SEMİ-RİEMANN MANİFOLDLARIN TANJANT VE KOTANJANT DEMETLERİNİN GEOMETRİSİ ÜZERİNE

İsmet AYHAN

DOKTORA TEZİ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

ISPARTA 2006

T.C.
SÜLEYMAN DEMİREL ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

SEMİ-RİEMANN MANİFOLDLARIN TANJANT VE KOTANJANT DEMETLERİNİN GEOMETRİSİ ÜZERİNE

İSMET AYHAN

DOKTORA TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

ISPARTA, 2006

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürlüğüne

Bu çalışma jürimiz tarafından MATEMATİK ANABİLİM DALI'nda DOKTORA TEZİ olarak kabul edilmiştir.

Başkan	:	Prof. Dr. Adil KILIÇ
Üye	:	Prof. Dr. Ali KÖKÇE
Üye	:	Prof. Dr. Rıdvan EZENTAŞ
Üye	:	Prof. Dr. A. Ceylan ÇÖKEN (Danışman)
Üye	:	Doç. Dr. Cengizhan MURATHAN

ONAY

Bu tez ... / ... / 2006 tarihinde Enstitü Yönetim Kurulunca belirlenen yukarıdaki jüri üyeleri tarafından kabul edilmiştir.

... / ... /2006

Prof. Dr. Çiğdem SAVAŞKAN
S.D.Ü. FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ MÜDÜRÜ

İÇİNDEKİLER

ÖZET

(Semi-Riemann Manifoldların Tanjant ve Kotanjant Demetlerinin Geometrisi Üzerine)

Tez altı bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölümde, konunun tarihi gelişimi ifade edildi.

İkinci bölümde, temel tanım ve teoremler verildi.

Üçüncü bölümde, tanjant demet üzerindeki semi-Riemann metriklerin işaretleri incelenerek tanjant demetin Sasaki metriğine bağlı diferensiyel geometrisi üzerinde çalışıldı ve tanjant demetin yatay alt vektör demeti üzerinde tanımlı semi-Riemann metriğine bağlı pseudo-Finsler manifoldun geometrisi ele alındı. Ayrıca tanjant demet üzerine yükseltilmiş hiperyüzeylerin geometrisi incelendi.

Dördüncü bölümde, bir manifold üzerinde tanımlı diferensiyel geometrik objelerin ikinci mertebeden tanjant demetlere yükseltilmişleri bulunarak ikinci mertebeden tanjant demet üzerindeki metriklerin işaretleri incelendi. Ayrıca bir semi-Riemann metriğin ikinci mertebeden tam yükseltilmesiyle elde edilen metriğe bağlı Levi-Civita koneksiyonu bileşenler cinsinden elde edildi.

Beşinci bölümde, kotanjant demetin Sasaki semi-Riemann metriğine bağlı diferensiyel geometrisi ile bir Hamilton uzayının kotanjant demetinin diferensiyel geometrisi, bu demetin üzerinde tanımlı semi-Riemann metriğine göre incelendi. Ayrıca kotanjant demet üzerinde iki semi-Riemann metrik tanımlanarak metriklerin işaretleri incelendi.

Altıncı bölümde, bir semi-Riemann manifoldun ikinci mertebeden kotanjant demetinin diferensiyelenebilir manifold yapısı tanımlandı. Daha sonra bu semi-Riemann manifold üzerindeki diferensiyel geometrik objelerin ikinci mertebeden kotanjant demetlere yükseltilmişleri elde edildi.

Anahtar Kelimeler: Tanjant demet, kotanjant demet, ikinci mertebeden tanjant demet, ikinci mertebeden kotanjant demet, Hamilton uzayı, pseudo-Finsler uzayı.

ABSTRACT

(On the Geometry of Tangent and Cotangent Bundle of Semi-Riemann Manifolds)

This thesis consists of six chapters.

In the first chapter, the historical background of the subject has been considered.

In the second chapter, basic definitions and theorems have been given.

In the third chapter, after obtaining the signs of semi-Riemann metrics on the tangent bundle, the differential geometry of the tangent bundle related to the Sasaki metric has been studied. Then the geometry of a pseudo-Finsler manifold related to a semi-Riemann metric on horizontal subbundle of tangent bundle has been considered. In addition, prolonged hypersurfaces to the tangent bundle have been studied .

In the fourth chapter, the lifts of differential geometric objects defined on a manifold to the second order tangent bundle have been obtained. Related this, the signs of metrics on the second order tangent bundle have been studied. Moreover the Levi-Civita connection of the metric derived by the second order complete lift of a semi-Riemann metric has been obtained.

In the fifth chapter, the differential geometry of the cotangent bundle related to the Sasaki semi-Riemann metric has been studied. The differential geometry of the cotangent bundle of a Hamilton space has been worked with respect to the pseudo-Riemann metric defined on this bundle. In addition, two semi-Riemann metrics have been defined and the signatures of these metrics have been studied.

In the sixth chapter, the differentiable manifold structure of the second order cotangent bundle of a semi-Riemann manifold has been defined. By this, the lifts of differential geometric objects which are defined on the semi-Riemann manifold to the second order cotangent bundle have been obtained.

Key Words: Tangent bundle, cotangent bundle, second order tangent bundle, second order cotangent bundle, Hamilton space, pseudo-Finsler space

TEŞEKKÜR

Çalışmalarım boyunca değerli yardım ve katkılarıyla beni yönlendiren, kıymetli tecrübelerinden ve bilgilerinden faydalandığım, çalışmamın her aşamasında beni destekleyen danışman hocam Prof. Dr. A. Ceylan ÇÖKEN'e teşekkür ederim.

Ayrıca bu çalışma 03D655 numaralı proje kapsamında S.D.Ü. BİLİMSEL ARAŞTIRMA PROJELERİ YÖNETİM BİRİMİ tarafından desteklenmiştir. Bu desteklerinden dolayı SDÜBAPYB ne teşekkür ederiz.

SİMGELER DİZİNİ

$\mathbb{R}$	:	Reel sayılar cismi
M	:	Semi-Riemann manifoldu
g	:	Semi-Riemann metriği
ν	:	Semi-Riemann manifoldun indeksi
ε_i	:	$\begin{cases} -1, & 1 \leq i \leq \nu \\ +1, & \nu + 1 \leq i \leq n \end{cases}$
S	:	Semi-Riemann hiperyüzey
B	:	İkinci temel form tensörü
N	:	Hiperyüzeyin birim normali
H	:	N birim normali ile birleştirilmiş şekil operatörü
T_pM	:	$p \in M$ noktasındaki tanjant uzay
$\mathcal{D}$	:	Dağılım
T_p^*M	:	$p \in M$ noktasındaki kotanjant uzay
∇	:	Koneksiyon
R	:	Riemann eğrilik tensörü
TM	:	Tanjant demet
$\tau_{_M}$	:	TM den M ye kanonik projeksiyon
VTM	:	TM üzerinde düşey dağılım
HTM	:	TM üzerinde yatay dağılım
g^C, g^F, g^S, g^K	:	TM üzerindeki metrikler
$L^n = (M, L)$	:	Lagrange manifoldu
$F^n = (M, F)$	:	Finsler manifoldu
T^*M	:	Kotanjant demet
$\pi_{_M}$	:	T^*M den M ye kanonik projeksiyon
ϵ	:	T^*M de (0,2) tipinde tensör alanı
VT^*M	:	T^*M üzerinde düşey dağılım
HT^*M	:	T^*M üzerinde yatay dağılım
Leg	:	TM den T^*M ye diferensiyellenebilir bir dönüşüm

${}^{C}g$, ${}^{F}g$, ${}^{S}g$, ${}^{K}g$	:	T^*M üzerindeki metrikler
$H^n = (M, H)$	:	Hamilton manifoldu
TTM	:	İkinci mertebeden tanjant demet
$\tau_{_{TM}}$	:	TTM den TM ye kanonik projeksiyon
$\widetilde{V}TTM$	:	TTM üzerinde düşey dağılım
$\widetilde{H}TTM$	:	TTM üzerinde yatay dağılım
$g^{CC}, g^{FF}, g^{SS}, g^{KK}$	:	TTM üzerindeki metrikler
T^*T^*M	:	İkinci mertebeden kotanjant demet
$\pi_{_{T^*M}}$	:	T^*T^*M den T^*M ye kanonik projeksiyon
$\widetilde{\epsilon}$	:	T^*T^*M de (0,2) tipinde bir tensör alanı

1. GİRİŞ

Bir Riemann manifoldunun tanjant demeti üzerindeki metrikler konusundaki çalışmalar 1950 li yılların sonlarında Sasaki ve Dombrowski ile başladı. Yano ve Ishıhara 1970 li yıllarda M manifoldu üzerindeki bir metriğin yükseltmelerine bağlı olarak TM manifoldu üzerindeki metrikleri tanımladı ve bu metrikler yardımıyla TM manifoldunun diferensiyel geometrisini inceledi.

1969 yılında Tani, g Riemann metrikli M manifoldunun bir hiperyüzeyi boyunca tanımlı diferensiyel geometrik objelerin, düşey ve tam yükseltilmesiyle, g^C semi-Riemann metrikli TM manifoldu üzerindeki yükseltilmiş hiperyüzey boyunca tanımlı diferensiyel geometrik objeleri elde etti. Böylece (TM, g^C) semi-Riemann manifoldu üzerinde yükseltilmiş hiperyüzeyin geometrisini inceledi.

1987 yılında Oproiu ve Papaghiuc, M Lagrange manifoldu üzerinde $L : TM \to \mathbb{R}$ regüler Lagrange fonksiyonuna bağlı g Riemann metriğinin tam yükseltilmişi olan g^C semi-Riemann metriğine göre TM manifoldunun Levi-Civita koneksiyonu ve Riemann eğrilik tensörünü bileşenler cinsinden hesaplayarak TM manifoldu üzerinde Bianchi özdeşliklerini elde etti.

1988 yılında Oproiu ve Papaghiuc, TM üzerinde, Yano ve Ishıhara'nın tanımladığından farklı bir non-lineer koneksiyon kullanarak, g^C semi-Riemann metrikli TM manifoldunun diferensiyel geometrisini inceledi.

1988 yılında Civelek, ikinci mertebeden tanjant demetlerin 4n-boyutlu diferensiyellenebilir manifold yapısına sahip olduğunu gösterdi ve M manifoldu üzerindeki (0,0), (1,0) ve (0,1) tipindeki tensör alanlarının ikinci mertebeden tanjant demetlere düşey ve tam yükseltilmişlerini tanımladı.

1996 yılında Bejancu ve Farran, bir pseudo-Finsler metriğini, TM manifoldunun tanjant demetinin düşey altdemeti içindeki Liouville vektör alanı üzerinde değer alan bir semi-Riemann metrik olarak tanımladı. Bu metrik yardımıyla TM manifoldunun fibrelerinin diferensiyel geometrisini inceledi.

Kotanjant demetlerin diferensiyel geometrisi üzerindeki çalışmalar 1960 lı yılların sonlarında başladı. 1988 yılında Willmore, M manifoldu üzerindeki torsiyonsuz afin koneksiyonun T^*M manifoldu üzerinde semi-Riemann metriğe karşılık geldiğini gösterdi. Bu metriği torsiyonsuz afin koneksiyonun Riemann genişlemesi olarak adlandırdı.

1990 yılında Oproiu ve Papaghiuc, Willmore'un ifade ettiği semi-Riemann metriğini kullanarak T^*M manifoldunun diferensiyel geometrisini inceledi.

2001 yılında, Akbulut, Özdemir ve Salimov, Yano ve Ishıhara'nın M üzerindeki bir Riemann metriğin tanjant demet üzerine diagonal yükseltmesine benzer bir metodla T^*M üzerinde ${}^Sg$ Riemann metriğini ve bu metriğe bağlı olarak T^*M nin diferensiyel geometrisini ele aldılar.

Bu çalışmada, Yano ve Ishıhara tarafından TM üzerinde tanımlanan metriklerin semi-Riemann metrikler olduğu gösterilerek işaretleri incelendi. Böylece M deki g semi-Riemann metriğinin diagonal yükseltilmesiyle elde edilen Sasaki metriğine göre TM manifoldunun diferensiyel geometrisi üzerinde çalışıldı. Ayrıca TM üzerinde C^∞, reel değerli bir fonksiyon olan L, M deki bir eğrinin yatay yükseltilmişinin teğet vektör alanı üzerinde g^V semi-Riemann metriğinin değeri olarak tanımlanarak (M, L) nin bir pseudo-Finsler manifold olduğu gösterildi. TM nin leafları ile tanımlı n-boyutlu alt manifoldu üzerinde yatay yükseltilmiş eğrinin teğet vektörünü normal kabul eden bir hiperyüzeyin geometrisi incelendi. Ayrıca M deki semi-Riemann hiperyüzey boyunca tanımlı vektör alanlarının düşey ve tam yükseltilmişleri bulunarak (M, g) deki bir semi-Riemann hiperyüzeyin (TM, g^C) ye yükseltilmişi tanımlandı ve M deki semi-Riemann hiperyüzeye normal olan vektör alanının düşey ve tam yükseltilmişleri, yükseltilmiş semi-Riemann hiperyüzeyin normal vektör alanları kabul edilerek, ikinci temel tensör alanına bağlı sonuçlar elde edildi. M manifoldu üzerindeki fonksiyon vektör alanı 1-form gibi tensör alanlarının ikinci mertebeden tanjant demetlere VH, CH, HC, HH yükseltilmişleri elde edildi. Böylece ikinci mertebeden tanjant demetler üzerinde elde edilen metriklerin semi-Riemann metrikler olduğu gösterilerek işaretleri incelendi ve (TTM, g^{CC}) semi-Riemann manifoldunun Levi-Civita koneksiyonu bileşenler cinsinden hesaplandı.

M manifoldu üzerindeki g semi-Riemann metriğinin diagonal yükseltilmesiyle elde edilen Sasaki metriğine göre T^*M manifoldunun diferensiyel geometrisi üzerinde çalışıldı. Lagrange manifoldların temel tensörü, sadece M deki lokal koordinatlara bağlı bir semi-Riemann metrik kabul edilerek, bu metriğin yükseltilmesiyle TM de elde edilen semi-Riemann metrikler, Legendre dönüşümü yardımıyla T^*M üzerinde semi-Riemann metriklere dönüştürüldü. Ayrıca gravitasyon alanlar için Euler-Lagrange denklemleri, Legendre dönüşümü yardımıyla T^*M içindeki koordinatlarla ifade edildi ve bulunan denklemin çözüm eğrileri için sonuçlar elde edildi. Boyutu n olan bir semi-Riemann manifoldun ikinci mertebeden kotanjant demetinin 4n-boyutlu diferensiyellenebilir manifold yapısına sahip olduğu gösterildi. Bu manifold üzerinde tanımlı fonksiyon, vektör alanı ve 1-form gibi tensör alanlarının ikinci mertebeden yükseltilmişleri elde edildi.

2. TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde, çalışmaya esas olan tanım ve teoremler verilecektir.

2.1. Semi-Riemann Manifoldlar

Tanım 2.1.1. M bir C^∞ manifold olsun. $p \in M$ noktasındaki tanjant uzay T_pM olmak üzere

$$\begin{array}{rlcl} g_p: & T_pM \times T_pM & \to & \mathbb{R} \\ & (X_p, Y_p) & \to & g_p(X_p, Y_p) \end{array}$$

biçiminde tanımlı sabit indeksli, simetrik, bilineer, non-dejenere $(0,2)$ tensörüne M üzerinde bir *metrik tensör* denir (O'Neill, 1983).

Tanım 2.1.2. M bir C^∞ manifold olsun. M bir g metrik tensör ile donatılmışsa, M ye bir *semi-Riemann manifoldu* denir (O'Neill, 1983).

Tanım 2.1.3. Bir M semi-Riemann manifoldu üzerinde g metrik tensörünün indeksine *semi-Riemann manifoldun indeksi* denir ve ind$M$ ile gösterilir.

Eğer indeks ν ise $0 \leq \nu \leq boyM$ dir. Özel olarak, $\nu = 0$ ise $\forall p \in M$ için g_p, T_pM üzerinde pozitif tanımlı bir iç çarpım olduğundan, M bir *Riemann manifoldu* olur. $\nu = 1$ ve $n \geq 2$ olması durumunda ise, M ye bir *Lorentz manifoldu* denir (O'Neill, 1983).

Tanım 2.1.4. M bir semi-Riemann manifoldu olsun. $X_p \in T_pM$ olmak üzere,
i) $g_p(X_p, X_p) > 0$ veya $X_p = 0$ ise X_p vektörüne *spacelike*,
ii) $g_p(X_p, X_p) < 0$ ise X_p vektörüne *timelike*,
iii) $g_p(X_p, X_p) = 0$, $X_p \neq 0$ ise X_p vektörüne *lightlike (null)* denir.
Bu sınıflandırmaya göre verilen bir tanjant vektörün ait olduğu kümeye bu tanjant vektörün *causal* karakteri denir (O'Neill, 1983).

Tanım 2.1.5. T_pM nin orijininden geçen doğrularını M nin p den geçen jeodeziklerine taşıyan dönüşüme *üstel dönüşüm* denir.

$\forall p \in M$ için $\exp_p$ dönüşümü $0_p \in T_pM$ nin bir $\widetilde{U}$ komşuluğundan, $p \in M$ nin bir

U komşuluğuna diffeomorfizmdir. Eğer $\widetilde{U}$, 0 civarında $v \in \widetilde{U}$ iken $\forall t \in [0,1]$ için $tv \in \widetilde{U}$ oluyorsa U ya p nin bir *normal komşuluğu* denir (O'Neill, 1983).

Teorem 2.1.6. Eğer $x^1, ..., x^n$ M nin p noktasında bir normal koordinat sistemi ise tüm i, j, k indisleri için,

$$g_{ij}(p) = \delta_{ij}\varepsilon_j \qquad ; \qquad \Gamma^k_{ij}(p) = 0$$

olur (O'Neill, 1983).

Tanım 2.1.7. $\mathbb{R}^n$ Öklid $n-$uzay verilsin. $0 \leq \nu \leq n$, olmak üzere ν tamsayısı için, $\mathbb{R}^n$ üzerinde,

$$g(X_p, Y_p) = -\sum_{i=1}^{\nu} x_i y_i + \sum_{i=\nu+1}^{n} x_i y_i$$

ile verilen metrik tensör göz önüne alınırsa, elde edilen uzay *semi-Öklid* $n-$*uzay* olarak adlandırılır ve $\mathbb{R}^n_\nu$ ile gösterilir (O'Neill, 1983).

Tanım 2.1.8. $\{u_1, ..., u_n\}$, $\mathbb{R}^n_\nu$ üzerinde doğal koordinatlar olsun. V ve $W = \sum W_i \partial_i$, $\mathbb{R}^n_\nu$ üzerinde vektör alanları iseler

$$\nabla_V W = \sum V(W_i)\partial_i$$

vektör alanına W nın V ye göre *kovaryant türevi* denir. Burada, $\{\partial_i\}, i = 1, ..., n$, $\chi(\mathbb{R}^n_\nu)$ vektör alanları uzayının standart bazıdır (O'Neill, 1983).

Tanım 2.1.9. Bir M C^∞ manifoldu üzerindeki bir ∇ koneksiyonu,
i) $\nabla_V W$, V ye göre $C^\infty(M, \mathbb{R})$ lineerdir,
ii) $\nabla_V W$, W ye göre $\mathbb{R}$ lineerdir,
iii) $\nabla_V(fW) = V(f)W + fD_V W$, $\forall f \in C^\infty(M, \mathbb{R})$
olacak şekilde bir

$$\nabla : \chi(M) \times \chi(M) \to \chi(M)$$

fonksiyonudur (O'Neill, 1983).

Teorem 2.1.10. Bir M semi-Riemann manifoldu üzerinde $\forall X, Y, Z \in \chi(M)$ için

$i)$ $[X,Y] = \nabla_X Y - \nabla_Y X$

$ii)$ $Xg(Y,Z) = g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z)$

olacak şekilde bir tek ∇ koneksiyonu vardır. ∇ ye M nin *Levi-Civita koneksiyonu* denir ve Levi-Civita koneksiyonu,

$$\begin{aligned} 2g(\nabla_X Y, Z) &= Xg(Y,Z) + Yg(Z,X) - Zg(X,Y) \\ &\quad -g(X,[Y,Z]) + g(Y,[Z,X]) + g(Z,[X,Y]) \end{aligned}$$

Kozsul formülü ile karakterize edilir (O'Neill, 1983).

Tanım 2.1.11. Bir semi-Riemann M manifoldunun Levi-Civita koneksiyonu ∇ olsun. $\forall X, Y, Z \in \chi(M)$ için

$$\begin{aligned} R: \ \chi(M) \times \chi(M) \times \chi(M) &\rightarrow \chi(M) \\ (X,Y,Z) &\rightarrow R(X,Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]} Z \end{aligned}$$

şekinde tanımlanan R fonksiyonu, M üzerinde $(1,3)$ tensördür. Bu tensöre M nin Riemann eğrilik tensörü denir (O'Neill, 1983).

Tanım 2.1.12. M bir semi-Riemann manifold ve $p \in M$ noktasındaki X_p, Y_p tanjant vektörlerinin gerdiği T_pM tanjant uzayının $2-$boyutlu bir non-dejenere altuzayı $\mathcal{P}$ olsun.

$$\mathcal{K}(\mathcal{P}) = \frac{g(R(X,Y)Y,X)}{g(X,X)g(Y,Y) - g(X,Y)^2}$$

şeklinde tanımlanan $\mathcal{K}(\mathcal{P})$ reel sayısına $\mathcal{P}$ nin *kesit eğriliği* denir (O'Neill, 1983).

Tanım 2.1.13. $\widetilde{M}$ semi-Riemann manifoldunun bir C^∞ altmanifoldu M ve $\widetilde{M}$ daki metrik g olsun.

$$\begin{aligned} \varphi: \ M &\rightarrow \widetilde{M} \\ p &\rightarrow \varphi(p) = p \end{aligned}$$

inclusion(daldırma) dönüşümü için $p \in M$ noktasındaki türev dönüşümü

$$T_pM \xrightarrow{\varphi_*|_P} T_p\widetilde{M}$$

ve ek dönüşümü de

$$T_p^*\widetilde{M} \xleftarrow{\varphi^*|_P} T_p^*M$$

olmak üzere,

$$\varphi^* \mid_p (g_p)(X_p, Y_p) = g(\varphi_*(X_p), \varphi_*(Y_p))_p; \, \forall X_p, Y_p \in T_pM$$

eşitliği ile tanımlı $\varphi^* \mid_p (g_p)$, M üzerinde bir metrik ise M ye $\widetilde{M}$ nın bir *semi-Riemann altmanifoldu* denir (O'Neill, 1983).

Tanım 2.1.14. M, $\widetilde{M}$ nın bir semi-Riemann altmanifoldu olsun. $\forall p \in M$ için $T_pM^{\perp}$ uzayının boyutuna M nin *dik tümleyeninin boyutu* (*codimension*), $T_pM^{\perp}$ in indeksine de M nin *dik tümleyeninin indeksi (co-indeksi)* denir (O'Neill, 1983).

M, $\widetilde{M}$ nın bir semi-Riemann altmanifoldu olsun. Buna göre,

$$T_p\widetilde{M} = T_pM \oplus T_pM^{\perp}$$

olduğundan, $X_p \in T_p\widetilde{M}$ için tanjant ve normal bileşenleri yardımıyla,

$$X_p = \tan X_p + \mathrm{nor}X_p$$

yazılışı tek türlüdür. Burada, $\tan X_p \in T_pM$ olmak üzere $\mathrm{nor}X_p \in T_pM^{\perp}$ dir. Ortogonal izdüşümlerin sonucu olarak,

$$\tan : T_p\widetilde{M} \longrightarrow T_pM$$

ve

$$\mathrm{nor} : T_p\widetilde{M} \longrightarrow T_pM^{\perp}$$

dönüşümleri $\mathbb{R}$-lineerdirler (O'Neill, 1983).

Teorem 2.1.15. M, $\widetilde{M}$ nın bir semi-Riemann altmanifoldu olsun. O zaman,

$$\mathrm{ind}\widetilde{M} = \mathrm{ind}M + \mathrm{coind}M$$

dir (O'Neill, 1983).

Teorem 2.1.16. $\forall\, X, Y \in \chi(M)$ için,

$$\begin{array}{rlcl} B: & \chi(M) \times \chi(M) & \rightarrow & \chi(M)^{\perp} \\ & (X,Y) & \rightarrow & B(X,Y) = nor\widetilde{\nabla}_X Y \end{array}$$

şeklinde tanımlı B dönüşümü $2-$lineer ve simetriktir. B fonksiyonuna M nin *şekil tensörü* veya *ikinci temel tensörü* denir (O'Neill, 1983).

Tanım 2.1.17. M, $\widetilde{M}$ nın bir semi-Riemann altmanifoldu ve $\widetilde{M}$ üzerinde Levi-Civita koneksiyonu $\widetilde{\nabla}$ olsun.

$$\begin{array}{rlcl} \nabla: & \chi(M) \times \chi(M) & \rightarrow & \chi(M) \\ & (X,Y) & \rightarrow & \nabla_X Y = te\breve{g}\widetilde{\nabla}_X Y \end{array}$$

indirgenmiş fonksiyonuna M semi-Riemann altmanifoldu üzerine *indirgenmiş koneksiyon* denir (O'Neill, 1983).

Tanım 2.1.18. M, $\widetilde{M}$ nın bir semi-Riemann altmanifoldu olsun. $\widetilde{\nabla}$ ve ∇, sırasıyla, $\widetilde{M}$ ve M üzerindeki Levi-Civita koneksiyonları olmak üzere $\forall X, Y \in \chi(\widetilde{M})$ için,

$$\widetilde{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + B(X,Y)$$

eşitliğine M nin *Gauss denklemi* denir (O'Neill, 1983).

Tanım 2.1.19. M, $\widetilde{M}$ nın bir semi-Riemann altmanifoldu olsun. Bir $p \in M$ noktasının umbilik nokta olması için

$$B(X,Y) = g(X,Y)Z, \ \forall\, X, Y \in T_pM$$

olacak şekilde bir $Z \in T_pM^{\perp}$ normal vektörünün var olması gereklidir. Böylece elde edilen Z normal vektör alanına M nin p noktasındaki *normal eğrilik vektörü* denir (O'Neill, 1983).

Tanım 2.1.20. $\widetilde{M}$, $n-$boyutlu bir semi-Riemann manifold olsun. $\widetilde{M}$ nın dik tümleyeninin boyutu (codimension) 1 olan altmanifolduna $\widetilde{M}$ nın bir *semi-Riemann hiperyüzeyi* denir (O'Neill, 1983).

Tanım 2.1.21. $\widetilde{M}$ nın M semi-Riemann hiperyüzeyinin ε işareti;

$$\begin{cases} +1, & \text{eğer } coindM = 0 \\ -1, & \text{eğer } coindM = 1 \end{cases}$$

biçimindedir (O'Neill, 1983).

Tanım 2.1.22. M, $\widetilde{M}$ nın bir semi-Riemann hiperyüzeyi olsun. ∇, M üzerinde Levi-Civita koneksiyon ve N de birim normal vektör alanı olmak üzere, $\forall X \in \chi(M)$ için

$$g(H(X), Y) = g(B(X, Y), N)$$

şeklinde tanımlı

$$H : \chi(M) \to \chi(M)$$

lineer dönüşümüne M nin N den türetilmiş *şekil operatörü* denir (O'Neill, 1983).

Tanım 2.1.23. M bir C^∞ $n-$boyutlu manifold olsun. M üzerinde

$$\begin{aligned} \mathcal{D}: \ M &\to T_pM \\ p &\to \mathcal{D}_p \subset T_pM \end{aligned}$$

şeklinde tanımlı $\mathcal{D}$ dönüşümüne $r-$boyutlu *dağılım* ve $X \in \chi(M)$ için $X_p \in \mathcal{D}_p$ ise X vektör alanına da $\mathcal{D}$ ye aittir denir. Eğer her $p \in M$ noktası için $\mathcal{D}_p$ de r tane diferensiyellenebilir lineer bağımsız vektör alanı var ise $\mathcal{D}$ dağılımına *diferensiyellenebilirdir* denir (Duggal ve Bejancu, 1996).

2.2. Tanjant ve Kotanjant Demetler

Tanım 2.2.1. M, C^∞ manifoldunun herhangi bir p noktasındaki tanjant uzayı T_pM olmak üzere M nin tüm p noktalarındaki T_pM tanjant uzaylarının ayrık birleşimi olan

$$TM = \bigcup_{p \in M} T_p M$$

TM ye M nin *tanjant demeti* denir (Yano, Ishıhara, 1973).

Tanım 2.2.2. TM den M manifoldu üzerine sürekli ve örten

$$\begin{array}{rrcl} \tau_{_M}: & TM & \to & M \\ & z & \to & \tau_{_M}(z) = p \end{array}$$

dönüşümüne *kanonik projeksiyon* denir (Yano, Ishıhara, 1973).

Tanım 2.2.3. M manifoldu $\{U; x^h\}, h = 1, ..., n,$ koordinat komşuluklarının bir sistemi tarafından örtülsün. $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{R}$ reel sayılar cismi üzerinde n-boyutlu vektör uzayı olmak üzere $\widetilde{P} \in T_p M$ noktası $p \in U$ ve $X \in \mathbb{R}^n$ olacak biçimde (p, X) sıralı ikilisi ile temsil edilirse $\forall p \in U$ için $\tau_{_M}^{-1}(U)$ açık kümesi $U \times \mathbb{R}^n$ e diffeomorfiktir. (x^h), $\tau_{_M}(\widetilde{P}) = p$ noktasının koordinatları ve (y^h), $T_p M$ tanjant uzayının $\{\frac{\partial}{\partial x^h}\}$ doğal bazına göre $X \in \mathbb{R}^n$ vektörünün lokal bileşenleri olmak üzere (x^h, y^h) ile $\widetilde{P} \in \tau_{_M}^{-1}(U)$ noktası arasında bir eşleşme kurulur. (x^h, y^h), $\tau_{_M}^{-1}(U) \subset TM$ açık kümesinde bir lokal koordinat sistemi olup bu koordinat sistemine (x^h) dan *indirgenmiş koordinat sistemi* denir (Yano, Ishıhara, 1973).

Teorem 2.2.4. TM, $2n-$boyutlu topolojik manifolddur (Miron, 2001).

Tanım 2.2.5. f, M de bir fonksiyon olmak üzere

$$\begin{array}{ccc} TM & \overset{\tau_M}{\to} & M \\ & f^V \searrow & \downarrow f \\ & & \mathbb{R} \end{array}$$

diyagramı ile verilen $f^V = f \circ \tau_{_M}$ fonksiyonuna f fonksiyonunun TM ye *düşey yükseltilmişi* denir (Yano, Ishıhara, 1973).

Tanım 2.2.6. TM üzerinde, $\widetilde{X}(f^V) = 0$ eşitliğini sağlayan $\widetilde{X}$ vektör alanına d*üşey vektör alanı* denir.

M de X^h bileşenlerine sahip X vektör alanının TM ye düşey yükseltilmişi indirgenmiş koordinatlara göre

$$X^V = X^h \frac{\partial}{\partial y^h}$$

lokal gösterime sahiptir (Yano, Ishıhara, 1973).

Tanım 2.2.7. $\forall X \in \Im_0^1(M)$ için $\widetilde{\omega}(X^V) = 0$ eşitliğini sağlayan TM üzerindeki $\widetilde{\omega}$ $1-$formuna *düşey* $1-$*form* denir.
M de ω_h bileşenlerine sahip ω 1-formunun TM ye düşey yükseltilmişi indirgenmiş koordinatlara göre

$$\omega^V = \omega_h dx^h$$

lokal gösterime sahiptir (Yano, Ishıhara, 1973).

Teorem 2.2.8. $\forall P, Q \in \Im_s^r(M)$ için,

$$(P \otimes Q)^V = P^V \otimes Q^V, \qquad (P + Q)^V = P^V + Q^V$$

olup, düşey yükseltme dönüşümü, M manifoldu üzerindeki tensör cebirinden, TM manifoldu üzerindeki tensör cebirine sabit katsayılara göre lineer bir izomorfizmdir (Yano, Ishıhara, 1973).

Tanım 2.2.9. f, M de bir fonksiyon olmak üzere

$$f^C = \iota(df)$$

eşitliğini sağlayan f^C fonksiyonuna, M deki f fonksiyonunun TM ye *tam yükseltilmişi* denir.
M deki $\omega = \omega_h dx^h$ 1-formu, TM nin $\iota(\omega) = \omega_h y^h$ bileşenleri ile ifade edilen bir fonksiyonu olup $f^C = \iota(df)$ fonksiyonunun TM de indirgenmiş koordinatlara göre lokal gösterimi

$$f^C = y^h \frac{\partial f}{\partial x^h}$$

dir (Yano, Ishıhara, 1973).

Tanım 2.2.10. $X \in \Im_0^1(M)$ ve $f \in \Im_0^0(M)$ için $X^C f^C = (Xf)^C$ eşitliğini sağlayan X^C vektör alanına M deki X *vektör alanının* TM ye *tam yükseltilmişi* denir.
M de X^h bileşenlerine sahip X vektör alanının TM ye tam yükseltilmişi indirgenmiş koordinatlara göre

$$X^C = X^h \frac{\partial}{\partial x^h} + y^k \frac{\partial X^h}{\partial x^k} \frac{\partial}{\partial y^h}$$

lokal gösterime sahiptir (Yano, Ishıhara, 1973).

Tanım 2.2.11. $\omega \in \Im_1^0(M)$ ve $X^C \in \Im_0^1(TM)$ için $\omega^C(X^C) = (\omega(X))^C$ eşitliğini sağlayan ω^C $1-$formuna, M deki ω $1-$formunun TM ye *tam yükseltilmişi* denir.
M de ω_h bileşenlerine sahip ω 1-formunun TM ye tam yükseltilmişi indirgenmiş koordinatlara göre

$$\omega^C = y^k \frac{\partial \omega_h}{\partial x^k} dx^h + \omega_h dy^h$$

lokal gösterime sahiptir (Yano, Ishıhara, 1973).

Teorem 2.2.12. $\forall P, Q \in \Im_s^r(M)$ için,

$$(P \otimes Q)^C = P^C \otimes Q^V + P^V \otimes Q^C, \qquad (P + Q)^C = P^C + Q^C$$

olup, tam yükseltme dönüşümü, M manifoldu üzerindeki tensör cebirinden, TM manifoldu üzerindeki tensör cebirine sabit katsayılara göre, lineer bir izomorfizmdir (Yano, Ishıhara, 1973).

Tanım 2.2.13. M nin afin koneksiyonu ∇ ve $f \in \Im_0^0(M)$ için f nin gradienti ∇f olmak üzere,

$$f^H = f^C - \gamma(\nabla f)$$

şeklinde tanımlanan f^H fonksiyonuna, M deki f *fonksiyonunun* TM ye *yatay yükseltilmişi* denir.

γ dönüşümü

$$\begin{array}{rcl} \gamma: \Im_s^r(M) & \rightarrow & \Im_{s-1}^r(M) \\ S & \rightarrow & \gamma(S) \end{array},$$

$$S = S_{j_1 j_2 \ldots j_s}^{i_1 \ldots i_r} \frac{\partial}{\partial x^{i_1}} \otimes \ldots \otimes \frac{\partial}{\partial x^{i_r}} \otimes dx^{j_1} \otimes dx^{j_2} \otimes \ldots \otimes dx^{j_s}$$

iken

$$\gamma(S) = y^{j_1} S_{j_1 j_2 \ldots j_s}^{i_1 \ldots i_r} \frac{\partial}{\partial y^{i_1}} \otimes \ldots \otimes \frac{\partial}{\partial y^{i_r}} \otimes dx^{j_2} \otimes \ldots \otimes dx^{j_s}$$

olup, $f^C = \gamma(\nabla f)$ olduğu için

$$f^H = 0$$

dır (Yano, Ishıhara, 1973).

Tanım 2.2.14. $X \in \Im_0^1(M)$ için

$$X^H = X^C - \gamma(\nabla X)$$

eşitliğini sağlayan X^H vektör alanına M deki X *vektör alanının* TM ye *yatay yükseltilmişi* denir.

M de X^h bileşenlerine sahip X vektör alanının TM ye yatay yükseltilmişi indirgenmiş koordinatlara göre

$$X^H = X^h \frac{\partial}{\partial x^h} - y^j \Gamma_{ji}^h X^i \frac{\partial}{\partial y^h}$$

lokal gösterime sahiptir (Yano, Ishıhara, 1973).

Tanım 2.2.15. $\omega \in \Im_1^0(M)$ ve ∇, M de bir afin koneksiyon olmak üzere

$$\omega^H = \omega^C - \gamma(\nabla \omega)$$

eşitliğini sağlayan ω^H $1-$formuna, M deki ω $1-$formunun TM ye *yatay yükseltilmişi* denir.

M de ω_i bileşenlerine sahip ω 1-formunun TM ye yatay yükseltilmişi indirgenmiş koordinatlara göre

$$\omega^H = y^k \Gamma^h_{ki} \omega_h dx^i + \omega_i dy^i$$

lokal gösterime sahiptir (Yano, Ishıhara, 1973).

Teorem 2.2.16. $\forall P, Q \in \Im^r_s(M)$ için,

$$(P \otimes Q)^H = P^H \otimes Q^V + P^V \otimes Q^H, \qquad (P+Q)^H = P^H + Q^H$$

olup, yatay yükseltme dönüşümü, M manifoldu üzerindeki tensör cebirinden, TM manifoldu üzerindeki tensör cebirine sabit katsayılara göre, lineer bir izomorfizmdir (Yano, Ishıhara, 1973).

Teorem 2.2.17. M manifoldu üzerinde herhangi bir p noktasının U açık komşuluğundaki $\{\frac{\partial}{\partial x^i}\}, i = 1, ..., n$ lokal baz vektör alanlarının ve $\{dx^i\}, i = 1, ..., n$ dual baz $1-$formlarının TM manifoldu üzerine yükseltilmişleri

i) $\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)^V = \frac{\partial}{\partial y^i}$,

ii) $\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)^C = \frac{\partial}{\partial x^i}$,

iii) $\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)^H = \frac{\delta}{\delta x^i} = \frac{\partial}{\partial x^i} - N^h_i \frac{\partial}{\partial y^h}$, $N^h_i = y^j \Gamma^h_{ij}$,

iv) $(dx^i)^V = dx^i$,

v) $(dx^i)^C = dy^i$,

vi) $(dx^i)^H = \delta y^i = dy^i + N^i_h dx^h$

dır (Yano, Ishıhara, 1973).

Teorem 2.2.18. TTM, TM manifoldunun tanjant demeti, HTM, TTM nin yatay altdemeti ve VTM de TTM nin düşey altdemeti olmak üzere

$$TTM = HTM \oplus VTM$$

dir (Oproiu, Papaghiuc, 1988).

Tanım 2.2.19. Bir M C^{∞} manifoldunun herhangi bir m noktasındaki T_mM tanjant uzayının dual uzayı olan T_m^*M, M nin m noktasındaki kotanjant uzayı olsun. M nin tüm m noktalarındaki T_m^*M kotanjant uzaylarının ayrık birleşimi olan

$$T^*M = \bigcup_{m\in M} T_m^*M$$

T^*M ye M nin *kotanjant demeti* denir (Yano, Ishıhara, 1973).

Tanım 2.2.20. T^*M kotanjant demetinden M manifoldu üzerine

$$\begin{array}{rrcl} \pi_{M}: & T^*M & \to & M \\ & \theta & \to & \pi_{M}(\theta) = m \end{array}$$

şeklinde tanımlanan sürekli ve örten bir dönüşüme *kanonik projeksiyon* denir (Yano, Ishıhara, 1973).

Tanım 2.2.21. M manifoldu $\{U; x^h\}, h = 1, ..., n,$ koordinat komşuluklarının bir sistemi tarafından örtülsün. $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{R}$ reel sayılar cismi üzerinde n-boyutlu vektör uzayı olmak üzere $\widetilde{P} \in T_m^*M$ noktası $m \in U$ ve $p \in \mathbb{R}^n$ olacak biçimde (m, p) sıralı ikilisi ile temsil edilirse $\forall m \in U$ için $\pi_{M}^{-1}(U)$ açık kümesi $U \times \mathbb{R}^n$ e diffeomorfiktir. (x^h), $\pi_{M}(\widetilde{P}) = m$ noktasının koordinatları ve (p_i), T_m^*M kotanjant uzayının $\{dx^h\}$ doğal bazına göre $p \in \mathbb{R}^n$ kovektörünün lokal bileşenleri olmak üzere (x^h, p_i) ile $\widetilde{P} \in \pi_{M}^{-1}(U)$ noktası arasında bir eşleşme kurulur. (x^h, p_i), $\pi_{M}^{-1}(U) \subset T^*M$ açık kümesinde bir lokal koordinat sistemi olup bu koordinat sistemine (x^h) dan *indirgenmiş koordinat sistemi* denir (Yano, Ishıhara, 1973).

Teorem 2.2.22. T^*M $2n-$boyutlu topolojik manifolddur (Miron, 2001).

Tanım 2.2.23. f, M de bir fonksiyon olmak üzere

$$\begin{array}{ccc} T^*M & \overset{\pi_M}{\to} & M \\ & f^V \searrow & \downarrow f \\ & & \mathbb{R} \end{array}$$

diyagramıyla verilen $f^V = f \circ \pi_{_M}$ fonksiyonuna f *fonksiyonunun* T^*M ye *düşey yükseltilmişi* denir (Yano, Ishıhara, 1973).

Teorem 2.2.24. $\pi_{_M}^{-1}(U) \subset T^*M$ de $(p_i, 0), i = 1, ..., n$ lokal bileşenlerine sahip $p = p_i dx^i$ temel $1-$formun dış türevi $\epsilon = dp = dp_i \wedge dx^i = \frac{1}{2}\epsilon_{_{CB}} dx^C \wedge dx^B$ $B, C = 1, ..., 2n$, $(0,2)$ tipinde bir tensör alanıdır.
Bu tensör alanının indirgenmiş koordinatlara göre matris gösterimi

$$(\epsilon_{_{CB}}) = \begin{pmatrix} 0 & \delta_i^j \\ -\delta_j^i & 0 \end{pmatrix}$$

dir. Bu matrisin tersi

$$\left(\epsilon^{BA}\right) = \begin{pmatrix} 0 & -\delta_i^h \\ \delta_h^i & 0 \end{pmatrix}$$

dır. ϵ, $\pi_{_M}^{-1}(U)$ da bileşenleri $\epsilon_{_{CB}}$ olan $(0,2)$ tipindeki tensör alanı ise ϵ^{-1}, ϵ^{BA} bileşenlerine sahip $(2,0)$ tipindeki tensör alanıdır (Yano, Ishıhara, 1973).

Tanım 2.2.25. $\omega \in \Im_1^0(M)$ için $\pi_{_M}^*(\omega) = \widetilde{\omega}_{_B} dx^B$, $B = 1, ..., 2n$ T^*M de bir 1-form olup

$$\widetilde{\omega}^A = \widetilde{\omega}_{_B} \epsilon^{BA}$$

eşitliği sağlanacak şekilde T^*M de verilen $\widetilde{\omega}^A$ bileşenlerine sahip vektör alanına, M deki ω $1-$formunun T^*M ye *düşey yükseltilmişi* denir.
M de $\omega_{_h}$ bileşenlerine sahip ω 1-formunun T^*M ye düşey yükseltilmişi indirgenmiş koordinatlara göre

$$\omega^V = \omega_i \frac{\partial}{\partial p_i}$$

lokal gösterime sahiptir (Yano, Ishıhara, 1973).

Teorem 2.2.26. $\forall P, Q \in \Im_s^0(M)$ için,

$$(P \otimes Q)^V = P^V \otimes Q^V, \qquad (P + Q)^V = P^V + Q^V$$

olup, düşey yükseltme dönüşümü, M manifoldu üzerindeki tensör cebirinden

T^*M manifoldu üzerindeki tensör cebirine sabit katsayılara göre lineer bir izomorfizmdir (Yano, Ishıhara, 1973).

Teorem 2.2.27. T^*M manifoldu üzerinde

$$\begin{array}{rcl} \iota: \ \Im_s^1(M) & \to & \Im_s^0(M) \\ S & \to & \iota(S) \end{array}$$

olup,

$$S = S^a_{i_s \dots i_2 i_1} \frac{\partial}{\partial x^a} \otimes dx^{i_s} \otimes \dots \otimes dx^{i_2} \otimes dx^{i_1}$$

iken,

$$\iota(S) = p_a S^a_{i_s \dots i_2 i_1} dx^{i_s} \otimes \dots \otimes dx^{i_2} \otimes dx^{i_1}$$

ve

$$\begin{array}{rcl} \gamma: \ \Im_s^1(M) & \to & \Im_{s-1}^1(M) \\ S & \to & \gamma(S) \end{array}$$

için

$$\gamma(S) = p_a S^a_{i_s \dots i_2 i_1} dx^{i_s} \otimes \dots \otimes dx^{i_2} \otimes \frac{\partial}{\partial p_{i_1}}$$

dir (Yano, Ishıhara, 1973).

Tanım 2.2.28. $X \in \Im_0^1(M)$ için $(\iota X) \in \Im_0^0(TM)$ ve $d(\iota X)$, T^*M de $\widetilde{X}_B$ bileşenlerine sahip bir $1-$formu yardımıyla

$$\widetilde{X}^A = \widetilde{X}_B \epsilon^{BA}$$

eşitliği sağlanacak biçimde elde edilen $\widetilde{X}^A$ bileşenlerine sahip bir vektör alanına M deki bir X vektör alanının T^*M ye *tam yükseltilmişi* denir.

M de X^h bileşenlerine sahip X vektör alanının T^*M ye tam yükseltilmişi indirgenmiş koordinatlara göre

$$X^C = X^h \frac{\partial}{\partial x^h} - p_i \frac{\partial X^i}{\partial x^h} \frac{\partial}{\partial p_h}$$

lokal gösterime sahiptir (Yano, Ishıhara, 1973).

Tanım 2.2.29. ∇, M de simetrik afin koneksiyon ve $X \in \Im_0^1(M)$ olmak üzere

$$X^H = X^C + \gamma(\nabla X)$$

eşitliğini sağlayan X^H vektör alanına, X *vektör alanının* T^*M ye *yatay yükseltilmişi* denir.

M de X^h bileşenlerine sahip X vektör alanının T^*M ye yatay yükseltilmişi indirgenmiş koordinatlara göre

$$X^H = X^h \frac{\partial}{\partial x^h} + p_k \Gamma_{hi}^k X^i \frac{\partial}{\partial p_h}$$

lokal gösterime sahiptir (Yano, Ishıhara, 1973).

Teorem 2.2.30. M manifoldu üzerinde herhangi bir m noktasının U açık komşuluğundaki $\{\frac{\partial}{\partial x^i}\}, i = 1, ..., n$ lokal baz vektör alanları ve $\{dx^i\}, i = 1, ..., n$ dual baz $1-$formlarının, T^*M manifoldu üzerine yükseltilmişleri

$i)$ $\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)^C = \frac{\partial}{\partial x^i}$,

$ii)$ $\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)^H = \frac{\delta}{\delta x^i} = \frac{\partial}{\partial x^i} + N_{ij} \frac{\partial}{\partial y^h}, N_{ij} = p_k \Gamma_{ij}^k$,

$iii)$ $(dx^i)^V = \frac{\partial}{\partial p_i}$

dir (Yano, Ishıhara, 1973).

2.3. Finsler, Lagrange ve Hamilton Uzayları

Tanım 2.3.1. M, diferensiyellenebilir n-boyutlu bir manifold ve $F : TM \to \mathbb{R}$ skalar fonksiyonu

$i)$ $\widetilde{TM} = TM \backslash \{0\}$ manifoldu üzerinde diferensiyellenebilir ve $\tau_M : TM \to M$ projeksiyonunun sıfır kesitleri üzerinde sürekli,

$ii)$ pozitif,

$iii)$ TM nin fibreleri üzerinde homojenlik derecesi bir ve

$iv)$ $g_{ij}(x, y) = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F^2}{\partial y^i \partial y^j}$ nin elemanları $\widetilde{TM}$ üzerinde pozitif tanımlı

ise $F^n = (M, F(x, y))$ ikilisine Finsler manifoldu ya da Finsler uzayı denir (Miron, 2001).

Teorem 2.3.2. $g_{ij}(x,y)$, $\widetilde{TM}$ üzerinde 2. dereceden kovaryant ve simetrik bir tensör alanıdır (Miron, 2001).

Tanım 2.3.3. Finsler manifoldu üzerindeki $F(x,y)$ fonksiyonuna *temel fonksiyon,* $g_{ij}(x,y)$ tensör alanına *temel ya da metrik tensör* denir (Miron, 2001).

Teorem 2.3.4. Finsler manifoldunda aşağıdaki özelikler sağlanır:

$i)$ g_{ij} temel tensör alanının bileşenleri sıfırıncı mertebeden homojendir. Yani,

$$y^i \frac{\partial g_{jk}}{\partial y^i} = y^i C_{ijk} = 0,$$

$ii)$ $p_i = \frac{1}{2}\frac{\partial F^2}{\partial y^i}$ birinci dereceden homojendir (Miron, 2001).

Teorem 2.3.5. Finsler manifoldu üzerinde aşağıdaki özdeşlikler sağlanır:
$i)$ $p_i y^i = F^2$,
$ii)$ $y_i = g_{ij} y^j = p_j$,
$iii)$ $C_{ojh} = y^i C_{ijk} = 0, C_{joh} = C_{jho} = 0$,
$iv)$ $F^2(x,y) = g_{ij}(x,y) y^i y^j$ dir (Miron, 2001).

Teorem 2.3.6. Finsler manifoldu aşağıdaki diferensiyel geometrik objelere sahiptir:

$i)$ Lioville vektör alanı, $V = y^i \frac{\partial}{\partial y^i}$,
$ii)$ Hamilton $1-$form, $\omega = p_i dx^i$,
$iii)$ Simplektik yapı, $\theta = d\omega = dp_i \wedge dx^i$ dir (Miron, 2001).

Tanım 2.3.7. Finsler manifoldunun temel tensör alanı y^i değişkenlerine bağlı değilse, yani $\frac{\partial g_{ij}}{\partial y^k} = 2C_{ijk} = 0$ ise bir *Riemann uzayına indirgenebilirdir* denir (Miron, 2001).

Tanım 2.3.8. M diferensiyellenebilir $n-$boyutlu bir manifold ve TM, M nin tanjant demeti olsun. $\widetilde{TM} = TM \backslash \{0\}$ olmak üzere $\widetilde{TM}$ üzerinde tanımlı $L(x,y)$ fonksiyonu için *i)* $L : \widetilde{TM} \overset{C^\infty}{\rightarrow} \mathbb{R}$,

ii) L nin y ye göre homejenlik derecesi iki ise, yani, $L(x, ky) = k^2 L(x, y)$,

iii) $\forall (x, y) \in \widetilde{TM}$ için

$$g_{ij}(x,y) = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 L}{\partial y^i \partial y^j}$$

metrik tensörü q tane negatif özdeğere ve $(n-q)$ tane pozitif özdeğere sahip ise $F^n = (M, L)$ ikilisine q indeksine sahip *pseudo-Finsler manifold* denir (Bejancu, Farran, 1997).

Tanım 2.3.9. $\widetilde{TM}$ üzerinde tanımlanan $L : TM \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu C^∞ sınıfından bir fonksiyon ve bu fonksiyonun y^i ye göre Hessianı

$$g_{ij}(x,y) = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 L}{\partial y^i \partial y^j}$$

$\widetilde{TM}$ üzerinde non-dejenere, simetrik ve (0,2) tipinde kovaryant bir tensör alanı ise (M, L) ikilisine Lagrange uzayı ya da Lagrange manifoldu denir (Miron, 2001).

Tanım 2.3.10. $L(x, y)$ diferensiyellenebilir Lagrange fonksiyonu için $rank\,\|g_{ij}(x, y)\| = n$ oluyorsa $L(x, y)$ *regülerdir* denir (Oproiu, Papaghiuc, 1987).

Teorem 2.3.11. $F^n = (M, F(x, y))$ Finsler uzayı, $L^n = (M, L(x, y))$ Lagrange uzayıdır. $L^n = (M, L(x, y))$ Lagrange uzayı, eğer $L(x, y)$ fonksiyonu pozitif, y^i ye göre 2. dereceden homojen ve $\frac{1}{2}\frac{\partial^2 L}{\partial y^i \partial y^j}$ pozitif tanımlı ise $F^n = (M, \sqrt{L(x, y)})$ şeklinde tanımlı bir Finsler uzayıdır (Miron, 2001).

Tanım 2.3.12. M diferensiyellenebilir $n-$boyutlu bir manifold ve T^*M, M nin kotanjant demeti olsun. $\widetilde{T^*M} = T^*M \backslash \{0\}$ olmak üzere T^*M üzerinde verilen $H(x, y)$ fonksiyonu

i) $H : (x, p) \in T^*M \rightarrow H(x, p) \in \mathbb{R}$, $\widetilde{T^*M}$ manifoldu üzerinde diferensiyellenebilir ve $\pi_{_M} : T^*M \rightarrow M$ nin sıfır kesitleri üzerinde sürekliyse,

ii) T^*M nin p_i koordinatlarına göre H nin Hessianı,

$$g^{ij}(x,p) = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 H}{\partial p_i \partial p_j}, \quad rank\,\left\|g^{ij}(x,p)\right\| = n$$

için $\|g^{ij}(x,p)\|$ non-dejenere matrisi ile veriliyorsa,

iii) $g^{ij}(x,p)$, $\widetilde{T^*M}$ üzerinde sabit işaretli, (2,0) tipinde kontravaryant tensör alanıysa, $H^n = (M, H)$ ikilisine *Hamilton manifoldu* ya da *Hamilton uzayı* denir. H fonksiyonuna, $H^n = (M, H)$ Hamilton uzayının *temel fonksiyonu* ya da *regüler Hamiltonyanı* denir. $g^{ij}(x,p)$ ye de Hamilton uzayının *temel tensörü* ya da *metrik tensörü* denir (Miron, 2001).

2.4. İkinci Mertebeden Tanjant Demetler

Tanım 2.4.1. TM, C^∞ manifoldunun herhangi bir Z noktasındaki tanjant uzayı $T_Z TM$ ile gösterilsin. TM nin tüm Z noktalarındaki $T_Z TM$ tanjant uzaylarının ayrık birleşimi olan

$$TTM = \bigcup_{\forall Z \in M} T_Z TM$$

TTM ye TM nin *tanjant demeti* denir (Civelek, 1988).

Tanım 2.4.2. TTM tanjant demetinden TM manifoldu üzerine

$$\begin{aligned} \tau_{_{TM}} : \ TTM &\rightarrow \quad TM \\ A_{Z_p} &\rightarrow \tau_{_{TM}}(A_{Z_p}) = Z_p \end{aligned}$$

biçiminde verilen sürekli ve örten $\tau_{_{TM}}$ dönüşümüne *kanonik projeksiyon* denir (Civelek, 1988).

Tanım 2.4.3. $(U', (x,y))$ ikilisi, TM C^∞ manifoldu için bir harita olsun. $U' \subset TM$ bir açık alt cümle olduğundan $\tau_{_{TM}}^{-1}(U') = U''$ cümlesi TTM nin bir açık alt cümlesidir. $\forall A_{Z_p} \in U'' = \pi_{_{TM}}^{-1}(U') \subset TTM$ tanjant vektörü için

$$(x,y,z,t)(A_{Z_p}) = (x(p), y(Z_p), z(A_{Z_p}), t(A_{Z_p}))$$

olur.

(x,y,z,t) dönüşümünün lokal koordinat fonksiyonları

$$\begin{aligned} x^i(p) &= p^i \\ y^i(Z_p) &= Z_p[x^i] \\ z^i(A_{Z_p}) &= A_{Z_p}[x^i] \\ t^i(A_{Z_p}) &= A_{Z_p}[y^i] \end{aligned}$$

eşitliklerini sağladığı için (x,y,z,t), U'' için bir haritadır. $(x^i,y^i,z^i,t^i); i=1,...,n$ sistemine, TTM için *indirgenmiş lokal koordinat sistemi* denir (Civelek, 1988).

Teorem 2.4.4. TTM, $4n-$boyutlu topolojik manifolddur (Civelek, 1988).

Tanım 2.4.5. Eğer f, M nin bir fonksiyon olmak üzere

$$\begin{array}{ccccc} TTM & \overset{\tau_{TM}}{\to} & TM & \overset{\tau_M}{\to} & M \\ f^{VV} & \searrow & \downarrow f^V & \swarrow f & \\ & & \mathbb{R} & & \end{array}$$

diyagramı yardımıyla elde edilen $f^{VV} = f \circ \tau_{_M} \circ \tau_{_{TM}}$ fonksiyonuna f fonksiyonunun *ikinci mertebeden düşey yükseltilmişi* denir. (Civelek, 1988)

Teorem 2.4.6. $\widetilde{\iota}$ lineer dönüşümü, TM manifoldu üzerindeki lokal baz $1-$formları, TTM manifoldu üzerindeki koordinat fonksiyonlarına

$$\begin{aligned} \widetilde{\iota}: \ \Im_1^0(TM) &\to \Im_0^0(TTM) \\ \overline{d}x^i &\to \widetilde{\iota}(\overline{d}x^i) = z^i \\ \overline{d}y^i &\to \widetilde{\iota}(\overline{d}y^i) = t^i \end{aligned}$$

biçiminde dönüştürür (Civelek, 1988).

Tanım 2.4.7. $\widetilde{f} \in \Im_0^0(TM)$ olmak üzere,

$$\widetilde{f}^C = \widetilde{\iota}(\overline{d}\widetilde{f}) = \left(\frac{\partial \widetilde{f}}{\partial x^i}\right)^V z^i + \left(\frac{\partial \widetilde{f}}{\partial y^i}\right)^V t^i$$

eşitliği ile verilen $\widetilde{f}^C$ fonksiyonuna $\widetilde{f}$ fonksiyonunun TTM ye *tam yükseltilmişi* denir. Eğer

$\widetilde{f} = f^V$ ise

$$f^{VC} = \left(\frac{\partial f}{\partial x^i}\right)^{VV} z^i$$

ve

$\widetilde{f} = f^C = y^i \frac{\partial f}{\partial x^i}$ ise

$$f^{CC} = z^i y^j (\frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j})^{VV} + t^i (\frac{\partial f}{\partial x^i})^{VV}$$

olur. Ayrıca,

$$f^{CV} = (y^i \frac{\partial f}{\partial x^i}) \circ \tau_{TM}$$

biçiminde lokal gösterime sahiptir (Civelek, 1988).

Tanım 2.4.8. $\widetilde{X} \in \Im_0^1(TM)$ ve $\widetilde{f} \in \Im_0^0(TM)$ olmak üzere, TTM üzerinde, $\widetilde{X}^V(\widetilde{f}^C) = \left(\widetilde{X}(\widetilde{f})\right)^V$ şartını sağlayan $\widetilde{X}^V$ vektör alanına TM üzerindeki $\widetilde{X}$ vektör alanının d*üşey vektör alanı* denir.

$\widetilde{f} = f^C$ ve $\widetilde{X}$ vektör alanı, M manifoldu üzerindeki bir $X \in \Im_0^1(M)$ vektör alanının düşey yükseltilmişi olarak alınırsa

$$X^{VV}(f^{CC}) = (X(f))^{VV}$$

eşitliği ile elde edilen X^{VV} ye X vektör alanının TTM ye *ikinci mertebeden düşey yükseltilmişi* denir. TTM de indirgenmiş koordinatlara göre $X^V = (X^i)^{VV} \frac{\partial}{\partial t^i}$ lokal gösterime sahiptir (Civelek, 1988).

Tanım 2.4.9. $\widetilde{X} \in \Im_0^1(TM)$ ve $\widetilde{f} \in \Im_0^0(TM)$ olmak üzere, $\widetilde{X}^C(\widetilde{f}^C) = \left(\widetilde{X}(\widetilde{f})\right)^C$ şartını sağlayan TTM üzerindeki $\widetilde{X}^C$ vektör alanına TM üzerindeki $\widetilde{X}$ vektör alanının *tam yükseltilmişi* denir.

TTM de indirgenmiş koordinatlara göre

$$\widetilde{X}^C = \left(\widetilde{X}^i\right)^V \frac{\partial}{\partial x^i} + \left(\widetilde{X}^{n+i}\right)^V \frac{\partial}{\partial y^i} + \left(\widetilde{X}^i\right)^C \frac{\partial}{\partial z^i} + \left(\widetilde{X}^{n+i}\right)^C \frac{\partial}{\partial t^i}$$

lokal gösterime sahiptir. Eğer

$\widetilde{X} = X^V$ ise

$$X^{VC} = \left(X^i\right)^{VV} \frac{\partial}{\partial y^i} + \left(X^i\right)^{VC} \frac{\partial}{\partial t^i}$$

ve

$\widetilde{X} = X^C$ ise

$$X^{CC} = \left(X^i\right)^{VV} \frac{\partial}{\partial x^i} + \left(X^i\right)^{CV} \frac{\partial}{\partial y^i} + \left(X^i\right)^{VC} \frac{\partial}{\partial z^i} + \left(X^i\right)^{CC} \frac{\partial}{\partial t^i}$$

olur. Ayrıca

$$X^{CV} = \left(X^i\right)^{VV} \frac{\partial}{\partial z^i} + \left(X^i\right)^{CV} \frac{\partial}{\partial t^i}$$

biçiminde verilir (Civelek, 1988).

Tanım 2.4.10. $\widetilde{\omega} \in \Im_1^0(TM)$ ve $\widetilde{X} \in \Im_0^1(TM)$ olmak üzere $\widetilde{\omega}^V(\widetilde{X}^C) = \left(\widetilde{\omega}(\widetilde{X})\right)^V$ eşitliğini sağlayan $\widetilde{\omega}^V$ $1-$formuna TM manifoldu üzerindeki $\widetilde{\omega}$ 1-formunun *düşey yükseltilmişi* denir.

$\widetilde{\omega} = \omega^V$ ve $\widetilde{X} = X^C$ olarak alınırsa $\omega^{VV}(X^{CC}) = (\omega(X))^V$ eşitliğini sağlayan ω^{VV} ye ω 1-formunun *ikinci merteden düşey yükseltilmişi* denir. TTM de indirgenmiş koordinatlara göre

$$\omega^{VV} = (\omega_i)^{VV} dx^i$$

lokal gösterime sahiptir (Civelek, 1988).

Tanım 2.4.11. $\widetilde{\omega} \in \Im_1^0(TM)$ ve $\widetilde{X} \in \Im_0^1(TM)$ olmak üzere $\widetilde{\omega}^C(\widetilde{X}^C) = \left(\widetilde{\omega}(\widetilde{X})\right)^C$ eşitliğini sağlayan $\widetilde{\omega}^C$ $1-$formuna TM manifoldu üzerindeki $\widetilde{\omega}$ 1-formunun *tam yükseltilmişi* denir. TTM de indirgenmiş koordinatlara göre

$$\widetilde{\omega}^C = (\widetilde{\omega}_i)^C dx^i + (\widetilde{\omega}_{n+i})^C dy^i + (\widetilde{\omega}_i)^V dz^i + (\widetilde{\omega}_{n+i})^V dt^i$$

lokal gösterime sahiptir. Eğer

$\widetilde{\omega} = \omega^V$ ise

$$\omega^{VC} = (\omega_i)^{VC} dx^i + (\omega_i)^{VV} dz^i$$

ve

$\widetilde{\omega} = \omega^C$ ise

$$\omega^{CC} = (\omega_i)^{CC} dx^i + (\omega_i)^{VC} dy^i + (\omega_i)^{CV} dz^i + (\omega_i)^{VV} dt^i$$

olur. Ayrıca

$$\omega^{CV} = (\omega_i)^{CV} dx^i + (\omega_i)^{VV} dt^i$$

biçiminde verilir (Civelek, 1988).

Teorem 2.4.12. M manifoldu üzerinde herhangi bir p noktasının U açık komşuluğundaki $\{\frac{\partial}{\partial x^i}\}, i = 1, ..., n$ lokal baz vektör alanları ve $\{dx^i\}, i = 1, ..., n$ dual baz $1-$formlarının TTM manifoldu üzerine yükseltilmişleri

i) $\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)^{CC} = \frac{\partial}{\partial x^i}$,

ii) $\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)^{VC} = \frac{\partial}{\partial y^i}$,

iii) $\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)^{CV} = \frac{\partial}{\partial z^i}$,

iv) $\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)^{VV} = \frac{\partial}{\partial t^i}$,

v) $(dx^i)^{VV} = dx^i$,

vi) $(dx^i)^{CV} = dy^i$,

vii) $(dx^i)^{VC} = dz^i$,

viii) $(dx^i)^{CC} = dt^i$

dir (Civelek, 1988).

3. BİR SEMİ-RİEMANN MANİFOLDUN TANJANT DEMETİ ÜZERİNDEKİ SEMİ-RİEMANN METRİKLER

Bu bölümde, tanjant demet üzerindeki semi-Riemann metriklerin işaretleri incelenerek tanjant demetin Sasaki metriğine bağlı diferensiyel geometrisi üzerinde çalışıldı ve tanjant demetin yatay alt vektör demeti üzerinde tanımlı semi-Riemann metriğine bağlı pseudo-Finsler manifoldun geometrisi ele alındı. Ayrıca tanjant demet üzerine yükseltilmiş hiperyüzeylerin geometrisi incelendi.

3.1. TM Üzerindeki Semi-Riemann Metrikler

Bu alt bölümde Yano ve Ishıhara'nın kullandığı yükseltmeler göz önüne alınarak, M deki g semi-Riemann metriğine bağlı, TM de elde edilen metriklerin semi-Riemann metrikler olduğu gösterildi ve TM semi-Riemann manifoldunun indeksi tanımlanan herbir metrik için tablo şeklinde verildi.

(M, g) bir semi-Riemann manifoldu olmak üzere, $x^h; h = 1, ..., n$, $U \subset M$ açığı üzerinde tanımlı lokal koordinat fonksiyonları ve $(U, x^h); h = 1, ..., n$ lokal koordinat komşuluğuna göre g metrik tensörünün bileşenleri g_{ji} ve g_{ji} bileşenlerine bağlı Christoffel sembolünün bileşenleri de Γ^h_{ji} olsun. TM nin $\tau^{-1}(U)$ komşuluğunda (x^h, y^h) indirgenmiş koordinatlarına göre $\delta y^i = dy^i + N^i_j dx^j$ düşey dual baz 1-formu ve $N^i_j = y^k \Gamma^i_{kj}$ non lineer konneksiyon katsayıları için TM manifoldu üzerinde kovaryant tensörler

$$\begin{aligned} g^V &= g_{ij} dx^i dx^j \\ g^C &= 2 g_{ij} dx^i \delta y^j \\ g^{III} &= g_{ij} \delta y^i \delta y^j \end{aligned}$$

biçiminde tanımlıdır. g^V, g^C, g^{III} den elde edilen,

$$\begin{aligned}
g^C &= 2g_{ij}dx^i\delta y^j \\
g^F &= g^V + g^C = g_{ij}dx^i dx^j + 2g_{ij}dx^i\delta y^j \\
g^S &= g^V + g^{III} = g_{ij}dx^i dx^j + g_{ij}\delta y^i\delta y^j \\
g^K &= g^C + g^{III} = 2g_{ij}dx^i\delta y^j + g_{ij}\delta y^i\delta y^j
\end{aligned}$$

kovaryant tensörleri için aşağıdaki teoremler verilebilir.

Teorem 3.1.1. Eğer (M, g) semi-Riemann manifoldu ise (TM, g^C) de semi-Riemann manifoldudur (Yano, Ishıhara, 1973)

Teorem 3.1.2. Eğer (M, g) semi-Riemann manifoldu ise (TM, g^F) de semi-Riemann manifoldudur.

İspat: TM C^∞ manifoldu üzerinde vektör alanlarının cümlesi $\chi(TM)$ ve reel değerli C^∞ fonksiyonların halkası $C^\infty(TM, R)$ olmak üzere

$$g^F : \chi(TM) \times \chi(TM) \to C^\infty(TM, R)$$

dönüşümü

$$\begin{aligned}
g^F(X^V, Y^V) &= 0 \\
g^F(X^H, Y^V) &= g^F(X^V, Y^H) = g^C(X^H, Y^H) = (g(X, Y))^V
\end{aligned}$$

eşitlikleri yardımıyla tanımlıdır. (TM, g^F) nin semi-Riemann manifoldu olması için g^F metriğinin aşağıdaki şartları sağlaması gerekir.

i) 2-lineerlik: $\forall\alpha,\ \beta \in \mathbb{R}$, $\forall X, Y, Z \in \chi(M)$, ve TM üzerinde

$$\begin{aligned}
\widetilde{X} &= X^V + X^H, \\
\widetilde{Y} &= Y^V + Y^H, \\
\widetilde{Z} &= Z^V + Z^H
\end{aligned}$$

biçiminde verilen vektör alanları için

$$\begin{aligned} g^F(\alpha\widetilde{X}+\beta\widetilde{Y},\widetilde{Z}) &= g^F((\alpha X+\beta Y)^V+(\alpha X+\beta Y)^H, Z^V+Z^H) \\ &= g^F((\alpha X+\beta Y)^V, Z^H)+g^F((\alpha X+\beta Y)^H, Z^V) \\ &\quad +g^F((\alpha X+\beta Y)^H, Z^H) \\ &= \alpha g^F(X^V,Z^H)+\beta g^F(Y^V,Z^H)+\alpha g^F(X^H,Z^V) \\ &\quad +\beta g^F(Y^H,Z^V)+\alpha g^F(X^H,Z^H)+\beta g^F(Y^H,Z^H) \\ &= \alpha g^F(\widetilde{X},\widetilde{Z})+\beta g^F(\widetilde{Y},\widetilde{Z}) \end{aligned}$$

dir. Benzer şekilde

$$g^F(\widetilde{X},\alpha\widetilde{Y}+\beta\widetilde{Z})=\alpha g^F(\widetilde{X},\widetilde{Y})+\beta g^F(\widetilde{X},\widetilde{Z})$$

olduğu görülür.

ii) Simetriklik: $\forall\widetilde{X},\ \widetilde{Y}\in\chi(TM)$ için,

$$\begin{aligned} g^F(\widetilde{X},\widetilde{Y}) &= g^F((X^V+X^H),(Y^V+Y^H)) \\ &= g^F(X^V,Y^H)+g^F(X^H,Y^V)+g^F(X^H,Y^H) \\ &= g^F(Y^H,X^V)+g^F(Y^V,X^H)+g^F(Y^H,X^H) \\ &= g^F(\widetilde{Y},\widetilde{X}) \end{aligned}$$

simetriktir.

iii) Non-dejenerelik: g semi-Riemann metriği ise

$$\forall X\in\chi(M) \text{ için } g(X,Y)=0 \text{ iken } Y=0$$

dır. $\forall\widetilde{X}\in\chi(TM)$ ve $\widetilde{Y}=Y^V$ için

$$g^F(\widetilde{X},Y^V)=g^F(X^V+X^H,Y^V)=g^F(X^H,Y^V)=0$$

eşitliğinden

$$Y^V = 0$$

ve $\forall \widetilde{X} \in \chi(TM)$ ve $\widetilde{Y} = Y^H$ için

$$\begin{aligned} g^F(\widetilde{X}, Y^H) &= g^F(X^V + X^H, Y^H) \\ &= g^F(X^V, Y^H) + g^F(X^H, Y^H) = 0 \end{aligned}$$

eşitliğinden

$$Y^H = 0$$

olup

$$\forall \widetilde{X} \in \chi(TM) \text{ için } g^F(\widetilde{X}, \widetilde{Y}) = 0 \text{ iken } \widetilde{Y} = 0$$

bağıntısından TM üzerinde tanımlı g^F metriği non-dejeneredir.

Böylece (TM, g^F) bir semi-Riemann manifoldu olur.

Teorem 3.1.3. Eğer (M, g) semi-Riemann manifoldu ise (TM, g^S) semi-Riemann manifoldudur.

İspat: TM C^∞ manifoldu üzerinde vektör alanlarının cümlesi $\chi(TM)$ ve reel değerli C^∞ fonksiyonların halkası $C^\infty(TM, R)$ olmak üzere

$$g^S : \chi(TM) \times \chi(TM) \to C^\infty(TM, R)$$

dönüşümü

$$\begin{aligned} g^S(X^V, Y^V) &= g^S(X^H, Y^H) = (g(X, Y))^V \\ g^S(X^H, Y^V) &= g^S(X^V, Y^H) = 0 \end{aligned}$$

eşitlikleri yardımıyla tanımlıdır. (TM, g^S) nin semi-Riemann manifoldu olması için g^S metriğinin aşağıdaki şartları sağlaması gerekir.

i) *2-lineerlik:* $\forall\alpha,\ \beta\in\mathbb{R}$, $\forall X,Y,Z\in\chi(M)$, ve TM üzerinde

$$\begin{aligned}\widetilde{X} &= X^V+X^H,\\ \widetilde{Y} &= Y^V+Y^H,\\ \widetilde{Z} &= Z^V+Z^H\end{aligned}$$

biçiminde verilen vektör alanları için

$$\begin{aligned}g^S(\alpha\widetilde{X}+\beta\widetilde{Y},\widetilde{Z}) &= g^S((\alpha X+\beta Y)^V+(\alpha X+\beta Y)^H,Z^V+Z^H)\\ &= g^S((\alpha X+\beta Y)^H,Z^H)+g^S((\alpha X+\beta Y)^V,Z^V)\\ &= \alpha g^S(X^H,Z^H)+\beta g^S(Y^H,Z^H)+\alpha g^S(X^V,Z^V)+\beta g^S(Y^V,Z^V)\\ &= \alpha g^S(\widetilde{X},\widetilde{Z})+\beta g^S(\widetilde{Y},\widetilde{Z})\end{aligned}$$

dir. Benzer şekilde

$$g^S(\widetilde{X},\alpha\widetilde{Y}+\beta\widetilde{Z})=\alpha g^S(\widetilde{X},\widetilde{Y})+\beta g^S(\widetilde{X},\widetilde{Z})$$

olduğu görülür.

iii) *Simetriklik:* $\forall\widetilde{X},\ \widetilde{Y}\in\chi(TM)$ için,

$$\begin{aligned}g^S(\widetilde{X},\widetilde{Y}) &= g^S((X^V+X^H),(Y^V+Y^H))\\ &= g^S(X^H,Y^H)+g^S(X^V,Y^V)\\ &= g^S(Y^H,X^H)+g^S(Y^V,X^V)\\ &= g^S(\widetilde{Y},\widetilde{X})\end{aligned}$$

simetriktir.

iii) *Non-dejenerelik:* g semi-Riemann metriği ise

$$\forall X\in\chi(M) \text{ için } g(X,Y)=0 \text{ iken } Y=0$$

dır. $\forall \widetilde{X} \in \chi(TM)$ ve $\widetilde{Y} = Y^V$ için

$$g^S(\widetilde{X}, Y^V) = g^S(X^V + X^H, Y^V) = g^S(X^V, Y^V) = 0$$

eşitliğinden

$$Y^V = 0$$

ve $\forall \widetilde{X} \in \chi(TM)$ ve $\widetilde{Y} = Y^H$ için

$$g^S(\widetilde{X}, Y^H) = g^S(X^V + X^H, Y^H) = g^S(X^H, Y^H) = 0$$

eşitliğinden

$$Y^H = 0$$

olup

$$\forall \widetilde{X} \in \chi(TM) \text{ için } g^S(\widetilde{X}, \widetilde{Y}) = 0 \text{ iken } \widetilde{Y} = 0$$

bağıntısından TM üzerinde tanımlı g^S metriği non-dejeneredir.

Böylece (TM, g^S) bir semi-Riemann manifoldu olur.

Teorem 3.1.4. Eğer (M, g) semi-Riemann manifoldu ise (TM, g^K) de semi-Riemann manifoldudur.

İspat: TM C^∞ manifoldu üzerinde vektör alanlarının cümlesi $\chi(TM)$ ve reel değerli C^∞ fonksiyonların halkası $C^\infty(TM, R)$ olmak üzere

$$g^K : \chi(TM) \times \chi(TM) \to C^\infty(TM, R)$$

dönüşümü

$$\begin{aligned} g^K(X^H, Y^H) &= 0 \\ g^K(X^V, Y^V) &= g^K(X^H, Y^V) = g^K(X^V, Y^H) = (g(X, Y))^V \end{aligned}$$

eşitlikleri yardımıyla tanımlıdır. (TM, g^K) nın semi-Riemann manifoldu olması için g^K metriğinin aşağıdaki şartları sağlaması gerekir.

$i)$ *2-lineerlik:* $\forall\alpha,\ \beta \in \mathbb{R}$, $\forall X, Y, Z \in \chi(M)$, ve TM üzerinde

$$\begin{aligned}\widetilde{X} &= X^V + X^H,\\ \widetilde{Y} &= Y^V + Y^H,\\ \widetilde{Z} &= Z^V + Z^H\end{aligned}$$

biçiminde verilen vektör alanları için

$$\begin{aligned}g^K(\alpha\widetilde{X} + \beta\widetilde{Y}, \widetilde{Z}) &= g^K((\alpha X + \beta Y)^V + (\alpha X + \beta Y)^H, Z^V + Z^H)\\ &= g^K((\alpha X + \beta Y)^V, Z^V) + g^K((\alpha X + \beta Y)^H, Z^V)\\ &\quad + g^K((\alpha X + \beta Y)^V, Z^H)\\ &= \alpha g^K(X^V, Z^V) + \beta g^S(Y^V, Z^V) + \alpha g^K(X^H, Z^V)\\ &\quad + \beta g^K(Y^H, Z^V) + \alpha g^K(X^V, Z^H) + \beta g^K(Y^V, Z^H)\\ &= \alpha g^K(\widetilde{X}, \widetilde{Z}) + \beta g^K(\widetilde{Y}, \widetilde{Z})\end{aligned}$$

dir. Benzer şekilde

$$g^K(\widetilde{X}, \alpha\widetilde{Y} + \beta\widetilde{Z}) = \alpha g^K(\widetilde{X}, \widetilde{Y}) + \beta g^K(\widetilde{X}, \widetilde{Z})$$

olduğu görülür.

$ii)$ *Simetriklik:* $\forall\widetilde{X},\ \widetilde{Y} \in \chi(TM)$ için,

$$\begin{aligned}g^K(\widetilde{X}, \widetilde{Y}) &= g^K((X^V + X^H), (Y^V + Y^H))\\ &= g^K(X^V, Y^V) + g^K(X^H, Y^V) + g^K(X^V, Y^H)\\ &= g^K(Y^V, X^V) + g^K(Y^V, X^H) + g^K(Y^H, X^V)\\ &= g^K(\widetilde{Y}, \widetilde{X})\end{aligned}$$

simetriktir.

$iii)$ *Non-dejenerelik:* g semi-Riemann metriği ise

$$\forall X \in \chi(M) \text{ için } g(X, Y) = 0 \text{ iken } Y = 0$$

dır. $\forall \widetilde{X} \in \chi(TM)$ ve $\widetilde{Y} = Y^V$ için

$$\begin{aligned} g^K(\widetilde{X}, Y^V) &= g^K(X^V + X^H, Y^V) \\ &= g^K(X^V, Y^V) + g^K(X^H, Y^V) = 0 \end{aligned}$$

eşitliğinden

$$Y^V = 0$$

ve $\forall \widetilde{X} \in \chi(TM)$ ve $\widetilde{Y} = Y^H$ için

$$g^K(\widetilde{X}, Y^H) = g^K(X^V + X^H, Y^H) = g^K(X^V, Y^H) = 0$$

eşitliğinden

$$Y^H = 0$$

olup

$$\forall \widetilde{X} \in \chi(TM) \text{ için } g^K(\widetilde{X}, \widetilde{Y}) = 0 \text{ iken } \widetilde{Y} = 0$$

bağıntısından TM üzerinde tanımlı g^K metriği non-dejeneredir.

Böylece (TM, g^K) bir semi-Riemann manifoldu olur.

Bu semi-Riemann metriklere sahip olan TM manifoldunun indeksi aşağıdaki teoremler yardımı ile verilebilir.

Teorem 3.1.5. (M, g) bir Riemann manifoldu ise (TM, g^C) semi-Riemann manifoldunun indeksi n dir (Oproiu, Papaghiuc, 1987).

Teorem 3.1.6. (M, g) indeksi ν olan bir semi-Riemann manifoldu ise (TM, g^C) semi-Riemann manifoldunun indeksi n dir (Yano, Ishıhara, 1973).

Teorem 3.1.7. (M, g) indeksi $0 \leq \nu \leq n$ olan bir semi-Riemann manifoldu ise (TM, g^F) semi-Riemann manifoldunun indeksi n dir.

İspat: TM üzerinde tanımlı $g^F = g^V + g^C$ metriğinin indirgenmiş koordinatlara göre matris gösterimi,

$$g^F : \begin{bmatrix} g_{ij} + y^k \partial_k g_{ij} & g_{ij} \\ g_{ij} & 0 \end{bmatrix}$$

olup, normal koordinatlar gözönüne alınırsa,

$$g_{ij}(p) = \varepsilon_i \delta^i_j = I^n_\nu, \qquad \Gamma^k_{ij}(p) = 0$$

olduğundan g^F metriğinin matris gösterimi,

$$g^F : \begin{bmatrix} I^n_\nu & I^n_\nu \\ I^n_\nu & 0 \end{bmatrix}$$

olur. g^F metriğine karşılık gelen matris,

$$\det \left[\lambda I_{2nx2n} - g^C\right] = (\lambda^2 - \lambda - 1)^{n-\nu}(\lambda^2 + \lambda - 1)^\nu = 0$$

şeklindeki karekteristik denklemi $(+, -, +, -, ...)$ olacak şekilde n tane pozitif, n tane de negatif özdeğere sahip olduğundan, (TM, g^F) semi-Riemann manifoldunun indeksi n dir.

Teorem 3.1.8. (M, g) indeksi $0 \leq \nu \leq n$ olan bir semi-Riemann manifoldu ise (TM, g^S) semi-Riemann manifoldunun indeksi 2ν dür.

İspat: TM üzerinde tanımlı $g^S = g^V + g^{III}$ Sasaki metriğinin indirgenmiş koordinatlara göre matris gösterimi,

$$g^S : \begin{bmatrix} g_{ij} + g_{hk} N^h_i N^k_j & g_{jk} N^k_i \\ g_{ih} N^h_j & g_{ij} \end{bmatrix}$$

olup normal koordinatlar göz önüne alınırsa, g^S metriğinin matris gösterimi,

$$g^S : \begin{bmatrix} I^n_\nu & 0 \\ 0 & I^n_\nu \end{bmatrix}$$

olduğundan, (TM, g^S) nin indeksinin 2ν olduğu görülür.

Teorem 3.1.9. (M, g) indeksi $0 \leq \nu \leq n$ olan bir semi-Riemann manifoldu ise (TM, g^K) semi-Riemann manifoldunun indeksi n dir.

İspat: TM üzerinde tanımlı $g^K = g^C + g^{III}$ metriğinin indirgenmiş koordinatlara göre matris gösterimi,

$$g^S : \begin{bmatrix} y^k \partial_k g_{ij} + g_{hk} N_i^h N_j^k & g_{ij} + g_{jk} N_i^k \\ g_{ij} + g_{ih} N_j^h & g_{ij} \end{bmatrix}$$

olup normal koordinatlar göz önüne alınırsa, g^K metriğinin matris gösterimi,

$$g^K : \begin{bmatrix} 0 & I_\nu^n \\ I_\nu^n & I_\nu^n \end{bmatrix}$$

olur. g^K matrisi,

$$\det \left[\lambda I_{2nx2n} - g^K\right] = (\lambda^2 - \lambda - 1)^{n-\nu} (\lambda^2 + \lambda - 1)^{\nu} = 0$$

şeklindeki karekteristik denklemi $(+, -, +, -, ...)$ olacak şekilde n tane pozitif, n tane de negatif özdeğere sahip olduğundan, (TM, g^K) semi-Riemann manifoldunun indeksi n dir.

Böylece TM manifoldu üzerindeki bu metriklerin işaretleri aşağıdaki tablo yardımıyla verilir:

$n-boyutlu$ $M\ manifoldu$	$2n-boyutlu$ $TM\ manifoldu$			
g *metriği*	g^C	$g^F = g^V + g^C$	$g^S = g^V + g^{III}$	$g^K = g^C + g^H$
Riemann (R)	n *indeksli* $S.R$	n *indeksli* $S.R$	R	n *indeksli* $S.R$
ν *indeksli Semi Riemann* $(S.R)$	n *indeksli* $S.R$	n *indeksli* $S.R$	2ν *indeksli* $S.R$	n *indeksli* $S.R$

3.2. $\mathbf{g}^S$ Sasaki Semi-Riemann Metrikli TM Manifoldunun Diferensiyel Geometrisi

Bu alt bölümde, M deki tanjant vektörlerin g semi-Riemann metriğine bağlı causal karekteri ile bu vektörlerin TM ye düşey ve yatay yükseltilmesiyle elde edilen tanjant vektörlerin TM üzerindeki g^S Sasaki semi-Riemann metriğine bağlı causal karakterinin aynı olduğu bulundu. (TM, g^S) semi-Riemann manifoldunun Levi-Civita koneksiyonu ve Riemann eğrilik tensörü bileşenler cinsinden hesaplandı. (TM, g^S) semi-Riemann manifoldu üzerinde jeodeziklerin diferensiyel denklemleri elde edilerek M deki eğrilerin TM ye yatay ve doğal yükseltilmesiyle elde edilen eğriler için bazı sonuçlar verildi.

M, n-boyutlu C^∞ sınıftan, diferensiyellenebilir bir manifold ve TM de M manifoldunun tanjant demeti olsun. Eğer $(x^i), i = 1, ..., n$ $p \in M$ noktasının bir U komşuluğu içindeki lokal koordinatlar ise TM nin bir elemanı olan Y tanjant vektörü $(x^i, y^i), i = 1, ..., n$ şeklinde indirgenmiş koordinatlara sahiptir. Burada y^i ler, Y tanjant vektörünün lokal koordinat fonksiyonlarıdır. Böylece

$$(x^i, y^i) = (x^i, x^{\bar{i}}) = (x^A), i = 1, ..., n; \bar{i} = n + 1, ..., 2n; A = 1, ..., 2n,$$

$\tau^{-1}(U)$ üzerindeki lokal koordinatlar olarak ele alınabilir.

Bu bölümde, diferensiyel geometrik objelerin indisleri $i, j, ...$ ve $A, B, ...$ sembolleri ile veriliyorsa indirgenmiş koordinatlara göre gösterimi, $\alpha, \beta, ...$ sembolleri ile veriliyorsa uyarlanmış bazlara göre gösterimi ifade eder.

TM manifoldu üzerinde tanımlı vektör alanlarının ve g^S Sasaki semi-Riemann metriğinin indirgenmiş koordinatlar ve uyarlanmış koordinatlara göre matris gösterimleri aşağıdaki şekilde verilebilir.

g, M nin U koordinat komşuluğu içinde bileşenleri g_{ji} olan bir semi-Riemann metriği ve Γ^h_{ji}, g_{ji} den elde edilen Christoffel sembolleri olsun. $\Im^r_s(M)$ modülü, M içindeki C^∞ fonksiyonların halkası olan $C^\infty(M, \mathbb{R})$ üzerinde, tüm (r, s) tipinden C^∞ tensör alanlarını göstersin. $X \in \Im^1_0(M)$ için X in düşey yükseltilmişi

X^V, X in yatay yükseltilmişi X^H ve X in tam yükseltilmişi X^C indirgenmiş koordinatlara göre, sırasıyla,

$$X^V = \begin{pmatrix} 0 \\ X^h \end{pmatrix}, \qquad X^H = \begin{pmatrix} X^h \\ -y^i \Gamma_{ij}^h X^j \end{pmatrix}, \qquad X^C = \begin{pmatrix} X^h \\ -y^i \frac{\partial X^j}{\partial x^i} \end{pmatrix} \tag{3.2.1}$$

şeklinde tanımlıdır. M nin her $(U, x^h); h = 1, ..., n$ koordinat komşuluğu içinde

$$X_{(j)} = \frac{\partial}{\partial x^j}$$

lokal baz vektör alanları vardır. Bu lokal baz vektör alanının (3.2.1) de yerine konulmasıyla

$$\begin{aligned} \left(X_{(j)}\right)^H &= \left(B_j^A\right) = \begin{pmatrix} \delta_j^h \\ -y^i \Gamma_{ij}^h \end{pmatrix} = \frac{\partial}{\partial x^j} - y^i \Gamma_{ij}^h \frac{\partial}{\partial y^h} = \frac{\delta}{\delta x^j} \\ \left(X_{(j)}\right)^V &= \left(C_{\bar{j}}^A\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ \delta_j^h \end{pmatrix} = \frac{\partial}{\partial y^j}. \end{aligned}$$

eşitlikleri elde edilir. $\{\left(X_{(j)}\right)^H, \left(X_{(j)}\right)^V\} = \{\frac{\delta}{\delta x^j}, \frac{\partial}{\partial y^j}\}$ kümesine $\tau^{-1}(U) \subset TM$ nin *uyarlanmış lokal çatısı*, $\frac{\delta}{\delta x^j}$ ye *yatay baz vektör alanları* ve $\frac{\partial}{\partial y^j}$ ye *düşey baz vektör alanları* denir.

$$A_{(j)} = \left(B_j^A\right) = \left(X_{(j)}\right)^H, \qquad A_{(\bar{j})} = \left(C_{\bar{j}}^A\right) = \left(X_{(j)}\right)^V,$$

eşitlikleri yardımıyla TM nin uyarlanmış lokal çatısı, $\left\{A_{(\beta)}\right\} = \left\{A_{(j)}, A_{(\bar{j})}\right\}$ baz vektör alanları cinsinden yazılabilir. Ayrıca

$$\left(A_\beta^A\right) = \begin{pmatrix} B_j^A \\ C_{\bar{j}}^A \end{pmatrix} \quad ; \beta = 1, ..., 2n$$

matris formunda da yazılabilir. Bu matrisin tersi

$$(A_B^\alpha) = \begin{pmatrix} B_B^h & C_B^{\bar{h}} \end{pmatrix} \quad , \alpha = 1, ..., 2n$$

$\tau^{-1}(U) \subset TM$ nin uyarlanmış lokal dual çatısını gösterir. Bu matrisin bileşenleri aşağıdaki eşitlikleri sağlayacak şekilde

$$\begin{aligned} A^{(j)} &= \left(B_B^h\right) = \begin{pmatrix} \delta_j^h & 0 \end{pmatrix} = dx^j \\ A^{(\bar{j})} &= \left(C_B^{\bar{h}}\right) = \begin{pmatrix} y^i \Gamma_{ij}^h & \delta_j^h \end{pmatrix} = dy^j + y^i \Gamma_{ih}^j dx^h = \delta y^j \end{aligned} \tag{3.2.2}$$

TM tanjant demeti üzerinde 2n tane lokal 1-form tanımlar. Böylece $\left\{A^{(\alpha)}\right\} = \left\{A^{(j)}, A^{(\bar{j})}\right\}$ formundaki eş çatı, $\left\{A_{(\beta)}\right\}$ uyarlanmış çatısının duali olur. Yani

$$A_B^{(\alpha)} A_{(\beta)}^B = \delta_\beta^\alpha$$

dir. (3.2.2) deki dx^j, $\frac{\delta}{\delta x^j}$ nin dual baz 1-formu olduğu için *yatay dual baz 1-formu*, δy^j de, $\frac{\partial}{\partial y^j}$ nin dual baz 1-formu olduğundan *düşey dual baz 1-formu* olarak adlandırılır.

M manifoldu üzerindeki g Riemann ya da semi-Riemann metriğinin TM manifoldu üzerine diagonal yükseltilmişi, uyarlanmış koordinatlara göre

$$g^S = g_{\beta\alpha} dx^\beta \otimes dx^\alpha = g_{ji} dx^j \otimes dx^i + g_{ji} \delta y^j \otimes \delta y^i \tag{3.2.3}$$

ile ifade edilir. M deki g tensör alanının diagonal yükseltilmişi TM içinde $(0, 2)$ tipinde bir tensör alanı tanımlar. (3.2.2) ve (3.2.3) den g^S, $\{dx^j, \delta y^j\}$ uyarlanmış lokal dual çatısına göre

$$(g_{\beta\alpha}) = \begin{pmatrix} g_{ji} & 0 \\ 0 & g_{ji} \end{pmatrix} \tag{3.2.4}$$

ve (x^j, y^j) indirgenmiş koordinatlarına göre

$$(g_{AB}) = \begin{pmatrix} g_{ji} + g_{ks} \Gamma_{mj}^k \Gamma_{li}^s y^m y^l & g_{kj} \Gamma_{li}^k y^l \\ g_{si} \Gamma_{mj}^s y^m & g_{ji} \end{pmatrix} \tag{3.2.5}$$

şeklinde bileşenlere sahiptir.

Teorem 3.2.1. M manifoldu üzerindeki g metriği, indeksi ν olan bir semi-Riemann metriği ise TM manifoldu üzerine diagonal yükseltilmişi uyarlanmış koordinatlara göre

$$g^S = g_{\beta\alpha} dx^\beta \otimes dx^\alpha = g_{ji} dx^j \otimes dx^i + g_{ji} \delta y^j \otimes \delta y^i$$

ifadesine sahip, indeksi 2ν olan semi-Riemann metriğidir.

İspat: M manifoldunun bir p noktasını içine alan U komşuluğu, normal komşuluk olarak seçilirse $g_{ji}(p) = \varepsilon_j \delta_{ji}$ ve $\Gamma^k_{ji}(p) = 0$ olur. Burada

$$\varepsilon_j = \begin{cases} -1, & 1 \leq j \leq \nu \\ 1, & \nu + 1 \leq j \leq n \end{cases}$$

dir. M nin U normal komşuluğunda tanımlanan g semi-Riemann metriğinin diagonal yükseltilmişi, TM de $\{dx^j, \delta y^j\}$ uyarlanmış lokal dual çatısına göre

$$\left(g_{\beta\alpha}(\tau^{-1}\{p\})\right) = \begin{pmatrix} g_{ji}(p) & 0 \\ 0 & g_{ji}(p) \end{pmatrix}$$

lokal bileşenlere sahiptir. $g_{ji}(p) = \varepsilon_j \delta_{ji}$ olduğundan

$$g_{\beta\alpha} = \varepsilon_\beta \delta_{\beta\alpha}$$

olur. Burada

$$\varepsilon_\beta = \begin{cases} -1, & 1 \leq \beta \leq \nu \quad ; \quad n+1 \leq \beta \leq n+\nu \\ 1, & \nu + 1 \leq \beta \leq n \quad ; \quad n+\nu+1 \leq \beta \leq 2n \end{cases}$$

dir. Böylece

$$\varepsilon_j = \varepsilon_{n+j} \quad j = 1, ..., n$$

olduğu görülür. Böylece (TM, g^S) indeksi 2ν olan semi-Riemann metriğidir.

Teorem 3.2.2. M deki g semi-Riemann metriğin diagonal yükseltilmesiyle elde edilen TM deki g^S semi-Riemann metriği, TM nin uyarlanmış baz vektör alanları üzerinde

$$\begin{aligned} g^S(\frac{\delta}{\delta x^i}, \frac{\delta}{\delta x^j}) &= g^S(\frac{\partial}{\partial y^i}, \frac{\partial}{\partial y^j}) = (g_{ij})^V , \\ g^S(\frac{\partial}{\partial y^i}, \frac{\delta}{\delta x^j}) &= g^S(\frac{\delta}{\delta x^i}, \frac{\partial}{\partial y^j}) = 0 \end{aligned}$$

eşitlikleriyle tanımlıdır.

İspat: $g^S = g_{\beta\alpha} dx^\beta \otimes dx^\alpha = (g_{kh})^V dx^k \otimes dx^h + (g_{kh})^V \delta y^k \otimes \delta y^h$ semi-Riemann metriği için

$$\begin{aligned} dx^j(\frac{\delta}{\delta x^i}) &= \delta_i^j, \qquad dx^j(\frac{\partial}{\partial y^i}) = 0 \\ \delta y^j(\frac{\delta}{\delta x^i}) &= 0, \qquad \delta y^j(\frac{\partial}{\partial y^i}) = \delta_i^j \end{aligned}$$

eşitliklerinin kullanılmasıyla

$$\begin{aligned} g^S(\frac{\delta}{\delta x^i}, \frac{\delta}{\delta x^j}) &= (g_{kh})^V dx^k(\frac{\delta}{\delta x^i}) dx^h(\frac{\delta}{\delta x^j}) + (g_{kh})^V \underbrace{\delta y^k(\frac{\delta}{\delta x^i})}_{0} \underbrace{\delta y^h(\frac{\delta}{\delta x^j})}_{0} \\ &= (g_{kh})^V \delta_i^k \delta_j^h = (g_{ij})^V , \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g^S(\frac{\partial}{\partial y^i}, \frac{\partial}{\partial y^j}) &= (g_{kh})^V \underbrace{dx^k(\frac{\partial}{\partial y^i})}_{0} \underbrace{dx^h(\frac{\partial}{\partial y^j})}_{0} + (g_{kh})^V \delta y^k(\frac{\partial}{\partial y^i}) \delta y^h(\frac{\partial}{\partial y^j}) \\ &= (g_{kh})^V \delta_i^k \delta_j^h = (g_{ij})^V , \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g^S(\frac{\partial}{\partial y^i}, \frac{\delta}{\delta x^j}) &= (g_{kh})^V \underbrace{dx^k(\frac{\partial}{\partial y^i})}_{0} dx^h(\frac{\delta}{\delta x^j}) + (g_{kh})^V \delta y^k(\frac{\partial}{\partial y^i}) \underbrace{\delta y^h(\frac{\delta}{\delta x^j})}_{0} \\ &= 0, \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
g^S(\frac{\delta}{\delta x^i},\frac{\partial}{\partial y^j}) &= (g_{kh})^V\, dx^k(\frac{\delta}{\delta x^i})\, \underbrace{dx^h(\frac{\partial}{\partial y^j})}_{0} + (g_{kh})^V\, \underbrace{\delta y^k(\frac{\delta}{\delta x^i})}_{0}\, \delta y^h(\frac{\partial}{\partial y^j}) \\
&= 0
\end{aligned}
$$

olduğu görülür.

Teorem 3.2.3. $\forall p \in M$, $\forall X_p$, $z \in T_p(M), \tau(z) = p$ olacak şekilde $\forall X_z^V, X_z^H \in T_z(TM)$ ve (TM, g^S) semi-Riemann manifoldu olsun.

i) X_p, (M,g) semi-Riemann manifoldu için space-like bir vektör ise X_z^V ve X_z^H, (TM, g^S) semi-Riemann manifoldu için space-like vektördür,

ii) X_p, (M,g) semi-Riemann manifoldu için time-like bir vektör ise X_z^V ve X_z^H, (TM, g^S) semi-Riemann manifoldu için time-like vektördür,

iii) X_p, (M,g) semi-Riemann manifoldu için light-like (null) bir vektör ise X_z^V ve X_z^H, (TM, g^S) semi-Riemann manifoldu için light-like (null) vektördür.

İspat: X_p space-like bir vektör ise $g(X_p, X_p) > 0$ veya $X_p = 0$ olur. Teorem 3.2.2 yardımıyla

$$
\begin{aligned}
g^S(X_z^V, X_z^V) &> 0 \text{ veya } X_z^V = 0 \\
g^S(X_z^H, X_z^H) &> 0 \text{ veya } X_z^V = 0
\end{aligned}
$$

elde edilir. Böylece, X_z^V, X_z^H tanjant vektörleri space-like vektörlerdir. Diğer iddialarda benzer şekilde ispatlanabilir.

Teorem 3.2.4. $z \in TM$ noktası üzerindeki $T_z(TM)$ tanjant vektör uzayını geren $\frac{\delta}{\delta x^i}, \frac{\partial}{\partial y^i}$ yatay ve düşey baz vektör alanları için,
i) $[\frac{\delta}{\delta x^i}, \frac{\delta}{\delta x^j}] = y^l R^h_{lji} \frac{\partial}{\partial y^h}$,
ii) $[\frac{\delta}{\delta x^i}, \frac{\partial}{\partial y^j}] = \Gamma^h_{ji} \frac{\partial}{\partial y^h}$,
iii) $[\frac{\partial}{\partial y^i}, \frac{\partial}{\partial y^j}] = 0$
olur.

İspat: (i)

$$
\begin{aligned}
[\frac{\delta}{\delta x^i},\frac{\delta}{\delta x^j}] &= [\frac{\partial}{\partial x^i}-N_i^h\frac{\partial}{\partial y^h},\frac{\partial}{\partial x^j}-N_j^k\frac{\partial}{\partial y^k}], \qquad N_i^h=y^l\Gamma_{li}^h\\
&= \frac{\partial N_i^h}{\partial x^j}\frac{\partial}{\partial y^h}-\underbrace{\frac{\partial N_j^k}{\partial x^i}\frac{\partial}{\partial y^k}}_{k\leftrightarrow h}+\underbrace{N_i^h\frac{\partial N_j^k}{\partial y^h}\frac{\partial}{\partial y^k}}_{k\leftrightarrow h}-N_j^k\frac{\partial N_i^h}{\partial y^k}\frac{\partial}{\partial y^h}\\
&= y^l\{\frac{\partial\Gamma_{li}^h}{\partial x^j}-\frac{\partial\Gamma_{lj}^h}{\partial x^i}+\Gamma_{li}^k\Gamma_{kj}^h-\Gamma_{lj}^k\Gamma_{ki}^h\}\frac{\partial}{\partial y^h}\\
&= y^lR_{lji}^h\frac{\partial}{\partial y^h}
\end{aligned}
$$

dır

$ii)$

$$
\begin{aligned}
[\frac{\delta}{\delta x^i},\frac{\partial}{\partial y^j}] &= [\frac{\partial}{\partial x^i}-N_i^h\frac{\partial}{\partial y^h},\frac{\partial}{\partial y^j}]=\frac{\partial N_i^h}{\partial y^j}\frac{\partial}{\partial y^h}\\
&= \Gamma_{ji}^h\frac{\partial}{\partial y^h}
\end{aligned}
$$

dır

$iii)$

$$
\begin{aligned}
[\frac{\partial}{\partial y^i},\frac{\partial}{\partial y^j}](f^C) &= \frac{\partial}{\partial y^i}(\frac{\partial}{\partial y^j}(f^C))-\frac{\partial}{\partial y^j}(\frac{\partial}{\partial y^i}(f^C))\\
&= \underbrace{\frac{\partial}{\partial y^i}(\frac{\partial f}{\partial x^j})^V}_{0}-\underbrace{\frac{\partial}{\partial y^j}(\frac{\partial f}{\partial x^i})^V}_{0}=0
\end{aligned}
$$

dır

Teorem 3.2.5. (M,g), ∇ Levi-Civita koneksiyonuna sahip bir semi-Riemann manifold ve (TM,g^S) de $\widetilde{\nabla}$ Levi-Civita koneksiyonuna sahip bir semi-Riemann manifold olsun. $\delta_i=\frac{\delta}{\delta x^i}$ ve $\dot{\partial}_i=\frac{\partial}{\partial y^i}$ olmak üzere $\widetilde{\nabla}$ Levi-Civita koneksiyonunun bileşenleri,

$$
\begin{aligned}
\widetilde{\nabla}_{\delta_i}\delta_j &= \widetilde{\Gamma}_{ij}^k\delta_k+\widetilde{\Gamma}_{ij}^{\bar{k}}\,\dot{\partial}_k, \qquad \widetilde{\nabla}_{\delta_i}\,\dot{\partial}_j=\widetilde{\Gamma}_{i\bar{j}}^k\delta_k+\widetilde{\Gamma}_{i\bar{j}}^{\bar{k}}\,\dot{\partial}_k\\
\widetilde{\nabla}_{\dot{\partial}_i}\delta_j &= \widetilde{\Gamma}_{\bar{i}j}^k\delta_k+\widetilde{\Gamma}_{\bar{i}j}^{\bar{k}}\,\dot{\partial}_k, \qquad \widetilde{\nabla}_{\dot{\partial}_i}\,\dot{\partial}_j=\widetilde{\Gamma}_{\bar{i}\bar{j}}^k\delta_k+\widetilde{\Gamma}_{\bar{i}\bar{j}}^{\bar{k}}\,\dot{\partial}_k
\end{aligned}
$$

olup, Γ_{ij}^k, M manifoldu üzerinde g_{ij} bileşenleri tarafından belirlenen Christoffel sembolleri ve R_{hji}^k da ∇ Levi-Civita koneksiyonuna bağlı Riemann eğrilik tensörünün bileşenleri olmak üzere $\widetilde{\nabla}$ koneksiyonunun katsayıları,

$$\begin{aligned} \widetilde{\Gamma}_{ij}^{k} &= \Gamma_{ij}^{k}, \quad \widetilde{\Gamma}_{ij}^{\overline{k}} = -\frac{1}{2}R_{hji}^{k}y^{h}, \quad \widetilde{\Gamma}_{i\overline{j}}^{k} = -\frac{1}{2}R_{hji}^{k}y^{h}, \quad \widetilde{\Gamma}_{i\overline{j}}^{\overline{k}} = \Gamma_{ij}^{k} \\ \widetilde{\Gamma}_{\overline{i}j}^{k} &= \frac{1}{2}R_{hji}^{k}y^{h}, \quad \widetilde{\Gamma}_{\overline{i}j}^{\overline{k}} = 0, \quad \widetilde{\Gamma}_{\overline{i}\overline{j}}^{k} = 0, \quad \widetilde{\Gamma}_{\overline{i}\overline{j}}^{\overline{k}} = 0 \end{aligned} \tag{3.2.6}$$

dır.

İspat: Sadece $\widetilde{\nabla}$ Levi-Civita koneksiyonunun $\widetilde{\Gamma}_{ij}^k$ katsayısı için bir ispat verilecektir.

$\widetilde{\nabla}$, (TM, g^S) semi-Riemann manifoldunun Levi-Civita koneksiyonu olduğu için

$$\begin{aligned} 2g^S(\widetilde{\nabla}_{\delta_i}\delta_j, \delta_h) &= \delta_i g^S(\delta_j, \delta_h) + \delta_j g^S(\delta_h, \delta_i) - \delta_h g^S(\delta_i, \delta_j) \\ &\quad - g^S(\delta_i, [\delta_j, \delta_h]) + g^S(\delta_j, [\delta_h, \delta_i]) + g^S(\delta_h, [\delta_i, \delta_j]), \end{aligned}$$

Kozsul formülünü sağlar. Teorem 3.2.2, Teorem 3.2.4 ve düşey vektör alanlarının bir fonksiyonun düşey yükseltilmişi üzerinde sıfır değerini alması tanımı gereğince

$$2g^S(\widetilde{\Gamma}_{ij}^k \delta_k, \delta_h) = \frac{\partial g_{jh}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{hi}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^h}$$

olup,

$$\widetilde{\Gamma}_{ij}^k = \frac{1}{2} g^{kh} \left(\frac{\partial g_{jh}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{hi}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^h} \right)$$

dır. Böylece, $\widetilde{\Gamma}_{ij}^k = \Gamma_{ij}^k$ eşitliği elde edilir. Diğerleri de benzer şekilde ispatlanabilir.

Teorem 3.2.6. (TM, g^S) semi-Riemann manifoldunun $\widetilde{\nabla}$ Levi-Civita koneksiyonuna bağlı $\widetilde{K}$ Riemann eğrilik tensörünün bileşenler cinsinden ifadesi

$$\begin{aligned} \widetilde{K}(\delta_i, \delta_j)\delta_k &= \widetilde{K}_{kij}^h \delta_h + \widetilde{K}_{kij}^{\overline{h}}\, \dot{\partial}_h, \quad \widetilde{K}(\delta_i, \delta_j)\, \dot{\partial}_k = \widetilde{K}_{\overline{k}ij}^h \delta_h + \widetilde{K}_{\overline{k}ij}^{\overline{h}}\, \dot{\partial}_h \\ \widetilde{K}(\delta_i, \dot{\partial}_j)\delta_k &= \widetilde{K}_{ki\overline{j}}^h \delta_h + \widetilde{K}_{ki\overline{j}}^{\overline{h}}\, \dot{\partial}_h, \quad \widetilde{K}(\delta_i, \dot{\partial}_j)\, \dot{\partial}_k = \widetilde{K}_{\overline{k}i\overline{j}}^h \delta_h + \widetilde{K}_{\overline{k}i\overline{j}}^{\overline{h}}\, \dot{\partial}_h \end{aligned}$$

$$\widetilde{K}(\dot{\partial}_i,\dot{\partial}_j)\delta_k = \widetilde{K}^{h}_{k\bar{i}\bar{j}}\delta_h + \widetilde{K}^{\bar{h}}_{k\bar{i}\bar{j}}\,\dot{\partial}_h, \quad \widetilde{K}(\dot{\partial}_i,\dot{\partial}_j)\,\dot{\partial}_k = \widetilde{K}^{h}_{\bar{k}\bar{i}\bar{j}}\delta_h + \widetilde{K}^{\bar{h}}_{\bar{k}\bar{i}\bar{j}}\,\dot{\partial}_h$$

olmak üzere sıfırdan farklı bileşenleri

$$\begin{aligned}
\widetilde{K}^{h}_{kij} &= R^h_{kij} + \frac{1}{4}(R^a_{tkj}R^h_{sai} - R^a_{tki}R^h_{saj})y^t y^s - \frac{1}{2}(R^a_{tji}R^h_{ska})y^t y^s \\
\widetilde{K}^{\bar{h}}_{kij} &= \widetilde{K}^{h}_{\bar{k}ij} = -\frac{1}{2}(\nabla_i R^h_{tkj} - \nabla_j R^h_{tki})y^t \\
\widetilde{K}^{\bar{h}}_{\bar{k}ij} &= \widetilde{K}^{h}_{k\bar{i}\bar{j}} = R^h_{kij} + \frac{1}{4}(R^a_{tkj}R^h_{sai} - R^a_{tki}R^h_{saj})y^t y^s \\
\widetilde{K}^{\bar{h}}_{ki\bar{j}} &= \widetilde{K}^{h}_{\bar{k}i\bar{j}} = \frac{1}{2}R^h_{jki} - \frac{1}{4}R^a_{tjk}R^h_{sai}y^t y^s \\
\widetilde{K}^{h}_{ki\bar{j}} &= -\frac{1}{2}(\nabla_i R^h_{tkj})y^t
\end{aligned}$$

dir. Burada

$$\nabla_i R^h_{tkj} = \partial_i R^h_{tkj} - \Gamma^a_{it}R^h_{akj} - \Gamma^a_{ik}R^h_{taj} - \Gamma^a_{ij}R^h_{tka} + \Gamma^h_{ia}R^a_{tkj},$$

Riemann eğrilik tensörünün kovaryant türevidir.

İspat:

$$\begin{aligned}
K(\delta_i,\delta_j)\delta_k &= \widetilde{\nabla}_{\delta_i}\widetilde{\nabla}_{\delta_j}\delta_k - \widetilde{\nabla}_{\delta_j}\widetilde{\nabla}_{\delta_i}\delta_k - \widetilde{\nabla}_{[\delta_i,\delta_j]}\delta_k \\
&= \widetilde{\nabla}_{\delta_i}\{\Gamma^h_{jk}\delta_h - \frac{1}{2}y^t R^h_{tkj}\,\dot{\partial}_h\} - \widetilde{\nabla}_{\delta_j}\{\Gamma^h_{ik}\delta_h - \frac{1}{2}y^t R^h_{tki}\,\dot{\partial}_h\} - y^t R^h_{tji}\widetilde{\nabla}_{\dot{\partial}_h}\delta_k \\
&= \{R^h_{kij} + \frac{1}{4}(R^a_{tkj}R^h_{sai} - R^a_{tki}R^h_{saj})y^t y^s - \frac{1}{2}(R^a_{tji}R^h_{ska})y^t y^s\}\delta_h - \\
&\quad -\frac{1}{2}(\nabla_i R^h_{tkj} - \nabla_j R^h_{tki})y^t\,\dot{\partial}_h
\end{aligned}$$

olup diğerleri de benzer şekilde gösterilebilir.

Sonuç 3.2.7. (TM, g^S) semi-Riemann manifoldunun flat olması için gerek ve yeter şart (M, g) semi-Riemann manifoldunun flat olmasıdır.

Tanım 3.2.8. c, (M, g) semi-Riemann manifoldunda $x^h = x^h(t)$ ile lokal olarak ifade edilen bir eğri ve $X^h(t)$ de c boyunca tanımlı paralel bir vektör alanı ise

(TM, g^S) semi-Riemann manifoldu üzerinde

$$x^h = x^h(t) \qquad ; \qquad y^h = X^h(t) \tag{3.2.7}$$

bileşenleri ile verilen $\widetilde{c}$ eğrisine M deki c eğrisinin *yatay yükseltilmişi* denir. Eğer $y^h = X^h(t)$ vektör alanı $X^h = \frac{dx^h}{dt}$ olacak şekilde c eğrisine teğet vektör alanı ise (3.2.7) ile tanımlı $\widetilde{c}$ eğrisine M üzerinde bir c eğrisinin *doğal yükseltilmişi* denir (Yano, Ishıhara, 1973).

Teorem 3.2.9. Eğer t, g^S semi-Riemann metriğine sahip TM üzerinde bir eğrinin yay uzunluğu parametresi ise TM üzerinde jeodeziklerin denklemleri uyarlanmış koordinatlara göre

$$\begin{aligned} \frac{\delta^2 x^h}{dt^2} + y^k R^h_{kji} \frac{\delta y^j}{dt} \frac{dx^i}{dt} &= 0, \\ \frac{\delta^2 y^h}{dt^2} &= 0 \end{aligned}$$

dir.

İspat: t, yay uzunluğu parametresine göre TM üzerinde jeodeziklerin denklemleri indirgenmiş koordinatlara göre

$$\frac{\delta^2 x^A}{dt^2} = \frac{d^2 x^A}{dt^2} + \widetilde{\Gamma}^A_{CB} \frac{dx^C}{dt} \frac{dx^B}{dt} = 0$$

olur. Bu denklem

$$\begin{aligned} \theta^h &= B^h_A dx^A = dx^h, \\ \theta^{\overline{h}} &= C^{\overline{h}}_A dx^A = \delta y^h \end{aligned} \tag{3.2.8}$$

ve

$$\begin{aligned} \frac{\theta^h}{dt} &= \frac{dx^h}{dt}, \\ \frac{\theta^{\overline{h}}}{dt} &= \frac{\delta y^h}{dt} \end{aligned}$$

eşitlikleri yardımıyla

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\theta^\alpha}{dt}\right) + \widetilde{\Gamma}^\alpha_{\gamma\beta} \frac{\theta^\gamma}{dt} \frac{\theta^\beta}{dt} = 0 \tag{3.2.9}$$

uyarlanmış koordinatlar cinsinden ifade edilir. $\widetilde{\Gamma}$ nın (3.2.6) daki bileşenleri sayesinde (TM, g^S) semi-Riemann manifoldu üzerindeki jeodeziklerin denklemleri

$$\begin{aligned} \frac{\delta^2 x^h}{dt^2} + y^k R^h_{kji} \frac{\delta y^j}{dt} \frac{dx^i}{dt} &= 0, \qquad (3.2.10) \\ \frac{\delta^2 y^h}{dt^2} &= 0 \qquad (3.2.11) \end{aligned}$$

biçiminde elde edilir.

Tanım 3.2.10. (TM, g^S) semi-Riemann manifoldu üzerinde t yay uzunluğu parametresine göre $\theta^\gamma, \gamma = 1, ..., 2n$ lokal bileşenlerine sahip bir $\widetilde{c}$ eğrisine

$$g_{\beta\alpha} \frac{\theta^\beta}{dt} \frac{\theta^\alpha}{dt} = \varepsilon = \begin{cases} 1, & \text{space-like bir eğri,} \\ -1, & \text{time-like bir eğri,} \\ 0, & \text{light-like bir eğri,} \end{cases}$$

denir.

$g_{\beta\alpha} \frac{\theta^\beta}{dt} \frac{\theta^\alpha}{dt} = \varepsilon$ metriği $\varepsilon \neq 0$ için

$$g_{ji} \frac{dx^j}{dt} \frac{dx^i}{dt} + g_{ji} \frac{\delta y^j}{dt} \frac{\delta y^i}{dt} = \varepsilon = \mp 1$$

olur. (3.2.11) den

$$\frac{\delta}{dt} \left(g_{ji} \frac{\delta y^j}{dt} \frac{\delta y^i}{dt} \right) = 0$$

dır. s, M deki yay uzunluğu parametresi olmak üzere

$$\left(\frac{ds}{dt} \right)^2 = g_{ji} \frac{dx^j}{dt} \frac{dx^i}{dt} = sbt$$

olup, s ile t lineer bağımlıdır. Bu nedenle özdeş kabul edilebilir. TM üzerinde jeodezik bir eğri $x^h = sbt$ olacak şekilde tanımlanıyorsa (3.2.11) eşitliği, $\frac{dx^h}{dt} = 0$ olduğundan

$$\frac{d^2 y^h}{dt^2} = 0$$

haline gelir. Böylece $\frac{d^2 y^h}{dt^2} = 0$ diferensiyel denklem sisteminin çözümleri a^h, b^h

keyfi sabitler olmak üzere $y^h = a^h t + b^h$ olur.

Sonuç 3.2.11. Eğer bir jeodezik eğri, g^S semi-Riemann metrikli TM nin fibreleri üzerinde sağlanıyorsa, (x^h, y^h) indirgenmiş koordinatlarına göre a^h, b^h, c^h keyfi sabitler olmak üzere $x^h = c^h, y^h = a^h t + b^h$ lineer denklemleri ile ifade edilir.

Sonuç 3.2.12. (M, g) semi-Riemann manifoldu üzerindeki bir jeodeziğin yatay yükseltilmişi, (TM, g^S) semi-Riemann manifoldu üzerinde yine bir jeodezikdir.

Teorem 3.2.13. (M, g) deki $x^h = x^h(t)$ ile tanımlanan bir eğrinin doğal yükseltilmişinin (TM, g^S) semi-Riemann manifoldu üzerinde bir jeodezik olması için gerek ve yeter şart

$$\frac{\delta^2 x^h}{dt^2} + R^h_{kji}\frac{dx^k}{dt}\frac{\delta^2 x^j}{dt^2}\frac{dx^i}{dt} = 0, \tag{3.2.12}$$

$$\frac{\delta^3 x^h}{dt^3} = 0 \tag{3.2.13}$$

olmalıdır.

İspat: (3.2.8) ve (3.2.9) denklemlerinde y^h yerine $\frac{dx^h}{dt}$ konulmasıyla (3.2.12) ve (3.2.13) denklemleri elde edilir.

Sonuç 3.2.14. (M, g) semi-Riemann manifoldu üzerindeki herhangi bir jeodeziğin doğal yükseltilmişi (TM, g^S) semi-Riemann manifoldu üzerinde bir jeodezikdir.

Teorem 3.2.15. (M, g) semi-Riemann manifoldundaki bir c eğrisinin doğal yükseltilmişi g^S semi-Riemann metrikli TM de bir jeodezik ise c, M üzerinde bir jeodeziktir veya c nin birinci eğriliği sabit ve c nin her noktasında oskülatör düzlemle tanımlı kesitine göre M nin Riemann kesitsel eğriliği sabittir.

İspat: (M, g) de $x^h = x^h(t)$ lokal bileşenleri ile verilen bir c eğrisinin doğal yükseltilmişi $\widetilde{c}$, yay uzunluğu parametresi t olan (TM, g^S) semi-Riemann manifoldu üzerinde bir jeodezik ise (3.2.13) eşitliğinden

$$\frac{\delta}{dt}\left(g_{ji}\frac{\delta^2 x^j}{dt^2}\frac{\delta^2 x^i}{dt^2}\right) = 0 \tag{3.2.14}$$

olur. Bu denklemin sıfıra eşit olması iki farklı şart altında mümkündür. Birincisi,

$$\frac{\delta^2 x^h}{dt^2} = 0$$

yani $x^h = x^h(t)$ lokal bileşenleri ile verilen bir c eğrisi M de bir jeodeziktir.

İkincisi, (3.2.14) den c eğrisinin birinci eğriliği sabittir. $\frac{\delta^2 x^h}{dt^2}$ vektörü yönünde

$$\frac{\delta^2 x^h}{dt^2} = \rho Y^h, \qquad \rho = sbt.$$

eşitliğini sağlayan birim vektör Y^h ve M üzerindeki c eğrisinin teğeti yönündeki birim vektör $X^h = \frac{dx^h}{dt}$ alınarak bu vektörler (3.2.12) eşitliğinde yerine konulursa

$$Y^h + R^h_{kji} X^k Y^j X^i = 0$$

bulunur. Bu ifade Y^h ile kontraksiyona uğratılırsa,

$$R_{kjih} X^k Y^j X^i Y^h = -\varepsilon, \qquad \varepsilon \neq 0$$

elde edilir. Böylece X^h birim teğet vektörü ile Y^h birim normal vektörü tarafından gerilen $\mathcal{P}$ oskülatör düzleminin kesitsel eğriliği

$$\mathcal{K}(\mathcal{P}) = R_{kjih} X^k Y^j X^i Y^h = -\varepsilon, \qquad \varepsilon \neq 0$$

sabittir.

3.3. Bir Pseudo-Finsler Manifoldun Yatay Demetlerinin Geometrisi

Bu alt bölümde, M bir pseudo-Finsler manifold ve g, M manifoldu üzerinde bir semi-Riemann metrik olmak üzere, g^V metriği, TM nin yatay altvektör demeti üzerinde tanımlı bir semi-Riemann metrik olarak düşünüldü.

TM nin leafları üzerinde ξ birim yatay vektörünü normal kabul eden bir hiperyüzeyin geometrisi incelendi.

HTM, M pseudo-Finsler manifoldunun TM tanjant demeti üzerinde n boyutlu yatay altvektör demeti, $C^\infty(TM,\mathbb{R})$, TM üzerindeki C^∞ fonksiyonların halkası ve $\Gamma(HTM)$, HTM nin tüm diferensiyellenebilir kesitlerinin $C^\infty(TM,\mathbb{R})$ modülü olsun.

c, n boyutlu M manifoldunun bir eğrisi ve g de M nin bir semi-Riemann metriği olsun. c eğrisi M nin 1 boyutlu altmanifoldu olduğu için c nin teğet vektör alanı 1 boyutlu dağılım belirler. Bu dağılımın integral eğrileri M nin 1 boyutlu bir altmanifoldudur.

c eğrisinin yatay yükseltilmişi olan $\widetilde{c}$ eğrisinin teğet vektör alanı TM manifoldunun yatay alt vektör demetinde

$$V = y^i \frac{\delta}{\delta x^i}, \qquad y^i = \frac{dx^i}{dt}$$

ile tanımlı yatay bir vektör alanıdır. Bu vektör alanının integral eğrileri TM nin 1 boyutlu altmanifoldu olup HTM üzerinde bu vektör alanına g^V semi-Riemann metriğine göre dik olan vektörler TM nin leaflarının üzerinde bir hiperyüzey tanımlar.

c eğrisinin yatay yükseltilmişi olan $\widetilde{c}$ eğrisini oluşturan tüm noktalar, TM manifoldunun $x^h = a^h; h = 1, ..., n$ bileşenleri sabit (a^h, y^h) fibrelerine g^S semi-Riemann metriğine göre dik olan $(x^h, Z^h), h = 1, ..., n$ leaflarının ailesini oluşturur. Burada Z^h, c eğrisi boyunca paralel vektör alanının bileşenleridir. TM manifoldunun fibrelerine teğet olan vektörler VTM dağılımına ait vektörler ve leaflarına teğet olan vektörler de HTM dağılımına ait vektörlerdir.

g^V dönüşümü, $\forall X, Y \in \Gamma(HTM)$ için

$$\begin{aligned} g^V : \ \Gamma(HTM) \times \Gamma(HTM) &\rightarrow C^\infty(TM,\mathbb{R}) \\ (X,Y) &\rightarrow g^V(X,Y) \end{aligned}$$

olacak şekilde HTM nin tüm diferensiyellenebilir kesitlerinin üzerinde non-dejenere, simetrik ve 2-lineer bir dönüşüm olup V üzerindeki değeri TM de $L \in C^{\infty}(TM, \mathbb{R})$ fonksiyonunu $\forall(x,y) \in TM$ noktası için

$$L(x,y) = g^V(V,V)(x,y) = (g_{ij})^V(x,y)y^iy^j$$

eşitliğini sağlayacak biçimde tanımlar. Burada $(g_{ij}) \in \Im_0^0(M)$ ve $(g_{ij})^V \in \Im_0^0(TM)$ olduğundan, $(x) \in M$ ve $(x,y) \in TM$ noktaları için

$$(g_{ij})^V(x,y) = g_{ij}(x) \qquad (3.3.1)$$

olur. Böylece $L(x,y) = g_{ij}(x)y^iy^j$ fonksiyonu, TM nin leafları üzerinde reel değerli bir fonksiyondur.

M manifoldu, tanjant demetinin yatay altvektör demeti üzerinde tanımlı L fonksiyonu ile, bir pseudo Finsler manifold olur.

Pseudo-Finsler manifold tanımının şartlarının sağlandığı aşağıdaki gibi gösterilebilir.

$L : TM \to \mathbb{R}$ fonksiyonu diferensiyellenebilir bir fonksiyondur. Çünkü φ, TM nin U' açığı üzerinde $U' \to \mathbb{R}^{2n}$ olacak şekilde bir harita olmak üzere $\Phi : \varphi(U') \subset \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu diferensiyellenebilirdir. Bu nedenle $L = \Phi \circ \varphi : TM \to \mathbb{R}$ fonksiyonu da diferensiyellenebilirdir.

Eğer V, TM üzerinde space-like bir vektör ise

$$L = g^V(y^i \frac{\delta}{\delta x^i}, y^j \frac{\delta}{\delta x^j}) > 0$$

olup pozitiflik şartı sağlanır. Ayrıca $L(x,y) = g_{ij}(x)y^iy^j$ olduğundan $k \in \mathbb{R}$ için

$$L(x,ky) = k^2 L(x,y)$$

olup y ye göre ikinci mertebeden homojen bir fonksiyon olur.

$L(x,y) = g_{ij}(x)y^i y^j$ fonksiyonu yardımıyla,

$$g_{ij}(x) = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 L}{\partial y^i \partial y^j} \tag{3.3.2}$$

M manifoldu, üzerindeki tüm x değerleri için q negatif özdeğere $n-q$ pozitif özdeğere sahip bir g semi-Riemann metriğe sahiptir. $F^n = (M, L)$ ikilisi bu şartları sağladığı için TM nin yatay altvektör demeti üzerinde tanımlı bir pseudo-Finsler manifoldu olur.

F^n pseudo-Finsler manifoldunun temel fonksiyonu $F = L^{1/2}$ ile tanımlıdır. Bu nedenle F, y ye göre homojenlik derecesi bir olan pozitif bir fonksiyondur. Yani,

$$y^i \frac{\partial F}{\partial y^i} = F$$

olur. Ayrıca (3.3.1) ve (3.3.2) den

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial y^k} = 0 \tag{3.3.3}$$

olur. Yani g_{ij} fonksiyonu y ye bağlı bileşen içermez.

Böylece $\xi = \frac{1}{F}V$ şeklinde tanımlı space-like bir vektör ise

$$g^V(\xi, \xi) = 1 \tag{3.3.4}$$

olup HTM nin bir birim vektörüdür.

(M, L) pseudo-Finsler manifoldun yatay demeti üzerinde tanımlı g^V semi-Riemann metriği ve ξ birim vektörü ile η 1-formu,

$$\eta(X) = g^V(X, \xi), \qquad X \in \Gamma(HTM).$$

şeklinde tanımlıdır. M deki bir eğri ve bu eğri üzerinde paralel vektör alanının bileşenleri yardımıyla TM üzerinde elde edilen eğrinin teğet vektör alanı HTM içinde $\{\xi\}$ birim vektörü tarafından gerilen bir dağılım belirler. Bu vektör dağılımının g^V metriğine göre ortogonal tamamlayıcısı olan vektör dağılımı (n-1) boyutlu bir vektör dağılımı olup S_hTM ile gösterilir. Ayrıca S_hTM dağılımı η yardımıyla

$$\Gamma(S_hTM) = \{X \in \Gamma(HTM);\ \eta(X) = 0\}. \tag{3.3.5}$$

şeklinde tanımlıdır. Böylece HTM içinde herhangi bir X vektör alanı

$$X = PX + \eta(X)\xi, \tag{3.3.6}$$

ile ifade edilebilir. Buradaki P, HTM den S_hTM üzerine

$$\begin{aligned} P \ &: \ HTM \to S_hTM \\ &\quad X \to PX \end{aligned}$$

şeklinde tanımlı bir izdüşümdür. Eğer $X \perp \xi$ ise $\eta(X) = g^V(X,\xi) = 0$ olup (3.3.6) ya göre $X = PX \in S_hTM$ olur. Doğrudan hesaplamalar yardımıyla $\forall X, Y \in \Gamma(HTM)$ için,

$$g^V(X, PY) = g^V(PX, PY) = g^V(X,Y) - \eta(X)\eta(Y) \tag{3.3.7}$$

eşitlikleri elde edilir. $\Gamma(H^*TM|_{U'})$ içindeki $\{\delta/\delta x^i\}$ yatay baz vektörlerinin duali $\{\omega^i\}$ ile gösterilsin. O zaman η ve P nin lokal bileşenleri, $\{\omega^i\}$ ve $\{\omega^i \otimes \delta/\delta x^i\}$ bazları yardımıyla

$$\eta_i = \frac{\partial F}{\partial y^i}, \tag{3.3.8}$$

$$P_i^j = \delta_i^j - \frac{1}{F}\eta_i y^j \tag{3.3.9}$$

olur.

Böylece, $P = P_i^j \dfrac{\delta}{\delta x^j} \otimes \omega^i$ ve $\eta = \eta_i \omega^i$, U' üzerinde $(1,1)$ ve $(0,1)$ tipinde tensör alanları olur.

Teorem 3.3.1. S_hTM nin herhangi bir $\widetilde{Q}$ leafı üzerindeki Levi-Civita koneksiyonu ∇ olmak üzere $X \in \Gamma(T\widetilde{Q})$ ve $\xi \in \Gamma(T\widetilde{Q}^{\perp})$ için

$$\nabla_X \xi = 0$$

dır.

İspat: $\widetilde{Q}$, teğet vektörleri S_hTM nin elemanı ve birim normali ξ olan bir hiperyüzey olduğundan,

$$\begin{aligned} TQ &= T\widetilde{Q} \oplus T\widetilde{Q}^{\perp} \\ &= Sp\{X_1, ...X_{n-1}\} \oplus Sp\{\xi\} \end{aligned}$$

dir. Burada

$$X_a = X_a^i \frac{\delta}{\delta x^i}, \qquad \xi = y^j \frac{\delta}{\delta x^j}, \qquad \begin{array}{l} a = 1, ..., n-1 \\ i, j = 1, ..., n \end{array}$$

dir. Böylece,

$$\begin{aligned} \nabla_X \xi &= (X_a^i \frac{\delta y^k}{\delta x^i} + X_a^i y^j \Gamma_{ij}^k) \frac{\delta}{\delta x^k} \\ &= (-X_a^i y^j \Gamma_{ij}^k + X_a^i y^j \Gamma_{ij}^k) \frac{\delta}{\delta x^k} \\ &= 0 \end{aligned}$$

elde edilir.

Teorem 3.3.2. $F^n = (M, L)$ bir pseudo-Finsler manifold olsun. (S_hTM) dağılımı, integrallenebilir bir dağılımdır.

İspat: Bu teoremi ispatlamak için $X, Y \in \Gamma(S_hTM)$ iken $[X, Y]$ nin ξ li bileşenlerinin olmadığını göstermek yeter.

$X \in \Gamma(S_hTM)$ olması için gerek ve yeter şart

$$\eta(X) = g^V(X, \xi) = 0, \quad \eta(Y) = g^V(Y, \xi) = 0$$

olur. Böylece,

$$Xg^V(Y, \xi) = 0, \quad Yg^V(X, \xi) = 0$$

$\nabla_X \xi = 0$ olduğundan

$$g^V(\nabla_X Y, \xi) = 0 \text{ ve } g^V(\nabla_Y X, \xi) = 0$$

olup

$$g^V([X,Y],\xi)=0$$

dır. Bu nedenle $[X,Y]\in\Gamma(S_hTM)$ dir.

HTM nin bir Q leafı, lokal olarak (x^h,Z^h) ile tanımlanan TM manifoldunun n-boyutlu bir alt manifoldudur. Buradaki Z^h, M deki eğriler boyunca tanımlı parelel vektör alanının bileşenleridir ve S_hTM nin herhangi bir $\widetilde{Q}$ leafı, birim normali ξ olan TM nin Q leafı içinde kalan bir hiperyüzeydir. Ayrıca

$$g^V(\frac{\delta}{\delta x^i},\frac{\delta}{\delta x^j})(x^h,Z^h)=g(\frac{\partial}{\partial x^i},\frac{\partial}{\partial x^j})(x^h)$$

olduğundan g^V, HTM nin $(x^h,Z^h); h=1,...,n$ lokal bileşenleri ile tanımlı bir Q leafı üzerinde q indekse sahip semi-Riemann metriktir. ∇, Q üzerinde g^V ye göre Levi-Civita koneksiyonu ve $X,Y\in\Gamma(T\widetilde{Q})$, $\xi\in\Gamma(T\widetilde{Q}^\perp)$ olmak üzere

$$g^V(\nabla_X Y,\xi)=0 \tag{3.3.10}$$

dır. Böylece HTM nin leaflarının geometrisi S_hTM nin leaflarının geometrisi ile ξ nin integral eğrilerinden oluşur.

Teorem 3.3.3. Q ve $\widetilde{Q}$ sırasıyla, HTM nin bir leafı ve Q nun bir hiperyüzeyi olan S_hTM nin bir leafı olsun. $\widetilde{Q}$, Q üzerinde total jeodezik bir hiperyüzeydir.

İspat: ξ, $\widetilde{Q}$ nın birim normal vektörü olduğundan, Q nun bir hiperyüzeyi olan $\widetilde{Q}$ nın ikinci temel formu,

$$B(X,Y)=g^V(\nabla_X\xi,Y),\ \forall X,Y\in\Gamma(T\widetilde{Q}). \tag{3.3.11}$$

olur. Teorem 3.3.2 eşitliğinden $\widetilde{Q}$, Q nun total jeodezik bir hiperyüzeydir.

3.4. M deki Bir Hiperyüzeyin $(\mathbf{TM},\mathbf{g}^C)$ Semi-Riemann Manifolduna Yükseltilmesi

Bu alt bölümde (M,g) deki bir semi-Riemann hiperyüzeyin (TM,g^C) ye yükseltilmişi tanımlandı ve M deki semi-Riemann hiperyüzeye normal olan vektör alanının düşey ve tam yükseltilmişleri, yükseltilmiş semi-Riemann hiperyüzeyin normal vektör alanları kabul edilerek, ikinci temel tensör alanına bağlı bazı sonuçlar elde edildi.

M diferensiyellenebilir bir manifold, TM τ_{M} : TM $\rightarrow$ M kanonik projeksiyonu yardımıyla tanımlanan M nin tanjant demeti, $\Im_s^r(M)$ C^∞ sınıfından M üzerindeki (r,s) tipindeki tensör alanlarının uzayı, $\Im(M) = \sum\limits_{r,s} \Im_s^r(M)$ de M üzerindeki tensör cebiri olsun.

S, M nin bir semi-Riemann hiperyüzeyi ve $\iota : S \rightarrow M$ inclusion dönüşümü olsun. $d\iota = E$ diferensiyel dönüşümü, TS den TM ye ι nın türev dönüşümüdür. E nin türev dönüşümü $T(TS) \rightarrow T(TM)$ E_* ile gösterilecektir. TS, TM nin $2(n-1)$ boyutlu bir alt manifoldu ve $T(TS)$, $T(TM)$ nin $4(n-1)$ boyutlu alt manifoldudur.

$(x^i)\,, i = 1, ..., n$ lokal koordinatları yardımıyla ι

$$x^i = x^i(u^a) \tag{3.4.1}$$

lokal ifadesine sahiptir. Bu denklemdeki $(u^a), a = 1, ..., n-1$ S nin lokal koordinatlarıdır. O zaman E nin lokal ifadesi

$$\begin{aligned} x^i &= x^i(u^a) \\ y^i &= E_a^i v^a, \qquad E_a^i = \tfrac{\partial x^i}{\partial u^a} \end{aligned} \tag{3.4.2}$$

x^i ve u^a dan indirgenmiş (x^i, y^i) ve (u^a, v^a) lokal koordinatları ile tanımlıdır. ι dönüşümünün özelliğinden S ile $\iota(S)$ ve TS ile $E(TS)$ özdeş olarak alınabilir. (Tani, 1969)

Tanım 3.4.1. $\forall p \in S$ ye M nin p noktası üzerinde bir tanjant vektör atayan $\overline{X}$ dönüşümüne S *boyunca bir vektör alanı* denir.
$\forall p \in S$ ye p üzerinde (r,s) tipinde bir tensör atayan $\overline{T}$ dönüşümüne, S *boyunca* (r,s) *tipinde bir tensör alanı* denir (Tani, 1969).

S boyunca (r,s) tipinde tensör alanlarının uzayı $\Im_s^r(S,M)$ olsun
f, X, ω $\Im(S)$ nin elemanları ve, $\overline{f}$, $\overline{X}$, $\overline{\omega}$ $\Im(S,M)$ nin elemanlarıdır.

Teorem 3.4.2. $\forall f\in\Im_0^0(M)$, $\forall X,Y\in\Im_0^1(M)$, $\forall\omega\in\Im_1^0(M)$ ve $\forall F\in\Im_1^1(M)$ için

$$\begin{array}{lll}
(fX)^V=f^VX^V, & (fX)^C=f^CX^V+f^VX^C, & X^Cf^C=(Xf)^C,\\
X^Vf^V=0, & X^Vf^C=X^Cf^V=(Xf)^V, & \\
\omega^V(X^V)=0, & \omega^V(X^C)=\omega^C(X^V)=(\omega(X))^V, & \omega^C(X^C)=(\omega(X))^C,\\
F^VX^C=(F(X))^V, & F^CX^C=(F(X))^C, & \\
[X,Y]^C=[X^C,Y^C], & [X,Y]^V=[X^C,Y^V]=[X^V,Y^C]. &
\end{array} \tag{3.4.3}$$

olur (Yano, Ishıhara, 1973).

Teorem 3.4.3. $\forall P$,$Q\in\Im_s^r(M)$ için

$$\begin{aligned}
(P\otimes Q)^V&=P^V\otimes Q^V,\\
(P\otimes Q)^C&=P^C\otimes Q^V+P^V\otimes Q^C
\end{aligned} \tag{3.4.4}$$

ve $\forall T\in\Im_2^0(M)$ için

$$\begin{aligned}
T^C(X^C,Y^C)&=(T(X,Y))^C,\\
T^C(X^C,Y^V)&=T^V(X^C,Y^C)=(T(X,Y))^V,\\
T^C(X^V,Y^V)&=T^V(X^V,Y^C)=T^V(X^V,Y^V)=0
\end{aligned} \tag{3.4.5}$$

dır (Yano, Ishıhara, 1973).

Teorem 3.4.4. $\forall\widehat{f}\in\Im_0^0(M)$ için $\overset{*}{X}$ $(\widehat{f}^C)$ $=\overset{*}{Y}$ $(\widehat{f}^C)$ oluyorsa $\overset{*}{X}=\overset{*}{Y}$ dir ve $\forall\widehat{X}\in\Im_0^1(M)$ için $\overset{*}{\omega}$ $(\widehat{X}^C)$ $=\overset{*}{\eta}$ $(\widehat{X}^C)$ oluyorsa $\overset{*}{\omega}=\overset{*}{\eta}$ dır.
TM üzerinde herhangi bir tensör alanı, $\widehat{X}\in\Im_0^1(M)$ ve $\widehat{f}\in\Im_0^0(M)$ olmak üzere $\widehat{X}^C$ ve $\widehat{f}^C$ üzerinde aldığı değerle belirlenir (Yano, Ishıhara, 1973).

Tanım 3.4.5. $\overline{f}$, S üzerinde tanımlı bir fonksiyon olmak üzere

$$\begin{array}{ccc} TM & \xrightarrow{\tau_S} & S \\ \overline{f}^V = \overline{f} \circ \tau_S & \searrow & \downarrow \overline{f} \\ & & \mathbb{R} \end{array}$$

diyagramı yardımıyla

$$\overline{f}^V = \overline{f} \circ \tau_S$$

eşitliğini sağlayan $\overline{f}^V$ fonksiyonuna $\overline{f}$ nin TM ye *düşey yükseltilmişi* denir (Tani, 1969).

Tanım 3.4.6. $p \in U \cap S \subset M$ de tanımlı bir $\widehat{f} \in \Im_0^0(M)$ ve $\overline{f} \in \Im_0^0(S)$ fonksiyonları için

$$\frac{\partial \widehat{f}}{\partial u^a} = \frac{\partial \overline{f}}{\partial u^a}$$

eşitliği yardımıyla $\widehat{f} \in \Im_0^0(M)$ nin $\tau_{_M}^{-1}(U) \subset TM$ ye tam yükseltilmişi

$$\widehat{f}^C = y^i \partial_i \widehat{f},$$

bileşenlerine sahip olup, bu fonksiyonun $\tau_{_M}^{-1}(U \cap S)$ ye kısıtlanması $\natural$ operatörü ile gösterilecek olursa

$$\natural \widehat{f}^C = \natural(y^i \partial_i \widehat{f}) = v^a E_a^i \partial_i \widehat{f} = v^a \partial_a \widehat{f} = v^a \partial_a \overline{f} \tag{3.4.6}$$

elde edilir. Böylece $\tau_{_M}^{-1}(U)$ nun her koordinat komşuluğunda $\natural \widehat{f}^C$ ile aynı reel değere sahip olan $\overline{f}^C$ fonksiyonuna $\overline{f} \in \Im_0^0(S, M)$ nin TM ye *tam yükseltilmişi* denir (Tani, 1969).

Tanım 3.4.7. $\overline{X} \in \Im_0^1(S, M)$ ve $\widehat{f} \in \Im_0^0(M)$ için,

$$\overline{X}^V(\widehat{f}^C) = (\overline{X}\widehat{f})^V \tag{3.4.7}$$

eşitliğini sağlayan $\overline{X}^V$ vektör alanına, $\overline{X} \in \Im_0^1(S, M)$ nin TM ye *düşey* *yükseltilmişi* ve

$$\overline{X}^{\overline{C}}(\widehat{f}^C) = (\overline{X}\widehat{f})^{\overline{C}} \tag{3.4.8}$$

eşitliğini sağlayan $\overline{X}^{\overline{C}}$ vektör alanına da $\overline{X} \in \Im_0^1(S, M)$ nin TM ye *tam yükseltilmişi* denir. $\overline{X}^{\overline{C}}$ nin diğer bir tanımı da $\widehat{X} \in \Im_0^1(M)$ olmak üzere

$$\overline{X}^{\overline{C}}(\widehat{f}^C) = (\natural\widehat{X}^C)\widehat{f}^C$$

$\widehat{X}^C$ nin $\tau_M^{-1}(U \cap S)$ ye kısıtlanması olarak verilir (Tani, 1969).

Tanım 3.4.8. $\overline{\omega} \in \Im_1^0(S, M)$ ve $\overline{X} \in \Im_0^1(S, M)$ olmak üzere

$$\overline{\omega}^{\overline{V}}(\overline{X}^{\overline{C}}) = (\overline{\omega}(\overline{X}))^{\overline{V}} \tag{3.4.9}$$

eşitliğini sağlayan $\overline{\omega}^{\overline{V}}$ 1-formuna, $\overline{\omega} \in \Im_1^0(S, M)$ nin TM ye *düşey yükseltilmişi* ve

$$\overline{\omega}^{\overline{C}}(\overline{X}^{\overline{C}}) = (\overline{\omega}(\overline{X}))^{\overline{C}} \tag{3.4.10}$$

eşitliğini sağlayan $\overline{\omega}^{\overline{C}}$ 1-formuna da $\overline{\omega} \in \Im_1^0(S, M)$ nin TM ye *tam yükseltilmişi* denir. $\overline{\omega}^{\overline{C}}$ nin diğer bir tanımı da $\widehat{X} \in \Im_0^1(M)$ olmak üzere

$$\overline{\omega}^{\overline{C}}(\overline{X}^{\overline{C}}) = (\overline{\omega}(\overline{X}))^{\overline{C}} = \natural((\widehat{\omega}(\widehat{X}))^C) = \natural((\widehat{\omega}^C(\widehat{X}^C))$$

eşitliği sağlanacak şekilde $\widehat{\omega}^C$ nin $\tau_M^{-1}(U \cap S)$ ye kısıtlanması olarak verilir (Tani, 1969).

Teorem 3.4.9. Düşey ve tam yükseltmeler, $\overline{P}, \overline{Q}$ herhangi tensör alanları olmak üzere

$$(\overline{P} \otimes \overline{Q})^{\overline{V}} = \overline{P}^{\overline{V}} \otimes \overline{Q}^{\overline{V}}, \tag{3.4.11}$$
$$(\overline{P} \otimes \overline{Q})^{\overline{C}} = \overline{P}^{\overline{C}} \otimes \overline{Q}^{\overline{V}} + \overline{P}^{\overline{V}} \otimes \overline{Q}^{\overline{C}} \tag{3.4.12}$$

şartları sağlanırsa, $\Im(S, M)$ den $\Im(T(S, M))$ ye lineer izomorfizmdir (Tani, 1969).

Teorem 3.4.10. $\Im_0^0(S,M)$ den TM ye tanımlanan düşey ve tam yükseltmeler ile $\Im_0^0(S)$ den TS ye tanımlanan düşey ve tam yükseltmeler arasında $\overline{f} \in \Im_0^0(S,M) = \Im_0^0(S)$ ve $\widehat{f} \in \Im_0^0(M)$ için,

$$\overline{f}^{\overline{V}} = \overline{f}^{V}, \qquad \overline{f}^{\overline{C}} = \overline{f}^{C} \tag{3.4.13}$$

yani,

$$\widehat{f}^{V} \circ d\iota = (\widehat{f} \circ \iota)^{V}, \qquad \widehat{f}^{C} \circ d\iota = (\widehat{f} \circ \iota)^{C} \tag{3.4.14}$$

bağıntıları vardır. Ayrıca S ye teğet olan vektör alanlarının yükseltilmişleri TS ye teğettir. Yani $X \in \Im_0^1(S)$ için,

$$(EX)^{\overline{V}} = dE(X^{V}), \qquad (EX)^{\overline{C}} = dE(X^{C}) \tag{3.4.15}$$

olur (Tani, 1969).

Tanım 3.4.11. $\forall X, Y \in \Im_0^1(S)$ için

$$g(X,Y) = G(EX, EY) \tag{3.4.16}$$

eşitliği sağlanıyorsa, g ye S üzerine G den *indirgenmiş metrik* denir. (Tani, 1969).

Tanım 3.4.12. $\widehat{\nabla}$, M üzerinde G semi-Riemann metriği tarafından belirlenen Levi-Civita koneksiyonu olmak üzere $X, Y \in \Im_0^1(S)$ için

$$\widehat{\nabla}_{EX} EY = E\overline{\nabla}_X Y + B(X,Y) \tag{3.4.17}$$

Gauss denklemi yardımıyla S üzerinde tanımlanan $\overline{\nabla}$ koneksiyonuna *indirgenmiş koneksiyon* denir. $\overline{\nabla}$ de g semi-Riemann metriği tarafından belirlenen Levi-Civita koneksiyonudur.

$B(X, Y)$, S ye normaldir.

$$B(X, Y) = h(X, Y)N \tag{3.4.18}$$

eşitliğinde N ye normal vektör alanı ve h ye S üzerinde $(0, 2)$ tipinde ikinci temel tensör alanı denir. $(1, 1)$ tipinde H tensör alanı da

$$g(HX, Y) = h(X, Y)$$

ile verilir (Tani, 1969)

Tanım 3.4.13. $X, Y \in \Im_0^1(S)$ ve ε S hiperyüzeyinin işareti olmak üzere

$$h(X, Y) = \varepsilon m g(X, Y)$$

olacak şekilde m gibi skalar bir alan var ise S *total umbiliktir* ve m ye S nin *ortalama eğriliği* denir. $p \in S$ üzerindeki herhangi bir çatı $\frac{\partial}{\partial u^1}, ..., \frac{\partial}{\partial u^{n-1}}$ olmak üzere

$$m = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n-1} \varepsilon_i H(\frac{\partial}{\partial u^i}, \frac{\partial}{\partial u^i}) = \frac{1}{n-1} \dot{I}z(H)$$

olur. Eğer bir hiperyüzey total umbilik ve ortalama eğriliği sıfır ise böyle hiperyüzeylere total jeodezik hiperyüzey denir (Tani, 1969).

Teorem 3.4.14. M, G semi-Riemann metriği ile verilen indeksi ν olan $n-$boyutlu bir semi-Riemann manifoldu ise G nin tam yükseltilmişi G^C TM içinde indeksi n olan bir semi-Riemann metriğidir (Yano, Ishıhara, 1973).

Tanım 3.4.15. $\overset{*}{X}, \overset{*}{Y} \in \Im_0^1(TM)$ vektör alanları için

$$G^C(\overset{*}{X}, \overset{*}{Y}) = 0$$

eşitliği sağlanıyorsa $\overset{*}{X}$ ve $\overset{*}{Y}$ TS üzerinde G^C semi-Riemann metriğine göre ortogonaldir denir ve eğer $\widetilde{X} \in \Im_0^1(TS)$ için

$$G^C(\overset{*}{N}, E_* \widetilde{X}) = 0$$

eşitliği sağlanacak şekilde bir $\overset{*}{N}$ vektör alanı varsa, $\overset{*}{N}$ a TS nin normal vektör alanı denir.

Eğer her bir $p \in S$ ye S de N_p vektörünü atayan bir dönüşüm N ile gösterilirse N, S boyunca bir vektör alanı olur. N nin TM ye düşey yükseltilmişi $N^{\overline{V}}$ ve tam yükseltilmişi $N^{\overline{C}}$ ile gösterilirse, $\forall v \in T_pS$ için G^C ye göre TS ye normal olan $(N^{\overline{V}})_v$ ve $(N^{\overline{C}})_v$ vektörleri elde edilir. Bu vektörler kendi kendilerine ortogonal fakat karşılıklı olarak ortogonal değillerdir yani,

$$\begin{aligned} &G^C(N^{\overline{V}}, E_*X^C) = 0, \quad G^C(N^{\overline{C}}, E_*X^C) = 0, \\ &G^C(N^{\overline{C}}, N^{\overline{C}}) = 0, \qquad G^C(N^{\overline{V}}, N^{\overline{V}}) = 0, \\ &G^C(N^{\overline{V}}, N^{\overline{C}}) = \varepsilon \end{aligned} \tag{3.4.19}$$

dur. (3.4.19) daki ε, TS nin işareti olup $\{-1, 0, 1\}$ değerlerinden birisine eşittir. $\{N^{\overline{V}}, N^{\overline{C}}\}$ TS ye normal olan uzayın bazlarıdır.

Tanım 3.4.16. $\forall X, Y \in \Im_0^1(S)$ için,

$$\widetilde{g}(X^C, Y^C) = G^C(E_*X^C, E_*Y^C) \tag{3.4.20}$$

eşitliğini sağlayan $\widetilde{g}$ ya G^C *den TS üzerine indirgenmiş metrik* denir (Tani, 1969)
Teorem 3.4.17. M deki $\widehat{\nabla}$ nın tam yükseltilmişi $\widehat{\nabla}^C$, $\forall \widehat{X}, \widehat{Y} \in \Im_0^1(M)$ için

$$\widehat{\nabla}^C_{\widehat{X}^C} \widehat{Y}^C = (\widehat{\nabla}_{\widehat{X}} \widehat{Y})^C \tag{3.4.21}$$

ve

$$\widehat{\nabla}^C_{\widehat{X}^C} \widehat{Y}^V = (\widehat{\nabla}_{\widehat{X}} \widehat{Y})^V \tag{3.4.22}$$

özelikleri ile tanımlanan TM de bir afin koneksiyon tanımlar (Tani, 1969)

Teorem 3.4.18. $\widehat{\nabla}$, G semi-Riemann metriğine göre bir Riemann koneksiyonu ise $\widehat{\nabla}^C$ de G^C semi-Riemann metriğine göre bir Riemann koneksiyonudur (Yano, Ishıhara, 1973).

Teorem 3.4.19. S deki ∇ indirgenmiş koneksiyonunun tam yükseltilmişi ∇^C, g^C ye göre Riemann koneksiyonudur (Tani, 1969).

TS boyunca $\widehat{\nabla}^C$ den TS üzerine indirgenmiş koneksiyon $\widetilde{\nabla}$ ile gösterilirse, $X,Y \in \Im_0^1(S)$ için, Gauss denklemi,

$$\widehat{\nabla}^C_{E_* X^C} E_* Y^C = E_*(\widetilde{\nabla}_{X^C} Y^C) + B(X^C, Y^C) \tag{3.4.23}$$

dir. $N^{\overline{V}}$ve $N^{\overline{C}}$ ye göre $(0,2)$ tipinde ikinci temel tensör alanları, sırasıyla, $\widetilde{h}$ ve $\widetilde{k}$ olmak üzere $B(X^C, Y^C)$

$$B(X^C, Y^C) = \widetilde{h}(X^C, Y^C) N^{\overline{V}} + \widetilde{k}(X^C, Y^C) N^{\overline{C}} \tag{3.4.24}$$

şeklinde tanımlanır ve $\widehat{\nabla}^C_{E_* X^C} E_* Y^C$ nin normal kısmıdır.

Teorem 3.4.20. $\widehat{\nabla}^C$ den TS üzerine indirgenmiş $\widetilde{\nabla}$ koneksiyonu $\widehat{\nabla}$ dan S üzerine indirgenmiş ∇ koneksiyonunun tam yükseltilmişidir. Yani, $\widetilde{\nabla}$, g^C ye göre

$$\widetilde{\nabla}_{X^C} Y^C = (\nabla_X Y)^C, \qquad X,Y \in \Im_0^1(S)$$

olur.

İspat: p nin yeterince küçük bir U komşuluğu içinde $\widehat{X}$ ve $\hat{Y}$ vektör alanları $U \cap S$ de EX ve EY ile aynıdır. Bu nedenle

$$\widehat{\nabla}^C_{E_* X^C} E_* Y^C = \widehat{\nabla}^C_{(EX)^{\overline{C}}} (EY)^{\overline{C}} = \natural \widehat{\nabla}^C_{\widehat{X}^C} \hat{Y}^C = \natural (\widehat{\nabla}_{\widehat{X}} \hat{Y})^C = (\widehat{\nabla}_{EX} EY)^{\overline{C}} \tag{3.4.25}$$

olur. U üzerinde tanımlı $\widehat{\nabla}_{\widehat{X}} \widehat{Y}$, $U \cap S$ de $\widehat{\nabla}_{EX} EY$ ile aynı olur. Benzer şekilde $X \in \Im_0^1(S)$ için,

$$\widehat{\nabla}^C_{E_* X^C} N^{\overline{C}} = (\widehat{\nabla}_{EX} N)^{\overline{C}} \tag{3.4.26}$$

$$\widehat{\nabla}^C_{E_* X^C} N^{\overline{V}} = (\widehat{\nabla}_{EX} N)^{\overline{V}} \tag{3.4.27}$$

dir. (3.4.5), (3.4.17), (3.4.19) eşitlikleri kullanılarak (3.4.25) ifadesi

$$\widehat{\nabla}^{C}_{E_* X^C} E_* Y^C = E_*(\nabla_X Y)^C + h^C(X^C, Y^C) N^{\overline{V}} + h^V(X^C, Y^C) N^{\overline{C}}$$

olur. Diğer taraftan (3.4.23) ve (3.4.24) den

$$\widehat{\nabla}^{C}_{E_* X^C} E_* Y^C = E_*(\widetilde{\nabla}_{X^C} Y^C) + \widetilde{h}(X^C, Y^C) N^{\overline{V}} + \widetilde{k}(X^C, Y^C) N^{\overline{C}}$$

elde edilir. Bu iki eşitlik yardımıyla $(\nabla_X Y)^C = \widetilde{\nabla}_{X^C} Y^C$ bulunur.

Teorem 3.4.21. S nin ikinci temel tensör alanının düşey ve tam yükseltilmişleri, sırasıyla, $N^{\overline{V}}$ ve $N^{\overline{C}}$ ye göre ikinci temel tensör alanlarıdır.

TS nin total umbilik olması için gerek ve yeter şart $\forall \widetilde{X}, \widetilde{Y} \in \Im^1_0(TS)$ için

$$h^V(\widetilde{X}, \widetilde{Y}) = \lambda \widetilde{g}(\widetilde{X}, \widetilde{Y}), \qquad h^C(\widetilde{X}, \widetilde{Y}) = \mu \widetilde{g}(\widetilde{X}, \widetilde{Y})$$

olacak şekilde λ ve μ fonksiyonları vardır. Burada λ ve μ fonksiyonları, $\{\frac{\partial}{\partial w^1}, ..., \frac{\partial}{\partial w^{2(n-1)}}\}$ TS nin bir çatısı olmak üzere

$$\begin{aligned}
\lambda &= \frac{1}{2(n-1)} \sum_{A=1}^{2(n-1)} \varepsilon_A H^V\left(\frac{\partial}{\partial w^A}, \frac{\partial}{\partial w^A}\right) = \frac{1}{2(n-1)} \dot{I}z(H^V) = 0 \\
\mu &= \frac{1}{2(n-1)} \sum_{A=1}^{2(n-1)} \varepsilon_A H^C\left(\frac{\partial}{\partial w^A}, \frac{\partial}{\partial w^A}\right) = \frac{1}{2(n-1)} \dot{I}z(H^C)
\end{aligned}$$

dir. Bu eşitliklerdeki ε_A, TS üzerindeki $(w^A) = (u^a, v^a)$, $a = 1, ..., n-1$; $A = 1, ..., 2(n-1)$ indirgenmiş koordinatlarına göre

$$\varepsilon_A = \begin{cases} -1, & 1 \leq A \leq n-1 \\ 1, & n \leq A \leq 2(n-1) \end{cases}$$

şeklinde tanımlıdır. Eğer hem λ, hem de μ sıfır ise TS nin total jeodezik olduğu söylenebilir. TS nin ortalama eğrilik vektör alanı

$$\widetilde{m} = \lambda N^{\overline{V}} + \mu N^{\overline{C}}$$

şeklinde tanımlı olup, TS ye normal olan uzayda seçilen bazlardan bağımsızdır. TM içinde TS nin $\overset{*}{m}$ ortalama eğriliği $\overset{*}{m}= G^C(\widetilde{m},\widetilde{m})$ dir.

Teorem 3.4.22. Eğer TS total umbilik ise S total jeodeziktir. TS nin total jeodezik olması için gerek ve yeter şart S nin M de total jeodezik olmasıdır.

İspat: Eğer TS total umbilik ise S nin ikinci temel formu daima sıfırdır. Yani $\lambda = 0$ dan iz$h^V = 0$ olur. Eğer S total jeodezik ise S nin ikinci temel formu sıfır olup buradan λ ve μ de sıfır olur. Bu nedenle TS de total jeodeziktir.

Teorem 3.4.23. TS nin ortalama eğriliği sıfırdır.

İspat: TS nin ortalama eğrilik tanımı göz önüne alınırsa, $\overset{*}{m}= G^C(\widetilde{m},\widetilde{m}) = 2\lambda\mu$ olur. $\lambda = 0$ olduğundan, $\overset{*}{m}= 2\lambda\mu = 0$ elde edilir.

4. BİR SEMİ-RİEMANN MANİFOLDUN İKİNCİ MERTEBEDEN TANJANT DEMETİ ÜZERİNDEKİ SEMİ-RİEMANN METRİKLER

Bu bölümde, bir manifold üzerinde tanımlı diferensiyel geometrik objelerin ikinci mertebeden tanjant demetlere yükseltilmişleri bulunarak ikinci mertebeden tanjant demet üzerindeki metriklerin işaretleri incelendi. Ayrıca bir semi-Riemann metriğin ikinci mertebeden tam yükseltilmesiyle elde edilen metriğe bağlı Levi-Civita koneksiyonu bileşenler cinsinden elde edildi.

4.1. M deki Diferensiyel Geometrik Objelerin TTM ye Yükseltilmişleri

Bu alt bölümde M manifoldu üzerindeki fonksiyon, vektör alanı, 1-form gibi tensör alanlarının ikinci mertebeden tanjant demetlere VH, CH, HC, HH yükseltilmişleri elde edildi.

M, $n-$boyutlu bir Riemann ya da semi-Riemann manifold, TM onun tanjant demeti olmak üzere $p \in M$ nin U açık komşuluğu üzerindeki haritaya bağlı olarak M için bir lokal koordinat sistemi $\{x\} = \{x^1, ..., x^n\}$ olsun. O zaman, $\tau_M : TM \to M$ $\tau_M(Z_p) = p$ kanonik projeksiyon olmak üzere $\tau_M^{-1}(U) = U'$, TM deki $\tau_M^{-1}\{p\}$ noktasının bir açık komşuluğudur. Böylece,$\forall Z_p \in U'$ tanjant vektörü için,

$$(x, y)(Z_p) = (x^1(p), ..., x^n(p), Z_p[x^1], ..., Z_p[x^n])$$

şeklinde tanımlı (x, y) dönüşümü, U' üzerinde lokal bir harita olup, (x^i, y^i) $i = 1, ..., n$ sistemi TM C^∞ manifoldu için bir lokal koordinat sistemidir.

Ayrıca $\tau_{TM} : TTM \to TM$, $\tau_{TM}(A_z) = Z$ kanonik projeksiyon olmak üzere, $\pi_{TM}^{-1}(U') = U''$ TTM deki $\pi_{TM}^{-1}\{Z_p\}$ noktasının bir açık komşuluğudur. Böylece $\forall A_{z_p} \in U'' = \pi_{TM}^{-1}(U') \subset TTM$ tanjant vektörü için

$$(x, y, z, t)(A_{z_p}) = (x(p), y(Z_p), z(A_{z_p}), t(A_{z_p}))$$

olur. (x, y, z, t) dönüşümünün lokal koordinat fonksiyonları

$$\begin{aligned} x^i(p) &= p^i, \\ y^i(Z_p) &= Z_p[x^i], \\ z^i(A_{Z_p}) &= A_{Z_p}[x^i], \\ t^i(A_{Z_p}) &= A_{Z_p}[y^i] \end{aligned}$$

şeklinde tanımlı olup (x, y, z, t), U'' için bir haritadır. Dolayısıyla $(x^i, y^i, z^i, t^i), i = 1, ..., n$ sistemi, TTM için indirgenmiş lokal koordinat sistemi olup, TTM diferensiyellenebilir bir manifold yapısına sahiptir (Civelek, 1988).

(M, g) bir Riemann ya da semi-Riemann manifoldu olsun. M nin tanjant demeti TM üzerinde $g^S = g^V + g^{III}$ eşitliği ile tanımlanan metriğe Sasaki Rieman metriği ya da Sasaki semi-Riemann metriği denir. g^S metriği

$$g^S = g_{ij} dx^i dx^j + g_{ij} \delta y^i \delta y^j \tag{4.1.1}$$

lokal bileşenlere sahiptir.

Teorem 4.1.1. Eğer M Riemann ya da semi-Riemann manifoldu flat olarak kabul edilirse, TM üzerinde elde edilen g^S semi-Riemann metriğine bağlı $\widetilde{\nabla}$ Levi-Civita koneksiyonunun bileşenler cinsinden ifadesi

i) $\widetilde{\nabla}_{\frac{\delta}{\delta x^i}} \frac{\delta}{\delta x^j} = \Gamma^h_{ji} \frac{\delta}{\delta x^h}$,

ii) $\widetilde{\nabla}_{\frac{\delta}{\delta x^i}} \frac{\partial}{\partial y^j} = \Gamma^h_{ji} \frac{\partial}{\partial y^h}$,

iii) $\widetilde{\nabla}_{\frac{\partial}{\partial y^i}} \frac{\delta}{\delta x^j} = 0$,

iv) $\widetilde{\nabla}_{\frac{\partial}{\partial y^i}} \frac{\partial}{\partial y^j} = 0$

dır.

İspat: Teorem 3.2.5 ve (3.2.6) daki bileşenler yardımıyla M nin Riemann eğrilik tensörü sıfır alınarak TM üzerindeki $\widetilde{\nabla}$ Levi-Civita koneksiyonunun bileşenler cinsinden ifadesi yukardaki gibi elde edilir.

Çalışmanın geri kalan kısmında $\widetilde{\nabla}$ Levi-Civita koneksiyonun bileşenler cinsinden ifadesi yukarıdaki gibi kabul edilecektir.

Tanım 4.1.2. $\widetilde{f}, TM$ üzerinde tanımlı bir $C^{\infty}-$fonksiyon olsun. Böylece,

$$\widetilde{f}^{H} = \widetilde{f}^{C} - \widetilde{\nabla}_{\widetilde{\gamma}}\widetilde{f} \tag{4.1.2}$$

eşitliği ile tanımlı $\widetilde{f}, TTM$ üzerinde bir $C^{\infty}-$fonksiyon olup, $\widetilde{f}^{H}$ fonksiyonuna $\widetilde{f}$ nın TTM ye *yatay yükseltilmişi* denir.

Ayrıca

$$\widetilde{f}^{C} = z^{i}\frac{\partial \widetilde{f}}{\partial x^{i}} + t^{i}\frac{\partial \widetilde{f}}{\partial y^{i}}, \tag{4.1.3}$$

şeklinde tanımlı $\widetilde{f}^{C}$ TTM üzerinde bir C^{∞} fonksiyon olup, $\widetilde{f}$ nın TTM ye *tam yükseltilmişidir.*

$$\widetilde{\nabla}_{\widetilde{\gamma}}\widetilde{f} = \widetilde{\gamma}(\widetilde{\nabla}\widetilde{f}), \tag{4.1.4}$$

olup $\widetilde{\nabla}$, TM üzerindeki koneksiyon operatörüdür. Burada,

$$\widetilde{\nabla}\widetilde{f} = \widetilde{\nabla}_{\delta_i}\widetilde{f}\ dx^{i} + \widetilde{\nabla}_{\partial_i}\widetilde{f}\ \delta y^{i} \tag{4.1.5}$$

dir ve $\widetilde{\gamma}$ dönüşümü ise TM nin 1-formlarını TTM nin koordinat fonksiyonlarına dönüştüren lineer bir dönüşüm olup,

$$\begin{aligned} \widetilde{\gamma}\ &:\ T_{1}^{0}(TM) \to T_{0}^{0}(TTM) \\ \widetilde{\gamma}(dx^{i}) &= z^{i} \quad , \quad \widetilde{\gamma}(\delta y^{i}) = t^{i} \end{aligned} \tag{4.1.6}$$

şeklinde tanımlıdır. Böylece,

$$\widetilde{\gamma}(\widetilde{\nabla}\widetilde{f}) = z^{i}\frac{\partial \widetilde{f}}{\partial x^{i}} - z^{i}y^{j}\Gamma_{ji}^{h}\frac{\partial \widetilde{f}}{\partial y^{h}} + t^{i}\frac{\partial \widetilde{f}}{\partial y^{i}} \tag{4.1.7}$$

olup,

$$\widetilde{f}^{H} = z^{i}y^{j}\Gamma_{ji}^{h}\frac{\partial \widetilde{f}}{\partial y^{h}} \tag{4.1.8}$$

bulunur. TM manifoldu üzerindeki $\widetilde{f}$ fonksiyonu M deki f fonksiyonun üç farklı şekilde yükseltilmesiyle elde edilir. Bu nedenle

$i)$ Eğer $\widetilde{f}=f^V$ ise,

$$f^{VH}=z^iy^j\Gamma^h_{ji}\frac{\partial f^V}{\partial y^h}=0 \tag{4.1.9}$$

dır.

$ii)$ Eğer $\widetilde{f}=f^C$ ise,

$$f^{CH}=z^iy^j\Gamma^h_{ji}\partial_h f \tag{4.1.10}$$

dir.

$iii)$ Eğer $\widetilde{f}=f^H$ ise,

$$f^{HH}=z^iy^j\Gamma^h_{ji}\frac{\partial f^H}{\partial y^h}=0 \tag{4.1.11}$$

dır.

Tanım 4.1.3. $\widetilde{X}$, TM üzerinde tanımlı bir C^∞ vektör alanı olsun.

$$\widetilde{X}^H=\widetilde{X}^C-\nabla_{\widetilde{\gamma}}\widetilde{X} \tag{4.1.12}$$

eşitliği ile tanımlı $\widetilde{X}^H$, TTM üzerinde tanımlı bir $C^\infty-$vektör alanı olup $\widetilde{X}^H$ ye $\widetilde{X}$ nın TTM ye *yatay yükseltilmişi* denir.

TM üzerinde tanımlı $\widetilde{X}$ vektör alanının tam yükseltilmişi,

$$\widetilde{X}^C=\begin{bmatrix} (\widetilde{X}^i)^V \\ (\widetilde{X}^{\bar{i}}-\widetilde{X}^hN^i_h)^V \\ z^k(\frac{\partial\widetilde{X}^i}{\partial x^k})^V+t^k(\frac{\partial\widetilde{X}^i}{\partial y^k})^V \\ z^k(\frac{\partial(\widetilde{X}^{\bar{i}}-\widetilde{X}^hy^j\Gamma^i_{jh})}{\partial x^k})^V+t^k(\frac{\partial(\widetilde{X}^{\bar{i}}-\widetilde{X}^hy^j\Gamma^i_{jh})}{\partial y^k})^V \end{bmatrix} \tag{4.1.13}$$

bileşenlerine sahiptir. TM manifoldu üzerindeki $\widetilde{X}$ vektör alanı M deki X vektör alanının üç farklı şekilde yükseltilmesiyle elde edilir. O zaman,

$i)$ Eğer $\widetilde{X}=X^V$ ise $\widetilde{X}^i=0$ ve $\widetilde{X}^{\bar{i}}=X^i$ olup,

$$X^{VC}=\begin{bmatrix} 0 \\ X^i \\ 0 \\ z^k\frac{\partial X^i}{\partial x^k} \end{bmatrix} \tag{4.1.14}$$

dır.

$ii)$ Eğer $\widetilde{X} = X^C$ ise $\widetilde{X^i} = X^i$ ve $\widetilde{X^{\bar{i}}} = y^j \nabla_j X^i$ olup,

$$X^{CC} = \begin{bmatrix} X^i \\ y^j \frac{\partial X^i}{\partial x^j} \\ z^k \frac{\partial X^i}{\partial x^k} \\ y^j z^k \frac{\partial^2 X^i}{\partial x^k \partial x^j} + t^k \frac{\partial X^i}{\partial x^k} \end{bmatrix} \tag{4.1.15}$$

dır.

$iii)$ Eğer $\widetilde{X} = X^H$ ise $\widetilde{X^i} = X^i$ ve $\widetilde{X^{\bar{i}}} = 0$ olup,

$$X^{HC} = \begin{bmatrix} X^i \\ -y^j X^h \Gamma^i_{jh} \\ z^k \frac{\partial X^i}{\partial x^k} \\ -y^j z^k \frac{\partial (X^h \Gamma^i_{jh})}{\partial x^k} - t^k X^h \Gamma^i_{kh} \end{bmatrix} \tag{4.1.16}$$

dır.

TM manifoldu üzerindeki $\widetilde{X}$ vektör alanı için

$$\widetilde{\gamma}(\widetilde{\nabla}\widetilde{X}) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ z^j (\frac{\delta \widetilde{X}^i}{\delta x^j} + \widetilde{X}^h \Gamma^i_{jh}) + t^j \frac{\partial \widetilde{X}^i}{\partial y^j} \\ -z^j y^l (\frac{\delta \widetilde{X}^k}{\delta x^j} + \widetilde{X}^h \Gamma^k_{jh}) \Gamma^i_{lk} - t^j y^l \frac{\partial \widetilde{X}^k}{\partial y^j} \Gamma^i_{lk} + z^j (\frac{\delta \widetilde{X^{\bar{i}}}}{\delta x^j} + \widetilde{X^{\bar{h}}} \Gamma^i_{jh}) + t^j \frac{\partial \widetilde{X^{\bar{i}}}}{\partial y^j} \end{bmatrix} \tag{4.1.17}$$

olan $\widetilde{\gamma}(\widetilde{\nabla}\widetilde{X})$, $\widetilde{X}$ vektör alanının farklı durumları için aşağıdaki gösterimlere sahiptir.

$i)$ Eğer $\widetilde{X} = X^V$ ise $\widetilde{X^i} = 0$ ve $\widetilde{X^{\bar{i}}} = X^i$ olup,

$$\widetilde{\gamma}(\widetilde{\nabla} X^V) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{\partial X^i}{\partial x^j} + X^h \Gamma^i_{jh} \end{bmatrix} \tag{4.1.18}$$

dır.

$ii)$ Eğer $\widetilde{X} = X^C$ ise $\widetilde{X^i} = X^i$ ve $\widetilde{X^{\bar{i}}} = y^j \nabla_j X^i$ olup,

$$\widetilde{\gamma}(\widetilde{\nabla} X^C) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ z^j \nabla_j X^i \\ z^j y^l [\frac{\partial \nabla_l X^i}{\partial x^j} - (\nabla_j X^k)\Gamma^i_{lk} - (\nabla_k X^i)\Gamma^k_{lj} + (\nabla_l X^k)\Gamma^i_{jk}] + t^j(\nabla_j X^i) \end{bmatrix} \tag{4.1.19}$$

elde edilir.

$iii)$ Eğer $\widetilde{X} = X^H$ ise $\widetilde{X^i} = X^i$ ve $\widetilde{X^{\bar{i}}} = 0$ olup,

$$\widetilde{\gamma}(\widetilde{\nabla} X^H) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ z^j \nabla_j X^i \\ -z^j y^l \nabla_j X^k \Gamma^i_{lk} \end{bmatrix} \tag{4.1.20}$$

dır.

TM üzerindeki vektör alanlarının TTM ye yatay yükseltilmişleri ise aşağıdaki şekilde verilebilir:

$\widetilde{X} \in T^1_0(TM)$ için $\widetilde{X}^H = \widetilde{X}^C - \nabla_{\widetilde{\gamma}} \widetilde{X}$ olacağından;

$i)$ $\widetilde{X} = X^V$ olması durumunda,

$$X^{VH} = \begin{bmatrix} 0 \\ X^i \\ 0 \\ -z^j X^i \Gamma^h_{ji} \end{bmatrix} \tag{4.1.21}$$

dir.

ii) $\widetilde{X} = X^C$ olması durumunda,

$$X^{CH} = \begin{bmatrix} X^i \\ y^j \frac{\partial X^i}{\partial x^j} \\ -z^j X^h \Gamma^k_{jh} \\ y^k z^j \{-\partial_i (X^i \Gamma^h_{ki}) - \Gamma^h_{ji} \nabla_k X^i + \Gamma^h_{jk} \nabla_h X^i - \Gamma^h_{ki} \nabla_j X^i\} + t^j X^i \Gamma^h_{ji} \end{bmatrix} \tag{4.1.22}$$

dir.

iii) $\widetilde{X} = X^H$ olması durumunda,

$$X^{HH} = \begin{bmatrix} X^i \\ -y^j X^h \Gamma^i_{jh} \\ -z^j X^h \Gamma^i_{jh} \\ -y^k z^j X^i (\frac{\partial \Gamma^h_{ki}}{\partial x^j} - \Gamma^k_{ji} \Gamma^h_{ki}) - t^j X^h \Gamma^i_{jh} \end{bmatrix} \tag{4.1.23}$$

dır.

Tanım 4.1.4. $\widetilde{\omega}$, TM üzerinde tanımlı C^∞bir 1-form olsun. O zaman,

$$\widetilde{\omega}^H = \widetilde{\omega}^C - \widetilde{\nabla}_{\widetilde{\gamma}} \widetilde{\omega} \tag{4.1.24}$$

eşitliği ile tanımlı $\widetilde{\omega}^H$, TTM üzerinde tanımlı C^∞ bir 1-form olup, $\widetilde{\omega}^H$ ye $\widetilde{\omega}$ nın TTM ye *yatay yükseltilmişi* denir. Burada

$$\widetilde{\omega} = \widetilde{\omega}_i dx^i + \widetilde{\omega}_{\bar{i}} \delta y^i, (\delta y^i = dy^i + N^i_h dx^h)$$

şeklinde tanımlıdır. $\widetilde{\omega}^C$nin matris gösterimi ise

$$\widetilde{\omega}^C = \begin{bmatrix} \begin{matrix} \{\frac{\partial(\widetilde{\omega}_i + \widetilde{\omega}_{\bar{h}} N^h_i)}{\partial x^k}\}^V z^k \\ +\{\frac{\partial(\widetilde{\omega}_i + \widetilde{\omega}_{\bar{h}} N^h_i)}{\partial y^k}\}^V t^k \end{matrix} & \{\frac{\partial \widetilde{\omega}_{\bar{i}}}{\partial x^k}\}^V z^k + \{\frac{\partial \widetilde{\omega}_{\bar{i}}}{\partial y^k}\}^V t^k & \{\widetilde{\omega}_i + \widetilde{\omega}_{\bar{h}} N^h_i\}^V & \{\widetilde{\omega}_{\bar{i}}\}^V \end{bmatrix}$$

dır.

M manifoldu üzerinde tanımlı 1-formun TM üzerindeki yükseltilmişleri olan ω^V, ω^C ve ω^H nin TTM ye tam yükseltilmişleri;

$i)$ $\widetilde{\omega} = \omega^V$ olması durumunda $\widetilde{\omega}_i = \omega_i$ ve $\widetilde{\omega}_{\overline{i}} = 0$ olup,

$$\omega^{VC} = \begin{bmatrix} z^k \frac{\partial \omega_i}{\partial x^k} & 0 & \omega_i & 0 \end{bmatrix} \tag{4.1.25}$$

dır.

$ii)$ $\widetilde{\omega} = \omega^C$ olması durumunda $\widetilde{\omega}_i = (\omega_i)^V$ ve $\widetilde{\omega}_{\overline{i}} = y^j \nabla_j \omega_i$ olup,

$$\omega^{CC} = \begin{bmatrix} \{y^j z^k \partial_k \partial_j \omega_i + t^k \partial_k \omega_i & z^k \partial_k \omega_i & y^j \partial_j \omega_i & \omega_i \end{bmatrix} \tag{4.1.26}$$

dir.

$iii)$ $\widetilde{\omega} = \omega^H$ olması durumunda $\widetilde{\omega}_i = 0$ ve $\widetilde{\omega}_{\overline{i}} = \omega_i$ olup,

$$\omega^{HC} = \begin{bmatrix} y^j z^k \{\partial_k \omega_h \Gamma^h_{ji} + \omega_h \partial_k \Gamma^h_{ji}\} + t^k \omega_h \Gamma^h_{ki} & z^k \partial_k \omega_i & y^j \omega_h \Gamma^h_{ji} & \omega_i \end{bmatrix} \tag{4.1.27}$$

dir.

$\widetilde{\omega}$ 1-formu için $\widetilde{\gamma}(\widetilde{\nabla\widetilde{\omega}})$ nın matris gösterimi

$$\widetilde{\gamma}(\widetilde{\nabla\widetilde{\omega}}) = \begin{bmatrix} \begin{array}{r} z^j(\delta_j(\widetilde{\omega}_i) - \widetilde{\omega}_h \Gamma^h_{ji}) + t^j(\partial_j(\widetilde{\omega}_i) \\ +y^k z^j(\delta_j(\widetilde{\omega}_{\overline{h}}) - \widetilde{\omega}_{\overline{i}} \Gamma^i_{jh}) \Gamma^h_{ki} + y^k t^j \partial_j(\widetilde{\omega}_{\overline{h}}) \Gamma^h_{ki} \end{array} & \begin{array}{l} z^j(\delta_j(\widetilde{\omega}_{\overline{i}}) - \widetilde{\omega}_{\overline{h}} \Gamma^h_{ji}) \\ +t^j \partial_j(\widetilde{\omega}_{\overline{i}}) \end{array} & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

şeklinde tanımlı olup M deki tanımlı 1-formun TM üzerindeki yükseltilmişleri olan ω^V, ω^C ve ω^H için TTM üzerindeki $\widetilde{\gamma}(\widetilde{\nabla\omega^V})$, $\widetilde{\gamma}(\widetilde{\nabla\omega^C})$ ve $\widetilde{\gamma}(\widetilde{\nabla\omega^H})$ 1-formları;

$i)$ $\widetilde{\omega} = \omega^V$ olması durumunda $\widetilde{\omega}_i = \omega_i$ ve $\widetilde{\omega}_{\overline{i}} = 0$ olup,

$$\widetilde{\gamma}(\widetilde{\nabla\omega^V}) = \begin{bmatrix} z^j(\partial_j \omega_i - \omega_h \Gamma^h_{ji}) & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{4.1.28}$$

dır.

$ii)$ $\widetilde{\omega} = \omega^C$olması durumunda $\widetilde{\omega}_i = y^j \nabla_j \omega_i$ ve $\widetilde{\omega}_{\overline{i}} = \omega_i$ olup,

$$\widetilde{\gamma}(\widetilde{\nabla\omega^C}) = \begin{bmatrix} \begin{array}{l} z^j y^k \{\partial_j \nabla_k \omega_i - \Gamma^h_{kj} \nabla_h \omega_i - \Gamma^h_{ji} \nabla_k \omega_h \\ +\nabla_j \omega_h \Gamma^h_{ki}\} + t^j \nabla_j \omega_i \end{array} & z^j \nabla_j \omega_i & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{4.1.29}$$

dır.

$iii)$ $\widetilde{\omega} = \omega^H$ olması durumunda $\widetilde{\omega}_i = 0$ ve $\widetilde{\omega}_{\bar{i}} = \omega_i$ olup,

$$\widetilde{\gamma}(\widetilde{\nabla}\omega^H) = \begin{bmatrix} z^j y^k \nabla_j \omega_h \Gamma^h_{ki} & z^j \nabla_j \omega_i & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{4.1.30}$$

dır.

M deki 1-formun TM deki yükseltilmişleri ω^V ,ω^C ve ω^H nin TTM ye yatay yükseltilmişleri;

$i)$ $\widetilde{\omega} = \omega^V$ ise,

$$\omega^{VH} = \begin{bmatrix} z^j \omega_h \Gamma^h_{ji} & 0 & \omega_i & 0 \end{bmatrix} \tag{4.1.31}$$

dır.

$ii)$ $\widetilde{\omega} = \omega^C$ ise,

$$\omega^{CH} = \begin{bmatrix} \begin{array}{l} z^j y^k \{\partial_j(\omega_h \Gamma^h_{ki}) + \Gamma^h_{kj} \nabla_h \omega_i \\ +\Gamma^h_{ji} \nabla_k \omega_h - \Gamma^h_{ki} \nabla_j \omega_h\} + t^j \omega_h \Gamma^h_{ji} \end{array} & z^j \omega_h \Gamma^h_{ji} & y^k \partial_k \omega_i & \omega_i \end{bmatrix}$$

dir.

$iii)$ $\widetilde{\omega} = \omega^H$ ise,

$$\omega^{HH} = \begin{bmatrix} y^j z^k \{\omega_h(\partial_k \Gamma^h_{ji} + \Gamma^i_{kh}\Gamma^h_{ji}) + t^k \omega_h \Gamma^h_{ki} & z^k \omega_h \Gamma^h_{ki} & y^j \omega_h \Gamma^h_{ji} & \omega_i \end{bmatrix} \tag{4.1.32}$$

dir.

Teorem 4.1.5. $\widetilde{X}, \widetilde{Y} \in T^1_0(TM)$ ve $\forall \widetilde{f} \in T^0_0(TM)$ için

$i)$ $(\widetilde{X} + \widetilde{Y})^H = \widetilde{X}^H + \widetilde{Y}^H$,

$ii)$ $(\widetilde{f}\widetilde{X})^H = \widetilde{f}^H \widetilde{X}^V + \widetilde{f}^V \widetilde{X}^H$,

dır.

İspat:$i)$ $\widetilde{X}, \widetilde{Y} \in T^1_0(TM)$ ve TM üzerindeki $\widetilde{\nabla}$ Levi-Civita koneksiyonu için

$$\begin{aligned} (\widetilde{X} + \widetilde{Y})^H &= (\widetilde{X} + \widetilde{Y})^C - \widetilde{\gamma}(\widetilde{\nabla}(\widetilde{X} + \widetilde{Y})) \\ &= \widetilde{X}^C - \widetilde{\gamma}(\widetilde{\nabla}(\widetilde{X})) + \widetilde{Y}^C - \widetilde{\gamma}(\widetilde{\nabla}(\widetilde{Y})) \\ &= \widetilde{X}^H + \widetilde{Y}^H \end{aligned}$$

$ii)$ $\forall \widetilde{f} \in T_0^0(TM)$ için

$$\begin{aligned}
(\widetilde{f}\widetilde{X})^H &= (\widetilde{f}\widetilde{X})^C - \widetilde{\gamma}(\widetilde{\nabla}(\widetilde{f}\widetilde{X})) \\
&= \widetilde{f}^C\widetilde{X}^V + \widetilde{f}^V\widetilde{X}^C - \widetilde{f}^V\widetilde{\gamma}(\widetilde{\nabla}(\widetilde{X})) - \widetilde{\gamma}(\widetilde{\nabla}(\widetilde{f}))\widetilde{X}^V \\
&= \widetilde{f}^H\widetilde{X}^V + \widetilde{f}^V\widetilde{X}^H
\end{aligned}$$

dır.

Teorem 4.1.6. $\forall p \in M$ için T_pM yi geren $\{\frac{\partial}{\partial x^i}\}, i = 1, ..., n$ lokal baz vektör alanlarının ikinci mertebeden yükseltilmişleri

$i)$ $(\frac{\partial}{\partial x^i})^{HV} = \delta_i^h \frac{\partial}{\partial z^h} - y^j\Gamma_{ji}^h \frac{\partial}{\partial t^h}$

$ii)$ $(\frac{\partial}{\partial x^i})^{HC} = \delta_i^h \frac{\partial}{\partial x^h} - y^j\Gamma_{ji}^h \frac{\partial}{\partial y^h} - (t^j\Gamma_{ji}^h + y^j z^k \partial_k \Gamma_{ji}^h)\frac{\partial}{\partial t^h}$

$iii)$ $(\frac{\partial}{\partial x^i})^{CH} = \frac{\partial}{\partial x^i} - z^j\Gamma_{ji}^h \frac{\partial}{\partial z^h} + (-z^j y^k[\partial_j \Gamma_{ki}^h - \Gamma_{ji}^l\Gamma_{kl}^h$
$\quad -\Gamma_{ki}^l\Gamma_{li}^h + \Gamma_{ki}^l\Gamma_{jl}^h] + t^j\Gamma_{ji}^h)\frac{\partial}{\partial t^h}$

$iv)$ $(\frac{\partial}{\partial x^i})^{VH} = \delta_i^h \frac{\partial}{\partial y^h} - z^j\Gamma_{ji}^h \frac{\partial}{\partial t^h}$

$v)$ $(\frac{\partial}{\partial x^i})^{HH} = \delta_i^h \frac{\partial}{\partial x^h} - y^j\Gamma_{ji}^h \frac{\partial}{\partial y^h} - z^j\Gamma_{ji}^h \frac{\partial}{\partial z^h} - [t^j\Gamma_{ji}^h$
$\quad +z^j y^k(\partial_j \Gamma_{ki}^h - \Gamma_{ji}^l \Gamma_{lk}^h)]\frac{\partial}{\partial t^h}$

dır.

İspat: $i)$

$$\begin{aligned}
(\frac{\partial}{\partial x^i})^{HV} &= (\delta_i^h \frac{\partial}{\partial x^h} - y^j\Gamma_{ji}^h \frac{\partial}{\partial y^h})^V \\
&= \delta_i^h (\frac{\partial}{\partial x^h})^V - y^j\Gamma_{ji}^h (\frac{\partial}{\partial y^h})^V \\
&= \delta_i^h \frac{\partial}{\partial z^h} - y^j\Gamma_{ji}^h \frac{\partial}{\partial t^h}
\end{aligned}$$

$ii)$

$$\begin{aligned}
(\frac{\partial}{\partial x^i})^{HC} &= (\delta_i^h \frac{\partial}{\partial x^h} - y^j\Gamma_{ji}^h \frac{\partial}{\partial y^h})^C \\
&= \delta_i^h (\frac{\partial}{\partial x^h})^C - (y^j\Gamma_{ji}^h)^C (\frac{\partial}{\partial y^h})^V - (y^j\Gamma_{ji}^h)^V (\frac{\partial}{\partial y^h})^C \\
&= \delta_i^h \frac{\partial}{\partial x^h} - (y^j\Gamma_{ji}^h)^V \frac{\partial}{\partial y^h} - \{(y^j)^C(\Gamma_{ji}^h)^V + (y^j)^V(\Gamma_{ji}^h)^C\}\frac{\partial}{\partial t^h}
\end{aligned}$$

$$(\frac{\partial}{\partial x^i})^{HC} = \delta_i^h \frac{\partial}{\partial x^h} - y^j \Gamma_{ji}^h \frac{\partial}{\partial y^h} - (t^j \Gamma_{ji}^h + y^j z^k \partial_k \Gamma_{ji}^h) \frac{\partial}{\partial t^h}$$

$iii)$ Teorem 4.1.2 deki bileşenler yardımıyla

$$\begin{aligned}
(\frac{\partial}{\partial x^i})^{CH} &= (\frac{\partial}{\partial x^i})^C - \widetilde{\gamma}(\widetilde{\nabla}\frac{\partial}{\partial x^i}) \\
&= \frac{\partial}{\partial x^i} - \widetilde{\gamma}(\widetilde{\nabla}\{\frac{\delta}{\delta x^i} + N_i^h \frac{\partial}{\partial y^h}\}) \\
&= \frac{\partial}{\partial x^i} - \widetilde{\gamma}([\widetilde{\nabla}_{\frac{\delta}{\delta x^j}} \frac{\delta}{\delta x^i} + N_i^h \frac{\partial}{\partial y^h}] dx^j + [\widetilde{\nabla}_{\frac{\partial}{\partial y^j}} \frac{\delta}{\delta x^i} + N_i^h \frac{\partial}{\partial y^h}] \delta y^j) \\
&= \frac{\partial}{\partial x^i} - \widetilde{\gamma}([\Gamma_{ji}^h \frac{\delta}{\delta x^h} + \frac{\delta N_i^h}{\delta x^j}\frac{\partial}{\partial y^h} + N_i^h \Gamma_{jh}^l \frac{\partial}{\partial y^l}] dx^j + [\frac{\partial N_i^h}{\partial y^j}\frac{\partial}{\partial y^h}] \delta y^j) \\
&= \frac{\partial}{\partial x^i} - z^j [\Gamma_{ji}^h (\frac{\delta}{\delta x^h})^V + \frac{\delta N_i^h}{\delta x^j}(\frac{\partial}{\partial y^h})^V] + y^k \Gamma_{ki}^l \Gamma_{jl}^h (\frac{\partial}{\partial y^h})^V] + t^j [\Gamma_{ji}^h](\frac{\partial}{\partial y^h})^V \\
&= \frac{\partial}{\partial x^i} - z^j \Gamma_{ji}^h \frac{\partial}{\partial z^h} + (-z^j y^k [\partial_j \Gamma_{ki}^h - \Gamma_{ji}^l \Gamma_{kl}^h - \Gamma_{ki}^l \Gamma_{li}^h + \Gamma_{ki}^l \Gamma_{jl}^h] + t^j \Gamma_{ji}^h) \frac{\partial}{\partial t^h}
\end{aligned}$$

$iv)$

$$\begin{aligned}
(\frac{\partial}{\partial x^i})^{VH} &= (\frac{\partial}{\partial y^i})^C - \gamma(\widetilde{\nabla}\frac{\partial}{\partial y^i}) \\
&= \frac{\partial}{\partial y^i} - \gamma(\underbrace{[\widetilde{\nabla}_{\frac{\delta}{\delta x^j}} \frac{\partial}{\partial y^i}]}_{\Gamma_{ji}^h \frac{\partial}{\partial y^h}} dx^j + \underbrace{[\widetilde{\nabla}_{\frac{\partial}{\partial y^j}} \frac{\partial}{\partial y^i}]}_{0} \delta y^j) \\
&= \delta_i^h \frac{\partial}{\partial y^h} - z^j \Gamma_{ji}^h \frac{\partial}{\partial t^h}
\end{aligned}$$

$v)$

$$\begin{aligned}
(\frac{\partial}{\partial x^i})^{HH} &= (\frac{\delta}{\delta x^i})^C - \widetilde{\gamma}(\widetilde{\nabla}\frac{\delta}{\delta x^i}) \\
&= (\delta_i^h \frac{\partial}{\partial x^h} - y^j \Gamma_{ji}^h \frac{\partial}{\partial y^h})^C - \widetilde{\gamma}(\underbrace{[\widetilde{\nabla}_{\frac{\delta}{\delta x^j}} \frac{\delta}{\delta x^i}]}_{\Gamma_{ji}^h \frac{\delta}{\delta x^h}} dx^j + \underbrace{[\widetilde{\nabla}_{\frac{\partial}{\partial y^j}} \frac{\delta}{\delta x^i}]}_{0} \delta y^j) \\
&= \delta_i^h (\frac{\partial}{\partial x^h})^C - (y^j \Gamma_{ji}^h)^C (\frac{\partial}{\partial y^h})^V - (y^j \Gamma_{ji}^h)^V (\frac{\partial}{\partial y^h})^C - z^j \Gamma_{ji}^h (\frac{\delta}{\delta x^h})^V
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
(\frac{\partial}{\partial x^i})^{HH} &= \delta_i^h(\frac{\partial}{\partial x^h})^C - \{(y^j)^C(\Gamma_{ji}^h)^V + (y^j)^V(\Gamma_{ji}^h)^C\}\frac{\partial}{\partial t^h} - y^j\Gamma_{ji}^h\frac{\partial}{\partial y^h} \\
&\quad - z^j\Gamma_{ji}^h(\frac{\partial}{\partial z^h} - y^k\Gamma_{kh}^l\frac{\partial}{\partial t^l}) \\
&= \delta_i^h\frac{\partial}{\partial x^h} - y^j\Gamma_{ji}^h\frac{\partial}{\partial y^h} - z^j\Gamma_{ji}^h\frac{\partial}{\partial z^h} - [t^j\Gamma_{ji}^h + z^jy^k(\partial_j\Gamma_{ki}^h - \Gamma_{ji}^l\Gamma_{lk}^h)]\frac{\partial}{\partial t^h}
\end{aligned}
$$

Teorem 4.1.7. $\widetilde{\omega}, \widetilde{\theta} \in T_1^0(TM)$ ve $\widetilde{f} \in T_0^0(TM)$ için

i) $(\widetilde{\omega} + \widetilde{\theta})^H = \widetilde{\omega}^H + \widetilde{\theta}^H$,

ii) $(\widetilde{f}\widetilde{\omega})^H = \widetilde{f}^H\widetilde{\omega}^V + \widetilde{f}^V\widetilde{\omega}^H$

dır.

İspat: *i)*

$$
\begin{aligned}
(\widetilde{\omega} + \widetilde{\theta})^H &= (\widetilde{\omega} + \widetilde{\theta})^C - \widetilde{\gamma}(\widetilde{\nabla}\widetilde{\omega} + \widetilde{\theta}) \\
&= \widetilde{\omega}^C - \widetilde{\gamma}(\widetilde{\nabla}\widetilde{\omega}) + \widetilde{\theta}^C - \widetilde{\gamma}(\widetilde{\nabla}\widetilde{\theta}) \\
&= \widetilde{\omega}^H + \widetilde{\theta}^H
\end{aligned}
$$

ii)

$$
\begin{aligned}
(\widetilde{f}\widetilde{\omega})^H &= (\widetilde{f}\widetilde{\omega})^C - \widetilde{\gamma}(\widetilde{\nabla}\widetilde{f}\widetilde{\omega}) \\
&= \widetilde{f}^C\widetilde{\omega}^V + \widetilde{f}^V\widetilde{\omega}^C - \widetilde{\gamma}(\widetilde{\nabla}\widetilde{f})\widetilde{\omega}^V - \widetilde{f}^V\widetilde{\gamma}(\widetilde{\nabla}\widetilde{\omega}) \\
&= (\widetilde{f}^C - \widetilde{\gamma}(\widetilde{\nabla}\widetilde{f}))\widetilde{\omega}^V + \widetilde{f}^V(\widetilde{\omega}^C - \widetilde{\gamma}(\widetilde{\nabla}\widetilde{\omega})) \\
&= \widetilde{f}^H\widetilde{\omega}^V + \widetilde{f}^V\widetilde{\omega}^H
\end{aligned}
$$

Teorem 4.1.8. $\forall p \in M$ için T_p^*M yi geren $\{dx^i\}, i = 1, ..., n$ lokal baz 1-formların ikinci mertebeden yükseltilmişleri

i) $(dx^i)^{VH} = dz^i + z^j\Gamma_{jh}^i dx^h$,

ii) $(dx^i)^{HV} = dy^i + y^k\Gamma_{kj}^i dx^j$,

$iii)\ (dx^i)^{CH} = (z^j y^k[\partial_j\Gamma^i_{kh} - \Gamma^l_{kj}\Gamma^i_{lh} - \Gamma^i_{kl}\Gamma^l_{jh} + \Gamma^l_{kh}\Gamma^i_{jl}] + t^j\Gamma^i_{jh})dx^h + z^j\Gamma^i_{jh}dy^h + \delta^i_h dt^h,$

$iv)\ (dx^i)^{HC} = dt^i + y^k\Gamma^i_{kj}dz^j + (t^k\Gamma^i_{kj} + y^k z^l\partial_l\Gamma^i_{kj})dx^j,$

$v)\ (dx^i)^{HH} = \{t^k\Gamma^i_{kj} + y^k z^l(\partial_l\Gamma^i_{kj} - \Gamma^i_{lh}\Gamma^h_{kj}\}dx^j + z^h\Gamma^i_{hj}dy^j + y^k\Gamma^i_{kj}dz^j + \delta^i_j dt^j$

dır.

İspat: $i)$

$$\begin{aligned}(dx^i)^{VH} &= (dx^i)^{VC} - \widetilde{\gamma}(\widetilde{\nabla}(dx^i)^V)\\ &= dz^i - \widetilde{\gamma}(\underbrace{[\widetilde{\nabla}_{\frac{\delta}{\delta x^j}} dx^i]}_{-\Gamma^i_{jh}dx^h} dx^j + \underbrace{[\widetilde{\nabla}_{\frac{\partial}{\partial y^j}} dx^i]}_{0} \delta y^j)\\ &= dz^i + z^j\Gamma^i_{jh}dx^h\end{aligned}$$

$ii)$

$$\begin{aligned}(dx^i)^{HV} &= (\delta y^i)^V\\ &= (dy^i + y^k\Gamma^i_{kj}dx^j)^V\\ &= dy^i + y^k\Gamma^i_{kj}dx^j\end{aligned}$$

$iii)$

$$\begin{aligned}(dx^i)^{CH} &= (dy^i)^C - \widetilde{\gamma}(\widetilde{\nabla}dy^i)\\ &= dt^i - \widetilde{\gamma}([\widetilde{\nabla}_{\frac{\delta}{\delta x^j}}\delta y^i - N^i_h dx^h]dx^j + [\widetilde{\nabla}_{\frac{\partial}{\partial y^j}}\delta y^i - N^i_h dx^h]\delta y^j)\\ &= dt^i - (z^j[-\Gamma^i_{jh}\delta y^h - \frac{\delta N^i_h}{\delta x^j}dx^h - N^i_h\Gamma^h_{jl}dx^l] - t^j\frac{\partial N^i_h}{\partial y^j}dx^h)\\ &= (z^j y^k[\partial_j\Gamma^i_{kh} - \Gamma^l_{kj}\Gamma^i_{lh} - \Gamma^i_{kl}\Gamma^l_{jh} + \Gamma^l_{kh}\Gamma^i_{jl}] + t^j\Gamma^i_{jh})dx^h\\ &\quad + z^j\Gamma^i_{jh}dy^h + \delta^i_h dt^h\end{aligned}$$

iv)

$$
\begin{aligned}
(dx^i)^{HC} &= (\delta y^i)^C \\
&= (dy^i + y^k \Gamma^i_{kj} dx^j)^C \\
&= (dy^i)^C + \{(y^k)^C (\Gamma^i_{kj})^V + (y^k)^V (\Gamma^i_{kj})^C\}(dx^j)^V + (y^k \Gamma^i_{kj})^V (dx^j)^C \\
&= dt^i + y^k \Gamma^i_{kj} dz^j + \{t^k \Gamma^i_{kj} + y^k z^l \partial_l \Gamma^i_{kj}\} dx^j
\end{aligned}
$$

v)

$$
\begin{aligned}
(dx^i)^{HH} &= (\delta y^i)^C - \widetilde{\gamma}(\widetilde{\nabla} \delta y^i) \\
&= dt^i + y^k \Gamma^i_{kj} dz^j + \{t^k \Gamma^i_{kj} + y^k z^l \partial_l \Gamma^i_{kj}\} dx^j - \widetilde{\gamma}(\underbrace{[\widetilde{\nabla}_{\frac{\delta}{\delta x^j}} \delta y^i]}_{-\Gamma^i_{jh} \delta y^h} dx^j \\
&\quad + \underbrace{[\widetilde{\nabla}_{\frac{\partial}{\partial y^j}} \delta y^i]}_{0} \delta y^j) \\
&= dt^i + y^k \Gamma^i_{kj} dz^j + \{t^k \Gamma^i_{kj} + y^k z^l \partial_l \Gamma^i_{kj}\} dx^j + z^j \Gamma^i_{jh} \delta y^h \\
&= dt^i + y^k \Gamma^i_{kj} dz^j + \{t^k \Gamma^i_{kj} + y^k z^l \partial_l \Gamma^i_{kj}\} dx^j + z^j \Gamma^i_{jh} \{dy^h - y^k \Gamma^h_{kj} dx^j\} \\
&= \{t^k \Gamma^i_{kj} + y^k z^l (\partial_l \Gamma^i_{kj} - \Gamma^i_{lh} \Gamma^h_{kj}\} dx^j + z^h \Gamma^i_{hj} dy^j + y^k \Gamma^i_{kj} dz^j + dt^i
\end{aligned}
$$

4.2. TTM Üzerindeki Semi-Riemann Metriklerin İşaretlerinin İncelenmesi

Bu alt bölümde M deki g Riemann ya da semi-Riemann metriğin TTM ye yükseltilmesi sonucunda elde edilen metriklerin Riemann ya da semi-Riemann metrikler olduğu gösterilerek bu metriklere sahip olan TTM semi-Riemann manifoldunun indeksleri incelendi ve tablo yardımıyla verildi.

(M, g), Riemann ya da semi-Riemann manifold ve $\tau_{_M} : TM \to M$, $\tau_{_{TM}} : TTM \to TM$ kanonik projeksiyonlar olsun. $(U, x^i), i = 1, ..., n$ M de lokal bir harita olmak üzere, $(\tau_M^{-1}(U) = U'; x^i, y^i), i = 1, ..., n$, TM de ve $(\tau_{TM}^{-1}(U') = U''; x^i, y^i, z^i, t^i)$ TTM de lokal bir harita olur. $(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial y^i}, \frac{\partial}{\partial z^i}, \frac{\partial}{\partial t^i})$ TTM manifoldunun tanjant uzayını geren lokal baz vektör alanları sistemi, (dx^i, dy^i, dz^i, dt^i) de dual baz vektör alanları sistemi olmak üzere

$$(\widetilde{\partial}\partial_i = (\frac{\partial}{\partial x^i})^{VV}, \widetilde{\delta}\partial_i = (\frac{\partial}{\partial x^i})^{HV}, \widetilde{\partial}\delta_i = (\frac{\partial}{\partial x^i})^{VH}, \widetilde{\delta}\delta_i = (\frac{\partial}{\partial x^i})^{HH})$$

TTM manifoldunun tanjant uzayını geren *uyarlanmış lokal baz vektör alanları sistemi*,

$$(dx^i = (dx^i)^{VV}, \delta y^i = (dx^i)^{HV}, \delta z^i = (dx^i)^{VH}, \delta t^i = (dx^i)^{HH})$$

uyarlanmış lokal dual baz 1-formları sistemidir.

Teorem 4.2.1. $Z \in TM$ noktası üzerindeki $T_Z TM$ tanjant uzayını geren uyarlanmış lokal baz vektör alanları ile uyarlanmış dual baz 1-formları arasında $i, j \in \{1, ..., n\}$

$$\begin{aligned} \delta t^i(\widetilde{\partial}\partial_i) &= \delta^i_j, \qquad \delta y^i(\widetilde{\partial}\delta_i) = \delta^i_j, \\ dx^i(\widetilde{\delta}\delta_i) &= \delta^i_j, \qquad \delta z^i(\widetilde{\delta}\partial_i) = \delta^i_j \end{aligned} \tag{4.2.1}$$

eşitlikleri hariç diğer tüm bileşenler sıfırdır.

İspat: *i)*

$$\delta t^i(\widetilde{\partial}\partial_i) = \begin{pmatrix} \{t^k\Gamma^i_{kj} + y^k z^l(\partial_l \Gamma^i_{kj} - \Gamma^i_{lh}\Gamma^h_{kj}\} dx^j \\ +z^h\Gamma^i_{hj} dy^j + y^k\Gamma^i_{kj} dz^j + \delta^i_j dt^j \end{pmatrix} \left(\frac{\partial}{\partial t^j}\right) = \delta^i_j$$

ii)

$$\delta y^i(\widetilde{\partial}\delta_i) = \left(dy^i + y^k\Gamma^i_{kj} dx^j\right)\left(\frac{\partial}{\partial y^j} - z^k\Gamma^h_{kj}\frac{\partial}{\partial t^h}\right) = \delta^i_j$$

iii)

$$dx^i(\widetilde{\delta}\delta_i) = \left(dx^i\right)\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x^j} - y^j\Gamma^h_{ji}\frac{\partial}{\partial y^h} - z^j\Gamma^h_{ji}\frac{\partial}{\partial z^h} \\ -[t^j\Gamma^h_{ji} + z^j y^k(\partial_j\Gamma^h_{ki} - \Gamma^l_{ji}\Gamma^h_{lk})]\frac{\partial}{\partial t^h} \end{pmatrix} = \delta^i_j$$

iv)

$$\delta z^i(\widetilde{\delta}\partial_i) = \left(dz^i + z^j\Gamma^i_{jh}dx^h\right)\left(\frac{\partial}{\partial z^j} - y^j\Gamma^h_{ji}\frac{\partial}{\partial t^h}\right) = \delta^i_j$$

Teorem 4.2.2. (M, g) flat Riemann ya da semi-Riemann manifoldu ve ∇, M üzerinde Levi-Civita koneksiyonu olmak üzere M manifoldu üzerindeki g_{ij} bileşenlerine sahip g Riemann ya da semi-Riemann metriğinin TTM manifoldu üzerine ikinci mertebeden yükseltilmişlerinin, uyarlanmış koordinatlar cinsinden lokal ifadesi

i) $g^{VV} = (g_{ij})^{VV}dx^i dx^j$,

ii) $g^{VC} = g^{VH} = 2(g_{ij})^{VV}dx^i\delta z^j$,

iii) $g^{CV} = g^{HV} = 2(g_{ij})^{VV}dx^i\delta y^j$,

iv) $g^{CC} = g^{HH} = 2(g_{ij})^{VV}\delta z^i\delta y^j + 2(g_{ij})^{VV}dx^i\delta t^j$,

v) $g^{FF} = (g_{ij})^{VV}dx^i dx^j + 2(g_{ij})^{VV}dx^i\delta z^j + 2(g_{ij})^{VV}dx^i\delta y^j +$
$+2(g_{ij})^{VV}\delta z^i\delta y^j + 2(g_{ij})^{VV}dx^i\delta t^j$,

vi) $g^{SS} = (g_{ij})^{VV}dx^i dx^j + (g_{ij})^{VV}\delta y^i\delta y^j + (g_{ij})^{VV}\delta z^i\delta z^j + (g_{ij})^{VV}\delta t^i\delta t^j$,

vii) $g^{KK} = 2(g_{ij})^{VV}\delta z^i\delta y^j + 2(g_{ij})^{VV}dx^i\delta t^j + 2(g_{ij})^{VV}\delta t^i\delta y^j +$
$+2(g_{ij})^{VV}\delta z^i\delta t^j + (g_{ij})^{VV}\delta t^i\delta t^j$

dir.

İspat: (i), (ii), (iii) nin ispatı doğrudan hesaplamalar yardımıyla görülebilir.
iv) $g^{HH} = \left(g^C - \gamma(\nabla g)\right)^H$ eşitliğinde ∇ M de Levi-Civita koneksiyonu olduğu için $\nabla g = 0$ dır. Böylece

$$g^{HH} = \left(g^C - \gamma(\nabla g)\right)^H = g^{CH}$$

olur. $\widetilde{\nabla}$ (TM, g^C) semi-Riemann manifoldunun Levi-Civita koneksiyonu olduğu için

$$g^{HH} = g^{CH} = g^{CC} - \widetilde{\gamma}(\widetilde{\nabla}g^C)$$

olup $\widetilde{\nabla}g^C = 0$ dır. Böylece

$$g^{HH} = g^{CC}$$

elde edilir. g^{HH} nin bileşenler cinsinden ifadesi

$$\begin{aligned}
g^{HH} &= (g_{ij}dx^i dx^j)^{HH} \\
&= \left((g_{ij})^V(dx^i)^H(dx^j)^V + (g_{ij})^V(dx^i)^V(dx^j)^H\right)^H \\
&= (g_{ij})^{VV}(dx^i)^{HH}(dx^j)^{VV} + (g_{ij})^{VV}(dx^i)^{HV}(dx^j)^{VH} \\
&\quad +(g_{ij})^{VV}(dx^i)^{VH}(dx^j)^{HV} + (g_{ij})^{VV}(dx^i)^{VV}(dx^j)^{HH} \\
&= g_{ij}\delta t^i dx^j + g_{ij}\delta y^i \delta z^j + g_{ij}\delta z^i \delta y^j + g_{ij}dx^i \delta t^j \\
&= 2(g_{ij})^{VV}\delta z^i \delta y^j + 2(g_{ij})^{VV}dx^i \delta t^j
\end{aligned}$$

dir.

$v)$ $g^F = g^V + g^C$ ise,

$$\begin{aligned}
g^{FF} &= (g^V + g^C)^V + (g^V + g^C)^C \\
&= g^{VV} + g^{CV} + g^{VC} + g^{CC}
\end{aligned}$$

dir. g^{FF} metriğinin TTM nin uyarlanmış koordinatlar cinsinden ifadesi (i), (ii), (iii), (iv) deki eşitlikler göz önüne alınırsa doğrudan görülür.

$vi)$ $g^S = g^V + g^{III}$ ise,

$$\begin{aligned}
g^{SS} &= (g^V + g^{III})^V + (g^V + g^{III})^{III} \\
&= g^{VV} + g^{III\,V} + g^{V\,III} + g^{III\,III}
\end{aligned}$$

olur. Burada

$$\begin{aligned}
g^{III\,V} &= (g_{ij})^{VV}(dx^i)^{HV}(dx^j)^{HV}, \\
g^{V\,III} &= (g_{ij})^{VV}(dx^i)^{VH}(dx^j)^{VH}, \\
g^{III\,III} &= (g_{ij})^{VV}(dx^i)^{HH}(dx^j)^{HH},
\end{aligned} \tag{4.2.2}$$

dır. Böylece g^{SS} metriğinin TTM nin uyarlanmış koordinatlar cinsinden ifadesi (i), (ii), (iii), (iv) deki eşitliklerin kullanılmasıyla doğrudan görülebilir.

$viii)$ $g^K = g^C + g^{III}$ ise

$$\begin{aligned} g^{KK} &= (g^C + g^{III})^C + (g^C + g^{III})^{III} \\ &= g^{CC} + g^{III\,C} + g^{C\,III} + g^{III\,III} \end{aligned}$$

olduğundan, g^{SS} metriğinin TTM nin uyarlanmış koordinatlar cinsinden ifadesi (4.2.2) ve (i), (ii), (iii), (iv) deki eşitliklerin kullanılmasıyla doğrudan görülebilir.

(M, g) flat Riemann ya da semi-Riemann manifoldu ve ∇, M üzerinde Levi-Civita koneksiyonu olmak üzere TTM manifoldu üzerinde tanımlı Riemann ya da semi-Riemann metrikler ve işaretleri aşağıdaki teoremler yardımı ile verilebilir.

TTM üzerinde tanımlı g^{CC} metriğinin uyarlanmış bazlara göre matris gösterimi

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & g_{ij} \\ 0 & 0 & g_{ij} & 0 \\ 0 & g_{ij} & 0 & 0 \\ g_{ij} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

dır.

Teorem 4.2.3. (M, g) semi-Riemann manifoldu ise (TTM, g^{CC}) semi-Riemann manifoldudur.

İspat: TTM C^∞ manifoldu üzerinde vektör alanlarının cümlesi $\chi(TTM)$ ve reel değerli C^∞ fonksiyonların halkası $C^\infty(TTM, \mathbb{R})$ olmak üzere

$$g^{CC} : \chi(TTM) \times \chi(TTM) \to C^\infty(TTM, \mathbb{R})$$

dönüşümü

$$\begin{aligned} g^{CC}(X^{VV}, Y^{HH}) &= g^{CC}(X^{HH}, Y^{VV}) = (g(X, Y))^{VV}, \\ g^{CC}(X^{VH}, Y^{HV}) &= g^{CC}(X^{HV}, Y^{VH}) = (g(X, Y))^{VV} \end{aligned}$$

ve diğer vektör alanları üzerindeki değerleri sıfır olacak şekilde tanımlıdır. (TTM, g^{CC}) nin semi-Riemann manifoldu olması için g^{CC} metriğinin aşağıdaki şartları sağlaması gerekir.

i) 2-lineerlik: $\forall\widetilde{X},\, \widetilde{Y},\, \widetilde{Z} \in \chi(TTM)$ ve $\forall\alpha,\, \beta \in \mathbb{R}$ için

$$\begin{aligned} g^{CC}(\alpha\widetilde{X}+\beta\widetilde{Y},\widetilde{Z}) &= g^{CC}(\{(\alpha X+\beta Y)^{VV}+(\alpha X+\beta Y)^{VH}+(\alpha X+\beta Y)^{HV} \\ &\quad +(\alpha X+\beta Y)^{HH}\},\{Z^{VV}+Z^{VH}+Z^{HV}+Z^{HH}\}) \\ &= \alpha g^{CC}(\widetilde{X},\widetilde{Z})+\beta g^{CC}(\widetilde{Y},\widetilde{Z}) \end{aligned}$$

dir. Benzer şekilde

$$g^{CC}(\widetilde{X},\alpha\widetilde{Y}+\beta\widetilde{Z}) = \alpha g^{CC}(\widetilde{X},\widetilde{Y})+\beta g^{CC}(\widetilde{X},\widetilde{Z})$$

olduğu görülür.

ii) Simetriklik: $\forall\widetilde{X},\, \widetilde{Y} \in \chi(TTM)$ için,

$$\begin{aligned} g^{CC}(\widetilde{X},\widetilde{Y}) &= g^{CC}((X^{VV}+X^{VH}+X^{HV}+X^{HH}),(Y^{VV}+Y^{VH}+Y^{HV}+Y^{HH})) \\ &= g^{CC}(\widetilde{Y},\widetilde{X}) \end{aligned}$$

olduğundan simetriktir.

iii) Non-dejenerelik: g semi-Riemann metriği ise

$$\forall X \in \chi(M) \text{ için } g(X,Y)=0 \text{ iken } Y=0$$

dır. $\forall\widetilde{X} \in \chi(TTM)$ ve $\widetilde{Y} = Y^{VV}$ için

$$g^{CC}(\widetilde{X},Y^{VV}) = g^{CC}(X^{VV}+X^{VH}+X^{HV}+X^{HH},Y^{VV}) = g^{CC}(X^{HH},Y^{VV}) = 0$$

eşitliğinden

$$Y^{VV}=0,$$

$\forall\widetilde{X}\in\chi(TTM)$ ve $\widetilde{Y}=Y^{VH}$ için

$$g^{CC}(\widetilde{X},Y^{VH})=g^{CC}(X^{VV}+X^{VH}+X^{HV}+X^{HH},Y^{VH})=g^{CC}(X^{HV},Y^{VH})=0$$

eşitliğinden

$$Y^{VH}=0,$$

$\forall\widetilde{X}\in\chi(TTM)$ ve $\widetilde{Y}=Y^{HV}$ için

$$g^{CC}(\widetilde{X},Y^{HV})=g^{CC}(X^{VV}+X^{VH}+X^{HV}+X^{HH},Y^{HV})=g^{CC}(X^{VH},Y^{HV})=0$$

eşitliğinden

$$Y^{HV}=0,$$

$\forall\widetilde{X}\in\chi(TTM)$ ve $\widetilde{Y}=Y^{HH}$ için

$$g^{CC}(\widetilde{X},Y^{HH})=g^{CC}(X^{VV}+X^{VH}+X^{HV}+X^{HH},Y^{HH})=g^{CC}(X^{VV},Y^{HH})=0$$

eşitliğinden

$$Y^{HH}=0,$$

olup

$$\forall\widetilde{X}\in\chi(TTM)\text{ için } g^{CC}(\widetilde{X},\widetilde{Y})=0\text{ iken }\widetilde{Y}=0$$

bağıntısından TTM üzerinde tanımlı g^{CC} metriği non-dejeneredir.

Böylece (TTM,g^{CC}) bir semi-Riemann manifoldu olur.

Tanım 4.2.4. TTM C^{∞} manifoldu üzerinde vektör alanlarının cümlesi $\chi(TTM)$ ve reel değerli C^{∞} fonksiyonların halkası $C^{\infty}(TTM,\mathbb{R})$ olmak üzere

$$g^{FF}:\chi(TTM)\times\chi(TTM)\to C^{\infty}(TTM,\mathbb{R})$$

dönüşümü

$$g^{FF}(X^{HH},Y^{HH}) \;=\; g^{FF}(X^{HH},Y^{HV})=g^{FF}(X^{HV},Y^{HH})=(g(X,Y))^{VV},$$

$$\begin{aligned} g^{FF}(X^{HH}, Y^{VH}) &= g^{FF}(X^{VH}, Y^{HH}) = g^{FF}(X^{HV}, Y^{VH}) = (g(X,Y))^{VV}, \\ g^{FF}(X^{VH}, Y^{HV}) &= g^{FF}(X^{HH}, Y^{VV}) = g^{FF}(X^{VV}, Y^{HH}) = (g(X,Y))^{VV} \end{aligned}$$

diğer vektör alanları üzerindeki değerleri sıfır olacak şekilde tanımlıdır. TTM üzerinde tanımlı g^{FF} metriğinin uyarlanmış bazlara göre matris gösterimi

$$\begin{bmatrix} g_{ij} & g_{ij} & g_{ij} & g_{ij} \\ g_{ij} & 0 & g_{ij} & 0 \\ g_{ij} & g_{ij} & 0 & 0 \\ g_{ij} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

olur.

Teorem 4.2.5. (M, g) semi-Riemann manifoldu ise (TTM, g^{FF}) semi-Riemann manifoldudur.

İspat: *i) 2-lineerlik:* $\forall \widetilde{X}, \widetilde{Y}, \widetilde{Z} \in \chi(TTM)$ ve $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ için

$$\begin{aligned} g^{FF}(\alpha\widetilde{X} + \beta\widetilde{Y}, \widetilde{Z}) &= g^{FF}(\{(\alpha X + \beta Y)^{VV} + (\alpha X + \beta Y)^{VH} + (\alpha X + \beta Y)^{HV} \\ &\quad +(\alpha X + \beta Y)^{HH}\}, \{Z^{VV} + Z^{VH} + Z^{HV} + Z^{HH}\}) \\ &= \alpha g^{FF}(\widetilde{X}, \widetilde{Z}) + \beta g^{FF}(\widetilde{Y}, \widetilde{Z}) \end{aligned}$$

dir. Benzer şekilde

$$g^{FF}(\widetilde{X}, \alpha\widetilde{Y} + \beta\widetilde{Z}) = \alpha g^{FF}(\widetilde{X}, \widetilde{Y}) + \beta g^{FF}(\widetilde{X}, \widetilde{Z})$$

olduğu görülür.

ii) Simetriklik: $\forall \widetilde{X}, \widetilde{Y} \in \chi(TTM)$ için,

$$\begin{aligned} g^{FF}(\widetilde{X}, \widetilde{Y}) &= g^{FF}((X^{VV} + X^{VH} + X^{HV} + X^{HH}), (Y^{VV} + Y^{VH} + Y^{HV} + Y^{HH})) \\ &= g^{FF}(\widetilde{Y}, \widetilde{X}) \end{aligned}$$

olduğundan simetriktir.

iii) *Non-dejenerelik:* g semi-Riemann metriği ise

$$\forall X \in \chi(M) \text{ için } g(X,Y) = 0 \text{ iken } Y = 0$$

dır. $\forall \widetilde{X} \in \chi(TTM)$ ve $\widetilde{Y} = Y^{VV}$ için

$$g^{FF}(\widetilde{X}, Y^{VV}) = g^{FF}(X^{VV} + X^{VH} + X^{HV} + X^{HH}, Y^{VV}) = g^{FF}(X^{HH}, Y^{VV}) = 0$$

eşitliğinden

$$Y^{VV} = 0,$$

$\forall \widetilde{X} \in \chi(TTM)$ ve $\widetilde{Y} = Y^{VH}$ için

$$\begin{aligned} g^{FF}(\widetilde{X}, Y^{VH}) &= g^{FF}(X^{VV} + X^{VH} + X^{HV} + X^{HH}, Y^{VH}) \\ &= g^{FF}(X^{HV}, Y^{VH}) + g^{FF}(X^{HH}, Y^{VH}) = 0 \end{aligned}$$

eşitliğinden

$$Y^{VH} = 0,$$

$\forall \widetilde{X} \in \chi(TTM)$ ve $\widetilde{Y} = Y^{HV}$ için

$$\begin{aligned} g^{FF}(\widetilde{X}, Y^{HV}) &= g^{FF}(X^{VV} + X^{VH} + X^{HV} + X^{HH}, Y^{HV}) \\ &= g^{FF}(X^{VH}, Y^{HV}) + g^{FF}(X^{HH}, Y^{HV}) = 0 \end{aligned}$$

eşitliğinden

$$Y^{HV} = 0,$$

$\forall \widetilde{X} \in \chi(TTM)$ ve $\widetilde{Y} = Y^{HH}$ için

$$\begin{aligned} g^{FF}(\widetilde{X}, Y^{HH}) &= g^{FF}(X^{VV} + X^{VH} + X^{HV} + X^{HH}, Y^{HH}) \\ &= g^{FF}(X^{VV}, Y^{HH}) + g^{FF}(X^{VH}, Y^{HH}) \\ &\quad + g^{FF}(X^{HV}, Y^{HH}) + g^{FF}(X^{HH}, Y^{HH}) \end{aligned}$$

$$= \quad 4\,(g(X,Y))^{VV} = 0$$

eşitliğinden

$$Y^{HH} = 0,$$

olup

$$\forall \widetilde{X} \in \chi(TTM) \text{ için } g^{FF}(\widetilde{X}, \widetilde{Y}) = 0 \text{ iken } \widetilde{Y} = 0$$

bağıntısından TTM üzerinde tanımlı g^{FF} metriği non-dejeneredir.

Böylece (TTM, g^{FF}) bir semi-Riemann manifoldu olur.

Tanım 4.2.6. TTM C^∞ manifoldu üzerinde vektör alanlarının cümlesi $\chi(TTM)$ ve reel değerli C^∞ fonksiyonların halkası $C^\infty(TTM, \mathbb{R})$ olmak üzere

$$g^{SS} : \chi(TTM) \times \chi(TTM) \to C^\infty(TTM, \mathbb{R})$$

dönüşümü

$$\begin{aligned} g^{SS}(X^{HH}, Y^{HH}) &= g^{SS}(X^{VV}, Y^{VV}) = (g(X,Y))^{VV}, \\ g^{SS}(X^{VH}, Y^{VH}) &= g^{SS}(X^{HV}, Y^{HV}) = (g(X,Y))^{VV} \end{aligned}$$

ve diğer vektör alanları üzerindeki değerleri sıfır olacak şekilde tanımlıdır. TTM üzerinde tanımlı g^{SS} metriğinin uyarlanmış bazlara göre matris gösterimi

$$\begin{bmatrix} g_{ij} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & g_{ij} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & g_{ij} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & g_{ij} \end{bmatrix}$$

olur.

Teorem 4.2.7. (M, g) semi-Riemann manifoldu ise (TTM, g^{SS}) semi-Riemann manifoldudur.

İspat: *i*) *2-lineerlik:* $\forall \widetilde{X},\, \widetilde{Y},\, \widetilde{Z} \in \chi(TTM)$ ve $\forall \alpha,\, \beta \in \mathbb{R}$ için

$$\begin{aligned} g^{SS}(\alpha\widetilde{X} + \beta\widetilde{Y}, \widetilde{Z}) &= g^{SS}(\{(\alpha X + \beta Y)^{VV} + (\alpha X + \beta Y)^{VH} + (\alpha X + \beta Y)^{HV} \\ &\quad +(\alpha X + \beta Y)^{HH}\}, \{Z^{VV} + Z^{VH} + Z^{HV} + Z^{HH}\}) \\ &= \alpha g^{SS}(\widetilde{X}, \widetilde{Z}) + \beta g^{SS}(\widetilde{Y}, \widetilde{Z}) \end{aligned}$$

dir. Benzer şekilde

$$g^{SS}(\widetilde{X}, \alpha\widetilde{Y} + \beta\widetilde{Z}) = \alpha g^{SS}(\widetilde{X}, \widetilde{Y}) + \beta g^{SS}(\widetilde{X}, \widetilde{Z})$$

olduğu görülür.

ii) *Simetriklik:* $\forall \widetilde{X},\, \widetilde{Y} \in \chi(TTM)$ için,

$$\begin{aligned} g^{SS}(\widetilde{X}, \widetilde{Y}) &= g^{SS}((X^{VV} + X^{VH} + X^{HV} + X^{HH}), (Y^{VV} + Y^{VH} + Y^{HV} + Y^{HH})) \\ &= g^{SS}(\widetilde{Y}, \widetilde{X}) \end{aligned}$$

olduğundan simetriktir.

iii) *Non-dejenerelik:* g semi-Riemann metriği ise

$$\forall X \in \chi(M) \text{ için } g(X, Y) = 0 \text{ iken } Y = 0$$

dır. $\forall \widetilde{X} \in \chi(TTM)$ ve $\widetilde{Y} = Y^{VV}$ için

$$g^{SS}(\widetilde{X}, Y^{VV}) = g^{SS}(X^{VV} + X^{VH} + X^{HV} + X^{HH}, Y^{VV}) = g^{SS}(X^{VV}, Y^{VV}) = 0$$

eşitliğinden

$$Y^{VV} = 0,$$

$\forall \widetilde{X} \in \chi(TTM)$ ve $\widetilde{Y} = Y^{VH}$ için

$$g^{SS}(\widetilde{X}, Y^{VH}) = g^{SS}(X^{VV} + X^{VH} + X^{HV} + X^{HH}, Y^{VH}) = g^{SS}(X^{VH}, Y^{VH}) = 0$$

eşitliğinden

$$Y^{VH} = 0,$$

$\forall \widetilde{X} \in \chi(TTM)$ ve $\widetilde{Y} = Y^{HV}$ için

$$g^{SS}(\widetilde{X}, Y^{HV}) = g^{SS}(X^{VV} + X^{VH} + X^{HV} + X^{HH}, Y^{HV}) = g^{SS}(X^{HV}, Y^{HV}) = 0$$

eşitliğinden

$$Y^{HV} = 0,$$

$\forall \widetilde{X} \in \chi(TTM)$ ve $\widetilde{Y} = Y^{HH}$ için

$$g^{SS}(\widetilde{X}, Y^{HH}) = g^{SS}(X^{VV} + X^{VH} + X^{HV} + X^{HH}, Y^{HH}) = g^{SS}(X^{HH}, Y^{HH}) = 0$$

eşitliğinden

$$Y^{HH} = 0,$$

olup

$$\forall \widetilde{X} \in \chi(TTM) \text{ için } g^{SS}(\widetilde{X}, \widetilde{Y}) = 0 \text{ iken } \widetilde{Y} = 0$$

bağıntısından TTM üzerinde tanımlı g^{CC} metriği non-dejeneredir.

Böylece (TTM, g^{SS}) bir semi-Riemann manifoldu olur.

Tanım 4.2.8. TTM C^∞ manifoldu üzerinde vektör alanlarının cümlesi $\chi(TTM)$ ve reel değerli C^∞ fonksiyonların halkası $C^\infty(TTM, \mathbb{R})$ olmak üzere

$$g^{KK} : \chi(TTM) \times \chi(TTM) \to C^\infty(TTM, \mathbb{R})$$

dönüşümü

$$\begin{aligned}
g^{KK}(X^{VV}, Y^{VV}) &= g^{KK}(X^{VV}, Y^{HV}) = g^{KK}(X^{HV}, Y^{VV}) = (g(X,Y))^{VV}, \\
g^{KK}(X^{VH}, Y^{VV}) &= g^{KK}(X^{VV}, Y^{VH}) = g^{KK}(X^{HH}, Y^{VV}) = (g(X,Y))^{VV}, \\
g^{KK}(X^{VV}, Y^{HH}) &= g^{KK}(X^{HV}, Y^{VH}) = g^{KK}(X^{VH}, Y^{HV}) = (g(X,Y))^{VV}
\end{aligned}$$

ve diğer vektör alanları üzerindeki değerleri sıfır olacak şekilde tanımlıdır. TTM

üzerinde tanımlı g^{KK} metriğinin uyarlanmış bazlara göre matris gösterimi

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & g_{ij} \\ 0 & 0 & g_{ij} & g_{ij} \\ 0 & g_{ij} & 0 & g_{ij} \\ g_{ij} & g_{ij} & g_{ij} & g_{ij} \end{bmatrix}$$

olur.

Teorem 4.2.9. (M,g) semi-Riemann manifoldu ise (TTM, g^{KK}) semi-Riemann manifoldudur.

İspat: *i) 2-lineerlik:* $\forall \widetilde{X},\ \widetilde{Y},\ \widetilde{Z} \in \chi(TTM)$ ve $\forall \alpha,\ \beta \in \mathbb{R}$ için

$$\begin{aligned} g^{KK}(\alpha\widetilde{X}+\beta\widetilde{Y},\widetilde{Z}) &= g^{KK}(\{(\alpha X+\beta Y)^{VV}+(\alpha X+\beta Y)^{VH}+(\alpha X+\beta Y)^{HV} \\ &\quad +(\alpha X+\beta Y)^{HH}\},\{Z^{VV}+Z^{VH}+Z^{HV}+Z^{HH}\}) \\ &= \alpha g^{KK}(\widetilde{X},\widetilde{Z})+\beta g^{KK}(\widetilde{Y},\widetilde{Z}) \end{aligned}$$

dir. Benzer şekilde

$$g^{KK}(\widetilde{X},\alpha\widetilde{Y}+\beta\widetilde{Z}) = \alpha g^{KK}(\widetilde{X},\widetilde{Y})+\beta g^{KK}(\widetilde{X},\widetilde{Z})$$

olduğu görülür.

ii) Simetriklik: $\forall \widetilde{X},\ \widetilde{Y} \in \chi(TTM)$ için,

$$\begin{aligned} g^{KK}(\widetilde{X},\widetilde{Y}) &= g^{KK}((X^{VV}+X^{VH}+X^{HV}+X^{HH}),(Y^{VV}+Y^{VH}+Y^{HV}+Y^{HH})) \\ &= g^{KK}(\widetilde{Y},\widetilde{X}) \end{aligned}$$

olduğundan simetriktir.

iii) Non-dejenerelik: g semi-Riemann metriği ise

$$\forall X \in \chi(M) \text{ için } g(X,Y)=0 \text{ iken } Y=0$$

dır. $\forall \widetilde{X} \in \chi(TTM)$ ve $\widetilde{Y} = Y^{VV}$ için

$$\begin{aligned}
g^{KK}(\widetilde{X}, Y^{VV}) &= g^{KK}(X^{VV} + X^{VH} + X^{HV} + X^{HH}, Y^{VV}) \\
&= g^{KK}(X^{VV}, Y^{VV}) + g^{KK}(X^{VH}, Y^{VV}) \\
&\quad + g^{KK}(X^{HV}, Y^{VV}) + g^{KK}(X^{HH}, Y^{VV}) \\
&= 4(g(X,Y))^{VV} = 0
\end{aligned}$$

eşitliğinden

$$Y^{VV} = 0,$$

$\forall \widetilde{X} \in \chi(TTM)$ ve $\widetilde{Y} = Y^{VH}$ için

$$\begin{aligned}
g^{KK}(\widetilde{X}, Y^{VH}) &= g^{KK}(X^{VV} + X^{VH} + X^{HV} + X^{HH}, Y^{VH}) \\
&= g^{KK}(X^{VV}, Y^{VH}) + g^{KK}(X^{HV}, Y^{VH}) = 0
\end{aligned}$$

eşitliğinden

$$Y^{VH} = 0,$$

$\forall \widetilde{X} \in \chi(TTM)$ ve $\widetilde{Y} = Y^{HV}$ için

$$\begin{aligned}
g^{KK}(\widetilde{X}, Y^{HV}) &= g^{KK}(X^{VV} + X^{VH} + X^{HV} + X^{HH}, Y^{HV}) \\
&= g^{KK}(X^{VV}, Y^{HV}) + g^{KK}(X^{VH}, Y^{HV}) = 0
\end{aligned}$$

eşitliğinden

$$Y^{HV} = 0,$$

$\forall \widetilde{X} \in \chi(TTM)$ ve $\widetilde{Y} = Y^{HH}$ için

$$\begin{aligned}
g^{KK}(\widetilde{X}, Y^{HH}) &= g^{KK}(X^{VV} + X^{VH} + X^{HV} + X^{HH}, Y^{HH}) \\
&= g^{KK}(X^{VV}, Y^{HH})
\end{aligned}$$

eşitliğinden

$$Y^{HH} = 0,$$

olup

$$\forall \widetilde{X} \in \chi(TTM) \text{ için } g^{KK}(\widetilde{X}, \widetilde{Y}) = 0 \text{ iken } \widetilde{Y} = 0$$

bağıntısından TTM üzerinde tanımlı g^{KK} metriği non-dejeneredir.

Böylece (TTM, g^{KK}) bir semi-Riemann manifoldu olur.

Bu semi-Riemann metriklere sahip olan TTM nin indeksi aşağıdaki teoremler yardımıyla verilebilir.

Teorem 4.2.10. (M, g) Riemann manifoldu ise (TTM, g^{CC}) semi-Riemann manifoldunun indeksi $2n$ dir.

İspat: M de normal koordinatlar göz önüne alınırsa g^{CC} metriğinin matris gösterimi

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & I_{nxn} \\ 0 & 0 & I_{nxn} & 0 \\ 0 & I_{nxn} & 0 & 0 \\ I_{nxn} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

olur. Bu matrisin

$$\det \left[\lambda I_{4nx4n} - g^{C} \right] = (\lambda^2 - 1)^{2n} = 0$$

şeklindeki karakteristik denklemi ilk $2n$ tanesi pozitif sonraki $2n$ tanesi negatif özdeğere sahip olduğundan (TTM, g^{CC}) semi-Riemann manifoldunun indeksi $2n$ dir.

Teorem 4.2.11. (M, g) indeksi ν olan bir semi-Riemann manifoldu ise (TTM, g^{CC}) semi-Riemann manifoldunun indeksi $2n$ dir.

İspat: M de normal koordinatlar göz önüne alınırsa g^{CC} metriğinin matris gösterimi,

$$g^{CC} : \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & I_{\nu}^{n} \\ 0 & 0 & I_{\nu}^{n} & 0 \\ 0 & I_{\nu}^{n} & 0 & 0 \\ I_{\nu}^{n} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

olur. Bu matrisin

$$\det\left[\lambda I_{4nx4n} - g^{CC}\right] = (\lambda^2 - 1)^{2n} = 0$$

şeklindeki karakteristik denklemi $(+,-,+,-,...)$ olacak şekilde $2n$ tanesi pozitif $2n$ tanesi negatif özdeğere sahip olduğundan (TTM, g^{CC}) semi-Riemann manifoldunun indeksi $2n$ dir.

Teorem 4.2.12. (M, g) indeksi $0 \leq \nu \leq n$ olan bir semi-Riemann manifoldu ise (TTM, g^{FF}) semi-Riemann manifoldunun indeksi $2n$ dir.

İspat: M de normal koordinatlar göz önüne alınırsa g^{FF} metriğinin matris gösterimi,

$$\begin{bmatrix} I_\nu^n & I_\nu^n & I_\nu^n & I_\nu^n \\ I_\nu^n & 0 & I_\nu^n & 0 \\ I_\nu^n & I_\nu^n & 0 & 0 \\ I_\nu^n & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

olur. Bu matrisin

$$\det\left[\lambda I_{4nx4n} - g^{FF}\right] = (\lambda^2 - \lambda - 1)^{2n-\nu}(\lambda^2 + \lambda - 1)^{\nu} = 0$$

şeklindeki karakteristik denklemi $(+,-,+,-,...)$ olacak şekilde $2n$ tanesi pozitif $2n$ tanesi negatif özdeğere sahip olduğundan (TTM, g^{FF}) semi-Riemann manifoldunun indeksi $2n$ dir.

Teorem 4.2.13. (M, g) indeksi $0 \leq \nu \leq n$ olan bir semi-Riemann manifoldu ise (TTM, g^{SS}) semi-Riemann manifoldunun indeksi 4ν dür.

İspat: M de normal koordinatlar göz önüne alınırsa, g^{SS} metriğinin matris gösterimi

$$\begin{bmatrix} I_\nu^n & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I_\nu^n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_\nu^n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_\nu^n \end{bmatrix}$$

olduğundan (TTM, g^{SS}) nin indeksinin 4ν olduğu görülür.

Teorem 4.2.14. (M, g) indeksi $0 \leq \nu \leq n$ olan bir semi-Riemann manifoldu ise (TTM, g^{KK}) semi-Riemann manifoldunun indeksi $2n$ dir.

İspat: M de normal koordinatlar göz önüne alınırsa, g^{KK} metriğinin matris gösterimi,

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & I_\nu^n \\ 0 & 0 & I_\nu^n & I_\nu^n \\ 0 & I_\nu^n & 0 & I_\nu^n \\ I_\nu^n & I_\nu^n & I_\nu^n & I_\nu^n \end{bmatrix}$$

olur. Bu matrisin

$$\det\left[\lambda I_{4nx4n} - g^{KK}\right] = (\lambda^2 - \lambda - 1)^{2n-\nu}(\lambda^2 + \lambda - 1)^\nu = 0$$

karakteristik denklemi $(+, -, +, -, ...)$ olacak şekilde $2n$ tanesi pozitif $2n$ tanesi negatif özdeğere sahip olduğundan (TTM, g^{KK}) semi-Riemann manifoldunun indeksi $2n$ dir. Bu metriklerin işaretleri aşağıdaki tablo yardımıyla doğrudan görülebilir.

$n-$ *boyutlu* M *manifoldu*	$4n-$ *boyutlu* TTM *manifoldu*			
g metriği	g^{CC}	g^{FF}	g^{SS}	g^{KK}
Riemann (R)	$2n$ *indeksli* $S.R$	$2n$ *indeksli* $S.R$	R	$2n$ *indeksli* $S.R$
ν *indeksli Semi Riemann* $(S.R)$	$2n$ *indeksli* $S.R$	$2n$ *indeksli* $S.R$	4ν *indeksli* $S.R$	$2n$ *indeksli* $S.R$

4.3. (TTM, g^{CC}) Semi-Riemann Manifoldun Levi-Civita Koneksiyonu

Bu alt bölümde, TTM 4n boyutlu diferensiyellenebilir manifoldun herhangi bir noktasındaki tanjant uzayını geren uyarlanmış baz ve dual baz vektör alanları tanımlandı. Bu uyarlanmış bazların Lie parantez operatörü altındaki değerleri hesaplandı. TTM üzerinde g^{CC} semi-Riemann metriğinin uyarlanmış baz vektör alanları cinsinden ifadesi bulundu. M flat kabul edilerek TTM nin Levi-Civita koneksiyonu bileşenler cinsinden hesaplandı.

M n-boyutlu manifold olsun. $\tau_M : TM \to M$ kanonik projeksiyonu ile tanımlı olan TM, M nin birinci mertebeden tanjant demeti, $\tau_{TM} : TTM \to TM$ olacak şekilde $\tau_M \circ \tau_{TM} : TTM \to M$ kanonik projeksiyonu ile tanımlı olan TTM M nin ikinci mertebeden tanjant demetidir.

$(U, x^i), i = 1, ..., n$ M için lokal bir harita ise $(\tau_M^{-1}(U), x^i \circ \tau_M, y^i)$ TM için lokal bir haritadır. Burada $y^1, ..., y^n$, (U, x^i) lokal haritası ile tanımlı $(\frac{\partial}{\partial x^1}, ..., \frac{\partial}{\partial x^n})$ doğal çatısına göre $\tau_M^{-1}(U)$ daki bir elemanın vektör uzayı koordinatlarıdır.

Benzer şekilde $(U, x^i); i = 1, ..., n$ M içinde lokal bir harita ise $((\tau_M \circ \tau_{TM})^{-1}(U), x^i \circ \tau_M \circ \tau_{TM}, y^i \circ \tau_{TM}, z^i, t^i)$ TTM için lokal bir haritadır. Burada $z^1, ..., z^n$, $(\tau_M^{-1}(U), x^i, y^i)$ lokal haritası ile tanımlı $(\frac{\partial}{\partial x^1}, ..., \frac{\partial}{\partial x^n})$, doğal çatısına göre $(\tau_M \circ \tau_{TM})^{-1}(U)$ daki bir elemanın vektör uzayı koordinatlarıdır ve $t^1, ..., t^n$ $(\tau_M^{-1}(U), x^i, y^i)$ lokal haritası ile tanımlı $(\frac{\partial}{\partial y^1}, ..., \frac{\partial}{\partial y^n})$ doğal çatısına göre $(\tau_M \circ \tau_{TM})^{-1}(U)$ daki bir elemanın vektör uzayı koordinatlarıdır. Bu koordinat fonksiyonları yardımıyla TTM nin M üzerinde $4n-$boyutlu diferensiyellenebilir bir manifold yapısına sahip olduğu (Civelek, 1988) tarafından gösterilmiştir.

TM nin tanjant demeti TTM, TM üzerinde düşey dağılım olarak adlandırılan VTM =Çek$(\tau_M)_*$ integrallenebilen alt vektör demetine sahiptir. TM üzerinde bir non lineer koneksiyon HTM dağılımı ile tanımlı olup, TTM içinde VTM nin tamamlayıcısıdır. Bu dağılıma yatay dağılım denir. Böylece

$$TTM = VTM \oplus HTM$$

dir. (M, g) bir semi-Riemann manifold ve Γ_{ij}^k, M deki ∇ Levi-Civita koneksiyonunun Christoffel sembolleri olsun. (TM, g^S) semi-Riemann manifoldu üzerinde HTM yatay dağılımını geren baz vektörler

$$\delta_i = \frac{\delta}{\delta x^i} = \frac{\partial}{\partial x^i} - N_i^j \frac{\partial}{\partial y^j}$$

dir. Buradaki $N_j^i = y^k \Gamma_{jk}^i$ TM üzerindeki non lineer koneksiyon katsayılarıdır. $(\delta_i = \frac{\delta}{\delta x^i})$ lokal vektör alanlarının sistemi HTM için lokal bir çatıdır. $(\partial_i = \frac{\partial}{\partial y^i})$ lokal vektör alanlarının sistemi VTM için lokal bir çatıdır. (δ_i, ∂_i) TTM nin direkt toplam ayrışımına uyarlanmış TM üzerinde bir lokal çatıdır. $(\delta y^i, dx^i)$ $i = 1, ..., n$ lokal 1-formlarının sistemi

$$\delta y^i = dy^i + N_j^i dx^j$$

olmak üzere $(\delta_i, \partial_i); i = 1, ..., n$ lokal çatısının dual lokal çatısıdır (Oproiu, Papaghiuc, 1998).

TTM nin tanjant demeti $TTTM$, TTM üzerinde düşey dağılım olarak adlandırılan $\widetilde{V}TTM$ =Çek$(\tau_{TM})_*$ integrallenebilen alt vektör demetine sahiptir. TTM üzerinde bir non lineer koneksiyon $\widetilde{H}TTM$ dağılımı ile tanımlı olup, $TTTM$ içinde $\widetilde{V}TTM$ nin tamamlayıcısıdır. Bu dağılıma yatay dağılım denir. Böylece

$$TTTM = \widetilde{V}TTM \oplus \widetilde{H}TTM$$

dir. Ayrıca

$$TTM = VTM \oplus HTM$$

olduğundan

$$TTTM = \widetilde{V}VTM \oplus \widetilde{H}VTM \oplus \widetilde{V}HTM \oplus \widetilde{H}HTM$$

dir. TM nin ikinci mertebeden tanjant demeti $\widetilde{V}VTM$, $\widetilde{H}VTM$, $\widetilde{V}HTM$ ve $\widetilde{H}HTM$ vektör alt demetlerinin direkt toplamı biçiminde yazılabilir. Bu vektör alt demetlerini geren baz vektörleri

$$\begin{aligned}
\widetilde{V}VTM &= Span(\widetilde{\partial}\partial_i),\ i = 1, ..., n, \\
\widetilde{H}VTM &= Span(\widetilde{\delta}\partial_i), \\
\widetilde{V}HTM &= Span(\widetilde{\partial}\delta_i), \\
\widetilde{H}HTM &= Span(\widetilde{\delta}\delta_i)
\end{aligned}$$

dir. Eğer (M, g), ν indeksine sahip bir semi-Riemann manifoldu ise (TTM, g^{CC}) $2n$ indeksli bir semi-Riemann manifoldudur.

M manifoldu üzerinde tanımlı ∇ Levi-Civita koneksiyonu ise TTM manifoldu üzerinde $g^{CC} = g^{HH}$ olur. Ayrıca g^{CC} nin uyarlanmış lokal baz vektör alanları cinsinden ifadesi

$$g^{CC} = 2g_{ij}dx^i\delta t^j + 2g_{ij}\delta y^i\delta z^j$$

dir. Böylece,

$$g^{CC}(\widetilde{\delta}\delta_i, \widetilde{\partial}\partial_j) = g^{CC}(\widetilde{\partial}\delta_i, \widetilde{\delta}\partial_j) = g_{ij}$$

olup diğer tüm uyarlanmış lokal baz vektör alanları üzerindeki değerleri sıfırdır.

Teorem 4.3.1. M flat semi-Riemann manifoldu ve Γ^h_{ji} Christoffel sembolleri olmak üzere (TTM, g^{CC}) semi-Riemann manifoldu üzerindeki uyarlanmış lokal baz vektör alanlarının Lie parantez operatörü altındaki sıfırdan farklı değerleri

$i)$ $[\widetilde{\delta}\delta_i, \widetilde{\partial}\delta_j] = \Gamma^h_{ji}\widetilde{\partial}\delta_h$,

$ii)$ $[\widetilde{\delta}\delta_i, \widetilde{\delta}\partial_j] = \Gamma^h_{ji}\widetilde{\delta}\partial_h$,

$iii)$ $[\widetilde{\delta}\delta_i, \widetilde{\partial}\partial_j] = \Gamma^h_{ji}\widetilde{\partial}\partial_h$

dir.

İspat: TTM manifoldu üzerindeki non lineer koneksiyon katsayıları

$$N^h_i = y^k\Gamma^h_{ki}, \quad Z^h_i = z^k\Gamma^h_{ki}, \quad T^h_i = t^k\Gamma^h_{ki}$$

olmak üzere

i)

$$
\begin{aligned}
[\widetilde{\delta\delta}_i, \widetilde{\partial\delta}_j] &= [\delta_i^h \frac{\partial}{\partial x^h} - N_i^h \frac{\partial}{\partial y^h} - Z_i^h \frac{\partial}{\partial z^h} - \\
&\quad \{T_i^h + z^j y^l(\partial_j \Gamma_{li}^h - \Gamma_{ji}^k \Gamma_{kl}^h)\} \frac{\partial}{\partial t^h}, \frac{\partial}{\partial y^j} - Z_j^k \frac{\partial}{\partial t^k}] \\
&= \Gamma_{ji}^h \widetilde{\partial\delta}_h + z^l R_{lji}^h \widetilde{\partial\partial}_h, \quad R_{lji}^h = 0 \\
&= \Gamma_{ji}^h \widetilde{\partial\delta}_h
\end{aligned}
$$

ii)

$$
\begin{aligned}
[\widetilde{\delta\delta}_i, \widetilde{\delta\partial}_j] &= [\delta_i^h \frac{\partial}{\partial x^h} - N_i^h \frac{\partial}{\partial y^h} - Z_i^h \frac{\partial}{\partial z^h} \\
&\quad -\{T_i^h + z^j y^l(\partial_j \Gamma_{li}^h - \Gamma_{ji}^k \Gamma_{kl}^h)\} \frac{\partial}{\partial t^h}, \frac{\partial}{\partial z^j} - N_j^k \frac{\partial}{\partial t^k}] \\
&= \Gamma_{ji}^h \widetilde{\delta\partial}_h + y^l R_{lji}^h \widetilde{\partial\partial}_h, \quad R_{lji}^h = 0 \\
&= \Gamma_{ji}^h \widetilde{\delta\partial}_h
\end{aligned}
$$

iii)

$$
\begin{aligned}
[\widetilde{\delta\delta}_i, \widetilde{\partial\partial}_j] &= [\delta_i^h \frac{\partial}{\partial x^h} - N_i^h \frac{\partial}{\partial y^h} - Z_i^h \frac{\partial}{\partial z^h} - \{T_i^h + z^j y^l(\partial_j \Gamma_{li}^h - \Gamma_{ji}^k \Gamma_{kl}^h)\} \frac{\partial}{\partial t^h}, \widetilde{\partial\partial}_j] \\
&= -\widetilde{\partial\partial}_j(-T_i^h) \frac{\partial}{\partial t^h} \\
&= \Gamma_{ji}^h \widetilde{\partial\partial}_h
\end{aligned}
$$

dir.

Teorem 4.3.2. Eğer $\overline{\nabla}$ (TTM, g^{CC}) semi-Riemann manifoldunun Levi-Civita koneksiyonu ise $\overline{\nabla}$ nın uyarlanmış lokal bazlara göre bileşenler cinsinden ifadesi

$$
\begin{aligned}
\overline{\nabla}_{\widetilde{\delta\delta}_i} \widetilde{\delta\delta}_j &= \Gamma_{ij}^k \widetilde{\delta\delta}_k, \quad \overline{\nabla}_{\widetilde{\delta\delta}_i} \widetilde{\partial\delta}_j = \Gamma_{ij}^k \widetilde{\partial\delta}_k, \\
\overline{\nabla}_{\widetilde{\delta\delta}_i} \widetilde{\delta\partial}_j &= \Gamma_{ij}^k \widetilde{\delta\partial}_k, \quad \overline{\nabla}_{\widetilde{\delta\delta}_i} \widetilde{\partial\partial}_j = \Gamma_{ij}^k \widetilde{\partial\partial}_k, \\
\overline{\nabla}_{\widetilde{\delta\partial}_i} \widetilde{\delta\delta}_j &= -\Gamma_{ij}^k \widetilde{\partial\partial}_k,
\end{aligned}
$$

olup, diğer tüm bileşenler sıfırdır.

İspat: $\overline{\nabla}_{\widetilde{\delta\delta}_i}\widetilde{\partial\partial}_j = \Gamma_{ij}^k\widetilde{\partial\partial}_k$ eşitliği aşağıdaki gibi ispatlanabilir.

$$\overline{\nabla}_{\widetilde{\delta\delta}_i}\widetilde{\partial\partial}_j = \overline{\Gamma}_{i3n+j}^{k}\widetilde{\delta\delta}_k + \overline{\Gamma}_{i3n+j}^{n+k}\widetilde{\partial\delta}_k + \overline{\Gamma}_{i3n+j}^{2n+k}\widetilde{\delta\partial}_k + \overline{\Gamma}_{i3n+j}^{3n+k}\widetilde{\partial\partial}_k, \quad i,j,k=1,...,n$$

olsun. $\overline{\nabla}$ Levi-Civita koneksiyonu olduğu için Kozsul formülü yardımıyla

$$\begin{aligned}
2g^{CC}(\overline{\nabla}_{\widetilde{\delta\delta}_i}\widetilde{\partial\partial}_j, \widetilde{\delta\delta}_h) &= \widetilde{\delta\delta}_i g^{CC}(\widetilde{\partial\partial}_j, \widetilde{\delta\delta}_h) + \widetilde{\partial\partial}_j g^{CC}(\widetilde{\delta\delta}_h, \widetilde{\delta\delta}_i) - \widetilde{\delta\delta}_h g^{CC}(\widetilde{\delta\delta}_i, \widetilde{\partial\partial}_j) \\
&\quad - g^{CC}(\widetilde{\delta\delta}_i, [\widetilde{\partial\partial}_j, \widetilde{\delta\delta}_h]) + g^{CC}(\widetilde{\partial\partial}_j, [\widetilde{\delta\delta}_h, \widetilde{\delta\delta}_i]) \\
&\quad + g^{CC}(\widetilde{\delta\delta}_h, [\widetilde{\delta\delta}_i, \widetilde{\partial\partial}_j]) \\
2g^{CC}(\overline{\Gamma}_{i3n+j}^{3n+k}\widetilde{\partial\partial}_k, \widetilde{\delta\delta}_h) &= \partial_i g_{jh} - \partial_h g_{ij} + \underbrace{g_{ki}\Gamma_{jh}^k + g_{hk}\Gamma_{ji}^k}_{\partial_j g_{hi}} \\
2g_{kh}\overline{\Gamma}_{i3n+j}^{3n+k} &= \partial_i g_{jh} + \partial_j g_{hi} - \partial_h g_{ij}
\end{aligned}$$

olup

$$\overline{\Gamma}_{i3n+j}^{3n+k} = \frac{1}{2}g^{hk}\{\partial_i g_{jh} + \partial_j g_{hi} - \partial_h g_{ij}\} = \Gamma_{ji}^k$$

olur. Diğer bileşenleri sıfırdır. Böylece, $\overline{\nabla}_{\widetilde{\delta\delta}_i}\widetilde{\partial\partial}_j = \Gamma_{ij}^k\widetilde{\partial\partial}_k$ olduğu görülür. Benzer hesaplamalar farklı uyarlanmış lokaz baz vektör alanları için de yapılabilir.

5. BİR SEMİ-RİEMANN MANİFOLDUN KOTANJANT DEMETİ ÜZERİNDEKİ SEMİ-RİEMANN METRİKLER

Bu bölümde, kotanjant demetin Sasaki semi-Riemann metriğine bağlı diferensiyel geometrisi ile bir Hamilton uzayının kotanjant demetinin diferensiyel geometrisi, bu demetin üzerinde tanımlı semi-Riemann metriğine göre incelendi. Ayrıca kotanjant demet üzerinde iki semi-Riemann metrik tanımlanarak metriklerin işaretleri incelendi.

5.1. ${}^{S}g$ Sasaki Semi-Riemann Metrikli $T^{*}M$ Manifoldun Diferensiyel Geometrisi

Bu alt bölümde, M deki tanjant vektörlerin g semi-Riemann metriğine bağlı causal karekteri ile bu vektörlerin ve bu vektörler ile birleşen 1-formların sırasıyla $T^{*}M$ ye yatay ve düşey yükseltilmesiyle elde edilen tanjant vektörlerin $T^{*}M$ üzerindeki ${}^{S}g$ Sasaki semi-Riemann metriğine bağlı causal karakterinin aynı olduğu bulundu. $(T^{*}M, {}^{S}g)$ semi-Riemann manifoldunun Levi-Civita koneksiyonu ve Riemann eğrilik tensörü bileşenler cinsinden hesaplandı. $(T^{*}M, {}^{S}g)$ semi-Riemann manifoldu üzerinde jeodeziklerin diferensiyel denklemleri elde edilerek M deki eğrilerin $T^{*}M$ ye yatay ve doğal yükseltilmesiyle elde edilen eğriler için bazı sonuçlar verildi.

M, n-boyutlu diferensiyellenebilir bir manifold ve $T^{*}M$, M nin kotanjant demeti olsun. Eğer x^{i}, $i = 1, ..., n$, $m \in M$ noktasının U komşuluğundaki lokal koordinatlar ise $T^{*}M$ nin bir elemanı olan p kovektörü (x^{i}, p_{i}) $i = 1, ..., n$ indirgenmiş koordinatlara sahiptir. Buradaki p_{i}, p kovektörünün lokal koordinat fonksiyonlarıdır. π, $T^{*}M$ den M ye doğal bir izdüşüm olmak üzere

$$(x^{i}, p_{i}) = (x^{i}, x^{\bar{i}}) = (x^{A}), i = 1, ..., n; \bar{i} = n+1, ..., 2n; A = 1, ..., 2n,$$

$\pi^{-1}(U)$ üzerindeki lokal koordinatlardır

Bu bölümde, diferensiyel geometrik objelerin indisleri $i, j, ...$ ve $A, B, ...$ sembolleri ile veriliyorsa indirgenmiş koordinatlara göre gösterimi, $\alpha, \beta, ...$ sembolleri ile veriliyorsa uyarlanmış bazlara göre gösterimi ifade eder.

T^*M manifoldu üzerinde tanımlı vektör alanlarının ve ${}^S g$ Sasaki semi-Riemann metriğinin indirgenmiş koordinatlar ve uyarlanmış koordinatlara göre matris gösterimleri aşağıdaki şekilde verilir.

g, M nin U koordinat komşuluğu içinde bileşenleri g_{ji} olan bir semi-Riemann metriği ve Γ^h_{ji}, g_{ji} ile elde edilen Christoffel sembollerini ve $\Im^r_s(M)$ modülü, M deki diferensiyellenebilir fonksiyonların $C^\infty(T^*M, \mathbb{R})$ halkası üzerinde, tüm (r,s) tipinden C^∞ tensör alanlarını göstersin. $X \in \Im^1_0(M)$ ve $\omega \in \Im^0_1(M)$ için X in yatay yükseltilmişi X^H, X in tam yükseltilmişi X^C ve ω nın düşey yükseltilmişi ω^V, $(x^h, x^{\overline{h}})$ indirgenmiş koordinatlarına göre

$$X^H = \begin{pmatrix} X^h \\ p_m \Gamma^m_{hi} X^i \end{pmatrix}, \qquad X^C = \begin{pmatrix} X^h \\ -p_m \partial_h X^m \end{pmatrix}, \qquad \omega^V = \begin{pmatrix} 0 \\ \omega^h \end{pmatrix} \tag{5.1.1}$$

şeklinde tanımlıdır. Burada X^h ve ω_h, sırasıyla X ve ω nın lokal bileşenleridir. M nin her bir (U, x^h) $1 \leq h \leq n$ koordinat komşuluğu içinde

$$X_{(j)} = \frac{\partial}{\partial x^j} \qquad , \qquad \omega^{(j)} = dx^j$$

lokal baz ve dual baz vektör alanları vardır. Bu vektör alanlarının (5.1.1) de yerine konulmasıyla $(X_{(j)})^H$ ve $\left(\omega^{(j)}\right)^V$ (x^h, p_h) indirgenmiş koordinatlarına göre aşağıdaki gibi elde edilir.

$$\begin{aligned} \left(X_{(j)}\right)^H &= \left(A^B_j\right) = \begin{pmatrix} \delta^h_j \\ p_m \Gamma^m_{jh} \end{pmatrix} = \frac{\partial}{\partial x^j} + p_m \Gamma^m_{jh} \frac{\partial}{\partial p_h} = \frac{\delta}{\delta x^j} \\ \left(\omega^{(j)}\right)^V &= \left(A^B_{\overline{j}}\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ \delta^h_j \end{pmatrix} = \frac{\partial}{\partial p_j} \end{aligned}$$

Bu $\{(X_{(j)})^H, \left(\omega^{(j)}\right)^V\} = \{\frac{\delta}{\delta x^j}, \frac{\partial}{\partial p_j}\}$ kümesine $\pi^{-1}(U) \subset T^*M$ nin *uyarlanmış lokal çatısı*, $\frac{\delta}{\delta x^j}$ ye *yatay baz vektör alanı* ve $\frac{\partial}{\partial p_j}$ ye *düşey baz vektör alanı* denir. Bu çatı

$$A_{(j)} = (A^B_j) = (X_{(j)})^H \qquad , \qquad A_{(\overline{j})} = (A^B_{\overline{j}}) = \left(\omega^{(j)}\right)^V$$

eşitlikleri yardımıyla $\left\{A_{(\beta)}\right\} = \left\{A_{(j)}, A_{(\bar{j})}\right\}$ baz vektör alanları ile de temsil edilir. Ayrıca

$$\left(A^B_\beta\right) = \begin{pmatrix} A^B_j & A^B_{\bar{j}} \end{pmatrix} \quad ; \beta = 1, ..., 2n$$

matris formunda da yazılabilir. Bu matrisin tersi

$$\left(A^A_B\right) = \begin{pmatrix} B^h_B & C^{\bar{h}}_B \end{pmatrix}$$

$\pi^{-1}(U) \subset T^*M$ nin uyarlanmış lokal dual çatısını gösterir. Bu matrisin bileşenleri aşağıdaki eşitlikleri sağlayacak şekilde

$$\begin{aligned} A^{(j)} &= \left(A^h_B\right) = \begin{pmatrix} \delta^h_j & 0 \end{pmatrix} = dx^j \\ A^{(\bar{j})} &= \left(A^{\bar{h}}_B\right) = \begin{pmatrix} -p_m\Gamma^m_{hj} & \delta_{hj} \end{pmatrix} = dp_j - p_m\Gamma^m_{hj}dx^h = \delta p_j \end{aligned} \tag{5.1.2}$$

T^*M üzerinde 2n tane lokal 1-form tanımlar. Böylece $\left\{A^{(\alpha)}\right\} = \left\{A^{(j)}, A^{(\bar{j})}\right\}$ şeklindeki çatı $\left\{A_{(\beta)}\right\}$ uyarlanmış çatısının duali olur. Yani

$$A^{(\alpha)}_B A^B_{(\beta)} = \delta^\alpha_\beta$$

dır. Yukardaki dx^j, $\frac{\delta}{\delta x^j}$ nin dual baz 1-formu olduğu için y*atay dual baz 1-form*, δp_j de, $\frac{\partial}{\partial p_j}$ nin dual baz 1-formu olduğu için d*üşey dual baz 1-form* olarak adlandırılır.

M manifoldu üzerindeki g Riemann ya da semi-Riemann metriğinin T^*M manifoldu üzerine diagonal yükseltilmişi uyarlanmış koordinatlara göre

$${}^S g = g_{\beta\alpha}dx^\beta \otimes dx^\alpha = g_{ji}dx^j \otimes dx^i + g^{ji}\delta p_i \otimes \delta p_j \tag{5.1.3}$$

ile ifade edilir. M deki g tensör alanının diagonal yükseltilmişi ${}^S g$ T^*M içinde $(0, 2)$ tipinde bir tensör alanı olup (5.1.2) ve (5.1.3) den $\{dx^j, \delta p_j\}$ uyarlanmış lokal dual çatısına göre

$$(g_{\beta\alpha}) = \begin{pmatrix} g_{ji} & 0 \\ 0 & g^{ji} \end{pmatrix} \tag{5.1.4}$$

ve (x^j, p_j) indirgenmiş koordinatlarına göre

$$(g_{AB}) = \begin{pmatrix} g_{ji} + g^{ks}\Gamma^m_{jk}\Gamma^l_{is}p_m p_l & -g^{is}\Gamma^l_{js}p_l \\ g^{js}\Gamma^l_{is}p_l & g^{ji} \end{pmatrix} \tag{5.1.5}$$

şeklinde matris gösterimlerine sahiptir.

Teorem 5.1.1. M manifoldu üzerindeki g metriği indeksi ν olan bir semi-Riemann metriği ise T^*M manifoldu üzerine diagonal yükseltilmişi, uyarlanmış koordinatlara göre

$$^{S}g = g_{\beta\alpha}dx^\beta \otimes dx^\alpha = g_{ji}dx^j \otimes dx^i + g^{ji}\delta p_i \otimes \delta p_j \tag{5.1.6}$$

ifadesine sahip, indeksi 2ν olan semi-Riemann metriğidir.

İspat: M manifoldunun bir m noktasını içine alan U komşuluğu, normal komşuluk olarak seçilirse $g_{ji}(m) = \varepsilon_j \delta_{ji}$ ve $\Gamma^k_{ji}(m) = 0$ olur. Buradaki

$$\varepsilon_i = \begin{cases} -1, & 1 \le i \le \nu \\ 1, & \nu + 1 \le i \le n \end{cases}$$

dir. M nin U normal komşuluğu içinde tanımlanan g semi-Riemann metriğinin diagonal yükseltilmişi T^*M de $\{dx^j, \delta p_j\}$ uyarlanmış lokal dual çatısına göre

$$\left(g_{\beta\alpha}(\pi^{-1}\{m\})\right) = \begin{pmatrix} g_{ji}(m) & 0 \\ 0 & g^{ji}(m) \end{pmatrix}$$

lokal bileşenlere sahiptir. $g_{ji}(m) = \varepsilon_j \delta_{ji}$ ve $g^{ji}(m) = \varepsilon_j \delta_{ji}$ olduğundan

$$g_{\beta\alpha} = \varepsilon_\beta \delta_{\beta\alpha}$$

dır. Burada

$$\varepsilon_\beta = \begin{cases} -1, & 1 \le \beta \le \nu \quad ; \quad n + 1 \le \beta \le n + \nu \\ 1, & \nu + 1 \le \beta \le n \quad ; \quad n + \nu + 1 \le \beta \le 2n \end{cases} \tag{5.1.7}$$

dır. Ayrıca

$$\varepsilon_j = \varepsilon_{n+j} \quad 1 \leq j \leq n$$

olur. Böylece $(T^*M, {}^S g)$ indeksi 2ν olan semi-Riemann metriğidir.

Teorem 5.1.2. (M, g) semi-Riemann manifoldunun diagonal yükseltilmesiyle elde edilen $(T^*M, {}^S g)$ semi-Riemann manifoldu üzerinde, $\frac{\delta}{\delta x^j}$ ve $\frac{\partial}{\partial p_j}$ yatay ve düşey lokal baz vektör alanları için

$$\begin{aligned} {}^S g\,(\frac{\delta}{\delta x^i}, \frac{\delta}{\delta x^j}) &= g_{ij}, \quad g(\frac{\partial}{\partial p_i}, \frac{\partial}{\partial p_j}) = g^{ij} \\ {}^S g\,(\frac{\partial}{\partial p_i}, \frac{\delta}{\delta x^j}) &= {}^S g\,(\frac{\delta}{\delta x^i}, \frac{\partial}{\partial p_j}) = 0 \end{aligned} \tag{5.1.8}$$

dır.

İspat: ${}^S g = g_{\beta\alpha} dx^\beta \otimes dx^\alpha = g_{kh} dx^k \otimes dx^h + g^{kh} \delta p_k \otimes \delta p_h$ semi-Riemann metriği için

$$\begin{aligned} dx^j(\frac{\delta}{\delta x^i}) &= \delta_i^j \quad ; \quad dx^j(\frac{\partial}{\partial p_i}) = 0 \\ \delta p_j(\frac{\delta}{\delta x^i}) &= 0 \quad ; \quad \delta p_j(\frac{\partial}{\partial p_i}) = \delta_i^j \end{aligned}$$

eşitliklerinin kullanılmasıyla

$$\begin{aligned} {}^S g\,(\frac{\delta}{\delta x^i}, \frac{\delta}{\delta x^j}) &= (g_{kh})^V dx^k(\frac{\delta}{\delta x^i}) dx^h(\frac{\delta}{\delta x^j}) + \left(g^{kh}\right)^V \underbrace{\delta p_k(\frac{\delta}{\delta x^i})}_{0} \underbrace{\delta p_h(\frac{\delta}{\delta x^j})}_{0} \\ &= (g_{kh})^V \delta_i^k \delta_j^h = (g_{ij})^V, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} {}^S g\,(\frac{\partial}{\partial p_i}, \frac{\partial}{\partial p_j}) &= (g_{kh})^V \underbrace{dx^k(\frac{\partial}{\partial p_i})}_{0} \underbrace{dx^h(\frac{\partial}{\partial p_j})}_{0} + \left(g^{kh}\right)^V \delta p_k(\frac{\partial}{\partial p_i}) \delta p_h(\frac{\partial}{\partial p_j}) \\ &= \left(g^{kh}\right)^V \delta_i^k \delta_j^h = \left(g^{ij}\right)^V, \end{aligned}$$

$${}^S g\,(\frac{\partial}{\partial p_i}, \frac{\delta}{\delta x^j}) = (g_{kh})^V \underbrace{dx^k(\frac{\partial}{\partial p_i})}_{0} dx^h(\frac{\delta}{\delta x^j}) + \left(g^{kh}\right)^V \delta p_k(\frac{\partial}{\partial p_i}) \underbrace{\delta p_h(\frac{\delta}{\delta x^j})}_{0}$$

$$= \; 0,$$

$$^{S}g\,(\frac{\delta}{\delta x^i},\frac{\partial}{\partial p_j}) = (g_{kh})^V dx^k(\frac{\delta}{\delta x^i}) \underbrace{dx^h(\frac{\partial}{\partial p_j})}_{0} + \left(g^{kh}\right)^V \underbrace{\delta p_k(\frac{\delta}{\delta x^i})}_{0} \delta p_h(\frac{\partial}{\partial p_j})$$
$$= \; 0.$$

olduğu görülür.

Teorem 5.1.3. $\forall m \in M$, $\forall X_m \in T_m(M)$, ve $\forall \omega_m \in T_m^*(M)$ $\pi(\theta) = m$ olacak şekilde $\forall \omega_\theta^V, X_\theta^H \in T_\theta(T^*M)$ ve $(T^*M, {}^Sg)$ semi-Riemann manifoldu için

i) X_m ve ω_m, sırasıyla, space-like bir vektör ve space-like bir vektör üzerinde değer alan 1-form ise X_θ^H ve ω_θ^V, $(T^*M, {}^Sg)$ semi-Riemann manifoldu için space-like vektörlerdir.

ii) X_m ve ω_m, sırasıyla, time-like bir vektör ve time-like bir vektör üzerinde değer alan 1-form ise X_θ^H ve ω_θ^V, $(T^*M, {}^Sg)$ semi-Riemann manifoldu için time-like vektörlerdir.

iii) X_m ve ω_m, sırasıyla, light-like (null) bir vektör ve light-like (null) bir vektör üzerinde değer alan 1-form ise X_θ^H ve ω_θ^V, $(T^*M, {}^Sg)$ semi-Riemann manifoldu için light-like (null) vektörlerdir.

İspat: (M, g) semi-Riemann manifoldu için X_m ve ω_m, space-like bir vektör ve space-like bir vektör üzerinde değer alan 1-form ise $g(X_m, X_m) > 0$ ya da $X_m = 0$ ve $\widetilde{g}(\omega_m, \omega_m) > 0$ ya da ω_m, 0 vektörü üzerinde değer alan bir 1-form olur. Burada $\widetilde{g}$ M manifoldu üzerinde tanımlı bileşenleri g semi-Riemann metriğinin tersi olan $(2, 0)$ tipinde bir tensör alanıdır. Teorem 3.2.2 yardımıyla

$$\begin{aligned} {}^Sg\,(\omega_\theta^V, \omega_\theta^V) &> 0 \text{ veya } \omega_\theta^V = 0 \\ {}^Sg\,(X_\theta^H, X_\theta^H) &> 0 \text{ veya } X_\theta^H = 0 \end{aligned}$$

bulunur. X_θ^H ve ω_θ^V tanjant vektörleri space-like vektörlerdir. Diğer iddialarda benzer şekilde ispatlanır.

Teorem 5.1.4. $\theta \in T^*M$ noktası üzerindeki $T_\theta(T^*M)$ tanjant vektör uzayını geren $\frac{\delta}{\delta x^i}, \frac{\partial}{\partial p_i}$ yatay ve düşey baz vektör alanları için

i) $[\frac{\delta}{\delta x^i}, \frac{\delta}{\delta x^j}] = p_m R^m_{jih} \frac{\partial}{\partial p_h}$,

ii) $[\frac{\delta}{\delta x^i}, \frac{\partial}{\partial p_j}] = -\Gamma^j_{ih} \frac{\partial}{\partial p_h}$,

iii) $[\frac{\partial}{\partial p_i}, \frac{\partial}{\partial p_j}] = 0$

dır.

İspat: (i)

$$
\begin{aligned}
[\frac{\delta}{\delta x^i}, \frac{\delta}{\delta x^j}] &= [\frac{\partial}{\partial x^i} + N_{ih}\frac{\partial}{\partial p_h}, \frac{\partial}{\partial x^j} + N_{jk}\frac{\partial}{\partial p_k}], \qquad N_{ih} = p_l \Gamma^l_{ih} \\
&= \underbrace{\frac{\partial N_{jk}}{\partial x^i}\frac{\partial}{\partial p_k}}_{k\leftrightarrow h} - \frac{\partial N_{ih}}{\partial x^j}\frac{\partial}{\partial p_h} + N_{jk}\frac{\partial N_{ih}}{\partial p_k}\frac{\partial}{\partial p_h} - \underbrace{N_{ih}\frac{\partial N_{jk}}{\partial p_h}\frac{\partial}{\partial p_k}}_{k\leftrightarrow h} - \\
&= p_m\{\frac{\partial \Gamma^m_{jh}}{\partial x^i} - \frac{\partial \Gamma^m_{ih}}{\partial x^j} + \Gamma^m_{kj}\Gamma^k_{ih} - \Gamma^m_{ih}\Gamma^h_{jk}\}\frac{\partial}{\partial p_h} \\
&= p_m R^m_{jih}\frac{\partial}{\partial p_h}
\end{aligned}
$$

dır

ii)

$$
\begin{aligned}
[\frac{\delta}{\delta x^i}, \frac{\partial}{\partial p_j}] &= [\frac{\partial}{\partial x^i} + N_{ih}\frac{\partial}{\partial p_h}, \frac{\partial}{\partial p_j}] = -\frac{\partial N_{ih}}{\partial p_j}\frac{\partial}{\partial p_h} \\
&= -\Gamma^j_{ih}\frac{\partial}{\partial p_h}
\end{aligned}
$$

dır

iii) $X \in \Im^1_0(M)$ için

$$
\begin{aligned}
[\frac{\partial}{\partial p_i}, \frac{\partial}{\partial p_j}](\gamma X) &= \frac{\partial}{\partial p_i}(\frac{\partial}{\partial p_j}(p_k(X^k)^V)) - \frac{\partial}{\partial p_j}(\frac{\partial}{\partial p_i}(p_k(X^k)^V)) \\
&= \underbrace{\frac{\partial}{\partial p_i}(X^j)^V}_{0} - \underbrace{\frac{\partial}{\partial p_j}(X^i)^V}_{0} = 0
\end{aligned}
$$

dır

Teorem 5.1.5 (M, g), ∇ Levi-Civita koneksiyonuna sahip bir semi-Riemann manifold ve $(T^*M, {}^Sg)$ de $\widetilde{\nabla}$ Levi-Civita koneksiyonuna sahip bir semi-Riemann manifoldu olsun. $\delta_i = \frac{\delta}{\delta x^i}$ ve $\dot{\partial}_i = \frac{\partial}{\partial p_i}$ olmak üzere $\widetilde{\nabla}$ Levi-Civita koneksiyonunun bileşenleri,

$$
\begin{aligned}
\widetilde{\nabla}_{\delta_i}\delta_j &= \widetilde{\Gamma}^k_{ij}\delta_k + \widetilde{\Gamma}^{\overline{k}}_{ij}\,\dot{\partial}_k \quad ; \quad \widetilde{\nabla}_{\delta_i}\,\dot{\partial}_j = \widetilde{\Gamma}^k_{i\overline{j}}\delta_k + \widetilde{\Gamma}^{\overline{k}}_{i\overline{j}}\,\dot{\partial}_k \\
\widetilde{\nabla}_{\dot{\partial}_i}\delta_j &= \widetilde{\Gamma}^k_{\overline{i}j}\delta_k + \widetilde{\Gamma}^{\overline{k}}_{\overline{i}j}\,\dot{\partial}_k \quad ; \quad \widetilde{\nabla}_{\dot{\partial}_i}\,\dot{\partial}_j = \widetilde{\Gamma}^k_{\overline{i}\overline{j}}\delta_k + \widetilde{\Gamma}^{\overline{k}}_{\overline{i}\overline{j}}\,\dot{\partial}_k
\end{aligned}
$$

olup, M manifoldu üzerinde g_{ij} bileşenleri tarafından belirlenen Christoffel sembolleri Γ^k_{ij} ve ∇ Levi-Civita koneksiyonuna bağlı Riemann eğrilik tensörünün bileşenleri R^k_{hji} olmak üzere $\widetilde{\nabla}$ koneksiyonunun katsayıları,

$$
\begin{aligned}
\widetilde{\Gamma}^k_{ij} &= \Gamma^k_{ij}, \quad \widetilde{\Gamma}^{\overline{k}}_{ij} = \frac{1}{2}R^m_{ijh}p_m, \\
\widetilde{\Gamma}^k_{i\overline{j}} &= \frac{1}{2}R_i^{hjm}p_m, \quad \widetilde{\Gamma}^{\overline{k}}_{i\overline{j}} = -\Gamma^j_{ih} \\
\widetilde{\Gamma}^k_{\overline{i}j} &= \frac{1}{2}R_j^{him}p_m, \quad \widetilde{\Gamma}^{\overline{k}}_{\overline{i}j} = 0, \\
\widetilde{\Gamma}^k_{\overline{i}\overline{j}} &= 0, \quad \widetilde{\Gamma}^{\overline{k}}_{\overline{i}\overline{j}} = 0
\end{aligned}
\tag{5.1.9}
$$

dır. Burada $R_i^{hjm} = g^{hl}g^{kj}R^m_{lik}$ dır.

İspat: Sadece $\widetilde{\nabla}$ Levi-Civita koneksiyonunun $\widetilde{\Gamma}^k_{ij}$ katsayısı için bir ispat verilecektir. $\widetilde{\nabla}$, $(T^*M, {}^Sg)$ semi-Riemann manifoldunun Levi-Civita koneksiyonu olduğu için

$$
\begin{aligned}
2g^S(\widetilde{\nabla}_{\dot{\partial}_i}\delta_j, \dot{\partial}_h) &= \dot{\partial}_i\ {}^Sg\,(\delta_j, \dot{\partial}_h) + \delta_j\ {}^Sg\,(\dot{\partial}_h, \dot{\partial}_i) - \dot{\partial}_h\ {}^Sg\,(\dot{\partial}_i, \delta_j) \\
&\quad - {}^Sg\,(\dot{\partial}_i, \underbrace{[\delta_j, \dot{\partial}_h]}_{-\Gamma^h_{jk}\dot{\partial}_k}) + {}^Sg\,(\delta_j, [\dot{\partial}_h, \dot{\partial}_i]) + {}^Sg\,(\dot{\partial}_h, \underbrace{[\dot{\partial}_i, \delta_j]}_{\Gamma^i_{jk}\dot{\partial}_k})
\end{aligned}
$$

Kozsul formülünü sağlar. Teorem 5.1.2, Teorem 5.1.4 ve düşey vektör alanlarının bir fonksiyonun düşey yükseltilmişi üzerinde sıfır değerini alması tanımı gereğince

$$
2\ {}^Sg\,(\widetilde{\Gamma}^{\overline{k}}_{\overline{i}j}\,\dot{\partial}_k, \dot{\partial}_h) = \frac{\partial g^{hi}}{\partial x^j} + g^{ik}\Gamma^h_{jk} + g^{hk}\Gamma^i_{jk}
$$

ve

$$-\partial_j \widetilde{g}(dx^h, dx^i) = -\frac{\partial g^{hi}}{\partial x^j} = g^{ik}\Gamma^h_{jk} + g^{hk}\Gamma^i_{jk}$$

olduğundan,

$$\widetilde{\Gamma}^{\bar{k}}_{\bar{i}j} = 0$$

elde edilir. Diğerleri de benzer şekilde ispatlanabilir.

Teorem 5.1.6. $(T^*M, {}^S g)$ semi-Riemann manifoldunun $\widetilde{\nabla}$ Levi-Civita koneksiyonuna bağlı $\widetilde{K}$ Riemann eğrilik tensörünün bileşenler cinsinden ifadesi

$$\begin{aligned}
\widetilde{K}(\delta_i, \delta_j)\delta_k &= \widetilde{K}^h_{kij}\delta_h + \widetilde{K}^{\bar{h}}_{kij}\,\dot{\partial}_h, \quad \widetilde{K}(\delta_i, \delta_j)\,\dot{\partial}_k = \widetilde{K}^h_{\bar{k}ij}\delta_h + \widetilde{K}^{\bar{h}}_{\bar{k}ij}\,\dot{\partial}_h \\
\widetilde{K}(\delta_i, \dot{\partial}_j)\delta_k &= \widetilde{K}^h_{kij}\delta_h + \widetilde{K}^{\bar{h}}_{ki\bar{j}}\,\dot{\partial}_h, \quad \widetilde{K}(\delta_i, \dot{\partial}_j)\,\dot{\partial}_k = \widetilde{K}^h_{\bar{k}i\bar{j}}\delta_h + \widetilde{K}^{\bar{h}}_{\bar{k}i\bar{j}}\,\dot{\partial}_h \\
\widetilde{K}(\dot{\partial}_i, \dot{\partial}_j)\delta_k &= \widetilde{K}^h_{k\bar{i}\bar{j}}\delta_h + \widetilde{K}^{\bar{h}}_{k\bar{i}\bar{j}}\,\dot{\partial}_h, \quad \widetilde{K}(\dot{\partial}_i, \dot{\partial}_j)\,\dot{\partial}_k = \widetilde{K}^h_{\bar{k}\bar{i}\bar{j}}\delta_h + \widetilde{K}^{\bar{h}}_{\bar{k}\bar{i}\bar{j}}\,\dot{\partial}_h
\end{aligned}$$

olmak üzere sıfırdan farklı bileşenleri

$$\begin{aligned}
\widetilde{K}^h_{kij} &= R^h_{kij} + \frac{1}{4}p_m p_n(R^m_{ajk}R^{han}_i - R^m_{aik}R^{han}_j - 2R^m_{aij}R^{han}_k) \\
\widetilde{K}^{\bar{h}}_{kij} &= \frac{1}{2}p_m(\nabla_i R^m_{hjk} - \nabla_j R^m_{hik}) \\
\widetilde{K}^h_{\bar{k}ij} &= \frac{1}{2}p_m(\nabla_i R^{hkm}_j - \nabla_j R^{hkm}_i) \\
\widetilde{K}^{\bar{h}}_{\bar{k}ij} &= -R^k_{hij} + \frac{1}{4}p_m p_n(R^{akm}_j R^n_{hia} - R^{akm}_i R^n_{hja}) \qquad (5.1.10) \\
\widetilde{K}^h_{ki\bar{j}} &= \frac{1}{2}p_m\nabla_i R^{hjm}_k \\
\widetilde{K}^{\bar{h}}_{ki\bar{j}} &= \frac{1}{2}R^j_{hik} + \frac{1}{4}p_m p_n(R^{ajm}_i R^n_{hia}) \\
\widetilde{K}^h_{\bar{k}i\bar{j}} &= \frac{1}{2}R^{hkj}_i + \frac{1}{4}p_m p_n(R^{akm}_i R^{hjn}_a) \\
\widetilde{K}^h_{k\bar{i}\bar{j}} &= \frac{1}{2}(R^{hji}_k - R^{hij}_k) + \frac{1}{4}p_m p_n(R^{ajm}_k R^{hin}_a - R^{aim}_k R^{hin}_a)
\end{aligned}$$

dır.

İspat: (5.1.9) daki eşitliklerin kullanılmasıyla

$$\begin{aligned}
K(\delta_i, \delta_j)\delta_k &= \widetilde{\nabla}_{\delta_i}\widetilde{\nabla}_{\delta_j}\delta_k - \widetilde{\nabla}_{\delta_j}\widetilde{\nabla}_{\delta_i}\delta_k - \widetilde{\nabla}_{[\delta_i,\delta_j]}\delta_k \\
&= \widetilde{\nabla}_{\delta_i}\{\Gamma^h_{jk}\delta_h + \frac{1}{2}p_m R^m_{hjk}\,\dot{\partial}_h\} - \widetilde{\nabla}_{\delta_j}\{\Gamma^h_{ik}\delta_h + \frac{1}{2}p_m R^m_{hik}\,\dot{\partial}_h\} - p_m R^m_{hji}\widetilde{\nabla}_{\dot{\partial}_h}\delta_k
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
= \quad & \{R_{kij}^{h} + \frac{1}{4} p_m p_n (R_{ajk}^{m} R_i^{han} - R_{aik}^{m} R_j^{han} - 2R_{aij}^{m} R_k^{han})\}\delta_h + \\
& + \frac{1}{2} p_m (\nabla_i R_{hjk}^{m} - \nabla_j R_{hik}^{m}) \,\dot{\partial}_h
\end{aligned}
$$

eşitliği elde edilir. Diğerleri de benzer şekilde ispatlanır.

Sonuç 5.1.7. $(T^*M, {}^S g)$ semi-Riemann manifoldunun flat olması için gerek ve yeter şart (M, g) semi-Riemann manifoldunun flat olmasıdır.

Tanım 5.1.8. c, (M, g) semi-Riemann manifoldu üzerinde $x^h = x^h(t)$ ile lokal olarak ifade edilen bir eğri ve $\omega_h(t)$ de c boyunca paralel bir vektör alanı üzerinde değer alan bir 1-form ise $(T^*M, {}^S g)$ semi-Riemann manifoldu üzerinde

$$
x^h = x^h(t) \qquad ; \qquad p_h = \omega_h(t) \tag{5.1.11}
$$

bileşenleri ile verilen $\widetilde{c}$ eğrisine M üzerinde bir c eğrisinin *yatay yükseltilmişi* denir. (Akbulut, Özdemir, Salimov, 2001)

Eğer $p_h = \omega_h(t)$ c eğrisinin $X^i = \frac{dx^i}{dt}$ teğet vektör alanı ile birleştirilmiş kovektör alanı ise (5.1.11) ile tanımlanan $\widetilde{c}$ eğrisine c eğrisinin *doğal yükseltilmişi* denir.

Teorem 5.1.9. Eğer t, ${}^S g$ semi-Riemann metriğine sahip T^*M üzerinde bir eğrinin yay uzunluğu parametresi ise T^*M üzerinde jeodeziklerin denklemleri uyarlanmış koordinatlara göre

$$
\begin{aligned}
\frac{\delta^2 x^h}{dt^2} + p_h R_j^{him} \frac{dx^i}{dt} \frac{\delta p_i}{dt} &= 0 \\
\frac{\delta^2 p_h}{dt^2} &= 0
\end{aligned}
$$

dir

İspat: t yay uzunluğu parametresine göre T^*M üzerinde jeodeziklerin denklemleri indirgenmiş koordinatlara göre

$$
\frac{\delta^2 x^A}{dt^2} = \frac{d^2 x^A}{dt^2} + \widetilde{\Gamma}_{CB}^{A} \frac{dx^C}{dt} \frac{dx^B}{dt} = 0
$$

olur. Bu denklem aşağıdaki eşitlikler yardımıyla uyarlanmış koordinatlar cinsinden

$$\begin{aligned} \theta^h &= A^h_B dx^B = dx^h \\ \theta^{\overline{h}} &= B^{\overline{h}}_B dx^B = \delta p_h \end{aligned} \tag{5.1.12}$$

ve

$$\begin{aligned} \frac{\theta^h}{dt} &= \frac{dx^h}{dt} \\ \frac{\theta^{\overline{h}}}{dt} &= \frac{\delta p_h}{dt} \end{aligned}$$

eşitlikleri yardımıyla

$$\frac{d}{dt}(\frac{\theta^A}{dt}) + \widetilde{\Gamma}^\alpha_{\gamma\beta}\frac{\theta^\gamma}{dt}\frac{\theta^\beta}{dt} = 0 \tag{5.1.13}$$

biçiminde ifade edilir. $\widetilde{\Gamma}$ nın (5.1.9) daki bileşenleri sayesinde $(T^*M, {}^S g)$ semi-Riemann manifoldu üzerindeki jeodeziklerin denklemleri

$$\frac{\delta^2 x^h}{dt^2} + p_h R_j^{him}\frac{dx^i}{dt}\frac{\delta p_i}{dt} = 0 \tag{5.1.14}$$

$$\frac{\delta^2 p_h}{dt^2} = 0 \tag{5.1.15}$$

biçiminde elde edilir.

Tanım 5.1.10. $(T^*M, {}^S g)$ semi-Riemann manifoldu üzerinde t yay uzunluğu parametresine göre $\theta^\gamma, \gamma = 1, ..., 2n$ lokal bileşenlerine sahip bir $\widetilde{c}$ eğrisine

$$g_{\beta\alpha}\frac{\theta^\beta}{dt}\frac{\theta^\alpha}{dt} = \varepsilon = \begin{cases} 1, & \frac{d\widetilde{c}}{dt} \textit{ space-like bir eğri,} \\ -1, & \frac{d\widetilde{c}}{dt} \textit{ time-like bir eğri,} \\ 0, & \frac{d\widetilde{c}}{dt} \textit{ light-like bir eğri} \end{cases}$$

denir.

$g_{\beta\alpha}\frac{\theta^\beta}{dt}\frac{\theta^\alpha}{dt} = \varepsilon$ metriği $\varepsilon \neq 0$ için

$$g_{ji}\frac{dx^j}{dt}\frac{dx^i}{dt} + g^{ji}\frac{\delta p_j}{dt}\frac{\delta p_i}{dt} = \varepsilon = \mp 1$$

olur. T^*M üzerindeki jeodezik denklemlerinin (5.1.15) eşitliği gereğince

$$\frac{\delta}{dt}\left(g^{ji}\frac{\delta p_j}{dt}\frac{\delta p_i}{dt}\right)=0$$

dır. s, M üzerindeki yay uzunluğu parametresi olmak üzere

$$\left(\frac{ds}{dt}\right)^2=g_{ji}\frac{dx^j}{dt}\frac{dx^i}{dt}=sbt$$

olup s ile t lineer bağımlıdır. Bu nedenle özdeş kabul edilebilir. T^*M üzerinde jeodezik bir eğri $x^h = sbt$ olacak şekilde tanımlanıyorsa jeodezik denklemleri (5.1.15) daki eşitlik sayesinde $\frac{dx^h}{dt}=0$ olduğundan,

$$\frac{d^2p_h}{dt^2}=0$$

haline gelir. Böylece $\frac{d^2p_h}{dt^2}=0$ diferensiyel denklem sisteminin çözümleri a^h, b^h keyfi sabitler olmak üzere $p_h = a^h t + b^h$ olur.

Sonuç 5.1.11. Eğer bir jeodezik eğri ${}^Sg$ semi-Riemann metrikli T^*M nin fibreleri üzerinde sağlanıyorsa (x^h, p_h) indirgenmiş koordinatlarına göre, a^h, b^h, c^h keyfi sabitler olmak üzere $x^h = c^h$, $p_h = a^h t + b^h$ lineer denklemleri ile ifade edilir.

Sonuç 5.1.12. (M, g) semi-Riemann manifoldu üzerindeki bir jeodeziğin yatay yükseltilmişi $(T^*M, {}^Sg)$ semi-Riemann manifoldu üzerinde daima bir jeodezikdir.

(M, g) semi-Riemann manifoldu üzerindeki $x^h = x^h(t)$ ile tanımlanan bir eğrinin doğal yükseltilmişi, $(T^*M, {}^Sg)$ semi-Riemann manifoldu üzerinde

$$x^h = x^h(t) \qquad ; \qquad p_h = g_{ih}\frac{dx^h}{dt}$$

lokal bileşenleri ile verilir.

Teorem 5.1.13. (M, g) semi-Riemann manifoldu üzerindeki $x^h = x^h(t)$ ile tanımlanan bir eğrinin doğal yükseltilmişi, $(T^*M, {}^Sg)$ semi-Riemann manifoldu üzerinde bir jeodezik olması için gerek ve yeter şart

$$
\begin{aligned}
\frac{\delta^2 x^h}{dt^2} + R^h_{kji}\frac{dx^k}{dt}\frac{\delta^2 x^j}{dt^2}\frac{dx^i}{dt} &= 0 \qquad (5.1.16)\\
\frac{\delta^3 x^h}{dt^3} &= 0 \qquad (5.1.17)
\end{aligned}
$$

olmalıdır.

İspat: (5.1.14) ve (5.1.15) denklemlerinde p_h yerine $g_{ih}\frac{dx^h}{dt}$ konulmasıyla (5.1.16) ve (5.1.17) denklemleri elde edilir.

Sonuç 5.1.14. (M, g) semi-Riemann manifoldu üzerindeki herhangi bir jeodeziğin doğal yükseltilmişi $(T^*M, {}^S g)$ semi-Riemann manifoldu üzerinde bir jeodezikdir.

Teorem 5.1.15. (M, g) semi-Riemann manifoldu içindeki bir c eğrisinin doğal yükseltilmişi ${}^S g$ metrikli $T^*(M)$ içinde bir jeodezik ise c, M içinde bir jeodeziktir veya c nin birinci eğriliği sabit ve c nin her noktasında oskülatör düzlemle tanımlı kesitine göre M nin Riemann kesitsel eğriliği sabittir.

İspat: (M, g) semi-Riemann manifoldu üzerindeki $x^h = x^h(t)$ ile tanımlanan bir eğri, yay uzunluğu parametresi t olan $(T^*M, {}^S g)$ semi-Riemann manifoldu üzerinde bir jeodezik ise (5.1.15) eşitliğinden

$$\frac{\delta}{dt}\left(g^{ji}\frac{\delta p_j}{dt}\frac{\delta p_i}{dt}\right) = 0$$

dır.

$$p_j = g_{jk}\frac{dx^k}{dt} \qquad , \qquad p_i = g_{il}\frac{dx^l}{dt}$$

olduğundan

$$\frac{\delta}{dt}\left(g^{ji}g_{jk}g_{il}\frac{\delta^2 x^k}{dt^2}\frac{\delta^2 x^l}{dt^2}\right) = 0$$

olup,

$$\frac{\delta}{dt}\left(g_{ji}\frac{\delta^2 x^j}{dt^2}\frac{\delta^2 x^i}{dt^2}\right) = 0$$

elde edilir. Bu denklemin sıfıra eşit olması iki farklı şart altında mümkündür.

Birincisi,

$$\frac{\delta^2 x^h}{dt^2} = 0$$

yani $x^h = x^h(t)$ lokal bileşenleri ile verilen bir c eğrisi M de bir jeodeziktir.

İkincisi, (5.1.17) den c eğrisinin birinci eğriliği sabittir. $\frac{\delta^2 x^h}{dt^2}$ vektörü yönünde

$$\frac{\delta^2 x^h}{dt^2} = \rho Y^h, \qquad \rho = sbt.$$

eşitliğini sağlayan birim vektör Y^h ve M üzerindeki c eğrisinin teğeti yönündeki birim vektör $X^h = \frac{dx^h}{dt}$ alınarak bu vektörler (5.1.16) eşitliğinde yerine konulursa

$$Y^h + R^h_{kji} X^k Y^j X^i = 0$$

bulunur. Bu ifade Y^h ile kontraksiyona uğratılırsa,

$$R_{kjih} X^k Y^j X^i Y^h = -\varepsilon, \qquad \varepsilon \neq 0$$

elde edilir. Böylece X^h birim teğet vektörü ile Y^h birim normal vektörü tarafından gerilen $\mathcal{P}$ oskülatör düzleminin kesitsel eğriliği

$$\mathcal{K}(\mathcal{P}) = R_{kjih} X^k Y^j X^i Y^h = -\varepsilon, \qquad \varepsilon \neq 0$$

sabittir.

5.2. Bir Hamilton Uzayında Semi-Riemann Geometri

Bu alt bölümde, gravitasyon alanlar için TM de L fonksiyonuna bağlı Euler-Lagrange denklemleri, Legendre dönüşümü yardımıyla T^*M de H fonksiyonuna bağlı olarak ifade edildi. Elde edilen denklemin çözümü ile ilgili bazı sonuçlar bulundu. M manifoldu üzerinde tanımlı ∇ Levi-Civita koneksiyonunun T^*M manifoldu üzerinde ${}^C g$ semi-Riemann metriğine karşılık geldiği gösterilerek $(T^*M, {}^C g)$ semi-Riemann manifoldunun diferensiyel geometrisi incelendi. Bölüm 3.1. de TM üzerinde tanımlanan semi-Riemann metriklerin Legendre dönüşümü yardımıyla T^*M deki karşılıkları elde edildi.

M n-boyutlu diferensiyellenebilir bir manifold ve T^*M, $\pi : T^*M \to M$ kanonik projeksiyonu ile tanımlı M nin kotanjant demeti olsun. $\{U, x^i\}$ $1 \leq i \leq n$ M manifoldu üzerinde lokal bir harita ise $(\pi^{-1}(U), x^i, p_i)$ T^*M üzerinde lokal bir haritadır. Buradaki $x^i = x^i o\pi$ ve p_i de T^*M nin $(dx^1, ..., dx^n)$ lokal çatısına göre $\pi^{-1}(U)$ içindeki bir elemanın vektör uzayı koordinatlarıdır. T^*M üzerinde tanımlanan bu harita yardımıyla 2n boyutlu diferensiyellenebilir manifold yapısına sahip olur. T^*M nin tanjant demeti TT^*M, $VT^*M =$Çekπ_* ile tanımlı integrallenebilir bir alt vektör demetine sahiptir. VT^*M ye T^*M nin düşey dağılımı denir. T^*M manifoldu üzerinde bir non lineer koneksiyon HT^*M ile tanımlı olup TT^*M içinde VT^*M ye tamamlayıcı bir dağılımdır. Bu dağılım T^*M nin yatay dağılımı olarak adlandırılır. Böylece

$$TT^*M = VT^*M \oplus HT^*M$$

olur. $(\frac{\partial}{\partial p_1}, ..., \frac{\partial}{\partial p_n})$ lokal vektör alanlarının sistemi VT^*M için lokal bir çatıdır. $(\frac{\delta}{\delta x^1}, ..., \frac{\delta}{\delta x^n})$ lokal vektör alanlarının bir sistemi de HT^*M için lokal bir çatıdır. Burada

$$\frac{\delta}{\delta x^i} = \frac{\partial}{\partial x^i} + N_{ij}\frac{\partial}{\partial p_j}$$

dir. Ayrıca denklemdeki N_{ij} katsayıları HT^*M ile tanımlı non lineer koneksiyonun koneksiyon katsayıları olup (Yano, Ishıhara, 1973) tarafından

$$N_{ij}(x, p) = -\Gamma_{ij}^k p_k$$

eşitliği ile tanımlanmıştır. Γ_{ij}^k M manifoldu üzerinde ∇ Levi Civita koneksiyonunun bileşenleri olduğu için T^*M üzerinde tanımlanan N_{ij} non lineer koneksiyonu simetrik bir non lineer koneksiyon olur. HT^*M dağılımının integrallenebilir olması için HT^*M nin torsiyon tensörü olan R_{kij} nin sıfır olması gerekir. Yani,

$$[\frac{\delta}{\delta x^i}, \frac{\delta}{\delta x^j}] = R_{kij}\frac{\partial}{\partial p_k}$$

olup R_{kij}, T^*M içinde N_{ij} non lineer koneksiyonunun bileşenleri yardımıyla

$$R_{kij} = \frac{\delta N_{kj}}{\delta x^i} - \frac{\delta N_{ki}}{\delta x^j}$$

ve M manifoldu üzerinde R^l_{kij} Riemann eğrilik tensörünün bileşenleri yardımıyla

$$R_{kij} = p_l R^l_{kij}.$$

şeklinde tanımlıdır. Ayrıca T^*M nin baz vektör alanları üzerinde diğer Lie parentez operatörleri

$$\begin{aligned} [\frac{\delta}{\delta x^i}, \frac{\partial}{\partial p_j}] &= \Gamma^j_{ik}\frac{\partial}{\partial p_k} \\ [\frac{\partial}{\partial p_i}, \frac{\partial}{\partial p_j}] &= 0 \end{aligned}$$

şeklinde tanımlıdır (Oproiu, Papaghiuc, 1990).

Tanım 5.2.1. TM manifoldu üzerinde $L : TM \to \mathbb{R}$ reel değerli diferensiyellenebilir fonksiyonuna M üzerinde regüler bir Lagrangean denir. Bu fonksiyon yardımıyla tanımlı olan

$$g_{ik}(x) = \frac{\partial^2 L}{\partial y^i \partial y^k}$$

metriği M manifoldunun tüm x noktaları üzerindeki tanjant vektörler için non dejeneredir. Bir Lagrange manifoldu (ya da Lagrange uzayı) üzerinde regüler bir Lagrangean taşıyan diferensiyellenebilir manifolddur (Oproiu, Papaghiuc, 1987).

Teorem 5.2.2. M Lagrange manifoldu üzerindeki bir eğrinin jeodezik bir eğri olması için gerek ve yeter şart bu eğrinin TM manifoldu üzerindeki doğal yükseltilmişi üzerinde değer alan L fonksiyonunun Euler-Lagrange diferensiyel denklemlerini sağlamasıdır (Oproiu, Papaghiuc, 1987).

Tanım 5.2.3. M n boyutlu diferensiyellenebilir bir manifold ve H,

$i)$ $H : (x,p) \in T^*M \to H(x,p) \in \mathbb{R}$ olacak şekilde $\pi : T^*M \to M$ kanonik projeksiyonunun sıfır kesitleri üzerinde sürekli ve $T^*M \backslash \{0\} = \widetilde{T^*M}$ üzerinde diferensiyellenebilir ve

$ii)$ T^*M nin p_i değişkenlerine göre Hessianı

$$g^{ij}(x) = \frac{\partial^2 H}{\partial p_i \partial p_j}$$

M manifoldu üzerinde $g^{ij}(x)$ non-dejenere sabit işaretli, (2,0) tipinde simetrik, kontravaryant tensör alanı ile veriliyorsa $H^n = (M, H(x,p))$ bir Hamilton manifoldu (ya da Hamilton uzayı) olarak adlandırılır (Miron, 2001).

Tanım 5.2.4. $L \in C^\infty(TM, \mathbb{R})$ diferensiyellenebilir fonksiyonu için

$$\begin{array}{rlcl} Leg: & TM & \to & T^*M \\ & (x^i, y^i) & \to & (x^i, \frac{\partial L}{\partial y^i} = p_i) \end{array}$$

olacak şekilde tanımlanan diferensiyellenebilir dönüşüme *Legendre dönüşümü* denir. Bu dönüşümün ters dönüşümü $H \in C^\infty(TM, \mathbb{R})$ diferensiyellenebilir fonksiyonu için

$$\begin{array}{rlcl} Leg^{-1}: & T^*M & \to & TM \\ & (x^i, p_i) & \to & (x^i, \frac{\partial H}{\partial p_i} = y^i) \end{array}$$

olacak şekilde tanımlanır (Miron, 2001).

Lagrange ve Hamilton manifoldları, Diferensiyel Geometricilerin olduğu kadar Mekanik bilim dalı ile uğraşan Mühendislerin ve Fizikçilerin de önemli konularındandır. Bu konuların mekanikdeki kavramlar ile ilişkisi aşağıdaki gibi verilebilir.

Bir mekanik sistemin konfigürasyon uzayı diferensiyellenebilir bir manifold yapısına sahiptir. Bir Lagrange mekanik sistem M konfigürasyon uzayını tanımlayan bir manifold ve L M nin tanjant demeti üzerinde tanımlı bir fonksiyon olmak üzere (M, L) ikilisi ile ve Hamilton mekanik sistem de H M nin kotanjant demeti üzerinde bir fonksiyon olmak üzere (M, H) ikilisi ile verilir. Lagrange mekanik sistemde hareket eden bir parçacık konfigürasyon uzayı üzerinde bir eğri tanımlar. Bu eğrinin konum koordinatları, M manifoldunun lokal koordinat fonksiyonlarıdır ve konum koordinatlarının zamana göre türevsel koordinatları olan hız koordinatları ise eğrinin teğet vektörünün lokal bileşenleridir. Euler-Lagrange diferensiyel denklemleri M deki bir parçacığın konum koordinatları yönünde parçacığa etkiyen kuvveti tanımlar. 3 boyutlu uzayda bir parçacığın genelleştirilmiş koordinatları (X, Y) olan bir yüzey boyunca hareket ettiği kabul edilsin. Bu parçacığa yüzey boyunca tesir eden kuvvetler, F_X, F_Y

$$F_X = \frac{d}{dt}(\frac{\partial L}{\partial \dot{X}}) - \frac{\partial L}{\partial X} \quad ; \quad F_Y = \frac{d}{dt}(\frac{\partial L}{\partial \dot{Y}}) - \frac{\partial L}{\partial Y}$$

diferensiyel denklemleri ile tanımlanır. Eğer kuvvet sıfır ise m, parçacığın kütlesi ve a da parçacığın birim zamandaki hız değişimi olarak tanımlanan ivmesi olmak üzere kuvvet

$$F = ma = 0$$

olduğundan parçacık ivmesiz olarak hareket etmektedir. M de ivmesi sıfır olan eğriler jeodezikleri tanımladığından parçacık konum uzayı üzerinde jeodezik bir eğri boyunca hareket etmektedir. Parçacık toplam enerjisi sabit olan bir sistem (konservatif sistem) içinde hareket ediyorsa L fonksiyonu kinetik ve potansiyel enerjilerin farkına eşittir. Konservatif sistemlerde ivmesiz bir hareket boyunca L fonksiyonu sabit kalır. Benzer sonuç kinetik ve potansiyel enerjilerin toplamlarına eşit olan H için de geçerlidir. H fonksiyonu M deki bir eğrinin konum ve momentum koordinatlarına bağlı olarak tanımlanır. Momentum koordinatı, L nin hız koordinatına göre kısmi türevlerine eşittir (http//www.mathpages.com/home/kmath523/kmath523.htm).

Bu bölümde gravitasyon alanlar için bir parçacığın hız koordinatları üzerinde değer alan ω 1-formunun kovaryant sabiti olduğu gösterilecek.

Bir mekanik sistemde gravitasyon alanlarının $L = \frac{1}{2}g_{ij}(x)y^i y^j$ Lagrange fonksiyonu Legendre dönüşümü yardımıyla gravitasyon alanlarının $H = \frac{1}{2}g^{ij}(x)p_i p_j$

Hamilton fonksiyonuna dönüştürülür. TM manifoldu üzerindeki Euler-Lagrange diferensiyel denklem sistemine denk olan kanonik Hamilton denklemleri

$$\frac{dx^i}{dt} = g^{ij}p_i \qquad , \qquad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x^i} \tag{5.2.1}$$

ile tanımlıdır (Miron, 2001).

Teorem 5.2.5. M üzerinde g_{ik} bileşenlerine sahip g (0,2) tipinde kovaryant tensörü ve $g_{ik}g^{kj} = \delta_i^j$ eşitliği sağlanacak şekilde g^{kj} (2,0) tipinde kontravaryant tensörü tanımlansın. Ayrıca M üzerinde $L = \frac{1}{2}g_{ij}(x)y^iy^j$ bir Lagrange fonksiyonu ve $H = \frac{1}{2}g^{ij}(x)p_ip_j$ bir Hamilton fonksiyon olsun. M üzerinde tanımlı bu fonksiyonlar arasında aşağıdaki bağıntılar vardır.

$$\frac{\partial L}{\partial x^i} = -\frac{\partial H}{\partial x^i} \qquad , \qquad \frac{\partial L}{\partial y^i} = g_{ij}\frac{\partial H}{\partial p_i}$$

İspat: $L = \frac{1}{2}g_{ij}(x)y^iy^j$ eşitliği yardımıyla,

$$\frac{\partial L}{\partial x^k} = \frac{1}{2}\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}y^iy^j \tag{5.2.2}$$

olur. Benzer şekilde $H = \frac{1}{2}g^{ij}(x)p_ip_j$ eşitliğinden,

$$\frac{\partial H}{\partial x^k} = \frac{1}{2}\frac{\partial g^{ij}}{\partial x^k}p_ip_j$$

elde edilir. Legendre dönüşümü yardımıyla

$$\frac{\partial L}{\partial y^i} = p_i$$

olduğundan

$$p_i = g_{ij}y^j \qquad , \qquad y^j = g^{ij}p_i$$

olur. Ayrıca, $g^{ih}g_{hj} = \delta_j^i$ ve $\frac{\partial}{\partial x^k}(g^{ih}g_{hj}) = 0$ olduğundan

$$\frac{\partial g_{hj}}{\partial x^k} = -\frac{\partial g^{ih}}{\partial x^k}g_{hj}g_{hi}$$

elde edilir. Elde edilen bu değer (5.2.2) de yerine konulursa

$$\frac{\partial L}{\partial x^k} = -\frac{\partial g^{ih}}{\partial x^k} g_{hj} y^j g_{hi} y^i$$

ve böylece

$$\frac{\partial L}{\partial x^i} = -\frac{\partial H}{\partial x^i}$$

sonucu elde edilir. Ayrıca

$$\frac{\partial L}{\partial y^i} = p_i \qquad ; \qquad \frac{\partial H}{\partial p_j} = g^{ji} p_i$$

olduğundan

$$\frac{\partial L}{\partial y^i} = g_{ij} \frac{\partial H}{\partial p_j}$$

bulunur. Bu teorem yardımıyla aşağıdaki diferensiyel denklem elde edilir.

$$\frac{d}{dt}(\frac{\partial L}{\partial y^i}) - \frac{\partial L}{\partial x^i} = 0 \xrightarrow{Leg} \frac{d}{dt}(g_{ij}\frac{\partial H}{\partial p_j}) + \frac{\partial H}{\partial x^i} = 0$$

Teorem 5.2.6. M üzerinde herhangi bir eğri γ ve M nin herhangi bir $\gamma(t)$ noktası üzerindeki $\frac{d\gamma}{dt}$ teğet vektörü üzerinde değer alan 1-form $\omega = p_i dx^i$ olsun. T^*M üzerinde $H(\gamma(t), g_{ij}(\gamma(t))\frac{d\gamma(t)}{dt})$ Hamilton fonksiyonuna bağlı kanonik Hamilton denklemleri sağlanıyorsa $\frac{d\gamma}{dt}$ teğet vektörü ile birleştirilmiş $\omega = p_i dx^i = g_{ij}(x)\frac{d\gamma}{dt}dx^i$ 1-formu M üzerinde kovaryant sabitidir.

İspat: H Hamilton fonksiyonuna bağlı kanonik Hamilton denklemleri

$$\frac{d}{dt}(g_{ij}\frac{\partial H}{\partial p_j}) + \frac{\partial H}{\partial x^i} = 0$$

ile tanımlıdır. Bileşke fonksiyonların diferensiyeli gereğince

$$\frac{dp_k}{dt} + \frac{\partial}{\partial x^k}\left(g_{ij}\frac{\partial H}{\partial p_j}\right)\frac{dx^k}{dt} + \frac{\partial H}{\partial x^i} = 0$$

olur. $\frac{dx^k}{dt} = g^{ka} p_a$ eşitliğinin yukardaki denklemde yerine konulmasıyla

$$\frac{dp_k}{dt} + \frac{\partial}{\partial x^k}\left(g_{ij} \frac{\partial H}{\partial p_j} \right) g^{ka} p_a + \frac{\partial H}{\partial x^i} = 0.$$

denklemi elde edilir. Eşitliğin her iki yanı $[g^{ka}]$ matrisinin tersinin g_{ka} bileşenleri ile işleme sokulursa

$$g_{ka} \frac{dp_k}{dt} + G_j(x,p) = 0, \tag{5.2.3}$$

elde edilir. Burada

$$G_j(x,p) = \frac{\partial}{\partial x^k}\left(g_{ij} \frac{\partial H}{\partial p_j} \right) p_a + g_{ka} \frac{\partial H}{\partial x^i}.$$

dir. T^*M üzerindeki non lineer koneksiyon

$$N_{jk} = G_j^a = \frac{1}{2} g_{ka} \frac{\partial^2 H}{\partial x^j \partial p_a} = \frac{1}{2} g_{ka} \frac{\partial g^{ab}}{\partial x^j} p_b,$$

ile tanımlansın. Burada

$$G_j^a = \frac{1}{2} \frac{\partial G_j}{\partial p_a}.$$

olur. Bu eşitlikten yararlanarak

$$\frac{\partial N_{jk}}{\partial p_b} = \frac{1}{2} g_{ka} \frac{\partial g^{ab}}{\partial x^j}$$

elde edilir. g^{ab} M manifoldu üzerinde (2,0) tipindeki bir tensörün bileşenleri olduğundan

$$\frac{\partial g^{ab}}{\partial x^j} = \frac{\partial}{\partial x^j} g(dx^a, dx^a)$$

eşitliği vardır. Bu eşitlik yardımıyla

$$\frac{\partial N_{jk}}{\partial p_b} = -\Gamma_{jk}^b.$$

elde edilir. Böylece $N_{jk} = -\Gamma_{jk}^b p_b$ ve $G_j(x,p) = -\Gamma_{jk}^b p_b p_a$ eşitlikleri ve

$$\frac{dp_k}{dt} - \Gamma_{jk}^b p_b g^{ka} p_a = 0.$$

elde edilir. Böylece

$$\frac{dp_k}{dt} - \Gamma^b_{jk} p_b \frac{dx^k}{dt} = 0$$

olup ∇, M manifoldu üzerinde Levi-Civita koneksiyonu olmak üzere

$$\nabla_{\frac{dx^k}{dt}\frac{\partial}{\partial x^k}} p_j dx^j = 0$$

eşitliği elde edilir. Sonuç olarak M üzerindeki $\gamma(t)$ eğrisinin $\frac{d\gamma(t)}{dt}$ teğet vektörleri üzerinde değer alan ω 1-formu M üzerinde bir kovaryant sabitidir.

Legendre dönüşümü yardımıyla, TM üzerinde tanımlı yatay ve düşey, baz ve dual baz vektör alanları ve 1-formların ve g_{ij} reel değerli fonksiyonun T^*M üzerindeki diferensiyel geometrik objelere taşınması (Miron, 2001) tarafından aşağıdaki gibi tanımlandı.

$$\begin{array}{rcl} (Leg)_* & : & \underset{\frac{\delta}{\delta x^i}}{HTM} \underset{\rightarrow}{\rightarrow} \underset{\frac{\delta}{\delta x^i}}{HT^*M} \quad , \quad (Leg^{-1})^* : \underset{\delta y^i}{V^*TM} \underset{\rightarrow}{\rightarrow} \underset{g^{ij}\delta p_j}{V^*T^*M} \\ (Leg^{-1})^* & : & \underset{dx^i}{H^*TM} \underset{\rightarrow}{\rightarrow} \underset{dx^i}{H^*T^*M} \quad , \quad (Leg)_* : \underset{\frac{\partial}{\partial y^i}}{VTM} \underset{\rightarrow}{\rightarrow} \underset{g_{ij}\frac{\partial}{\partial p_j}}{VT^*M} \\ (Leg^{-1})^* & : & \underset{g_{ij}}{\Im^0_0(TM)} \underset{\rightarrow}{\rightarrow} \underset{g_{ij}}{\Im^0_0(T^*M)} \ . \end{array} \tag{5.2.4}$$

Bu tanımlar yardımıyla TM üzerinde tanımlı semi-Riemann metrikler T^*M üzerinde semi-Riemann metriklere dönüştürülür.

Teorem 5.2.7. M manifoldu üzerinde g_{ij} bileşenlerine sahip olan g non-dejenere metrik tensörünün TM manifolduna tam yükseltilmişi olan g^C TM üzerinde bir semi-Riemann metrik olup bu metriğin Legendre dönüşümü yardımıyla T^*M deki karşılığı Levi-Civita koneksiyonunun Riemann genişlemesi olarak adlandırılan ${}^Cg$ semi-Riemann metriğidir.

İspat: TM üzerinde $g^C = 2g_{ik}\delta y^i dx^k$ lokal bileşenleri ile tanımlı olan g^C semi-Riemann metriğini Legendre dönüşümü yardımıyla (5.2.4) deki eşitlikler kullanılarak

$$(Leg^{-1})^* : \underset{g^C = g_{ij}\delta y^i dx^k}{\Im^0_2(TM)} \underset{\rightarrow}{\rightarrow} \underset{(Leg^{-1})^*(g^C) = {}^Cg}{\Im^0_2(T^*M)}$$

dönüştürülür. Burada

$$^{C}g = 2\delta p_i dx^k$$

(Willmore, 1988) un sözünü ettiği T^*M üzerindeki semi-Riemann metriktir.

M, ∇ Levi-Civita koneksiyonuna sahip olan n-boyutlu diferensiyellenebilir bir manifold ve T^*M onun kotanjant demeti olsun. M üzerindeki ∇ Levi-Civita koneksiyonunun T^*M üzerinde bir semi-Riemann metriğe karşılık geldiği aşağıdaki gibi gösterilebilir.

$C(0) = P$ olacak şekilde T^*M üzerindeki bir nokta P ve X de P üzerinde C eğrisine teğet vektör olsun. $C(t)$ π kanonik projeksiyon dönüşümü altında M deki $\gamma(t)$ eğrisine izdüşürülsün. $C(0) = P$ noktasından geçen $C(t)$ eğrisi π projeksiyon dönüşümü altında M deki $p = \pi(P)$ noktasından geçen $\gamma(t)$ eğrisine tekabül eder. $(\nabla_{d\pi(X)}\omega(t))_{t=0}$, $d\pi(X)$ izdüşürülmüş teğet vektörü altında değer alan p üzerindeki bir kovektördür. M üzerinde tanımlı bu işlem $T(T^*M)$ üzerinde Q kuadratik diferensiyel formunu tanımlar. Bu tanımlanan kuadratik diferensiyel form yardımıyla T^*M nin P noktası üzerinde ^{C}g 2-lineer formu

$$^{C}g\ (X,Y) = Q(X+Y, X+Y) - Q(X,X) - Q(Y,Y) \qquad (5.2.5)$$

ile tanımlanır. Buradaki X ve Y T^*M manifoldunun P noktası üzerindeki tanjant vektörlerdir. M nin bir p noktasını içine alan U açık komşuluğu içindeki lokal koordinat sistemi $(x^i), 1 \leq i \leq n$ olsun. O zaman (x^i, p_j), $\pi^{-1}(U)$ için lokal koordinat komşuluğu olur. Buradaki p_j

$$\omega = p_j dx^j.$$

ile tanımlıdır. T^*M içerisinde lokal olarak $t \to (x^i(t), p_j(t))$ ile ifade edilen eğri M içinde $\dot{\gamma}$:$t \to (\dot{x}^i\ (t))$ eğrisine tekabül eder. Buradaki $\dot{x}^i\ (t) = \frac{dx^i}{dt}$ dir. P üzerindeki X vektörü $(\dot{x}^i\ (0), p_j(0))$ lokal bileşenleri ile tanımlı olup $d\pi(X)$ projeksiyonu altındaki görüntüsü $\dot{x}^i(0)$ dir. O zaman, $t = 0$ da

$$\begin{aligned} \nabla_{d\pi(X)}\omega(t) &= \dot{x}^i(0)(\nabla_i p_j(t))dx^j \\ &= \left[\frac{dp_j}{dt} - \Gamma^k_{ij}p_k\,\dot{x}^i(0)\right]dx^j \end{aligned}$$

olur. Buradaki Γ^k_{ij}, M manifoldu üzerindeki g_{ij} metriğine bağlı Christoffel sembolleridir. Bu kovektörün $d\pi(X)$ deki reel değeri

$$\begin{aligned} Q(X,X) &= \left(\nabla_{d\pi(X)}\omega(t)\right)(d\pi(X)) \\ &= -\Gamma^k_{ij}p_k\,\dot{x}^i\dot{x}^j + \dot{p}_j\dot{x}^j\ . \end{aligned}$$

olur. Bu elde edilen değerler (5.2.5) de yerine konulursa ${}^{C}g\,(X,X)$

$${}^{C}g\,(X,X) = \left(-2\Gamma^k_{ij}p_k dx^i dx^j + 2dp_j dx^j\right)(X,X)$$

olur. Böylece ${}^{C}g$ nin lokal ifadesi $\pi^{-1}(U)$ içindeki (x^i, p_j) indirgenmiş koordinatlarına göre

$${}^{C}g = -2\Gamma^k_{ij}p_k dx^i dx^j + 2dp_j dx^j,$$

ile ifade edilir. T^*M üzerindeki uyarlanmış lokal çatı $(dx^i, \delta p_i)$ olur. Burada

$$\delta p_i = dp_i - p_k\Gamma^k_{ij}dx^j,$$

olduğundan ${}^{C}g$, T^*M üzerindeki bu uyarlanmış lokal çatıya göre

$${}^{C}g = 2\delta p_i dx^j$$

ile ifade edilir. T^*M üzerinde tanımlanan bu 2-lineer form aynı zamanda simetrik ve non dejeneredir. Bu nedenle T^*M üzerinde bir semi-Riemann metrik olur (Willmore, 1988). Ayrıca T^*M manifoldu üzerinde tanımlanan bu metriğin yatay ve düşey baz vektör alanları üzerindeki değeri

$${}^{C}g\,(\frac{\delta}{\delta x^i}, \frac{\delta}{\delta x^j}) = 0, \qquad {}^{C}g\,(\frac{\partial}{\partial p_i}, \frac{\partial}{\partial p_j}) = 0$$

$$
{}^{C}g\,(\frac{\delta}{\delta x^i},\frac{\partial}{\partial p_j}) \;=\; \delta_i^j, \qquad\qquad {}^{C}g\,(\frac{\partial}{\partial p_i},\frac{\delta}{\delta x^j}) = \delta_j^i
$$

dir.

Teorem 5.2.8. $\widetilde{\nabla}$ T^*M üzerindeki Levi-Civita koneksiyonu ve H^n gravitasyon alanlar ile tanımlı bir Hamilton uzayı olsun. T^*M üzerinde ${}^{C}g$ semi-Riemann metriğinin Levi-Civita koneksiyonunun lokal bileşenler cinsinden ifadesi

$$
\begin{aligned}
\widetilde{\nabla}_{\delta_i}\delta_j &= -\Gamma_{ij}^k\delta_k + R_{ijk}\partial_k, \qquad\qquad \widetilde{\nabla}_{\delta_i}\partial_j = \Gamma_{ik}^j\partial_k,\\
\widetilde{\nabla}_{\partial_i}\delta_j &= 0, \qquad\qquad \widetilde{\nabla}_{\partial_i}\partial_j = 0
\end{aligned}
$$

dır. Burada

$$
\delta_i = \frac{\delta}{\delta x^i},\ \partial_i = \frac{\partial}{\partial p_i}.
$$

dir.

İspat: T^*M manifoldunun uyarlanmış lokal baz vektör alanları için Kozsul formülü yardımıyla Teorem 5.1.5 e benzer olarak elde edilir.

Teorem 5.2.9. $(dx^i, \delta p_i)$, $(\frac{\delta}{\delta x^i}, \frac{\partial}{\partial p_i})$ uyarlanmış lokal baz vektör alanlarının dual baz 1-formları olsun. $(dx^i, \delta p_i)$ nin uyarlanmış lokal baz vektör alanlarına göre kovaryant türevinin bileşenler cinsinden ifadesi

$$
\begin{aligned}
\widetilde{\nabla}_{\delta_i}dx^j &= \Gamma_{ik}^j dx^k \qquad ; \qquad \widetilde{\nabla}_{\delta_i}\delta p_j = R_{ijk}dx^k - \Gamma_{ij}^k\delta p_k\\
\widetilde{\nabla}_{\partial_i}dx^j &= 0 \qquad ; \qquad \widetilde{\nabla}_{\partial_i}\delta p_j = 0.
\end{aligned}
$$

dir.

İspat: $dx^j \in H^*TM$ olmak üzere

$$
\begin{aligned}
(\widetilde{\nabla}_{\delta_i}dx^j)(\delta_k) &= \delta_i(dx^j(\delta_k)) - dx^j(\widetilde{\nabla}_{\delta_i}\delta_k) = \Gamma_{ik}^j,\\
(\widetilde{\nabla}_{\delta_i}dx^j)(\partial_k) &= \delta_i(dx^j(\partial_k)) - dx^j(\widetilde{\nabla}_{\delta_i}\partial_k) = 0
\end{aligned}
$$

olduğundan

$$\widetilde{\nabla}_{\delta_i} dx^j = \Gamma^j_{ik} dx^k$$

dır. Diğerleri de benzer şekilde ispatlanır.

Teorem 5.2.10. H^n gravitasyon alanlar ile tanımlı bir Hamilton uzayı, $\widetilde{\nabla}$ T^*M üzerindeki ${}^Cg$ semi-Riemann metriğine bağlı Levi-Civita koneksiyonu ve K T^*M üzerindeki Riemann eğrilik tensörü olsun. T^*M üzerindeki Riemann eğrilik tensörünün lokal bileşenler cinsinden ifadesi

$$\begin{aligned}
K(\delta_i, \delta_j)\delta_k &= R_{hij}\delta_h + (\widetilde{\nabla}_{\delta_i} R_{jhk} - \widetilde{\nabla}_{\delta_j} R_{ihk})\partial_h \\
K(\delta_i, \delta_j)\partial_k &= -R_{hij}\partial_h \\
K(\delta_i, \partial_j)\delta_k &= -\frac{\partial R_{ikh}}{\partial p_j}\partial_h \\
K(\delta_i, \partial_j)\partial_k &= K(\partial_i, \partial_j)\delta_k = K(\partial_i, \partial_j)\partial_k = 0.
\end{aligned}$$

dir. Burada

$$\widetilde{\nabla}_{\delta_i} R_{jhk} = \delta_i R_{jhk} + R_{lkh}\Gamma^l_{ij} + R_{jlh}\Gamma^l_{ik} + R_{jkl}\Gamma^l_{ih}$$

dır.

İspat: Teorem 5.1.6 ya benzer olarak ispatlanır.

Teorem 5.2.11. $(T^*M, {}^Cg)$ semi-Riemann manifoldunun flat olması için gerek ve yeter şart (M, g) semi-Riemann manifoldunun flat olmasıdır.

Teorem 5.2.12. M manifoldu üzerindeki g Riemann ya da semi-Riemann metriğinin TM manifolduna $g^V + g^C$ yükseltilmişi olan g^F, TM üzerinde bir semi-Riemann metrik olup bu metriğin Legendre dönüşümü yardımıyla T^*M deki karşılığı ${}^Fg = \pi^*(g) + {}^Cg$ de bir semi-Riemann metriktir.

İspat: T^*M de uyarlanmış koordinatlar göz önüne alınırsa ${}^Fg$ metriğinin bileşenler cinsinden ifadesi

$${}^Fg = g_{ij}dx^i dx^j + 2dx^i \delta p_j$$

olur. T^*M manifoldu üzerinde tanımlı bir $\widetilde{X}$ vektör alanı

$$TT^*M = HT^*M \oplus VT^*M$$

yatay ve düşey vektör alanlarının direkt toplamı biçiminde yazılabilir. Yani

$$\widetilde{X} = X^H + \omega^V$$

olur. Buradaki ω M manifoldu üzerinde g semi-Riemann metriğine göre X ile birleşen bir kovektör alanıdır. Yani,

$$\omega = X_i dx^i, \qquad X_i = g_{ih} X^h$$

lokal bileşenlerine sahiptir. Böylece $\widetilde{X}$, $\widetilde{Y} \in \chi(T^*M)$ ve $C^\infty(T^*M, \mathbb{R})$, T^*M manifoldu üzerinde C^∞ fonksiyonların halkası olmak üzere

$$^F g : \chi(T^*M) \times \chi(T^*M) \to C^\infty(T^*M, \mathbb{R})$$

dönüşümü

$$\begin{aligned} ^F g(X^H, Y^H) &= {}^F g(X^H, \theta^V) = {}^F g(\omega^V, Y^H) = (g(X, Y))^V \\ ^F g(\omega^V, \theta^V) &= 0 \end{aligned}$$

olacak şekilde tanımlıdır. $^F g$ dönüşümü 2-lineer, simetrik ve non-dejenere bir dönüşüm olup T^*M manifoldu üzerinde bir semi-Riemann metrik tanımlar.

i) 2-lineerlik: $\widetilde{X}, \widetilde{Y}, \widetilde{Z} \in \chi(T^*M)$ ve $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ olmak üzere

$$\begin{aligned} ^F g(\alpha\widetilde{X} + \beta\widetilde{Y}, \widetilde{Z}) &= {}^F g((\alpha X + \beta Y)^H + (\alpha\omega + \beta\theta)^V, Z^H + \eta^V) \\ &= {}^F g((\alpha X + \beta Y)^H, Z^H) + {}^F g((\alpha X + \beta Y)^H, \eta^V) \\ &\quad + {}^F g((\alpha\omega + \beta\theta)^V, Z^H) \\ &= \alpha {}^F g(\widetilde{X}, \widetilde{Z}) + \beta {}^F g(\widetilde{Y}, \widetilde{Z}) \end{aligned}$$

olup $^F g$ 2-lineerdir.

ii) Simetriklik: $\widetilde{X}, \widetilde{Y} \in \chi(T^*M)$ için

$$^F g(\widetilde{X}, \widetilde{Y}) = {}^F g(X^H, Y^H) + {}^F g(X^H, \theta^V) + {}^F g(\omega^V, Y^H)$$

$$
\begin{aligned}
&= {}^{F}g(Y^H, X^H) +^F g(\theta^V, X^H) +^F g(Y^H, \omega^V) \\
&= {}^{F}g(\widetilde{Y}, \widetilde{X})
\end{aligned}
$$

olup ${}^{F}g$ simetriktir.

iii) Non-dejenerelik: T^*M manifoldu üzerinde uyarlanmış koordinatlara göre ${}^{F}g$ dönüşümünün karşılık geldiği matris

$$
\begin{bmatrix} g_{ij} & \delta_{ij} \\ \delta_{ij} & 0 \end{bmatrix}
$$

olup determinantı sıfırdan farklı olduğu için ${}^{F}g$ non-dejeneredir. Ayrıca M üzerinde normal koordinatlar kullanılarak $(T^*M, ^F g)$ semi-Riemann manifoldunun işaret sayıları (n, n) dir.

Teorem 5.2.13. M manifoldu üzerindeki g Riemann ya da semi-Riemann metriğinin TM manifolduna $g^C + g^H$ yükseltilmişi olan g^K, TM üzerinde bir semi-Riemann metrik olup bu metriğin Legendre dönüşümü yardımıyla T^*M deki karşılığı ${}^{K}g$ bir semi-Riemann metriktir.

İspat: T^*M de uyarlanmış koordinatlar göz önüne alınırsa ${}^{K}g$ metriğinin bileşenler cinsinden ifadesi

$$
{}^{K}g = 2dx^i \delta p_j + g^{ij} \delta p_i \delta p_j
$$

olur. Böylece $\widetilde{X}$, $\widetilde{Y} \in \chi(T^*M)$ ve $C^\infty(T^*M, \mathbb{R})$, T^*M manifoldu üzerinde C^∞ fonksiyonların halkası olmak üzere

$$
{}^{K}g : \chi(T^*M) \times \chi(T^*M) \to C^\infty(T^*M, \mathbb{R})
$$

dönüşümü

$$
\begin{aligned}
{}^{K}g(\omega^V, \theta^V) &= {}^{K}g(X^H, \theta^V) =^K g(\omega^V, Y^H) = (g(X, Y))^V \\
{}^{K}g(X^H, Y^H) &= 0
\end{aligned}
$$

olacak şekilde tanımlıdır. ${}^{K}g$ dönüşümü 2-lineer, simetrik ve non-dejenere bir dönüşüm olup T^*M manifoldu üzerinde bir semi-Riemann metrik tanımlar.

Ayrıca M üzerinde normal koordinatlar kullanılarak $(T^*M,^K g)$ semi-Riemann manifoldunun işaret sayıları (n, n) dir.

M manifoldu üzerinde tanımlı g Riemann ya da semi-Riemann metriğinin bileşenlerine bağlı T^*M üzerindeki metrikler ve işaretleri aşağıdaki tablo yardımı ile görülebilir.

$n-boyutlu$ $M\ manifoldu$	$2n-boyutlu$ $T^*M\ manifoldu$			
g *metriği*	${}^C g$	${}^F g = \pi^*(g) + {}^C g$	${}^S g$	${}^K g$
Riemann (R)	n *indeksli* $S.R$	n *indeksli* $S.R$	R	n *indeksli* $S.R$
ν *indeksli Semi Riemann* $(S.R)$	n *indeksli* $S.R$	n *indeksli* $S.R$	2ν *indeksli* $S.R$	n *indeksli* $S.R$

6. BİR SEMİ-RİEMANN MANİFOLDUN İKİNCİ MERTEBEDEN KOTANJANT DEMETİ

Bu bölümde, bir semi-Riemann manifoldun ikinci mertebeden kotanjant demetinin diferensiyelenebilir manifold yapısı tanımlandı. Daha sonra bu semi-Riemann manifold üzerindeki diferensiyel geometrik objelerin ikinci mertebeden kotanjant demetlere yükseltilmişleri elde edildi.

6.1. T^*T^*M nin Diferensiyellenebilir Manifold Yapısı

M n-boyutlu diferensiyellenebilir bir manifold ve T_q^*M, $q \in U \subset M$ noktası üzerinde T_qM tanjant uzayının dual uzayı olan kotanjant uzayı olsun. M nin tüm q noktaları üzerindeki kotanjant uzaylarının ayrık birleşimi olan

$$T^*M = \bigcup_{q \in M} T_q^*M$$

ye M nin birinci mertebeden kotanjant demeti denir. T^*M nin bir ω noktası üzerinde $\pi_M(\omega) = q$ olacak şekilde $\pi_M : T^*M \to M$ kanonik projeksiyonu tanımlıdır. (U, x^i) $1 \leq i \leq n$ M üzerinde lokal bir harita ise $(\pi_M^{-1}(U), x^i \circ \pi_M, p_i)$ T^*M için lokal bir haritadır. Buradaki $p_1, ..., p_n$ (U, x^i) lokal haritası ile tanımlı $(\frac{\partial}{\partial x^1}, ..., \frac{\partial}{\partial x^n})$ lokal çatısının $(dx^1, ..., dx^n)$ lokal dual çatısına göre $\pi_M^{-1}(U)$ daki bir elemanın vektör uzayı koordinatlarıdır. Bu lokal harita ile tanımlanan T^*M 2n-boyutlu diferensiyellenebilir manifold yapısına sahiptir. T^*M üzerinde tanımlanan harita $\pi^{-1}(U) = U'$ ve $x^1 \circ \pi = x^1, ..., x^n \circ \pi = x^n$; $x^{n+1} = p_1, ..., x^{2n} = p_n$ olmak üzere (U', x^A) $1 \leq A \leq 2n$ ile gösterilebilir (Yano, Ishıhara, 1973).

T^*M 2n-boyutlu diferensiyellenebilir manifold ve $T_\omega^*T^*M$, $\omega \in T^*M$ noktası üzerinde $T_\omega T^*M$ tanjant uzayının dual uzayı olan kotanjant uzayı olsun. T^*M nin tüm ω noktaları üzerindeki kotanjant uzaylarının ayrık birleşimi olan

$$T^*T^*M = \bigcup_{\omega \in T^*M} T_\omega^*T^*M$$

T^*T^*M ye T^*M manifoldunun kotanjant demeti denir. T^*T^*M nin herhangi bir Θ noktası üzerinde $\pi_{T^*M}(\Theta) = \omega$ olacak şekilde $\pi_{T^*M} : T^*T^*M \to T^*M$ kanonik projeksiyonu tanımlıdır. $\pi^{-1}_{T^*M}(U')$ açık kümesi $U' \times \mathbb{R}^{2n}$ direkt çarpımına diffeomorfiktir. $\mathbb{R}^{2n}$, $\mathbb{R}$ reel sayılar cismi üzerinde 2n-boyutlu vektör uzayıdır. $\Theta \in T^*_\omega T^*M$ noktası (ω, Θ) sıralı ikilisi ile temsil edilir. Bir $\Theta \in \mathbb{R}^{2n}$ kovektörü $T^*_\omega T^*M$ üzerinde dx^A lokal dual çatısına göre $(\Theta_A); A = 1, ..., 2n$ bileşenleri ile verilir. (U', x^A) T^*M manifoldu üzerinde lokal bir harita ise $(\pi^{-1}_{T^*M}(U'), x^A \circ \pi_{T^*M}, \Theta_A)$ T^*T^*M için lokal bir haritadır. Buradaki $\Theta_1, ..., \Theta_{2n}$ (U', x^A) lokal haritası ile tanımlı $(\frac{\partial}{\partial x^A})$ lokal çatısının (dx^A) lokal dual çatısına göre $\pi^{-1}_{T^*M}(U')$ deki bir elemanın vektör uzayı koordinatlarıdır. (x^A, Θ_A) koordinatlarına U' üzerindeki (x^A) koordinatlarından indirgenmiş koordinatlar ya da kısaca indirgenmiş koordinatlar denir. Eğer $\{\widetilde{U}', \widetilde{x}^A\}$ T^*M üzerinde $\omega = \pi^*_{T^*M}(\Theta)$ noktasını içine alan diğer bir koordinat komşuluğu ise $(\pi^*_{T^*M})^{-1}(U')$ üzerinde Θ nın indirgenmiş koordinatları $(\widetilde{x}^A, \widetilde{\Theta}_A)$ ile verilir. Koordinatlar arası geçiş dönüşümü

$$\begin{aligned} \widetilde{x}^A &= \widetilde{x}^A(x^1, ..., x^n, p_1, ..., p_n) \\ \widetilde{\Theta}_A &= \frac{\partial x^B}{\partial \widetilde{x}^A}\Theta_B \end{aligned} \tag{6.1.1}$$

olur. $\widetilde{x}^A = \widetilde{x}^A(x^1, ..., x^n, p_1, ..., p_n)$ C^∞ sınıftan diferensiyellenebilir fonksiyonlardır. $x^{\overline{A}} = \Theta_A$ ve $\widetilde{x}^{\overline{A}} = \widetilde{\Theta}_A; A = 1, ..., 2n$ konulursa (6.1.1) deki denklemler,

$$\widetilde{x}^\alpha = \widetilde{x}^\alpha(x^A); \alpha = 1, ..., 4n; A = 1, ..., 2n \tag{6.1.2}$$

şeklinde gösterilebilir. Bu denklemlerin jakobiyen matrisi

$$\left(\frac{\partial \widetilde{x}^\alpha}{\partial x^\beta}\right) = \begin{pmatrix} \frac{\partial \widetilde{x}^A}{\partial x^B} & 0 \\ \frac{\partial \widetilde{x}^C}{\partial x^B}\frac{\partial^2 x^A}{\partial \widetilde{x}^C \partial \widetilde{x}^B} & \frac{\partial x^B}{\partial \widetilde{x}^A} \end{pmatrix} \tag{6.1.3}$$

dir. Bu koordinat dönüşümünün tersi

$$x^A = x^A(\widetilde{x}^A) \tag{6.1.4}$$

$$\Theta_A = \frac{\partial \widetilde{x}^B}{\partial x^A}\widetilde{\Theta}_B$$

ya da

$$x^\alpha = x^\alpha(\widetilde{x}^A); \alpha = 1, ..., 4n; A = 1, ..., 2n \qquad (6.1.5)$$

şeklinde tanımlıdır. Bu denklemlerin jakobiyen matrisi

$$(\frac{\partial x^\alpha}{\partial \widetilde{x}^\beta}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial x^A}{\partial \widetilde{x}^B} & 0 \\ \frac{\partial x^C}{\partial \widetilde{x}^B}\frac{\partial^2 \widetilde{x}^A}{\partial x^C \partial x^B} & \frac{\partial \widetilde{x}^B}{\partial x^A} \end{pmatrix} \qquad (6.1.6)$$

olup (6.1.3) deki matrisin tersidir. Böylece T^*T^*M 4n-boyutlu diferensiyellenebilir manifold yapısına sahiptir.

M n-boyutlu diferensiyellenebilir bir manifold olmak üzere

$$T^*T^*M = \bigcup_{\forall \omega \in T^*M} \left(\bigcup_{\forall q \in M} T_q^*M \right)_\omega$$

kümesi M manifoldu üzerinde ikinci mertebeden kotanjant demet olarak adlandırılır. $\widetilde{\pi} = \pi_M \circ \pi_{T^*M} : T^*T^*M \to M$ kanonik projeksiyonu $\widetilde{\pi}(\Theta) = \pi_M \circ \pi_{T^*M}(\Theta) = q$ olacak şekilde tanımlıdır. $\{U, x^i\}$, M manifoldu için lokal bir harita ise $\{\widetilde{\pi}^{-1}(U), x^i, p_i, \Theta_i, \Phi^i\}$, T^*T^*M için lokal bir haritadır. Burada

$$\begin{aligned} x^i &= x^i \circ \pi_M \circ \pi_{T^*M} \\ p_i &= p_i \circ \pi_{T^*M} \\ \Theta_i &= \Theta(\frac{\delta}{\delta x^i}) \quad , \quad \{\frac{\delta}{\delta x^i}, \frac{\partial}{\partial p_i}\} = Span T_\omega^* T^*M \\ \Phi^i &= \Theta(\frac{\partial}{\partial p_i}) \quad , \quad 1 \leq i \leq n \end{aligned}$$

şeklinde tanımlansın. $\{U, x^i\}$ lokal koordinat sisteminden indirgenmiş $\{\widetilde{\pi}^{-1}(U), x^i, p_i, \Theta_i, \Phi^i\}$ lokal koordinat sistemi 4n-boyutlu diferensiyellenebilir manifold yapısına sahiptir. Eğer $q \in M$, noktası üzerinde farklı iki koordinat sistemi $\{U, x^i\}$ ve $\{U, \widetilde{x}^i\}$ ise $\widetilde{\pi}^{-1}(q) \in T^*T^*M$ noktası üzerinde farklı iki koordinat sistemi $\{\widetilde{\pi}^{-1}(U), x^i, p_i, \Theta_i, \Phi^i\}$ ve $\{\widetilde{\pi}^{-1}(\widetilde{U}), \widetilde{x}^i, \widetilde{p}_i, \widetilde{\Theta}_i, \widetilde{\Phi}^i\}$ olur. Bu koordinat sistemleri arası geçiş denklemleri

$$\widetilde{x}^\alpha = \widetilde{x}^\alpha(x^1, ..., x^n, p_1, ..., p_n); \alpha = 1, ..., 4n$$

şeklinde tanımlanmıştı.

$$\frac{\partial \widetilde{x}^A}{\partial x^B} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \widetilde{x}^i}{\partial x^j} & 0 \\ \frac{\partial \widetilde{x}^h}{\partial x^j} \frac{\partial^2 x^i}{\partial \widetilde{x}^h \partial \widetilde{x}^j} & \frac{\partial x^j}{\partial \widetilde{x}^i} \end{pmatrix},$$

olmak üzere bu dönüşümün jakobiyen matrisi

$$(\frac{\partial \widetilde{x}^\alpha}{\partial x^\beta}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial \widetilde{x}^A}{\partial x^B} & 0 \\ \frac{\partial \widetilde{x}^C}{\partial x^B} \frac{\partial^2 x^A}{\partial \widetilde{x}^C \partial \widetilde{x}^B} & \frac{\partial x^B}{\partial \widetilde{x}^A} \end{pmatrix}$$

eşitliğini sağlayacak şekilde tanımlıdır. Yukarıdaki denklemde Θ_i ve Φ^i koordinat fonksiyonları ile M nin diferensiyel geometrik objeleri arasında aşağıdaki bağıntılar vardır.

g, M manifoldu üzerinde g_{ik} bileşenlerine sahip bir semi-Riemann metrik, $\widetilde{g}$, $g_{ik}g^{kj} = \delta_i^j$ eşitliği sağlanacak şekilde g^{kj} bileşenlerine sahip $(2,0)$ tipinde kontravaryant bir tensör, g^S, T^*M de Sasaki semi-Riemann metrik, $X \in \Im_0^1(M)$, X^*, M deki g semi-Riemann metriği ile birleştirilmiş bir kovektör alanı, Θ da T^*M üzerinde bileşenleri T^*T^*M nin koordinat fonksiyonları olan bir kovektör alanı olmak üzere

$$\Theta(\frac{\partial}{\partial p_j}) = g^S(\Theta^*, \frac{\partial}{\partial p_i}) = (\widetilde{g}(X^*, dx^i))^{VV} \quad ; \quad \Theta^* = g_{jk}\Phi^k \frac{\partial}{\partial p_j}$$

eşitliği yardımıyla

$$\Phi^i = (X^i)^{VV}$$

ve

$$\Theta(\frac{\delta}{\delta x^j}) = g^S({}^*\Theta, \frac{\delta}{\delta x^j}) = (\nabla_i \omega_j)^{VV} = (\frac{\delta \omega_j}{\delta x^i})^{VV} \quad , \quad {}^*\Theta = g^{jk}\Theta_k \frac{\delta}{\delta x^j}$$

eşitliği yardımıyla

$$\Theta_i = (\nabla_i \omega_j)^{VV}$$

elde edilir.

$\pi^{-1}_{T^*M}(U') \subset T^*T^*M$ de (x^A, Θ_A) indirgenmiş koordinatları ile ifade edilen 1-form $\Theta = \Theta_A dx^A$ olsun. $\pi^{-1}_{T^*M}(U') \cap \pi^{-1}_{T^*M}(\widetilde{U}')$ üzerinde $\Theta = \Theta_A dx^A = \widetilde{\Theta}_A d\widetilde{x}^A$ olur. $U' \subset T^*M$ üzerinde $\Theta = \Theta_A dx^A$ ile ifade edilen 1-form $\pi^{-1}_{T^*M}(U') \subset T^*T^*M$ üzerinde yine $\Theta = \Theta_A dx^A$ ile ifade edildiğinden T^*T^*M üzerinde global 1-form tanımlar. Θ 1-formunun dış türevi $d\Theta$, $\pi^{-1}_{T^*M}(U')$ üzerinde

$$d\Theta = d\Theta_A \wedge dx^A \quad ; \quad A = 1, ..., 2n$$

şeklinde verilen 2-formdur. Bu 2-form

$$d\Theta = \frac{1}{2}\widetilde{\epsilon}_{\alpha\beta} dx^\alpha \wedge dx^\beta \quad ; \quad \alpha, \beta = 1, ..., 4n$$

şeklinde yazılırsa

$$\widetilde{\epsilon}_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 0 & -\delta^A_B \\ \delta^B_A & 0 \end{pmatrix}$$

olur. $\widetilde{\epsilon}_{\alpha\beta}$ matrisinin determinantı sıfırdan farklı olduğu için $\widetilde{\epsilon}^{\beta\gamma}$ ile gösterilen bir ters matrise sahiptir. Böylece $\widetilde{\epsilon}_{\alpha\beta}\widetilde{\epsilon}^{\beta\gamma} = \delta^\gamma_\alpha$ olduğundan

$$\widetilde{\epsilon}^{\beta\gamma} = \begin{pmatrix} 0 & \delta^C_B \\ -\delta^B_C & 0 \end{pmatrix}$$

dir. $\pi^{-1}_{T^*M}(U')$ üzerinde bileşenleri $\widetilde{\epsilon}_{\alpha\beta}$ ile verilen $(0,2)$ tipindeki bir tensör alanı $\widetilde{\epsilon}$ ile gösterilirse $\pi^{-1}_{T^*M}(U')$ üzerinde $\widetilde{\epsilon}^{\beta\gamma}$ ile gösterilen $(2,0)$ tipindeki tensör alanı $\widetilde{\epsilon}^{-1}$ ile gösterilir.

Θ, T^*M üzerinde bir ω noktasının tanjant uzayının dual uzayı olan ve $\{dx^i, \delta p_i\}$ lokal dual baz 1-formları tarafından gerilen $T^*_\omega T^*M$ kotanjant uzayı üzerinde

$$\Theta = \Theta_i dx^i + \Phi^i \delta p_i$$

lokal gösterimine sahip bir kovektör olsun. $\omega \in \Im_1^0(M)$ ve $X \in \Im_0^1(M)$ olsun. O zaman T^*M manifoldu üzerinde

$$\widetilde{\omega}^S = -X^H + (\nabla_i \omega)^V = -X^j \frac{\delta}{\delta x^j} + \frac{\delta \omega_j}{\delta x^i} \frac{\partial}{\partial p_j}$$

ile ifade edilen bir vektör alanı elde edilir. Bu vektör alanının uyarlanmış koordinatlar cinsinden ifadesi

$$(\widetilde{\omega}^B) = \left(-X^j, \frac{\delta \omega_j}{\delta x^i} \right)$$

matris gösterimine sahiptir. Elde edilen bu vektör alanı ile birleşen 1-form

$$\widetilde{\omega}_A = \widetilde{\omega}^B \widetilde{\epsilon}_{BA}$$

eşitliği yardımıyla

$$(\widetilde{\omega}_A) = (\frac{\delta \omega_j}{\delta x^i}, X^j)$$

şeklinde bulunur. Bu 1-formun uyarlanmış lokal dual baz vektörleri cinsinden ifadesi

$$\widetilde{\omega}_S = \frac{\delta \omega_j}{\delta x^i} dx^j + X^j \delta p_j$$

olur. π_{T^*M} kanonik projeksiyonu

$$(\pi_{T^*M})^* (dx^i) = dx^i \quad ; \quad (\pi_{T^*M})^* (\delta p_i) = \delta p_i$$

bağıntıları sağlanacak şekilde tanımlansın. Böylece

$$(\pi_{T^*M})^* (\widetilde{\omega}_S) = \widetilde{\omega}_S$$

olup $\widetilde{\omega}_S$ 1-formu T^*T^*M üzerinde global bir 1-form tanımlar. Burada

$$\frac{\delta \omega_j}{\delta x^i} \circ \pi_M \circ \pi_{T^*M} = \Theta_j \quad ; \quad X^j \circ \pi_M \circ \pi_{T^*M} = \Phi^j$$

olduğundan T^*T^*M üzerinde tanımlanan global bir 1-form

$$\left(\pi_{T^*M}\right)^* (\widetilde{\omega}_S) = \widetilde{\omega}_S = \Theta_j dx^j + \Phi^j \delta p_j$$

lokal gösterimine sahiptir. Bu 1-formun dış türevi $d\widetilde{\omega}_S$ T^*T^*M üzerinde

$$d\widetilde{\omega}_S = d\Theta_j \wedge dx^j + d\Phi^j \wedge \delta p_j$$

ile ifade edilen 2-formdur. Bu 2-formun matris gösterimi indirgenmiş koordinatlarla ifade edilenin aynısıdır. Yani,

$$\widetilde{\epsilon}_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 0 & -\delta_B^A \\ \delta_A^B & 0 \end{pmatrix}$$

olur.

6.2. T^*T^*M ye İkinci Mertebeden Yükseltilmişler

Eğer $\widetilde{f}$, T^*M üzerinde bir fonksiyon ise bu fonksiyonun T^*T^*M ye düşey yükseltilmişi

$$\widetilde{f}^V = \widetilde{f} \circ \pi_{T^*M}$$

şeklinde tanımlanan bir fonksiyondur. $\pi_{T^*M} : T^*T^*M \to T^*M$, $\pi_{T^*M}(\Theta) = \omega$ eşitliği ile tanımlı kanonik projeksiyon olmak üzere

$$\widetilde{f}^V(\Theta) = (\widetilde{f} \circ \pi_{T^*M})(\Theta) = \widetilde{f}(\pi_{T^*M}(\Theta)) = \widetilde{f}(\omega) \tag{6.2.1}$$

olur. $\widetilde{f}, \widetilde{g} \in \Im_0^0(T^*M)$ olmak üzere

$$(\widetilde{f}\widetilde{g})^V = \widetilde{f}^V \widetilde{g}^V \quad , \quad (\widetilde{f} + \widetilde{g})^V = \widetilde{f}^V + \widetilde{g}^V$$

eşitlikleri kolayca elde edilebilir. $f \in \Im_0^0(M)$ için eğer $\widetilde{f} = f^V$ ise

$$f^{VV} = f^V \circ \pi_{T^*M} = f \circ \pi_M \circ \pi_{T^*M} \tag{6.2.2}$$

olup f^{VV} ye $f \in \Im_0^0(M)$ nin T^*T^*M ye ikinci mertebeden *düşey yükseltilmişi* denir.

$\widetilde{X} \in \Im_0^1(T^*T^*M)$ vektör alanı tüm $\widetilde{f} \in \Im_0^0(T^*M)$ için $\widetilde{X}\widetilde{f}^V = 0$ olacak şekilde tanımlı olsun. Tanımlanan bu $\widetilde{X}$ vektör alanına T^*T^*M içindeki *düşey vektör alanı* denir. $\widetilde{X}$ nın düşey vektör alanı olması için gerek ve yeter şart

$$(\widetilde{X}^\alpha) = \begin{pmatrix} 0 \\ \widetilde{X}^{\overline{A}} \end{pmatrix} \quad \alpha = 1, ..., 4n; A, \overline{A} = 1, ..., 2n \tag{6.2.3}$$

şeklinde bileşenlere sahip olmasıdır. Yani, $(\pi_{T^*M})^{-1}(U')$ deki $(x^A, x^{\overline{A}}) = (x^A, \Theta_A)$ indirgenmiş koordinatlarına göre $\widetilde{X}^A = 0$ olmalıdır.

$\widetilde{\omega} \in \Im_1^0(T^*M)$, (x^A, Θ_A) indirgenmiş koordinatlarına göre lokal gösterimi $\widetilde{\omega} = \widetilde{\omega}_A dx^A$ olan bir 1-form olsun. $\pi_{T^*M} : T^*T^*M \to T^*M$ projeksiyonunun diferensiyelinin dual dönüşümü $(\pi_{T^*M})^*$ olmak üzere T^*T^*M içinde $(\pi_{T^*M})^*(\widetilde{\omega})$ 1-formu elde edilir. Bu 1-formun indirgenmiş koordinatlara göre lokal ifadesi $(\pi_{T^*M})^*(\widetilde{\omega}) = \widetilde{\omega}_A dx^A$ olur. Ayrıca bu 1-form $(\pi_{T^*M})^*(\widetilde{\omega}) = \widetilde{\omega}_\alpha dx^\alpha$ $1 \leq \alpha \leq 4n$ şeklinde de yazılabilir. $\widetilde{\epsilon}^{\alpha\beta}$ ile kontraksiyona uğratılırsa, bileşenleri

$$\widetilde{\omega}^\beta = \widetilde{\omega}_\alpha \widetilde{\epsilon}^{\alpha\beta}$$

olan bir vektör alanı elde edilir. Bu vektör alanına T^*M içindeki $\widetilde{\omega}$ 1-formunun düşey yükseltilmişi denir ve $\widetilde{\omega}^V$ ile gösterilir. $\widetilde{\omega}^V$ nin T^*T^*M içindeki indirgenmiş koordinatlara göre matris gösterimi

$$\widetilde{\omega}^\beta = (\widetilde{\omega}_B, 0) \begin{pmatrix} 0 & \delta_B^C \\ -\delta_C^B & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \widetilde{\omega}_B \end{pmatrix} \tag{6.2.4}$$

şeklinde tanımlıdır.

Teorem 6.2.1. Her $U' \subset T^*M$ içindeki dx^A lokal dual baz çatısı için $(\pi_{T^*M})^{-1}(U')$ içindeki (x^A, Θ_A) indirgenmiş koordinatlarına göre

$$(dx^A)^V = \frac{\partial}{\partial \Theta_A} \tag{6.2.5}$$

dır.

İspat: Teoremin doğruluğu (6.2.3) ve (6.2.4) deki eşitliklerin kullanılmasıyla doğrudan görülebilir.

M manifoldu içinde $\omega = \omega_i dx^i$ ile ifade edilen 1-form ve $X = X^i \frac{\partial}{\partial x^i}$ ile ifade edilen vektör alanı olmak üzere

$$\widetilde{\omega}_S = (\frac{\delta \omega_j}{\delta x^i})^V dx^j + (X^j)^V \delta p_j$$

lokal gösterimine sahip $\widetilde{\omega}_S$ T^*M de 1-formdur. Bu 1-form $(\pi_{T^*M})^*$ dönüşümü yardımıyla T^*T^*M de

$$\begin{aligned} (\pi_{T^*M})^*(\widetilde{\omega}_S) &= (\frac{\delta \omega_j}{\delta x^i})^{VV} dx^j + (X^j)^{VV} \delta p_j \\ \widetilde{\omega}_\alpha dx^\alpha &= \Theta_j dx^j + \Phi^j \delta p_j \end{aligned}$$

bileşenlerine sahip 1-form olur. $\widetilde{\epsilon}^{\alpha\beta}$ ile kontraksiyona uğratılırsa

$$\widetilde{\omega}^\beta = \widetilde{\omega}_\alpha \widetilde{\epsilon}^{\alpha\beta}$$

eşitliğini sağlayacak şekilde

$$\widetilde{\omega}^\beta = (\Theta_j, \Phi^j, 0, 0) \begin{pmatrix} 0 & 0 & \delta_i^j & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \delta_j^i \\ -\delta_i^j & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\delta_j^i & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \Theta_i \\ \Phi^i \end{pmatrix}$$

bulunur. Böylece T^*M yi geren $(dx^i, \delta p_i)$ dual baz vektörlerinin düşey yükseltilmişi

$$(dx^i)^V = \frac{\partial}{\partial \Theta_i} \quad ; \quad (\delta p_i)^V = \frac{\partial}{\partial \Phi^i} \tag{6.2.6}$$

elde edilir.

Eğer $\widetilde{X} \in \Im^1_0(T^*M)$, T^*M üzerindeki uyarlanmış lokal çatıya göre $\widetilde{X} = \widetilde{X}^i \frac{\delta}{\delta x^i} + \widetilde{X_i} \frac{\partial}{\partial p_i}$ lokal gösterimine sahip olan bir vektör alanı ise $\widetilde{\iota}$,

$$\widetilde{\iota} : \begin{array}{lcl} \Im^1_0(T^*M) & \rightarrow & \Im^0_0(T^*T^*M) \\ \frac{\delta}{\delta x^i} & \rightarrow & \widetilde{\iota}(\frac{\delta}{\delta x^i}) = \Theta_i \\ \frac{\partial}{\partial p_i} & \rightarrow & \widetilde{\iota}(\frac{\partial}{\partial p_i}) = \Phi^i \end{array}$$

inclusion dönüşümü yardımıyla $\widetilde{\iota}(\widetilde{X}) = \widetilde{X}^i \Theta_i + \widetilde{X_i} \Phi^i$ bileşenleri ile ifade edilen T^*T^*M içinde bir fonksiyon elde edilir.

T^*M deki ω^V vektör alanının T^*T^*M ye tam yükseltilmişi aşağıdaki yol izlenerek bulunur. Önce T^*T^*M deki $\widetilde{\iota}(\omega^V)$ fonksiyonu elde edilir. Bu fonksiyonun dış türevi alınarak $d\widetilde{\iota}(\omega^V)$ 1-formu bulunur. Bulunan bu 1-form $\widetilde{\epsilon}^{\alpha\beta}$ yardımıyla bir vektör alanına dönüştürülür. Elde edilen vektör alanına ω^V vektör alanının T^*T^*M ye *tam yükseltilmişi* denir.

$$\begin{aligned} \widetilde{\iota}(\omega^V) &= \widetilde{\iota}((\omega_i)^V \frac{\partial}{\partial p_i}) = (\omega_i)^{VV} \Phi^i \\ d\widetilde{\iota}(\omega^V) &= \frac{\partial}{\partial x^j}\{(\omega_i)^{VV}\}\Phi^i dx^j + (\omega_j)^{VV} d\Phi^j \\ \omega^{VC} &= \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x^j}\{(\omega_i)^{VV}\}\Phi^i & 0 & 0 & (\omega_j)^{VV} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & \delta^j_i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \delta^i_j \\ -\delta^j_i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\delta^i_j & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\omega^{VC} = \begin{pmatrix} 0 \\ (\omega_i)^{VV} \\ \frac{\partial}{\partial x^j}\{(\omega_i)^{VV}\}\Phi^i \\ 0 \end{pmatrix} \tag{6.2.7}$$

Benzer şekilde

$$\begin{aligned}
\widetilde{\iota}(X^H) &= \widetilde{\iota}((X^i)^V \frac{\delta}{\delta x^i}) = (X^i)^{VV}\Theta_i \\
d\widetilde{\iota}(X^H) &= \frac{\partial}{\partial x^j}\{(X^i)^{VV}\}\Theta_i dx^j + (X^j)^{VV} d\Theta_j \\
X^{HC} &= \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x^j}\{(X^i)^{VV}\}\Theta_i & 0 & (X^j)^{VV} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & \delta_i^j & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \delta_j^i \\ -\delta_i^j & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\delta_j^i & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
X^{HC} &= \begin{pmatrix} -(X^i)^{VV} \\ 0 \\ \frac{\partial}{\partial x^j}\{(X^i)^{VV}\}\Theta_i \\ 0 \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{6.2.8}$$

Ayrıca

$$\begin{aligned}
\widetilde{\iota}(X^C) &= \widetilde{\iota}((X^i)^V \frac{\delta}{\delta x^i} - p_h(\nabla_i X^h)^V \frac{\partial}{\partial p_i}) = (X^i)^{VV}\Theta_i - (\nabla_i X^h)^{VV} p_h \Phi^i \\
d\widetilde{\iota}(X^C) &= (\frac{\partial X^i}{\partial x^j})^{VV}\Theta_i dx^j + (X^j)^{VV} d\Theta_j - \frac{\partial \nabla_i X^h}{\partial x^j} p_h \Phi^i dx^j + (\nabla_i X^j)^{VV} dp_j + \\
&\quad +(\nabla_j X^h)^{VV} p_h d\Phi^j \\
X^{CC} &= \begin{pmatrix} -(X^i)^{VV} \\ -(\nabla_i X^h)^{VV} p_h \\ (\frac{\partial X^i}{\partial x^j})^{VV}\Theta_i - (\frac{\partial \nabla_i X^h}{\partial x^j})^{VV} p_h \Phi^i \\ (\nabla_i X^j)^{VV} \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{6.2.9}$$

olur.

T^*T^*M manifoldu üzerindeki semi-Riemann metriklerin diferensiyel geometrisi ve M manifoldu üzerindeki tensör alanlarının T^*T^*M ye ikinci mertebeden yükseltilmişleri açık çalışma konularıdır.

7. KAYNAKLAR

Akbulut, S., Özdemir, M., Salimov, A.A.,2001. Diagonal lift in the cotangent bundle and its applications, Turk. J. Math. 25, No.4, 491-502.

Ayhan, İ., 1997. Derivasyonlar ve tensör alanlarının ikinci mertebeden yükseltilmişleri, P.Ü.F.B.E., Yüksek Lisans Tezi.

Ayhan, İ., Çöken A. C., Civelek Ş., 2005. Tanjant demet üzerindeki horizontal liftler, III. Geometri Sempozyumu, Osmangazi Üni., Eskişehir.

Bejancu, Aurel., 1999. Farran, Hani Reda, On the vertical bundle of a pseudo-Finsler manifold, Int. J. Math. Math. Sci. 22, No.3, 637-642.

Civelek, Ş.,1988. İkinci mertebeden genişletilmiş manifoldlar Üzerinde Lift'ler,G.Ü.F.B.E.,Yüksek Lisans Tezi,

Dombrowski, P., 1962. On the geometry of the tangent bundle, J. Reine Angew. Math., 210, 73-88.

Duggal, Krishan L., Bejancu, Aurel, 1996. Lightlike submanifolds of semi-Riemannian manifolds and applications, Dordrecht, 364, Kluwer Academic Publishers.

Kobayashi, S., Nomizu, K.,1963. Foundations of Differential Geometry, Vol. I, Interscience Publishers.

Kobayashi, S., Nomizu, K.,1969. Foundations of Differential Geometry, Vol. II, Interscience Publishers.

Miron, R., Watanabe, S., Ikeda, S.,1986. Cotangent bundle geometry, Mem. Sect. Stiint., Ser. IV 9, No.1, 25-46.

Miron, R., Hrimiuc, D., Shimada, H., Sabau, Sorin V.,
2001. The geometry of Hamilton and Lagrange spaces, Dordrecht, Kluwer Academic Publishers.

O'Neill, B.,1983. Semi-Riemannian Geometry with Applications to relativity, Academic Press. Inc.

Oproiu, V.,1987. A pseudo-Riemannian structure in lagrange geometry, An. St. Univ. Al I.Cuza Iaşi, 33, 239-254.

Oproiu, V., Papaghiuc, N.,1990. A pseudo-Riemannian structure on the cotangent bundle, An. Stiint. Univ. Al. I. Cuza Iasi, Ser. Noua, Mat. 36, No.3, 265-276.

Oproiu, V., Papaghiuc, N., 1998. On the geometry of tangent bundle of a (pseudo-) Riemannian manifold, An. Stint. Al. I. Cuza Iasi, Noua, Mat. 44, No.1, 67-83.

Sasaki, S., 1958. On the differential geometry of tangent bundles of Riemannian manifolds, Tôhoku Math. J., II. Ser. 10, 338-354.

Tani, M., 1969. Prolongations of hypersurfaces to tangent bundles, Kodai Math., Semin. Rep.,21, XK, 85-96.

Willmore, T., 1988. Riemann extensions and affine differential geometry, Result. Math. 13, No.3/4, 403-408.

Yano, K., Kon, M., 1981. Structures on Manifolds, World Scientific Publishing,

Singapore.

Yano, K., Ishihara,S., 1973. Tangent and Cotangent Bundles, Marcel Decker. Inc.

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı	:	İsmet AYHAN
Doğum yeri	:	DENİZLİ
Doğum Yılı	:	1972
Medeni Hali	:	Evli, 2 çocuk

Eğitim ve Akademik Durumu :

Lise	1986-1989 Denizli Cumhuriyet Lisesi
Lisans	1989-1993 Selçuk Üniversitesi
Yüksek Lisans	1994-1997 Pamukkale Üniversitesi

Yabancı Dil : İngilizce

İş Deneyimi :

1994-1998	Milli Eğitim kurumlarında öğretmenlik
1998-...	Pamukkale Üniversitesi Eğitim Fakültesi Fen Bilgisi Öğretmenliği A.B.D. Öğr.Gör.