HAMILTON SİSTEMLER

Gamze CABAR

Eylül 2006

DENİZLİ

HAMILTON SİSTEMLER

Pamukkale Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Yüksek Lisans Tezi
Matematik Anabilim Dalı

Gamze CABAR

Danışman: Y. Doç. Dr. Mehmet TEKKOYUN

Eylül 2006
DENİZLİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ ONAY FORMU

Gamze CABAR tarafından Y. Doç. Dr. Mehmet TEKKOYUN yönetiminde hazırlanan "Hamilton Sistemler" başlıklı tez tarafımızdan okunmuş, kapsamı ve niteliği açısından bir Yüksek Lisans Tezi olarak kabul edilmiştir.

Y. Doç.Dr. Mehmet TEKKOYUN
Jüri Başkanı

Y. Doç.Dr. Murat SARI
Jüri Üyesi

Y. Doç.Dr. Muzaffer ADAK
Jüri Üyesi

Pamukkale Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun ...../...../2006 tarih ve .... sayılı kararıyla onaylanmıştır.

Prof. Dr. Mehmet Ali SARIGÖL
Müdür

TEŞEKKÜR

Bu çalışmanın hazırlanmasında bana destek olan aileme, gerekli bütün imkanları sağlayarak benden her zaman yakın ilgi ve yardımlarını esirgemeyen değerli hocam Y. Doç. Dr. Mehmet TEKKOYUN'a , Fizik Bölümü öğretim üyesi Sayın Y. Doç. Dr. Muzaffer ADAK'a ve tezin yazılmasında emeği geçen Hüseyin Alper BOZ'a teşekkürlerimi sunmayı bir borç bilirim.

Gamze CABAR

Bu tezin tasarımı, hazırlanması, yürütülmesi, araştırmalarının yapılması ve bulgularının analizlerinde bilimsel etiğe ve akademik kurallara özenle riayet edildiğini; bu çalışmanın doğrudan birincil ürünü olmayan bulguların, verilerin ve materyallerin bilimsel etiğe uygun olarak kaynak gösterildiğini ve alıntı yapılan çalışmalara atfedildiğini beyan ederim.

İmza : 

Öğrenci Adı Soyadı: Gamze CABAR

ÖZET

HAMILTON SİSTEMLER

Cabar, Gamze
Yüksek Lisans Tezi, Matematik ABD
Tez Yöneticisi: Y. Doç. Dr. Mehmet TEKKOYUN

Eylül 2006, 42 Sayfa

Bu çalışmada reel ve kompleks Hamilton sistemler incelendi. Bu bağlamda mekanik sistemlerden bahsedildi. Reel uzayda Lagrange ve Hamilton denklemleri ile ilgili örnekler ele alındı. Maple programı yardımıyla kompleks Lagrange ve Hamilton denklemlerine özgün örnekler verildi.

Anahtar kelimeler: Hamilton fonksiyonu, Lagrange fonksiyonu, Hamilton denklemi, Lagrange denklemi

Y. Doç. Dr. Mehmet Tekkoyun
Y.Doç. Dr. Muzaffer Adak
Y. Doç. Dr. Murat Sarı

ABSTRACT

HAMILTONIAN SYSTEMS

Cabar, Gamze
M. Sc. Thesis in Mathematics
Supervisor: Y. Doç. Dr. Mehmet TEKKOYUN

September 2006, 42 Pages

In this study real and complex Hamilton systems have been examined. Within the context mechanical systems have been mentioned. In real space, related examples on Lagrange and Hamilton equations have been dealt with. Original examples have also been given to the complex Lagrange and Hamilton equations with the help of Maple program.

Keywords: Hamilton functions, Lagrange functions Hamilton equation Lagrange equation.

Assist. Prof. Dr. Mehmet Tekkoyun
Assist. Prof. Dr. Muzaffer Adak
Assist. Prof. Dr. Murat Sarı

İÇİNDEKİLER

Sayfa

Yüksek Lisans Tezi Onay Formu..iii
Teşekkür...iv
Bilimsel Etik Sayfası..v
Özet...vi
Abstract..vii
İçindekiler...viii
Şekiller Dizini……………………………………………………………………ıx
Tablolar Dizini……………………………………………………………………x

1.Reel Hamilton Sistemler…………………………………………………………...1
1.1. Giriş………………………...1
1.2. Lagrange fonksiyonu ve denklemleri………………………………………..3
1.3. Hamilton fonksiyonu ve denklemleri………………………………………..4
1.4 Uygulamalar………………………………………………………………….5
1.5 Sonuç………………………………………………………………………..28

2.Kompleks Hamilton sistemler……………………………………………………29
2.1 Sonuç………………………………………………………………………..39

3.Sonuç ve Öneriler…………………………………………………………...40

KAYNAKLAR..41

ÖZGEÇMİŞ ……………………………………………………………….....42

ŞEKİLLER DİZİNİ

Sayfa

Şekil 1.1.1 Kütlesi *m* olan cisim ve üzerine etki eden kuvvetler…………………………....6
Şekil 1.2.1 Bağlantı noktası yukarıya doğru sabit bir *a* ivmesi ile hareket eden basit sarkaç ……………………………………………..………………………………..9
Şekil1.3.1 Eğik düzlemin yatayla θ açısını yaptığı an θ açısı sabit bir α sür'atle artırılıyor.……………………………………………………………...………….12
Şekil 1.4.1 Bir yayın ucuna *m* kütleli küçük bir top asılarak oluşturulan sarkaç. Küçük topun hareketi sırasında hem θ hem de ℓ değişir..…………….…………..………...……...16
Şekil 1.5.1 Askı ipi sabit bir şekilde tavana tutturulmuş, diskin en üst noktasına bağlanan sarkacın salınması sırasında farklı anlardaki görünümü ….…..................................……20
Şekil 1.6.1 Eğik düzlem üzerinde yuvarlanan diskin merkezine asılmış basit sarkaç. Sarkaç ipinin boyu hareket süresince değişmiyor.…………………………...…………24
Şekil 2.1.1 Kütlesi *m* olan cisim ve üzerine etki eden kuvvetler ……………………………30
Şekil 2.2.1 Bağlantı noktası yukarıya doğru sabit bir *a* ivmesi ile hareket eden basit sarkaç……………………………………………………………...……………35

TABLOLAR DİZİNİ

Sayfa

Tablo:3.1 Lagrange ve Hamilton fonksiyonlarının kıyaslanması…...…………….…………….....5

1 REEL HAMİLTON SİSTEMLER

1.1 Giriş

Mekanik; günlük hayatta karşılaştığımız cisimlerin konumlarının zamanla değişmesi veya durum ve yapılarının bozulmadan kalabilmesiyle ilgili problemleri inceler ve günlük olaylar çerçevesinde oldukça kesin sonuçlar elde edilmesini sağlar. Ancak ışık hızına yakın hızlarda hareket eden sistemler için rölativistik mekanik, çok küçük uzaklık ölçeklerindeki sistemler için kuantum mekaniği ve her iki özelliğe sahip sistemler için de rölativistik kuantum alan teorisi kullanılmaktadır. Mekanik; kinematik, dinamik ve statik olmak üzere üç ana bölümden oluşur (Zengin vd 1999).

Kinematik: Cisimlerin konumlarının zamanla değişmesini yani hareketlerini ele alır. Harekete neden olan kuvvetlerle ilgilenmez ve bu yönüyle dinamikten ayrılır. Örneğin, deniz yüzeyinden h kadar yükseklikten atılan bir taş kinematiğin konusudur.

Dinamik: Cisimlerin konumlarının değişmesine yol açan nedenler bilindiğinde cisimlerin hareketlerinin, özelliklerinin nasıl bulunacağını gösterir. Örnek olarak, eğik düzlem üzerindeki bir bloğun hareketi verilebilir.

Statik: Cisimlerin durum ve yapılarının bozulmadan kalabilmesi, diğer bir ifadeyle, dengede olabilmeleri için gerekli koşulları saptar. Denge halindeki bir sistem ya hareketsizdir ya da sabit bir hızla hareket etmektedir. Bu durumda Newton'un üçüncü yasasına göre, sistem üzerine etki eden net kuvvet ve net tork sıfırdır, tavana iple tutturulmuş m kütleli basit sarkaç buna örnektir.

Çok iyi bilinen üç temel yasası üzerine kurulan Mekanik; XIX. yüzyılda pek çok araştırmacının katkılarıyla neredeyse kusursuz bir sistematik yapıya kavuşturulmuştur. Newton yasaları üzerine kurulan bütün yapı, bugün Klasik Mekanik veya Newton Mekaniği olarak; XIX. yüzyılda geliştirilen sistematik yapıysa Analitik Mekanik veya Analitik Dinamik olarak isimlendirilmektedir (Rızaoğlu 2002).

Newton denklemlerinin vektörel bir yapıda olması toplam kuvvetin bilinmesine gereksinim duyulması en büyük güçlüktür. Bu nedenle daha yalın skaler büyüklüklerin kullanıldığı ve kuvvet vektörünün içinde doğrudan yer almadığı, ilke ve yöntemlerin bulunmasına çalışılmıştır. Bulunan ve zamanla daha da geliştirilen bu ilke ve yöntemlerin tümü bugün Analitik Dinamik olarak bilinmektedir. Analitik dinamiğin verdiği sonuçlar Newton denklemlerinin verdiği sonuçların aynısıdır.

Analitik Dinamik; Lagrange ve Hamilton denklemlerinden oluşmaktadır. Lagrange yöntemi mekaniğin skaler büyüklükler kullanarak yeniden kurulması açısından önemlidir. Lagrange yöntemi mekanik problemlerin çözümünde başarılıdır, ancak bu yöntemin en büyük önemi Hamiltonsal yöntemlerin çıkışına yol açmasıdır (Rızaoğlu 2002).

Lagrange yöntemi mekanik sistemlerin hareket denklemlerinin elde edilmesini sıradan duruma getirir. Fakat bu denklemlerin çözülmesinde sistematik bir yol göstermez.

Hamilton yöntemleriyle elde edilen denklemlerin doğrudan çözülebilmeleri açısından, Lagrange yöntemiyle elde edilen denklemlere herhangi bir üstünlüğü yoktur. Hamilton denklemlerinin fizikteki önemi, kolay integre edilebilmelerini sağlayan yöntemlerin geliştirilmesine açık olmaları ve mekaniğin dışında örneğin mikroskopik cisimlerin arasından sür’atleri ışığın sür’atiyle kıyaslanamayacak kadar küçük olan cisimlerin davranışlarını açıklayan Kuantum mekaniği alanında da başarıyla uygulanabilmesidir (Rızaoğlu 2002).

Klasik Mekanik her problemin çözümünde kullanılan bir yöntem olmasa da günümüzde gökdelenlerden uçaklara kadar pek çok sistemin yıkılmadan, parçalanmadan kalabilmesi için gerekli koşulların bulunmasında, dünya etrafında dolanan uyduların yerleştirilmesinde, gezegenlere ve daha ötelere uzay gemilerinin gönderilmesinde kullanılan bilgiler arasında Klasik Mekaniğin verdiği sonuçlar önemli bir yer tutar. Bu nedenle Klasik Mekanik hayatımızda önemli bir yere sahiptir. Ayrıca Klasik Mekanik matematik becerilerimizin ve fiziksel düşünme yeteneğimizin artmasında da önemli rol oynar (Kibble 1999 ; Rızaoğlu 2002).

Kuantum mekaniğinde ve klasik mekanikte sıkça rastlanan Hamilton Sistemler, uygulamalı bilimlerde önemli bir yere sahiptir. Bu konuda literatürde oldukça çok çalışma yapılmıştır. Son zamanlarda yapılan çalışmalar; Chang ve vd. (1981) Henon-Heiles Hamilton'unun sonuçlarını kompleks zaman düzleminde araştırmışlardır. Özer (1994) çarpım-skalası metodunu çeşitli integrallenebilir sistemlerin (KdV, CKdV, integrallenebilir Klein-Gordon denklemleri) integrallenebilir NLS tip denklemlerini çıkarmak için uygulamış, Henon-Heiles sistemi olarak açıkladığı bu metodun sonlu boyutlu Hamilton sistemler için uygulanabilir oldugunu göstermiştir. Civelek (1996) genişletilmiş vektör demetleri üzerinde Lagrange ve Hamilton denklemlerinin düşey ve tam lift'lerini ele almıştır. De Leon vd. (2001) klasik alan teorilerini göz önünde bulundurarak simplektik ve kosimplektik manifoldlar üzerindeki Hamilton çatısını genişletmişlerdir. Tekkoyun (2002) Hamilton denklemlerini lift teoriyi kullanarak genişletmiş Kahler manifoldlara genelleştirmiştir ve yüksek mertebeden türevleri içeren Hamilton denklemlerinin geometrik özelliklerini sonuçlarnı vermiştir. Zabzine (2005) genelleştirilmiş kompleks yapı ile genişletilmiş world-sheet süpersimetrisi arasındaki ilişkiyi açıklayarak bu analizin sigma modellerinin geniş sınıfının faz uzayı tanımına dayalı olduğunu belirtmiştir.

Bu çalışmada ise; Tekkoyun'un (2002) temellendirdiği kompleks Lagrange ve Hamilton denklemlerine özgün uygulamalar verilecektir.

1.2 Lagrange Fonksiyonu ve Denklemleri

Sistemi tanımlamak için yeterli olan birbirinden bağımsız genelleştirilmiş koordinatların $q_1, q_2, ..., q_n$ ve bunların zamana göre birinci türevlerinin, $\dot{q}_1, \dot{q}_2, ..., \dot{q}_n$ olduğunu kabul edelim. Sistemin Lagrange fonksiyonu; sistemin T kinetik enerjisi ile V potansiyel enerjisinin farkına eşit olup; $L = T - V$ şeklinde gösterilir. Burada sistemin Lagrange denklemleri ise;

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0, \quad i = 1,2,3,\ldots,\mathrm{n} \tag{1.2.1}$$

olarak verilir (Rızaoğlu 2002).

Bu denklem sistemi kartezyen koordinatlar $x_1, x_2, ..., x_n$ kullanılarak ifade edilebilir. Bu durumda (1.2.1) denklemi;

$$\frac{d}{dt}(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i})-\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i}=0\,, \quad i=1,2,3,\ldots,\mathrm{n} \tag{1.2.2}$$

şeklinde ifade edilebilir.

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i}=\frac{\partial T}{\partial x_i}=m\dot{x}_i=p_i \qquad (\,p=\text{momentum})$$

ve

$$\frac{\partial L}{\partial x_i}=\frac{\partial V}{\partial x_i}=-F_i$$

olmasından $\dot{p}_i=F_i$ yani $\dot{\vec{p}}=\vec{F}$ şeklinde Newton denklemleri elde edilir.

1.3 Hamilton Fonksiyonu ve Denklemleri

Hamilton fonksiyonu;

$$H(q,p,t)=\sum_{i=1}^{n}p_i\dot{q}_i-L(q,\dot{q},t)\,, \qquad i=1,2,3,\ldots,\mathrm{n} \tag{1.3.1}$$

şeklinde tanımlanır (Rızaoğlu 2002).

Bu bağıntının her iki tarafının diferansiyeli alınırsa;

$$dH=\sum_i(\frac{\partial H}{\partial q_i}dq_i+\frac{\partial H}{\partial p_i}dp_i)+\frac{\partial H}{\partial t}dt$$

olmasından

$$\begin{aligned}&\sum_{i=1}^{n}(\frac{\partial H}{\partial q_i}dq_i+\frac{\partial H}{\partial p_i}dp_i)+\frac{\partial H}{\partial t}dt\\&=\sum_{i=1}^{n}(p_i d\dot{q}_i+dp_i\dot{q}_i)-\sum_i(\frac{\partial L}{\partial q_i}dq_i+\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}d\dot{q}_i)-\frac{\partial L}{\partial t}dt\end{aligned} \tag{1.3.2}$$

elde edilir. Burada $p_i=\dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$ ifadesi ve (1.2.1) Lagrange hareket denklemi kullanılırsa (1.3.2) ile verilen denklem aşağıdaki şeklini alır.

$$\sum_i \left(\frac{\partial H}{\partial q_i} dq_i + \frac{\partial H}{\partial p_i} dp_i\right) + \frac{\partial H}{\partial t} dt$$

$$= \sum_i \dot{q}_i dp_i - \sum_i \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) dq_i - \frac{\partial L}{\partial t} dt \tag{1.3.3}$$

$$= \sum_i \dot{q}_i dp_i - \sum_i \dot{p}_i dq_i - \frac{\partial L}{\partial t} dt$$

q_i genelleştirilmiş koordinatlarıyla p_i genelleştirilmiş momentumlarının bağımsız olarak alındığı anımsanırsa

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}, \quad \frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t}, \quad i = 1,2,3,\ldots,\mathrm{n} \tag{1.3.4}$$

denklemleri elde edilir. Burada birinci mertebeden 2n-tane diferansiyel denklem vardır. Bu denklemler ilk defa Hamilton tarafından elde edilmiştir ve Hamilton Denklemleri olarak bilinirler.

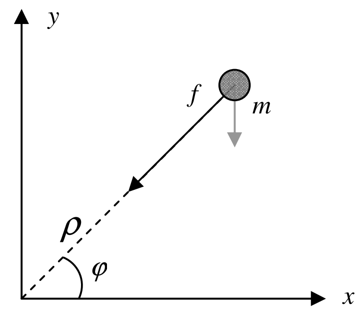
Lagrange ve Hamilton fonksiyonları ile ilgili kıyaslama aşağıdaki gibi yapılabilir.

Tablo 3.1 Lagrange ve Hamilton fonksiyonlarının kıyaslanması

	Hamilton	Lagrange
Genel Formül	$H(q,p,t) = \sum_i p_i \dot{q}_i - L(q,\dot{q},t)$	$L(q,\dot{q},t) = T - V$
Mertebeleri	1.mertebe	2. mertebe
Bağımsız değişken	q_i koordinatları p_i momentumları	q_i koordinatları $\dot{q}_i$ hızları
Tanımlandıkları uzay	Faz uzayı (2n-boyutlu soyut uzay)	Konfigürasyon uzayı (n-boyutlu soyut uzay)

1.4 Uygulamalar

Örnek 1.1 Sabit bir kütle-çekim alanında bulunan m kütleli bir cismin üzerine, Şekil 1.1.1 de görüldüğü gibi büyüklüğü $f(\rho) = A\rho^{\alpha-1}$ $(\alpha \neq 0,1)$ olan ve kuvvet merkezi orijinde bulunan, bir merkezcil kuvvet alanı etki ediyor. Cismin devamlı aynı düşey düzlem içinde kaldığını kabul ederek, Lagrange ve Hamilton hareket denklemlerini bulunuz (Rızaoğlu 2002).



Şekil 1.1.1 Kütlesi *m* olan cisim ve üzerine etki eden kuvvetler

Çözüm: Sistemin kinetik enerjisi**;**

$$T = \frac{1}{2}m({v_x}^2 + {v_y}^2) = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)$$

olup
$x = \rho\cos\varphi,\ \ y = \rho\sin\varphi$ ifadelerinde x ve y 'nin zamana göre birinci türevleri sırasıyla;

$$\dot{x} = \dot{\rho}\cos\varphi - \rho\dot{\varphi}\sin\varphi, \qquad \dot{y} = \dot{\rho}\sin\varphi + \rho\dot{\varphi}\cos\varphi$$

olarak bulunur.

Buradan $\dot{x}$ ve $\dot{y}$ 'nin karesi alınıp taraf tarafa toplanırsa

$$\dot{x}^2 = \dot{\rho}^2\cos^2\varphi - 2\rho\dot{\rho}\dot{\varphi}\sin\varphi\cos\varphi + \rho^2\dot{\varphi}^2\sin^2\varphi,$$

$$\dot{y}^2 = \dot{\rho}^2\sin^2\varphi + 2\rho\dot{\rho}\dot{\varphi}\sin\varphi\cos\varphi + \rho^2\dot{\varphi}^2\cos^2\varphi,$$

$$\dot{x}^2 + \dot{y}^2 = \dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\varphi}^2$$

şeklinde hesaplanır. Dolayısıyla sistemin kinetik enerjisi

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\varphi}^2)$$

konumuna gelir.

$\vec{F} = -\vec{\nabla}V$ 'den $V = -\int \vec{F}.d\vec{r}$

olur. $\vec{F} = -A\rho^{\alpha-1}\hat{\rho},\ \ d\vec{r} = d\rho\hat{\rho}$ olduğundan $\vec{F}.d\vec{r} = -A\rho^{\alpha-1}d\rho$ bulunur.

Buradan $V = -\int -A\rho^{\alpha-1}d\rho = \dfrac{A}{\alpha}\rho^{\alpha}$ ve $V_{top} = mg\rho\sin\varphi + \dfrac{A}{\alpha}\rho^{\alpha}$ elde edilir.

Bu durumda sistemin Lagrange fonksiyonu;

$L = T - V$ 'den

$L = \frac{1}{2}m(\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\varphi}^2) - mg\sin\varphi - \frac{A}{\alpha}\rho^\alpha$ şeklinde olur.

Sistemin Lagrange hareket denklemleri:

1) $\frac{d}{dt}(\frac{\partial L}{\partial \dot{\rho}}) - \frac{\partial L}{\partial \rho} = 0$ **2)** $\frac{d}{dt}(\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}}) - \frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0$

olup bu denklemlerin çözümleri sırasıyla

1) $\frac{d}{dt}(\frac{1}{2}m2\dot{\rho}) - (\frac{1}{2}m2\rho\dot{\varphi}^2) + mg\sin\varphi + A\rho^{\alpha-1} = 0$,

$m\ddot{\rho} - m\rho\dot{\varphi}^2 + A\rho^{\alpha-1} + mg\sin\varphi = 0$

ve

2) $\frac{d}{dt}(\frac{1}{2}m2\rho^2\dot{\varphi}) - mg\rho\cos\varphi = 0$

$\frac{d}{dt}(m\rho^2\dot{\varphi}) - mg\rho\cos\varphi = 0$

olur.

Sistemin Hamilton fonksiyonunun elde edilebilmesi için ρ ve φ ye bağlı momentumlar;

$p_\rho = \frac{\partial L}{\partial \dot{\rho}} = \frac{1}{2}m2\dot{\rho} = m\dot{\rho}$, $p_\varphi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = \frac{1}{2}m\rho^2 2\dot{\varphi} = m\rho^2\dot{\varphi}$

şeklinde olur. Sistemin $H = p_\rho\dot{\rho} + p_\varphi\dot{\varphi} - L$ Hamilton fonksiyonu;

$$H = m\dot{\rho}^2 + m\rho^2\dot{\varphi}^2 - \frac{1}{2}m(\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\varphi}^2) + mg\rho\sin\varphi + \frac{A}{\alpha}\rho^\alpha$$

$$= \frac{m\dot{\rho}^2}{2} + \frac{m\rho^2\dot{\varphi}^2}{2} + mg\rho\sin\varphi + \frac{A}{\alpha}\rho^\alpha$$

şeklinde elde edilir. Diğer taraftan $\dot{\rho}$ ve $\dot{\varphi}$ çekilip Hamilton fonksiyonunda yerine yazılırsa;

$p_\rho = m\dot{\rho}, \quad p_\varphi = m\rho^2\dot{\varphi}$'dan $\dot{\rho} = \dfrac{p_\rho}{m}, \quad \dot{\varphi} = \dfrac{p_\varphi}{m\rho^2}$ olur. Bu denklemler sistemin $H = p_\rho\dot{\rho} + p_\varphi\dot{\varphi} - L$ Hamilton fonksiyonunda yerine yazılırsa

$$H = p_\rho \frac{p_\rho}{m} + p_\varphi \frac{p_\varphi}{m.\rho^2} - \frac{1}{2}m(\frac{p_\rho^{\ 2}}{m^2} + \frac{\rho^2 p_\varphi^{\ 2}}{m^2\rho^4}) + \frac{A}{\alpha}\rho^\alpha + mg\rho\sin\varphi$$

$$= \frac{p_\rho^{\ 2}}{m} + \frac{p_\varphi^{\ 2}}{m.\rho^2} - \frac{p_\rho^{\ 2}}{2m} - \frac{p_\rho^{\ 2}}{2m\rho^2} + \frac{A}{\alpha}\rho^\alpha + mg\rho\sin\varphi$$

$$= \frac{p_\rho^{\ 2}}{2m} + \frac{p_\varphi^{\ 2}}{2m\rho^2} + \frac{A}{\alpha}\rho^\alpha + mg\rho\sin\varphi$$

olarak bulunur.

Hamilton denklemleri de

1) $\dot{\rho} = \dfrac{\partial H}{\partial p_\rho}$ **,** $\dot{p}_\rho = -\dfrac{\partial H}{\partial \rho}$

$$\dot{\rho} = \frac{2p_\rho}{2m} = \frac{p_\rho}{m}$$

$$\dot{p}_\rho = -[\frac{2m\rho\dot{\varphi}^2}{2} + \frac{A}{\alpha}\alpha\rho^{\alpha-1} + mg\sin\varphi]$$

$$= -[m\rho\dot{\varphi}^2 + A\rho^{\alpha-1} + mg\sin\varphi]$$

$$= -[m\rho\frac{P_\varphi^{\ 2}}{m^2\rho^4} + A\rho^{\alpha-1} + mg\sin\varphi]$$

$$= -\frac{p_\varphi^{\ 2}}{m\rho^3} - A\rho^{\alpha-1} - mg\sin\varphi$$

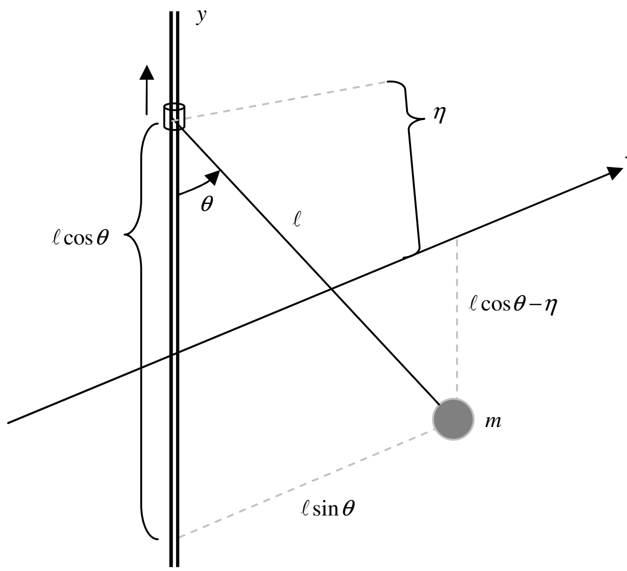
2) $\dot{\varphi} = \dfrac{\partial H}{\partial p_\varphi}$**,** $\dot{p}_\varphi = -\dfrac{\partial H}{\partial \varphi}$'dan

$\dot{\varphi} = \dfrac{2.p_\varphi}{2m\rho^2} = \dfrac{p_\varphi}{m\rho^2}$ ve

$$\dot{p}_\varphi = -(mg\rho\dot{\varphi}\cos\varphi) = -mg\rho\dot{\varphi}\cos\varphi$$

şeklinde elde edilir.

Örnek 1.2 Şekil 1.2.1’de görülen ve bağlantı noktası yukarıya doğru sabit bir *a* ivmesi ile hareket eden; bir basit sarkacın küçük salınımlarının Lagrange ve Hamilton fonksiyonlarını yazıp hareket denklemlerini çıkarınız (Rızaoğlu 2002):



Şekil 1.2.1 Bağlantı noktası yukarıya doğru sabit bir *a* ivmesi ile hareket eden basit sarkaç

Çözüm: Herhangi bir t anında sarkacın bağlantı noktasının orijinden η kadar ötede olduğunu varsayalım. Buna göre sarkacın ucundaki m kütleli noktasal cismin x ve y koordinatları sırasıyla ,

$x = \ell \sin\theta$, $y = \ell\cos\theta - \eta$

olur. Buradan cismin kinetik enerjisi;

$T = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)$’den, $\dot{x} = \ell\dot{\theta}\cos\theta$ $\dot{x}^2 = \ell^2\dot{\theta}^2\cos^2\theta$

$\dot{y} = -\ell\dot{\theta}\sin\theta - \dot{\eta}$ $\qquad \dot{y}^2 = (-\ell\dot{\theta}\sin\theta - \dot{\eta})^2 = \ell^2\dot{\theta}^2\sin^2\theta + \dot{\eta}^2 + 2\ell\dot{\theta}\sin\theta\dot{\eta}$

$$T = \frac{1}{2}m(\ell^2\dot{\theta}^2\cos^2\theta + \ell^2\dot{\theta}^2\sin^2\theta + \dot{\eta}^2 + 2\ell\dot{\theta}\sin\theta\dot{\eta})$$

$$= \frac{1}{2}m(\ell^2\dot{\theta}^2 + \dot{\eta}^2 + 2\ell\dot{\theta}\dot{\eta}\sin\theta) \qquad (1.4.1)$$

ve potansiyel enerjisi de x-ekseni boyunca

$V = 0$ kabul edildiğinde

$V = -mg(\ell\cos\theta - \eta)$

olarak bulunur. O halde sarkacın $L = T - V$ Lagrange fonksiyonu

$$L = \frac{1}{2}m(\ell^2\dot{\theta}^2 + \dot{\eta}^2 + 2\ell\dot{\theta}\dot{\eta}\sin\theta) + mg(\ell\cos\theta - \eta)\,.$$

Buradan $\frac{d}{dt}(\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}}) - \frac{\partial L}{\partial\theta} = 0$ Lagrange'ın θ'ya bağlı hareket denklemi

$$\frac{d}{dt}(\frac{1}{2}m2\ell^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}m2\ell\dot{\eta}\sin\theta) - \frac{1}{2}m2\ell\dot{\eta}\dot{\theta}^2\cos\theta + mg\ell\dot{\theta}\sin\theta = 0$$

$$\frac{d}{dt}(m\ell^2\dot{\theta}^2 + m\ell\dot{\eta}\sin\theta) - m\ell\dot{\eta}\dot{\theta}^2\cos\theta + mg\ell\dot{\theta}\sin\theta = 0$$

olarak elde edilir.

$\frac{d}{dt}(\frac{\partial L}{\partial\dot{\eta}}) - \frac{\partial L}{\partial\eta} = 0$ Lagrange'ın η'ye bağlı hareket denklemi

$$\frac{d}{dt}(\frac{1}{2}m2.\dot{\eta} + \frac{1}{2}m2\ell\dot{\theta}\sin\theta) + mg = 0$$

$$\frac{d}{dt}(m\dot{\eta} + m\ell\dot{\theta}\sin\theta) + mg = 0$$

bulunur.

Sarkacın $H = p_\theta\dot{\theta} + p_\eta\dot{\eta} - L$ Hamilton fonksiyonunu yazabilmek için θ ve η'ye bağlı momentumları,

$$p_\theta = \frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}} = \frac{1}{2}m\ell^2 2\dot{\theta} + \frac{1}{2}m2\ell\dot{\eta}\sin\theta = m\ell^2\dot{\theta} + m\ell\dot{\eta}\sin\theta$$

ve

$$p_\eta = \frac{\partial L}{\partial\dot{\eta}} = \frac{1}{2}m2\dot{\eta} + \frac{1}{2}m2\ell\dot{\theta}\sin\theta = m\dot{\eta} + m\ell\dot{\theta}\sin\theta$$

olmak üzere

$$H = m\ell^2\dot{\theta}^2 + m\ell\dot{\theta}\dot{\eta}\sin\theta + m\dot{\eta}^2 + m\dot{\eta}\ell\dot{\theta}\sin\theta - \frac{1}{2}m(\ell^2\dot{\theta}^2 + \dot{\eta}^2 + 2\dot{\eta}\ell\dot{\theta}\sin\theta) - mg(\ell\cos\theta - \eta)$$

elde edilir ve gerekli işlemler yapılırsa,

$$H = \frac{m\ell^2\dot{\theta}^2}{2} + \frac{m\dot{\eta}^2}{2} + m\dot{\eta}\ell\dot{\theta}\sin\theta - mg\ell\cos\theta + mg\eta \tag{1.4.2}$$

bulunur.

$$p_\theta = m\ell^2\dot{\theta} + m\ell\dot{\eta}\sin\theta \text{'dan } \dot{\theta} = \frac{p_\theta - m\ell\dot{\eta}\sin\theta}{m\ell^2} \tag{1.4.3}$$

ve

$$p_\eta = m\dot{\eta} + m\ell\dot{\theta}\sin\theta \text{ dan } \dot{\eta} = \frac{p_\eta - m\ell\dot{\theta}\sin\theta}{m} \tag{1.4.4}$$

elde edilir.

(1.4.3) ve (1.4.4) eşitlikleri (1.4.2) ile verilen Hamilton fonksiyonunda yerine yazılırsa;

$$H = \frac{m\ell^2\left(\frac{p_\theta - m\ell\dot{\eta}\sin\theta}{m\ell^2}\right)^2}{2} + \frac{m\left(\frac{p_\eta - m\ell\dot{\theta}\sin\theta}{m}\right)^2}{2}$$
$$+ m\frac{p_\eta - m\ell\dot{\theta}\sin\theta}{m}\ell\frac{p_\theta - m\ell\dot{\eta}\sin\theta}{m\ell^2}\sin\theta - mg\ell\cos\theta + mg\eta$$

$$H = \frac{(p_\theta - m\ell\dot{\eta}\sin\theta)^2}{2m\ell^2} + \frac{(p_\eta - m\dot{\theta}\sin\theta)^2}{2m}$$
$$+ (p_\eta - m\ell\dot{\theta}\sin\theta)\frac{(p_\theta - m\ell\dot{\eta}\sin\theta)}{m\ell}\sin\theta - mg\ell\cos\theta + mg\eta \tag{1.4.5}$$

bulunur. Dolayısıyla (1.4.5) ile verilen fonksiyona ait yukarıdaki Hamilton denklemleri aşağıdaki gibidir.

1) $\dot{\eta} = \frac{\partial H}{\partial P_\eta}$ ve $\dot{p}_\eta = -\frac{\partial H}{\partial \eta}$ den

$$\dot{\eta} = \frac{2p_\eta - 2m\dot{\theta}\sin\theta}{2m} + \frac{p_\theta - m\ell\dot{\eta}\sin\theta}{m\ell}\sin\theta,$$
$$= \frac{p_\eta - m\dot{\theta}\sin\theta}{m} + \frac{p_\theta - m\ell\dot{\eta}\sin\theta}{m\ell}\sin\theta$$

ve

$$\dot{p}_\eta = -mg$$

bulunur.

2) $\dot{\theta} = \dfrac{\partial H}{\partial p_\theta}$ ve $\dot{p}_\theta = -\dfrac{\partial H}{\partial \theta}$ dan

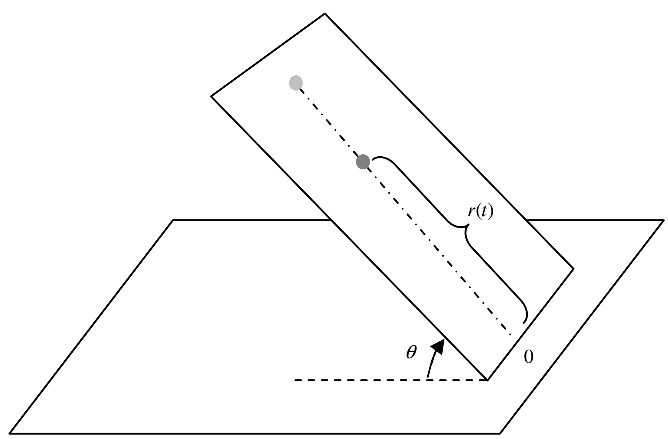
$$\dot{\theta} = \frac{p_\theta - m\ell\dot{\eta}\sin\theta}{m\ell^2} + \frac{(p_\eta - m\ell\dot{\theta}\sin\theta)\sin\theta}{m\ell}$$

ve

$$\begin{aligned}\dot{p}_\theta &= -(m\dot{\eta}\ell\dot{\theta}^2\cos\theta + mg\ell\dot{\theta}\sin\theta)\\ &= -m\dot{\eta}\ell\dot{\theta}^2\cos\theta - mg\ell\dot{\theta}\sin\theta\end{aligned}$$

şeklinde elde edilir.

Örnek 1.3 Şekil 1.3.1 de *m* kütleli noktasal bir cisim başlangıçta, sürtünmesiz yatay bir düzlemin bir ucunda durmaktadır. Düzlemin cismin durduğu ucu sabit bir α sür'atiyle (burada süratten kasıt θ açısının birim zaman aralığındaki değişme miktarıdır) yukarıya kaldırılıyor. Düzlemin herhangi bir anda yatayla yaptığı açıyı θ ile gösterelim. Cismin Lagrange ve Hamilton fonksiyonlarını yazıp denklemlerini belirleyiniz.(Rızaoğlu 2002).



Şekil 1.3.1 Eğik düzlemin yatayla θ açısını yaptığı an θ açısı sabit bir α sür'atle artırılıyor.

Çözüm: Cismin herhangi bir *t* anında eğik düzlem boyunca orijinden olan uzaklığını r(t) ile gösterelim. Hem r hem de θ zamanla değiştiğine göre, cismin kinetik enerjisi

$$T = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\alpha^2).$$

Düzlemin ilk konumunun belirlediği yatay düzlemde kütle-çekim potansiyel enerjisi sıfır alındığında, cismin potansiyel enerjisi

$V = mgr\sin(\alpha t)$

yazılır. Buna göre cismin Lagrange fonksiyonu;

$L = T - V$ den $L = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\alpha^2) - mgr\sin(\alpha t)$

olur. Buradan Lagrange hareket denklemleri sırasıyla

1) $\frac{d}{dt}(\frac{\partial L}{\partial \dot{r}}) - \frac{\partial L}{\partial r} = 0$ dan

$$\frac{d}{dt}(\frac{1}{2}m2\dot{r}) - \frac{1}{2}m2r\alpha^2 + mg\sin(\alpha t) = 0$$

olup gerekli işlemler yapılırsa

$$\frac{d}{dt}(m\dot{r}) - mr\alpha^2 + mg\sin(\alpha t) = 0,$$

bulunur ve buradan da

$$m\ddot{r} - mr\alpha^2 + mg\sin(\alpha t) = 0$$

veya

$$\ddot{r} - r\alpha^2 = -g\sin(\alpha t)$$

olarak elde edilir. Elde edilen denklem ikinci mertebeden sabit katsayılı homojen olmayan bir diferansiyel denklemdir. Öncelikle homojen kısmın çözümü

$\ddot{r} - r\alpha^2 = 0$'dan

$$D^2 - \alpha^2 = 0$$

ya da

$D = \pm\alpha$ ve dolayısıyla

$$r_h = Ae^{-\alpha t} + Be^{\alpha t}$$

elde edilir.

$2\cosh(\alpha t) = e^{\alpha t} + e^{-\alpha t}$ ve $2\sinh(\alpha t) = e^{\alpha t} - e^{-\alpha t}$ ifadelerinden

$e^{\alpha t} = \cosh(\alpha t) + \sinh(\alpha t)$ ve $e^{-\alpha t} = \cosh(\alpha t) - \sinh(\alpha t)$ eşitlikleri elde edilir.

$$A(\cosh(\alpha t) - \sinh(\alpha t)) + B(\cosh(\alpha t) + \sinh(\alpha t)) = 0$$

olup

$(A+B)\cosh(\alpha t)+(A-B)\sinh(\alpha t)=0$ elde edilir.

Buradan,

A+B=C ve A-B=D denilirse homojen çözüm

$$r_h = C\cosh(\alpha t)+D\sinh(\alpha t)$$

şeklinde elde edilir. Özel çözüm ise

$$r_p = c_1\cos(\alpha t)+c_2\sin(\alpha t)$$

$$\dot{r}_p = -\alpha c_1\sin(\alpha t)+\alpha c_2\cos(\alpha t)$$

$$\ddot{r}_p = -\alpha^2 c_1\cos(\alpha t)-\alpha^2 c_2\sin(\alpha t)$$

elde edilir. Dolayısıyla

$$\ddot{r}_p - r_p\alpha^2 = -g\sin(\alpha t)$$

olup buradan

$$-\alpha^2 c_1\cos(\alpha t)-\alpha^2 c_2\sin(\alpha t)-\alpha^2(c_1\cos(\alpha t)+c_2\sin(\alpha t))=-g\sin(\alpha t)$$

$$-2\alpha^2(c_1\cos(\alpha t)+c_2\sin(\alpha t))=-g\sin(\alpha t)$$

elde edilir.

$-2\alpha^2 c_1 = 0$ ve $-2\alpha^2 c_2 = -g$ dan $c_1 = 0$ ve $c_2 = \dfrac{g}{2\alpha^2}$ olarak bulunur.

O halde $r_p = \dfrac{g}{2\alpha^2}\sin(\alpha t)$ olup genel çözüm

$$r(t) = C\cosh(\alpha t)+D\sinh(\alpha t)+\frac{g}{2\alpha^2}\sin(\alpha t)$$

şeklinde elde edilir.

$t=0$ anında cismin O noktasına olan uzaklığı r_0 ile gösterilirse, cisim durduğuna göre $v_o = 0$ olur. Bu başlangıç koşullarına göre genel çözüm, $C = r_0$ ve $t=0$ için

$$\dot{r}(t) = C\alpha\sinh(\alpha t)+D\alpha\cosh(\alpha t)+\alpha\frac{g}{2\alpha^2}\cos(\alpha t)$$

ve

$$\dot{r}(0) = V_0 = 0$$

olup buradan

$$0 = C\alpha \sinh(0) + D\alpha \cosh(0) + \frac{g}{2\alpha}\cos(0)$$

elde edilir.

$0 = D\alpha + \dfrac{g}{2\alpha}$ den $D = -\dfrac{g}{2\alpha^2}$ olur.

O halde cismin herhangi bir t anında eğik düzlem boyunca orijinden olan uzaklığı

$$r = r_0 \cosh(\alpha t) - \frac{g}{2\alpha^2}\sinh(\alpha t) + \frac{g}{2\alpha^2}\sin(\alpha t)$$

olarak bulunur.

Sistemin $H = p_r \dot{r} - L$ Hamilton fonksiyonu

$p_r = \dfrac{\partial L}{\partial \dot{r}} = \dfrac{1}{2} m(2\dot{r}) = m\dot{r}$ 'den

$$H = m\dot{r}^2 - \frac{1}{2} m(\dot{r}^2 + r^2\alpha^2) + mgr\sin(\alpha t)$$

şeklinde bulunur. Sistemin Hamilton fonksiyonu momentuma bağlı yazılırsa $p_r = m\dot{r}$ dan $\dot{r}$ çekilip Hamilton fonksiyonunda yerine konursa

$$H = m\frac{p_r^{\,2}}{m^2} - \frac{1}{2} m(\frac{p_r^{\,2}}{m^2} + r^2\alpha^2) + mgr\sin(\alpha t)$$

veya

$$H = \frac{p_r^{\,2}}{m} - \frac{p_r^{\,2}}{2m} - \frac{mr^2\alpha^2}{2} + mgr\sin(\alpha t)$$

veya

$$H = \frac{p_r^{\,2}}{2m} - \frac{mr^2\alpha^2}{2} + mgr\sin(\alpha t)$$

olarak bulunur.

Hamilton denklemi

$\dot{r} = \dfrac{\partial H}{\partial P_r}$ ve $\dot{p}_r = -\dfrac{\partial H}{\partial r}$ olup

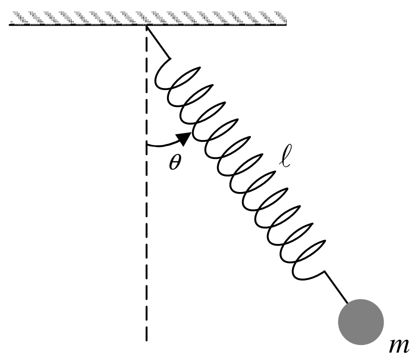
$$\dot{r} = \frac{2p_r}{2m} = \frac{p_r}{m}$$

ve

$$\begin{aligned} \dot{p}_r &= -(-\frac{1}{2}m(2r\alpha^2) + mg\sin(\alpha t)) \\ &= -(-mr\alpha^2 + mg\sin(\alpha t)) \\ &= mr\alpha^2 - mg\sin(\alpha t) \end{aligned}$$

elde edilir.

Örnek 1.4 Yay sabiti *k*, boyu ℓ_0 olan ve kütlesiz kabul edilebilen bir yay Şekil 1.4.1'de görüldüğü gibi, bir ucundan tavana asılmış ve öteki ucuna da kütlesi *m* olan küçük bir top takılmıştır. Küçük top hem yayın ucunda düşey düzlem içinde salınmakta ve hem de denge konumu etrafında titreşmektedir. Cismin Lagrange ve Hamilton denklemlerini yazınız (Rızaoğlu 2002).



Şekil 1.4.1 Bir yayın ucuna *m* kütleli küçük bir top asılarak oluşturulan sarkaç. Küçük topun hareketi sırasında hem θ hem de ℓ değişir.

Çözüm: Cismin salınması sırasında, yayın herhangi bir *t* anında düşey doğrultuyla yaptığı açı θ olsun. Cismin denge durumu etrafında aşağı yukarı titreşmesi sırasında yayın t anındaki boyunu ℓ ile gösterelim. Koordinat sisteminin orijini olarak yayın askı noktasını alalım. *m* kütlesinin konumunu belirlemek için en uygun koordinatlar kutupsal koordinatlardır. Cismin $T = \frac{1}{2}m\vec{v}^2$ kinetik enerjisi hesaplanırsa;

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)$$

olur.

$x = \ell \sin\theta, \quad y = \ell \cos\theta$

olup bu koordinatların zamana göre birinci türevleri;

$\dot{x} = \ell\dot{\theta}\cos\theta + \dot{\ell}\sin\theta\,,\ \dot{y} = -\ell\dot{\theta}\sin\theta + \dot{\ell}\cos\theta$

dır.

$$\dot{x}^2 = \ell^2\dot{\theta}^2\cos^2\theta + 2\ell\dot{\ell}\dot{\theta}\cos\theta\sin\theta + \dot{\ell}^2\sin^2\theta$$

$$\dot{y}^2 = \ell^2\dot{\theta}^2\sin^2\theta - 2\ell\dot{\ell}\dot{\theta}\cos\theta\sin\theta + \dot{\ell}^2\cos^2\theta$$

olup verilen eşitlikleri taraf tarafa toplanıp formülde yerine yazılırsa;

$\dot{x}^2 + \dot{y}^2 = \ell^2\dot{\theta}^2 + \ell^2$ den

$$T = \frac{1}{2}m(\ell^2\dot{\theta}^2 + \ell^2)$$

olarak bulunur. Sistemin, hem yerin sabit kütle-çekim alanında bulunması hem de yayın titreşmesi sırasında gerilmesi veya sıkışması nedeniyle, iki potansiyel enerjisi vardır. Yerin kütle-çekim potansiyelini orijinin bulunduğu düzeyde sıfır kabul edelim. Sistemin toplam potansiyel enerjisi

$$V = -mg\ell\cos\theta + \frac{1}{2}k(\ell - \ell_0)^2\ ,$$

Buna göre sistemin $L = T - V$ Lagrange fonksiyonu

$$L = \frac{1}{2}m(\ell^2\dot{\theta}^2 + \dot{\ell}^2) + mg\ell\cos\theta - \frac{1}{2}k(\ell - \ell_0)^2$$

olur. Buradan sistemin titreşim ve salınım hareket denklemleri olan Lagrange denklemleri yazılırsa;

1) $\dfrac{d}{dt}(\dfrac{\partial L}{\partial \dot{\ell}}) - \dfrac{\partial L}{\partial \ell} = 0$ dan

$$\frac{d}{dt}(\frac{1}{2}m2\dot{\ell}) - (\frac{1}{2}m2\ell\dot{\theta}^2 + mg\cos\theta - \frac{1}{2}k(2\ell - 2\ell_0)) = 0,$$

$$\frac{d}{dt}(m\dot{\ell}) - (m\ell\dot{\theta}^2 + mg\cos\theta - k\ell + k\ell_0) = 0\,,$$

$$m\ddot{\ell} - m\ell\dot{\theta}^2 - mg\cos\theta + k\ell - k\ell_0 = 0,$$

$$\ddot{\ell} - \ell\dot{\theta}^2 - g\cos\theta + \frac{k}{m}(\ell - \ell_0) = 0\,,$$

bulunur.

2) $\frac{d}{dt}(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0$ dan

$$\frac{d}{dt}(\frac{1}{2}m\ell^2 2\dot{\theta}) - (-mg\ell\sin\theta) = 0\,,$$

$$\frac{d}{dt}(m\ell^2\dot{\theta}) + mg\ell\sin\theta = 0\,,$$

$$\frac{m\ell^2\ddot{\theta}}{m\ell^2} + \frac{2m\ell\dot{\ell}\dot{\theta}}{m\ell^2} + \frac{mg\ell\sin\theta}{m\ell^2} = 0\,,$$

$$\ddot{\theta} + 2\frac{\dot{\ell}}{\ell}\dot{\theta} + g\frac{1}{\ell}\sin\theta = 0\,,$$

elde edilir.

Sistemin $H = p_\theta\dot{\theta} + p_\ell\dot{\ell} - L$ Hamilton fonksiyonunun elde edilmesi için

$$p_\theta = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = \frac{1}{2}m\ell^2 2\dot{\theta} = m\ell^2\dot{\theta}$$

$$p_\ell = \frac{\partial L}{\partial \dot{\ell}} = \frac{1}{2}m2\dot{\ell} = m\dot{\ell}$$

olup Hamilton fonksiyonu

$$H = m\ell^2\dot{\theta}^2 + m\dot{\ell}^2 - \frac{1}{2}m\dot{\ell}^2 - \frac{1}{2}m\ell^2\dot{\theta}^2 - mg\ell\cos\theta + \frac{1}{2}k(\ell - \ell_0)^2\,,$$

$$H = \frac{m}{2}\ell^2\dot{\theta}^2 + \frac{m}{2}\dot{\ell}^2 - mg\ell\cos\theta + \frac{1}{2}k(\ell - \ell_0)^2 \qquad (1.4.6)$$

olarak hesaplanır.

Sistemin Hamilton fonksiyonunu momentumlar cinsinden yazmak için $\dot{\theta}$ ve $\dot{\ell}$ çekilirse

$$p_\theta = m\ell^2\dot{\theta} \text{ dan } \dot{\theta} = \frac{p_\theta}{m\ell^2} \qquad (1.4.7)$$

ve

$$p_\ell = m\dot{\ell} \text{ den } \dot{\ell} = \frac{p_\ell}{m}, \tag{1.4.8}$$

olur. (1.4.7) ve (1.4.8) eşitlikleri; (1.4.6) ile verilen Hamilton fonksiyonunda yerine yazılırsa

$$H = \frac{m}{2}\ell^2 \frac{p_\theta^{\,2}}{m^2\ell^4} + \frac{m}{2}\frac{p\ell^2}{m^2} - mg\ell\cos\theta + \frac{1}{2}k(\ell - \ell_0)^2 \text{ veya}$$

$$H = \frac{p_\theta^{\,2}}{2m\ell^2} + \frac{p_\ell^{\,2}}{2m} - mg\ell\cos\theta + \frac{1}{2}k(\ell - \ell_0)^2$$

olarak bulunur.

Buradan Hamilton denklemleri

1) $\dot{\theta} = \dfrac{\partial H}{\partial p_\theta}$, $\dot{p}_\theta = -\dfrac{\partial H}{\partial \theta}$ dan

$$\dot{\theta} = \frac{2p_\theta}{2m\ell^2} = \frac{p_\theta}{m\ell^2},$$

$\dot{p}_\theta = -mg\ell\dot{\theta}\sin\theta$ elde edilir.

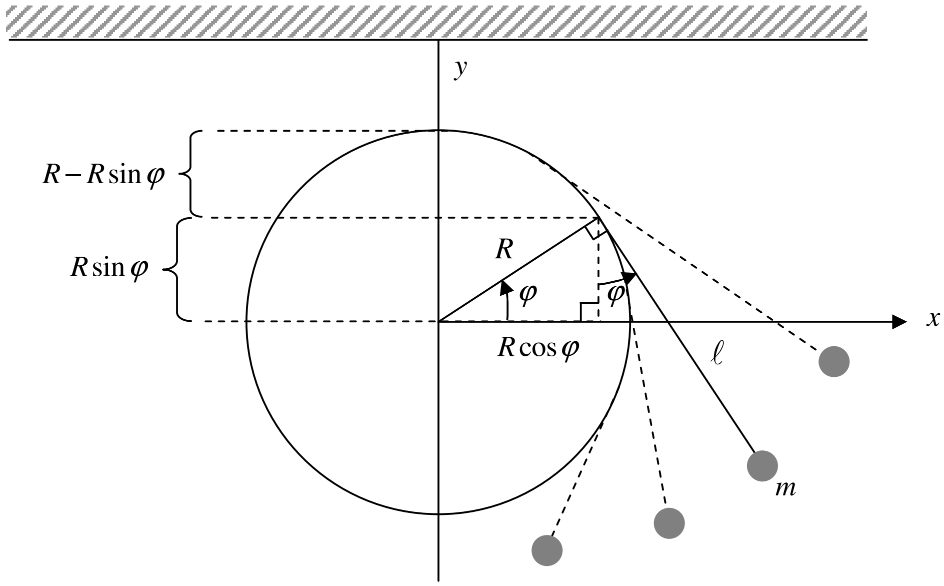
2) $\dot{\ell} = \dfrac{\partial H}{\partial p_\ell}$, $\dot{p}_\ell = -\dfrac{\partial H}{\partial \ell}$ den

$$\dot{\ell} = \frac{2p_\ell}{2m} = \frac{p_\ell}{m},$$

$$\dot{p}_\ell = -\frac{m}{2}2\ell\dot{\theta}^2 + mg\cos\theta - \frac{1}{2}k2\ell + \frac{1}{2}k2\ell_0 = -m\ell\dot{\theta}^2 + mg\cos\theta - k\ell + k\ell_0$$

bulunur.

Örnek 1.5 Boyu ℓ olan bir ipin bir ucu R yarıçapında ve sabit bir şekilde tavana tutturulmuş bir diskin en uç noktasına bağlanmıştır. Cismin öteki ucuna kütlesi m olan küçük bir top takılarak Şekil 1.5.1'de gösterilen bir sarkaç yapılmıştır. Sarkacın küçük salınımlarının Lagrange ve Hamilton hareket denklemlerini bulunuz (Rızaoğlu 2002).



Şekil 1.5.1 Askı ipi sabit bir şekilde tavana tutturulmuş, diskin en üst noktasına bağlanan sarkacın salınması sırasında farklı anlardaki görünümü

Çözüm: Sarkacın salınması sırasında ip diske dolanacak ve boyu değişecektir. Sarkacın herhangi bir anında salınma açısı φ kabul edilsin. Şekil 1.5.1 de görüldüğü gibi, ipin diske teğet olduğu noktayı diskin merkezine birleştiren yarıçapın yatay doğrultuyla yaptığı açı da φ olur. Bu anda sarkaç ipinin boyu $\ell - R(\frac{\pi}{2}-\varphi)$ uzunluğuna eşittir. ($90-\varphi$ dilimlik yayın uzunluğu; $2\pi R\frac{90-\varphi}{360} = R(90-\varphi) = R(\frac{\pi}{2}-\varphi)$ olup ipin boyu ℓ idi. O halde sarkaç ipinin boyu $\ell - R(\frac{\pi}{2}-\varphi)$ olur) Buna göre m kütlesinin koordinatları;

$$x = R\cos\varphi + (\ell - R(\frac{\pi}{2}-\varphi))\sin\varphi$$

$$y = -R\sin\varphi + (\ell - R(\frac{\pi}{2}-\varphi))\cos\varphi .$$

Buradan bu koordinatlar yardımıyla hızı elde etmek için zamana göre birinci türevleri alınırsa

$$\dot{x} = -R\sin\varphi + R\sin\varphi + (\ell - R(\frac{\pi}{2}-\varphi))\ddot{\varphi}\cos\varphi = (\ell - R(\frac{\pi}{2}-\varphi))\dot{\varphi}\cos\varphi ,$$

$$\dot{x} = -R\sin\varphi + R\sin\varphi + (\ell - R(\frac{\pi}{2}-\varphi))\ddot{\varphi}\cos\varphi$$

$$\dot{x}^2 = (\ell - R(\frac{\pi}{2} - \varphi))^2 \dot{\varphi}^2 \cos^2 \varphi ,$$

$$\dot{y} = -R\cos\varphi + R\cos\varphi - (\ell - R(\frac{\pi}{2} - \varphi))\dot{\varphi}\sin\varphi \ = -(\ell - R(\frac{\pi}{2} - \varphi))\dot{\varphi}\sin\varphi$$

$$\dot{y}^2 = (\ell - R(\frac{\pi}{2} - \varphi)\}^2 \dot{\varphi}^2 \sin^2 \varphi$$

olup buradan sistemin $T = \frac{1}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)$ kinetik enerjisi

$T = \frac{1}{2} m(\ell - R(\frac{\pi}{2} - \varphi))^2 \dot{\varphi}^2$ dir.

x-ekseninin belirlediği düzeyde kütle-çekim potansiyel enerjisi sıfır seçilirse, sarkacın potansiyel enerjisi

$$V = -mg((\ell - R(\frac{\pi}{2} - \varphi))\cos\varphi - R\sin\varphi)$$

olup sistemin $L = T - V$ Lagrange fonksiyonu,

$$L = \frac{1}{2} m(\ell - R(\frac{\pi}{2} - \varphi))^2 \dot{\varphi}^2 + mg((\ell - R(\frac{\pi}{2} - \varphi))\cos\varphi - R\sin\varphi)$$

olarak elde edilir.

Sistemin Lagrange denklemi

$\frac{d}{dt}(\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}}) - \frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0$ dan

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = \frac{1}{2} m(\ell - R(\frac{\pi}{2} - \varphi))^2 2\dot{\varphi} = m(\ell - R(\frac{\pi}{2} - \varphi))^2 \dot{\varphi} ,$$

$$\frac{\partial L}{\partial \varphi} = \frac{1}{2} m2(\ell - R(\frac{\pi}{2} - \varphi))\dot{\varphi}^2 R + mg(-(\ell - R(\frac{\pi}{2} - \varphi))\sin\varphi + R\cos\varphi - R\cos\varphi) ,$$

$$\frac{\partial L}{\partial \varphi} = m(\ell - R(\frac{\pi}{2} - \varphi))\dot{\varphi}^2 R - mg(\ell - R(\frac{\pi}{2} - \varphi))\sin\varphi$$

$$\frac{d}{dt}(m(\ell - R(\frac{\pi}{2} - \varphi))^2 \dot{\varphi}) - m(\ell - R(\frac{\pi}{2} - \varphi))\dot{\varphi}^2 R + mg(l - R(\frac{\pi}{2} - \varphi))\sin\varphi = 0$$

$$2m(\ell - R\frac{\pi}{2} + R\varphi)\dot{\varphi}^2 R + m(\ell - R(\frac{\pi}{2} - \varphi))^2 \ddot{\varphi} - m(\ell - R(\frac{\pi}{2} - \varphi))\dot{\varphi}^2 R + mg(\ell - R(\frac{\pi}{2} - \varphi))\sin\varphi$$

$$\frac{m(\ell - R(\frac{\pi}{2} - \varphi))\dot{\varphi}^2 R}{m(\ell - R(\frac{\pi}{2} - \varphi))^2} + \frac{m(\ell - R(\frac{\pi}{2} - \varphi))^2 \ddot{\varphi}}{m(\ell - R(\frac{\pi}{2} - \varphi))^2} + \frac{mg(\ell - R(\frac{\pi}{2} - \varphi))\sin\varphi}{m(\ell - R(\frac{\pi}{2} - \varphi))^2} = 0$$

$\ddot{\varphi} + \dfrac{R}{(\ell - R(\frac{\pi}{2} - \varphi))}\dot{\varphi}^2 + \dfrac{g}{(\ell - R(\frac{\pi}{2} - \varphi))}\sin\varphi = 0$ olur.

Sistemin $H = p_\varphi \dot{\varphi} - L$ Hamilton fonksiyonu ve denklemi

$$p_\varphi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = \frac{1}{2} m 2(\ell - R(\frac{\pi}{2} - \varphi))^2 \dot{\varphi} = m(\ell - R(\frac{\pi}{2} - \varphi))^2 \dot{\varphi} \qquad (1.4.9)$$

olup sistemin Hamilton fonksiyonu

$$H = m(\ell - R(\frac{\pi}{2} - \varphi))^2 \dot{\varphi}^2 - \frac{1}{2} m(\ell - R(\frac{\pi}{2} - \varphi))^2 \dot{\varphi}^2 - mg((\ell - R(\frac{\pi}{2} - \varphi))\cos\varphi - R\sin\varphi),$$

$$H = \frac{m}{2}(\ell - R(\frac{\pi}{2} - \varphi))^2 \dot{\varphi}^2 - mg(\ell - R(\frac{\pi}{2} - \varphi))\cos\varphi + mgR\sin\varphi \qquad (1.4.10)$$

elde edilir.

Sistemin Hamilton fonksiyonu momentumlar cinsinden yazılmak istenirse (1.4.9) denklemlerinden;

$$p_\varphi = m(\ell - R(\frac{\pi}{2} - \varphi))^2 \dot{\varphi}$$

olup $\dot{\varphi}$ yalnız bırakılırsa

$\dot{\varphi} = \dfrac{p_\varphi}{m(\ell - R(\frac{\pi}{2} - \varphi))^2}$ olup (1.4.10) Hamilton fonksiyonu;

$$H = \frac{m}{2}(\ell - R(\frac{\pi}{2} - \varphi))^2 \frac{p_\varphi}{m^2(\ell - R(\frac{\pi}{2} - \varphi))^4} - mg(\ell - R(\frac{\pi}{2} - \varphi))\cos\varphi + mgR\sin\varphi,$$

$$H = \frac{p^2{}_{\varphi}}{2m(\ell - R(\frac{\pi}{2} - \varphi))^2} - mg(\ell - R(\frac{\pi}{2} - \varphi))\cos\varphi + mgR\sin\varphi \qquad (1.4.11)$$

elde edilir.

(1.4.11) Hamilton fonksiyonundan yararlanarak Hamilton denklemi yazılmak istenirse;

$$\dot{\varphi} = \frac{\partial H}{\partial p_{\varphi}} = \frac{2p_{\varphi}}{2m(\ell - R(\frac{\pi}{2} - \varphi))^2} = \frac{p_{\varphi}}{m(\ell - R(\frac{\pi}{2} - \varphi))^2}$$

ve

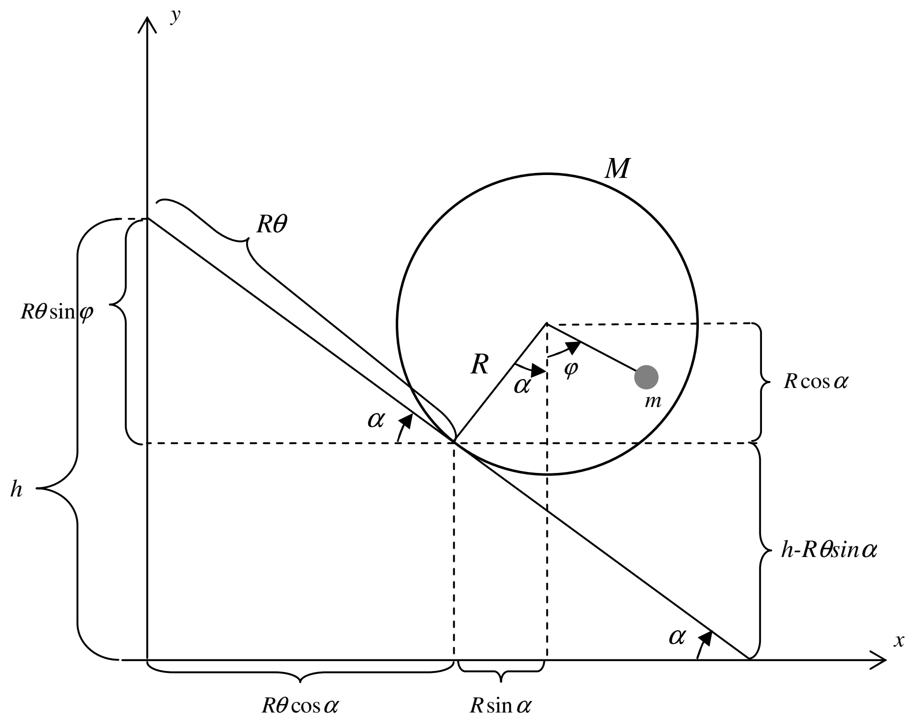
$$\dot{p}_{\varphi} = -\frac{\partial H}{\partial \varphi}$$

$$= -\frac{p^2{}_{\varphi} 2m2(\ell - R(\frac{\pi}{2} - \varphi))R}{4m^2(\ell - R(\frac{\pi}{2} - \varphi))^4} - mgR\cos\varphi + mg(\ell - R(\frac{\pi}{2} - \varphi))\dot{\varphi}\sin\varphi + mgR\dot{\varphi}\cos\varphi$$

$$= -\frac{p^2{}_{\varphi}R}{m(\ell - R(\frac{\pi}{2} - \varphi))^3} - mgR\cos\varphi + mg(\ell - R(\frac{\pi}{2} - \varphi))\dot{\varphi}\sin\varphi + mgR\dot{\varphi}\cos\varphi$$

elde edilir

Örnek 1.6 Şekil 1.6.1 deki yarıçapı *R* ve kütlesi *M* olan bir disk, eğim açısı α olan bir eğik düzlem üzerinde kaymadan yuvarlanmaktadır. Diskin merkezine yerleştirilmiş ufak bir çivi üzerine bir sarkaç bağlanmıştır. Sarkaç ipi, sarkacın salınması sırasında bağlanmış olduğu çiviye dolanmıyor. Sarkaç ipinin boyu $\ell < R$ ve ucundaki kütlede m olsun. Sarkacın disk düzleminde serbestçe salındığını varsayarak sistemin Lagrange ve Hamilton denklemlerini çıkarınız (Rızaoğlu 2002).



Şekil 1.6.1 Eğik düzlem üzerinde yuvarlanan diskin merkezine asılmış basit sarkaç. Sarkaç ipinin boyu hareket süresince değişmiyor.

Çözüm: Koordinat sistemi şekilde gösterildiği gibi seçilsin. Diskin yuvarlanmasını belirleyen açı θ olsun ve disk eğik düzlemin en üst noktasından harekete başlasın. Disk eğik düzlem boyunca kaymadan yuvarlandığına göre, herhangi bir t anında eğik düzlem boyunca $R\theta$ kadar yol almış olacaktır. Diskin kütle merkezinin X ve Y koordinatları şekilden kolaylıkla görülebildiği gibi;

$X = R\theta\cos\alpha + R\sin\alpha$ ve $Y = h - R\theta\sin\alpha + R\cos\alpha$.

Sarkacın düşey doğrultuda yaptığı salınma açısını φ ile gösterildiğinde, sarkaç kütlesinin koordinatları;

$x = X + \ell\sin\varphi$ ve $y = Y - \ell\cos\varphi$ olur.

Sistemin kinetik enerjisi yazılmak istenirse;

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \frac{1}{2}M(\dot{X}^2 + \dot{Y}^2) + \frac{1}{4}M(R\dot{\theta})^2$$

Burada $\frac{1}{2}MR^2$; M kütleli diskin eylemsizlik momentidir.

$\dot{X} = \dot{\theta}R\cos\alpha$ ve $\dot{X}^2 = \dot{\theta}^2R^2\cos^2\alpha$

$\dot{Y} = -\dot{\theta}R\sin\alpha$ ve $\dot{Y}^2 = \dot{\theta}^2R^2\sin^2\alpha$

olup buradan

$$\dot{X}^2 + \dot{Y}^2 = \dot{\theta}^2 R^2 \cos^2 \alpha + \dot{\theta}^2 R^2 \sin^2 \alpha = \dot{\theta}^2 R^2$$

elde edilir.

$$\dot{x} = \dot{\theta} R \cos\alpha + \ell \dot{\varphi} \cos\varphi$$

ve

$$\dot{x}^2 = \dot{\theta}^2 R^2 \cos^2 \alpha + 2R\ell \dot{\theta}\dot{\varphi} \cos\alpha \cos\varphi + \ell^2 \dot{\varphi}^2 \cos^2 \varphi$$

$$\dot{y} = -\dot{\theta} R \sin\alpha + \ell \dot{\varphi} \sin\alpha$$

ve

$$\dot{y}^2 = \dot{\theta}^2 R^2 \sin^2 \alpha - 2R\ell \dot{\theta}\dot{\varphi} \sin\alpha \sin\varphi + \ell^2 \dot{\varphi}^2 \sin^2 \varphi$$

$$\begin{aligned}\dot{x}^2 + \dot{y}^2 = {} & \dot{\theta}^2 R^2 \cos^2 \alpha + 2R\ell \dot{\theta}\dot{\varphi} \cos\alpha \cos\varphi + \ell^2 \dot{\varphi}^2 \cos^2 \varphi + \dot{\theta}^2 R^2 \sin^2 \alpha \\ & - 2R\ell \dot{\theta}\dot{\varphi} \sin\alpha \sin\varphi + \ell^2 \dot{\varphi}^2 \sin^2 \varphi\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\dot{x}^2 + \dot{y}^2 &= \dot{\theta}^2 R^2 + 2R\ell \dot{\theta}\dot{\varphi} (\cos\alpha \cos\varphi - \sin\alpha \sin\varphi) + \ell^2 \dot{\varphi}^2 \\ &= \dot{\theta}^2 R^2 + 2R\ell \dot{\theta}\dot{\varphi} \cos(\alpha + \varphi) + \ell^2 \dot{\varphi}^2\end{aligned}$$

olup sistemin kinetik enerjisi

$$T = \frac{1}{2} m(\dot{\theta}^2 R^2 + 2R\ell \dot{\theta}\dot{\varphi} \cos(\alpha + \varphi) + \ell^2 \dot{\varphi}^2) + \frac{1}{2} M \dot{\theta}^2 R^2 + \frac{1}{4} M R^2 \dot{\theta}^2$$

bulunur. Sistemin potansiyel enerjisi

$$\begin{aligned}V &= Mg(h - R\theta \sin\alpha + R\cos\alpha) + mg(h - R\theta \sin\alpha + R\cos\alpha - \ell \cos\varphi) \\ &= (M + m) g (h - R\theta \sin\alpha + R\cos\alpha) - mg\ell \cos\varphi\end{aligned}$$

olup $L = T - V$ Lagrange fonksiyonu;

$$\begin{aligned}L = {} & \frac{1}{2} m(\dot{\theta}^2 R^2 + 2R\ell \dot{\theta}\dot{\varphi} \cos(\alpha + \varphi) + \ell^2 \dot{\varphi}^2) + \frac{1}{2} M \dot{\theta}^2 R^2 + \frac{1}{4} M R^2 \dot{\theta}^2 \\ & - Mg(h - R\theta \sin\alpha + R\cos\alpha) - mg(h - R\theta \sin\alpha + R\cos\alpha - \ell \cos\varphi)\end{aligned}$$

elde edilir. Buradan diskin θ koordinatına göre olan Lagrange denklemi;

$\dfrac{d}{dt}(\dfrac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}) - \dfrac{\partial L}{\partial \theta} = 0$ dan

$$\frac{d}{dt}(m\dot{\theta}R^2 + mR\ell \dot{\varphi} \cos(\alpha + \varphi) + m\ell^2 \dot{\theta} + M\dot{\theta}R^2 + \frac{1}{2} M\dot{\theta}R^2) - (M + m) g R \sin\alpha = 0,$$

$$m\ddot{\theta}R^2 + mR\ell\ddot{\varphi}\cos(\alpha+\varphi) - mR\ell\dot{\varphi}^2\sin(\alpha+\varphi) + m\ell^2\ddot{\theta} + M\ddot{\theta}R^2$$
$$+\frac{1}{2}M\ddot{\theta}R^2 - (M+m)gR\sin\alpha = 0,$$

$$(m+\frac{3}{2}M)R^2\ddot{\theta} + mR\ell\cos(\alpha+\varphi)\ddot{\varphi} - mR\ell\dot{\varphi}^2\sin(\alpha+\varphi) - (m+M)g\sin\alpha = 0$$

olarak hesaplanır. Sarkacın φ koordinatına göre olan Lagrange denklemi de;

$$\frac{d}{dt}(\frac{\partial L}{\partial\dot{\varphi}}) - \frac{\partial L}{\partial\varphi} = 0 \text{ dan}$$

$$\frac{d}{dt}(\frac{1}{2}m\ell^2 2\dot{\varphi} + \frac{1}{2}m2R\ell\dot{\theta}\cos(\alpha+\varphi)) - (-mg\ell\sin\varphi) = 0$$

$$m\ell^2\ddot{\varphi} + mR\ell\ddot{\theta}\cos(\alpha+\varphi) - mR\ell\dot{\theta}\dot{\varphi}\sin(\alpha+\varphi) + mg\ell\sin\varphi = 0$$

olarak bulunur. Sistemin $H = p_\theta\dot{\theta} + p_\varphi\dot{\varphi} - L$ Hamilton fonksiyonunu bulmak için;

$$p_\theta = \frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}},\; p_\varphi = \frac{\partial L}{\partial\dot{\varphi}} \text{ dan}$$

$$p_\theta = \frac{1}{2}m2\dot{\theta}R^2 + \frac{1}{2}m2R\ell\dot{\varphi}\cos(\alpha+\varphi) + \frac{1}{2}M2\dot{\theta}R^2 + \frac{1}{4}MR^2 2\dot{\theta}$$
$$= m\dot{\theta}R^2 + mR\ell\dot{\varphi}\cos(\alpha+\varphi) + M\dot{\theta}R^2 + \frac{1}{2}MR^2\dot{\theta}$$
$$= m\dot{\theta}R^2 + mR\ell\dot{\varphi}\cos(\alpha+\varphi) + \frac{3}{2}M\dot{\theta}R^2 \tag{1.4.12}$$

$$p_\varphi = \frac{1}{2}m2R\ell\dot{\theta}\cos(\alpha+\varphi) + \frac{1}{2}m\ell^2 2\dot{\varphi}$$
$$= mR\ell\dot{\theta}\cos(\alpha+\varphi) + m\ell^2\dot{\varphi} \tag{1.4.13}$$

olup sistemin Hamilton fonksiyonu

$$H = (m\dot{\theta}R^2 + mR\ell\dot{\varphi}\cos(\alpha+\varphi) + \frac{3}{2}M\dot{\theta}R^2)\dot{\theta} + (mR\ell\dot{\theta}\cos(\alpha+\varphi) + m\ell^2\dot{\varphi})\dot{\varphi}$$
$$-\frac{1}{2}m[\dot{\theta}^2R^2 + 2R\ell\dot{\theta}\dot{\varphi}\cos(\alpha+\varphi) + \ell^2\dot{\varphi}^2] - \frac{1}{2}M\dot{\theta}^2R^2 - \frac{1}{4}MR^2\dot{\theta}^2$$
$$+ Mg(h - R\theta\sin\alpha + R\cos\alpha) + mg(h - R\theta\sin\alpha + R\cos\alpha - \ell\cos\varphi)$$

olup fonksiyonunda gerekli sadeleştirmeler yapılırsa

$$H = \frac{m}{2}\dot{\theta}^2R^2 + \frac{3}{4}M\dot{\theta}^2R^2 + mR\ell\dot{\theta}\dot{\varphi}\cos(\alpha+\varphi) + \frac{m}{2}\ell^2\dot{\theta}^2$$
$$+ Mg(h - R\theta\sin\alpha + R\cos\alpha) + mg(h - R\theta\sin\alpha + R\cos\alpha - \ell\cos\varphi) \tag{1.4.14}$$

olarak bulunur.

Sistemin Hamilton fonksiyonu momentumlar cinsinden yazılmak istenirse (1.4.12) ve (1.4.13) denklemlerinden $\dot{\theta}$ ve $\dot{\varphi}$ çekilip (1.4.14) Hamilton fonksiyonunda yerine yazılırsa,

$$\dot{\theta} = \frac{p_\theta - mR\ell\dot{\varphi}\cos(\alpha+\varphi)}{mR^2 + \frac{3}{2}MR^2},$$

$$\dot{\varphi} = \frac{p_\varphi}{mR\ell\cos(\alpha+\varphi) + m\ell^2},$$

$$H = \frac{m}{2}\left(\frac{p_\theta - mR\ell\dot{\varphi}\cos(\alpha+\varphi)}{mR^2 + \frac{3}{2}MR^2}\right)^2 R^2 + \frac{3}{4}M\left(\frac{p_\theta - mR\ell\dot{\varphi}\cos(\alpha+\varphi)}{mR^2 + \frac{3}{2}MR^2}\right)^2 R^2$$

$$+ mR\ell\frac{p_\theta - mR\ell\dot{\varphi}\cos(\alpha+\varphi)}{mR^2 + \frac{3}{2}MR^2}\frac{p_\varphi}{mR\ell\cos(\alpha+\varphi) + m\ell^2}\cos(\alpha+\varphi)$$
$$+ \frac{m}{2}\ell^2\frac{p^2{}_\varphi}{(mR\ell\cos(\alpha+\varphi) + m\ell^2)^2} + Mg(h - R\theta\sin\alpha + R\cos\alpha)$$
$$+ mg(h - R\theta\sin\alpha + R\cos\alpha - \ell\cos\varphi)$$

olup sadeleşmiş şekli

$$H = \frac{m}{2}\frac{(p_\theta - mR\ell\dot{\varphi}\cos(\alpha+\varphi))^2}{R^2(m + \frac{3}{2}M)^2} + \frac{3}{4}M\frac{(p_\theta - mR\ell\dot{\varphi}\cos(\alpha+\varphi))^2}{R^2(m + \frac{3}{2}M)^2}$$
$$+ \ell\frac{p_\theta - mR\ell\dot{\varphi}\cos(\alpha+\varphi)}{R(m + \frac{3}{2}M)}\frac{p_\varphi}{Rl\cos(\alpha+\varphi) + l^2}\cos(\alpha+\varphi)$$
$$+ \frac{\ell}{2}\frac{p^2{}_\varphi}{(R\cos(\alpha+\varphi) + \ell)} + Mg(h - R\theta\sin\alpha + R\cos\alpha)$$
$$+ mg(h - R\theta\sin\alpha + R\cos\alpha - \ell\cos\varphi)$$

olarak bulunur.

Buradan Hamilton denklemlerini

1) $\dot{\theta} = \frac{\partial H}{\partial p_\theta}, \qquad \dot{p}_\theta = -\frac{\partial H}{\partial \theta}$

ve

2) $\dot{\varphi} = \dfrac{\partial H}{\partial p_\varphi}, \qquad \dot{p}_\varphi = -\dfrac{\partial H}{\partial \varphi}$

olup aşağıdaki gibi hesaplanır.

$$1)\ \dot{\theta} = \frac{m}{2}\frac{2(p_\theta - mR\ell\dot{\varphi}\cos(\alpha+\varphi))}{R^2(m+\frac{3}{2}M)^2} + \frac{3}{4}M\frac{2(p_\theta - mR\ell\dot{\varphi}\cos(\alpha+\varphi))}{R^2(m+\frac{3}{2}M)^2} + \frac{\ell}{R(m+\frac{3}{2}M)}$$

$$= \frac{m(p_\theta - mR\ell\dot{\varphi}\cos(\alpha+\varphi))}{R^2(m+\frac{3}{2}M)^2} + \frac{3}{2}M\frac{2(p_\theta - mR\ell\dot{\varphi}\cos(\alpha+\varphi))}{R^2(m+\frac{3}{2}M)^2} + \frac{\ell}{R(m+\frac{3}{2}M)},$$

$$p_{\dot{\theta}} = -(-MgR\sin\alpha - mgR\sin\alpha) = (M+m)gR\sin\alpha,$$

$$2)\quad \dot{\varphi} = \frac{\cos(\alpha+\varphi)}{R\ell\cos(\alpha+\varphi)+\ell^2} + \frac{\ell}{2}\frac{2p_\varphi}{2(R\cos(\alpha+\varphi)+\ell)}$$

$$= \frac{\cos(\alpha+\varphi)}{R\ell\cos(\alpha+\varphi)+\ell^2} + \frac{\ell}{2}\frac{p_\varphi}{(R\cos(\alpha+\varphi)+\ell)}$$

$$\dot{P}_\varphi = -(mR\ell\dot{\theta}\dot{\varphi}(-\dot{\varphi}\cos\alpha\sin\varphi - \dot{\varphi}\sin\alpha\cos\varphi) - mg(\ell\dot{\varphi}\sin\varphi)).$$

Sonuç 1.5 Bu bölümde; reel Lagrange ve Hamilton sistemleri tanımlanarak değişik örneklerle altı beslendi. Gelecek bölümde ise kompleks Hamilton sistemler irdelenecektir.

2 KOMPLEKS HAMILTON SİSTEMLER

Bu bölümde, reel uzayda yapılan Lagrange ve Hamilton sistemler ile ilgili bazı çalışmaların kompleks versiyonları Mapple bilgisayar programı yardımıyla elde edilecektir. Kompleks kinetik ve potansiyel enerji, kompleks Lagrange ve Hamilton fonksiyonları verilerek kompleks Lagrange ve Hamilton denklemleri ifade edilecektir.

Tanım 2.1: $2n$-reel boyutlu bir M manifoldu üzerinde kompleks koordinatlar ($z^i, \bar{z}^i$), $1 \le i \le n$ ve m_i, M manifoldu üzerinde m parçacıklı bir sistemin kütlesi olmak üzere

$$T = \frac{1}{2} m_i (\dot{z}^i)^2 = \frac{1}{2} m_i (\bar{z}^i)^2$$

ile verilen

$$T : M \to C$$

dönüşümüne sistemin kinetik enerjisi denir (Tekkoyun 2002).

Tanım 2.2: $2n$-reel boyutlu bir M manifoldu üzerinde kompleks koordinatlar ($z^i, \bar{z}^i$), $1 \le i \le n$ ve m_i, M manifoldu üzerinde m parçacıklı bir sistemin kütlesi g, yerçekimi ivmesi ve h, sistemin orijine olan uzaklığı olmak üzere

$$V = m_i g h$$

ile verilen

$$V : M \to C$$

dönüşümüne sistemin potansiyel enerjisi denir (Tekkoyun 2002).

Sistemin kompleks anlamdaki Lagrange fonksiyonu;

$$\begin{aligned} L &= T - V \\ &= \frac{1}{2} m_i (\bar{z}^i)^2 - m_i g h \end{aligned}$$

Hamilton fonksiyonu

$$H(z^i, \bar{z}_i, t) = \bar{z}_i \dot{z}^i - L(z^i, \bar{z}^i, t)$$

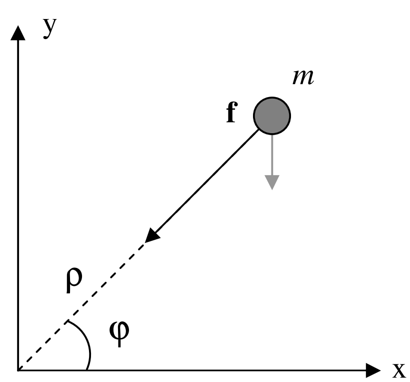
olup denklemleri sırasıyla

$$L1 = i\frac{\partial}{\partial t}(\frac{\partial L}{\partial z}) = \frac{\partial L}{\partial z}, \qquad L2 = i\frac{\partial}{\partial t}(\frac{\partial L}{\partial \dot{z}}) = -\frac{\partial L}{\partial \dot{z}}$$

$$H1 = \frac{\partial z}{\partial t} = -i\frac{\partial H}{\partial \bar{z}}, \qquad H2 = \frac{\partial \bar{z}}{\partial t} = i\frac{\partial H}{\partial z}$$

şeklindedir (Tekkoyun 2002).

Örnek 2.1 Sabit bir kütle-çekim alanında bulunan m kütleli bir cismin üzerine, şekil 2.1.1 de görüldüğü gibi büyüklüğü $f(\rho) = A\rho^{\alpha-1}$ $(\alpha \neq 0{,}1)$ olan ve kuvvet merkezi orijinde bulunan, bir merkezcil kuvvet alanı etki ediyor. Cismin devamlı aynı düşey düzlem içinde kaldığını kabul ederek, kompleks Lagrange ve kompleks Hamilton hareket denklemlerini bulunuz (Rızaoğlu 2002).



Şekil 2.1.1 Kütlesi *m* olan cisim ve üzerine etki eden kuvvetler

Çözüm: Kinetik enerji; $T = \frac{1}{2}m\vec{v}^2$ idi. Hızı elde edebilmek için m kütleli cismin konum vektörlerinin zamana göre birinci türevleri alınır. O halde kinetik enerji aşağıdaki şekilde yazılır.

$$T = \frac{1}{2}m(v_x^{\ 2} + v_y^{\ 2}) = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2).$$

$x=\rho\cos\varphi$ ve, $y=\rho\sin\varphi$ olup

$\dot{x}=\dot{\rho}\cos\varphi-\rho\dot{\varphi}\sin\varphi$ ve $\dot{y}=\dot{\rho}\sin\varphi+\rho\dot{\varphi}\cos\varphi$

şeklinde hesaplanır.

$$\dot{x}^2=\dot{\rho}^2\cos^2\varphi-2\rho\dot{\rho}\cos\varphi\sin\varphi.\dot{\varphi}+\rho^2\dot{\varphi}^2\sin^2\varphi$$
$$\dot{y}^2=\dot{\rho}^2\sin^2\varphi+2\rho\dot{\rho}\cos\varphi\sin\varphi.\dot{\varphi}+\rho^2\dot{\varphi}^2\cos^2\varphi$$

olup bu eşitlikleri taraf tarafa toplanırsa

$\dot{x}^2+\dot{y}^2=\dot{\rho}^2+\rho^2\dot{\varphi}^2$ şeklinde bulunur. O halde kinetik enerji

$$T=\frac{1}{2}m(\dot{\rho}^2+\rho^2\dot{\varphi}^2) \tag{2.1}$$

olarak yazılır.

$z=\rho(\cos\varphi+i\sin\varphi)$ ve z nin eşleniği $\bar{z}=\rho(\cos\varphi-i\sin\varphi)$ şeklindeki gösterim kutupsal gösterim olup buradaki ρ ve φ zamana bağlı değişkenlerdir, yani $\rho=\rho(t)$, $\varphi=\varphi(t)$ dir.

Bu eşitliklerden faydalanarak ρ ve φ çekilirse

$z\bar{z}=\rho^2(\cos^2\varphi+\sin^2\varphi)$,

$z\bar{z}=\rho^2$, olup

$$\sqrt{z\bar{z}}=\rho \tag{2.2}$$

ve

$$\frac{z}{\bar{z}}=\frac{\rho(\cos\varphi+i\sin\varphi)}{\rho(\cos\varphi-i\sin\varphi)},$$

$$z\ (\cos\varphi-i\sin\varphi)=\bar{z}(\cos\varphi+i\sin\varphi),$$

$$z\cos\varphi-iz\sin\varphi=\bar{z}\cos\varphi+i\bar{z}\sin\varphi,$$

$$\frac{\cos\varphi(z-\bar{z})}{i\cos\varphi(z+\bar{z})}=\frac{i\sin\varphi(z+\bar{z})}{i\cos\varphi(z+\bar{z})},$$

$\dfrac{1}{i}\dfrac{(z-\bar{z})}{(z+\bar{z})}=\tan\varphi$ olup

$$\varphi = \arctan[\frac{1}{i}(\frac{z-\bar{z}}{z+\bar{z}})] \tag{2.3}$$

olur. Buradan (2.2) ve (2.3) ile elde edilen ρ ve φ nin zamana göre birinci türevleri alınıp (2.1) de yerine yazılırsa

$$\dot{\rho} = \frac{(z\bar{z})'}{2\sqrt{z\bar{z}}} = \frac{\dot{z}\bar{z}+z\dot{\bar{z}}}{2\sqrt{z\bar{z}}},$$

$$\dot{\varphi} = \frac{\frac{1}{i}(\frac{z-\bar{z}}{z+\bar{z}})'}{1-(\frac{z-\bar{z}}{z+\bar{z}})^2} = \frac{\frac{1}{i}\frac{(\dot{z}-\dot{\bar{z}})(z+\bar{z})-(z-\bar{z})(\dot{z}+\dot{\bar{z}})}{(z+\bar{z})^2}}{\frac{(z+\bar{z})^2-(z-\bar{z})^2}{(z+\bar{z})^2}}$$

$$= \frac{\frac{1}{i}(\dot{z}z+\dot{z}\bar{z}-\dot{\bar{z}}z-\dot{\bar{z}}\bar{z}-z\dot{z}-z\dot{\bar{z}}+\bar{z}\dot{z}+\bar{z}\dot{\bar{z}})}{(z+\bar{z}+z-\bar{z})(z+\bar{z}-z+\bar{z})}$$

$$= \frac{1}{i}\frac{2\dot{z}\bar{z}-2\dot{\bar{z}}z}{2z2\bar{z}} = \frac{1}{i}\frac{(\dot{z}\bar{z}-\dot{\bar{z}}z)}{2z\bar{z}},$$

$$T = \frac{1}{2}m((\frac{\dot{z}\bar{z}+z\dot{\bar{z}}}{2\sqrt{z\bar{z}}})^2+z\bar{z}(\frac{1}{i}\frac{\dot{z}\bar{z}-z\dot{\bar{z}}}{2z\bar{z}})^2)$$

$$= \frac{1}{2}m(\frac{(\dot{z}\bar{z}+z\dot{\bar{z}})^2}{4z\bar{z}}-\frac{(\dot{z}\bar{z}-z\dot{\bar{z}})^2}{4z\bar{z}})$$

$$= \frac{1}{2}m(\frac{(\dot{z}\bar{z}+z\dot{\bar{z}}+\dot{z}\bar{z}-z\dot{\bar{z}})(\dot{z}\bar{z}+z\dot{\bar{z}}-\dot{z}\bar{z}+z\dot{\bar{z}})}{4z\bar{z}})$$

$$= \frac{1}{2}m(\frac{(2\dot{z}\bar{z})(2z\dot{\bar{z}})}{4z\bar{z}}) = \frac{1}{2}m\dot{z}\dot{\bar{z}}$$

olur.

Sistemin potansiyel enerjisi

$$V = \frac{A}{\alpha}\sqrt{z\bar{z}}^{\alpha} + mg\sqrt{z\bar{z}}\sin(\arctan(\frac{1}{i}(\frac{z-\bar{z}}{z+\bar{z}}))$$

olarak hesaplanır.

$\dot{z}$; z nin zamana göre birinci türevi, $\ddot{z}$; z nin zamana göre ikinci türevi, $\bar{z}$; z nin eşleniği olmak üzere sistemin Lagrange fonksiyonu;

$$L = \frac{1}{2}m\dot{z}\dot{\bar{z}} - \frac{A}{\alpha}(z\bar{z})^{\frac{\alpha}{2}} - mg\sqrt{z\bar{z}}\sin(\arctan(\frac{-i(z-\bar{z})}{z+\bar{z}}))$$

veya

$$L=\frac{1}{2}m\dot{z}\dot{\bar{z}}-\frac{A(z\bar{z})^{\frac{1}{2}\alpha}}{\alpha}+\frac{img\sqrt{z\bar{z}}\,(z-\bar{z})}{(z+\bar{z})\sqrt{1-\frac{(z-\bar{z})^2}{(z+\bar{z})^2}}}$$ bulunur.

$L1:=i\frac{\partial}{\partial t}(\frac{\partial L}{\partial \dot{z}})=\frac{\partial L}{\partial z}$ den

$$L1:=i(\frac{\partial}{\partial t}(-\frac{A(z\bar{z})^{\frac{1}{2}\alpha}}{2z}+\frac{\frac{1}{2}img(z-\bar{z})\bar{z}}{\sqrt{z\bar{z}}\,(z+\bar{z})\sqrt{1-\frac{(z-\bar{z})^2}{(z+\bar{z})^2}}}+\frac{img\sqrt{z\bar{z}}}{(z+\bar{z})\sqrt{1-\frac{(z-\bar{z})^2}{(z+\bar{z})^2}}}$$

$$-\frac{img\sqrt{z\bar{z}}\,(z-\bar{z})}{(z+\bar{z})^2\sqrt{1-\frac{(z-\bar{z})^2}{(z+\bar{z})^2}}}\frac{\frac{1}{2}img\sqrt{z\bar{z}}\,(z-\bar{z})(-\frac{2(z-\bar{z})}{(z+\bar{z})^2}+\frac{(z-\bar{z})^2}{(z+\bar{z})^3})}{(z+\bar{z})(1-\frac{(z-\bar{z})^2}{(z+\bar{z})^2})^{3/2}}))$$

$$=-\frac{A(z\bar{z})^{\frac{1}{2}\alpha}}{2z}+\frac{\frac{1}{2}img(z-\bar{z})\bar{z}}{\sqrt{z\bar{z}}\,(z+\bar{z})\sqrt{1-\frac{(z-\bar{z})^2}{(z+\bar{z})^2}}}+\frac{img\sqrt{z\bar{z}}}{(z+\bar{z})\sqrt{1-\frac{(z-\bar{z})^2}{(z+\bar{z})^2}}}$$

$$-\frac{img\sqrt{z\bar{z}}\,(z-\bar{z})}{(z+\bar{z})^2\sqrt{1-\frac{(z-\bar{z})^2}{(z+\bar{z})^2}}}-\frac{\frac{1}{2}img\sqrt{z\bar{z}}\,(z-\bar{z})(-\frac{2(z-\bar{z})}{(z+\bar{z})^2}+\frac{2(z-\bar{z})^2}{(z+\bar{z})^3})}{(z+\bar{z})(1-\frac{(z-\bar{z})^2}{(z+\bar{z})^2})^{3/2}}$$

şeklinde bulunur.

$L2:=i\frac{\partial}{\partial t}(\frac{\partial L}{\partial \dot{z}})=-\frac{\partial L}{\partial \dot{z}}$ denkleminden

$L2=i(\frac{\partial}{\partial t}(\frac{1}{2}m\dot{\bar{z}}))=-\frac{1}{2}m\dot{\bar{z}}$ olarak hesaplanır.

Sistemin $H=p_z\dot{z}+p_{\bar{z}}\dot{\bar{z}}-L$ Hamilton fonksiyonunu yazabilmek için

$p_z=\frac{\partial L}{\partial \dot{z}}$ olup $p_z=\frac{1}{2}m\dot{\bar{z}}$

ve

$p_{\bar{z}}=\frac{\partial L}{\partial \dot{\bar{z}}}$ olup $p_{\bar{z}}=\frac{1}{2}m\dot{z}$

olmak üzere

$$H = \frac{1}{2}m\dot{z}\dot{\bar{z}} + \frac{A}{\alpha}z\bar{z}^{\frac{\alpha}{2}} + mg\sqrt{z\bar{z}}\,\sin(\arctan(-i\frac{z-\bar{z}}{z+\bar{z}}))$$

veya

$$H = \frac{1}{2}m\dot{z}\dot{\bar{z}} + \frac{A(z\bar{z})^{\frac{1}{2}\alpha}}{\alpha} - \frac{img\sqrt{z\bar{z}}(z-\bar{z})}{(z+\bar{z})\sqrt{1-\frac{(z-\bar{z})^2}{(z+\bar{z})^2}}}$$

şeklinde hesaplanır. Hamilton denklemlerinden birincisine H1 ikincisine de H2 denilirse, H1 denklemi;

$$H1 := \frac{\partial z}{\partial t} = -i\frac{\partial H}{\partial \bar{z}} = -i(\frac{A(z\bar{z})^{\frac{1}{2}\alpha}}{2\bar{z}} - \frac{\frac{1}{2}img(z-\bar{z})z}{\sqrt{z\bar{z}}(z+\bar{z})\sqrt{1-\frac{(z-\bar{z})^2}{(z+\bar{z})^2}}} + \frac{img\sqrt{z\bar{z}}}{(z+\bar{z})\sqrt{1-\frac{(z-\bar{z})^2}{(z+\bar{z})^2}}}$$

$$+\frac{img\sqrt{z\bar{z}}(z-\bar{z})}{(z+\bar{z})^2\sqrt{1-\frac{(z-\bar{z})^2}{(z+\bar{z})^2}}} + \frac{\frac{1}{2}img\sqrt{z\bar{z}}(z-\bar{z})(\frac{2(z-\bar{z})}{(z+\bar{z})^2} + \frac{2(z-\bar{z})^2}{(z+\bar{z})^3})}{(z+\bar{z})(1-\frac{(z-\bar{z})^2}{(z+\bar{z})^2})^{3/2}}),$$

H2 denklemi ise

$$H2 = \frac{\partial \bar{z}}{\partial t} = i\frac{\partial H}{\partial z}$$

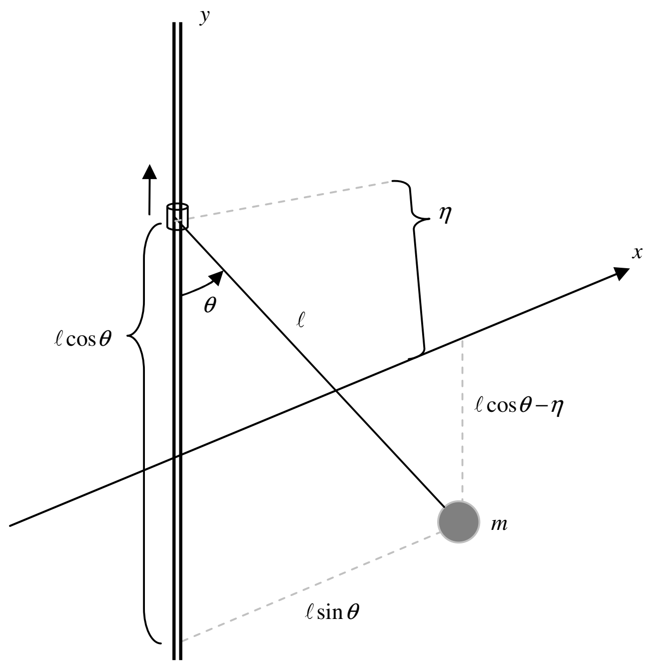
den

$$H2 := \frac{\partial}{\partial t}\dot{z} = i(\frac{A(z\bar{z})^{\frac{1}{2}\alpha}}{2z} - \frac{\frac{1}{2}img(z-\bar{z})\bar{z}}{\sqrt{z\bar{z}}(z+\bar{z})\sqrt{1-\frac{(z-\bar{z})^2}{(z+\bar{z})^2}}} - \frac{img\sqrt{z\bar{z}}}{(z+\bar{z})\sqrt{1-\frac{(z-\bar{z})^2}{(z+\bar{z})^2}}}$$

$$+\frac{img\sqrt{z\bar{z}}(z-\bar{z})}{(z+\bar{z})^2\sqrt{1-\frac{(z-\bar{z})^2}{(z+\bar{z})^2}}} + \frac{\frac{1}{2}img\sqrt{z\bar{z}}(z-\bar{z})(-\frac{2(z-\bar{z})}{(z+\bar{z})^2} + \frac{2(z-\bar{z})^2}{(z+\bar{z})^3})}{(z+\bar{z})(1-\frac{(z-\bar{z})^2}{(z+\bar{z})^2})^{3/2}})$$

şeklinde bulunur.

Örnek 2.2 Şekil 2.2.1'de görülen ve bağlantı noktası yukarıya doğru sabit bir *a* ivmesi ile hareket eden; bir basit sarkacın küçük salınımlarının kompleks Lagrange ve kompleks Hamilton fonksiyonlarını yazıp hareket denklemlerini elde ediniz (Rızaoğlu 2002).



Şekil 2.2.1 Bağlantı noktası yukarıya doğru sabit bir *a* ivmesi ile hareket eden basit sarkaç

Çözüm:

Kompleks düzlemdeki bir nokta $z = x + iy$ idi. Buradan $x = \ell\sin\theta$, $y = \ell\cos\theta - \eta$ eşitlikleri yerine yazılırsa; $z = \ell\sin\theta + i(\cos\theta - \eta)$ elde edilir. z'nin eşleniği; $\bar{z} = \ell\sin\theta - i(\cos\theta - \eta)$ olup z ile $\bar{z}$ taraf tarafa toplanırsa

$$z + \bar{z} = 2\ell\sin\theta,$$

$$\frac{z+\bar{z}}{2\ell} = \sin\theta,$$

$$\theta = \arcsin\left(\frac{z+\bar{z}}{2\ell}\right)$$

elde edilir. Şimdi de η, z ve $\bar{z}$ cinsinden çekilirse

$z = \ell\sin\theta + i(\cos\theta - \eta)$ idi;

$$\frac{1}{i}(z - \ell\sin\theta) = \ell\cos\theta - \eta$$

$$\frac{1}{i}\left(z - \ell\sin\left(\arcsin\left(\frac{z+\bar{z}}{2\ell}\right)\right)\right) = \ell\cos\left(\arcsin\left(\frac{z+\bar{z}}{2\ell}\right)\right) - \eta$$

$$\frac{1}{i}\left(z - \ell\left(\frac{z+\bar{z}}{2\ell}\right)\right) - \ell\cos\left(\arcsin\left(\frac{z+\bar{z}}{2\ell}\right)\right) = -\eta$$ bulunur.

Buradan $\eta = \ell\sqrt{1-(\frac{z+\bar{z}}{2\ell})^2} + i(z - \frac{z+\bar{z}}{2})$ den

$$\eta = \ell\sqrt{1-(\frac{z+\bar{z}}{2\ell})^2} + i(\frac{z-\bar{z}}{2})$$

olarak hesaplanır. Şimdi de sırayla θ ve η nin zamana göre birinci türevleri alınıp (1.4.1)'de yerine yazılırsa

$$\dot{\theta} = (\arcsin(\frac{z+\bar{z}}{2\ell}))' = \frac{(\frac{z+\bar{z}}{2\ell})'}{\sqrt{1-(\frac{z+\bar{z}}{2\ell})^2}} = \frac{\frac{\dot{z}+\dot{\bar{z}}}{2\ell}}{\frac{\sqrt{4\ell^2-(z+\bar{z})^2}}{2\ell}} = \frac{\dot{z}+\dot{\bar{z}}}{\sqrt{4\ell^2-(z+\bar{z})^2}}$$

$$\dot{\eta} = i(\frac{\dot{z}-\dot{\bar{z}}}{2}) + \ell\frac{(-(\frac{z+\bar{z}}{2\ell})^2)'}{2\sqrt{1-(\frac{z+\bar{z}}{2\ell})^2}} = i(\frac{\dot{z}-\dot{\bar{z}}}{2}) + \ell\frac{\frac{-1}{4\ell^2}2(z+\bar{z})(\dot{z}+\dot{\bar{z}})}{\frac{2\sqrt{4\ell^2-(z+\bar{z})^2}}{2\ell}}$$

$$= i(\frac{\dot{z}-\dot{\bar{z}}}{2}) - \frac{(z+\bar{z})(\dot{z}+\dot{\bar{z}})}{2\sqrt{4\ell^2-(z+\bar{z})^2}}.$$

Kinetik enerji

$$T = \frac{1}{2}m(\ell^2\frac{(\dot{z}+\dot{\bar{z}})^2}{4\ell^2-(z+\bar{z})^2} + \frac{(z+\bar{z})^2(\dot{z}+\dot{\bar{z}})^2}{4(4\ell^2-(z+\bar{z})^2)}) - \frac{(\dot{z}-\dot{\bar{z}})^2}{4}$$
$$+2\ell\frac{\dot{z}+\dot{\bar{z}}}{\sqrt{4\ell^2-(z+\bar{z})^2}}(i\frac{(\dot{z}-\dot{\bar{z}})}{2} - \frac{(z+\bar{z})(\dot{z}+\dot{\bar{z}})}{2\sqrt{4\ell^2-(z+\bar{z})^2}})\sin\theta)$$

olarak bulunur.

Sistemin potansiyel enerjisi de

$V = -mg(\ell\cos\theta - \eta)$ den

$$V = -mg(\ell\cos(\arcsin(\frac{z+\bar{z}}{2\ell}) - \ell\sqrt{1-(\frac{z+\bar{z}}{2\ell})^2}) - i(\frac{z-\bar{z}}{2}))$$
$$= -mg(\ell\sqrt{1-(\frac{z+\bar{z}}{2\ell})^2} - \ell\sqrt{1-(\frac{z+\bar{z}}{2\ell})^2} - i(\frac{z-\bar{z}}{2})$$
$$= mgi(\frac{z-\bar{z}}{2})$$

olup sistemin $L = T - V$ Lagrange fonksiyonu;

$$L=\frac{1}{2}m(\frac{\ell^2(\dot{z}+\dot{\bar{z}})^2}{4\ell^2-(z+\bar{z})^2}+\frac{(z+\bar{z})^2(\dot{z}+\dot{\bar{z}})^2}{16\ell^2-4(z+\bar{z})^2}-\frac{1}{4}(\dot{z}-\dot{\bar{z}})^2$$
$$+\frac{\ell\sin(\theta)(\dot{z}+\dot{\bar{z}})(i(\dot{z}-\dot{\bar{z}})-\frac{(z+\bar{z})(\dot{z}+\dot{\bar{z}})}{\sqrt{4\ell^2-(z+\bar{z})^2}})}{\sqrt{4\ell^2-(z+\bar{z})^2}})-\frac{1}{2}img(z-\bar{z})$$

elde edilir.

Lagrange denklemlerine sırasıyla L1 ve L2 denirse

$L1:=i\frac{\partial}{\partial t}(\frac{\partial L}{\partial z})=\frac{\partial L}{\partial z}$; $L2:=i\frac{\partial}{\partial t}(\frac{\partial L}{\partial \dot{z}})=-\frac{\partial L}{\partial \dot{z}}$ den

$$L1:=i(\frac{\partial}{\partial t}(\frac{1}{2}m(-\frac{\ell(\dot{z}+\dot{\bar{z}})^2(-2z-2\bar{z})}{(4\ell^2-(z+\bar{z})^2)^2}+\frac{2(z+\bar{z})(\dot{z}+\dot{\bar{z}})^2}{16\ell^2-4(z+\bar{z})^2}$$
$$-\frac{(z+\bar{z})^2(\dot{z}+\dot{\bar{z}})^2(-8z-8\bar{z})}{(16\ell^2-4(z+\bar{z})^2)^2}-\frac{\ell\sin(\theta)(\dot{z}+\dot{\bar{z}})(i(\dot{z}-\dot{\bar{z}})-\frac{(z+\bar{z})(\dot{z}+\dot{\bar{z}})}{\sqrt{4\ell^2-(z+\bar{z})^2}})(-2z-2\bar{z})}{2(4\ell^2-(z+\bar{z})^2)^{3/2}}$$
$$+\frac{\ell\sin(\theta)(\dot{z}+\dot{\bar{z}})(i(\dot{z}-\dot{\bar{z}})(-\frac{(\dot{z}-\dot{\bar{z}})}{\sqrt{4\ell^2-(z+\bar{z})^2}}+\frac{(z+\bar{z})(\dot{z}+\dot{\bar{z}})(-2z-2\bar{z})}{2(4\ell^2-(z+\bar{z})^2)^{3/2}})}{\sqrt{4\ell^2-(z+\bar{z})^2}})-\frac{1}{2}img))$$
$$=\frac{1}{2}m(-\frac{\ell^2(\dot{z}+\dot{\bar{z}})^2(-2z-2\bar{z})}{(4\ell^2-(z+\bar{z})^2)^2}+\frac{2(z+\bar{z})(\dot{z}+\dot{\bar{z}})^2}{16\ell^2-4(z+\bar{z})^2}-\frac{(z+\bar{z})^2(\dot{z}+\dot{\bar{z}})^2(-8z-8\bar{z})}{(16\ell^2-4(z+\bar{z})^2)^2}$$
$$-\frac{\ell\sin(\theta)(\dot{z}+\dot{\bar{z}})(i(\dot{z}-\dot{\bar{z}})-\frac{(z+\bar{z})(\dot{z}+\dot{\bar{z}})}{\sqrt{4\ell^2-(z+\bar{z})^2}})(-2z-2\bar{z})}{2(4\ell^2-(z+\bar{z})^2)^{3/2}}$$
$$+\frac{\ell\sin(\theta)(\dot{z}+\dot{\bar{z}})(i(\dot{z}-\dot{\bar{z}})(-\frac{(\dot{z}-\dot{\bar{z}})}{\sqrt{4\ell^2-(z+\bar{z})^2}}+\frac{(z+\bar{z})(\dot{z}+\dot{\bar{z}})(-2z-2\bar{z})}{2(4\ell^2-(z+\bar{z})^2)^{3/2}})}{\sqrt{4\ell^2-(z+\bar{z})^2}})-\frac{1}{2}img$$

ve

$$L2:=i(\frac{\partial}{\partial t}(\frac{1}{2}m(\frac{2\ell^2(\dot{z}+\dot{\bar{z}})}{4\ell^2-(z+\bar{z})^2}+\frac{2(z+\bar{z})^2(\dot{z}+\dot{\bar{z}})}{16\ell^2-4(z+\bar{z})^2}-\frac{1}{2}\dot{z}+\frac{1}{2}\dot{\bar{z}}$$
$$+\frac{\ell\sin(\theta)(\ell(\dot{z}-\dot{\bar{z}})-\frac{(z+\bar{z})(\dot{z}+\dot{\bar{z}})}{\sqrt{4\ell^2-(z+\bar{z})^2}})}{\sqrt{4\ell^2-(z+\bar{z})^2}}+\frac{\ell\sin(\theta)(\dot{z}+\dot{\bar{z}})(\ell-\frac{(z+\bar{z})}{\sqrt{4\ell^2-(z+\bar{z})^2}})}{\sqrt{4\ell^2-(z+\bar{z})^2}})))$$

$$= -\frac{1}{2}m\Big(\frac{2\ell^2(\dot z+\dot{\bar z})}{4\ell^2-(z+\bar z)^2}+\frac{2(z+\bar z)^2(\dot z+\dot{\bar z})}{16\ell^2-4(z+\bar z)^2}-\frac{1}{2}\dot z+\frac{1}{2}\dot{\bar z}$$

$$+\frac{\ell\sin(\theta)\Big(\ell(\dot z-\dot{\bar z})-\frac{(z+\bar z)(\dot z+\dot{\bar z})}{\sqrt{4\ell^2-(z+\bar z)^2}}\Big)}{\sqrt{4\ell^2-(z+\bar z)^2}}+\frac{\ell\sin(\theta)(\dot z+\dot{\bar z})\Big(\ell-\frac{(z+\bar z)}{\sqrt{4\ell^2-(z+\bar z)^2}}\Big)}{\sqrt{4\ell^2-(z+\bar z)^2}}\Big)$$

olarak bulunur.

Hamilton fonksiyonu;

$H = p_z\dot z + p_{\bar z}\dot{\bar z} - L$ olup

$p_z = \dfrac{\partial L}{\partial \dot z}$ ve $p_{\bar z} = \dfrac{\partial L}{\partial \dot{\bar z}}$ için

$$p_z = \frac{\partial L}{\partial \dot z} = \frac{1}{2}m\Big(\frac{\ell^2(2\dot z+2\dot{\bar z})}{4\ell^2-(z+\bar z)^2}+\frac{(z+\bar z)^2(2\dot z+2\dot{\bar z})}{4(4\ell^2-(z+\bar z)^2)}-\frac{2\dot z-2\dot{\bar z}}{4}$$

$$+\frac{2i\ell\dot z}{\sqrt{4\ell^2-(z+\bar z)^2}}\sin(\theta)-\frac{\ell(2\dot z+2\dot{\bar z})(z+\bar z)}{4\ell^2-(z+\bar z)^2}\sin(\theta)\Big)$$

ve

$$p_{\bar z} = \frac{1}{2}m\Big(\frac{\ell^2(2\dot z+2\dot{\bar z})}{4\ell^2-(z+\bar z)^2}+\frac{(z+\bar z)^2(2\dot z+2\dot{\bar z})}{4(4\ell^2-(z+\bar z)^2)}-\frac{-2\dot z+2\dot{\bar z}}{4}$$

$$+\frac{-2i\ell\dot{\bar z}}{\sqrt{4\ell^2-(z+\bar z)^2}}\sin(\theta)-\frac{\ell(2\dot z+2\dot{\bar z})(z+\bar z)}{4\ell^2-(z+\bar z)^2}\sin(\theta)\Big)$$

olarak hesaplanırsa

$$H := m\dot z\Big(\frac{\ell^2(\dot z+\dot{\bar z})}{4\ell^2-(z+\bar z)^2}+\frac{(z+\bar z)^2(\dot z+\dot{\bar z})}{16\ell^2-4(z+\bar z)^2}-\frac{1}{4}\dot z+\frac{1}{4}\dot{\bar z}$$

$$+\frac{\ell i\sin(\theta)\dot z}{\sqrt{4\ell^2-(z+\bar z)^2}}-\frac{\ell\sin\theta(z+\bar z)(\dot z+\dot{\bar z})}{4\ell^2-(z+\bar z)^2}\Big)+m\dot{\bar z}\Big(\frac{\ell^2(\dot z+\dot{\bar z})}{4\ell^2-(z+\bar z)^2}$$

$$+\frac{(z+\bar z)^2(\dot z+\dot{\bar z})}{16\ell^2-4(z+\bar z)^2}-\frac{1}{4}\dot z+\frac{1}{4}\dot{\bar z}-\frac{\ell i\sin\theta\,\dot z}{\sqrt{4\ell^2-(z+\bar z)^2}}-\frac{\sin\theta(z+\bar z)(\dot z+\dot{\bar z})}{4\ell^2-(z+\bar z)^2}\Big)$$

$$-\frac{1}{2}m\Big(\frac{\ell^2(\dot z+\dot{\bar z})^2}{4\ell^2-(z+\bar z)^2}+\frac{(z+\bar z)^2(\dot z+\dot{\bar z})^2}{16\ell^2-4(z+\bar z)^2}+\frac{1}{4}(\dot z+\dot{\bar z})^2$$

$$+\frac{\ell i\sin\theta(\dot z^2-\dot{\bar z}^2)}{\sqrt{4\ell^2-(z+\bar z)^2}}-\frac{\ell(\dot z+\dot{\bar z})^2\sin\theta}{4\ell^2-(z+\bar z)^2}\Big)+\frac{1}{2}img(z-\bar z)$$

bulunur. Hamilton denklemi H1 ve H2, sırasıyla

$$
\begin{aligned}
H1 := \frac{\partial z}{\partial t} = -i\frac{\partial H}{\partial \bar{z}} \\
= -i(m\dot{z}(-&\frac{\ell^2(\dot{z}+\dot{\bar{z}})(-2z-2\bar{z})}{(4\ell^2-(z+\bar{z})^2)^2}+\frac{2(z+\bar{z})(\dot{z}+\dot{\bar{z}})}{16\ell^2-4(z+\bar{z})^2}-\frac{(z+\bar{z})^2(\dot{z}+\dot{\bar{z}})(-8z-8\bar{z})}{(16\ell^2-4(z+\bar{z})^2)^2} \\
&-\frac{\frac{1}{2}i\ell\sin(\theta)\dot{z}(-2z-2\bar{z})}{(4l^2-(z+\bar{z})^2)^{3/2}}-\frac{\ell\sin(\theta)(\dot{z}+\dot{\bar{z}})}{4\ell^2-(z+\bar{z})^2}+\frac{\ell\sin(\theta)(z+\bar{z})(\dot{z}+\dot{\bar{z}})(-2z-2\bar{z})}{(4\ell^2-(z+\bar{z})^2)^2}) \\
&+m\dot{\bar{z}}(-\frac{\ell^2(\dot{z}+\dot{\bar{z}})(-2z-2\bar{z})}{(4\ell^2-(z+\bar{z})^2)^2}+\frac{2(z+\bar{z})(\dot{z}+\dot{\bar{z}})}{16\ell^2-4(z+\bar{z})^2}-\frac{(z+\bar{z})^2(\dot{z}+\dot{\bar{z}})(-8z-8\bar{z})}{(16\ell^2-4(z+\bar{z})^2)^2} \\
&+\frac{\frac{1}{2}i\ell\sin(\theta)\dot{z}(-2z-2\bar{z})}{(4\ell^2-(z+\bar{z})^2)^{3/2}}-\frac{\ell\sin(\theta)(\dot{z}+\dot{\bar{z}})}{4\ell^2-(z+\bar{z})^2}+\frac{\ell\sin(\theta)(z+\bar{z})(\dot{z}+\dot{\bar{z}})(-2z-2\bar{z})}{(4\ell^2-(z+\bar{z})^2)^2} \\
&-\frac{1}{2}m(-\frac{\ell^2(\dot{z}+\dot{\bar{z}})^2(-2z-2\bar{z})}{(4\ell^2-(z+\bar{z})^2)^2}+\frac{2(z+\bar{z})(\dot{z}+\dot{\bar{z}})^2}{16\ell^2-4(z+\bar{z})^2}-\frac{(z+\bar{z})^2(\dot{z}+\dot{\bar{z}})(-8z-8\bar{z})}{(16\ell^2-4(z+\bar{z})^2)^2} \\
&-\frac{\frac{1}{2}i\ell(\dot{z}^2-\dot{\bar{z}}^2)\sin(\theta)(-2z-2\bar{z})}{(4\ell^2-(z+\bar{z})^2)^{3/2}}+\frac{\ell(\dot{z}-\dot{\bar{z}})^2\sin(\theta)(-2z-2\bar{z})}{(4\ell^2-(z+\bar{z})^2)^{3/2}})-\frac{1}{2}img),
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
H2 := \frac{\partial \bar{z}}{\partial t} = i\frac{\partial H}{\partial z} \\
= i(m\dot{z}(-&\frac{\ell^2(\dot{z}+\dot{\bar{z}})(-2z-2\bar{z})}{(4\ell^2-(z+\bar{z})^2)^2}+\frac{2(z+\bar{z})(\dot{z}+\dot{\bar{z}})}{16\ell^2-4(z+\bar{z})^2}-\frac{(z+\bar{z})^2(\dot{z}+\dot{\bar{z}})(-8z-8\bar{z})}{(16\ell^2-4(z+\bar{z})^2)^2} \\
&-\frac{\frac{1}{2}i\ell\sin(\theta)\dot{z}(-2z-2\bar{z})}{(4\ell^2-(z+\bar{z})^2)^{3/2}}-\frac{\ell\sin(\theta)(\dot{z}+\dot{\bar{z}})}{4\ell^2-(z+\bar{z})^2}+\frac{\ell\sin(\theta)(z+\bar{z})(\dot{z}+\dot{\bar{z}})(-2z-2\bar{z})}{(4\ell^2-(z+\bar{z})^2)^2}) \\
&+m\dot{\bar{z}}(-\frac{\ell^2(\dot{z}+\dot{\bar{z}})(-2z-2\bar{z})}{(4\ell^2-(z+\bar{z})^2)^2}+\frac{2(z+\bar{z})(\dot{z}+\dot{\bar{z}})}{16\ell^2-4(z+\bar{z})^2}-\frac{(z+\bar{z})^2(\dot{z}+\dot{\bar{z}})(-8z-8\bar{z})}{(16\ell^2-4(z+\bar{z})^2)^2} \\
&+\frac{\frac{1}{2}i\ell\sin(\theta)\dot{z}(-2z-2\bar{z})}{(4\ell^2-(z+\bar{z})^2)^{3/2}}-\frac{\ell\sin(\theta)(\dot{z}+\dot{\bar{z}})}{4\ell^2-(z+\bar{z})^2}+\frac{\ell\sin(\theta)(z+\bar{z})(\dot{z}+\dot{\bar{z}})(-2z-2\bar{z})}{(4\ell^2-(z+\bar{z})^2)^2} \\
&-\frac{1}{2}m(-\frac{\ell^2(\dot{z}+\dot{\bar{z}})^2(-2z-2\bar{z})}{(4\ell^2-(z+\bar{z})^2)^2}+\frac{2(z+\bar{z})(\dot{z}+\dot{\bar{z}})^2}{16\ell^2-4(z+\bar{z})^2}-\frac{(z+\bar{z})^2(\dot{z}+\dot{\bar{z}})(-8z-8\bar{z})}{(16\ell^2-4(z+\bar{z})^2)^2} \\
&-\frac{\frac{1}{2}i\ell(\dot{z}^2-\dot{\bar{z}}^2)\sin(\theta)(-2z-2\bar{z})}{(4\ell^2-(z+\bar{z})^2)^{3/2}}+\frac{\ell(\dot{z}-\dot{\bar{z}})^2\sin(\theta)(-2z-2\bar{z})}{(4\ell^2-(z+\bar{z})^2)^2})+\frac{1}{2}img)
\end{aligned}
$$

elde edilir.

Sonuç 2.1 Bu bölümde Maple programı kullanılarak kompleks Hamilton denklemlerine örnekler verilmiştir.

3 SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu çalışmada çıkarılan denklemlerin ışığı altında genelleştirilmiş klasik mekanik ve alan teorisinde Hamilton formalizmi, kompleks uzaylarda karakterize edilmiş ve ilgili uygulamalara yer verilmiştir.

Elde edilen bu denklemler nümerik ve analitik olarak temsil edeceği ortamlar göz önünde tutularak çözülebilir. Aynı zamanda, elde edilen kompleks Lagrange ve Hamilton denklemleri kuantum mekaniğinin muhtemel yeni formalizmine taşınabilir.

KAYNAKLAR

Chang, Y. F., Tabor, M., Weiss, J. (1981) Analytic Structure of the Henon-Heiles Hamiltonian in Integrable and Nonintegrable Regimes. ***J.Math. Phys.,*** 23(4): 531-538.

Civelek, Ş. (1996) The Lifts of Lagrange and Hamilton Equations to the Extended Vector Bundles, Manisa, Türkiye, ***Mathematical & Computational Applications***, 1.1: 21-28.

De Leon, M., Oubina, J. A., Rodrigues, P. R., Salgado, M. R., Merino, E. (2001) Hamiltonian Systems on k-Cosymplectic Manifolds, Project PB940106 and Project XUGA13101A94, Spain.

Kibble, T. W.B., Berkshire, F. H., (Çeviri Editörü) Çolakoğlu, K.(1999) Klasik Mekanik, ***Palme Yayıncılık***, Ankara, 361s.

Özer, M. N. (1994) Related Integrable Hamilton Systems, Doktora Tezi, ***The University of Leeds***, England, 158s.

Rızaoğlu, E., Sünel, N. (2006) Klasik Mekanik, ***Seçkin Yayıncılık***, Ankara, 570s.

Tekkoyun, M. (2002), Genişletilmiş Kahler Manifoldlara Euler-Lagrange ve HamiltonDenklemlerin Yüksek Mertebeden Lift'leri, Doktora Tezi, ***Osmangazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü***, Eskişehir, 71s.

Zabzine, M. (2005) Hamiltonian Perspective on Generalized Complex Structure, http:/arxiv.org/abs/hep-th/0502137 (15.02.2005).

Zengin, M., Selam, C., Korcak, S. (1999) Mekanik, ***Bilim Yayıncılık***, Ankara, 291s.

ÖZGEÇMİŞ

27.07.1981 tarihinde Almanya'nın Nagold kasabasında doğdu. 1987-1992 yılları arasında Denizli Hürriyet İlkokulu'nda, 1992-1995 yılları arasında ise Denizli Merkez Ortaokulu'nda okudu. 1995 yılında kazandığı Denizli Anafartalar Süper Lisesi'ne kayıt oldu ve 1999'da mezun oldu. 2000 yılında kazandığı Eskişehir Osmangazi Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik bölümünden 2004 yılında mezun oldu ve aynı yıl Denizli Pamukkale Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim dalında Yüksek Lisansa başladı. 2004-2005 öğretim yılında Cankurtaran İlköğretim Okulu'nda sözleşmeli öğretmen olarak görev yaptı. Halen, özel bir dershanede matematik öğretmeni olarak görev yapmaktadır.