$ zamanındaki potansiyeli, q^m; $t = m \cdot \Delta t$ zamanındaki akıyı temsil eder.

$$U^{n-m+1} = \int_{\tau_{m-1}}^{\tau_m} \frac{c}{2\pi\left[c^2\left(n\Delta t - \tau\right)^2 - r^2\right]^{\frac{1}{2}}} d\tau$$

$$U^{n-m+1} = \frac{1}{2\pi} \int_{\tau_{m-1}}^{\tau_m} \frac{1}{\left[\left(n\Delta t - \tau\right)^2 - \left(\frac{r}{c}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}} d\tau$$

$n\Delta t = t_n$ olduğu hatırlanarak $t-\tau = \frac{r}{c}\cosh\theta$ dönüşümü uygulanırsa;

$$\tau = t - \frac{r}{c}\cosh\theta \Rightarrow d\tau = -\frac{r}{c}\sinh\theta\, d\theta,\ \ \theta = \operatorname{arccos h}\left(\frac{c(t_n-\tau)}{r}\right)$$

O halde,

$$U^{n-m+1} = -\frac{1}{2\pi}\int_{\theta_1}^{\theta_2}\frac{\sinh\theta}{\sinh\theta}d\theta = \left[-\frac{1}{2\pi}\theta + \frac{1}{2\pi}\operatorname{arccos h}\left(\frac{c(t_n-\tau)}{r}\right)\right]_{\tau_{m-1}}^{\tau_m}$$

$(t-\tau)$ yerine z yazalım:

$$U^{n-m+1} = \frac{1}{2\pi}\left[H\left(\frac{cz}{r}-1\right)\operatorname{arccos h}\left(\frac{cz}{r}\right)\right]_{z=(n-m)\Delta t}^{z=(n-m+1)\Delta t}.$$

Akı çekirdekleri de sabit interpolasyon fonksiyonları kullanılarak çıkarılırsa;

$$q^* * u = \sum_{m=1}^{n} u^m(x)\int_{(m-1)\Delta t}^{m\Delta t} q^*\left(x, n\Delta t; x^i, \tau\right)d\tau$$

$$q^* * u = \sum_{m=1}^{n} u^m(x) Q^{n-m+1}. \tag{2.5}$$

Burada,

$$Q^{n-m+1} = \int_{\tau_{m-1}}^{\tau_m} q^*(x, n\Delta t; x^i, \tau)\, d\tau = \int_{\tau_{m-1}}^{\tau_m}\frac{\partial r}{\partial n}\frac{cr}{2\pi\left[c^2(n\Delta t-\tau)^2 - r^2\right]^{\frac{3}{2}}}d\tau$$

Yine $n\Delta t - \tau = \frac{r}{c}\cosh\theta$ dönüşümü uygulanırsa;

$$Q^{n-m+1} = -\frac{\partial r}{\partial n}\frac{1}{2\pi r}\int_{\theta_1}^{\theta_2}\frac{d\theta}{\sinh^2\theta} = \frac{\partial r}{\partial n}\frac{1}{2\pi r}\left.\frac{\cosh\theta}{\sinh\theta}\right|_{\theta_1}^{\theta_2} \quad \text{ve}$$

$$\theta_1 = \operatorname{arccos h}\left[\frac{c(t-\tau_{m-1})}{r}\right],\ \ \theta_2 = \operatorname{arccos h}\left[\frac{c(t-\tau_m)}{r}\right].$$

$$Q^{n-m+1} = -\frac{\partial r}{\partial n}\frac{1}{2\pi r}\left[\frac{\cosh\left[\operatorname{arccos h}\left(\frac{c(t-\tau)}{r}\right)\right]}{\sqrt{\cosh^2\left[\frac{\operatorname{arccos h}(c(t-\tau))}{r}\right]-1}}\right]_{\tau_m}^{\tau_{m-1}}.$$

$$Q^{n-m+1} = -\frac{1}{2\pi r}\frac{\partial r}{\partial n}\left[H\left(\frac{cz}{r}-1\right)\left(\frac{cz/r}{\sqrt{(cz/r)^2-1}}\right)\right]_{z=(n-m)\Delta t}^{z=(n-m+1)\Delta t}.$$

Lineer Zaman Değişimi:

Burada bir önceki uygulamadan farklı olarak lineer interpolasyon fonksiyonu değiştirilip, tek zaman aralığında iki lineer fonksiyonu ifade etmeye dayalı başka bir yaklaşım oluşturulursa:

$$u(x,\tau) = \sum_{m=1}^{n} M_1(\tau)u^m(x) + M_2(\tau)u^{m+1}(x) \tag{2.6}$$

$M_1(\tau)$ ve $M_2(\tau)$ birinci ve ikinci düğüm noktalarına ilişkin zaman interpolasyon fonksiyonlarıdır (bkz Şekil 2.2).

$$\begin{aligned} c(x^i)u^n(x^i) = \sum_{m=1}^{n}\int_{\Gamma} \{&\left[U_1^{n-m+1}q^m(x) + U_2^{n-m+1}q^{m-1}(x)\right] \\ &-\left[Q_1^{n-m+1}u^m(x) + Q_2^{n-m+1}u^{m-1}(x)\right]\}\, d\Gamma \end{aligned} \tag{2.7}$$

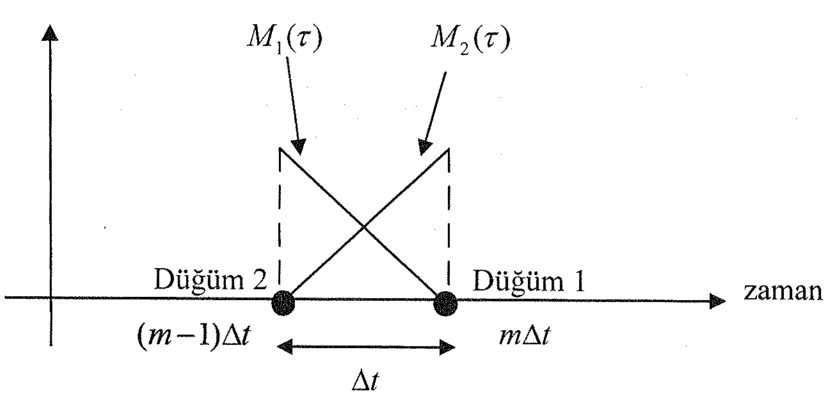
Potansiyel çekirdeklerinin integrayonuna gelince:

$$U_1^{n-m+1} = \int_{(m-1)\Delta t}^{m\Delta t} u^*(x, n\Delta t; x^i, \tau)M_1(\tau)d\tau \tag{2.8}$$

$$M_1(\tau) = \frac{\tau-(m-1)\Delta t}{\Delta t}\phi_m(\tau)\,, \tag{2.8a}$$

$$M_2(\tau) = \frac{m\Delta t-\tau}{\Delta t}\phi_m(\tau) \tag{2.8b}$$

Şekil 2.2'de birinci ve ikinci düğüm noktalarındaki zaman interpolasyon fonksiyonunun grafiksel gösterimine yer verilmiştir.



Şekil 2.2 Farklı Yaklaşımla Lineer İnterpolasyon Fonksiyonu

$$U_1^{\,n-m+1} = \int_{\tau_{m-1}}^{\tau_m} \frac{c}{2\pi\sqrt{c^2(t-\tau)^2 - r^2}} \frac{\tau-(m-1)\Delta t}{\Delta t} d\tau$$

Burada $t_n = n \cdot \Delta t$.

$$U_1^{\,n-m+1} = \int_{\tau_{m-1}}^{\tau_m} \frac{c\tau}{2\pi\,\Delta t\sqrt{c^2(t-\tau)^2 - r^2}} d\tau - \int_{\tau_{m-1}}^{\tau_m} \frac{c(m-1)\Delta t}{2\pi\,\Delta t\sqrt{c^2(t-\tau)^2 - r^2}} d\tau$$

$$U_{11}^{\,n-m+1} = \frac{c}{2\pi\,\Delta t} \int_{\tau_{m-1}}^{\tau_m} \frac{\tau}{\sqrt{c^2(n\Delta t-\tau)^2 - r^2}} d\tau$$

$n\Delta t - \tau = \frac{r}{c}\cosh\theta$ dönüşümü uygulanırsa

$\tau = n\Delta t - \frac{r}{c}\cosh\theta$, $d\tau = -\frac{r}{c}\sinh\theta\, d\theta,$

$\theta = \operatorname{arccos h}\left(\frac{c(n\Delta t-\tau)}{r}\right).$

$$U_{11}^{\,n-m+1} = -\frac{c}{2\pi\,\Delta t} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{n\Delta t - \frac{r}{c}\cosh\theta}{\sqrt{r^2\cosh^2\theta - r^2}} \frac{r}{c}\sinh\theta\, d\theta$$

$\sinh\theta = \sqrt{\cosh^2\theta - 1}$ olduğundan,

$$U_{11}^{\,n-m+1} = -\frac{n}{2\pi} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{\sinh\theta}{\sinh\theta} d\theta + \frac{r}{2\pi\,\Delta tc} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{\cosh\theta\sinh\theta}{\sinh\theta} d\theta$$

$$U_{11}^{\,n-m+1} = -\frac{n\theta}{2\pi} + \frac{r}{2\pi\,\Delta tc}\sinh\theta \Big|_{\theta_1}^{\theta_2}$$

$$U_{11}^{\,n-m+1} = \left[-\frac{n}{2\pi}\operatorname{arccosh}\left(\frac{c(n\Delta t-\tau)}{r}\right) + \frac{r}{2\pi\,\Delta tc}\sqrt{\frac{c^2(n\Delta t-\tau)^2}{r^2} - 1} \right]_{\tau_{m-1}}^{\tau_m}$$

$$U_{12}^{\,n-m+1} = -\int_{\tau_{m-1}}^{\tau_m} \frac{c(m-1)}{\sqrt{c^2(n\Delta t-\tau)^2 - r^2}} d\tau.$$

Burada yine aynı dönüşümler uygulanır. O halde,

$$U_{12}^{\,n-m+1} = \frac{m-1}{2\pi} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{\sinh\theta}{\sinh\theta} d\theta$$

$$U_{12}^{\,n-m+1} = \frac{(m-1)\theta}{2\pi} = \left[\frac{m-1}{2\pi}\cosh^{-1}\left(\frac{c(n\Delta t-\tau)}{r}\right) \right]_{\tau_{m-1}}^{\tau_m}$$

$$U_1^{\,n-m+1}=U_{11}^{\,n-m+1}+U_{12}^{\,n-m+1}.$$

$n\Delta t-\tau$ yerine z yazılırsa;

$$U_1^{\,n-m+1}=\frac{1}{2\pi}\left[H\left(\frac{cz}{r}-1\right)\left\{(n-m+1)\cosh^{-1}\left(\frac{cz}{r}\right)-\frac{r}{c\Delta t}\sqrt{\left(\frac{cz}{r}\right)^2-1}\right\}\right]_{z=(n-m)\Delta t}^{z=(n-m+1)\Delta t}$$

olur. Ayrıca,

$$U_2^{\,n-m+1}=\int_{\tau_{m-1}}^{\tau_m}u^*(x,n\Delta t;x^i,\tau)M_2(\tau)d\tau \text{ ya da,}$$

$$U_2^{\,n-m+1}=\int_{\tau_{m-1}}^{\tau_m}\frac{c}{2\pi\sqrt{c^2\left(n\Delta t-\tau\right)^2-r^2}}\frac{m\Delta t-\tau}{\Delta t}d\tau \text{ veya,}$$

$$U_2^{\,n-m+1}=\frac{cm}{2\pi}\int_{\tau_{m-1}}^{\tau_m}\frac{1}{\sqrt{c^2\left(t-\tau\right)^2-r^2}}d\tau-\frac{c}{2\pi\,\Delta t}\int_{\tau_{m-1}}^{\tau_m}\frac{\tau}{\sqrt{c^2\left(t-\tau\right)^2-r^2}}d\tau$$

$$U_{21}^{\,n-m+1}=\frac{cm}{2\pi}\int_{\tau_{m-1}}^{\tau_m}\frac{1}{\sqrt{c^2\left(t-\tau\right)^2-r^2}}d\tau$$

Aynı dönüşüm kullanıldığında,

$$U_{21}^{\,n-m+1}=-\frac{m}{2\pi}\int_{\theta_1}^{\theta_2}d\theta \text{ ve buradan,}$$

$$U_{21}^{\,n-m+1}=-\frac{m}{2\pi}\theta=-\frac{m}{2\pi}\left[\operatorname{arccos h}\left(\frac{c\left(n\Delta t-\tau\right)}{r}\right)\right]_{\tau_{m-1}}^{\tau_m} \text{ bulunur.}$$

$$U_{22}^{\,n-m+1}=-\frac{c}{2\pi\Delta t}\int_{\tau_{m-1}}^{\tau_m}\frac{\tau}{\sqrt{c^2\left(n\Delta t-\tau\right)^2-r^2}}d\tau.$$

Yukarıdaki dönüşümler kullanılırsa,

$$U_{22}^{\,n-m+1}=\frac{c}{2\pi\,\Delta t}\int_{\theta_1}^{\theta_2}\frac{\left(n\Delta t-\frac{r}{c}\cosh\theta\right)}{\sqrt{r^2\cosh^2\theta-r^2}}\cdot\frac{r}{c}\sinh\theta\,d\theta \text{ ya da}$$

$$U_{22}^{\,n-m+1}=\left[\frac{n}{2\pi}\theta-\frac{r}{2\pi\,c\Delta t}\sinh\theta\right]_{\tau_{m-1}}^{\tau_m} \text{ sonucu bulunur.}$$

Yine $n\Delta t-\tau$ yerine z ve $\sinh\theta=\sqrt{\cosh^2\theta-1}$ yazarak

$U_2^{\,n-m+1}=U_{21}^{\,n-m+1}+U_{22}^{\,n-m+1}$'dan

$$U_2^{\,n-m+1} = \frac{1}{2\pi}\left[H\left(\frac{cz}{r}-1\right)\left\{ (m-n)\operatorname{arccos h}\left(\frac{cz}{r}\right) + \frac{r}{c\Delta t}\sqrt{\left(\frac{cz}{r}\right)^2 - 1}\right\}\right]_{z=(n-m)\Delta t}^{z=(n-m+1)\Delta t}$$

$$U_2^{\,n-m} = \int_{m\Delta t}^{(m+1)\Delta t} u^*(x, n\Delta t; x^i, \tau) M_2(\tau) d\tau$$

$U_2^{\,n-m}$, m yerine $(m+1)$ yazılarak bulunur. Çünkü hem U_1^{n-m+1} hem de $U_2^{\,n-m+1}$ çekirdeklerinde integrallerinin alınmasında güçlük yaratabilecek olan $r^{\frac{-1}{2}}$ singülerliği göze çarpar. Ancak $(U_1^{n-m+1} + U_2^{n-m})$ hesaplandığında, karmaşık olan terimlerin sadeleşip daha basit bir yapıya büründüğü görülür.

$$U_2^{\,n-m} = \frac{1}{2\pi}\left[H\left(\frac{cz}{r}-1\right)\left\{ (m+1-n)\operatorname{arccos h}\left(\frac{cz}{r}\right) + \frac{r}{c\Delta t}\sqrt{\left(\frac{cz}{r}\right)^2 - 1}\right\}\right]_{z=(n-m-1)\Delta t}^{z=(n-m)\Delta t}$$

şekinde ifade edilir.

$$\begin{aligned} U_1^{\,n-m+1} + U_2^{\,n-m} = \frac{1}{2\pi}\{ & (n-m+1)\operatorname{arccos h}\left(\frac{c(n-m+1)\Delta t}{r}\right) \\ & -2(n-m)\operatorname{arccos h}\left(\frac{c(n-m)\Delta t}{r}\right) \\ & +(n-m-1)\operatorname{arccos h}\left(\frac{c(n-m-1)\Delta t}{r}\right) - \sqrt{(n-m+1)^2 - \left(\frac{r}{c\Delta t}\right)^2} \\ & +\sqrt{2(n-m)^2 - \left(\frac{r}{c\Delta t}\right)^2} - \sqrt{(n-m-1)^2 - \left(\frac{r}{c\Delta t}\right)^2}\} \end{aligned}$$

Akı çekirdeklerine gelince;

$$Q_1^{\,n-m+1} = \int_{(m-1)\Delta t}^{m\Delta t} q^*(x, n\Delta t; x^i, \tau) M_1(\tau) d\tau \tag{2.10}$$

ya da açık olarak,

$$Q_1^{\,n-m+1} = \int_{\tau_{m-1}}^{\tau_m} \frac{\partial r}{\partial n} \cdot \frac{r(\tau-(m-1)\Delta t)}{2\pi\,\Delta t\left[c^2(n\Delta t-\tau)^2 - r^2\right]^{\frac{3}{2}}} d\tau$$

yazılabilir. Buradan,

$$Q_{11}^{\,n-m+1} = \frac{\partial r}{\partial n}\frac{cr}{2\pi\,\Delta t}\int_{\tau_{m-1}}^{\tau_m} \frac{\tau}{\left[c^2(t_n-\tau)^2 - r^2\right]^{\frac{3}{2}}} d\tau$$

$n\Delta t-\tau=\dfrac{r}{c}\cosh\theta$ dönüşümü burada da uygulanır:

$$Q_{11}^{\;n-m+1}=-\frac{cr}{2\pi\,\Delta t}\frac{\partial r}{\partial n}\int_{\theta_1}^{\theta_2}\frac{\left(n\Delta t-\frac{r}{c}\cosh\theta\right)\cdot\frac{r}{c}\sinh\theta}{r^3\sinh^3\theta}d\theta$$

$$Q_{11}^{\;n-m+1}=-\frac{n}{2\pi\,r}\frac{\partial r}{\partial n}\int_{\theta_1}^{\theta_2}\frac{1}{\sinh^2\theta}d\theta+\frac{1}{2\pi\,c\Delta t}\frac{\partial r}{\partial n}\int_{\theta_1}^{\theta_2}\frac{\cosh\theta}{\sinh^2\theta}d\theta\,.$$

Buradan,

$$Q_{11}^{\;n-m+1}=\frac{n}{2\pi\,r}\frac{\partial r}{\partial n}\frac{\cosh\theta}{\sinh\theta}\bigg|_{\theta_1}^{\theta_2}-\frac{1}{2\pi\,c\Delta t}\frac{1}{\sinh\theta}\bigg|_{\theta_1}^{\theta_2}$$

sınırları değiştirir ve $n\Delta t-\tau$ yerine z yazarsak; $\sinh\theta=\sqrt{\cosh^2\theta-1}$ olduğunu hatırlayarak,

$$Q_{11}^{\;n-m+1}=\frac{\partial r}{\partial n}\frac{1}{2\pi}\left[H\left(\frac{cz}{r}-1\right)-n\frac{cz/r}{\sqrt{(cz/r)^2-1}}+\frac{r}{c\Delta t}\frac{1}{\sqrt{(cz/r)^2-1}}\right]_{z=(n-m)\Delta t}^{z=(n-m+1)\Delta t}$$

$$Q_{12}^{\;n-m+1}=-\frac{\partial r}{\partial n}\frac{cr(m-1)}{2\pi}\int_{\tau_{m-1}}^{\tau_m}\frac{1}{\left[c^2(n\Delta t-\tau)^2-r^2\right]^{\frac{3}{2}}}d\tau$$

Aynı dönüşümle;

$$Q_{12}^{\;n-m+1}=\frac{\partial r}{\partial n}\frac{m-1}{2\pi\,r}\int_{\theta_1}^{\theta_2}\frac{1}{\sinh^2\theta}d\theta=\frac{\partial r}{\partial n}\frac{(1-m)}{2\pi\,r}\frac{\cosh\theta}{\sinh\theta}\bigg|_{\theta_1}^{\theta_2}.$$

Sınırlar değiştirilir ve $n\Delta t-\tau$ yerine z yazılırsa;

$$Q_{12}^{\;n-m+1}=\frac{\partial r}{\partial n}\frac{m-1}{2\pi\,r}\left[H\left(\frac{cz}{r}-1\right)\frac{cz/r}{\sqrt{(cz/r)^2-1}}\right]_{z=(n-m)\Delta t}^{z=(n-m+1)\Delta t}.$$

$Q_1^{\;n-m+1}=Q_{11}^{\;n-m+1}+Q_{12}^{\;n-m+1}$ olduğu hatırlanarak,

$$Q_1^{\;n-m+1}=\frac{\partial r}{\partial n}\frac{1}{2\pi\,r}\left[H\left(\frac{cz}{r}-1\right)\left\{(-n+m-1)\frac{cz/r}{\sqrt{(cz/r)^2-1}}\right.\right.$$

$$\left.\left.+\frac{r}{c\Delta t}\frac{1}{\sqrt{(cz/r)^2-1}}\right\}\right]_{z=(n-m)\Delta t}^{z=(n-m+1)\Delta t}.$$

$$Q_2^{\,n-m+1} = \int_{(m-1)\Delta t}^{m\Delta t} q^*(x,n\Delta t;x',\tau)M_2(\tau)d\tau$$

veya açık olarak,

$$Q_2^{\,n-m+1} = \int_{\tau_{m-1}}^{\tau_m} \frac{\partial r}{\partial n}\cdot\frac{cr(m\Delta t-\tau)}{2\pi\,\Delta t\left[c^2(n\Delta t-\tau)^2-r^2\right]^{\frac{3}{2}}}d\tau$$

yazılabilir. Buradan,

$$Q_{21}^{\,n-m+1} = \frac{\partial r}{\partial n}\frac{crm}{2\pi}\int_{\tau_{m-1}}^{\tau_m}\frac{d\tau}{\left[c^2(n\Delta t-\tau)^2-r^2\right]^{\frac{3}{2}}}$$

olur. Burada yine $n\Delta t-\tau=\frac{r}{c}\cosh\theta$ dönüşümü kullanılırsa;

$$Q_{21}^{\,n-m+1} = \frac{\partial r}{\partial n}\frac{m}{2\pi r}\frac{\cosh\theta}{\sinh\theta}\Bigg|_{\theta_1}^{\theta_2}$$

olur. $n\Delta t-\tau$ yerine z yazalım:

$$Q_{21}^{\,n-m+1} = \frac{\partial r}{\partial n}\frac{m}{2\pi r}\left[H\left(\frac{cz}{r}-1\right)\left\{(m)\frac{cz/r}{\sqrt{(cz/r)^2-1}}\right\}\right]_{z=(n-m+1)\Delta t}^{z=(n-m)\Delta t}$$

$$Q_{22}^{\,n-m+1} = -\frac{\partial r}{\partial n}\frac{cr}{2\pi\,\Delta t}\int_{\tau_{m-1}}^{\tau_m}\frac{\tau}{\left[c^2(n\Delta t-\tau)^2-r^2\right]^{\frac{3}{2}}}d\tau\,.$$

Aynı dönüşümler kullanılarak,

$$Q_{22}^{\,n-m+1} = \frac{\partial r}{\partial n}\frac{1}{2\pi r}\left[H\left(\frac{cz}{r}-1\right)\left\{(-n)\frac{cz/r}{\sqrt{(cz/r)^2-1}}+\frac{r}{c\Delta t}\frac{1}{\sqrt{(cz/r)^2-1}}\right\}\right]_{z=(n-m+1)\Delta t}^{z=(n-m)\Delta t}$$

bulunur. Buradan,

$$Q_2^{\,n-m+1} = Q_{21}^{\,n-m+1}+Q_{22}^{\,n-m+1}.$$

Sınırlar değiştirilip düzenlenirse;

$$Q_2^{\,n-m+1} = \frac{1}{2\pi r}\frac{\partial r}{\partial n}\left[H\left(\frac{cz}{r}-1\right)\left\{(n-m)\frac{cz/r}{\sqrt{(cz/r)^2-1}}-\frac{r}{c\Delta t}\frac{1}{\sqrt{(cz/r)^2-1}}\right\}\right]_{z=(n-m)\Delta t}^{z=(n-m+1)\Delta t}$$

elde edilir ve yine m yerine $(m+1)$ yazıldığında $Q_2^{\,n-m}$ elde edilir:

$$Q_2^{n-m} = \frac{1}{2\pi r}\frac{\partial r}{\partial n}\left[H\left(\frac{cz}{r}-1\right)\left\{(n-m-1)\frac{cz/r}{\sqrt{(cz/r)^2-1}} - \frac{r}{c\Delta t}\frac{1}{\sqrt{(cz/r)^2-1}}\right\}\right]_{z=(n-m+1)\Delta t}^{z=(n-m)\Delta t}$$

Burada yine karşılaşılan singülerlikleri mümkün olduğunca ortadan kaldırabilmek veya en azından singülerlik derecesini azaltmak için Q_2^{n-m+1} ve Q_2^{n-m} çekirdekleri toplanır.

$$\begin{aligned} Q_2^{n-m+1}+Q_2^{n-m} = -\frac{\partial r}{\partial n}\frac{1}{2\pi c\Delta t}\{ & \frac{c(n-m+1)\Delta t}{r}\left(\frac{c(n-m+1)\Delta t/r}{\sqrt{(c(n-m+1)\Delta t/r)^2-1}}\right) \\ & -\frac{2c(n-m)\Delta t}{r}\left(\frac{c(n-m)\Delta t/r}{\sqrt{(c(n-m)\Delta t/r)^2-1}}\right) \\ & +\frac{c(n-m-1)\Delta t}{r}\left(\frac{c(n-m-1)\Delta t/r}{\sqrt{(c(n-m-1)\Delta t/r)^2-1}}\right) \\ & -\frac{1}{\sqrt{(c(n-m+1)\Delta t/r)^2-1}}+\frac{2}{\sqrt{(c(n-m)\Delta t/r)^2-1}} \\ & -\frac{1}{\sqrt{(c(n-m-1)\Delta t/r)^2-1}}\}. \end{aligned}$$

Burada $a_0 = \frac{c(n-m+1)\Delta t}{r}$, $a_1 = \frac{c(n-m)\Delta t}{r}$, $a_2 = \frac{c(n-m-1)\Delta t}{r}$ alınırsa,

$$\begin{aligned} Q_2^{n-m+1}+Q_2^{n-m} = -\frac{\partial r}{\partial n}\frac{1}{2\pi c\Delta t}\{ & \frac{a_0^2}{\sqrt{a_0^2-1}}-\frac{2a_1^2}{\sqrt{a_1^2-1}}+\frac{a_2^2}{\sqrt{a_2^2-1}} \\ & -\frac{1}{\sqrt{a_0^2-1}}+\frac{2}{\sqrt{a_1^2-1}}-\frac{1}{\sqrt{a_2^2-1}}\}. \end{aligned}$$

$$Q_2^{n-m+1}+Q_2^{n-m} = -\frac{\partial r}{\partial n}\frac{1}{2\pi c\Delta t}\left[\frac{a_0^2-1}{\sqrt{a_0^2-1}}-2\left(\frac{a_1^2-1}{\sqrt{a_1^2-1}}+\frac{a_2^2-1}{\sqrt{a_2^2-1}}\right)\right]$$

$$Q_2^{n-m+1}+Q_2^{n-m} = -\frac{\partial r}{\partial n}\frac{1}{2\pi c\Delta t}\left[\sqrt{a_0^2-1}-2\sqrt{a_1^2-1}+\sqrt{a_2^2-1}\right]$$

elde edilir.

Dominguez (1993) tarafından düzenlenen Mansur (1983)'un sonuçları ile Israil ve Banerjee (1990,1991)'nin çalışmaları uyuşmaktadır. Yaklaşımlar bakımından bazı farklar mevcut olsa da, sonuçlar uyum içindedir. Mansur, çift zaman aralığı içinde interpolasyon fonksiyonlarını tanımlamış, Israil ve Banarjee tek zaman aralığı içinde interpolasyon fonksiyonlarını tanımlamıştır. Bunun yanı sıra Mansur, H fonksiyonunun etkisini açık (explicit) olarak incelemiş, Israil ve Banerjee, bu etkiyi çekirdeklerde kapalı (implicit) olarak ifade etmiştir.

Bir sonraki bölümde iki boyutlu skaler dalga denkleminin sınır elemanları formülasyonunda yer alan potansiyel ve akı çekirdekleri kuadratik zaman interpolasyon fonksiyonları kullanılarak çıkarılacaktır.

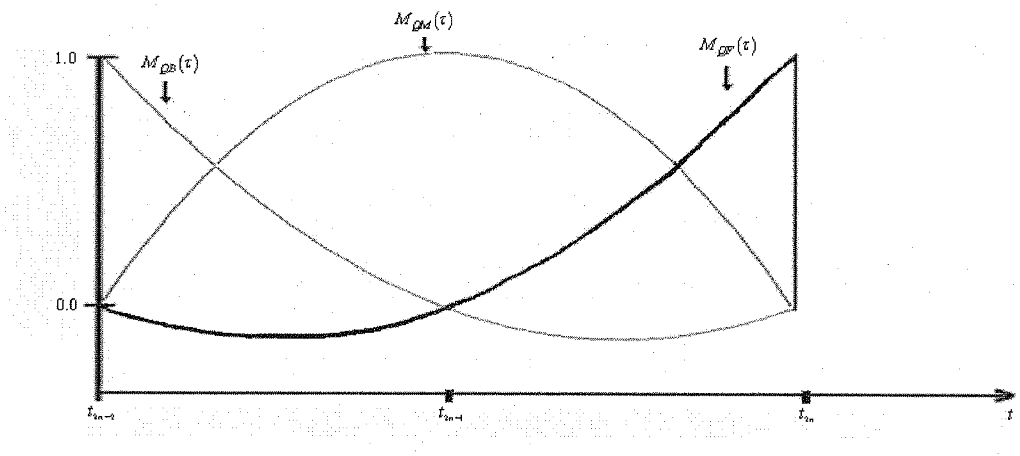
3. POTANSİYEL VE AKI ÇEKİRDEKLERİ-KUADRATİK DEĞİŞİM

3.1 Potansiyel ve Akı Çkirdeklerinin Kuadratik İnterpolasyon Fonksiyonları ile Çıkarılışı

Bu bölümde, bir önceki bölümde sabit ve lineer interpolasyon fonksiyonları kullanılarak iki boyutlu skaler dalga denklemine ait çıkarılan potansiyel ve akı çekirdekleri, kuadratik interpolasyon fonksiyonları yaklaşımıyla çıkarılacaktır.

Burada aşağıdaki kuadratik interpolasyon fonksiyonları (Wang ve ark., 1997) kullanılacaktır:

$$\begin{aligned} M_{QF}(\tau) &= \frac{1}{2}\left(\frac{\tau - t_{2n-2}}{\Delta t}\right)^2 - \frac{1}{2}\left(\frac{\tau - t_{2n-2}}{\Delta t}\right), \\ M_{QM}(\tau) &= -\left(\frac{\tau - t_{2n-2}}{\Delta t}\right)^2 + 2\left(\frac{\tau - t_{2n-2}}{\Delta t}\right), \\ M_{QB}(\tau) &= \frac{1}{2}\left(\frac{\tau - t_{2n-2}}{\Delta t}\right)^2 - \frac{3}{2}\left(\frac{\tau - t_{2n-2}}{\Delta t}\right) + 1, \quad t_{2n-2} \le \tau \le t_{2n} \text{ iken.} \end{aligned} \tag{3.1}$$



Şekil 3.1 Kuadratik İnterpolasyon Fonksiyonu

Yukarıdaki interpolasyon fonksiyonları $2\Delta t$ zaman aralığında ileri, orta ve geri düğüm noktalarını temsil eden kuadratik interpolasyon fonksiyonlarıdır (Wang ve ark., 1997). Potansiyel ve akı fonksiyonları, sırasıyla, aşağıdaki gibi ifade edilebilir:

$$u(x,\tau)=u^{2n}(x).M_{QF}(\tau)+u^{2n-1}(x).M_{QM}(\tau)+u^{2n-2}(x).M_{QB}(\tau),$$

$$q(x,\tau)=q^{2n}(x).M_{QF}(\tau)+q^{2n-1}.M_{QM}(\tau)+q^{2n-2}.M_{QB}(\tau).$$

Bu bölümde $t=N\Delta t$ zaman formülasyonuna bağlı kalınmış ve her bir zaman aralığı söz konusu interpolasyon fonksiyonuna dayalı olarak N çift iken $N=2k$ alınarak ifade edilmiştir. Bu durumda ilk zaman aralığı yalnızca sabit veya lineer interpolasyon fonksiyonu yaklaşımlarıyla interpole edilebilir. Burada $k=1$ iken $N=2$ olur. N tek iken ise $N=2k+1$ alınarak formülasyon oluşturulmalıdır (Ayrıntılı bilgi için bkz. Wang ve ark., 1995). Burada kullanılan formülasyonda sadece $N=2k$ dikkate alınmıştır.

Potansiyel çekirdeklerinin çıkarılışına aşağıda yer verilmiştir:

$$U_{QF}^{2k-2n+2}=\int_{(2n-2)\Delta t}^{2n\Delta t} u^*\left(x',\tau;x,2k\Delta t\right)M_{QF}(\tau)\,d\tau \tag{3.2}$$

Burada kullanılan u^* fundamental çözümü Bölüm 2' de verilmiştir.

$$U_{QF}^{2k-2n+2}=\int_{(2n-2)\Delta t}^{2n\Delta t}\underbrace{\frac{c}{2\pi\sqrt{c^2\left(2k\Delta t-\tau\right)^2-r^2}}}_{\text{A diyelim}}\cdot\frac{1}{2\Delta t^2}\left[\tau^2-\tau\left(2t_{2n-2}+\Delta t\right)+t_{2n-2}^2\Delta t\right]d\tau$$

$$U_{QF}^{2k-2n+2}=\frac{c}{4\pi\Delta t^2}\left[\underbrace{\int_{(2n-2)\Delta t}^{2n\Delta t}\frac{\tau^2}{A}d\tau}_{U_{QF_1}}-\underbrace{\left(2t_{2n-2}+\Delta t\right)\int_{(2n-2)\Delta t}^{2n\Delta t}\frac{\tau}{A}d\tau}_{U_{QF_2}}+\underbrace{\left(t_{2n-2}^2+t_{2n-2}\Delta t\right)\int_{(2n-2)\Delta t}^{2n\Delta t}\frac{d\tau}{A}}_{U_{QF_3}}\right]$$

$$U_{QF_1}=\int_{(2n-2)\Delta t}^{2n\Delta t}\frac{\tau^2}{\sqrt{c^2\left(2k\Delta t-\tau\right)^2-r^2}}d\tau$$

$$2k\Delta t-\tau=\frac{r}{c}\cosh\theta,\quad \tau=2k\Delta t-\frac{r}{c}\cosh\theta,\quad d\tau=-\frac{r}{c}\sinh\theta d\theta$$

$$U_{QF_1}=\int_{\theta_1}^{\theta_2}\frac{\left(2k\Delta t-\frac{r}{c}\cosh\theta\right)^2}{\sqrt{c^2\frac{r^2}{c^2}\cosh^2\theta-r^2}}d\theta$$

$$\theta_1=\operatorname{arccos h}\left[\frac{c\left(2k\Delta t-(2n-2)\Delta t\right)}{r}\right],\quad \theta_2=\operatorname{arccos h}\left[\frac{c\left(2k\Delta t-2n\Delta t\right)}{\Delta t}\right].$$

$$U_{QF_1}=-\int_{\theta_1}^{\theta_2}\frac{\left(4k^2\Delta t^2-4\frac{r}{c}k\Delta t\cosh\theta+\frac{r^2}{c^2}\cosh^2\theta\right)\frac{r}{c}\sinh\theta}{r\sinh\theta}d\theta$$

$$U_{QF_1}=-\frac{4k^2\Delta t^2}{c}\int_{\theta_1}^{\theta_2}d\theta+\frac{4rk\Delta t}{c^2}\int_{\theta_1}^{\theta_2}\cosh\theta\, d\theta-\frac{r^2}{c^3}\int_{\theta_1}^{\theta_2}\cosh^2\theta\, d\theta$$

$$U_{QF_1}=-\frac{4k^2\Delta t^2}{c}\theta\Big|_{\theta_1}^{\theta_2}+\frac{4rk\Delta t}{c^2}\sinh\theta\Big|_{\theta_1}^{\theta_2}-\frac{r^2}{c^3}\left(\cosh\theta+\sinh\theta+\theta\right)\Big|_{\theta_1}^{\theta_2}$$

$\sinh\theta=\sqrt{\cosh^2\theta-1}$ ve $2k\Delta t-\tau$ yerine z yazalım:

$$U_{QF_1}=\left[\frac{-4k^2\Delta t^2}{c^2}\operatorname{arccosh}\frac{cz}{r}+\frac{4rk\Delta t}{c^2}\sqrt{\left(\frac{cz}{r}\right)^2-1}\right.$$

$$\left.-\frac{r^2}{2c^3}\left(\frac{cz}{r}+\sqrt{\left(\frac{cz}{r}\right)^2-1}+\operatorname{arccosh}\frac{cz}{r}\right)\right]_{z=(2k-2n+2)\Delta t}^{z=(2k-2n)\Delta t}$$

$$U_{QF_2}=-\left(2t_{2n-2}+\Delta t\right)\int_{(2n-2)\Delta t}^{2n\Delta t}\frac{\tau}{2\pi\sqrt{c^2\left(2n\Delta t-\tau\right)^2-r^2}}d\tau$$

Aynı dönüşüm uygulanırsa;

$$U_{QF_2}=\left(2t_{2n-2}+\Delta t\right)\int_{\theta_1}^{\theta_2}\frac{\left(2k\Delta t-\frac{r}{c}\cosh\theta\right)\cdot\frac{r}{c}\sinh\theta}{r\sinh\theta}d\theta$$

$$U_{QF_2}=\left(2t_{2n-2}+\Delta t\right)\cdot\left[\frac{2k\Delta t}{c}\int_{\theta_1}^{\theta_2}d\theta-\frac{r}{c^2}\int_{\theta_1}^{\theta_2}\cosh\theta\, d\theta\right]$$

$$U_{QF_2}=\left[\frac{4k\Delta t\, t_{2n-2}+2k\Delta t^2}{c}\operatorname{arccosh}\left(\frac{cz}{r}\right)-\frac{2t_{2n-2}r+\Delta t r}{c^2}\sqrt{\left(\frac{cz}{r}\right)^2-1}\right]_{z=(2k-2n+2)\Delta t}^{z=(2k-2n)\Delta t}.$$

$$U_{QF_3}=\left(t_{2n-2}^2+t_{2n-2}\,\Delta t\right)\int_{(2n-2)\Delta t}^{2n\Delta t}\frac{d\tau}{2\pi\sqrt{c^2\left(2k\Delta t-\tau\right)^2-r^2}}$$

$$U_{QF_3}=-\frac{\left(t_{2n-2}^2+t_{2n-2}\,\Delta t\right)}{c}\int_{\theta_1}^{\theta_2}d\theta$$

$$U_{QF_3}=\left[-\frac{\left(t_{2n-2}^2+t_{2n-2}\,\Delta t\right)}{c}\operatorname{arccosh}\left(\frac{cz}{r}\right)\right]_{z=(2k-2n+2)\Delta t}^{z=(2k-2n)\Delta t}$$

$$U_{QF}^{2k-2n+2}=\frac{c}{4\pi\Delta t^2}\left[\left(\frac{4rk\Delta t}{c^2}-\frac{r^2}{2c^3}-\frac{2t_{2n-2}r+\Delta t\, r}{c^2}\right)\sqrt{\left(\frac{cz}{r}\right)^2-1}\right.$$

$$+\left(\frac{-4k^2\Delta t^2}{c^2}-\frac{r^2}{2c^3}+\frac{4k\Delta t\, t_{2n-2}+2k\Delta t^2-t_{2n-2}^2-t_{2n-2}\Delta t}{c}\right)\operatorname{arccos h}\left(\frac{cz}{r}\right)$$

$$-\left(\frac{r^2}{2c^3}\right)\frac{cz}{r}\Bigg]_{z=(2k-2n+2)\Delta t}^{z=(2k-2n)\Delta t}.$$

Kuadratik interpolasyon fonksiyonunun orta noktadaki karşılığı kullanılırsa;

$$U_{QM}^{2k-2n+2}=\int_{(2n-2)\Delta t}^{2n\Delta t} u^*\left(x^i,\tau;x,2k\Delta t\right)M_{QM}(\tau)\,d\tau \tag{3.3}$$

ya da

$$U_{QM}^{2k-2n+2}=\int_{(2n-2)\Delta t}^{2n\Delta t}\underbrace{\frac{c}{2\pi\sqrt{c^2\left(2k\Delta t-\tau\right)^2-r^2}}}_{A\text{ olsun}}\cdot\frac{\left(-\tau^2+2\tau\left(t_{2n-2}+\Delta t\right)-t_{2n-2}^2-2t_{2n-2}\Delta t\right)}{\Delta t^2}d\tau$$

olarak yazılabilir.

$$U_{QM}^{2k-2n+2}=\frac{c}{2\pi\Delta t^2}\left[\underbrace{\int\frac{-\tau^2}{A}d\tau}_{U_{QM_1}}+\underbrace{2\left(t_{2n-2}\Delta t\right)\int\frac{\tau}{A}d\tau}_{U_{QM_2}}-\underbrace{\left(t_{2n-2}^2+2t_{2n-2}\Delta t\right)\int\frac{d\tau}{A}}_{U_{QM_3}}\right]$$

U_{QM_1}, U_{QF_1} integralinin ters işaretlisidir.

$$U_{QM_1}=\Bigg[\frac{4k^2\Delta t^2}{c^2}\operatorname{arccos h}\frac{cz}{r}-\frac{4rk\Delta t}{c^2}\sqrt{\left(\frac{cz}{r}\right)^2-1}$$

$$+\frac{r^2}{2c^3}\left(\frac{cz}{r}+\sqrt{\left(\frac{cz}{r}\right)^2-1}\right)+\operatorname{arccos h}\left(\frac{cz}{r}\right)\Bigg]_{z=(2k-2n+2)\Delta t}^{z=(2k-2n)\Delta t}$$

U_{QM_2}, U_{QF_2} integralinin ters işaretlisidir.

$$U_{QM_2}=\left[\frac{-4k\Delta t\, t_{2n-2}-2k\Delta t^2}{c}\operatorname{arccos h}\left(\frac{cz}{r}\right)+\frac{2t_{2n-2}+\Delta t r}{c^2}\sqrt{\left(\frac{cz}{r}\right)^2-1}\right]_{z=(2k-2n+2)\Delta t}^{z=(2k-2n)\Delta t}$$

U_{QM_3}, U_{QF_3} integralinin ters işaretlisidir.

$$U_{QM_3}=\left[\frac{t_{2n-2}^2+t_{2n-2}\,\Delta t}{c}\operatorname{arccos h}\left(\frac{cz}{r}\right)\right]_{z=(2k-2n+2)\Delta t}^{z=(2k-2n)\Delta t}$$

$$U_{QM}^{2k-2n+2}=\frac{c}{2\pi\Delta t^2}\left(U_{QM_1}+U_{QM_2}+U_{QM_3}\right).$$

$$U_{QM}^{2k-2n+2}=\frac{c}{2\pi\Delta t^2}\left[\left(\frac{-4rk\Delta t+2t_{2n-2}r+\Delta t\,r}{c^2}+\frac{r^2}{2c^3}\right)\sqrt{\left(\frac{cz}{r}\right)^2-1}\right.$$

$$\left.+\left(\frac{4k^2\Delta t^2}{c^2}+\frac{r^2}{2c^3}-\frac{4r\Delta t\,t_{2n-2}-2k\Delta t^2+t_{2n-2}^2+t_{2n-2}\Delta t}{c}\right)\operatorname{arccos h}\left(\frac{cz}{r}\right)+\left(\frac{r^2}{2c^3}\right)\frac{cz}{r}\right]_{z=(2k-2n+2)\Delta t}^{z=(2k-2n)\Delta t}.$$

$$U_{QB}^{2k-2n+2}=\int_{(2n-2)\Delta t}^{2n\Delta t}u^*\left(x^i,\tau;x,2k\Delta t\right)M_{QB}(\tau)\,d\tau \tag{3.4}$$

$$U_{QB}^{2k-2n+2}=\int_{(2n-2)\Delta t}^{2n\Delta t}\underbrace{\frac{c}{2\pi\sqrt{c^2\left(2k\Delta t-\tau\right)^2-r^2}}}_{A\text{ diyelim}}\cdot\frac{\tau^2-\tau\left(2t_{2n-2}+3\right)+t_{2n-2}^2+3t_{2n-2}+2\Delta t^2}{\Delta t^2}d\tau$$

$$U_{QB}^{2k-2n+2}=\left[\underbrace{\int_{(2n-2)\Delta t}^{2n\Delta t}\frac{\tau^2}{A}d\tau}_{U_{QB_1}}\underbrace{-2\left(t_{2n-2}+3\right)\int_{(2n-2)\Delta t}^{2n\Delta t}\frac{\tau}{A}d\tau}_{U_{QB_2}}+\underbrace{\left(t_{2n-2}^2+3t_{2n-2}+2\Delta t^2\right)\int_{(2n-2)\Delta t}^{2n\Delta t}\frac{d\tau}{A}}_{U_{QB_3}}\right]$$

U_{QB_1} ve U_{QF_1} integralleri aynıdır. O halde,

$$U_{QB_1}=\left[\frac{-4k^2\Delta t^2}{c^2}\operatorname{arccos h}\frac{cz}{r}+\frac{4rk\Delta t}{c^2}\sqrt{\left(\frac{cz}{r}\right)^2-1}\right.$$

$$\left.-\frac{r^2}{2c^3}\left(\frac{cz}{r}+\sqrt{\left(\frac{cz}{r}\right)^2-1}+\operatorname{arccos h}\frac{cz}{r}\right)\right]_{z=(2k-2n+2)\Delta t}^{z=(2k-2n)\Delta t}.$$

U_{QB_2} ve U_{QF_2} integralleri aynıdır. O halde,

$$U_{QB_2}=\left[\frac{4k\Delta t\,t_{2n-2}+12k\Delta t}{c}\operatorname{arccosh}\left(\frac{cz}{r}\right)-\frac{2t_{2n-2}r+6r}{c^2}\sqrt{\left(\frac{cz}{r}\right)^2-1}\right]_{z=(2k-2n+2)\Delta t}^{z=(2k-2n)\Delta t}.$$

U_{QB_3} ve U_{QF_3} integralleri aynıdır. Böylece,

$$U_{QB_3}=\left[\frac{-t_{2n-2}^2-3t_{2n-2}+2\Delta t^2}{c}\operatorname{arccosh}\left(\frac{cz}{r}\right)\right]_{z=(2k-2n+2)\Delta t}^{z=(2k-2n)\Delta t}.$$

$U_{QB}^{2k-2n+2}=\dfrac{c}{2\pi\Delta t^2}\left(U_{QB_1}+U_{QB_2}+U_{QB_3}\right)$ olduğundan,

$$U_{QB}^{2k-2n+2} = \frac{c}{2\pi\Delta t^2}\left[\left(\frac{4rk\Delta t - 2t_{2n-2}r + 6r}{c^2} - \frac{r^2}{2c^3}\right)\sqrt{\left(\frac{cz}{r}\right)^2 - 1}\right.$$

$$+\left(\frac{-4k^2\Delta t^2}{c^2} - \frac{r^2}{2c^3} + \frac{4k\Delta t\, t_{2n-2} + 12k\Delta t - t_{2n-2}^2 - 3t_{2n-2} + 2\Delta t^2}{c}\right)\operatorname{arccosh}\left(\frac{cz}{r}\right)$$

$$\left.-\left(\frac{r^2}{2c^3}\right)\frac{cz}{r}\right]_{z=(2k-2n+2)\Delta t}^{z=(2k-2n)\Delta t}.$$

Akı çekirdekleri de kuadratik interpolasyon fonksiyonu kullanılarak ele alınırsa;

$$Q_{QF}^{2k-2n+2} = \int_{(2n-2)\Delta t}^{2n\Delta t} q^*\left(x^i, \tau; x, 2k\Delta t\right) M_{QF}(\tau)\, d\tau \tag{3.5}$$

Burada kullanılan q^* fundamental çözümü Bölüm 2'de verilmiştir.

$$Q_{QF}^{2k-2n+2} = \int_{(2n-2)\Delta t}^{2n\Delta t} \frac{\partial r}{\partial n}\cdot\frac{cr}{2\pi\left[c^2\left(2k\Delta t - \tau\right)^2 - r^2\right]^{\frac{3}{2}}}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{\tau - t_{2n-2}^2}{\Delta t}\right)^2 - \frac{1}{2}\left(\frac{\tau - t_{2n-2}}{\Delta t}\right)\right]d\tau$$

$$M_{QF}(\tau) = \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{\tau^2 - 2\tau t_{2n-2} + t_{2n-2}^2 - \tau\Delta t + t_{2n-2}\Delta t}{\Delta t^2}\right)$$ olduğu hatırlanarak,

$$Q_{QF}^{2k-2n+2} = \frac{\partial r}{\partial n}\frac{cr}{4\pi\Delta t^2}\left[\underbrace{\int_{(2n-2)\Delta t}^{2n\Delta t}\frac{\tau^2\, d\tau}{\underbrace{\left[c^2\left(2k\Delta t - \tau\right)^2 - r^2\right]^{\frac{3}{2}}}_{B}}}_{Q_{QF_1}} - \underbrace{\int_{(2n-2)\Delta t}^{2n\Delta t}\frac{2\tau t_{2n-2}}{B}d\tau}_{Q_{QF_2}}\right.$$

$$\left.+\underbrace{\int_{(2n-2)\Delta t}^{2n\Delta t}\frac{t_{2n-2}^2}{B}d\tau}_{Q_{QF_3}} - \underbrace{\int_{(2n-2)\Delta t}^{2n\Delta t}\frac{\tau\Delta t}{B}d\tau}_{Q_{QF_4}} + \underbrace{\int_{(2n-2)\Delta t}^{2n\Delta t}\frac{t_{2n-2}\Delta t}{B}d\tau}_{Q_{QF_5}}\right]$$

$$Q_{QF_1} = \int_{(2n-2)\Delta t}^{2n\Delta t}\frac{\tau^2\, d\tau}{\left[c^2\left(2k\Delta t - \tau\right)^2 - r^2\right]^{\frac{3}{2}}}$$

$$Q_{QF_1} = \frac{-4k^2\Delta t^2}{r^2 c}\int_{\theta_1}^{\theta_2}\frac{1}{\sinh^2\theta}d\theta + \frac{4k\Delta t}{c^2 r}\int_{\theta_1}^{\theta_2}\frac{\cosh\theta}{\sinh^2\theta}d\theta - \frac{1}{c^3}\int_{\theta_1}^{\theta_2}\frac{\cosh^2\theta}{\sinh^2\theta}d\theta$$

$$Q_{QF_1} = \frac{4k^2\Delta t^2}{r^2 c}\frac{\cosh\theta}{\sinh\theta}\Bigg|_{\theta_1}^{\theta_2} - \frac{4k\Delta t}{c^2 r}\frac{1}{\sinh\theta}\Bigg|_{\theta_1}^{\theta_2} - \frac{1}{c^3}\left(\coth\theta - \theta\right)\Bigg|_{\theta_1}^{\theta_2}$$ elde edilir.

$\sinh\theta = \sqrt{\cosh^2\theta - 1}$ ve $2k\Delta t - \tau$ yerine z yazıldığında;

$$Q_{QF_1} = \left[\frac{4k^2 \Delta t^2}{r^2 c} \frac{\frac{cz}{r}}{\sqrt{\left(\frac{cz}{r}\right)^2 - 1}} - \frac{4k\Delta t}{c^2 r} \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{cz}{r}\right)^2 - 1}} + \frac{1}{c^3} \left(\frac{\frac{cz}{r}}{\sqrt{\left(\frac{cz}{r}\right)^2 - 1}} + \operatorname{arccosh} \frac{cz}{r} \right) \right]_{z=(2k-2n+2)\Delta t}^{z=(2k-2n)\Delta t}$$

bulunur.

$$Q_{QF_2} = \int_{(2n-2)\Delta t}^{2n\Delta t} \frac{2\tau\, t_{2n-2}}{\left[c^2\left(2k\Delta t - \tau\right)^2 - r^2\right]^{\frac{3}{2}}} d\tau$$

$$Q_{QF_2} = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{2\left(2k\Delta t - \frac{r}{c}\cosh\theta\right) t_{2n-2} \frac{r}{c}\sinh\theta}{\left(c^2 \frac{r^2}{c^2}\cosh^2\theta - r^2\right)^{\frac{3}{2}}} d\theta$$

ya da

$$Q_{QF_2} = \frac{4k\Delta t\, t_{2n-2}}{r^2 c} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{1}{\sinh^2\theta} d\theta - \frac{2t_{2n-2}}{rc^2} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{\cosh^2\theta}{\sinh^2\theta} d\theta$$

$$Q_{QF_2} = \frac{-4k\Delta t}{r^2 c} \frac{\cosh\theta}{\sinh\theta}\Bigg|_{\theta_1}^{\theta_2} + \frac{2t_{2n-2}}{rc^2} \frac{1}{\sinh\theta}\Bigg|_{\theta_1}^{\theta_2}$$

$$Q_{QF_2} = \left[\frac{-4k\Delta t}{r^2 c} \frac{\frac{cz}{r}}{\sqrt{\left(\frac{cz}{r}\right)^2 - 1}} - \frac{2t_{2n-2}}{rc^2} \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{cz}{r}\right)^2 - 1}} \right]_{z=(2k-2n+2)\Delta t}^{z=(2k-2n)\Delta t} .$$

$$Q_{QF_3} = \int_{(2n-2)\Delta t}^{2n\Delta t} \frac{t_{2n-2}^2}{\left[c^2\left(2k\Delta t - \tau\right)^2 - r^2\right]^{\frac{3}{2}}} d\tau$$

$$Q_{QF_3} = -t_{2n-2}^2 \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{\frac{r}{c}\sinh\theta}{r^3 \sinh^3\theta} d\theta = \frac{-t_{2n-2}^2}{r^2 c} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{1}{\sinh^2\theta} d\theta = \frac{t_{2n-2}^2}{r^2 c} \frac{\cosh\theta}{\sinh\theta}\Bigg|_{\theta_1}^{\theta_2}$$

$$Q_{QF_3}=\left[\frac{t_{2n-2}^2}{r^2c}\frac{\frac{cz}{r}}{\sqrt{\left(\frac{cz}{r}\right)^2-1}}\right]_{z=(2k-2n+2)\Delta t}^{z=(2k-2n)\Delta t}.$$

$$Q_{QF_4}=-\int_{(2n-2)\Delta t}^{2n\Delta t}\frac{\tau\Delta t}{\left[c^2\left(2k\Delta t-\tau\right)^2-r^2\right]^{\frac{3}{2}}}d\tau=\int_{\theta_1}^{\theta_2}\frac{\left(2k\Delta t-\frac{r}{c}\cosh\theta\right)\frac{r}{c}\sinh\theta}{\sinh^3\theta}d\theta$$

Buradan

$$Q_{QF_4}=\frac{2k\Delta t}{r^2c}\int_{\theta_1}^{\theta_2}\frac{1}{\sinh^2\theta}d\theta-\frac{1}{c^2r}\int_{\theta_1}^{\theta_2}\frac{\cosh\theta}{\sinh^2\theta}d\theta$$

$$=\left[\frac{-2k\Delta t}{r^2c}\frac{\cosh\theta}{\sinh\theta}\bigg|_{\theta_1}^{\theta_2}+\frac{1}{c^2r}\frac{1}{\sqrt{\left(\frac{cz}{r}\right)^2-1}}\right]_{z=(2k-2n+2)\Delta t}^{z=(2k-2n)\Delta t}.$$

$$Q_{QF_5}=\int_{(2n-2)\Delta t}^{2n\Delta t}\frac{t_{2n-2}\Delta t}{\left[c^2\left(2k\Delta t-\tau\right)^2-r^2\right]^{\frac{3}{2}}}d\tau$$

Q_{QF_5} ve Q_{QF_3} integralleri aynıdır. O halde,

$$Q_{QF_5}=\left[\frac{t_{2n-2}\Delta t}{r^2c}\frac{\frac{cz}{r}}{\sqrt{\left(\frac{cz}{r}\right)^2-1}}\right]_{z=(2k-2n+2)\Delta t}^{z=(2k-2n)\Delta t}.$$

$$Q_{QF}^{2k-2n+2}=\frac{\partial r}{\partial n}\frac{cr}{4\pi\Delta t^2}\left(Q_{QF_1}+Q_{QF_2}+Q_{QF_3}+Q_{QF_4}+Q_{QF_5}\right).$$

$$Q_{QF}^{2k-2n+2}=\frac{\partial r}{\partial n}\frac{cr}{4\pi\Delta t^2}\left[\left(\frac{4k^2\Delta t^2-4k\Delta t\,t_{2n-2}+t_{2n-2}^2-2k\Delta t+t_{2n-2}\Delta t}{r^2c}+\frac{1}{c^3}\right)\cdot\frac{\frac{cz}{r}}{\sqrt{\left(\frac{cz}{r}\right)^2-1}}\right.$$

$$+\left(\frac{-4k\Delta t+2t_{2n-2}}{rc^2}+\frac{1}{c^2r}\right)\cdot\frac{1}{\sqrt{\left(\frac{cz}{r}\right)^2-1}}+\frac{1}{c^3}\cdot\operatorname{arccosh}\left(\frac{cz}{r}\right)\Bigg]_{z=(2k-2n+2)\Delta t}^{z=(2k-2n)\Delta t}.$$

$$Q_{QM}^{2k-2n+2}=\int_{(2n-2)\Delta t}^{2n\Delta t} q^*\left(x^i,\tau;x,2k\Delta t\right)M_{QM}(\tau)\,d\tau \tag{3.6}$$

$$Q_{QM}^{2k-2n+2}=\int_{(2n-2)\Delta t}^{2n\Delta t}\frac{\partial r}{\partial n}\frac{cr}{2\pi\left[c^2(2k\Delta t-\tau)^2-r^2\right]^{\frac{3}{2}}}\left[-\left(\frac{\tau-t_{2n-2}^2}{\Delta t}\right)^2+2\left(\frac{\tau-t_{2n-2}}{\Delta t}\right)\right]d\tau$$

$$Q_{QM}^{2k-2n+2}=\frac{\partial r}{\partial n}\frac{cr}{2\pi\Delta t^2}\Bigg[\underbrace{-\int_{(2n-2)\Delta t}^{2n\Delta t}\frac{\tau^2\,d\tau}{\underbrace{\left[c^2(2k\Delta t-\tau)^2-r^2\right]^{\frac{3}{2}}}_{B}}}_{Q_{QM_1}}+\underbrace{\int_{(2n-2)\Delta t}^{2n\Delta t}\frac{2\tau(t_{2n-2}+\Delta t)}{B}d\tau}_{Q_{QM_2}}$$

$$\underbrace{-\int_{(2n-2)\Delta t}^{2n\Delta t}\frac{t_{2n-2}(t_{2n-2}+2\Delta t)}{B}d\tau}_{Q_{QM_3}}\Bigg].$$

$$Q_{QM_1}=-\int_{(2n-2)\Delta t}^{2n\Delta t}\frac{\tau^2\,d\tau}{\underbrace{\left[c^2(2k\Delta t-\tau)^2-r^2\right]^{\frac{3}{2}}}_{B}}$$

Aynı dönüşümlerle;

$$Q_{QM_1}=\left[\left(-\frac{4k^2\Delta t^2 t}{r^2c}-\frac{1}{c^3}\right)\frac{\frac{cz}{r}}{\sqrt{\left(\frac{cz}{r}\right)^2-1}}-\frac{4k\Delta t}{c^2r}\frac{1}{\sqrt{\left(\frac{cz}{r}\right)^2-1}}-\frac{1}{c^3}\operatorname{arccos h}\frac{cz}{r}\right]_{z=(2k-2n+2)\Delta t}^{z=(2k-2n)\Delta t}.$$

$$Q_{QM_2}=\left(t_{2n-2}+\Delta t\right)\int_{(2n-2)\Delta t}^{2n\Delta t}\frac{2\tau}{\left[c^2(2k\Delta t-\tau)^2-r^2\right]^{\frac{3}{2}}}d\tau$$

$$Q_{QM_2}=-\left(t_{2n-2}+\Delta t\right)\int_{\theta_1}^{\theta_2}\frac{2\left(2k\Delta t-\frac{r}{c}\cosh\theta\right)\frac{r}{c}\sinh\theta}{\sinh^3\theta}d\theta$$

$$Q_{QM_2} = \left(t_{2n-2} + \Delta t\right)\left[\int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{-4k\Delta t \frac{r}{c}\sinh\theta}{\sinh^3\theta} d\theta + \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{2 - \frac{r}{c}\cosh\theta\sinh\theta}{\sinh^3\theta} d\theta\right]$$

$$Q_{QM_2} = \left(t_{2n-2} + \Delta t\right)\cdot\left(\frac{-4k\Delta t}{r^2 c}\int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{1}{\sinh^2\theta} d\theta + \frac{2}{r^2 c}\int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{\cosh\theta}{\sinh^2\theta} d\theta\right)$$

$$Q_{QM_2} = \frac{4k\Delta t\, t_{2n-2} + 4k\Delta t^2}{r^2 c}\frac{\cosh\theta}{\sinh\theta}\Bigg|_{\theta_1}^{\theta_2} - \frac{2\left(t_{2n-2} + \Delta t\right)}{r^2 c}\frac{1}{\sinh\theta}\Bigg|_{\theta_1}^{\theta_2}$$

$$Q_{QM_2} = \left[\frac{4k\Delta t\, t_{2n-2} + 4k\Delta t^2}{r^2 c}\frac{\frac{cz}{r}}{\sqrt{\left(\frac{cz}{r}\right)^2 - 1}} - \frac{2\left(t_{2n-2} + \Delta t\right)}{r^2 c}\frac{1}{\sqrt{\left(\frac{cz}{r}\right)^2 - 1}}\right]_{z=(2k-2n+2)\Delta t}^{z=(2k-2n)\Delta t}.$$

$$Q_{QM_3} = \left(-t_{2n-2}^2 - 2t_{2n-2}\Delta t\right)\int_{(2n-2)\Delta t}^{2n\Delta t} \frac{d\tau}{\left[c^2\left(2k\Delta t - \tau\right)^2 - r^2\right]^{\frac{3}{2}}}$$

$$Q_{QM_3} = \left(t_{2n-2}^2 + 2t_{2n-2}\Delta t\right)\int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{\frac{r}{c}\sinh\theta}{\sinh^3\theta} d\theta = \frac{t_{2n-2}^2 + 2t_{2n-2}\Delta t}{r^2 c}\int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{1}{\sinh^2\theta} d\theta$$

$$Q_{QM_3} = \frac{-t_{2n-2}^2 - 2t_{2n-2}\Delta t}{r^2 c}\frac{\cosh\theta}{\sinh\theta}\Bigg|_{\theta_1}^{\theta_2} = \left[\frac{-t_{2n-2}^2 - 2t_{2n-2}\Delta t}{r^2 c}\frac{\frac{cz}{r}}{\sqrt{\left(\frac{cz}{r}\right)^2 - 1}}\right]_{z=(2k-2n+2)\Delta t}^{z=(2k-2n)\Delta t}.$$

$$Q_{QM}^{2k-2n+2} = \frac{\partial r}{\partial n}\frac{cr}{2\pi\Delta t^2}\left(Q_{QM_1} + Q_{QM_2} + Q_{QM_3}\right).$$

$$Q_{QM}^{2k-2n+2} = \left[\frac{\partial r}{\partial n}\frac{cr}{2\pi\Delta t^2}\left(\frac{-4k^2\Delta t^2 + 4k\Delta t\, t_{2n-2} + 4k\Delta t^2 - t_{2n-2}^2 - 2t_{2n-2}\Delta t}{r^2 c} - \frac{1}{c^3}\right)\frac{\frac{cz}{r}}{\sqrt{\left(\frac{cz}{r}\right)^2 - 1}}\right.$$

$$\left. + \left(\frac{4k\Delta t}{c^2 r} - \frac{2\left(t_{2n-2} + \Delta t\right)}{r^2 c}\right)\frac{1}{\sqrt{\left(\frac{cz}{r}\right)^2 - 1}} - \frac{1}{c^3}\cdot\operatorname{arccosh}\left(\frac{cz}{r}\right)\right]_{z=(2k-2n+2)\Delta t}^{z=(2k-2n)\Delta t}$$

olarak bulunur.

$$Q_{QB}^{2k-2n+2}=\int_{(2n-2)\Delta t}^{2n\Delta t}\frac{\partial r}{\partial n}\frac{cr}{\underbrace{2\pi\left[c^2\left(2k\Delta t-\tau\right)^2-r^2\right]^{\frac{3}{2}}}_{B\text{ diyelim}}}\cdot\left[\frac{1}{2}\left(\frac{\tau-t_{2n-2}}{\Delta t}\right)^2-\frac{3}{2}\left(\frac{\tau-t_{2n-2}}{\Delta t}+1\right)\right]d\tau \quad (3.7)$$

$$Q_{QB}^{2k-2n+2}=\int_{(2n-2)\Delta t}^{2n\Delta t}\frac{\partial r}{\partial n}\frac{cr}{2\pi B\Delta t^2}\left[\tau^2-\tau\left(2t_{2n-2}+3\right)+t_{2n-2}\left(t_{2n-2}+3\right)+2\Delta t^2\right]d\tau$$

$$Q_{QB}^{2k-2n+2}=\frac{\partial r}{\partial n}\frac{cr}{2\pi B\Delta t^2}\left[\underbrace{\int_{(2n-2)\Delta t}^{2n\Delta t}\frac{\tau^2}{B}d\tau}_{Q_{QB_1}}\underbrace{-\left(2t_{2n-2}+3\right)\int_{(2n-2)\Delta t}^{2n\Delta t}\frac{\tau}{B}d\tau}_{Q_{QB_2}}+\underbrace{\left(t_{2n-2}^2+3t_{2n-2}+2\Delta t^2\right)\int_{(2n-2)\Delta t}^{2n\Delta t}d\tau}_{Q_{QB_3}}\right]$$

$$Q_{QB_1}=\int_{(2n-2)\Delta t}^{2n\Delta t}\frac{\tau^2}{B}d\tau$$

Q_{QB_1} ve Q_{QF_1} integralleri aynıdır. Bu durumda;

$$Q_{QB_1}=\left[\left(\frac{4k^2\Delta t^2}{r^2c}+\frac{1}{c^3}\right)\frac{\frac{cz}{r}}{\sqrt{\left(\frac{cz}{r}\right)^2-1}}-\frac{4k\Delta t}{c^2r}\frac{1}{\sqrt{\left(\frac{cz}{r}\right)^2-1}}+\frac{1}{c^3}\operatorname{arccosh}\frac{cz}{r}\right]_{z=(2k-2n+2)\Delta t}^{z=(2k-2n)\Delta t}.$$

$$Q_{QB_2}=-\left(2t_{2n-2}+3\right)\int_{(2n-2)\Delta t}^{2n\Delta t}\frac{\tau}{B}d\tau$$

$$Q_{QB_2}=\left[\left(\frac{-4k\Delta t\,t_{2n-2}+12k\Delta t}{r^2c}\right)\frac{\frac{cz}{r}}{\sqrt{\left(\frac{cz}{r}\right)^2-1}}-\frac{1}{r^2c}\frac{1}{\sqrt{\left(\frac{cz}{r}\right)^2-1}}\right]_{z=(2k-2n+2)\Delta t}^{z=(2k-2n)\Delta t}.$$

$$Q_{QB_3}=\left(t_{2n-2}^2+3t_{2n-2}+2\Delta t^2\right)\int_{(2n-2)\Delta t}^{2n\Delta t}d\tau=\left[\frac{t_{2n-2}^2+3t_{2n-2}+2\Delta t^2}{r^2c}\frac{\frac{cz}{r}}{\sqrt{\left(\frac{cz}{r}\right)^2-1}}\right]_{z=(2k-2n+2)\Delta t}^{z=(2k-2n)\Delta t}.$$

$$Q_{QB}^{2k-2n+2} = \frac{\partial r}{\partial n} \frac{cr}{2\pi B \Delta t^2} \left(Q_{QB_1} + Q_{QB_2} + Q_{QB_3} \right) \text{ olduğundan,}$$

$$Q_{QB}^{2k-2n+2} = \frac{\partial r}{\partial n} \frac{cr}{2\pi B \Delta t^2} \Bigg[\left(\frac{4k^2 \Delta t^2 - 4k\Delta t\, t_{2n-2} + 12k\Delta t + t_{2n-2}^2 + 3t_{2n-2} + 2\Delta t^2}{r^2 c} + \frac{1}{c^3} \right)$$

$$\cdot \frac{\frac{cz}{r}}{\sqrt{\left(\frac{cz}{r}\right)^2 - 1}} + \left(\frac{-4k\Delta t + 2t_{2n-2}}{c^2 r} + \frac{1}{r^2 c} \right) \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{cz}{r}\right)^2 - 1}}$$

$$+ \frac{1}{c^3} \cdot \operatorname{arccosh}\left(\frac{cz}{r} \right) \Bigg]_{z=(2k-2n+2)\Delta t}^{z=(2k-2n)\Delta t}$$

olarak bulunur.

Bu bölümde kuadratik interpolasyon fonksiyonu yaklaşımıyla iki boyutlu skaler dalga denkleminin SIEM formülasyonuna ait potansiyel ve akı çekirdekleri çıkarıldı.

Gelecek bölümde ise üç boyutlu skaler dalga denklemine ilişkin çekirdekler ele alınacaktır.

4. ÜÇ BOYUTTA POTANSİYEL VE AKI ÇEKİRDEKLERİ

4.1 Üç Boyutlu Skaler Dalga Denkleminde Farklı İnterpolasyon Fonksiyonları İçin Çekirdekler

Bu bölümde önceki bölümlerden farklı olarak üç boyutlu skaler dalga denkleminin SIEM formülasyonuna ait potansiyel ve akı çekirdekleri; sabit, lineer ve kuadratik interpolasyon fonksiyonu yaklaşımıyla elde edilcektir.

Sabit interpolasyon fonksiyonu yaklaşımıyla potansiyel ve akı çekirdekleri:

Bölüm 2'de verilen $\mu^m(\tau)$ sabit interpolasyonu ile birlikte üç boyutlu u^* fundamental çözüm (Eringen ve Suhubi, 1975) kullanılarak,

$$U^{nm} = \int_{\Delta t_m} u^*(x^i,\tau;x,t)\ \mu^m(\tau)d\tau \tag{4.1}$$

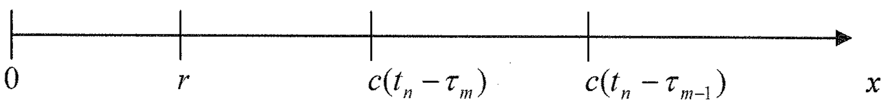
yazılabilir. Buradan,

$$U^{nm} = \int_{\tau_{m-1}}^{\tau_m} \underbrace{\frac{1}{4\pi r}\ \delta[(t_n-\tau)-\frac{r}{c}]}_{u^*_{3B}}\ \underbrace{1}_{\mu^m(\tau)}\ d\tau$$

$$U^{nm} = \frac{1}{4\pi r}\{H\ [(t_n-\tau_{m-1})-\frac{r}{c}]-H[(t_n-\tau_m)-\frac{r}{c}]\}.$$

U^{nm}'i pertürbasyonun alan noktasına ulaşıp ulaşmamasına bağlı olarak üç farklı durum için inceleyelim:

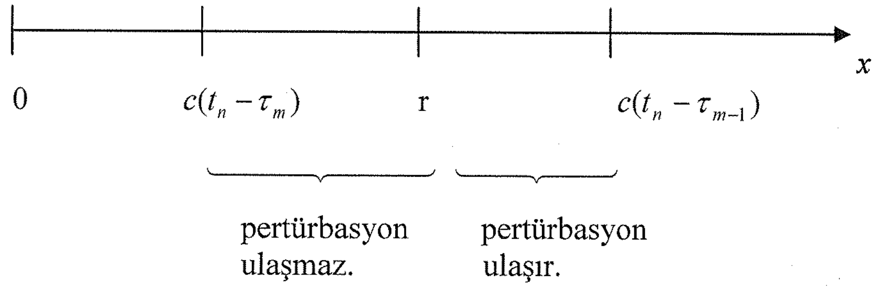
1) $r < c(t_n-\tau_m)$



τ_{m-1} ve τ_m arasında oluşan tüm pertübasyonlar alan noktasına ulaşır.

$$H[(t_n-\tau_{m-1})-\frac{r}{c}]=1, \quad H[(t_n-\tau_m)-\frac{r}{c}]=1 \Rightarrow U^{nm}=0 \text{ olur.}$$

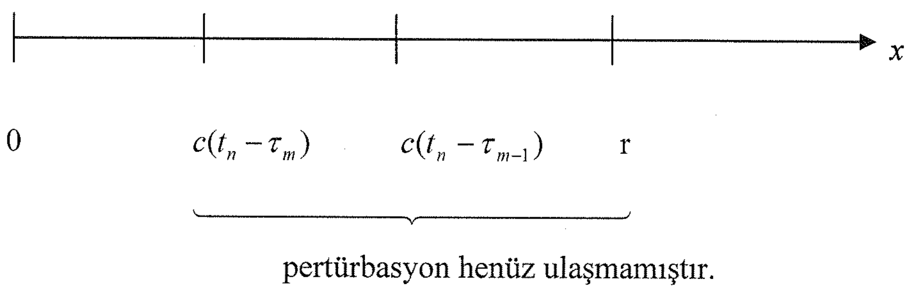
2) $c(t_n-\tau_m)\leq r < c(t_n-\tau_{m-1})$



$$H[(t_n-\tau_{m-1})-\frac{r}{c}]=1, \; H[(t_n-\tau_m)-\frac{r}{c}]=0 \text{ olduğundan,}$$

$$U^{nm}=\frac{1}{4\pi r}\{1-0\}=\frac{1}{4\pi r} \text{ bulunur.}$$

3) $c\,(t_n-\tau_{m-1})\leq r$



$$H[(t_n-\tau_{m-1})-\frac{r}{c}]=0, \; H[(t_n-\tau_m)-\frac{r}{c}]=0 \text{ olduğundan,}$$

$$U^{nm}=\frac{1}{4\pi r}(0-0)=\frac{1}{4\pi r}.0=0 \text{ bulunur.}$$

Yine μ^m sabit interpolasyon fonksiyonu ile birlikte,

$$q^*=\frac{\partial u^*}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial n}=\frac{\partial r}{\partial n}\frac{\partial}{\partial r}\frac{1}{4\pi r}\,\delta[(t-\tau)-\frac{r}{c}]$$

üç boyutlu akı fundamental çözümü (Eringen ve Suhubi, 1975) kullanılarak,

$$Q^{nm} = \int_{\Delta t_m} q^*(x^i,\tau;x,t)\ \mu^m(\tau)\ d\tau \tag{4.2}$$

yazılabilir.

$$q^*(x^i,\tau;x,t) = \frac{\partial r}{\partial n}\{-\frac{1}{4\pi r^2}\ \delta[(t-\tau)-\frac{r}{c}] + \frac{1}{4\pi rc}\ \frac{\partial}{\partial \tau}\delta[(t-\tau)-\frac{r}{c}]\}$$

$$Q^{nm} = \int_{\tau_{m-1}}^{\tau_m} \frac{\partial r}{\partial n}\{-\frac{1}{4\pi r^2}\ \delta[(t-\tau)-\frac{r}{c})] + \frac{1}{4\pi rc}\ \frac{\partial}{\partial \tau}\ \delta[(t_n-\tau)-\frac{r}{c})\}\ \mu^m(\tau)d\tau$$

$$Q^{nm} = -\frac{1}{4\pi r^2}\ \frac{\partial r}{\partial n}\int_{\tau_{m-1}}^{\tau_m} \delta[(t-\tau)-\frac{r}{c})]d\tau + \frac{\partial r}{\partial n}\ \frac{1}{4\pi rc}\int_{\tau_{m-1}}^{\tau_m} \dot{\delta}[(t-\tau)-\frac{r}{c})]d\tau$$

$\int_{-\infty}^{+\infty} \dot{\delta}(x-a)\ \phi(x)\,dx = -\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x-a)\ \dot{\phi}(x)dx = -\dot{\phi}(a)$ olduğu hatırlanarak,

$$Q_{11} = -\frac{\partial r}{\partial n}\ \frac{1}{4\pi r^2}\int_{\tau_{m-1}}^{\tau_m} \delta[(t-\tau)-\frac{r}{c})]d\tau$$

$$Q_{11} = -\frac{\partial r}{\partial n}\ \frac{1}{4\pi r^2}\ \{H[(t_n-\tau_{m-1})-\frac{r}{c}] - H[(t_n-\tau_m)-\frac{r}{c}]\}$$

$$\begin{aligned}
Q_{12} &= \frac{\partial r}{\partial n}\ \frac{1}{4\pi r^2}\int_{\tau_{m-1}}^{\tau_m} \dot{\delta}\ [(t-\tau)-\frac{r}{c}].1\ d\tau \\
&= -\frac{\partial r}{\partial n}\ \frac{1}{4\pi rc}\int_{\tau_{m-1}}^{\tau_m} \delta\ [(t-\tau)-\frac{r}{c}].\dot{1}\,d\tau \\
&= -\frac{\partial r}{\partial n}\ \frac{1}{4\pi rc}\int_{\tau_{m-1}}^{\tau_m} \delta\ [(t-\tau)-\frac{r}{c}].0\ d\tau \\
&= 0.
\end{aligned}$$

O halde,

$Q^{nm} = Q_{11} + Q_{12}$'den

$$Q^{nm} = -\frac{\partial r}{\partial n}\ \frac{1}{4\pi r^2}\{H[(t_n-\tau_{m-1})-\frac{r}{c}] - H[(t_n-\tau_m)-\frac{r}{c}]\}$$

sonucuna varılır.

Bu sonuç, pertürbasyonun alan noktasına ulaşması veya ulaşmamasına bağlı olarak üç farklı durumda incelenecektir:

1) $r < c(t_n - \tau_m)$

$H[(t_n - \tau_{m-1}) - \frac{r}{c}] = 1, \quad H[(t_n - \tau_m) - \frac{r}{c}] = 1$ olduğundan

$Q^{nm} = 0$ olarak bulunur.

2) $c(t_n - \tau_m) \leq r < c\,(t_n - \tau_{m-1})$

$H[(t_n - \tau_{m-1}) - \frac{r}{c}] = 1, \quad H[(t_n - \tau_m) - \frac{r}{c}] = 0$ olduğundan

$$Q^{nm} = -\frac{\partial r}{\partial n}\,\frac{1}{4\pi r^2}(1-0) = -\frac{\partial r}{\partial n}\,\frac{1}{4\pi r^2}.$$

3) $c(t_n - \tau_{m-1}) \leq r$

$H[(t_n - \tau_{m-1}) - \frac{r}{c}] = 0, \quad H[(t_n - \tau_m) - \frac{r}{c}] = 0$ ve

$Q^{nm} = -\frac{\partial r}{\partial n}\frac{1}{4\pi r^2}(0-0) = 0$ olur.

Lineer interpolasyon fonksiyonu yaklaşımı kullanılırsa,

$$U^{nm} = \int_{\tau_{m-1}}^{\tau_m} u^*(x^i, \tau; x, t)\,\eta^m(\tau)\,d\tau \tag{4.3}$$

yazılabilir.

$\eta^m(\tau)$ lineer interpolasyon fonksiyonu ve üç boyutlu u^* ve q^* çözümleri Bölüm 2'de verildiği gibidir. Buradan,

$$U^{nm} = \int_{\tau_{m-1}}^{\tau_m} \frac{1}{4\pi rc} \; \delta\,[(t-\tau)-\frac{r}{c}] \; \frac{(\tau-\tau_{m-1})}{\Delta t} \; d\tau + \int_{\tau_{m-1}}^{\tau_{m+1}} \frac{1}{4\pi rc} \; \delta\,[(t-\tau)-\frac{r}{c}] \; \frac{(\tau_{m+1}-\tau)}{\Delta t} \; d\tau$$

yazılabilir.

$$U^{nm} = \underbrace{\frac{1}{4\pi r\Delta t}\int_{\tau_{m-1}}^{\tau_m} \tau\,\delta\,[(t-\tau)-\frac{r}{c}]d\tau}_{U_{11}} \quad \underbrace{-\frac{\tau_{m-1}}{4\pi r\Delta t}\int_{\tau_{m-1}}^{\tau_m} \delta\,[(t-\tau)-\frac{r}{c}]d\tau}_{U_{12}}$$

$$\underbrace{+\frac{\tau_{m+1}}{4\pi r\Delta t}\int_{\tau_m}^{\tau_{m+1}} \delta\,[(t-\tau)-\frac{r}{c}]d\tau}_{U_{13}} \underbrace{-\frac{1}{4\pi r\Delta t}\int_{\tau_m}^{\tau_{m+1}} \tau\,\delta\,[(t-\tau)-\frac{r}{c}]d\tau}_{U_{14}}$$

$$U_{11} = \frac{1}{4\pi r\Delta t}\int_{\tau_{m-1}}^{\tau_m} \tau\;\delta\,[(t-\tau)-\frac{r}{c}]d\tau$$

$\int_{-\infty}^{+\infty} \phi(x)\;\delta\,(x-a)\;dx = \phi\;(a)$ olduğunu hatırlayarak,

$$U_{11} = \frac{1}{4\pi r\Delta t}\{(t_n-\frac{r}{c})\;H[(t_n-\tau_{m-1})-\frac{r}{c}] - (t_n-r/c)\;H[(t_n-\tau_m)-\frac{r}{c}]\}$$

$$U_{12} = \frac{\tau_{m-1}}{4\pi r\Delta t}\{H[(t_n-\tau_{m-1})-\frac{r}{c}] - H[(t_n-\tau_m)-\frac{r}{c}]\}$$

$$U_{13} = \frac{\tau_{m+1}}{4\pi r\Delta t}\{H[(t_n-\tau_m)-\frac{r}{c}] - H[(t_n-\tau_{m+1})-\frac{r}{c}]\}$$

$$U_{14} = \frac{1}{4\pi r\Delta t}\{(t_n-\frac{r}{c})\;H[(t_n-\tau_m)-\frac{r}{c}] - (t_n-\frac{r}{c})\;H[(t_n-\tau_{m+1})-\frac{r}{c}]\}$$

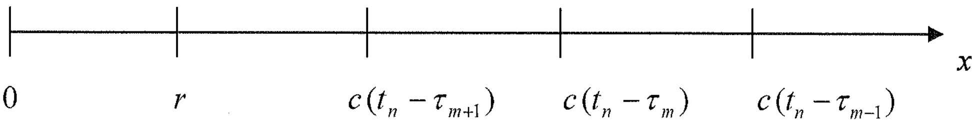
$$U^{nm} = \frac{1}{4\pi r\Delta t}\;\{(-t_n+\frac{r}{c})\;H[(t_n-\tau_m)-\frac{r}{c}] - 2(-t_n+\frac{r}{c})\;H[(t_n-\tau_m)-\frac{r}{c}]$$
$$-(-t_n+\frac{r}{c})\;H[(t_n-\tau_{m+1})-\frac{r}{c}] + (\tau_{m-1}+\tau_{m+1})H[(t_n-\tau_m)-\frac{r}{c}]$$

$$-\tau_{m-1} H[(t_n-\tau_{m-1})-\frac{r}{c}] \; -\tau_{m+1} H[(t_n-\tau_{m+1})-\frac{r}{c}]\}$$

olarak bulunur.

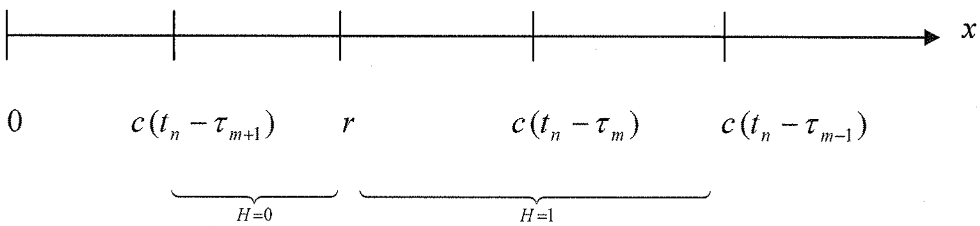
Pertürbasyonun ulaşıp ulaşmamasına göre, U^{nm}'i dört farklı durumda gruplayabiliriz:

1) $r < c\ (t_n - \tau_{m+1})$



tüm noktalara etki ulaşır. Tüm aralıklarda $H=1$ ve $U^{nm}=0$ olur.

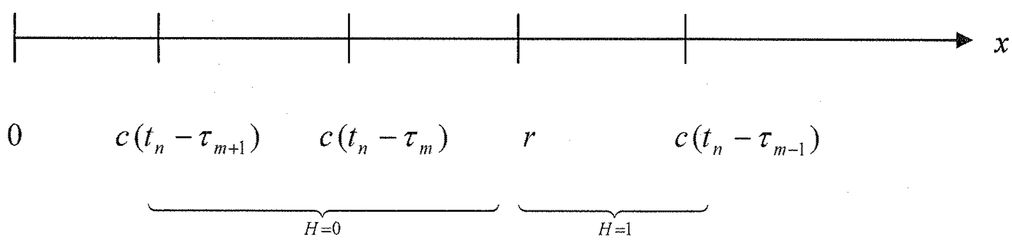
2) $c\ (t_n-\tau_{m+1}) \le r < c(t_n-\tau_m)$



$$U^{nm}=\frac{\tau_{m+1}}{4\pi r\Delta t}-\frac{(t-\frac{r}{c})}{4\pi r\Delta t}=\frac{\tau_{m+1}-t+\frac{r}{c}}{4\pi r\Delta t}=\frac{-\frac{r}{c}\left[\frac{c}{r}(t_n-\tau_{m+1})-1\right]}{4\pi r\Delta t}$$

$$U^{nm}=\frac{1}{4\pi c\Delta t}(1-a_2).$$

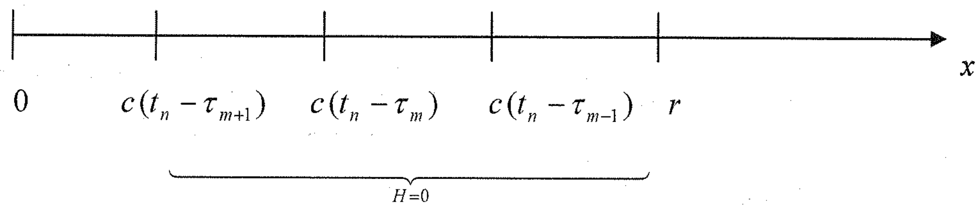
3) $c\ (t_n-\tau_m) \le r < c(t_n-\tau_{m-1})$



$$U^{nm}=\frac{1}{4\pi c\Delta t}\{(-t_n-\frac{r}{c})-\tau_{m-1}\}.$$

$$U^{nm}=\frac{-\tau_{m-1}+t_n-\frac{r}{c}}{4\pi r\Delta t}=\frac{\frac{c(t_n-\tau_{m-1})}{r}-1}{4\pi c\Delta t}=\frac{1}{4\pi c\Delta t}\,(a_0-1)\,.$$

4) $c\ (t_n-\tau_m)\ \le\ r$



$U^{nm}=0$ olur.

$$\int\delta[(t-\tau)-r/c]\ \tau\, d\tau=\int\delta[(t-\tau)-r/c]\ \tau\, d\tau$$
$$=\int\delta[(t-\tau)-r/c]\ \tau\ d\tau=(t-r/c)\ \ H[(t-\tau)-\frac{r}{c}]$$

olduğu bilinerek, q için lineer interpolasyon fonksiyonu kullanalım:

$$Q^{nm}=\int_{\tau_{m-1}}^{\tau_m} q^*\,\eta^m(\tau)\ d\tau+\int_{\tau_m}^{\tau_{m+1}} q^*\,\eta^m(\tau)\ d\tau \tag{4.4}$$

$$Q^{nm}=\int_{\tau_{m-1}}^{\tau_m}\frac{\partial r}{\partial n}\left\{-\frac{1}{4\pi r^2}\,\delta\,[(t-\tau)-\frac{r}{c}]+\frac{1}{4\pi rc}\frac{\partial}{\partial\tau}\,\delta\,[(t-\tau)-\frac{r}{c}]\right\}\frac{(\tau-\tau_{m-1})}{\Delta t}\,d\tau$$
$$+\int_{\tau_{m+1}}^{\tau_m}\frac{\partial r}{\partial n}\left\{-\frac{1}{4\pi r^2}\,\delta\,[(t-\tau)-\frac{r}{c}]+\frac{1}{4\pi rc}\frac{\partial}{\partial\tau}\,\delta\,[(t-\tau)-\frac{r}{c}]\right\}\frac{(\tau_{m-1}-\tau)}{\Delta t}\,d\tau$$

$$Q^{nm}=\underbrace{\int_{\tau_{m-1}}^{\tau_m}-\frac{\partial r}{\partial n}\frac{1}{4\pi r^2\Delta t}\,\delta\,[(t-\tau)-\frac{r}{c}]\tau\ d\tau}_{Q_{11}}+\underbrace{\int_{\tau_{m-1}}^{\tau_m}\frac{1}{4\pi rc\Delta t}\frac{\partial r}{\partial n}\frac{\partial}{\partial\tau}\,\delta\,[(t-\tau)-\frac{r}{c}]\tau\, d\tau}_{Q_{12}}$$
$$+\underbrace{\int_{\tau_{m-1}}^{\tau_m}\frac{\partial r}{\partial n}\frac{\tau_{m-1}}{4\pi r^2\Delta t}\,\delta\,[(t-\tau)-\frac{r}{c}]\ d\tau}_{Q_{13}}-\underbrace{\int_{\tau_{m-1}}^{\tau_m}\frac{\partial r}{\partial n}\frac{\tau_{m-1}}{4\pi rc\Delta t}\frac{\partial}{\partial\tau}\,\delta\,[(t-\tau)-\frac{r}{c}]\ d\tau}_{Q_{14}}$$

$$\underbrace{-\int_{\tau_m}^{\tau_{m+1}} \frac{\partial r}{\partial n} \frac{\tau_{m+1}}{4\pi r^2 \Delta t}\, \delta\, [(t-\tau)-\frac{r}{c}]\, d\tau}_{Q_{15}} + \underbrace{\int_{\tau_m}^{\tau_{m+1}} \frac{\partial r}{\partial n} \frac{\tau_{m+1}}{4\pi rc \Delta t} \frac{\partial}{\partial \tau}\, \delta\, [(t-\tau)-\frac{r}{c}]\, d\tau}_{Q_{16}}$$

$$\underbrace{+\int_{\tau_m}^{\tau_{m+1}} \frac{\partial r}{\partial n} \frac{1}{4\pi r^2 \Delta t}\, \delta\, [(t-\tau)-\frac{r}{c}]\, \tau\, d\tau}_{Q_{17}} - \underbrace{\int_{\tau_m}^{\tau_{m+1}} \frac{\partial r}{\partial n} \frac{1}{4\pi rc \Delta t} \frac{\partial}{\partial \tau}\, \delta\, [(t-\tau)-\frac{r}{c}]\, \tau\, d\tau}_{Q_{18}}$$

$$Q_{11} = -\frac{\partial r}{\partial n} \frac{1}{4\pi r^2 \Delta t} \int_{\tau_{m-1}}^{\tau_m} \tau\, \delta\, [(t-\tau)-\frac{r}{c}]\, d\tau$$

$$Q_{11} = -\frac{\partial r}{\partial n} \frac{1}{4\pi r^2 \Delta t} \{(t-\frac{r}{c})\; H[(t_n-\tau_{m-1})-\frac{r}{c}] - (t-\frac{r}{c}) H[(t_n-\tau_m)-\frac{r}{c}]\}.$$

$$Q_{12} = +\frac{1}{4\pi rc\Delta t} \frac{\partial r}{\partial n} \int_{\tau_{m-1}}^{\tau_m} \tau\, \dot{\delta}\, [(t-\tau)-\frac{r}{c}]\, d\tau \;= -\frac{1}{4\pi rc\Delta t} \frac{\partial r}{\partial n} \int_{\tau_{m-1}}^{\tau_m} \delta\, [(t-\tau)-\frac{r}{c}]\; \dot{\tau}\, d\tau$$

$$= -\frac{1}{4\pi rc\Delta t} \frac{\partial r}{\partial n} \; \{H[(t_n-\tau_{m-1})-\frac{r}{c}] - H[(t_n-\tau_m)-\frac{r}{c}]\}.$$

$$Q_{13} = \frac{\partial r}{\partial n} \frac{1}{4\pi r^2 \Delta t} \int_{\tau_{m-1}}^{\tau_m} \delta\, [(t-\tau)-\frac{r}{c}]\; d\tau$$

$$Q_{13} = \frac{\partial r}{\partial n} \frac{\tau_{m-1}}{4\pi r^2 \Delta t} \; \{H[(t_n-\tau_{m-1})-\frac{r}{c}] - H[(t_n-\tau_m)-\frac{r}{c}].$$

$$Q_{14} = -\frac{\partial r}{\partial n} \frac{\tau_{m-1}}{4\pi rc\Delta t} \int_{\tau_{m-1}}^{\tau_m} \dot{\delta}[(t-\tau)-\frac{r}{c}]\; d\tau$$

$$Q_{14} = \frac{\partial r}{\partial n} \frac{\tau_{m-1}}{4\pi rc\Delta t} \int_{\tau_{m-1}}^{\tau_m} \delta\, [(t-\tau)-\frac{r}{c}]\; \dot{1}\; d\tau$$

$Q_{14} = 0$ olur.

$$Q_{15} = -\frac{\partial r}{\partial n} \frac{\tau_{m+1}}{4\pi r^2 \Delta t} \int_{\tau_m}^{\tau_{m+1}} \delta[(t-\tau)-\frac{r}{c}]\; d\tau$$

$$Q_{15} = -\frac{\partial r}{\partial n}\frac{\tau_{m+1}}{4\pi r^2 \Delta t}\ \{H[(t_n-\tau_m)-\frac{r}{c}]-H[(t_n-\tau_{m-1})-\frac{r}{c}]\}.$$

$$Q_{16} = \frac{\partial r}{\partial n}\frac{\tau_{m+1}}{4\pi rc\Delta t}\int_{\tau_m}^{\tau_{m+1}}\dot{\delta}[(t-\tau)-\frac{r}{c}]\ d\tau$$

$Q_{16} = 0$ olur.

$$Q_{17} = \frac{\partial r}{\partial n}\frac{1}{4\pi r^2\Delta t}\int_{\tau_m}^{\tau_{m+1}}\tau\ \delta\ [(t-\tau)-\frac{r}{c}]\ d\tau$$

$$Q_{17} = -\frac{\partial r}{\partial n}\frac{1}{4\pi r^2\Delta t}\ \{(t-\frac{r}{c})\ H[(t_n-\tau_m)-\frac{r}{c}]-(t-\frac{r}{c})\ H\ [(t_n-\tau_{m-1})-r/c]\}.$$

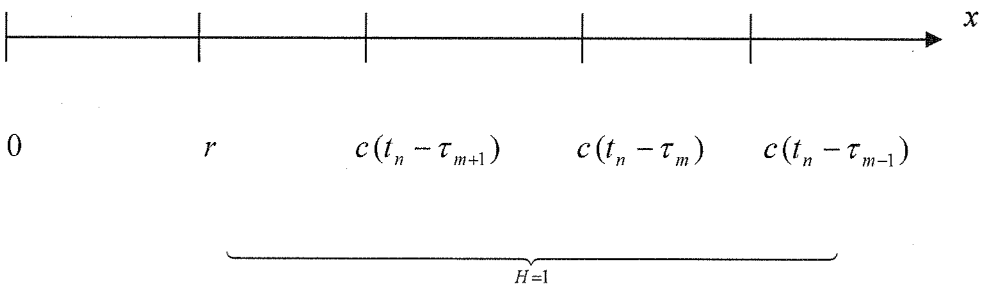
$$Q_{18} = -\frac{\partial r}{\partial n}\frac{1}{4\pi rc\Delta t}\int_{\tau_m}^{\tau_{m+1}}\tau\,\dot{\delta}[(t-\tau)-\frac{r}{c}]\ d\tau$$
$$+\frac{\partial r}{\partial n}\frac{1}{4\pi rc\Delta t}\int_{\tau_m}^{\tau_{m+1}}\delta[(t-\tau)-\frac{r}{c}]\ \dot{\tau}\ d\tau$$

$$Q_{18} = -\frac{\partial r}{\partial n}\frac{\tau_{m+1}}{4\pi rc\Delta t}\ \{H[(t_n-\tau_m)-\frac{r}{c}]-H[(t_n-\tau_{m-1})-\frac{r}{c}]\}.$$

$$Q^{nm} = Q_{11}+Q_{12}+Q_{13}+Q_{14}+Q_{15}+Q_{16}+Q_{17}+Q_{18}.$$

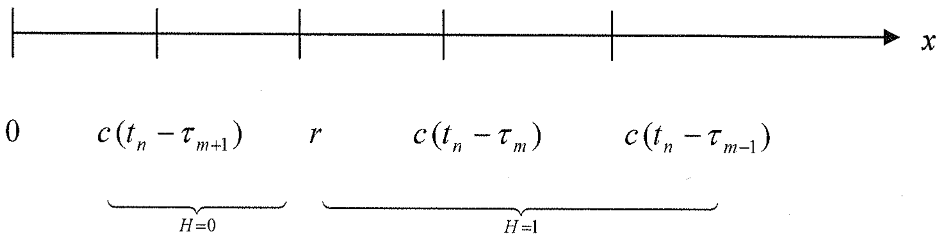
Q^{nm}, pertürbasyonun alan noktasına ulaşıp ulaşmamasına göre dört farklı durum için incelenirse:

1) $r < c\ (t_n-\tau_{m+1})$



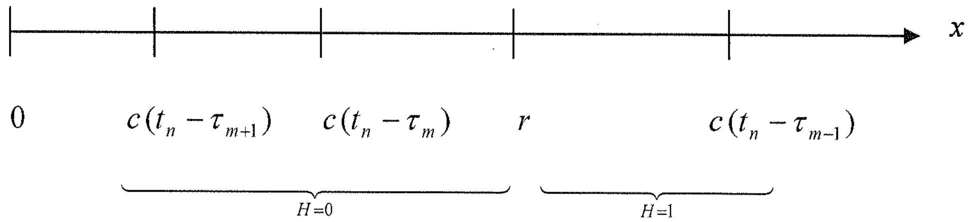
Bu nedenle, $Q^{nm} = 0$ olur.

2) $c(t_n-\tau_{m+1}) \le r < c(t_n-\tau_m)$



$$Q^{nm} = \frac{\partial r}{\partial n}\,\frac{1}{4\pi r^2 \Delta t}\,(t_n-\tau_{m+1}-\frac{r}{c}) + \frac{\partial r}{\partial n}\,\frac{1}{4\pi r c \Delta t} = +\frac{\partial r}{\partial n}\,\frac{1}{4\pi r c \Delta t}\left(\frac{c(t_n-\tau_{m+1})}{r}-1+1\right)$$
$$= \frac{\partial r}{\partial n}\,\frac{1}{4\pi r c \Delta t}\,a_2$$

3) $c(t_n-\tau_m) \le r < c(t_n-\tau_{m-1})$

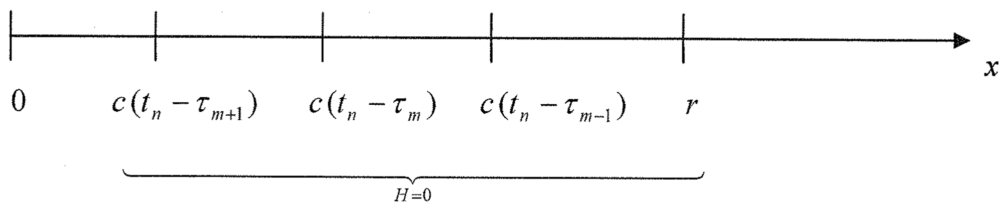


$$Q_{11} = -\frac{\partial r}{\partial n}\,\frac{1}{4\pi r^2 \Delta t}\,(t-\frac{r}{c}), \quad Q_{12} = \frac{\partial r}{\partial n}\,\frac{1}{4\pi r c \Delta t}, \quad Q_{13} = \frac{\partial r}{\partial n}\,\frac{\tau_{m-1}}{4\pi r^2 \Delta t}$$

$$Q_{14}=0, \quad Q_{15}=0, \quad Q_{16}=0, \quad Q_{17}=0, \quad Q_{18}=0$$

$$Q^{nm} = -\frac{\partial r}{\partial n}\,\frac{1}{4\pi r^2 \Delta t}\,(t_n-\tau_{m-1}+\frac{r}{c}) - \frac{\partial r}{\partial n}\,\frac{1}{4\pi r c \Delta t}$$
$$= -\frac{\partial r}{\partial n}\,\frac{1}{4\pi r c \Delta t}\left(\frac{c(t_n-\tau_{m-1})}{r}+1-1\right) = -\frac{\partial r}{\partial n}\,\frac{a_o}{4\pi r c \Delta t}$$

4) $r \ge c(t_n-\tau_{m-1})$



$Q^{nm} = 0$ olur.

Zamanın kudratik değişimi:

Burada da üçüncü bölümde kullanılmış olan kuadratik interpolasyon fonksiyonları kullanılacaktır. O halde,

$$U_{QF}^{2k-2n+2} = \int_{(2n-2)\Delta t}^{2n\Delta t} u^*\left(x^i,\tau;x,2k\Delta t\right) M_{QF}(\tau)\, d\tau \tag{4.5}$$

$$U_{QF}^{2k-2n+2} = \int_{(2n-2)\Delta t}^{2n\Delta t} \frac{1}{4\pi r}\delta[(t-\tau)-\frac{r}{c}].[\frac{1}{2}\left(\frac{\tau-t_{2n-2}}{\Delta t}\right)^2 - \frac{1}{2}\left(\frac{\tau-t_{2n-2}}{\Delta t}\right)]\, d\tau$$

$\delta[(t-\tau)-\frac{r}{c}] = \delta[(\tau-(t-\frac{r}{c})]$ olduğundan,

$$U_{QF}^{2k-2n+2} = \frac{1}{8\pi r}\int_{(2n-2)\Delta t}^{2n\Delta t} \delta[(\tau-(t-\frac{r}{c})]\left(\frac{\tau-t_{2n-2}}{\Delta t}\right)^2 d\tau$$

$$-\frac{1}{8\pi r}\int_{(2n-2)\Delta t}^{2n\Delta t} \delta[(\tau-(t-\frac{r}{c})]\left(\frac{\tau-t_{2n-2}}{\Delta t}\right) d\tau$$

olarak yazılabilir. $t = 2k\Delta t$ olduğu gözönüne alınarak,

$$U_{QF}^{2k-2n+2} = \frac{1}{8\pi r}\{\left(\frac{t-\frac{r}{c}-t_{2n-2}}{\Delta t}\right)^2 H[(2k-2n+2)\Delta t-\frac{r}{c}]$$

$$-\left(\frac{t-\frac{r}{c}-t_{2n-2}}{\Delta t}\right)^2 H[(2k-2n)\Delta t-\frac{r}{c}]\}$$

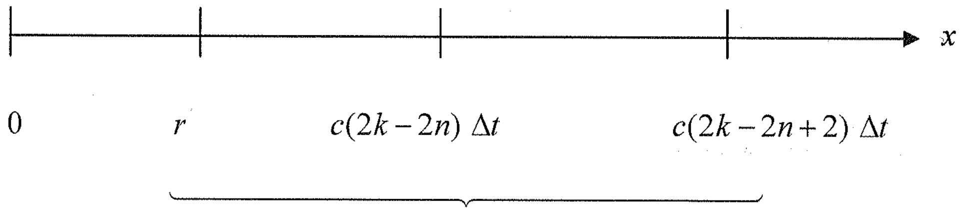
$$-\frac{1}{8\pi r}\{\left(\frac{t-\frac{r}{c}-t_{2n-2}}{\Delta t}\right) H[(2k-2n+2)\Delta t-\frac{r}{c}]$$

$$-\left(\frac{t-\frac{r}{c}-t_{2n-2}}{\Delta t}\right) H[(2k-2n)\Delta t-\frac{r}{c}]\}.$$

olarak elde edilir.

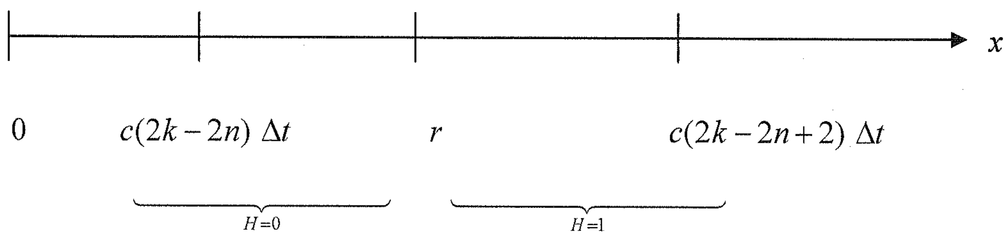
Üç farklı durum için inceleyelim:

1) $r < c(2k-2n)\ \Delta t$



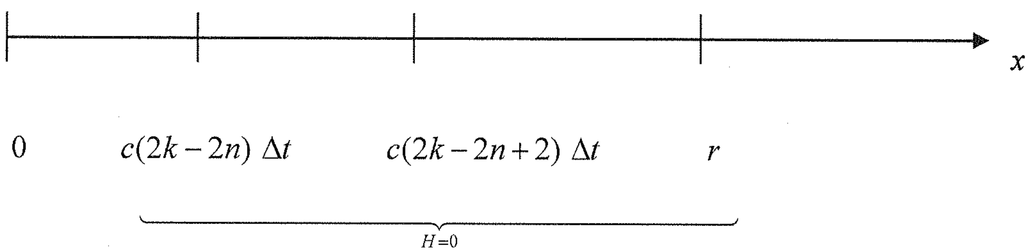
$$H = 1 \text{ ve dolayısıyla } U_{QF}^{2k-2n+2} = 0 \text{ olur.}$$

2) $c(2k-2n)\ \Delta t \leq r < c(2k-2n+2)\ \Delta t$



$$U_{QF}^{2k-2n+2} = \frac{1}{8\pi r \Delta t^2}\left(t - \frac{r}{c} - t_{2n-2}\right)^2 - \frac{1}{8\pi r \Delta t}\left(t - \frac{r}{c} - t_{2n-2}\right).$$

3) $r \geq c(2k-2n+2)\ \Delta t$



ve bu nedenle, $U_{QF}^{2k-2n+2} = 0$ olur.

$$U_{QM}^{2k-2n+2} = \int_{(2n-2)\Delta t}^{2n\Delta t} u^*\left(x^i, \tau; x, 2k\Delta t\right) M_{QM}(\tau)\ d\tau \tag{4.6}$$

$$U_{QM}^{2k-2n+2} = \int_{(2n-2)\Delta t}^{2n\Delta t} \frac{1}{4\pi r}\delta\left[(t-\tau) - \frac{r}{c}\right].\left[-\left(\frac{\tau - t_{2n-2}}{\Delta t}\right)^2 + 2\left(\frac{\tau - t_{2n-2}}{\Delta t}\right)\right] d\tau$$

$$U_{QM}^{2k-2n+2} = -\frac{1}{4\pi r} \int_{(2n-2)\Delta t}^{2n\Delta t} \delta\, [(\tau - (t - \frac{r}{c})]. \left(\frac{\tau - t_{2n-2}}{\Delta t} \right)^2 d\tau$$

$$+ \frac{1}{2\pi r} \int_{(2n-2)\Delta t}^{2n\Delta t} \delta\, [(\tau - (t - \frac{r}{c})]. \left(\frac{\tau - t_{2n-2}}{\Delta t} \right) d\tau$$

$$U_{QM}^{2k-2n+2} = -\frac{1}{4\pi r} \{ \left(\frac{t - \frac{r}{c} - t_{2n-2}}{\Delta t} \right)^2 H[(2k-2n+2)\,\Delta t - \frac{r}{c}]$$

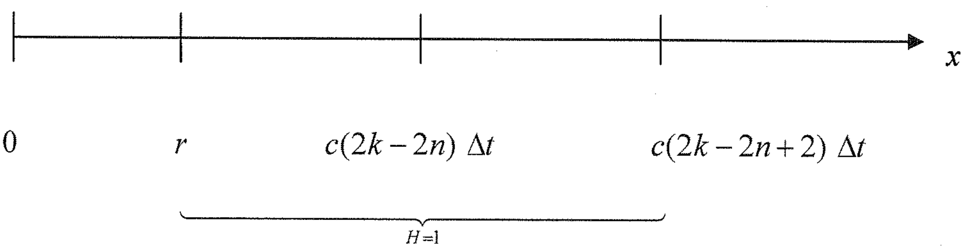
$$- \left(\frac{t - \frac{r}{c} - t_{2n-2}}{\Delta t} \right)^2 H[(2k-2n)\,\Delta t - \frac{r}{c}] \}$$

$$+ \frac{1}{2\pi r} \{ \left(\frac{t - \frac{r}{c} - t_{2n-2}}{\Delta t} \right) H[(2k-2n+2)\,\Delta t - \frac{r}{c}]$$

$$- \left(\frac{t - \frac{r}{c} - t_{2n-2}}{\Delta t} \right)^2 H[(2k-2n)\,\Delta t - \frac{r}{c}] \}.$$

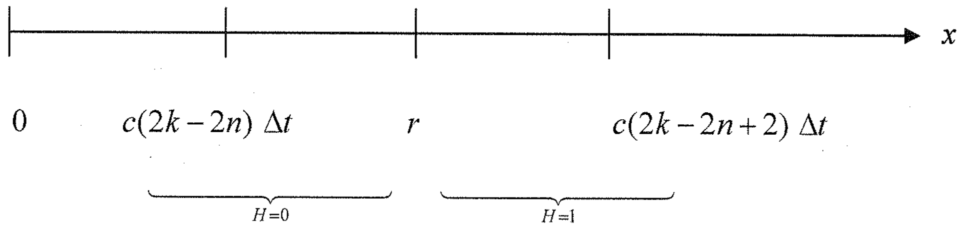
Üç farklı durum aşağıda incelenmiştir:

1) $r < c(2k-2n)\ \Delta t$



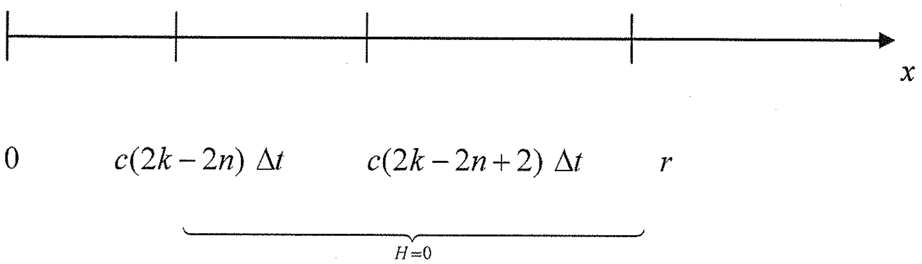
ve dolayısıyla, $U_{QM}^{2k-2n+2} = 0$ olur.

2) $c(2k-2n)\ \Delta t \le r < c(2k-2n+2)\ \Delta t$



$$U_{QM}^{2k-2n+2} = \frac{1}{4\pi r \Delta t^2}(t - \frac{r}{c} - t_{2n-2})^2 + \frac{1}{2\pi r \Delta t}(t - \frac{r}{c} - t_{2n-2})$$

3) $r \ge c(2k-2n+2)\ \Delta t$



ve buna bağlı olarak, $U_{QM}^{2k-2n+2} = 0$ olur.

$$U_{QB}^{2k-2n+2} = \int_{(2n-2)\Delta t}^{2n\Delta t} u^*\left(x^i, \tau; x, 2n\Delta t\right) M_{QB}(\tau)\, d\tau \tag{4.7}$$

$$U_{QB}^{2k-2n+2} = \int_{(2n-2)\Delta t}^{2n\Delta t} \frac{1}{4\pi r} \delta[(t-\tau) - \frac{r}{c}].[\frac{1}{2}\left(\frac{\tau - t_{2n-2}}{\Delta t}\right)^2 - \frac{3}{2}\left(\frac{\tau - t_{2n-2}}{\Delta t}\right) + 1]\, d\tau$$

$$U_{QB}^{2k-2n+2} = \frac{1}{8\pi r} \int_{(2n-2)\Delta t}^{2n\Delta t} \delta\ [(\tau - (t - \frac{r}{c})].\left(\frac{\tau - t_{2n-2}}{\Delta t}\right)^2 d\tau$$

$$- \frac{3}{8\pi r} \int_{(2n-2)\Delta t}^{2n\Delta t} \delta\ [(\tau - (t - \frac{r}{c})].\left(\frac{\tau - t_{2n-2}}{\Delta t}\right) d\tau$$

$$+ \frac{1}{4\pi r} \int_{(2n-2)\Delta t}^{2n\Delta t} \delta\ [(\tau - (t - \frac{r}{c})]\, d\tau$$

$$U_{QB}^{2k-2n+2} = \frac{1}{8\pi r}\{\left(\frac{t-\frac{r}{c}-t_{2n-2}}{\Delta t}\right)^2 H[(2k-2n+2)\Delta t-\frac{r}{c}]$$

$$-\left(\frac{t-\frac{r}{c}-t_{2n-2}}{\Delta t}\right)^2 H[(2k-2n)\Delta t-\frac{r}{c}]\}$$

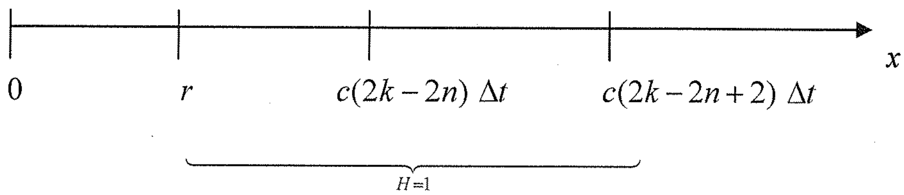
$$-\frac{3}{8\pi r}\{\left(\frac{t-\frac{r}{c}-t_{2n-2}}{\Delta t}\right) H[(2k-2n+2)\Delta t-\frac{r}{c}]$$

$$-\left(\frac{t-\frac{r}{c}-t_{2n-2}}{\Delta t}\right) H[(2k-2n)\Delta t-\frac{r}{c}]\}$$

$$+\frac{1}{4\pi r}\{H[(2k-2n+2)\Delta t-\frac{r}{c}]-H[(2k-2n)\Delta t-\frac{r}{c}]\}.$$

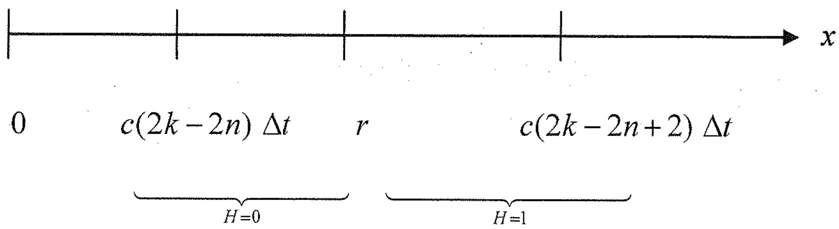
Üç farklı durum için inceleyelim:

1) $r < c(2k-2n)\ \Delta t$



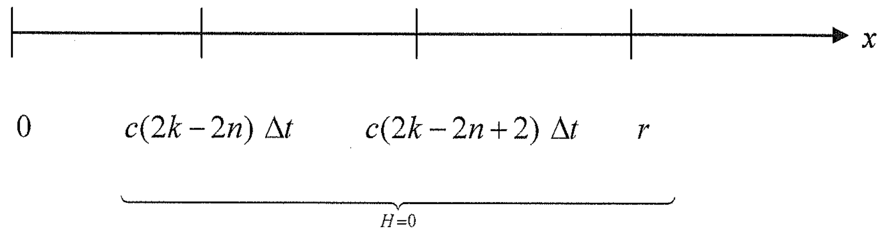
ve buradan $U_{QB}^{2k-2n+2} = 0$ olur.

2) $c(2k-2n)\ \Delta t \le r < c(2k-2n+2)\ \Delta t$



$$U_{QB}^{2k-2n+2} = \frac{1}{8\pi r\Delta t^2}(t-\frac{r}{c}-t_{2n-2})^2 - \frac{3}{8\pi r\Delta t}(t-\frac{r}{c}-t_{2n-2}) + \frac{1}{4\pi r}$$

3) $r \geq c(2k-2n+2)\ \Delta t$



ve $U_{QB}^{2k-2n+2} = 0$ olur.

Akı çekirdeklerinde ileri noktadaki kuadratik interpolasyon fonksiyonu kullanılarak alınan integrale gelince;

$$Q_{QF}^{2k-2n+2} = \int_{(2n-2)\Delta t}^{2n\Delta t} q_{3B}^{*}\ M_{QF}(\tau)\,d\tau \tag{4.8}$$

$$Q_{QF}^{2k-2n+2} = \int_{(2n-2)\Delta t}^{2n\Delta t} \frac{\partial r}{\partial n}\{-\frac{1}{4\pi r^2}\ \delta\,[(t-\tau)-\frac{r}{c}]+\frac{1}{4\pi rc}\ \frac{\partial}{\partial \tau}\ \delta\,[(t-\tau)-\frac{r}{c}]\}$$
$$\{\frac{1}{2}\left(\frac{\tau-t_{2n-2}}{\Delta t}\right)^2-\frac{1}{2}\left(\frac{\tau-t_{2n-2}}{\Delta t}\right)\}d\tau$$

$$\begin{aligned} Q_{QF}^{2k-2n+2} = &-\frac{\partial r}{\partial n}\frac{1}{8\pi r^2}\int_{(2n-2)\Delta t}^{2n\Delta t} \delta\,[\tau-(t-\frac{r}{c})].\left(\frac{\tau-t_{2n-2}}{\Delta t}\right)^2 d\tau \\ &+\frac{\partial r}{\partial n}\frac{1}{8\pi r^2}\int_{(2n-2)\Delta t}^{2n\Delta t} \delta\,[\tau-(t-\frac{r}{c})].\left(\frac{\tau-t_{2n-2}}{\Delta t}\right) d\tau \\ &+\frac{\partial r}{\partial n}\frac{1}{8\pi rc}\int_{(2n-2)\Delta t}^{2n\Delta t} \dot{\delta}\,[\tau-(t-\frac{r}{c})].\left(\frac{\tau-t_{2n-2}}{\Delta t}\right)^2 d\tau \\ &-\frac{\partial r}{\partial n}\frac{1}{8\pi rc}\int_{(2n-2)\Delta t}^{2n\Delta t} \dot{\delta}\,[\tau-(t-\frac{r}{c})].\left(\frac{\tau-t_{2n-2}}{\Delta t}\right) d\tau \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Q_{QF}^{2k-2n+2} = &-\frac{\partial r}{\partial n}\frac{1}{8\pi r^2}\{\left(\frac{t-\frac{r}{c}-t_{2n-2}}{\Delta t}\right)^2 H[(2k-2n+2)\Delta t-\frac{r}{c}] \\ &-\left(\frac{t-\frac{r}{c}-t_{2n-2}}{\Delta t}\right)^2 H[(2k-2n)\Delta t-\frac{r}{c}]\} \end{aligned}$$

$$+\frac{\partial r}{\partial n}\frac{1}{8\pi r^{2}}\{\left(\frac{t-\frac{r}{c}-t_{2n-2}}{\Delta t}\right)H[(2k-2n+2)\Delta t-\frac{r}{c}]$$

$$-\left(\frac{t-\frac{r}{c}-t_{2n-2}}{\Delta t}\right)H[(2k-2n)\Delta t-\frac{r}{c}]\}$$

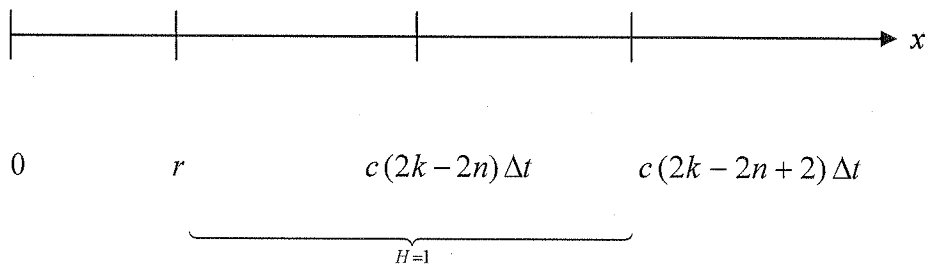
$$-\frac{\partial r}{\partial n}\frac{1}{4\pi rc}\{\left(\frac{t-\frac{r}{c}-t_{2n-2}}{\Delta t}\right)H[(2k-2n+2)\Delta t-\frac{r}{c}]$$

$$-\left(\frac{t-\frac{r}{c}-t_{2n-2}}{\Delta t}\right)H[(2k-2n)\Delta t-\frac{r}{c}]\}$$

$$+\frac{\partial r}{\partial n}\frac{1}{8\pi rc\Delta t}\{(H[(2k-2n+2)\Delta t-\frac{r}{c}]-(H[(2k-2n)\Delta t-\frac{r}{c}]\}.$$

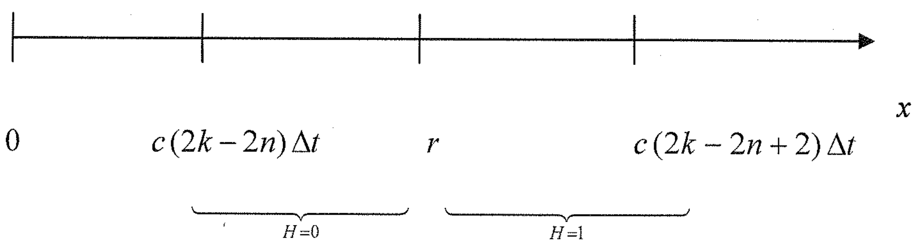
Üç farklı durm için inceleyelim:

1) $r<c(2k-2n)\Delta t$



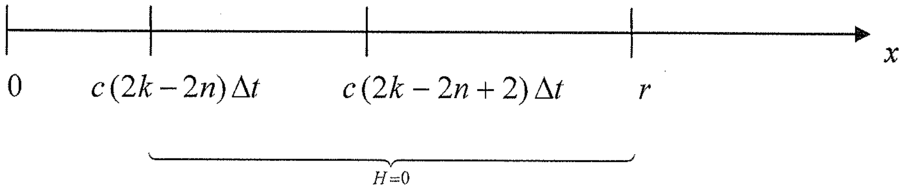
$$Q_{QF}^{2k-2n+2}=0.$$

2) $c(2k-2n)\Delta t<r<c(2k-2n+2)\Delta t$



$$Q_{QF}^{2k-2n+2}=-\frac{\partial r}{\partial n}\frac{1}{8\pi r^2}.\left(\frac{t-\frac{r}{c}-t_{2n-2}}{\Delta t}\right)^2+\frac{\partial r}{\partial n}\frac{1}{8\pi r^2}.\left(\frac{t-\frac{r}{c}-t_{2n-2}}{\Delta t}\right)$$
$$-\frac{\partial r}{\partial n}\frac{1}{4\pi rc}.\left(\frac{t-\frac{r}{c}-t_{2n-2}}{\Delta t}\right)+\frac{\partial r}{\partial n}\frac{1}{8\pi rc\Delta t}$$

3) $c(2k-2n+2)\Delta t<r$



$Q_{QF}^{2k-2n+2}=0$ olur.

$$Q_{QM}^{2k-2n+2}=\int_{(2n-2)\Delta t}^{2n\Delta t} q_{3B}^{*}M_{QM}(\tau)d\tau \tag{4.9}$$

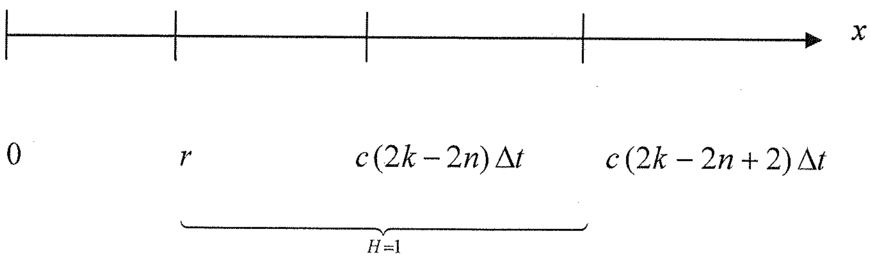
$$Q_{QM}^{2k-2n+2}=\int_{(2n-2)\Delta t}^{2n\Delta t}\frac{\partial r}{\partial n}\left\{-\frac{1}{4\pi r^2}\delta\left[(t-\tau)-\frac{r}{c}\right]+\frac{1}{4\pi rc}\frac{\partial}{\partial\tau}\delta\left[(t-\tau)-\frac{r}{c}\right]\right\}$$
$$.\{-\left(\frac{\tau-t_{2n-2}}{\Delta t}\right)^2+2\left(\frac{\tau-t_{2n-2}}{\Delta t}\right)\}d\tau$$

$$Q_{QM}^{2k-2n+2}=\frac{\partial r}{\partial n}\frac{1}{4\pi r^2}\int_{(2n-2)\Delta t}^{2n\Delta t}\delta\,[\tau-(t-\frac{r}{c})].\left(\frac{\tau-t_{2n-2}}{\Delta t}\right)^2 d\tau$$
$$-\frac{\partial r}{\partial n}\frac{1}{2\pi r^2}\int_{(2n-2)\Delta t}^{2n\Delta t}\delta\,[\tau-(t-\frac{r}{c})].\left(\frac{\tau-t_{2n-2}}{\Delta t}\right)d\tau$$
$$-\frac{\partial r}{\partial n}\frac{1}{4\pi rc}\int_{(2n-2)\Delta t}^{2n\Delta t}\dot{\delta}\,[\tau-(t-\frac{r}{c})].\left(\frac{\tau-t_{2n-2}}{\Delta t}\right)^2 d\tau$$
$$+\frac{\partial r}{\partial n}\frac{1}{2\pi rc}\int_{(2n-2)\Delta t}^{2n\Delta t}\dot{\delta}\,[\tau-(t-\frac{r}{c})].\left(\frac{\tau-t_{2n-2}}{\Delta t}\right)d\tau$$

$$
\begin{aligned}
Q_{QM}^{2k-2n+2} = \frac{\partial r}{\partial n}\frac{1}{4\pi r^2}\{ & \left(\frac{t-\frac{r}{c}-t_{2n-2}}{\Delta t}\right)^2 H[(2k-2n+2)\Delta t-\frac{r}{c}] \\
& -\left(\frac{t-\frac{r}{c}-t_{2n-2}}{\Delta t}\right)^2 H[(2k-2n)\Delta t-\frac{r}{c}]\} \\
-\frac{\partial r}{\partial n}\frac{1}{2\pi r^2}\{ & \left(\frac{t-\frac{r}{c}-t_{2n-2}}{\Delta t}\right) H[(2k-2n+2)\Delta t-\frac{r}{c}] \\
& -\left(\frac{t-\frac{r}{c}-t_{2n-2}}{\Delta t}\right) H[(2k-2n)\Delta t-\frac{r}{c}]\} \\
+\frac{\partial r}{\partial n}\frac{1}{2\pi rc}\{ & \left(\frac{t-\frac{r}{c}-t_{2n-2}}{\Delta t}\right) H[(2k-2n+2)\Delta t-\frac{r}{c}] \\
& -\left(\frac{t-\frac{r}{c}-t_{2n-2}}{\Delta t}\right) H[(2k-2n)\Delta t-\frac{r}{c}]\} \\
-\frac{\partial r}{\partial n}\frac{1}{2\pi rc\Delta t}\{ & H[(2k-2n+2)\Delta t-\frac{r}{c}]-H[(2k-2n)\Delta t-\frac{r}{c}]\}.
\end{aligned}
$$

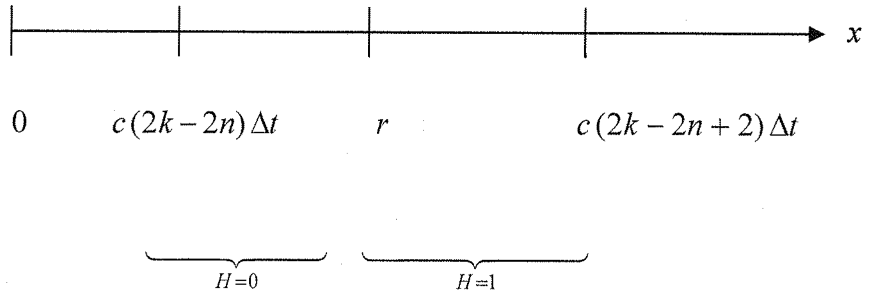
Üç farklı durum için inceleyelim:

1) $r < c(2k-2n)\Delta t$



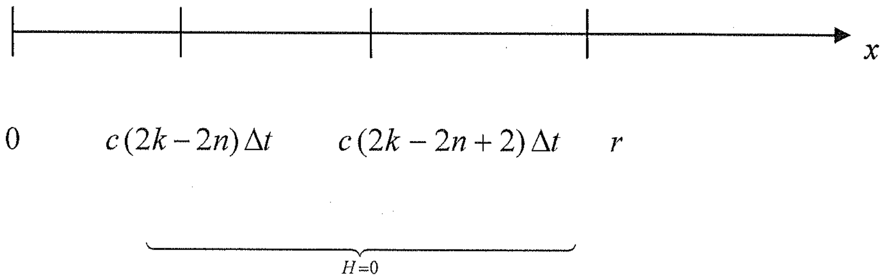
$Q_{QM}^{2k-2n+2} = 0$ olur.

2) $c(2k-2n)\Delta t < r < c(2k-2n+2)\Delta t$



$$Q_{QM}^{2k-2n+2} = \frac{\partial r}{\partial n}\frac{1}{4\pi r^2}\cdot\left(\frac{t-\frac{r}{c}-t_{2n-2}}{\Delta t}\right)^2 - \frac{\partial r}{\partial n}\frac{1}{2\pi r^2}\cdot\left(\frac{t-\frac{r}{c}-t_{2n-2}}{\Delta t}\right)$$
$$+\frac{\partial r}{\partial n}\frac{1}{2\pi rc}\cdot\left(\frac{t-\frac{r}{c}-t_{2n-2}}{\Delta t}\right) - \frac{\partial r}{\partial n}\frac{1}{2\pi rc\Delta t} .$$

3) $c(2k-2n+2)\Delta t < r$



$Q_{QM}^{2k-2n+2} = 0$ olur.

$$Q_{QB}^{2k-2n+2} = \int_{(2n-2)\Delta t}^{2n\Delta t} q_{3B}^{*}\, M_{QB}(\tau)\, d\tau \tag{4.10}$$

$$Q_{QB}^{2k-2n+2} = \int_{(2n-2)\Delta t}^{2n\Delta t} \frac{\partial r}{\partial n}\,\{-\frac{1}{4\pi r^2}\delta\,[(t-\tau)-\frac{r}{c}] + \frac{1}{4\pi rc}\frac{\partial}{\partial \tau}\delta\,[(t-\tau)-\frac{r}{c}]\}$$
$$\cdot\{\frac{1}{2}\left(\frac{\tau-t_{2n-2}}{\Delta t}\right)^2 - \frac{3}{2}\left(\frac{\tau-t_{2n-2}}{\Delta t}\right) + 1\}\, d\tau$$

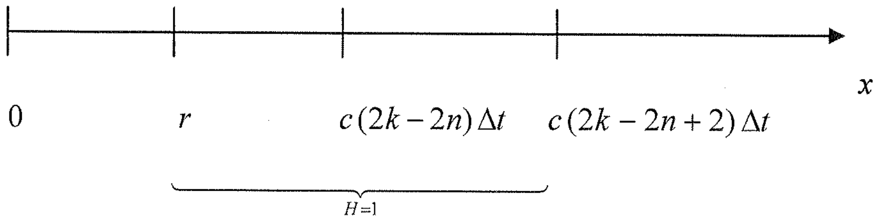
$$
\begin{aligned}
Q_{QB}^{2k-2n+2} = & -\frac{\partial r}{\partial n}\frac{1}{8\pi r^2}\int_{(2n-2)\Delta t}^{2n\Delta t} \delta\,[\tau-(t-\frac{r}{c})].\left(\frac{\tau-t_{2n-2}}{\Delta t}\right)^2 d\tau \\
& +\frac{\partial r}{\partial n}\frac{3}{8\pi r^2}\int_{(2n-2)\Delta t}^{2n\Delta t} \delta\,[\tau-(t-\frac{r}{c})].\left(\frac{\tau-t_{2n-2}}{\Delta t}\right) d\tau \\
& -\frac{\partial r}{\partial n}\frac{1}{4\pi r^2}\int_{(2n-2)\Delta t}^{2n\Delta t} \delta\,[\tau-(t-\frac{r}{c})]\,d\tau \\
& +\frac{\partial r}{\partial n}\frac{1}{8\pi rc}\int_{(2n-2)\Delta t}^{2n\Delta t} \dot{\delta}\,[\tau-(t-\frac{r}{c})].\left(\frac{\tau-t_{2n-2}}{\Delta t}\right)^2 d\tau \\
& -\frac{\partial r}{\partial n}\frac{3}{8\pi rc}\int_{(2n-2)\Delta t}^{2n\Delta t} \dot{\delta}\,[\tau-(t-\frac{r}{c})].\left(\frac{\tau-t_{2n-2}}{\Delta t}\right) d\tau \\
& +\frac{\partial r}{\partial n}\frac{1}{4\pi rc}\int_{(2n-2)\Delta t}^{2n\Delta t} \dot{\delta}\,[\tau-(t-\frac{r}{c})]\,d\tau
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
Q_{QB}^{2k-2n+2} = & -\frac{\partial r}{\partial n}\frac{1}{8\pi r^2}\{\left(\frac{t-\frac{r}{c}-t_{2n-2}}{\Delta t}\right)^2 H[(2k-2n+2)\,\Delta t-\frac{r}{c}] \\
& -\left(\frac{t-\frac{r}{c}-t_{2n-2}}{\Delta t}\right)^2 H[(2k-2n)\,\Delta t-\frac{r}{c}]\} \\
& +\frac{\partial r}{\partial n}\frac{3}{8\pi r^2}\{\left(\frac{t-\frac{r}{c}-t_{2n-2}}{\Delta t}\right) H[(2k-2n+2)\,\Delta t-\frac{r}{c}] \\
& -\left(\frac{t-\frac{r}{c}-t_{2n-2}}{\Delta t}\right) H[(2k-2n)\,\Delta t-\frac{r}{c}]\} \\
& -\frac{\partial r}{\partial n}\frac{1}{4\pi r^2}\{H[(2k-2n+2)\,\Delta t-\frac{r}{c}]-H[(2k-2n)\,\Delta t-\frac{r}{c}]\} \\
& -\frac{\partial r}{\partial n}\frac{1}{4\pi rc}\{\left(\frac{t-\frac{r}{c}-t_{2n-2}}{\Delta t}\right) H[(2k-2n+2)\,\Delta t-\frac{r}{c}] \\
& -\left(\frac{t-\frac{r}{c}-t_{2n-2}}{\Delta t}\right) H[(2k-2n)\,\Delta t-\frac{r}{c}]\}
\end{aligned}
$$

$$+\frac{\partial r}{\partial n}\frac{3}{8\pi rc\Delta t}\{(H[(2k-2n+2)\Delta t-\frac{r}{c}]-(H[(2k-2n)\Delta t-\frac{r}{c}]\}.$$

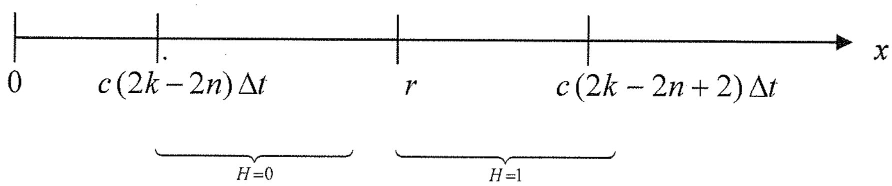
Üç ayrı durum için inceleyelim:

1) $r < c(2k-2n)\Delta t$



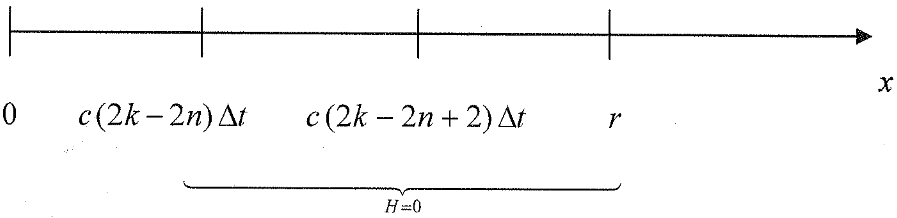
$$Q_{QB}^{2k-2n+2} = 0.$$

2) $c(2k-2n)\Delta t < r < c(2k-2n+2)\Delta t$



$$Q_{QB}^{2k-2n+2} = -\frac{\partial r}{\partial n}\frac{1}{8\pi r^2}.\left(\frac{t-\frac{r}{c}-t_{2n-2}}{\Delta t}\right)^2+\frac{\partial r}{\partial n}\frac{3}{8\pi r^2}.\left(\frac{t-\frac{r}{c}-t_{2n-2}}{\Delta t}\right)$$
$$-\frac{\partial r}{\partial n}\frac{1}{4\pi rc}.\left(\frac{t-\frac{r}{c}-t_{2n-2}}{\Delta t}\right)+\frac{\partial r}{\partial n}\frac{3}{8\pi rc\Delta t}-\frac{\partial r}{\partial n}\frac{1}{4\pi r^2}$$

3) $c(2k-2n+2)\Delta t < r$



$$Q_{QB}^{2k-2n+2} = 0$$

olur.

Bu bölümde üç boyutlu dalga denkleminin sınır elemanları formülasyonuna ait potansiyel ve akı ifadeleri sabit, lineer ve kuadratik interpolasyon fonksiyonu yaklaşımlarıyla çıkarılmıştır. Bunlardan sabit ve lineer interpolasyonlara dayalı ifadeler literatürde var olanlarla uyum içindedirler. Kuadratik zaman değişimi öngörülerek elde edilen fonksiyonlar ise ilk defa sunulmuştur.

Şimdiye kadar zaman integralleri alınırken skaler dalga denklemleri göz önüne alındı. Gelecek bölümde ise daha karmaşık ama daha gerçekçi olan üç boyutlu elastodinamik dalga denklemine ilişkin fonksiyonlar ele alınacaktır.

5. YER DEĞİŞTİRME VE GERİLİM ÇEKİRDEKLERİ-SABİT VE LİNEER DEĞİŞİM

5.1 Elastodinamik 3B Çekirdeklerin Sabit ve Lineer İnterpolasyon Fonksiyonları Yardımıyla Elde Edilişi

Bu bölümde diğer bölümlerde farklı olarak elastodinamik üç boyutlu dalga denkleminin SIEM formülasyonuna ait yer değiştirme (önceki bölümlerdeki potansiyele karşılık gelir) ve gerilim (önceki bölümlerdeki akıya karşılık gelir) çekirdekleri sabit ve lineer interpolasyon yaklaşımlarıyla çıkarılacaktır.

Sabit interpolasyon fonksiyonu yaklaşımıyla çekirdeklerin çıkarılışı:

Üç boyutlu elastodinamik fundamental çözüm,

$$\begin{aligned} u_{lk}^{*} &= \frac{1}{4\pi\rho r}\{\frac{t-\tau}{r^2}(3r_{,l}r_{,k}-\delta_{\ell k})\,[H(t-\tau-\frac{r}{c_1})-H(t-\tau-\frac{r}{c_2})] \\ &+r_{,l}\,r_{,k}\,[\frac{1}{c_1^2}\,\delta[(t-\tau-\frac{r}{c_1})-\frac{1}{c_2^2}\,\delta[(t-\tau-\frac{r}{c_2})]+\frac{\delta_{\ell k}}{c_2^2}\,\delta\,[(t-\tau-\frac{r}{c_2})\}. \end{aligned} \tag{5.1}$$

Burada c_1 ve c_2 sırasıyla P- ve S- dalgalarının hızını, $\delta_{\ell k}$ Kronecker deltayı ve $r_{,l}$ yönlü türevi $(r_{,l}=\dfrac{\partial r}{\partial x_l})$ simgeler.

$u_{lk}^{*}(x,\tau)=u_{lk}^{*}(x).\mu^{m}(\tau)$ şeklinde interpole edilirse, $\mu^{m}(\tau)$ sabit interpolasyon fonksiyonu olmak üzere, zamana bağlı integrasyon aşağıda verildiği gibi yapılır:

$$U_{lk}^{nm} = \int_0^t u_{lk}^{*}(x^{i},\tau;x,t)\;\mu^{m}(\tau)\,d\tau \tag{5.2}$$

τ_{m-1} ve τ_m zaman aralıklarında,

$$U_{lk}^{nm} = \frac{1}{4\pi\rho r} \{(\frac{3c_2^{\ 2}}{r^2}\tau_3 + \frac{c_2^{\ 2}}{c_1^{\ 2}}T_1 - T_2) r_{,l}\ r_{,k} + (T_2 - \frac{c_2^{\ 2}}{r^2}T_3)\ \delta_{lk}\}$$

olur.

$$T_\alpha = \int_{\tau_{m-1}}^{\tau_m} \delta(\tau_\alpha^* - \tau)\, d\tau = H(\tau_\alpha^* - \tau_{m-1}) - H(\tau_\alpha^* - \tau_m), \quad \alpha = 1,2$$

$$T_3 = \int_{\tau_{m-1}}^{\tau_m} (t-\tau)\, H[(\tau_1^* - \tau) - H(\tau_2^* - \tau)]\, d\tau$$

$$\tau_\alpha^* = t_n - r / c_\alpha$$

1) $\tau_\alpha^* < \tau_{m-1}$ ise

$$\int_{\tau_{m-1}}^{\tau_m} (t-\tau)\, H\left[(\tau_1^* - \tau)\right] d\tau = 0.$$

2) $\tau_\alpha^* > \tau_{m-1}$ ise

$$\int_{\tau_{m-1}}^{\tau_m} (t-\tau)\, H[(\tau_1^* - \tau)]\, d\tau \ = \int_{\tau_{m-1}}^{\tau_m} (t-\tau)\{H[(\tau_1^* - \tau)] - H[(\tau_2^* - \tau)]\}\ d\tau$$

$$= (t\tau) - \frac{\tau^2}{2}\Bigg|_{\tau_{m-1}}^{\tau_m} = t\,\tau_m - \frac{\tau_m^2}{2} - t\,\tau_{m-1} + \frac{\tau_{m-1}^2}{2} = t\,(\tau_m - \tau_{m-1}) - \frac{(\tau_m^2 - \tau_{m-1}^2)}{2}$$

$$= (\tau_m - \tau_{m-1}) - \frac{(2t - \tau_m + \tau_{m-1})}{2} = \Delta t\,\frac{(2t - 2m\Delta t + \Delta t)}{2} = \Delta t^2 (n - m + \frac{1}{2}).$$

3) $\tau_{m-1} \le \tau_\alpha^* < \tau_m$ ise

$$\int_{\tau_{m-1}}^{\tau_m} (t-\tau)\ H\left[(\tau_\alpha^* - \tau)\right] d\tau = (t\tau - \tau^2)\Big|_{\tau_{m-1}}^{\tau_m}$$

$$= (t\tau - \tau^2)\Big|_{t_n - \frac{r}{c_\alpha}}^{\tau_m} = t\,\tau_m - \frac{\tau_m^2}{2} - t\,(t_n - \frac{r}{c_\alpha}) + \frac{1}{2}\,(t_n - \frac{r}{c_\alpha})^2$$

$$= t\;m\Delta t - \frac{1}{2}\;m^2\Delta t^2 - t\,(t_n - \frac{r}{c_\alpha}) + \frac{1}{2}\,(n^2\Delta t^2 - \frac{2n\Delta tr}{c_\alpha} + \frac{r^2}{c_\alpha^2})$$

$$= nm\Delta t^2 - \frac{1}{2}\;m^2\Delta t^2 - n^2\Delta t^2 + \frac{n\Delta tr}{c_\alpha} + \frac{1}{2}(n^2\Delta t^2 - \frac{2n\Delta tr}{c_\alpha} + \frac{r^2}{c_\alpha^2})$$

$$= \frac{(\Delta t)^2}{2}\;(n - m + 1)^2 - \frac{r^2}{2c_\alpha^2}\,.$$

Pertürbasyon etkisinin alan noktasına ulaşıp ulaşmamasına bağlı olarak altı farklı durum için U_{tk}^{nm} içindeki T_α'ların değerlerini araştıracağız:

Durum 1: $0 < \tau_1^* < \tau_{m-1}$ ve $0 < \tau_2^* < \tau_1^* < \tau_{m-1}$

$$0 < t_n - \frac{r}{c_1} < \tau_{m-1} \quad \text{ve} \quad 0 < t_n - \frac{r}{c_2} < t_n - \frac{r}{c_1} < \tau_{m-1}$$

$$T_1 = \int_{\tau_{m-1}}^{\tau_m} \delta\,(t_n - \frac{r}{c_1} - \tau)\,d\tau = \underbrace{H(\tau_1^* - \tau_{m-1})}_{=0} - \underbrace{H(\tau_1^* - \tau_m)}_{=0} = 0$$

$$T_2 = \int_{\tau_{m-1}}^{\tau_m} \delta(\tau_2^* - \tau)\,d\tau = \underbrace{H(\tau_2^* - \tau_{m-1})}_{=0} - \underbrace{H(\tau_2^* - \tau_m)}_{=0} = 0$$

$$T_3 = \int_{\tau_{m-1}}^{\tau_m} (t - \tau)\left[\underbrace{H(\tau_1^* - \tau)}_{=0} - \underbrace{H(\tau_2^* - \tau)}_{=0}]\,d\tau\right] = 0$$

Durum 2: $\tau_{m-1} < \tau_1^* < \tau_m$ ve $0 < \tau_2^* < \tau_{m-1}$

$$T_1 = \underbrace{H(\tau_1^* - \tau_{m-1})}_{=1} - \underbrace{H(\tau_1^* - \tau_m)}_{=0} \quad \Rightarrow T_1 = 1$$

$$T_2 = \underbrace{H(\tau_2^* - \tau_{m-1})}_{=0} - \underbrace{H(\tau_2^* - \tau_m)}_{=0} \quad \Rightarrow T_2 = 0$$

$$T_3 = (t\tau - \frac{\tau^2}{2})\Big|_{\tau_1^*}^{\tau_m} = t\;m\Delta t - \frac{1}{2}\;m^2\Delta t^2 - t\,(t_n - \frac{r}{c_1}) + \frac{1}{2}\,(t_n - \frac{r}{c_1})^2$$

$$T_3 = \frac{(\Delta t)^2}{2}\;(n - m + 1)^2 - \frac{r^2}{2c_1^2}$$

Durum 3: $(\tau_{m-1} < \tau_1^* < \tau_m)$ ve $(\tau_{m-1} < \tau_2^* < \tau_m)$

$$T_1 = \underbrace{H(\tau_1^* - \tau_{m-1})}_{=1} - \underbrace{H(\tau_1^* - \tau_m)}_{=0} \Rightarrow T_1 = 1$$

$$T_2 = \underbrace{H(\tau_2^* - \tau_{m-1})}_{=1} - \underbrace{H(\tau_2^* - \tau_m)}_{=0} \Rightarrow T_2 = 1$$

$$T_3 = \int_{\tau_{m-1}}^{\tau_m} (t-\tau) H(\tau_1^* - \tau)\, d\tau \; - \int_{\tau_{m-1}}^{\tau_m} (t-\tau) H(\tau_2^* - \tau)\, d\tau$$

$$T_3 = (t\tau - \frac{\tau^2}{2})\Big|_{\tau_1^*}^{\tau_m} - (t\tau - \frac{\tau^2}{2})\Big|_{\tau_2^*}^{\tau_m}.$$

Sınırlar yerleştirilip düzenlenirse, $T_3 = \frac{r^2}{2}(\frac{1}{c_2^2} - \frac{1}{c_1^2})$.

Durum 4: $\tau_m < \tau_1^*$ ve $0 < \tau_2^* < \tau_{m-1}$

$$T_1 = \underbrace{H(\tau_1^* - \tau_{m-1})}_{=0} - \underbrace{H(\tau_1^* - \tau_m)}_{=0} \Rightarrow T_1 = 0$$

$$T_2 = \underbrace{H(\tau_2^* - \tau_{m-1})}_{=0} - \underbrace{H(\tau_2^* - \tau_m)}_{=0} \Rightarrow T_2 = 0$$

$$T_3 = (t\tau - \frac{\tau^2}{2})\Big|_{\tau_1^*}^{\tau_m}.$$

Buradan,

$$T_3 = (\Delta t)^2 (n - m + \frac{1}{2}) \text{ olur.}$$

Durum 5: $\tau_m < \tau_1^*$ ve $\tau_{m-1} < \tau_2^* < \tau_m$

$$T_1 = \underbrace{H(\tau_1^* - \tau_{m-1})}_{=0} - \underbrace{H(\tau_1^* - \tau_m)}_{=0} \Rightarrow T_1 = 0$$

$$T_2 = \underbrace{H(\tau_2^* - \tau_{m-1})}_{=1} - \underbrace{H(\tau_2^* - \tau_m)}_{=0} \Rightarrow T_2 = 1$$

$$T_3 = \int_{\tau_{m-1}}^{\tau_m} \underbrace{(t-\tau)\, H(\tau_1^* - \tau) d\tau}_{=0} - \int_{\tau_{m-1}}^{\tau_m} (t-\tau)\, H(\tau_2^* - \tau)\, d\tau = (t\tau - \frac{\tau^2}{2})\Big|_{\tau_2^*}^{\tau_m}$$

$$T_3 = t\,\tau_m - \frac{\tau_m^2}{2} - t\,(t_n - \frac{r}{c_2}) + \frac{1}{2}\,(t_n - \frac{r}{c_1})^2$$

$$T_3 = t\,m\,\Delta t - \frac{1}{2} m^2 \Delta t^2 - t\,(t_n - \frac{r}{c_2}) + \frac{1}{2}\,(n\Delta t - \frac{r}{c_2})^2$$

$$T_3 = nm\,\Delta t^{\,2} - \frac{1}{2} m^2 \Delta t^2 - n^2 \Delta t^2 + \frac{n\Delta t r}{c_2} + n^2 \Delta t^2 - \frac{1}{2}\frac{2n\Delta t r}{c_2} + \frac{r^2}{2c_2^2}$$

$$T_3 = \Delta t^2\,[(n - m + \frac{1}{2}) - \frac{1}{2}(n - m + 1)^2] + \frac{r^2}{2c_2^2}$$

Durum 6: $\tau_m < \tau_1^*$ ve $\tau_m < \tau_2^*$

Tüm $H = 0$ olur, sonuçta $T_1 = 0, T_2 = 0,\ T_3 = 0$.

Gerilim için sabit interpolasyon fonksiyonu kullanılırsa;

$$Q_{\ell k}^{nm} = \frac{1}{4\pi r^2}\,[\,r_{,l}\,r_{,k}\ \frac{\partial r}{\partial n}\,K_1 + (\delta_{lk}\,\frac{\partial r}{\partial n} + r_{,k} n_l)\,K_2 + r_{,l}\,n_k\,K_3\,] \tag{5.3}$$

$$Q_{lk}^{nm} = \int_{\Delta t_m} q_{lk}^*\ \mu^m(\tau) \tag{5.3a}$$

q_{lk}^* elastodinamik gerilim fundamental çözümü aşağıdaki gibidir (Sarı, 2000):

$$\begin{aligned} q_{lk}^* = \frac{1}{4\pi r^2}\{ & \frac{b^1}{r^2}\left[\left(\delta_{lk} - 5r_{,l}r_{,k}\right)\frac{\partial r}{\partial n} + r_{,l}n_k + r_{,k}n_l\right] \\ & + 2b^2\left[\left(6r_{,l}r_{,k} - \delta_{lk}\right)\frac{\partial r}{\partial n} - r_{,l}n_k - r_{,k}n_l\right] + \frac{2b^3 r}{c_2} r_{,l}r_{,k}\frac{\partial r}{\partial n} \\ & - b^4\left(1 - \frac{2c_2^2}{c_1^2}\right) r_{,l}n_k - b^5\left(\delta_{lk}\frac{\partial r}{\partial n} + r_{,k}n_l\right)\} \end{aligned}$$

$$K_1 = -\frac{5A_1}{r^2} + 12\,A_2 + \frac{2r\,A_3}{c_2},\ K_2 = \frac{A_1}{r^2} - 2\,A_2 - A_5,\ K_3 = \frac{A_1}{r^2} - 2\,A_2 - A_4\,(1 - 2\frac{c_2^{\,2}}{c_1^{\,2}}) \tag{5.3b}$$

$$A_\alpha = \int_{\Delta t_m} b^\alpha\,\mu^m(\tau)\ d\tau,\quad 1 \le \alpha \le 5 \tag{5.3c}$$

$$
\begin{aligned}
b^1 &= 6c_2^{\,2}\ (t-\tau)[H(t-\tau-\frac{r}{c_1})-H(t-\tau-\frac{r}{c_2})] \\
b^2 &= \delta\ (t-\tau-\frac{r}{c_2})-\frac{c_2^{\,2}}{c_1^{\,2}}\ \delta\ (t-\tau-\frac{r}{c_1}) \\
b^3 &= \dot{\delta}\ (t-\tau-\frac{r}{c_2})-\frac{c_2^{\,3}}{c_1^{\,3}}\ \dot{\delta}\ (t-\tau-\frac{r}{c_1}) \\
b^4 &= \delta\ (t-\tau-\frac{r}{c_1})-\frac{r}{c_1}\ \dot{\delta}\ (t-\tau-\frac{r}{c_1}) \\
b^5 &= \delta\ (t-\tau-\frac{r}{c_2})-\frac{r}{c_2}\ \dot{\delta}\ (t-\tau-\frac{r}{c_2})
\end{aligned}
\tag{5.3d}
$$

A_α integralleri, pertürbasyonun alan noktasına ulaşıp ulaşmaması ile ilgili olarak altı farklı durum için incelenir:

Durum 1: $0<\tau_1^*<\tau_{m-1}$ ve $0<\tau_1^*<\tau_2^*<\tau_{m-1}$

$$A_1=\int_{\tau_{m-1}}^{\tau_m} b^1\,\mu^m(\tau)\ d\tau=\int_{\tau_{m-1}}^{\tau_m} 6c_2^{\,2}\ (t-\tau)[H(t-\tau-\frac{r}{c_1})-H(t-\tau-\frac{r}{c_2})]d\tau$$

$$H(t-\tau-\frac{r}{c_1})=H\ (t-\frac{r}{c_1}-\tau)\Rightarrow H(\tau_1^*-\tau)=0, H(\tau_2^*-\tau)=0;\ A_1=0.$$

$$A_2=\int_{\tau_{m-1}}^{\tau_m} b^2\,\mu^m(\tau)\ d\tau=\int_{\tau_{m-1}}^{\tau_m}[\delta\ (t-\tau-\frac{r}{c_2})-\frac{c_2^{\,2}}{c_1^{\,2}}\ \delta\ (t-\tau-\frac{r}{c_1})]d\tau$$

$$A_2=[\underbrace{H(t-\tau_{m-1}-\frac{r}{c_2})}_{=0}-\underbrace{H(t-\tau_m-\frac{r}{c_2})}_{=0}]-\frac{c_2^{\,2}}{c_1^{\,2}}[\underbrace{H(t-\tau_{m-1}-\frac{r}{c_1})}_{=0}-\underbrace{H(t-\tau_m-\frac{r}{c_1})}_{=0}];\quad A_2=0$$

Yukarıdaki koşula göre A_3, A_4 ve A_5 integrallerinden gelen tüm H fonksiyonlarının değeri de 0 olur. Bu sebeple $A_3=0$, $A_4=0$ ve $A_5=0$.

Durum 2: $\tau_{m-1}<\tau_1^*<\tau_m$ ve $0<\tau_2^*<\tau_{m-1}$

Daha önceki T_1, T_2, T_3 incelemelerinde olduğu gibi:

$$A_1 = 6c_2^{\,2}(t\,\tau - \frac{\tau^2}{2})\Big|_{\tau_1^*}^{\tau_m} = 6c_2^{\,2}[\frac{(\Delta t)^2}{2}\,(n-m+1)^2 - \frac{r^2}{2c_1^{\,2}}].$$

$$A_2 = [\underbrace{H(t-\frac{r}{c_2}-\tau_{m-1})}_{=0} - \underbrace{H(t-\frac{r}{c_2}-\tau_m)}_{=0}] - \frac{c_2^{\,2}}{c_1^{\,2}}\,[\underbrace{H(t-\frac{r}{c_1}-\tau_{m-1})}_{=1} - \underbrace{H(t-\frac{r}{c_1}-\tau_m)}_{=0}] = -\frac{c_2^{\,2}}{c_1^{\,2}}$$

$$A_3 = \int_{\tau_{m-1}}^{\tau_m} b^3\;\; \mu^m(\tau)\; d\tau = \int_{\tau_{m-1}}^{\tau_m} [\dot{\delta}\;(t-\tau-\frac{r}{c_2}) - \frac{c_2^{\,3}}{c_1^{\,3}}\;\dot{\delta}\;(t-\tau-\frac{r}{c_1})]\; d\tau$$

$$A_3 = 0.$$

$$A_4 = [\underbrace{H(t-\frac{r}{c_1}-\tau_{m-1})}_{=1} - \underbrace{H(t-\frac{r}{c_1}-\tau_m)}_{=0}] = 1.$$

$$A_5 = \int_{\tau_{m-1}}^{\tau_m} b^5\;\; \mu^m(\tau)\; d\tau = \int_{\tau_{m-1}}^{\tau_m} [\delta\;(t-\tau-\frac{r}{c_2}) - \frac{r}{c_2}\;\dot{\delta}\;(t-\tau-\frac{r}{c_2})\,]\, d\tau$$

$$A_5 = [\underbrace{H(t-\frac{r}{c_2}-\tau_{m-1})}_{=0} - \underbrace{H(t-\frac{r}{c_2}-\tau_m)}_{=0}] = 0.$$

Durum 3: $\tau_{m-1} < \tau_1^* < \tau_m$ ve $\tau_{m-1} < \tau_2^* < \tau_m$

$$A_1 = 6c_2^{\,2}\left[(t\,\tau - \frac{\tau^2}{2})\Big|_{\tau_1^*}^{\tau_m} - (t\,\tau - \frac{\tau^2}{2})\Big|_{\tau_2^*}^{\tau_m}\right].$$

$$A_1 = 3c_2^{\,2}\, r^2\,(\frac{1}{c_2^{\,2}} - \frac{1}{c_1^{\,2}}) = 3\;(r^2 - 3\frac{c_2^{\,2}}{c_1^{\,2}})$$

$$A_2 = (1-0) - \frac{c_2^{\,2}}{c_1^{\,2}}\;(1-0) = 1 - \frac{c_2^{\,2}}{c_1^{\,2}} = \frac{c_1^{\,2} - c_2^{\,2}}{c_1^{\,2}}$$

$$A_3 = 0.$$

$$A_4 = (1-0) = 1.$$

$$A_5 = (1-0) = 1.$$

Durum 4: $\tau_m < \tau_1^*$ ve $0 < \tau_2^* < \tau_{m-1}$

$$A_1 = 6c_2^2\,(t\,\tau - \frac{\tau^2}{2})\Big|_{\tau_1^*}^{\tau_m} = 6c_2^2\Delta t^2\,(n - m + \frac{1}{2})$$

$A_2 = 1,\quad A_3 = 0,\quad A_4 = 0,\quad A_5 = 1$ olarak bulunur.

Durum 5: $\tau_m < \tau_1^*$ ve $\tau_{m-1} < \tau_2^* < \tau_m$

$$A_1 = 6c_2^2\,(t\,\tau - \frac{\tau^2}{2})\Big|_{\tau_2^*}^{\tau_m} = 6c_2^2\Delta t^2[(n - m + \frac{1}{2}) - \frac{1}{2}n - m + 1)^2] + 3r^2$$

$A_2 = 1,\quad A_3 = 0,\quad A_4 = 0,\quad A_5 = 1$

Durum 6: $\tau_m < \tau_1^*$ ve $\tau_m < \tau_2^*$

Tüm $H = 0$ olur ve dolayısıyla $A_1 = 0,\ A_2 = 0, A_3 = 0, A_4 = 0,\ A_5 = 0$ olur.

Lineer interpolasyon fonksiyonu kullanılarak Q_{lk}^{nm} çekirdeklerinin çıkarılışı:

$$Q_{lk}^{nm} = \frac{1}{4\pi r^2}[r_{,l}\ r_{,k}\ \frac{\partial r}{\partial n}K_1 + (\delta_{lk}\frac{\partial r}{\partial n} + r_{\ ,k}n_l)\,K_2 + r_{,l}n_k\ K_3] \tag{5.4}$$

$$Q_{lk}^{nm} = \int_{\Delta t_m} q_{lk}^*\,\eta^m(\tau) \tag{5.4a}$$

$$K_1 = -\frac{5A_1}{r^2} + 12\ A_2 + 2r\,A_3,\qquad K_2 = \frac{A_1}{r^2} - 2A_2 - A_5,\qquad K_3 = \frac{A_1}{r^2} - 2A_2 - A_4(1 - 2\frac{c_2^2}{c_1^2}) \tag{5.4b}$$

Bölüm 2'de kullanılan $\eta^m(\tau)$ interpolasyon fonksiyonu kullanılarak,

$$A_\alpha = \int_{\Delta t_m} b^\alpha \eta^m(\tau)\,d\tau,\quad 1 \le \alpha \le 5 \tag{5.4c}$$

yazılabilir.

A_α integrallerini on farklı durum için inceleyelim:

Durum 1: $0<\tau_1^*<\tau_{m-1}$ ve $0<\tau_2^*<\tau_1^*<\tau_m$

$$A_1=\int_{\tau_{m-1}}^{\tau_m}6c_2^2(t-\tau)[H(t-\tau-\frac{r}{c_1})-H(t-\tau-\frac{r}{c_2})]\frac{1}{\Delta t}(\tau-\tau_{m-1})\,d\tau$$
$$+\int_{\tau_m}^{\tau_{m+1}}6c_2^2(t-\tau)[H(t-\tau-\frac{r}{c_1})-H[(t-\tau-\frac{r}{c_2})]\frac{1}{\Delta t}(\tau-\tau_{m+1})\,d\tau$$

ya da

$$A_1=\frac{6c_2^2}{\Delta t}\int_{\tau_{m-1}}^{\tau_m}(t\tau-\tau^2)H\,[(t-\tau-\frac{r}{c_1})-H(t-\tau-\frac{r}{c_2})]\,d\tau$$
$$-\frac{6c_2^2\tau_{m-1}}{\Delta t}\int_{\tau_{m-1}}^{\tau_m}(t-\tau)\,[H\,[(t-\tau-\frac{r}{c_1})-H(t-\tau-\frac{r}{c_2})]\,d\tau$$
$$+\frac{6c_2^2\tau_{m+1}}{\Delta t}\int_{\tau_m}^{\tau_{m+1}}(t-\tau)\,[H\,[(t-\tau-\frac{r}{c_1})-H(t-\tau-\frac{r}{c_2})]\,d\tau$$
$$-\frac{6c_2^2}{\Delta t}\int_{\tau_m}^{\tau_{m+1}}(t-\tau^2)\,[H\,(t-\tau-\frac{r}{c_1})-H(t-\tau-\frac{r}{c_2})]\,d\tau$$

$\tau_2^*<\tau_1^*<\tau_{m-1}$ ve $0<\tau_1^*<\tau_{m-1}$ durumunu göz önüne alarak;

$$H(\tau_1^*-\tau_{m-1})=0,\ H(\tau_1^*-\tau_m)=0,\ H(\tau_2^*-\tau_{m-1})=0,$$
$$H(\tau_2^*-\tau_m)=0,\ H(\tau_1^*-\tau_{m+1})=0,\ H(\tau_2^*-\tau_{m+1})=0.$$

Yukarıdaki A_1 integrallerinin hepsindeki $H=0$ olduğundan $A_1=0$ olur.

$$A_2=\int_{\tau_{m-1}}^{\tau_m}\left[\delta\,(t-\tau-\frac{r}{c_2})-\frac{c_2^2}{c_1^2}\delta\,(t-\tau-\frac{r}{c_1})\right]\frac{(\tau-\tau_{m-1})}{\Delta t}d\tau$$

$$+\int_{\tau_m}^{\tau_{m+1}}\left[\delta\,(t-\tau-\frac{r}{c_2})-\frac{c_2^2}{c_1^2}\delta\,(t-\tau-\frac{r}{c_1})\right]\frac{(\tau_{m+1}-\tau)}{\Delta t}d\tau$$

$$=\frac{1}{\Delta t}\int_{\tau_{m-1}}^{\tau_m}\delta\,(t-\tau-\frac{r}{c_2})\tau\,d\tau-\frac{\tau_{m-1}}{\Delta t}\int_{\tau_{m-1}}^{\tau_m}\delta\,(t-\tau-\frac{r}{c_2})\tau\,d\tau$$

$$-\frac{c_2^2}{\Delta t\,c_1^2}\int_{\tau_{m-1}}^{\tau_m}\delta\,(t-\tau-\frac{r}{c_1})\tau\,d\tau+\frac{\tau_{m+1}}{\Delta t}\frac{c_2^2}{c_1^2}\int_{\tau_m}^{\tau_{m+1}}\delta\,(t-\tau-\frac{r}{c_1})\tau\,d\tau$$

$$+\frac{\tau_{m+1}}{\Delta t}\int_{\tau_m}^{\tau_{m+1}}\delta\,(t-\tau-\frac{r}{c_2})\,d\tau-\frac{1}{\Delta t}\int_{\tau_m}^{\tau_{m+1}}\delta\,(t-\tau-\frac{r}{c_2})\,d\tau$$

$$-\frac{\tau_{m+1}}{\Delta t}\frac{c_2^2}{c_1^2}\int_{\tau_m}^{\tau_{m+1}}\delta\,(t-\tau-\frac{r}{c_1})d\tau+\frac{c_2^2}{c_1^2\Delta t}\int_{\tau_m}^{\tau_{m+1}}\delta\,(t-\tau-\frac{r}{c_1})\tau\,d\tau$$

veya daha açık olarak

$$A_2=\frac{(t-\frac{r}{c_2})}{\Delta t}[H\,(\tau_2^*-\tau_{m-1})-H\,(\tau_2^*-\tau_m)]-\frac{\tau_{m-1}}{\Delta t}H\,[(\tau_2^*-\tau_{m-1})-H\,(\tau_2^*-\tau_m)]$$

$$-\frac{c_2^{\,2}}{c_1^{\,2}\Delta t}(t-\frac{r}{c_1})\,[H(\tau_1^*-\tau_{m-1})-H\,(\tau_1^*-\tau_m)]+\frac{\tau_{m-1}c_2^{\,2}}{c_1^{\,2}\Delta t}[H(\tau_2^*-\tau_{m-1})-H\,(\tau_2^*-\tau_m)]$$

$$+\frac{\tau_{m+1}}{\Delta t}[H(\tau_2^*-\tau_m)-H\,(\tau_2^*-\tau_{m+1})]-\frac{(t-\frac{r}{c_2})}{\Delta t}[H(\tau_2^*-\tau_m)-H\,(\tau_2^*-\tau_{m+1})]$$

$$-\frac{c_2^{\,2}\tau_{m+1}}{c_1^{\,2}\Delta t}[H(\tau_1^*-\tau_m)-H\,(\tau_1^*-\tau_{m+1})]+\frac{c_2^{\,2}(t-\frac{r}{c_1})}{c_1^{\,2}\Delta t}\,[H(\tau_1^*-\tau_m)-H\,(\tau_1^*-\tau_{m+1})]$$

A_1'e benzer olarak tüm $H=0$ olduğundan $A_2=0$.

$$A_3=\int_{\tau_{m-1}}^{\tau_m}[\dot{\delta}\,(t-\tau-\frac{r}{c_2})-\frac{c_2^{\,3}}{c_1^{\,3}}\,\dot{\delta}\,(t-\tau-\frac{r}{c_1})]\frac{(\tau-\tau_{m-1})}{\Delta t}d\tau$$

$$+\int_{\tau_m}^{\tau_{m+1}}[\dot{\delta}\,(t-\tau-\frac{r}{c_2})-\frac{c_2^{\,3}}{c_1^{\,3}}\,\dot{\delta}\,(t-\tau-\frac{r}{c_1})]\,\frac{(\tau_{m+1}-\tau)}{\Delta t}\,d\tau$$

A_3, katsayılar hariç (sabit terimler); A_2'ye benzer integraller içerir:

$\dot{\delta}(t-\tau-a)=\frac{\partial}{\partial\tau}\,\delta(t-\tau-a)$ olduğunu göz önünde tutarak,

$$A_3=\int_{\tau_{m-1}}^{\tau_m}\dot{\delta}\,(t-\tau-\frac{r}{c_2})\tau\,d\tau\;-\frac{\tau_{m-1}}{\Delta t}\int_{\tau_{m-1}}^{\tau_m}\dot{\delta}\,(t-\tau-\frac{r}{c_2})\tau\,d\tau$$

$$-\frac{c_2^{\,3}}{c_1^{\,3}\Delta t}\int_{\tau_{m-1}}^{\tau_m}\dot{\delta}\,(t-\tau-\frac{r}{c_1})\tau\; d\tau+\frac{\tau_{m-1}c_2^{\,3}}{c_1^{\,3}}\int_{\tau_{m-1}}^{\tau_m}\dot{\delta}\,(t-\tau-\frac{r}{c_1})\; d\tau$$

$$+\frac{\tau_{m+1}}{\Delta t}\int_{\tau_m}^{\tau_{m+1}}\dot{\delta}\,(t-\tau-\frac{r}{c_2})\; d\tau-\frac{1}{\Delta t}\int_{\tau_m}^{\tau_{m+1}}\dot{\delta}\,(t-\tau-\frac{r}{c_2})\,\tau\; d\tau$$

$$-\frac{c_2^{\,3}}{c_1^{\,3}\Delta t}\int_{\tau_m}^{\tau_{m+1}}\dot{\delta}\,(t-\tau-\frac{r}{c_1})\; d\tau+\frac{c_2^{\,3}}{c_1^{\,3}\Delta t}\int_{\tau_m}^{\tau_{m+1}}\dot{\delta}\,(t-\tau-\frac{r}{c_1})\,\tau\; d\tau.$$

$$A_3=\frac{1}{\Delta t}\;[H\;[(\tau_2^*-\tau_{m-1})-H\;(\tau_2^*-\tau_m)]-\frac{c_2^{\,3}}{c_1^{\,3}\Delta t}\,[H\;(\tau_1^*-\tau_{m-1})-H\;(\tau_1^*-\tau_m)]$$

$$-\frac{1}{\Delta t}\;[H\;[(\tau_2^*-\tau_m)-H\;(\tau_2^*-\tau_{m+1})]+\frac{c_2^{\,3}}{c_1^{\,3}\Delta t}\,[H\;(\tau_1^*-\tau_m)-H\;(\tau_1^*-\tau_{m+1})].$$

$$A_4=\int_{\tau_{m-1}}^{\tau_m}[\delta\;(t-\tau-\frac{r}{c_1})-\frac{r}{c_1}\;\dot{\delta}\;(t-\tau-\frac{r}{c_1})]\frac{(\tau-\tau_{m-1})}{\Delta t}d\tau$$

$$+\int_{\tau_m}^{\tau_{m+1}}[\delta\;(t-\tau-\frac{r}{c_1})-\frac{r}{c_1}\;\dot{\delta}\;(t-\tau-\frac{r}{c_1})]\;\frac{(\tau_{m+1}-\tau)}{\Delta t}\;d\tau$$

$$A_4=\frac{(t-\dfrac{r}{c_1})}{\Delta t}\,[H\;(\tau_1^*-\tau_{m-1})-H\;(\tau_1^*-\tau_m)]-\frac{\tau_{m-1}}{\Delta t}\,[H\;(\tau_1^*-\tau_{m-1})-H\;(\tau_1^*-\tau_m)]$$

$$+\frac{\tau_{m+1}-t+\dfrac{r}{c_1}}{\Delta t}\,[H\;(\tau_1^*-\tau_m)-H\;(\tau_1^*-\tau_{m+1})]$$

$$A_5=\int_{\tau_{m-1}}^{\tau_m}[\delta\;(t-\tau-\frac{r}{c_2})-\frac{r}{c_2}\;\dot{\delta}\;(t-\tau-\frac{r}{c_2})]\frac{(\tau-\tau_{m-1})}{\Delta t}d\tau$$

$$+\int_{\tau_m}^{\tau_{m+1}}[\delta\;(t-\tau-\frac{r}{c_2})-\frac{r}{c_2}\;\dot{\delta}\;(t-\tau-\frac{r}{c_2})]\;\frac{(\tau_{m+1}-\tau)}{\Delta t}\;d\tau.$$

Buradan,

$$A_5=\frac{1}{\Delta t}\int_{\tau_{m-1}}^{\tau_m}\delta\;(t-\tau-\frac{r}{c_2})\tau\; d\tau\;-\frac{\tau_{m-1}}{\Delta t}\int_{\tau_{m-1}}^{\tau_m}\delta\;(t-\tau-\frac{r}{c_2})\;d\tau$$

$$+\frac{r}{c_2\Delta t}\int_{\tau_{m-1}}^{\tau_m}\dot{\delta}\;(t-\tau-\frac{r}{c_2})\;\tau\; d\tau\;-\frac{r\,\tau_{m-1}}{c_{21}\Delta t}\int_{\tau_{m-1}}^{\tau_m}\dot{\delta}\;(t-\tau-\frac{r}{c_2})\;d\tau$$

$$+\frac{\tau_{m+1}}{\Delta t}\int_{\tau_m}^{\tau_{m+1}}\delta\,(t-\tau-\frac{r}{c_2})\;d\tau-\frac{1}{\Delta t}\int_{\tau_m}^{\tau_{m+1}}\delta\,(t-\tau-\frac{r}{c_2})\;\tau\;d\tau$$

$$+\frac{r\tau_{m+1}}{c_2\Delta t}\int_{\tau_m}^{\tau_{m+1}}\dot{\delta}\,(t-\tau-\frac{r}{c_2})\;d\tau\;-\frac{r}{c_2\Delta t}\int_{\tau_m}^{\tau_{m+1}}\dot{\delta}\,(t-\tau-\frac{r}{c_2})\,\tau\;d\tau$$

yazılabilir. Gerekli integraller alınırsa,

$$A_5=\frac{(t-\frac{r}{c_2}-\tau_{m-1})}{\Delta t}\,[H\,(\tau_2^*-\tau_{m-1})-H\,(\tau_2^*-\tau_m)]+\frac{(\frac{r}{c_2}+\tau_m)}{\Delta t}\,[H\,(\tau_2^*-\tau_{m-1})-H\,(\tau_2^*-\tau_m)]$$

$$+\frac{\tau_{m+1}-t}{\Delta t}\quad H[\,(\tau_2^*-\tau_m)-H\,(\tau_2^*-\tau_{m+1})].$$

Durum 1'e göre $H=0$ ve $A_1=0,\ A_2=0,\ A_3=0,\ A_4=0,\ A_5=0$ olur.

Durum 2: $\tau_{m-1}<\tau_1^*<\tau_m$ ve $0<\tau_2^*<\tau_{m-1}$

$$H\,(\tau_1^*-\tau_{m-1})=1,\quad H\,(\tau_1^*-\tau_m)=0,\quad H\,(\tau_1^*-\tau_{m+1})=0$$

$H\,(\tau_2^*-\tau_{m-1})=0,\quad H\,(\tau_2^*-\tau_m)=0,\quad H\,(\tau_2^*-\tau_{m+1})=0$ olur. Böylece,

$$A_1=\frac{6c_2^{\,2}}{\Delta t}\{\,(t\frac{\tau^2}{2}-\frac{\tau^3}{3})\Big|_{\tau_{m-1}}^{\tau_1^*}\;-\tau_{m-1}(t\tau-\frac{\tau^2}{2})\Big|_{\tau_{m-1}}^{\tau_1^*}\;\}.$$

$$A_1=\frac{6c_2^{\,2}}{\Delta t}[\frac{t(t-\frac{r}{c_1})^2}{2}-\frac{(t-\frac{r}{c_1})^3}{3}-\frac{t(m-1)^2\,\Delta t^2}{2}+\frac{(m-1)^3\,\Delta t^3}{3}]$$

$$-\frac{6c_2^{\,2}\tau_{m-1}}{\Delta t}[t(t-\frac{r}{c_1})-\frac{(t-\frac{r}{c_1})^2}{2}-t(m-1)\,\Delta t+\frac{(m-1)^2\,\Delta t^2}{2}].$$

$t=n\Delta t$ olduğundan

$$A_1=\frac{6c_2^{\,2}}{\Delta t}[\frac{n\Delta t(n\Delta t-\frac{r}{c_1})^2}{2}-\frac{(n\Delta t-\frac{r}{c_1})^3}{3}-\frac{n\Delta t\,(m-1)^2\,\Delta t^2}{2}+\frac{(m-1)^3\,\Delta t^3}{3}]$$

$$-\frac{6c_2^{\,2}(\tau_{m-1})\Delta t}{\Delta t}[n\Delta t\,(n\Delta t-\frac{r}{c_1})-\frac{(n\Delta t-\frac{r}{c_1})^2}{2}-n\Delta t\,(m-1)\,\Delta t+\frac{(m-1)^2\,\Delta t^2}{2}],$$

$$A_1=c_2^{\,2}(\Delta t)^2\;[(n-m+1)^3-\frac{3r^2(n-m+1)}{c_1^{\,2}(\Delta t)^2}+\frac{2r^3}{c_1^{\,3}(\Delta t)^3}],$$

$$A_2=-\frac{c_2^{\,2}}{c_1^{\,2}\Delta t}(\tau_1^*-\tau_{m-1}),\quad A_3=-\frac{c_2^{\,3}}{c_1^{\,3}\Delta t},$$

$$A_4=\frac{(\tau_1^*-\tau_{m+1}+\frac{r}{c_1})}{\Delta t}=n-m+1,\quad A_5=0\,.$$

Durum3: $\tau_{m-1}<\tau_1^*<\tau_m$ ve $\tau_{m-1}<\tau_2^*<\tau_1^*<\tau_m$

$H(\tau_1^*-\tau_{m-1})=1,\quad H(\tau_1^*-\tau_m)=0,\quad H(\tau_1^*-\tau_{m+1})=0,$

$H(\tau_2^*-\tau_{m-1})=1,\quad H(\tau_2^*-\tau_m)=0,\quad H(\tau_2^*-\tau_{m+1})=0$ olduğundan

$$A_1=3(n-m+1)r^2\;(1-\frac{c_2^{\,2}}{c_1^{\,2}})+\frac{2r^3}{\Delta t}\;c_2^{\,2}(\frac{1}{c_1^{\,3}}-\frac{1}{c_2^{\,3}}),$$

$$A_2=\frac{t-\frac{r}{c_2}-\tau_{m-1}}{\Delta t}+\frac{\tau_{m-1}c_2^{\,2}}{c_1^{\,2}\Delta t}-\frac{c_2^{\,2}(t-\frac{r}{c_1})}{c_1^{\,2}\Delta t}=\frac{[\tau_2^*-\tau_{m-1}-\frac{c_2^{\,2}}{c_1^{\,2}}(\tau_1^*-\tau_{m-1})]}{\Delta t},$$

$$A_3=\frac{(1-\frac{c_2^{\,3}}{c_1^{\,3}})}{\Delta t},\quad A_4=\frac{(\tau_1^*-\tau_{m+1}+\frac{r}{c_1})}{\Delta t}=n-m+1,\quad A_5=\frac{(\tau_2^*-\tau_{m-1}+\frac{r}{c_2})}{\Delta t}=n-m+1.$$

Durum 4: $\tau_m<\tau_1^*<\tau_{m+1}$ ve $0<\tau_2^*<\tau_{m-1}$

$H(\tau_1^*-\tau_{m-1})=1,\quad H(\tau_1^*-\tau_m)=1,\quad H(\tau_1^*-\tau_{m+1})=0,$

$H(\tau_2^*-\tau_{m-1})=0,\quad H(\tau_2^*-\tau_m)=0,\quad H(\tau_2^*-\tau_{m+1})=0$ olduğundan

$$A_1 = c_2{}^2(\Delta t)^2\ [6(n-m)-(n-m-1)^3 + \frac{3r^2(n-m-1)}{c_1{}^2(\Delta t)^2} - \frac{2r^3}{c_1{}^3(\Delta t)^3}],$$

$$A_2 = \frac{-\dfrac{c_2{}^2}{c_1{}^2\Delta t}(\tau_1^* - \tau_{m+1})}{\Delta t}, \quad A_3 = \frac{c_2{}^3}{c_1{}^3\Delta t},$$

$$A_4 = \frac{-(\tau_1^* - \tau_{m+1} + \dfrac{r}{c_1})}{\Delta t} = -(n-m-1), \quad A_5 = 0\,.$$

Durum 5: $\tau_m < \tau_1^* < \tau_{m+1}$ ve $\tau_{m-1} < \tau_2^* < \tau_m$

$$H(\tau_1^* - \tau_{m-1}) = 1, \quad H(\tau_1^* - \tau_m) = 1, \quad H(\tau_1^* - \tau_{m+1}) = 0,$$

$$H(\tau_2^* - \tau_{m-1}) = 1, \quad H(\tau_2^* - \tau_m) = 0, \quad H(\tau_2^* - \tau_{m+1}) = 0 \text{ olduğundan}$$

$$A_1 = c_2{}^2(\Delta t)^2\ [-2(n-m)^3 + \frac{3r^2}{\Delta t^2}(\frac{(n-m-1)}{c_1{}^2} + \frac{(n-m+1)}{c_2{}^2}) - \frac{2r^3}{(\Delta t)^3}(\frac{1}{c_1^3} + \frac{1}{c_2{}^3})\,],$$

$$A_2 = \frac{[\tau_2^* - \tau_{m-1} + \dfrac{c_2{}^2}{c_1{}^2}(\tau_1^* - \tau_{m+1})]}{\Delta t}, \quad A_3 = \frac{(1 + \dfrac{c_2{}^3}{c_1{}^3})}{\Delta t},$$

$$A_4 = \frac{-(\tau_1^* - \tau_{m+1} + \dfrac{r}{c_1})}{\Delta t} = -(n-m-1), \quad A_5 = \frac{(\tau_2^* - \tau_{m+1} + \dfrac{r}{c_2})}{\Delta t} = n-m+1\,.$$

Durum 6: $\tau_m < \tau_1^* < \tau_{m+1}$ ve $\tau_m < \tau_2^* < \tau_{m+1}$

$$H(\tau_1^* - \tau_{m-1}) = 1, \quad H(\tau_1^* - \tau_m) = 1, \quad H(\tau_1^* - \tau_{m+1}) = 0,$$

$$H(\tau_2^* - \tau_{m-1}) = 1, \quad H(\tau_2^* - \tau_m) = 1, \quad H(\tau_2^* - \tau_{m+1}) = 0$$

$$A_1 = c_2{}^2(\Delta t)^2\ [\frac{3r^2}{(\Delta t)^2}(n-m-1)(\frac{1}{c_1{}^2} + \frac{1}{c_2{}^2}) - \frac{2r^3}{(\Delta t)^3}(\frac{1}{c_1{}^3} + \frac{1}{c_2{}^3})\,]$$

$$A_2 = -\frac{1}{\Delta t}[\tau_2^* - \tau_{m+1} - \frac{c_2{}^2}{c_1{}^2}(\tau_1^* - \tau_{m+1})], \quad A_3 = \frac{1}{\Delta t}(\frac{c_2{}^3}{c_1{}^3} - 1)$$

$$A_4 = -\frac{1}{\Delta t}\,(\tau_1^* - \tau_{m+1} + \frac{r}{c_1}) = -(n-m-1), \quad A_5 = -\frac{1}{\Delta t}\,(\tau_2^* - \tau_{m+1} + \frac{r}{c_2}) = n-m-1$$

Durum 7: $\tau_{m+1} < \tau_1^*$ ve $0 < \tau_2^* < \tau_{m-1}$

$H(\tau_1^* - \tau_{m-1}) = 1, \quad H(\tau_1^* - \tau_m) = 1, \quad H(\tau_1^* - \tau_{m+1}) = 1,$

$H(\tau_2^* - \tau_{m-1}) = 0, \quad H(\tau_2^* - \tau_m) = 0, \quad H(\tau_2^* - \tau_{m+1}) = 0$ olduğundan

$$A_1 = 6c_2^{\,2}(\Delta t)^2(n-m), \quad A_2 = A_3 = A_4 = A_5 = 0\,.$$

Durum 8: $\tau_{m+1} < \tau_1^*$ ve $\tau_{m-1} < \tau_2^* < \tau_m$

$H(\tau_1^* - \tau_{m-1}) = 1, \quad H(\tau_1^* - \tau_m) = 1, \quad H(\tau_1^* - \tau_{m+1}) = 1,$

$H(\tau_2^* - \tau_{m-1}) = 1, \quad H(\tau_2^* - \tau_m) = 0, \quad H(\tau_2^* - \tau_{m+1}) = 0.$

$$A_1 = c_2^{\,2}(\Delta t)^2[6(n-m) - (n-m+1)^3 + \frac{3(n-m+1)r^2}{c_2^{\,2}(\Delta t)^2} - \frac{2r^3}{c_2^{\,3}(\Delta t)^3}], \quad A_2 = \frac{(\tau_2^* - \tau_{m-1})}{\Delta t},$$

$$A_3 = \frac{1}{\Delta t}, \quad A_4 = 0, \quad A_5 = +\frac{1}{\Delta t}\,(\tau_2^* - \tau_{m-1} + \frac{r}{c_2}) = n-m+1.$$

Durum 9: $\tau_{m+1} < \tau_1^*$ ve $\tau_m < \tau_2^* < \tau_{m+1}$

$H(\tau_1^* - \tau_{m-1}) = 1, \quad H(\tau_1^* - \tau_m) = 1, \quad H(\tau_1^* - \tau_{m+1}) = 1,$

$H(\tau_2^* - \tau_{m-1}) = 1, \quad H(\tau_2^* - \tau_m) = 1, \quad H(\tau_2^* - \tau_{m+1}) = 0$ olduğundan

$$A_1 = c_2^{\,2}(\Delta t)^2[(n-m-1)^3 - \frac{3r^2(n-m-1)}{c_2^{\,2}(\Delta t)^2} - \frac{2r^3}{c_2^{\,3}(\Delta t)^3}],$$

$$A_2 = -\frac{1}{\Delta t}(\tau_2^* - \tau_{m+1}), \quad A_3 = -\frac{1}{\Delta t}, \quad A_4 = 0,$$

$$A_5 = -\frac{1}{\Delta t}\,(\tau_2^* - \tau_{m+1} + \frac{r}{c_2}) = -(n-m-1).$$

Durum 10: $\tau_{m+1} < \tau_1^*$ ve $\tau_{m+1} < \tau_2^{\,*} < \tau_1^*$

$$H(\tau_1^* - \tau_{m-1}) = 1, \quad H(\tau_1^* - \tau_m) = 1, \quad H(\tau_1^* - \tau_{m+1}) = 1,$$

$$H(\tau_2^* - \tau_{m-1}) = 1, \quad H(\tau_2^* - \tau_m) = 1, \quad H(\tau_2^* - \tau_{m+1}) = 1 \text{ olduğundan}$$

$$A_1 = A_2 = A_3 = A_4 = A_5 = 0 .$$

Yer değiştime U_{lk}^{nm} çekirdeklerini çıkarmak için $\eta^m(\tau)$ lineer interpolasyon fonksiyonu kullanılırsa,

$$\begin{aligned} u_{lk}^* = \frac{1}{4\pi\rho r}\{ & \frac{(t-\tau)}{r^2}(3r_{,l}r_{,k} - \delta_{\ell k})\,[H(t-\tau-\frac{r}{c_1}) - H[(t-\tau-\frac{r}{c_2})] \\ & + r_{,l}\,r_{,k}\,[\frac{1}{c_1^2}\,\delta[(t-\tau-\frac{r}{c_1}) - \frac{1}{c_2^2}\,\delta[(t-\tau-\frac{r}{c_2})] + \frac{\delta_{\ell k}}{c_2^2}\,\delta\,[(t-\tau-\frac{r}{c_2})\} \end{aligned} \tag{5.5}$$

fundamental çözümü dikkate alınarak

$$U_{lk}^{nm} = \int_0^t u_{\ell k}^*\,\eta^m(\tau)\,d\tau \tag{5.6}$$

yazılabilir.

$$\begin{aligned} U_{lk}^{nm} = & \frac{(3r_{,l}\,r_{,k} - \delta_{lk})}{4\pi\rho r^3\Delta t}\int_{\tau_{m-1}}^{\tau_m}(\tau-\tau_{m-1})(t-\tau)\;H\;[(t-\tau-\frac{r}{c_1}) - H[(t-\tau-\frac{r}{c_2})]\,d\tau \\ & + \frac{r_{,l}\,r_{,k}}{4\pi\rho r c_1^2\Delta t}\int_{\tau_{m-1}}^{\tau_m}(\tau-\tau_{m-1})\delta(t-\tau-\frac{r}{c_1})\;d\tau + \frac{r_{,l}\,r_{,k}}{4\pi\rho r c_2^2\Delta t}\int_{\tau_{m-1}}^{\tau_m}(\tau_{m-1}-\tau)\delta(t-\tau-\frac{r}{c_2})\,d\tau \\ & + \frac{\delta_{lk}}{4\pi\rho r c_2^2\Delta t}\int_{\tau_{m-1}}^{\tau_m}(\tau-\tau_{m-1})\delta(t-\tau-\frac{r}{c_2})\;d\tau \\ & + \frac{(3r_{,l}\;r_{,k} - \delta_{lk})}{4\pi\rho r^3\Delta t}\int_{\tau_m}^{\tau_{m+1}}(\tau_{m+1}-\tau)(t-\tau)\;H\;[(t-\tau-\frac{r}{c_1}) - H[(t-\tau-\frac{r}{c_2})]\,d\tau \\ & + \frac{r_{,l}\;r_{,k}}{4\pi\rho r c_1^2\Delta t}\int_{\tau_m}^{\tau_{m+1}}(\tau_{m+1}-\tau)\delta(t-\tau-\frac{r}{c_1})\,d\tau + \frac{r_{,l}\;r_{,k}}{4\pi\rho r c_2^2\Delta t}\int_{\tau_m}^{\tau_{m+1}}(\tau-\tau_{m+1})\delta(t-\tau-\frac{r}{c_2})\;d\tau \end{aligned}$$

$$+\frac{\delta_{lk}}{4\pi\rho r c_2{}^2\Delta t}\int_{\tau_m}^{\tau_{m+1}}(\tau_{m+1}-\tau)\delta(t-\tau-\frac{r}{c_2})\,d\tau$$

Durum 1: $0<\tau_1^*<\tau_{m-1}$ ve $0<\tau_2^*<\tau_1^*<\tau_{m-1}$

$$H(\tau_1^*-\tau_{m-1})=0,\quad H(\tau_1^*-\tau_m)=0,\quad H(\tau_2^*-\tau_{m-1})=0,$$

$H(\tau_2^*-\tau_m)=0,\quad H(\tau_1^*-\tau_{m+1})=0,\quad H(\tau_2^*-\tau_{m+1})=0$ olduğundan

$$U_{\ell k}^{nm}=0.$$

Durum 2: $\tau_{m-1}<\tau_1^*<\tau_m$ ve $0<\tau_2^*<\tau_{m-1}$

$H(\tau_1^*-\tau_{m-1})=1$, diğerleri $H=0$ olduğundan,

$$U_{lk}^{nm}=-\frac{(3r_{,l}r_{,k}-\delta_{lk})}{4\pi\rho r^3\Delta t}\left[\frac{1}{2}(t-\tau)^2(t-\tau_{m-1})-\frac{1}{3}(t-\tau)^3\right]_{\tau_{m-1}}^{\tau_1^*}+\frac{r_{,l}r_{,k}}{4\pi\rho r c_1^2\Delta t}(t-\tau_{m-1}-\frac{r}{c_1}).$$

Durum 3: $\tau_{m-1}<\tau_1^*<\tau_m$ ve $\tau_{m-1}<\tau_2^*<\tau_1^*<\tau_m$

$H(\tau_1^*-\tau_{m-1})=1,\quad H(\tau_2^*-\tau_{m-1})=1$ ve diğerleri, $H=0$ olduğundan,

$$U_{lk}^{nm}=\frac{r_{,l}\,r_{,k}}{4\pi\rho r c_1{}^2\Delta t}(t-\frac{r}{c_1}-\tau_{m-1})-\frac{r_{,l}\,r_{,k}}{4\pi\rho r c_2{}^2\Delta t}(t-\frac{r}{c_2}-\tau_{m+1})+\frac{\delta_{lk}}{4\pi\rho r c_2{}^2\Delta t}(t-\frac{r}{c_2}-\tau_{m-1}).$$

Durum 4: $\tau_m<\tau_1^*<\tau_{m+1}$ ve $0<\tau_2^*<\tau_{m-1}$

$$H(\tau_1^*-\tau_{m-1})=1,\quad H(\tau_1^*-\tau_m)=1,\quad H(\tau_1^*-\tau_{m+1})=0,$$

$H(\tau_2^*-\tau_{m-1})=0,\quad H(\tau_2^*-\tau_m)=0,\quad H(\tau_2^*-\tau_{m+1})=0$ olduğundan

$$U_{lk}^{nm}=-\frac{(3r_{,l}r_{,k}-\delta_{lk})}{4\pi\rho r^3\Delta t}\left[\frac{1}{2}(t-\tau)^2(t-\tau_{m-1})-\frac{1}{3}(t-\tau)^3\right]_{\tau_{m-1}}^{\tau_m}$$

$$-\frac{(3r_{,l}r_{,k}-\delta_{lk})}{4\pi\rho r^3\Delta t}\left[\frac{1}{2}(t-\tau)^2(t-\tau_{m+1})-\frac{1}{3}(t-\tau)^3\right]_{\tau_m}^{\tau_1^*}-\frac{r_{,l}r_{,k}}{4\pi\rho r c_1^2\Delta t}(t-\tau_{m+1}-\frac{r}{c_1}).$$

Durum 5: $\tau_m < \tau_1^* < \tau_{m+1}$ ve $\tau_{m-1} < \tau_2^* < \tau_m$

$$H(\tau_1^* - \tau_{m-1}) = 1, \quad H(\tau_1^* - \tau_m) = 1, \quad H(\tau_1^* - \tau_{m+1}) = 0,$$

$H(\tau_2^* - \tau_{m-1}) = 1, \quad H(\tau_2^* - \tau_m) = 0, \quad H(\tau_2^* - \tau_{m+1}) = 0$ olduğundan

$$U_{lk}^{nm} = \frac{(3r_{,l}\, r_{,k} - \delta_{lk})}{4\pi\rho r^3 \Delta t}\left[\frac{1}{2}(t-\tau)^2(t-\tau_{m-1}) - \frac{1}{3}(t-\tau)^3\right]_{\tau_2^*}^{\tau_m} - \frac{(r_{,l} r_{,k} - \delta_{lk})}{4\pi\rho r c_2^2 \Delta t}(t - \tau_{m-1} - \frac{r}{c_2})$$
$$+ \frac{(3r_{,l}\, r_{,k} - \delta_{lk})}{4\pi\rho r^3 \Delta t}\left[\frac{1}{2}(t-\tau)^2(t-\tau_{m+1}) - \frac{1}{3}(t-\tau)^3\right]_{\tau_m}^{\tau_1^*} + \frac{r_{,l} r_{,k}}{4\pi\rho r c_1^2 \Delta t}(\tau_{m+1} - t + \frac{r}{c_1}).$$

Durum 6: $\tau_m < \tau_1^* < \tau_{m+1}$ ve $\tau_m < \tau_2^* < \tau_1^* < \tau_{m+1}$

$$H(\tau_1^* - \tau_{m-1}) = 1, \quad H(\tau_1^* - \tau_m) = 1, \quad H(\tau_1^* - \tau_{m+1}) = 0,$$

$H(\tau_2^* - \tau_{m-1}) = 1, \quad H(\tau_2^* - \tau_m) = 1, \quad H(\tau_2^* - \tau_{m+1}) = 0$ olduğundan

$$U_{lk}^{nm} = -\frac{(3r_{,l}\, r_{,k} - \delta_{lk})}{4\pi\rho r^3 \Delta t}\left[\frac{1}{2}(t-\tau)^2(t-\tau_{m-1}) - \frac{1}{3}(t-\tau)^3\right]_{\tau_m}^{\tau_1^*} + \frac{(r_{,l} r_{,k} - \delta_{lk})}{4\pi\rho r c_2^2 \Delta t}(t - \tau_{m+1} - \frac{r}{c_2})$$
$$+ \frac{(3r_{,l}\, r_{,k} - \delta_{lk})}{4\pi\rho r^3 \Delta t}\left[\frac{1}{2}(t-\tau)^2(t-\tau_{m+1}) - \frac{1}{3}(t-\tau)^3\right]_{\tau_m}^{\tau_2^*} + \frac{r_{,l} r_{,k}}{4\pi\rho r c_1^2 \Delta t}(\tau_{m+1} - t + \frac{r}{c_1}).$$

Durum 7: $\tau_{m+1} < \tau_1^*$ ve $0 < \tau_2^* < \tau_{m-1}$

$$H(\tau_1^* - \tau_{m-1}) = 1, \quad H(\tau_1^* - \tau_m) = 1, \quad H(\tau_1^* - \tau_{m+1}) = 1,$$

$H(\tau_2^* - \tau_{m-1}) = 0, \quad (\tau_2^* - \tau_m) = 0, \quad H(\tau_2^* - \tau_{m+1}) = 0$ olduğundan

$$U_{lk}^{nm} = \frac{(3r_{,l}\, r_{,k} - \delta_{lk})}{4\pi\rho r^3 \Delta t}\left[\frac{1}{2}(t-\tau)^2(t-\tau_{m+1}) - \frac{1}{3}(t-\tau)^3\right]_{\tau_{m-1}}^{\tau_m}$$
$$- \frac{(3r_{,l}\, r_{,k} - \delta_{lk})}{4\pi\rho r^3 \Delta t}\left[\frac{1}{2}(t-\tau)^2(t-\tau_{m+1}) - \frac{1}{3}(t-\tau)^3\right]_{\tau_m}^{\tau_{m+1}}$$

Durum 8: $\tau_{m+1} < \tau_1^*$ ve $\tau_{m-1} < \tau_2^* < \tau_m$

$$H(\tau_1^* - \tau_{m-1}) = 1, \quad H(\tau_1^* - \tau_m) = 1, \quad H(\tau_1^* - \tau_{m+1}) = 1,$$

$$H(\tau_2^* - \tau_{m-1}) = 1, \quad H(\tau_2^* - \tau_m) = 0, \quad H(\tau_2^* - \tau_{m+1}) = 0.$$

buradan,

$$U_{lk}^{nm} = \frac{(3r_{,l}r_{,k} - \delta_{lk})}{4\pi\rho r^3 \Delta t}\left[\frac{1}{2}(t-\tau)^2(t-\tau_{m-1}) - \frac{1}{3}(t-\tau)^3\right]_{\tau_2^*}^{\tau_m} + \frac{\delta_{lk}}{4\pi\rho r c_2^2 \Delta t}(t - \tau_{m-1} - \frac{r}{c_2})$$
$$+ \frac{r_{,l}r_{,k}}{4\pi\rho r c_2^2 \Delta t}(\tau_{m+1} - t + \frac{r}{c_2}) - \frac{(3r_{,l}r_{,k} - \delta_{lk})}{4\pi\rho r^3 \Delta t}\left[\frac{1}{2}(t-\tau)^2(t-\tau_{m+1}) - \frac{1}{3}(t-\tau)^3\right]_{\tau_m}^{\tau_{m+1}}$$

Durum 9: $\tau_{m+1} < \tau_1^*$ ve $\tau_m < \tau_2^* < \tau_{m+1}$

$$H(\tau_1^* - \tau_{m-1}) = 1, \quad H(\tau_1^* - \tau_m) = 1, \quad H(\tau_1^* - \tau_{m+1}) = 1,$$

$$H(\tau_2^* - \tau_{m-1}) = 1, \quad H(\tau_2^* - \tau_m) = 1, \quad H(\tau_2^* - \tau_{m+1}) = 0.$$

$$U_{lk}^{nm} = \frac{(3r_{,l}r_{,k} - \delta_{lk})}{4\pi\rho r^3 \Delta t}\left[\frac{1}{2}(t-\tau)^2(t-\tau_{m-1}) - \frac{1}{3}(t-\tau)^3\right]_{\tau_2^*}^{\tau_{m+1}}$$
$$+ \frac{(r_{,l}r_{,k} - \delta_{lk})}{4\pi\rho r c_2^2 \Delta t}(t - \tau_{m+1} - \frac{r}{c_2}).$$

Durum 10: $\tau_{m+1} < \tau_1^*$ ve $\tau_{m+1} < \tau_2^* < \tau_1^*$

$$H(\tau_1^* - \tau_{m+1}) = 1, \quad H(\tau_1^* - \tau_m) = 1, \quad H(\tau_1^* - \tau_{m-1}) = 1,$$

$$H(\tau_2^* - \tau_{m-1}) = 1, \quad H(\tau_2^* - \tau_m) = 1, \quad H(\tau_2^* - \tau_{m+1}) = 1.$$

Tüm $H = 1$ olduğundan birbirini sıfırlar. Böylece $U_{lk}^{nm} = 0$ olur.

Bu bölümde, üç boyutlu elastodinamik dalga denklemine ait yer değiştirme ve gerilim çekirdekleri, alan değişkenlerinin sabit ve lineer olarak değiştiği varsayılarak çıkarılmıştır. Sabit ve lineer interpolasyon fonksiyonları kullanılarak çıkarılan yer değiştirme ve gerilim çekirdekleri Sarı (2000) ile uyuşmaktadır.

Gelecek bölümde ise üç boyutlu elastik dalgaya ilişkin çekirdekler kuadratik değişimin kullanılmasıyla çıkarılacaktır.

6.YER DEĞİŞTİRME VE GERİLİM ÇEKİRDEKLERİ-KUADRATİK DEĞİŞİM

6.1 Elastodinamik 3B Çekirdeklerin Kuadratik İnterpolasyon Fonksiyonlarıyla Elde Edilişi

Bu bölümde, elastodinamik dalga denklemi için Sınır Elemanları Metoduna ait yer değiştirme ve gerilim fonksiyonları zamanın kuadratik değişimi kullanılarak çıkarılacaktır. Formülasyon Bölüm 3'deki gibidir, ancak geometri farkını gözardı etmemek gerekir.

Üç boyutlu elastodinamik dalga denklemi için yer değiştirme fundamental çözümü (Sarı, 2000):

$$u_{lk}^{*} = \frac{1}{4\pi\rho r}\left\{ \frac{t-\tau}{r^2}\left(3r_{,l}\,r_{,k} - \delta_{lk}\right)\left[H\left(t-\tau-\frac{r}{c_1}\right) - H\left(t-\tau-\frac{r}{c_2}\right)\right]\right.$$

$$\left. + r_{,l}\,r_{,k}\left[\frac{1}{c_1^2}\delta\left(t-\tau-\frac{r}{c_1}\right) - \frac{1}{c_2^2}\delta\left(t-\tau-\frac{r}{c_2}\right)\right] + \frac{\delta_{lk}}{c_2^2}\,\delta\left(t-\tau-\frac{r}{c_2}\right) \right\}$$

ile verilebilir.

$$M_{QF}(\tau) = \frac{1}{2}\left(\frac{\tau - t_{2n-2}}{\Delta t}\right)^2 - \frac{1}{2}\left(\frac{\tau - t_{2n-2}}{\Delta t}\right)$$

alınırsa,

$$U_{QF} = \int_{(2n-2)\Delta t}^{2n\Delta t} u_{lk}^{*}\, M_{QF}(\tau)\, d\tau \tag{6.1}$$

yazılabilir. Buradan

$$U_{QF} = \frac{\left(3r_{,l}\,r_{,k} - \delta_{lk}\right)}{8\pi\rho r}\int_{(2n-2)\Delta t}^{2n\Delta t} \left(\frac{t-\tau}{r^2}\right).\left(\frac{\tau - t_{2n-2}}{\Delta t}\right)^2 \left[H\left(t-\tau-\frac{r}{c_1}\right) - H\left(t-\tau-\frac{r}{c_2}\right)\right] d\tau$$

$$-\frac{\left(3r_{,l}\,r_{,k} - \delta_{lk}\right)}{8\pi\rho r}\int_{(2n-2)\Delta t}^{2n\Delta t} \left(\frac{t-\tau}{r^2}\right).\left(\frac{\tau - t_{2n-2}}{\Delta t}\right)\left[H\left(t-\tau-\frac{r}{c_1}\right) - H\left(t-\tau-\frac{r}{c_2}\right)\right] d\tau$$

$$+\frac{r_{,l}\,r_{,k}}{8\pi\,\rho r c_1^2}\int_{(2n-2)\Delta t}^{2n\Delta t}\delta\left(t-\tau-\frac{r}{c_1}\right).\left(\frac{\tau-t_{2n-2}}{\Delta t}\right)^2 d\tau$$

$$-\frac{r_{,l}\,r_{,k}}{8\pi\,\rho r c_1^2}\int_{(2n-2)\Delta t}^{2n\Delta t}\delta\left(t-\tau-\frac{r}{c_1}\right).\left(\frac{\tau-t_{2n-2}}{\Delta t}\right) d\tau$$

$$-\frac{r_{,l}\,r_{,k}}{8\pi\,\rho r c_2^2}\int_{(2n-2)\Delta t}^{2n\Delta t}\delta\left(t-\tau-\frac{r}{c_2}\right).\left(\frac{\tau-t_{2n-2}}{\Delta t}\right)^2 d\tau$$

$$+\frac{r_{,l}\,r_{,k}}{8\pi\,\rho r c_2^2}\int_{(2n-2)\Delta t}^{2n\Delta t}\delta\left(t-\tau-\frac{r}{c_2}\right).\left(\frac{\tau-t_{2n-2}}{\Delta t}\right) d\tau$$

$$+\frac{\delta_{lk}}{8\pi\,\rho r c_2^2}\int_{(2n-2)\Delta t}^{2n\Delta t}\delta\left(t-\tau-\frac{r}{c_2}\right).\left(\frac{\tau-t_{2n-2}}{\Delta t}\right)^2 d\tau$$

$$-\frac{\delta_{lk}}{8\pi\,\rho r c_2^2}\int_{(2n-2)\Delta t}^{2n\Delta t}\delta\left(t-\tau-\frac{r}{c_2}\right).\left(\frac{\tau-t_{2n-2}}{\Delta t}\right) d\tau$$

yazılabilir. U_{QF} içindeki ilk iki integral $\frac{\tau-t_{2n-2}}{\Delta t}=u$ dönüşümü uygulanarak alınacaktır. Buna bağlı olarak,

$$U_{QF}=\frac{\left(3r_{,l}\,r_{,k}-\delta_{lk}\right)}{8\pi\,\rho r}\int_{(2n-2)\Delta t}^{2n\Delta t}\left(\frac{t-\tau}{r^2}\right).\left(\frac{\tau-t_{2n-2}}{\Delta t}\right)^2\left[H\left(t-\tau-\frac{r}{c_1}\right)-H\left(t-\tau-\frac{r}{c_2}\right)\right]d\tau$$

$$-\frac{\left(3r_{,l}\,r_{,k}-\delta_{lk}\right)}{8\pi\,\rho r}\int_{(2n-2)\Delta t}^{2n\Delta t}\left(\frac{t-\tau}{r^2}\right).\left(\frac{\tau-t_{2n-2}}{\Delta t}\right)\left[H\left(t-\tau-\frac{r}{c_1}\right)-H\left(t-\tau-\frac{r}{c_2}\right)\right]d\tau$$

$$+\frac{r_{,l}\,r_{,k}}{8\pi\,\rho r c_1^2}\left[\left(\frac{t-\frac{r}{c_1}-t_{2n-2}}{\Delta t}\right)^2-\left(\frac{t-\frac{r}{c_1}-t_{2n-2}}{\Delta t}\right)\right]$$

$$.\{H[t-\frac{r}{c_1}-(2n-2)\Delta t]-H[t-\frac{r}{c_1}-2n\Delta t]\}$$

$$+\frac{\delta_{lk}-r_{,l}\,r_{,k}}{8\pi\,\rho r c_2^2}\left[\left(\frac{t-\frac{r}{c_2}-t_{2n-2}}{\Delta t}\right)^2-\left(\frac{t-\frac{r}{c_2}-t_{2n-2}}{\Delta t}\right)\right]$$

$$.\{H[t-\frac{r}{c_2}-(2n-2)\Delta t]-H[t-\frac{r}{c_2}-2n\Delta t]\}$$

bulunur. Bundan sonra kullanılacak olan $\tau_{2n-2} = (2n-2)\,\Delta t$ ve $\tau_{2n} = 2n\,\Delta t$.

Alınan integralleri pertürbasyonun ulaşıp ulaşmamasına bağlı olarak ortaya çıkacak altı farklı durum için inceleyelim:

Durum 1: $0 < \tau_1^* < \tau_{2n-2}$ ve $0 < \tau_2^* < \tau_1^* < \tau_{2n-2}$

Burada $\tau_1^* = t - \dfrac{r}{c_1}$, $\tau_2^* = t - \dfrac{r}{c_2}$.

$$H(\tau_1^* - \tau_{2n-2}) = 0, \qquad H(\tau_1^* - \tau_{2n}) = 0,$$
$$H(\tau_2^* - \tau_{2n-2}) = 0, \qquad H(\tau_2^* - \tau_{2n}) = 0$$

olduğundan

$$U_{QF} = 0.$$

Durum 2: $\tau_{2n-2} < \tau_1^* < \tau_{2n}$ ve $0 < \tau_2^* < \tau_{2n-2}$

$$H(\tau_1^* - \tau_{2n-2}) = 1, \qquad H(\tau_1^* - \tau_{2n}) = 0,$$
$$H(\tau_2^* - \tau_{2n-2}) = 0, \qquad H(\tau_2^* - \tau_{2n}) = 0.$$

$$U_{QF} = \frac{(3r_{,l}\,r_{,k} - \delta_{lk})}{8\pi\rho\Delta t\, r^3}.\left[\frac{(t-t_{2n-2})}{3}.(\frac{\tau - t_{2n-2}}{\Delta t})^3 - \frac{\Delta t}{4}.(\frac{\tau - t_{2n-2}}{\Delta t})^4\right]_{\tau_{2n-2}}^{\tau_1^*}$$
$$-\frac{(3r_{,l}\,r_{,k} - \delta_{lk})}{8\pi\rho\Delta t\, r^3}.\left[\frac{(t-t_{2n-2})}{2}.(\frac{\tau - t_{2n-2}}{\Delta t})^2 - \frac{\Delta t}{3}.(\frac{\tau - t_{2n-2}}{\Delta t})^3\right]_{\tau_{2n-2}}^{\tau_1^*}$$
$$+\frac{r_{,l}\,r_{,k}}{8\pi\rho r c_1^2}[(\frac{t - \frac{r}{c_1} - t_{2n-2}}{\Delta t})^2 - (\frac{t - \frac{r}{c_1} - t_{2n-2}}{\Delta t})]$$

Durum 3: $\tau_{2n-2} < \tau_1^* < \tau_{2n}$ ve $\tau_{2n-2} < \tau_2^* < \tau_{2n}$

$$H(\tau_1^* - \tau_{2n-2}) = 1, \qquad H(\tau_1^* - \tau_{2n}) = 0,$$
$$H(\tau_2^* - \tau_{2n-2}) = 1, \qquad H(\tau_2^* - \tau_{2n}) = 0,$$

$$U_{QF} = \frac{(3r_{,l}\,r_{,k} - \delta_{lk})}{8\pi\rho\Delta t\, r^3}.\{\left[\frac{(t-t_{2n-2})}{3}.(\frac{\tau - t_{2n-2}}{\Delta t})^3 - \frac{\Delta t}{4}.(\frac{\tau - t_{2n-2}}{\Delta t})^4\right]_{\tau_{2n-2}}^{\tau_1^*}$$
$$-\left[\frac{(t-t_{2n-2})}{3}.(\frac{\tau - t_{2n-2}}{\Delta t})^3 - \frac{\Delta t}{4}.(\frac{\tau - t_{2n-2}}{\Delta t})^4\right]_{\tau_{2n-2}}^{\tau_2^*}\}$$

$$-\frac{(3r_{,l}\,r_{,k} - \delta_{lk})}{8\pi\rho\Delta t\, r^3}.\{\left[\frac{(t-t_{2n-2})}{2}.(\frac{\tau - t_{2n-2}}{\Delta t})^2 - \frac{\Delta t}{3}.(\frac{\tau - t_{2n-2}}{\Delta t})^3\right]_{\tau_{2n-2}}^{\tau_1^*}$$
$$-\left[\frac{(t-t_{2n-2})}{2}.(\frac{\tau - t_{2n-2}}{\Delta t})^2 - \frac{\Delta t}{3}.(\frac{\tau - t_{2n-2}}{\Delta t})^3\right]_{\tau_{2n-2}}^{\tau_2^*}\}$$

$$+\frac{r_{,l}\,r_{,k}}{8\pi\rho r c_1^2}[(\frac{t-\frac{r}{c_1}-t_{2n-2}}{\Delta t})^2-(\frac{t-\frac{r}{c_1}-t_{2n-2}}{\Delta t})]$$

$$+\frac{\delta_{lk}-r_{,l}\,r_{,k}}{8\pi\rho r c_2^2}[(\frac{t-\frac{r}{c_2}-t_{2n-2}}{\Delta t})^2-(\frac{t-\frac{r}{c_2}-t_{2n-2}}{\Delta t})]$$

Durum 4: $\tau_{2n}<\tau_1^*$ ve $0<\tau_2^*<\tau_{2n-2}$

$$H(\tau_1^*-\tau_{2n-2})=1,\qquad H(\tau_1^*-\tau_{2n})=1,$$
$$H(\tau_2^*-\tau_{2n-2})=0,\qquad H(\tau_2^*-\tau_{2n})=0.$$

$$U_{QF}=\frac{(3r_{,l}\,r_{,k}-\delta_{lk})}{8\pi\rho\Delta t\,r^3}.\left[\frac{(t-t_{2n-2})}{3}.(\frac{\tau-t_{2n-2}}{\Delta t})^3-\frac{\Delta t}{4}.(\frac{\tau-t_{2n-2}}{\Delta t})^4\right]_{\tau_{2n-2}}^{\tau_{2n}}$$
$$-\frac{(3r_{,l}\,r_{,k}-\delta_{lk})}{8\pi\rho\Delta t\,r^3}.\left[\frac{(t-t_{2n-2})}{2}.(\frac{\tau-t_{2n-2}}{\Delta t})^2-\frac{\Delta t}{3}.(\frac{\tau-t_{2n-2}}{\Delta t})^3\right]_{\tau_{2n-2}}^{\tau_{2n}}$$

Durum 5: $\tau_{2n}<\tau_1^*$ ve $\tau_{2n-2}<\tau_2^*<\tau_{2n}$

$$H(\tau_1^*-\tau_{2n-2})=1,\qquad H(\tau_1^*-\tau_{2n})=1,$$
$$H(\tau_2^*-\tau_{2n-2})=1,\qquad H(\tau_2^*-\tau_{2n})=0,$$

olduğundan

$$U_{QF}=\frac{(3r_{,l}\,r_{,k}-\delta_{lk})}{8\pi\rho\Delta t\,r^3}.\{\left[\frac{(t-t_{2n-2})}{3}.(\frac{\tau-t_{2n-2}}{\Delta t})^3-\frac{\Delta t}{4}.(\frac{\tau-t_{2n-2}}{\Delta t})^4\right]_{\tau_{2n-2}}^{\tau_{2n}}$$
$$-\left[\frac{(t-t_{2n-2})}{3}.(\frac{\tau-t_{2n-2}}{\Delta t})^3-\frac{\Delta t}{4}.(\frac{\tau-t_{2n-2}}{\Delta t})^4\right]_{\tau_{2n-2}}^{\tau_2^*}\}$$

$$-\frac{(3r_{,l}\,r_{,k}-\delta_{lk})}{8\pi\rho\Delta t\,r^3}.\{\left[\frac{(t-t_{2n-2})}{2}.(\frac{\tau-t_{2n-2}}{\Delta t})^2-\frac{\Delta t}{3}.(\frac{\tau-t_{2n-2}}{\Delta t})^3\right]_{\tau_{2n-2}}^{\tau_{2n}}$$
$$-\left[\frac{(t-t_{2n-2})}{2}.(\frac{\tau-t_{2n-2}}{\Delta t})^2-\frac{\Delta t}{3}.(\frac{\tau-t_{2n-2}}{\Delta t})^3\right]_{\tau_{2n-2}}^{\tau_{2n}}\}$$

$$+\frac{\delta_{lk}-r_{,l}\,r_{,k}}{8\pi\rho r c_2^2}[(\frac{t-\frac{r}{c_2}-t_{2n-2}}{\Delta t})^2-(\frac{t-\frac{r}{c_2}-t_{2n-2}}{\Delta t})]$$

Durum 6: $\tau_{2n}<\tau_1^*$ ve $\tau_{2n}<\tau_2^*$

$$H(\tau_1^*-\tau_{2n-2})=1,\qquad H(\tau_1^*-\tau_{2n})=1,$$
$$H(\tau_2^*-\tau_{2n-2})=1,\qquad H(\tau_2^*-\tau_{2n})=1,$$

Tüm Heaviside fonksiyonları birbirini götürür. Sonuç $U_{QF} = 0$.

$$U_{QM} = \int_{(2n-2)\Delta t}^{2n\Delta t} u_{lk}^{*} M_{QM}(\tau)\, d\tau \tag{6.2}$$

(3.1)'deki $M_{QM}(\tau)$ dikkate alınarak

$$\begin{aligned}
U_{QM} = &-\frac{(3r_{,l}\, r_{,k} - \delta_{lk})}{4\pi\rho r} \int_{(2n-2)\Delta t}^{2n\Delta t} \left(\frac{t-\tau}{r^2}\right).\left(\frac{\tau - t_{2n-2}}{\Delta t}\right)^2 \left[H\left(t-\tau-\frac{r}{c_1}\right) - H\left(t-\tau-\frac{r}{c_2}\right)\right] d\tau \\
&+\frac{(3r_{,l}\, r_{,k} - \delta_{lk})}{2\pi\rho r} \int_{(2n-2)\Delta t}^{2n\Delta t} \left(\frac{t-\tau}{r^2}\right).\left(\frac{\tau - t_{2n-2}}{\Delta t}\right) \left[H\left(t-\tau-\frac{r}{c_1}\right) - H\left(t-\tau-\frac{r}{c_2}\right)\right] d\tau \\
&-\frac{r_{,l}\, r_{,k}}{4\pi\rho r c_1^2} \int_{(2n-2)\Delta t}^{2n\Delta t} \delta\left(t-\tau-\frac{r}{c_1}\right).\left(\frac{\tau - t_{2n-2}}{\Delta t}\right)^2 d\tau \\
&+\frac{r_{,l}\, r_{,k}}{2\pi\rho r c_1^2} \int_{(2n-2)\Delta t}^{2n\Delta t} \delta\left(t-\tau-\frac{r}{c_1}\right).\left(\frac{\tau - t_{2n-2}}{\Delta t}\right) d\tau \\
&+\frac{r_{,l}\, r_{,k}}{4\pi\rho r c_2^2} \int_{(2n-2)\Delta t}^{2n\Delta t} \delta\left(t-\tau-\frac{r}{c_2}\right).\left(\frac{\tau - t_{2n-2}}{\Delta t}\right)^2 d\tau \\
&-\frac{r_{,l}\, r_{,k}}{2\pi\rho r c_2^2} \int_{(2n-2)\Delta t}^{2n\Delta t} \delta\left(t-\tau-\frac{r}{c_2}\right).\left(\frac{\tau - t_{2n-2}}{\Delta t}\right) d\tau \\
&-\frac{\delta_{lk}}{4\pi\rho r c_2^2} \int_{(2n-2)\Delta t}^{2n\Delta t} \delta\left(t-\tau-\frac{r}{c_2}\right).\left(\frac{\tau - t_{2n-2}}{\Delta t}\right)^2 d\tau \\
&+\frac{\delta_{lk}}{2\pi\rho r c_2^2} \int_{(2n-2)\Delta t}^{2n\Delta t} \delta\left(t-\tau-\frac{r}{c_2}\right).\left(\frac{\tau - t_{2n-2}}{\Delta t}\right) d\tau
\end{aligned}$$

yazılabilir. Önceki bölümde alınan integrallerin dikkate alınmasıyla ve ilk iki integral için yine $\dfrac{\tau - t_{2n-2}}{\Delta t}, \dfrac{1}{\Delta t} d\tau = du$ dönüşümü uygulanarak aşağıdaki sonuçlara ulaşılır:

Durum 1: $0 < \tau_1^* < \tau_{m-2}$ ve $0 < \tau_2^* < \tau_1^* < \tau_{m-2}$

$$H(\tau_1^* - \tau_{2n-2}) = 0, \qquad H(\tau_2^* - \tau_{2n-2}) = 0,$$

$$H(\tau_1^* - \tau_{2n}) = 0, \qquad H(\tau_2^* - \tau_{2n}) = 0.$$

Tüm $H = 0$ olduğundan integraller sıfır olur. $U_{QM} = 0$ olur.

Durum 2: $\tau_{2n-2} < \tau_1^* < \tau_{2n}$ ve $0 < \tau_2^* < \tau_{2n-2}$

$$H(\tau_1^* - \tau_{2n-2}) = 1, \qquad H(\tau_2^* - \tau_{2n-2}) = 0,$$
$$H(\tau_1^* - \tau_{2n}) = 0, \qquad H(\tau_2^* - \tau_{2n}) = 0.$$

$$U_{QM}=-\frac{\left(3r_{,l}r_{,k}-\delta_{lk}\right)}{4\pi\rho\Delta t r^{3}}.\left[\frac{(t-t_{2n-2})}{3}.(\frac{\tau-t_{2n-2}}{\Delta t})^{3}-\frac{\Delta t}{4}.(\frac{\tau-t_{2n-2}}{\Delta t})^{4}\right]_{\tau_{2n-2}}^{\tau_1^*}$$

$$+\frac{\left(3r_{,l}r_{,k}-\delta_{lk}\right)}{2\pi\rho\Delta t r^{3}}.\left[\frac{(t-t_{2n-2})}{2}.(\frac{\tau-t_{2n-2}}{\Delta t})^{2}-\frac{\Delta t}{3}.(\frac{\tau-t_{2n-2}}{\Delta t})^{3}\right]_{\tau_{2n-2}}^{\tau_1^*}$$

$$-\frac{r_{,l}r_{,k}}{4\pi\rho r c_1^2}[(\frac{t-\frac{r}{c_1}-t_{2n-2}}{\Delta t})^2-2(\frac{t-\frac{r}{c_1}-t_{2n-2}}{\Delta t})]$$

Durum 3: $\tau_{2n-2}<\tau_1^*<\tau_{2n}$ ve $\tau_{2n-2}<\tau_2^*<\tau_{2n}$

$$H(\tau_1^*-\tau_{2n-2})=1,\qquad H(\tau_2^*-\tau_{2n-2})=1,$$
$$H(\tau_1^*-\tau_{2n})=0,\qquad H(\tau_2^*-\tau_{2n})=0.$$

olduğundan

$$U_{QM}=-\frac{\left(3r_{,l}r_{,k}-\delta_{lk}\right)}{4\pi\rho\Delta t r^{3}}.\{\left[\frac{(t-t_{2n-2})}{3}.(\frac{\tau-t_{2n-2}}{\Delta t})^{3}-\frac{\Delta t}{4}.(\frac{\tau-t_{2n-2}}{\Delta t})^{4}\right]_{\tau_{2n-2}}^{\tau_1^*}$$

$$-\left[\frac{(t-t_{2n-2})}{3}.(\frac{\tau-t_{2n-2}}{\Delta t})^{3}-\frac{\Delta t}{4}.(\frac{\tau-t_{2n-2}}{\Delta t})^{4}\right]_{\tau_{2n-2}}^{\tau_2^*}\}$$

$$+\frac{\left(3r_{,l}r_{,k}-\delta_{lk}\right)}{2\pi\rho\Delta t r^{3}}.\{\left[\frac{(t-t_{2n-2})}{2}.(\frac{\tau-t_{2n-2}}{\Delta t})^{2}-\frac{\Delta t}{3}.(\frac{\tau-t_{2n-2}}{\Delta t})^{3}\right]_{\tau_{2n-2}}^{\tau_1^*}$$

$$-\left[\frac{(t-t_{2n-2})}{2}.(\frac{\tau-t_{2n-2}}{\Delta t})^{2}-\frac{\Delta t}{3}.(\frac{\tau-t_{2n-2}}{\Delta t})^{3}\right]_{\tau_{2n-2}}^{\tau_2^*}\}$$

$$-\frac{r_{,l}r_{,k}}{4\pi\rho r c_1^2}[(\frac{t-\frac{r}{c_1}-t_{2n-2}}{\Delta t})^2-2(\frac{t-\frac{r}{c_1}-t_{2n-2}}{\Delta t})]$$

$$-\frac{(\delta_{lk}-r_{,l}r_{,k})}{4\pi\rho r c_2^2}[(\frac{t-\frac{r}{c_2}-t_{2n-2}}{\Delta t})^2-2(\frac{t-\frac{r}{c_2}-t_{2n-2}}{\Delta t})]$$

Durum 4: $\tau_{2n}<\tau_1^*$ ve $0<\tau_2^*<\tau_{2n-2}$

$$H(\tau_1^*-\tau_{2n-2})=1,\qquad H(\tau_2^*-\tau_{2n-2})=0,$$
$$H(\tau_1^*-\tau_{2n})=1,\qquad H(\tau_2^*-\tau_{2n})=0.$$

$$U_{QM}=-\frac{\left(3r_{,l}r_{,k}-\delta_{lk}\right)}{4\pi\rho\Delta t r^{3}}.\left[\frac{(t-t_{2n-2})}{3}.(\frac{\tau-t_{2n-2}}{\Delta t})^{3}-\frac{\Delta t}{4}.(\frac{\tau-t_{2n-2}}{\Delta t})^{4}\right]_{\tau_{2n-2}}^{\tau_{2n}}$$

$$+\frac{\left(3r_{,l}r_{,k}-\delta_{lk}\right)}{2\pi\rho\Delta t r^{3}}.\left[\frac{(t-t_{2n-2})}{2}.(\frac{\tau-t_{2n-2}}{\Delta t})^{2}-\frac{\Delta t}{3}.(\frac{\tau-t_{2n-2}}{\Delta t})^{3}\right]_{\tau_{2n-2}}^{\tau_{2n}}$$

Durum 5: $\tau_{2n} < \tau_1^*$ ve $\tau_{2n-2} < \tau_2^* < \tau_{2n}$

$$H(\tau_1^* - \tau_{2n-2}) = 1, \qquad H(\tau_2^* - \tau_{2n-2}) = 1,$$
$$H(\tau_1^* - \tau_{2n}) = 1, \qquad H(\tau_2^* - \tau_{2n}) = 0.$$

O halde,

$$U_{QM} = -\frac{(3r_{,l}r_{,k} - \delta_{lk})}{4\pi\rho\Delta t r^3}.\{\left[\frac{(t-t_{2n-2})}{3}.(\frac{\tau - t_{2n-2}}{\Delta t})^3 - \frac{\Delta t}{4}.(\frac{\tau - t_{2n-2}}{\Delta t})^4\right]_{\tau_{2n-2}}^{\tau_{2n}}$$
$$-\left[\frac{(t-t_{2n-2})}{3}.(\frac{\tau - t_{2n-2}}{\Delta t})^3 - \frac{\Delta t}{4}.(\frac{\tau - t_{2n-2}}{\Delta t})^4\right]_{\tau_{2n-2}}^{\tau_2^*}\}$$
$$+\frac{(3r_{,l}r_{,k} - \delta_{lk})}{2\pi\rho\Delta t r^3}.\{\left[\frac{(t-t_{2n-2})}{2}.(\frac{\tau - t_{2n-2}}{\Delta t})^2 - \frac{\Delta t}{3}.(\frac{\tau - t_{2n-2}}{\Delta t})^3\right]_{\tau_{2n-2}}^{\tau_{2n}}$$
$$-\left[\frac{(t-t_{2n-2})}{2}.(\frac{\tau - t_{2n-2}}{\Delta t})^2 - \frac{\Delta t}{3}.(\frac{\tau - t_{2n-2}}{\Delta t})^3\right]_{\tau_{2n-2}}^{\tau_{2n}}\}$$
$$-\frac{(\delta_{lk} - r_{,l}r_{,k})}{4\pi\rho r c_2^2}[(\frac{t - \frac{r}{c_2} - t_{2n-2}}{\Delta t})^2 - 2(\frac{t - \frac{r}{c_2} - t_{2n-2}}{\Delta t})]$$

Durum 6: $\tau_{2n} < \tau_1^*$ ve $\tau_{2n} < \tau_2^*$

$$H(\tau_1^* - \tau_{2n-2}) = 1, \qquad H(\tau_2^* - \tau_{2n-2}) = 1,$$
$$H(\tau_1^* - \tau_{2n}) = 1, \qquad H(\tau_2^* - \tau_{2n}) = 1.$$

Tüm $H = 1$ olduğundan birbirini götürür. $U_{QM} = 0$ olur.

$$U_{QB} = \int_{(2n-2)\Delta t}^{2n\Delta t} u_{lk}^* M_{QB}(\tau)d\tau \tag{6.3}$$

Daha önce (3.1)'de verilmiş olan $M_{QB}(\tau)$ dikkate alınarak,

$$U_{QB} = \frac{(3r_{,l}r_{,k} - \delta_{lk})}{8\pi\rho r}\int_{(2n-2)\Delta t}^{2n\Delta t}(\frac{t-\tau}{r^2}).\left(\frac{\tau - t_{2n-2}}{\Delta t}\right)^2\left[H\left(t-\tau-\frac{r}{c_1}\right) - H\left(t-\tau-\frac{r}{c_2}\right)\right]d\tau$$
$$-\frac{3(3r_{,l}r_{,k} - \delta_{lk})}{8\pi\rho r}\int_{(2n-2)\Delta t}^{2n\Delta t}(\frac{t-\tau}{r^2}).\left(\frac{\tau - t_{2n-2}}{\Delta t}\right)\left[H\left(t-\tau-\frac{r}{c_1}\right) - H\left(t-\tau-\frac{r}{c_2}\right)\right]d\tau$$
$$+\frac{(3r_{,l}r_{,k} - \delta_{lk})}{4\pi\rho r}\int_{(2n-2)\Delta t}^{2n\Delta t}(\frac{t-\tau}{r^2}).\left[H\left(t-\tau-\frac{r}{c_1}\right) - H\left(t-\tau-\frac{r}{c_2}\right)\right]d\tau$$
$$+\frac{r_{,l}r_{,k}}{8\pi\rho r c_1^2}\int_{(2n-2)\Delta t}^{2n\Delta t}\delta\left(t-\tau-\frac{r}{c_1}\right).\left(\frac{\tau - t_{2n-2}}{\Delta t}\right)^2 d\tau$$

$$-\frac{3r_{,l}\,r_{,k}}{8\pi\,\rho r c_1^2}\int_{(2n-2)\Delta t}^{2n\Delta t}\delta\left(t-\tau-\frac{r}{c_1}\right).\left(\frac{\tau-t_{2n-2}}{\Delta t}\right)d\tau$$
$$+\frac{r_{,l}\,r_{,k}}{4\pi\,\rho r c_1^2}\int_{(2n-2)\Delta t}^{2n\Delta t}\delta\left(t-\tau-\frac{r}{c_1}\right)d\tau$$
$$-\frac{r_{,l}\,r_{,k}}{8\pi\,\rho r c_2^2}\int_{(2n-2)\Delta t}^{2n\Delta t}\delta\left(t-\tau-\frac{r}{c_2}\right).\left(\frac{\tau-t_{2n-2}}{\Delta t}\right)^2 d\tau$$
$$+\frac{3r_{,l}\,r_{,k}}{8\pi\,\rho r c_2^2}\int_{(2n-2)\Delta t}^{2n\Delta t}\delta\left(t-\tau-\frac{r}{c_2}\right).\left(\frac{\tau-t_{2n-2}}{\Delta t}\right)d\tau$$
$$-\frac{r_{,l}\,r_{,k}}{4\pi\,\rho r c_2^2}\int_{(2n-2)\Delta t}^{2n\Delta t}\delta\left(t-\tau-\frac{r}{c_2}\right)d\tau$$
$$+\frac{\delta_{lk}}{8\pi\,\rho r c_2^2}\int_{(2n-2)\Delta t}^{2n\Delta t}\delta\left(t-\tau-\frac{r}{c_2}\right).\left(\frac{\tau-t_{2n-2}}{\Delta t}\right)^2 d\tau$$
$$-\frac{3\delta_{lk}}{8\pi\,\rho r c_2^2}\int_{(2n-2)\Delta t}^{2n\Delta t}\delta\left(t-\tau-\frac{r}{c_2}\right).\left(\frac{\tau-t_{2n-2}}{\Delta t}\right)d\tau$$
$$+\frac{\delta_{lk}}{4\pi\,\rho r c_2^2}\int_{(2n-2)\Delta t}^{2n\Delta t}\delta\left(t-\tau-\frac{r}{c_2}\right)d\tau$$

olarak ifade edilir. Burada da U_{QB} 'deki ilk iki integral için $\frac{\tau-t_{2n-2}}{\Delta t},\ \frac{1}{\Delta t}d\tau = du$ dönüşümü ve üçüncü integral için ise $t-\tau = u$ dönüşümü uygulanır.

Durumları inceleyelim:

Durum 1: $0<\tau_1^*<\tau_{2n-2}$ ve $0<\tau_2^*<\tau_1^*<\tau_{2n-2}$

$$H(\tau_1^*-\tau_{2n-2})=0,\qquad H(\tau_2^*-\tau_{2n-2})=0,$$
$$H(\tau_1^*-\tau_{2n})=0,\qquad H(\tau_2^*-\tau_{2n})=0.$$

Tüm $H=0$ olduğundan $U_{QB}=0$ olur.

Durum 2: $\tau_{2n-2}<\tau_1^*<\tau_{2n}$ ve $0<\tau_2^*<\tau_{2n-2}$

$H(\tau_1^*-\tau_{2n-2})=1,\qquad H(\tau_2^*-\tau_{2n-2})=0,$

$H(\tau_1^*-\tau_{2n})=0,\qquad H(\tau_2^*-\tau_{2n})=0$ olduğundan

$$U_{QB}=\frac{(3r_{,l}\,r_{,k}-\delta_{lk})}{8\pi\,\rho\,\Delta t\,r^3}.\left[\frac{(t-t_{2n-2})}{3}.(\frac{\tau-t_{2n-2}}{\Delta t})^3-\frac{\Delta t}{4}.(\frac{\tau-t_{2n-2}}{\Delta t})^4\right]_{\tau_{2n-2}}^{\tau_1^*}$$
$$-\frac{3(3r_{,l}\,r_{,k}-\delta_{lk})}{8\pi\,\rho\,\Delta t\,r^3}.\left[\frac{(t-t_{2n-2})}{2}.(\frac{\tau-t_{2n-2}}{\Delta t})^2-\frac{\Delta t}{3}.(\frac{\tau-t_{2n-2}}{\Delta t})^3\right]_{\tau_{2n-2}}^{\tau_1^*}$$

$$-\frac{\left(3r_{,l}\,r_{,k}-\delta_{lk}\right)}{8\pi\,\rho\,r^{3}}.\left[\left(t-\tau\right)^{2}\right]_{\tau_{2n-2}}^{\tau_1^*}$$

$$+\frac{r_{,l}\,r_{,k}}{4\pi\,\rho\,r\,c_1^{2}}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{t-\frac{r}{c_1}-t_{2n-2}}{\Delta t}\right)^2-\frac{3}{2}\left(\frac{t-\frac{r}{c_1}-t_{2n-2}}{\Delta t}\right)+1\right]$$

Durum 3: $\tau_{2n-2}<\tau_1^*<\tau_{2n}$ ve $\tau_{2n-2}<\tau_2^*<\tau_{2n}$

$$H(\tau_1^*-\tau_{2n-2})=1,\qquad H(\tau_2^*-\tau_{2n-2})=1,$$
$$H(\tau_1^*-\tau_{2n})=0,\qquad H(\tau_2^*-\tau_{2n})=0.$$

O halde,

$$U_{QB}=\frac{\left(3r_{,l}\,r_{,k}-\delta_{lk}\right)}{8\pi\,\rho\,\Delta t\,r^{3}}.\left\{\left[\frac{(t-t_{2n-2})}{3}.\left(\frac{\tau-t_{2n-2}}{\Delta t}\right)^3-\frac{\Delta t}{4}.\left(\frac{\tau-t_{2n-2}}{\Delta t}\right)^4\right]_{\tau_{2n-2}}^{\tau_1^*}\right.$$
$$\left.-\left[\frac{(t-t_{2n-2})}{3}.\left(\frac{\tau-t_{2n-2}}{\Delta t}\right)^3-\frac{\Delta t}{4}.\left(\frac{\tau-t_{2n-2}}{\Delta t}\right)^4\right]_{\tau_{2n-2}}^{\tau_2^*}\right\}$$
$$-\frac{\left(3r_{,l}\,r_{,k}-\delta_{lk}\right)}{8\pi\,\rho\,\Delta t\,r^{3}}.\left\{\left[\frac{(t-t_{2n-2})}{2}.\left(\frac{\tau-t_{2n-2}}{\Delta t}\right)^2-\frac{\Delta t}{3}.\left(\frac{\tau-t_{2n-2}}{\Delta t}\right)^3\right]_{\tau_{2n-2}}^{\tau_1^*}\right.$$
$$\left.-\left[\frac{(t-t_{2n-2})}{2}.\left(\frac{\tau-t_{2n-2}}{\Delta t}\right)^2-\frac{\Delta t}{3}.\left(\frac{\tau-t_{2n-2}}{\Delta t}\right)^3\right]_{\tau_{2n-2}}^{\tau_2^*}\right\}$$
$$-\frac{\left(3r_{,l}\,r_{,k}-\delta_{lk}\right)}{8\pi\,\rho\,r^{3}}.\left\{\left[\left(t-\tau\right)^{2}\right]_{\tau_{2n-2}}^{\tau_1^*}-\left[\left(t-\tau\right)^{2}\right]_{\tau_{2n-2}}^{\tau_2^*}\right\}$$
$$+\frac{r_{,l}\,r_{,k}}{4\pi\,\rho\,r\,c_1^{2}}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{t-\frac{r}{c_1}-t_{2n-2}}{\Delta t}\right)^2-\frac{3}{2}\left(\frac{t-\frac{r}{c_1}-t_{2n-2}}{\Delta t}\right)+1\right]$$
$$+\frac{(\delta_{lk}-r_{,l}\,r_{,k})}{4\pi\,\rho\,r\,c_2^{2}}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{t-\frac{r}{c_2}-t_{2n-2}}{\Delta t}\right)^2-\frac{3}{2}\left(\frac{t-\frac{r}{c_2}-t_{2n-2}}{\Delta t}\right)+1\right]$$

Durum 4: $\tau_{2n}<\tau_1^*$ ve $0<\tau_2^*<\tau_{2n-2}$

$$H(\tau_1^*-\tau_{2n-2})=1,\qquad H(\tau_2^*-\tau_{2n-2})=0,$$
$$H(\tau_1^*-\tau_{2n})=1,\qquad H(\tau_2^*-\tau_{2n})=0.$$

Buradan,

$$U_{QB}=\frac{\left(3r_{,l}\,r_{,k}-\delta_{lk}\right)}{8\pi\,\rho\,\Delta t\,r^{3}}.\left[\frac{(t-t_{2n-2})}{3}.\left(\frac{\tau-t_{2n-2}}{\Delta t}\right)^3-\frac{\Delta t}{4}.\left(\frac{\tau-t_{2n-2}}{\Delta t}\right)^4\right]_{\tau_{2n-2}}^{\tau_{2n}}$$
$$-\frac{\left(3r_{,l}\,r_{,k}-\delta_{lk}\right)}{8\pi\,\rho\,\Delta t\,r^{3}}.\left[\frac{(t-t_{2n-2})}{2}.\left(\frac{\tau-t_{2n-2}}{\Delta t}\right)^2-\frac{\Delta t}{3}.\left(\frac{\tau-t_{2n-2}}{\Delta t}\right)^3\right]_{\tau_{2n-2}}^{\tau_{2n}}$$

$$-\frac{\left(3r_{,l}\,r_{,k}-\delta_{lk}\right)}{8\pi\,\rho\,r^{3}}.\left[\left(t-\tau\right)^{2}\right]_{\tau_{2n-2}}^{\tau_{2n}}$$

Durum 5: $\tau_{2n} < \tau_1^*$ ve $\tau_{2n-2} < \tau_2^* < \tau_{2n}$

$$H(\tau_1^*-\tau_{2n-2})=1, \qquad H(\tau_2^*-\tau_{2n-2})=1,$$
$$H(\tau_1^*-\tau_{2n})=1, \qquad H(\tau_2^*-\tau_{2n})=0$$

olduğundan

$$U_{QB}=\frac{\left(3r_{,l}\,r_{,k}-\delta_{lk}\right)}{8\pi\,\rho\,\Delta t\,r^{3}}.\{\left[\frac{(t-t_{2n-2})}{3}.(\frac{\tau-t_{2n-2}}{\Delta t})^{3}-\frac{\Delta t}{4}.(\frac{\tau-t_{2n-2}}{\Delta t})^{4}\right]_{\tau_{2n-2}}^{\tau_{2n}}$$
$$-\left[\frac{(t-t_{2n-2})}{3}.(\frac{\tau-t_{2n-2}}{\Delta t})^{3}-\frac{\Delta t}{4}.(\frac{\tau-t_{2n-2}}{\Delta t})^{4}\right]_{\tau_{2n-2}}^{\tau_2^*}\}$$
$$-\frac{\left(3r_{,l}\,r_{,k}-\delta_{lk}\right)}{8\pi\,\rho\,\Delta t\,r^{3}}.\{\left[\frac{(t-t_{2n-2})}{2}.(\frac{\tau-t_{2n-2}}{\Delta t})^{2}-\frac{\Delta t}{3}.(\frac{\tau-t_{2n-2}}{\Delta t})^{3}\right]_{\tau_{2n-2}}^{\tau_{2n}}$$
$$-\left[\frac{(t-t_{2n-2})}{2}.(\frac{\tau-t_{2n-2}}{\Delta t})^{2}-\frac{\Delta t}{3}.(\frac{\tau-t_{2n-2}}{\Delta t})^{3}\right]_{\tau_{2n-2}}^{\tau_2^*}\}$$
$$-\frac{\left(3r_{,l}\,r_{,k}-\delta_{lk}\right)}{8\pi\,\rho\,r^{3}}.\{\left[\left(t-\tau\right)^{2}\right]_{\tau_{2n-2}}^{\tau_{2n}}-\left[\left(t-\tau\right)^{2}\right]_{\tau_{2n-2}}^{\tau_2^*}\}$$
$$+\frac{(\delta_{lk}-r_{,l}\,r_{,k})}{4\pi\,\rho\,r\,c_2^{2}}[\frac{1}{2}(\frac{t-\dfrac{r}{c_2}-t_{2n-2}}{\Delta t})^{2}-\frac{3}{2}(\frac{t-\dfrac{r}{c_2}-t_{2n-2}}{\Delta t})+1]$$

Durum 6: $\tau_{2n} < \tau_1^*$ ve $\tau_{2n} < \tau_2^*$

$$H(\tau_1^*-\tau_{2n-2})=1, \qquad H(\tau_2^*-\tau_{2n-2})=1,$$
$$H(\tau_1^*-\tau_{2n})=1, \qquad H(\tau_2^*-\tau_{2n})=1.$$

$$U_{QB}=0$$

olarak bulunur.

Gerilim çekirdeklerini de zamanın kuadratik olarak değişmesine göre elde edelim:

$$Q_{lk}=\frac{1}{4\pi r^{2}}\left[r_{,l}\,r_{,k}\,\frac{\partial r}{\partial n}K_1+\left(\delta_{lk}\,\frac{\partial r}{\partial n}+r_{,k}\,n_l\right)K_2+r_{,l}n_k\;K_3\right] \tag{6.4}$$

$$K_1=-\frac{5A_1}{r^{2}}+12A_2+\frac{2r\,A_3}{c_2} \tag{6.4a}$$

$$K_2 = \frac{A_1}{r^2} - 2A_2 - A_5 \tag{6.4b}$$

$$K_3 = \frac{A_1}{r^2} - 2A_2 - A_4\left(1 - 2\frac{c_2^2}{c_1^2}\right) \tag{6.4c}$$

Başlangıç olarak (3.1)'de verilen $M_{QF}(\tau)$ dikkate alınarak,

$$A_\alpha = \int_{\Delta t_m} b^\alpha M_{QF}(\tau)\, d\tau, \quad 1 \le \alpha \le 5 \tag{6.5}$$

$$b^1 = 6c_2^2(t-\tau)\left[H\left(t-\tau-\frac{r}{c_1}\right) - H\left(t-\tau-\frac{r}{c_2}\right)\right]$$

$$b^2 = \delta\left(t-\tau-\frac{r}{c_2}\right) - \frac{c_2^2}{c_1^2}\delta\left(t-\tau-\frac{r}{c_1}\right)$$

$$b^3 = \dot{\delta}\left(t-\tau-\frac{r}{c_2}\right) - \frac{c_2^3}{c_1^3}\dot{\delta}\left(t-\tau-\frac{r}{c_1}\right)$$

$$b^4 = \delta\left(t-\tau-\frac{r}{c_1}\right) + \frac{r}{c_1}\dot{\delta}\left(t-\tau-\frac{r}{c_1}\right)$$

$$b^5 = \delta\left(t-\tau-\frac{r}{c_2}\right) + \frac{r}{c_2}\dot{\delta}\left(t-\tau-\frac{r}{c_2}\right)$$

Durum 1: $0 < \tau_1^* < \tau_{2n-2}$ ve $0 < \tau_2^* < \tau_1^* < \tau_{2n-2}$

$$H(\tau_1^* - \tau_{2n-2}) = 0, \qquad H(\tau_2^* - \tau_{2n-2}) = 0,$$
$$H(\tau_1^* - \tau_{2n}) = 0, \qquad H(\tau_2^* - \tau_{2n}) = 0.$$

$$A_1 = 3c_2^2 \int_{\tau_{2n-2}}^{\tau_{2n}} (t-\tau)\left(\frac{\tau - t_{2n-2}}{\Delta t}\right)^2 \left[H\left(\tau_1^* - \tau\right) - H\left(\tau_2^* - \tau\right)\right] d\tau$$
$$-3c_2^2 \int_{\tau_{2n-2}}^{\tau_{2n}} (t-\tau)\left(\frac{\tau - t_{2n-2}}{\Delta t}\right)\left[H\left(\tau_1^* - \tau\right) - H\left(\tau_2^* - \tau\right)\right] d\tau$$

$$A_2 = \frac{1}{2}\int_{\tau_{2n-2}}^{\tau_{2n}} \delta\left(\tau_2^* - \tau\right)\left(\frac{\tau - t_{2n-2}}{\Delta t}\right)^2 d\tau - \frac{1}{2}\int_{\tau_{2n-2}}^{\tau_{2n}} \delta\left(\tau_2^* - \tau\right)\left(\frac{\tau - t_{2n-2}}{\Delta t}\right) d\tau$$
$$-\frac{c_2^2}{2c_1^2}\int_{\tau_{2n-2}}^{\tau_{2n}} \delta\left(\tau_1^* - \tau\right)\left(\frac{\tau - t_{2n-2}}{\Delta t}\right)^2 d\tau + \frac{c_2^2}{2c_1^2}\int_{\tau_{2n-2}}^{\tau_{2n}} \delta\left(\tau_1^* - \tau\right)\left(\frac{\tau - t_{2n-2}}{\Delta t}\right) d\tau$$

$$A_3=\frac{1}{2}\int\limits_{\tau_{2n-2}}^{\tau_{2n}}\dot{\delta}\left(\tau_2^*-\tau\right)\left(\frac{\tau-t_{2n-2}}{\Delta t}\right)^2 d\tau-\frac{1}{2}\int\limits_{\tau_{2n-2}}^{\tau_{2n}}\dot{\delta}\left(\tau_2^*-\tau\right)\left(\frac{\tau-t_{2n-2}}{\Delta t}\right)d\tau$$

$$-\frac{c_2^3}{2c_1^3}\int\limits_{\tau_{2n-2}}^{\tau_{2n}}\dot{\delta}\left(\tau_2^*-\tau\right)\left(\frac{\tau-t_{2n-2}}{\Delta t}\right)^2 d\tau+\frac{c_2^3}{2c_1^3}\int\limits_{\tau_{2n-2}}^{\tau_{2n}}\dot{\delta}\left(\tau_2^*-\tau\right)\left(\frac{\tau-t_{2n-2}}{\Delta t}\right)d\tau$$

$$A_4=\frac{1}{2}\int\limits_{\tau_{2n-2}}^{\tau_{2n}}\delta\left(\tau_1^*-\tau\right)\left(\frac{\tau-t_{2n-2}}{\Delta t}\right)^2 d\tau-\frac{1}{2}\int\limits_{\tau_{2n-2}}^{\tau_{2n}}\delta\left(\tau_1^*-\tau\right)\left(\frac{\tau-t_{2n-2}}{\Delta t}\right)d\tau$$
$$+\frac{r}{2c_1}\int\limits_{\tau_{2n-2}}^{\tau_{2n}}\dot{\delta}\left(\tau_1^*-\tau\right)\left(\frac{\tau-t_{2n-2}}{\Delta t}\right)^2 d\tau-\frac{r}{2c_1}\int\limits_{\tau_{2n-2}}^{\tau_{2n}}\dot{\delta}\left(\tau_1^*-\tau\right)\left(\frac{\tau-t_{2n-2}}{\Delta t}\right)d\tau$$

$$A_5=\frac{1}{2}\int\limits_{\tau_{2n-2}}^{\tau_{2n}}\delta\left(\tau_2^*-\tau\right)\left(\frac{\tau-t_{2n-2}}{\Delta t}\right)^2 d\tau-\frac{1}{2}\int\limits_{\tau_{2n-2}}^{\tau_{2n}}\delta\left(\tau_2^*-\tau\right)\left(\frac{\tau-t_{2n-2}}{\Delta t}\right)d\tau$$

$$+\frac{r}{2c_2}\int\limits_{\tau_{2n-2}}^{\tau_{2n}}\dot{\delta}\left(\tau_2^*-\tau\right)\left(\frac{\tau-t_{2n-2}}{\Delta t}\right)^2 d\tau-\frac{r}{2c_2}\int\limits_{\tau_{2n-2}}^{\tau_{2n}}\dot{\delta}\left(\tau_2^*-\tau\right)\left(\frac{\tau-t_{2n-2}}{\Delta t}\right)d\tau$$

A_1 içindeki integraller $\frac{\tau-t_{2n-2}}{\Delta t}=u$ dönüşümüyle elde edilir. Buradan,

Durum 1 de tüm $H=0$ olduğundan $A_1=0$, $A_2=0$, $A_3=0$, $A_4=0$ ve $A_5=0$ olur.

Durum 2: $\tau_{2n-2}<\tau_1^*<\tau_{2n}$ ve $0<\tau_2^*<\tau_{2n-2}$

$$H(\tau_1^*-\tau_{2n-2})=1,\qquad H(\tau_2^*-\tau_{2n-2})=0,$$
$$H(\tau_1^*-\tau_{2n})=0,\qquad H(\tau_2^*-\tau_{2n})=0.$$

Buna göre;

$$A_1=\frac{3c_2^2}{\Delta t}\left[\frac{(t-t_{2n-2})}{3}.(\frac{\tau-t_{2n-2}}{\Delta t})^3-\frac{\Delta t}{4}.(\frac{\tau-t_{2n-2}}{\Delta t})^4\right]_{\tau_{2n-2}}^{\tau_1^*}$$
$$-\frac{3c_2^2}{\Delta t}\left[\frac{(t-t_{2n-2})}{2}.(\frac{\tau-t_{2n-2}}{\Delta t})^2-\frac{\Delta t}{3}.(\frac{\tau-t_{2n-2}}{\Delta t})^3\right]_{\tau_{2n-2}}^{\tau_1^*}$$

$$A_2=\frac{c_2^2}{2c_1^2}\{(\frac{t-\frac{r}{c_1}-t_{2n-2}}{\Delta t})^2-(\frac{t-\frac{r}{c_1}-t_{2n-2}}{\Delta t})\}$$

$$A_3=\frac{c_2^3}{2c_1^3\Delta t}\{2(\frac{t-\frac{r}{c_1}-t_{2n-2}}{\Delta t})-1\}$$

$$A_4 = \frac{1}{2}\{(\frac{t-\frac{r}{c_1}-t_{2n-2}}{\Delta t})^2 - (\frac{t-\frac{r}{c_1}-t_{2n-2}}{\Delta t})\} - \frac{r}{2c_1\Delta t}\{2(\frac{t-\frac{r}{c_1}-t_{2n-2}}{\Delta t})-1\}$$

$$A_5 = 0$$

olarak bulunur.

Durum 3: $\tau_{2n-2} < \tau_1^* < \tau_{2n}$ ve $\tau_{2n-2} < \tau_2^* < \tau_{2n}$

$$H(\tau_1^* - \tau_{2n-2}) = 1, \qquad H(\tau_2^* - \tau_{2n-2}) = 1,$$
$$H(\tau_1^* - \tau_{2n}) = 0, \qquad H(\tau_2^* - \tau_{2n}) = 0,$$

olduğundan

$$A_1 = \frac{3c_2^2}{\Delta t}\{\left[\frac{(t-t_{2n-2})}{3}.(\frac{\tau-t_{2n-2}}{\Delta t})^3 - \frac{\Delta t}{4}.(\frac{\tau-t_{2n-2}}{\Delta t})^4\right]_{\tau_{2n-2}}^{\tau_1^*}$$
$$-\left[\frac{(t-t_{2n-2})}{3}.(\frac{\tau-t_{2n-2}}{\Delta t})^3 - \frac{\Delta t}{4}.(\frac{\tau-t_{2n-2}}{\Delta t})^4\right]_{\tau_{2n-2}}^{\tau_2^*}\}$$
$$-\frac{3c_2^2}{\Delta t}\{\left[\frac{(t-t_{2n-2})}{2}.(\frac{\tau-t_{2n-2}}{\Delta t})^2 - \frac{\Delta t}{3}.(\frac{\tau-t_{2n-2}}{\Delta t})^3\right]_{\tau_{2n-2}}^{\tau_1^*}$$
$$-\left[\frac{(t-t_{2n-2})}{2}.(\frac{\tau-t_{2n-2}}{\Delta t})^2 - \frac{\Delta t}{3}.(\frac{\tau-t_{2n-2}}{\Delta t})^3\right]_{\tau_{2n-2}}^{\tau_2^*}\}$$

$$A_2 = \frac{c_2^2}{2c_1^2}\{(\frac{t-\frac{r}{c_1}-t_{2n-2}}{\Delta t})^2 - (\frac{t-\frac{r}{c_1}-t_{2n-2}}{\Delta t})\}$$

$$A_3 = \frac{c_2^3}{2c_1^3\Delta t}\{2(\frac{t-\frac{r}{c_2}-t_{2n-2}}{\Delta t})-1\} - \frac{1}{2}\{2(\frac{t-\frac{r}{c_2}-t_{2n-2}}{\Delta t})-1\}$$

$$A_4 = \frac{1}{2}\{(\frac{t-\frac{r}{c_1}-t_{2n-2}}{\Delta t})^2 - (\frac{t-\frac{r}{c_1}-t_{2n-2}}{\Delta t})\} - \frac{r}{2c_1\Delta t}\{2(\frac{t-\frac{r}{c_1}-t_{2n-2}}{\Delta t})-1\}$$
$$A_5 = \frac{1}{2}\{(\frac{t-\frac{r}{c_2}-t_{2n-2}}{\Delta t})^2 - (\frac{t-\frac{r}{c_2}-t_{2n-2}}{\Delta t})\} - \frac{r}{2c_2\Delta t}\{2(\frac{t-\frac{r}{c_2}-t_{2n-2}}{\Delta t})-1\}.$$

Durum 4: $\tau_{2n} < \tau_1^*$ ve $0 < \tau_2^* < \tau_{2n-2}$

$$H(\tau_1^* - \tau_{2n-2}) = 1, \qquad H(\tau_2^* - \tau_{2n-2}) = 0,$$

$$H(\tau_1^* - \tau_{2n}) = 1, \qquad H(\tau_2^* - \tau_{2n}) = 0.$$

$$A_1 = \frac{3c_2^2}{\Delta t}\{\left[\frac{(t-t_{2n-2})}{3}.(\frac{\tau - t_{2n-2}}{\Delta t})^3 - \frac{\Delta t}{4}.(\frac{\tau - t_{2n-2}}{\Delta t})^4\right]_{\tau_{2n-2}}^{\tau_{2n}}$$
$$-\left[\frac{(t-t_{2n-2})}{2}.(\frac{\tau - t_{2n-2}}{\Delta t})^2 - \frac{\Delta t}{3}.(\frac{\tau - t_{2n-2}}{\Delta t})^3\right]_{\tau_{2n-2}}^{\tau_{2n}}\}.$$

$A_2 = 0, A_3 = 0, A_4 = 0$ ve $A_5 = 0.$ olur.

Durum 5: $\tau_{2n} < \tau_1^*$ ve $\tau_{2n-2} < \tau_2^* < \tau_{2n}$

$$H(\tau_1^* - \tau_{2n-2}) = 1, \qquad H(\tau_2^* - \tau_{2n-2}) = 1,$$
$$H(\tau_1^* - \tau_{2n}) = 1, \qquad H(\tau_2^* - \tau_{2n}) = 0 \quad \text{olduğundan}$$

$$A_1 = \frac{3c_2^2}{\Delta t}\{\left[\frac{(t-t_{2n-2})}{3}.(\frac{\tau - t_{2n-2}}{\Delta t})^3 - \frac{\Delta t}{4}.(\frac{\tau - t_{2n-2}}{\Delta t})^4\right]_{\tau_{2n-2}}^{\tau_{2n}}$$
$$-\left[\frac{(t-t_{2n-2})}{3}.(\frac{\tau - t_{2n-2}}{\Delta t})^3 - \frac{\Delta t}{4}.(\frac{\tau - t_{2n-2}}{\Delta t})^4\right]_{\tau_{2n-2}}^{\tau_2^*}\}$$
$$-\frac{3c_2^2}{\Delta t}\{\left[\frac{(t-t_{2n-2})}{2}.(\frac{\tau - t_{2n-2}}{\Delta t})^2 - \frac{\Delta t}{3}.(\frac{\tau - t_{2n-2}}{\Delta t})^3\right]_{\tau_{2n-2}}^{\tau_{2n}}$$
$$-\left[\frac{(t-t_{2n-2})}{2}.(\frac{\tau - t_{2n-2}}{\Delta t})^2 - \frac{\Delta t}{3}.(\frac{\tau - t_{2n-2}}{\Delta t})^3\right]_{\tau_{2n-2}}^{\tau_{2n}}\}$$

$$A_2 = \frac{1}{2}\{(\frac{t - \frac{r}{c_2} - t_{2n-2}}{\Delta t})^2 - (\frac{t - \frac{r}{c_2} - t_{2n-2}}{\Delta t})\}$$

$$A_3 = -\frac{1}{2\Delta t}\{2(\frac{t - \frac{r}{c_2} - t_{2n-2}}{\Delta t})^2 - 1\}, \quad A_4 = 0\,.$$

$$A_5 = \frac{1}{2}\{(\frac{t - \frac{r}{c_2} - t_{2n-2}}{\Delta t})^2 - (\frac{t - \frac{r}{c_2} - t_{2n-2}}{\Delta t})\} - \frac{r}{2c_2\Delta t}\{2(\frac{t - \frac{r}{c_2} - t_{2n-2}}{\Delta t}) - 1\}$$

Durum 6: $\tau_{2n} < \tau_1^*$ ve $\tau_{2n-2} < \tau_2^* < \tau_{2n}$

$$H(\tau_1^* - \tau_{2n-2}) = 1, \qquad H(\tau_2^* - \tau_{2n-2}) = 1,$$
$$H(\tau_1^* - \tau_{2n}) = 1, \qquad H(\tau_2^* - \tau_{2n}) = 1.$$

Tüm $H = 1$ ve bu sebeple $A_1 = 0,\ A_2 = 0,\ A_3 = 0,\ A_4 = 0,\ A_5 = 0$ olur.

Şimdi ise (3.1)'de verilmiş olan $M_{QM}(\tau)$ fonksiyonunu dikkate alalım:

$$Q_{lk} = \frac{1}{4\pi r^2}\left[r_{,l} r_{,k} \frac{\partial r}{\partial n} K_1 + \left(\delta_{lk} \frac{\partial r}{\partial n} + r_{,k} n_l \right) K_2 + r_{,l} n_k K_3 \right]$$

$$K_1 = -\frac{5A_1}{r^2} + 12A_2 + \frac{2rA_3}{c_2}$$

$$K_2 = \frac{A_1}{r^2} - 2A_2 - A_5$$

$$K_3 = \frac{A_1}{r^2} - 2A_2 - A_4\left(1 - 2\frac{c_2^2}{c_1^2}\right)$$

$$A_\alpha = \int_{\Delta t_m} b^\alpha M_{QM}(\tau)\, d\tau \tag{6.6}$$

$$A_1 = \int_{\Delta t_m} b^1 M_{QM}(\tau)\, d\tau$$

$$A_1 = -6c_2^2 \int_{\tau_{2n-2}}^{\tau_{2n}} (t-\tau)\left(\frac{\tau - t_{2n-2}}{\Delta t}\right)^2 \left[H(\tau_1^* - \tau) - H(\tau_2^* - \tau)\right] d\tau$$
$$+12c_2^2 \int_{\tau_{2n-2}}^{\tau_{2n}} (t-\tau)\left(\frac{\tau - t_{2n-2}}{\Delta t}\right)\left[H(\tau_1^* - \tau) - H(\tau_2^* - \tau)\right] d\tau$$

$$A_2 = -\int_{\tau_{2n-2}}^{\tau_{2n}} \delta\left(t - \tau - \frac{r}{c_2}\right)\left(\frac{\tau - t_{2n-2}}{\Delta t}\right)^2 d\tau + 2\int_{\tau_{2n-2}}^{\tau_{2n}} \delta\left(t - \tau - \frac{r}{c_2}\right)\left(\frac{\tau - t_{2n-2}}{\Delta t}\right) d\tau$$

$$+\frac{c_2^2}{c_1^2}\int_{\tau_{2n-2}}^{\tau_{2n}} \delta\left(t - \tau - \frac{r}{c_1}\right)\left(\frac{\tau - t_{2n-2}}{\Delta t}\right)^2 d\tau - \frac{2c_2^2}{c_1^2}\int_{\tau_{2n-2}}^{\tau_{2n}} \delta\left(t - \tau - \frac{r}{c_1}\right)\left(\frac{\tau - t_{2n-2}}{\Delta t}\right) d\tau$$

$$A_3 = -\int_{\tau_{2n-2}}^{\tau_{2n}} \dot{\delta}\left(t - \tau - \frac{r}{c_2}\right)\left(\frac{\tau - t_{2n-2}}{\Delta t}\right)^2 d\tau + 2\int_{\tau_{2n-2}}^{\tau_{2n}} \dot{\delta}\left(t - \tau - \frac{r}{c_2}\right)\left(\frac{\tau - t_{2n-2}}{\Delta t}\right) d\tau$$

$$+\frac{c_2^3}{c_1^3}\int_{\tau_{2n-2}}^{\tau_{2n}} \dot{\delta}\left(t - \tau - \frac{r}{c_1}\right)\left(\frac{\tau - t_{2n-2}}{\Delta t}\right)^2 d\tau - \frac{2c_2^3}{c_1^3}\int_{\tau_{2n-2}}^{\tau_{2n}} \dot{\delta}\left(t - \tau - \frac{r}{c_1}\right)\left(\frac{\tau - t_{2n-2}}{\Delta t}\right) d\tau$$

$$A_4 = -\int_{\tau_{2n-2}}^{\tau_{2n}} \delta\left(t - \tau - \frac{r}{c_1}\right)\left(\frac{\tau - t_{2n-2}}{\Delta t}\right)^2 d\tau + 2\int_{\tau_{2n-2}}^{\tau_{2n}} \delta\left(t - \tau - \frac{r}{c_1}\right)\left(\frac{\tau - t_{2n-2}}{\Delta t}\right) d\tau$$

$$-\frac{r}{c_1}\int_{\tau_{2n-2}}^{\tau_{2n}} \dot{\delta}\left(t - \tau - \frac{r}{c_1}\right)\left(\frac{\tau - t_{2n-2}}{\Delta t}\right)^2 d\tau + \frac{2r}{c_1}\int_{\tau_{2n-2}}^{\tau_{2n}} \dot{\delta}\left(t - \tau - \frac{r}{c_1}\right)\left(\frac{\tau - t_{2n-2}}{\Delta t}\right) d\tau$$

$$A_5 = -\int_{\tau_{2n-2}}^{\tau_{2n}} \delta\left(t-\tau-\frac{r}{c_2}\right)\left(\frac{\tau-t_{2n-2}}{\Delta t}\right)^2 d\tau + 2\int_{\tau_{2n-2}}^{\tau_{2n}} \delta\left(t-\tau-\frac{r}{c_2}\right)\left(\frac{\tau-t_{2n-2}}{\Delta t}\right) d\tau$$

$$-\frac{r}{c_2}\int_{\tau_{2n-2}}^{\tau_{2n}} \dot{\delta}\left(t-\tau-\frac{r}{c_2}\right)\left(\frac{\tau-t_{2n-2}}{\Delta t}\right)^2 d\tau + \frac{2r}{c_2}\int_{\tau_{2n-2}}^{\tau_{2n}} \dot{\delta}\left(t-\tau-\frac{r}{c_2}\right)\left(\frac{\tau-t_{2n-2}}{\Delta t}\right) d\tau$$

Burada da A_1 içindeki integraller $\frac{\tau-t_{2n-2}}{\Delta t}=u$ dönüşümüyle elde edilir.

Durum 1: $0<\tau_2^*<\tau_{2n-2}$ ve $0<\tau_1^*<\tau_{2n-2}$

$$H(\tau_1^*-\tau_{2n-2})=0 \qquad H(\tau_2^*-\tau_{2n-2})=0$$
$$H(\tau_1^*-\tau_{2n})=0 \qquad H(\tau_2^*-\tau_{2n})=0$$

Tüm $H=0$ olduğundan $A_1=0,\quad A_2=0,\quad A_3=0,\quad A_4=0\ ve\quad A_5=0$ olur.

Durum 2: $\tau_{2n-2}<\tau_1^*<\tau_{2n}$ ve $0<\tau_2^*<\tau_{2n-2}$

$$H(\tau_1^*-\tau_{2n-2})=1, \qquad H(\tau_2^*-\tau_{2n-2})=0,$$
$$H(\tau_1^*-\tau_{2n})=0, \qquad H(\tau_2^*-\tau_{2n})=0 \text{ olur.}$$

Böylece

$$A_1 = \frac{-6c_2^2}{\Delta t}\left[\frac{(t-t_{2n-2})}{3}.(\frac{\tau-t_{2n-2}}{\Delta t})^3 - \frac{\Delta t}{4}.(\frac{\tau-t_{2n-2}}{\Delta t})^4\right]_{\tau_{2n-2}}^{\tau_1^*}$$
$$+\frac{12c_2^2}{\Delta t}\left[\frac{(t-t_{2n-2})}{2}.(\frac{\tau-t_{2n-2}}{\Delta t})^2 - \frac{\Delta t}{3}.(\frac{\tau-t_{2n-2}}{\Delta t})^3\right]_{\tau_{2n-2}}^{\tau_1^*}$$

$$A_2 = \frac{c_2^2}{2c_1^2}\{(\frac{t-\frac{r}{c_1}-t_{2n-2}}{\Delta t})^2 - 2(\frac{t-\frac{r}{c_1}-t_{2n-2}}{\Delta t})\}$$

$$A_3 = -\frac{2c_2^3}{c_1^3\Delta t}\cdot\{(\frac{t-\frac{r}{c_1}-t_{2n-2}}{\Delta t})^2-1\}$$

$$A_4 = -\{(\frac{t-\frac{r}{c_1}-t_{2n-2}}{\Delta t})^2 - 2(\frac{t-\frac{r}{c_1}-t_{2n-2}}{\Delta t})\} - \frac{2r}{c_1\Delta t}\cdot\{(\frac{t-\frac{r}{c_1}-t_{2n-2}}{\Delta t})-1\}$$

$$A_5=0.$$

Durum 3: $\tau_{2n-2}<\tau_1^*<\tau_{2n}$ ve $\tau_{2n-2}<\tau_2^*<\tau_{2n}$

$$H(\tau_1^*-\tau_{2n-2})=1, \qquad H(\tau_2^*-\tau_{2n-2})=1,$$
$$H(\tau_1^*-\tau_{2n})=0, \qquad H(\tau_2^*-\tau_{2n})=0 \text{ olur.}$$

Böylece

$$A_1 = -\frac{6c_2^2}{\Delta t}\{\left[\frac{(t-t_{2n-2})}{3}.(\frac{\tau-t_{2n-2}}{\Delta t})^3 - \frac{\Delta t}{4}.(\frac{\tau-t_{2n-2}}{\Delta t})^4\right]_{\tau_{2n-2}}^{\tau_1^*}$$

$$-\left[\frac{(t-t_{2n-2})}{3}.(\frac{\tau-t_{2n-2}}{\Delta t})^3 - \frac{\Delta t}{4}.(\frac{\tau-t_{2n-2}}{\Delta t})^4\right]_{\tau_{2n-2}}^{\tau_2^*}\}$$

$$+\frac{12c_2^2}{\Delta t}\{\left[\frac{(t-t_{2n-2})}{2}.(\frac{\tau-t_{2n-2}}{\Delta t})^2 - \frac{\Delta t}{3}.(\frac{\tau-t_{2n-2}}{\Delta t})^3\right]_{\tau_{2n-2}}^{\tau_1^*}$$

$$-\left[\frac{(t-t_{2n-2})}{2}.(\frac{\tau-t_{2n-2}}{\Delta t})^2 - \frac{\Delta t}{3}.(\frac{\tau-t_{2n-2}}{\Delta t})^3\right]_{\tau_{2n-2}}^{\tau_2^*}\}$$

$$A_2 = -\{(\frac{t-\frac{r}{c_2}-t_{2n-2}}{\Delta t})^2 - 2(\frac{t-\frac{r}{c_2}-t_{2n-2}}{\Delta t})\} + \frac{c_2^2}{c_1^2}\{(\frac{t-\frac{r}{c_1}-t_{2n-2}}{\Delta t})^2 - 2(\frac{t-\frac{r}{c_1}-t_{2n-2}}{\Delta t})\}$$

$$A_3 = +\frac{2}{\Delta t}\{(\frac{t-\frac{r}{c_2}-t_{2n-2}}{\Delta t})^2 - 1\} - \frac{2c_2^3}{c_1^3\Delta t}\{(\frac{t-\frac{r}{c_1}-t_{2n-2}}{\Delta t}) - 1\}$$

$$A_4 = -\{(\frac{t-\frac{r}{c_1}-t_{2n-2}}{\Delta t})^2 - 2(\frac{t-\frac{r}{c_1}-t_{2n-2}}{\Delta t})\} + \frac{2r}{c_1\,\Delta t}\cdot\{(\frac{t-\frac{r}{c_1}-t_{2n-2}}{\Delta t}) - 1\}$$

$$A_5 = -\{(\frac{t-\frac{r}{c_2}-t_{2n-2}}{\Delta t})^2 - 2(\frac{t-\frac{r}{c_2}-t_{2n-2}}{\Delta t})\} + \frac{2r}{c_2\,\Delta t}\cdot\{(\frac{t-\frac{r}{c_2}-t_{2n-2}}{\Delta t}) - 1\}$$

Durum 4: $\tau_{2n} < \tau_1^*$ ve $0 < \tau_2^* < \tau_{2n-2}$

$H(\tau_1^* - \tau_{2n-2}) = 1, \qquad H(\tau_2^* - \tau_{2n-2}) = 0,$
$H(\tau_1^* - \tau_{2n}) = 1, \qquad H(\tau_2^* - \tau_{2n}) = 0$ olduğundan

$$A_1 = -\frac{6c_2^2}{\Delta t}\{\left[\frac{(t-t_{2n-2})}{3}.(\frac{\tau-t_{2n-2}}{\Delta t})^3 - \frac{\Delta t}{4}.(\frac{\tau-t_{2n-2}}{\Delta t})^4\right]_{\tau_{2n-2}}^{\tau_{2n}}$$

$$-\left[\frac{(t-t_{2n-2})}{2}.(\frac{\tau-t_{2n-2}}{\Delta t})^2 - \frac{\Delta t}{3}.(\frac{\tau-t_{2n-2}}{\Delta t})^3\right]_{\tau_{2n-2}}^{\tau_{2n}}\}.$$

$A_2 = 0$, $A_3 = 0$, $A_4 = 0$ ve $A_5 = 0$.

Durum 5: $\tau_{2n} < \tau_1^*$ ve $\tau_{2n-2} < \tau_2^* < \tau_{2n}$

$H(\tau_1^* - \tau_{2n-2}) = 1, \qquad H(\tau_2^* - \tau_{2n-2}) = 1,$

$$H(\tau_1^* - \tau_{2n}) = 1, \qquad H(\tau_2^* - \tau_{2n}) = 0.$$

$$A_1 = -\frac{6c_2^2}{\Delta t}\{\left[\frac{\Delta t(t-t_{2n-2})}{3r^2}.(\frac{\tau - t_{2n-2}}{\Delta t})^3 - \frac{\Delta t^2}{4}.(\frac{\tau - t_{2n-2}}{\Delta t})^4\right]_{\tau_{2n-2}}^{\tau_{2n}}$$

$$-\left[\frac{\Delta t(t-t_{2n-2})}{3r^2}.(\frac{\tau - t_{2n-2}}{\Delta t})^3 - \frac{\Delta t^2}{4}.(\frac{\tau - t_{2n-2}}{\Delta t})^4\right]_{\tau_{2n-2}}^{\tau_2^*}\}$$

$$+\frac{12c_2^2}{\Delta t}\{\left[\frac{(t-t_{2n-2})}{2}.(\frac{\tau - t_{2n-2}}{\Delta t})^2 - \frac{\Delta t}{3}.(\frac{\tau - t_{2n-2}}{\Delta t})^3\right]_{\tau_{2n-2}}^{\tau_{2n}}$$

$$-\left[\frac{(t-t_{2n-2})}{2}.(\frac{\tau - t_{2n-2}}{\Delta t})^2 - \frac{\Delta t}{3}.(\frac{\tau - t_{2n-2}}{\Delta t})^3\right]_{\tau_{2n-2}}^{\tau_{2n}}\}$$

$$A_2 = -\{(\frac{t - \frac{r}{c_2} - t_{2n-2}}{\Delta t})^2 - 2(\frac{t - \frac{r}{c_2} - t_{2n-2}}{\Delta t})\}$$

$$A_3 = -\frac{1}{\Delta t}\{(\frac{t - \frac{r}{c_2} - t_{2n-2}}{\Delta t})^2 - 1\}, \quad A_4 = 0$$

$$A_5 = -\{(\frac{t - \frac{r}{c_2} - t_{2n-2}}{\Delta t})^2 - 2(\frac{t - \frac{r}{c_2} - t_{2n-2}}{\Delta t})\} + \frac{2r}{c_2\Delta t}\cdot\{(\frac{t - \frac{r}{c_2} - t_{2n-2}}{\Delta t}) - 1\}$$

Durum 6: $\tau_{2n} < \tau_1^*$ ve $\tau_{2n} < \tau_2^*$

$$H(\tau_1^* - \tau_{2n-2}) = 1, \qquad H(\tau_2^* - \tau_{2n-2}) = 1,$$
$$H(\tau_1^* - \tau_{2n}) = 1, \qquad H(\tau_2^* - \tau_{2n}) = 1$$

olduğundan

$A_1 = 0$, $A_2 = 0$, $A_3 = 0$, $A_4 = 0$ ve $A_5 = 0$ olarak elde edilir.

(3.1)'deki $M_{QB}(\tau)$ kuadratik interpolasyon fonksiyonu dikkate alındığında ise,

$$A_\alpha = \int_{\Delta t_m} b^\alpha M_{QB}(\tau)d\tau \tag{6.7}$$

olarak yazılabilir. Buradan,

$$A_1 = 3c_2^2\int_{\tau_{2n-2}}^{\tau_{2n}}(t-\tau).\left(\frac{\tau - t_{2n-2}}{\Delta t}\right)^2\left[H(\tau_1^* - \tau) - H(\tau_2^* - \tau)\right]d\tau$$

$$-9c_2^2\int_{\tau_{2n-2}}^{\tau_{2n}}(t-\tau).\left(\frac{\tau - t_{2n-2}}{\Delta t}\right)\left[H(\tau_1^* - \tau) - H(\tau_2^* - \tau)\right]d\tau$$

$$+6c_2^2\int_{\tau_{2n-2}}^{\tau_{2n}}(t-\tau).\left[H\left(\tau_1^*-\tau\right)-H\left(\tau_2^*-\tau\right)\right]d\tau$$

$$A_2=\frac{1}{2}\int_{\tau_{2n-2}}^{\tau_{2n}}\delta\left(t-\tau-\frac{r}{c_2}\right)\left(\frac{\tau-t_{2n-2}}{\Delta t}\right)^2 d\tau-\frac{3}{2}\int_{\tau_{2n-2}}^{\tau_{2n}}\delta\left(t-\tau-\frac{r}{c_2}\right)\left(\frac{\tau-t_{2n-2}}{\Delta t}\right)d\tau$$

$$+\int_{\tau_{2n-2}}^{\tau_{2n}}\delta\left(t-\tau-\frac{r}{c_2}\right)d\tau-\frac{c_2^2}{2c_1^2}\int_{\tau_{2n-2}}^{\tau_{2n}}\delta\left(t-\tau-\frac{r}{c_1}\right)\left(\frac{\tau-t_{2n-2}}{\Delta t}\right)^2 d\tau$$

$$+\frac{3c_2^2}{2c_1^2}\int_{\tau_{2n-2}}^{\tau_{2n}}\delta\left(t-\tau-\frac{r}{c_1}\right)\left(\frac{\tau-t_{2n-2}}{\Delta t}\right)d\tau-\frac{c_2^2}{c_1^2}\int_{\tau_{2n-2}}^{\tau_{2n}}\delta\left(t-\tau-\frac{r}{c_1}\right)d\tau$$

$$A_3=\frac{1}{2}\int_{\tau_{2n-2}}^{\tau_{2n}}\dot{\delta}\left(t-\tau-\frac{r}{c_2}\right)\left(\frac{\tau-t_{2n-2}}{\Delta t}\right)^2 d\tau-\frac{3}{2}\int_{\tau_{2n-2}}^{\tau_{2n}}\dot{\delta}\left(t-\tau-\frac{r}{c_2}\right)\left(\frac{\tau-t_{2n-2}}{\Delta t}\right)d\tau$$

$$+\int_{\tau_{2n-2}}^{\tau_{2n}}\dot{\delta}\left(t-\tau-\frac{r}{c_2}\right)d\tau-\frac{c_2^3}{2c_1^3}\int_{\tau_{2n-2}}^{\tau_{2n}}\dot{\delta}\left(t-\tau-\frac{r}{c_1}\right)\left(\frac{\tau-t_{2n-2}}{\Delta t}\right)^2 d\tau$$

$$+\frac{3c_2^3}{2c_1^3}\int_{\tau_{2n-2}}^{\tau_{2n}}\dot{\delta}\left(t-\tau-\frac{r}{c_1}\right)\left(\frac{\tau-t_{2n-2}}{\Delta t}\right)d\tau-\frac{c_2^3}{c_1^3}\int_{\tau_{2n-2}}^{\tau_{2n}}\dot{\delta}\left(t-\tau-\frac{r}{c_1}\right)d\tau$$

$$A_4=\frac{1}{2}\int_{\tau_{2n-2}}^{\tau_{2n}}\delta\left(t-\tau-\frac{r}{c_1}\right)\left(\frac{\tau-t_{2n-2}}{\Delta t}\right)^2 d\tau-\frac{3}{2}\int_{\tau_{2n-2}}^{\tau_{2n}}\delta\left(t-\tau-\frac{r}{c_1}\right)\left(\frac{\tau-t_{2n-2}}{\Delta t}\right)d\tau$$

$$+\int_{\tau_{2n-2}}^{\tau_{2n}}\delta\left(t-\tau-\frac{r}{c_1}\right)d\tau+\frac{r}{2c_1}\int_{\tau_{2n-2}}^{\tau_{2n}}\dot{\delta}\left(t-\tau-\frac{r}{c_1}\right)\left(\frac{\tau-t_{2n-2}}{\Delta t}\right)^2 d\tau$$

$$-\frac{3r}{2c_1}\int_{\tau_{2n-2}}^{\tau_{2n}}\dot{\delta}\left(t-\tau-\frac{r}{c_1}\right)\left(\frac{\tau-t_{2n-2}}{\Delta t}\right)d\tau+\frac{r}{c_1}\int_{\tau_{2n-2}}^{\tau_{2n}}\dot{\delta}\left(t-\tau-\frac{r}{c_1}\right)d\tau$$

$$A_5=\frac{1}{2}\int_{\tau_{2n-2}}^{\tau_{2n}}\delta\left(t-\tau-\frac{r}{c_2}\right)\left(\frac{\tau-t_{2n-2}}{\Delta t}\right)^2 d\tau-\frac{3}{2}\int_{\tau_{2n-2}}^{\tau_{2n}}\delta\left(t-\tau-\frac{r}{c_2}\right)\left(\frac{\tau-t_{2n-2}}{\Delta t}\right)d\tau$$

$$+\int_{\tau_{2n-2}}^{\tau_{2n}}\delta\left(t-\tau-\frac{r}{c_2}\right)d\tau+\frac{r}{2c_2}\int_{\tau_{2n-2}}^{\tau_{2n}}\dot{\delta}\left(t-\tau-\frac{r}{c_2}\right)\left(\frac{\tau-t_{2n-2}}{\Delta t}\right)^2 d\tau$$

$$-\frac{3r}{2c_2}\int_{\tau_{2n-2}}^{\tau_{2n}}\dot{\delta}\left(t-\tau-\frac{r}{c_2}\right)\left(\frac{\tau-t_{2n-2}}{\Delta t}\right)d\tau+\frac{r}{c_2}\int_{\tau_{2n-2}}^{\tau_{2n}}\dot{\delta}\left(t-\tau-\frac{r}{c_2}\right)d\tau$$

A_1 içindeki ilk iki integralde $\dfrac{\tau - t_{2n-2}}{\Delta t} = u$ dönüşümü ve üçüncü integralde ise $t - \tau = u$ dönüşümü uygulanarak aşağıdaki durum incelemelerindeki sonuçlara ulaşılır:

Durum 1: $0 < \tau_2^* < \tau_{2n-2}$ ve $0 < \tau_1^* < \tau_{2n-2}$

$$H(\tau_1^* - \tau_{2n-2}) = 0, \qquad H(\tau_2^* - \tau_{2n-2}) = 0,$$
$$H(\tau_1^* - \tau_{2n}) = 0, \qquad H(\tau_2^* - \tau_{2n}) = 0.$$

Tüm $H = 0$ olduğundan $A_1 = 0$, $A_2 = 0$, $A_3 = 0$, $A_4 = 0$, $A_5 = 0$ olur.

Durum 2: $\tau_{2n-2} < \tau_1^* < \tau_{2n}$ ve $0 < \tau_2^* < \tau_{2n-2}$

$$H(\tau_1^* - \tau_{2n-2}) = 1, \qquad H(\tau_2^* - \tau_{2n-2}) = 0,$$
$$H(\tau_1^* - \tau_{2n}) = 0, \qquad H(\tau_2^* - \tau_{2n}) = 0 \text{ olur.}$$

Buna göre;

$$A_1 = \frac{3c_2^2}{\Delta t}\left[\frac{(t - t_{2n-2})}{3}.(\frac{\tau - t_{2n-2}}{\Delta t})^3 - \frac{\Delta t}{4}.(\frac{\tau - t_{2n-2}}{\Delta t})^4\right]_{\tau_{2n-2}}^{\tau_1^*}$$
$$-\frac{9c_2^2}{\Delta t}\left[\frac{\Delta t(t - t_{2n-2})}{2r^2}.(\frac{\tau - t_{2n-2}}{\Delta t})^2 - \frac{\Delta t^2}{3}.(\frac{\tau - t_{2n-2}}{\Delta t})^3\right]_{\tau_{2n-2}}^{\tau_1^*} - 3c_2^2\left[(t-\tau)^2\right]_{\tau_{2n-2}}^{\tau_1^*}$$

$$A_2 = -\frac{c_2^2}{c_1^2}\{\frac{1}{2}(\frac{t - \frac{r}{c_1} - t_{2n-2}}{\Delta t})^2 - \frac{3}{2}(\frac{t - \frac{r}{c_1} - t_{2n-2}}{\Delta t}) + 1\}$$

$$A_3 = -\frac{c_2^3}{2c_1^3}\{\frac{2}{\Delta t}(\frac{t - \frac{r}{c_1} - t_{2n-2}}{\Delta t})^2 - 3(\frac{t - \frac{r}{c_1} - t_{2n-2}}{\Delta t})\}$$

$$A_4 = \frac{1}{2}\{(\frac{t - \frac{r}{c_1} - t_{2n-2}}{\Delta t})^2 - 3(\frac{t - \frac{r}{c_1} - t_{2n-2}}{\Delta t}) + 2\}$$
$$+\frac{r}{2c_1}\{\frac{2}{\Delta t}(\frac{t - \frac{r}{c_1} - t_{2n-2}}{\Delta t})^2 - 3(\frac{t - \frac{r}{c_1} - t_{2n-2}}{\Delta t})\}$$

$A_5 = 0$ olur.

Durum 3: $\tau_{2n-2} < \tau_1^* < \tau_{2n}$ ve $\tau_{2n-2} < \tau_2^* < \tau_{2n}$

$$H(\tau_1^* - \tau_{2n-2}) = 1, \qquad H(\tau_2^* - \tau_{2n-2}) = 1,$$
$$H(\tau_1^* - \tau_{2n}) = 0, \qquad H(\tau_2^* - \tau_{2n}) = 0$$

olduğundan,

$$A_1 = \frac{3c_2^2}{\Delta t}\{\left[\frac{(t-t_{2n-2})}{3}.(\frac{\tau - t_{2n-2}}{\Delta t})^3 - \frac{\Delta t}{4}.(\frac{\tau - t_{2n-2}}{\Delta t})^4\right]_{\tau_{2n-2}}^{\tau_1^*}$$

$$-\left[\frac{(t-t_{2n-2})}{3}.(\frac{\tau - t_{2n-2}}{\Delta t})^3 - \frac{\Delta t}{4}.(\frac{\tau - t_{2n-2}}{\Delta t})^4\right]_{\tau_{2n-2}}^{\tau_2^*}\}$$

$$-\frac{9c_2^2}{\Delta t}\{\left[\frac{(t-t_{2n-2})}{2}.(\frac{\tau - t_{2n-2}}{\Delta t})^2 - \frac{\Delta t}{3}.(\frac{\tau - t_{2n-2}}{\Delta t})^3\right]_{\tau_{2n-2}}^{\tau_1^*}$$

$$-\left[\frac{(t-t_{2n-2})}{2}.(\frac{\tau - t_{2n-2}}{\Delta t})^2 - \frac{\Delta t}{3}.(\frac{\tau - t_{2n-2}}{\Delta t})^3\right]_{\tau_{2n-2}}^{\tau_2^*}\}$$

$$-3c_2^2\{\left[(t-\tau)^2\right]_{\tau_{2n-2}}^{\tau_1^*} - \left[(t-\tau)^2\right]_{\tau_{2n-2}}^{\tau_2^*}\}$$

$$A_2 = \frac{1}{2}\{(\frac{t-\frac{r}{c_1}-t_{2n-2}}{\Delta t})^2 - \frac{3}{2}(\frac{t-\frac{r}{c_1}-t_{2n-2}}{\Delta t})+1\}$$

$$-\frac{c_2^2}{c_1^2}\{(\frac{t-\frac{r}{c_1}-t_{2n-2}}{\Delta t})^2 - \frac{3}{2}(\frac{t-\frac{r}{c_1}-t_{2n-2}}{\Delta t})+1\}$$

$$A_3 = -\frac{1}{2\Delta t}\{\frac{2}{\Delta t}(\frac{t-\frac{r}{c_2}-t_{2n-2}}{\Delta t}) - 3(\frac{t-\frac{r}{c_2}-t_{2n-2}}{\Delta t})+1\}$$

$$+\frac{c_2^3}{2c_1^3}\{\frac{2}{\Delta t}(\frac{t-\frac{r}{c_1}-t_{2n-2}}{\Delta t}) - 3(\frac{t-\frac{r}{c_1}-t_{2n-2}}{\Delta t})+1\}$$

$$A_4 = \frac{1}{2}\{(\frac{t-\frac{r}{c_1}-t_{2n-2}}{\Delta t})^2 - 3(\frac{t-\frac{r}{c_1}-t_{2n-2}}{\Delta t})+2\}$$

$$-\frac{r}{2c_1}\{\frac{2}{\Delta t}(\frac{t-\frac{r}{c_1}-t_{2n-2}}{\Delta t}) - 3(\frac{t-\frac{r}{c_1}-t_{2n-2}}{\Delta t})\}$$

$$A_5 = \frac{1}{2}\{\frac{2}{\Delta t}(\frac{t-\frac{r}{c_2}-t_{2n-2}}{\Delta t})^2 - 3(\frac{t-\frac{r}{c_2}-t_{2n-2}}{\Delta t})+2\}$$

$$-\frac{r}{2c_2}\{\frac{2}{\Delta t}(\frac{t-\frac{r}{c_2}-t_{2n-2}}{\Delta t}) - 3(\frac{t-\frac{r}{c_2}-t_{2n-2}}{\Delta t})\}$$

Durum 4: $\tau_{2n} < \tau_1^*$ ve $0 < \tau_2^* < \tau_{2n-2}$

$$H(\tau_1^* - \tau_{2n-2}) = 1, \qquad H(\tau_2^* - \tau_{2n-2}) = 0,$$

$$H(\tau_1^* - \tau_{2n}) = 1, \qquad H(\tau_2^* - \tau_{2n}) = 0 \text{ olur.}$$

Buna göre,

$$A_1 = \frac{3c_2^2}{\Delta t}\left[\frac{(t-t_{2n-2})}{3}.(\frac{\tau - t_{2n-2}}{\Delta t})^3 - \frac{\Delta t}{4}.(\frac{\tau - t_{2n-2}}{\Delta t})^4\right]_{\tau_{2n-2}}^{\tau_{2n}}$$

$$-\frac{9c_2^2}{\Delta t}\left[\frac{(t-t_{2n-2})}{2}.(\frac{\tau - t_{2n-2}}{\Delta t})^2 - \frac{\Delta t}{3}.(\frac{\tau - t_{2n-2}}{\Delta t})^3\right]_{\tau_{2n-2}}^{\tau_{2n}} - 3c_2^2\left[(t-\tau)^2\right]_{\tau_{2n-2}}^{\tau_{2n}}$$

$$A_2 = A_3 = A_4 = A_5 = 0.$$

Durum 5: $\tau_{2n} < \tau_1^*$ ve $\tau_{2n-2} < \tau_2^* < \tau_{2n}$

$$H(\tau_1^* - \tau_{2n-2}) = 1, \qquad H(\tau_2^* - \tau_{2n-2}) = 1,$$
$$H(\tau_1^* - \tau_{2n}) = 1, \qquad H(\tau_2^* - \tau_{2n}) = 0 \text{ olduğundan}$$

$$A_1 = \frac{3c_2^2}{\Delta t}\{\left[\frac{(t-t_{2n-2})}{3}.(\frac{\tau - t_{2n-2}}{\Delta t})^3 - \frac{\Delta t}{4}.(\frac{\tau - t_{2n-2}}{\Delta t})^4\right]_{\tau_{2n-2}}^{\tau_{2n}}$$

$$-\left[\frac{(t-t_{2n-2})}{3}.(\frac{\tau - t_{2n-2}}{\Delta t})^3 - \frac{\Delta t}{4}.(\frac{\tau - t_{2n-2}}{\Delta t})^4\right]_{\tau_{2n-2}}^{\tau_2^*}\}$$

$$-\frac{9c_2^2}{\Delta t}\{\left[\frac{(t-t_{2n-2})}{2}.(\frac{\tau - t_{2n-2}}{\Delta t})^2 - \frac{\Delta t}{3}.(\frac{\tau - t_{2n-2}}{\Delta t})^3\right]_{\tau_{2n-2}}^{\tau_{2n}}$$

$$-\left[\frac{(t-t_{2n-2})}{2}.(\frac{\tau - t_{2n-2}}{\Delta t})^2 - \frac{\Delta t}{3}.(\frac{\tau - t_{2n-2}}{\Delta t})^3\right]_{\tau_{2n-2}}^{\tau_2^*}\}$$

$$-3c_2^2\{\left[(t-\tau)^2\right]_{\tau_{2n-2}}^{\tau_{2n}} - \left[(t-\tau)^2\right]_{\tau_{2n-2}}^{\tau_2^*}\}$$

$$A_2 = \frac{1}{2}\{(\frac{t - \frac{r}{c_1} - t_{2n-2}}{\Delta t})^2 - \frac{3}{2}(\frac{t - \frac{r}{c_1} - t_{2n-2}}{\Delta t}) + 1\}$$

$$-\frac{c_2^2}{c_1^2}\{(\frac{t - \frac{r}{c_1} - t_{2n-2}}{\Delta t})^2 - \frac{3}{2}(\frac{t - \frac{r}{c_1} - t_{2n-2}}{\Delta t}) + 1\}$$

$$A_3 = \frac{1}{2\Delta t}\{\frac{2}{\Delta t}(\frac{t - \frac{r}{c_2} - t_{2n-2}}{\Delta t})^2 - 3(\frac{t - \frac{r}{c_2} - t_{2n-2}}{\Delta t})\}$$

$$A_4 = 0$$

$$A_5 = \frac{1}{2}\{\frac{2}{\Delta t}(\frac{t-\frac{r}{c_2}-t_{2n-2}}{\Delta t})^2 - 3(\frac{t-\frac{r}{c_2}-t_{2n-2}}{\Delta t}) + 2\}$$

$$-\frac{r}{2c_2}\{\frac{2}{\Delta t}(\frac{t-\frac{r}{c_2}-t_{2n-2}}{\Delta t}) - 3(\frac{t-\frac{r}{c_2}-t_{2n-2}}{\Delta t})\}.$$

Durum 6: $\tau_{2n} < \tau_1^*$ ve $\tau_{2n-2} < \tau_2^* < \tau_{2n}$

$H(\tau_1^* - \tau_{2n-2}) = 1, \qquad H(\tau_2^* - \tau_{2n-2}) = 1,$

$H(\tau_1^* - \tau_{2n}) = 1, \qquad H(\tau_2^* - \tau_{2n}) = 1$ olur.

Tüm $H = 1$ ve bu sebeple $A_1 = A_2 = A_3 = A_4 = A_5 = 0$.

Bu bölümde, elastodinamik üç boyutlu dalga denkleminin SIEM formülasyonundaki yer değiştirme ve gerilim çekirdekleri kuadratik zaman inerpolasyonu yaklaşımıyla çıkarılmıştır.

7. SONUÇ VE ÖNERİLER

İntegral denklemlere dayalı olan SIEM, günümüze kadar süregelen çalışmalarda potansiyel ve akı hesaplamalarında kullanılmıştır.

Bu çalışmada, metodun zaman bölge formülasyonunun teorik alt yapısı üzerinde incelemelere yer verilmiştir. Çalışmanın içeriği SIEM'nun zaman bölge formülasyonundaki zaman integrallerinin farklı interpolasyon fonksiyonu yaklaşımlarıyla analitik olarak hesaplanmasına dayanır. İki ve üç boyutlu skaler dalga denklemlerinin sınır elemanları formülasyonundaki potansiyel ve akı çekirdekleri sabit, lineer ve kuadratik interpolasyon fonksiyonları yaklaşımlarıyla çıkarıldı. Bunun yanı sıra, üç boyutlu elastodinamik dalga denkleminin sınır elemanları formülasyonundaki yer değiştirme ve gerilim çekirdekleri de sabit, lineer ve kuadratik interpolasyon fonksiyonları yaklaşımlarıyla elde edildi. Bu yaklaşımlardan sabit ve lineer zaman değişimine dayalı olanlarında elde edilen sonuçların literatürle uyum içinde olduğu görüldü. Kuadratik zaman değişimiyle elde edilenler ise ilk kez çıkarılmıştır.

Bundan sonra, burada çıkarılan farklı formülasyonların hangisinin kullanım açısından daha uygun, ekonomik ve tercih edilebilir olduğu bilgisayar ortamına taşınarak uygulamalarla gösterilebilir.

KAYNAKLAR

Ahmad, S. ve Banerjee, P. K. (1988 a) Multi-Domain BEM for Two Dimensional Problems of Elastodynamics, ***International Journal for Numerical Methods in Engineering***, 26: 891-911.

Ahmad, S. ve Banerjee, P. K. (1988 b) Time Domain Transient Elastodynamic Analysis of 3D Solids by BEM, ***International Journal for Numerical Methods in Engineering,*** 26: 1709-1728.

Antes, H. (1985) A Boundary Element Procedure for Transient Wave Propagations in Two Dimensional İsotropic Elastic Media, ***Finite Elements Anal. Des.***, 1: 313-322.

Banerjee, P. K. Ve Butterfield, R. (1981) Boundary Element Methods in Engineering Science, ***McGraw-Hill***, London.

Carrer, J. A. M., Mansur, W. J. (1996) 'Time Domain BEM Analysis for The 2D Skaler Wave Equation', ***International Journal for Numerical Methods in Engineering***, 39: 2169-2188.

Coda, H. B. ve Venturini, W. S. (1995) Three Dimensional Transient BEM Analysis, ***Computers and Structures***, 56: 751-768.

Cole, D. M., Kosloff, D. D. ve Minster, J. B.(1978) A Numerical Boundary İntegral Equation Method for Elastodynamics I, ***Bulletin of the Siesmological Society of America,*** 68: 1331-1357.

Cruse, T. A. (1974) An Improved Boundary Integral Equation Method for Three Dimensional Elastic Stres Analysis, ***Computers and Structures,*** 4: 741-754.

Das, S. ve Aki, K. (1977) A Numerical Study of Two Dimensional Spontaneous Rupture Propogation, ***Geophys. J. R. Astr. Soc.***, 50: 643-668.

Demir, I. (1998) Seismic Wave Modelling Using Finite Difference Methods, PhD. Thesis, ***University of Glamongam***, UK.

Dominguez, J. (1993) Boundary Elements in Dynamics, ***C M P, Southampton*** UK.

Dominguez, J., Garcia, F., Saez, A. (2004) Traction Boundary Elements for Cracks in Anisotropic Solids, ***Engineering Analysis with Boundary Elements***, 28: 667-676.

Eringen, A. C. ve Suhubi, E. S. (1975) Elastodynamics, Vol II, ***Academic Press***, NY.

Friedman, M. B. ve Shaw, R. P. (1962) Diffraction of A Plane Shock Wave by an Arbitrary Rigid Cylindirical Obstacle, ***Journal of Applied Mechanics*** 29: 40-45

Greenberg, M. D. (1971) Application of Green's Functions in Science and Engineering, ***Prentice- Hall***, New Jersey.

Israil, A. S. M. ve Banerjee, P. K. (1990 a) Advanced Time Domain Formulation of BEM for Two Dimensional Transient Elastodynamics, ***International Journal for Numerical Methods in Engineering,*** 29: 1421-1440.

Israil, A. S. M. ve Banerjee, P. K. (1990 b) Two Dimensional Transient Wave Propagation Problems by Time Domain BEM, ***International Journal Solid Structures,*** 26: 851-864.

Israil, A. S. ve Banerjee, P. K. (1991) Interior Stress Calculations in 2D Time Domain Transient BEM Analysis, ***International Journal Solid Structures***, 27: 915-927.

Karabalis, D. L. ve Beskos, D. E. (1984) Dynamic Response of 3D Rigid Surface Foundations by Time Domain BEM. ***Erthquake Engng. Sruct. Dyn.*** , 12: 73-93.

Kellog, O. D. (1953) 'Foundations of Potential Theory', Dover, New York.

Mansur, W. J. ve Brebbia, C. A. (1982) 'Formulation of Problems Governed by The Scalar Wave Equation' , ***Appl. Math. Modelling,*** 6: 307-311.

Mansur, W. J. (1983) A Time Stepping Technique To Solve Wave Propogation Problems Using The BEM, Ph. D. Thesis, ***Southampton University.***

Mansur, W. J., Carrer A. M. ve Siqueira, E. F. N. (1998) Time Discontinious Linear Traction Approximation in Time Domain BEM Scalar Wave Propogation Analysis, ***Int. J. Num. Meth. Engng.,*** 42: 667-683.

Mansur, W. J., Gouyou Yu., Carrer, J. A. M. (2000) The θ Scheme for Time Domain BEM / FEM Coupling Applied to the 2D Scalar Wave Equation, ***Commun. Numer. Meth. Engng***, 16: 439-448.

Manolis, G.D., (1983) A Comparative Study on 3D BEM Approaches to Problems in Elastodynamics, ***Int. J. for Num. Meth. in Engng.,***19: 73-91.

Marrero, M., Dominguez J. (2003), Numerical Behavior of Time Domain BEM for 3D Transient Elastodynamic Problems, ***Engineering Analysis with Boundary Elements,*** 27: 39-48.

Muskhelishivili, N. I. (1963) Some Basic Problems of Mathematical Theory of Elasticity, ***Noordhoff Publishing,*** Groningen.

Niwa, Y., Fukui, T., Kato, S. ve Fujiki, K. (1980) An Application of The Integral Equation Method to Two Dimensional Elastodynamics. In Theoretical and Applied Mechanics Proceeding of The ***28 th Japan International Congress of Theoretical and Applied Mechanics,*** 1978, s. 281-290. University of Tokyo Press.

Pierce, A. and Siebritz, E. (1996) Stability Analysis of Model Problems for Elastodynamic Boundary Element Discretizations, ***Num. Meth. for Part. Dif.Eq.,*** 12: 585-613

Pierce, A. and Siebritz, E. (1997) Stability Analysis and Design of Time Stepping Schemes for General Elastodynamic Boundary Element Models, ***Int. J. for Num. Meth.in Engng.,*** 40: 319-342.

Richter, C. (1997), Topics in Engineering: A Green's Function Time Domain BEM of Elastodynamics, Brebbia, C.A. ve Connor J. J. (eds.), ***CMP, Southampton***, UK.

Rizos, D.C. ve Karabalis, D. L. (1994) ***Computational Mechanics***, 15: 249-269.

Rizos, D.C. ve Wang, Z. (2002) Coupled BEM FEM Solutions for Direct Time Domain Soil-Structure Interaction Analysis, ***Engineering Analysis with Boundary Elements,*** 26: 877-888

Sari, M. (2000) Seismic Wave Modelling Using The Boundary Element Method, Ph.D. Thesis, ***University of Glamongam*** , UK.

Spyrakos, C . C. ve Beskos, D. E. (1986) Dynamic Response of Rigid Strip Foundations by a Time Domain BEM, ***Int. J. Meth. Engng.***, 23: 1547-1565.

Tan, A., Hirose, S., Zhang, Ch., Wang, C. Y. (2005) A 2D Time Domain BEM for Transient Wave Scattering Analysis by a Crack in Anisotropic Solids, ***Engineering Analysis with Boundary Elements***, 29: 610-623.

Wang, C.C. ve Takemiya, H. (1992) Analytical Elements of Time Domain BEM for Two Dimensional Scalar Wave Problems, **Int. J. Meth. Engng.**, 33: 1737-1754.

Wang, C.C., Wang, H. C., Liou, G. S. (1997) Quadratic Time Domain BEM Formulation for 2D Elastodynamic Transient Analysis, ***Int. J. Solid Structures***, 34: 129-151.

Zienkiewicz, O.C., (1977) The Finite Element Method, ***McGraw –Hill***, London.

ÖZGEÇMiŞ

Seda YILDIRIM

1978 yılında Denizli'de doğdu. İlk, orta ve lise öğrenimini Denizli'de tamamladı. 2000 yılında Ege Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü'nden mezun olup, Milli Eğitim Bakanlığı'na bağlı olarak öğretmenlik görevine atandı. 2003 yılında Pamukkale Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim dalında yüksek lisans öğrenimine başladı. Halen öğretmenlik görevine devam etmektedir.