

**KLASİK MEKANİKTEKİ MEKANİK SİSTEMLERİN  
BİLGİSAYAR PROGRAMLAMA İLE MODELLENMESİ**

**Pamukkale Üniversitesi  
Fen Bilimleri Enstitüsü  
Yüksek Lisans Tezi  
Matematik Anabilim Dalı**

---

**Mehmet ÖZAR**

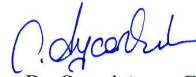
**Danışman: Yard. Doç. Dr. Şevket CİVELEK**


**Haziran, 2007  
DENİZLİ**

**YÜKSEK LİSANS TEZİ ONAY FORMU**


Mehmet ÖZAR tarafından Yard. Doç. Dr. Şevket CİVELEK yönetiminde hazırlanan “**Klasik Mekanikteki Mekanik Sistemlerin Bilgisayar Programlama İle Modellenmesi**” başlıklı tez tarafımızdan okunmuş, kapsamı ve niteliği açısından bir Yüksek Lisans Tezi olarak kabul edilmiştir.

  
Yard. Doç. Dr. Şevket CİVELEK  
Jüri Başkanı (Danışman)

  
Yard. Doç. Dr. Cansel Aycan ERKE  
Jüri Üyesi

  
Yard. Doç. Dr. Zekeriya GİRGIN  
Jüri Üyesi

Pamukkale Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun  
25.10.2022 tarih ve 13.8. sayılı kararıyla onaylanmıştır.

  
Prof. Dr. Mehmet Ali SARIGÖL  
Müdür

## TEŞEKKÜR

Bu çalıőmanın hazırlanmasında bana fikir veren, her aőamasında bilgi ve tecrübesiyle beni yönlendiren değerli tez danışman hocam Yard. Doç. Dr. Şevket CİVELEK'e, bilgisayar programında destek olan ve yol gösteren değerli hocam Yard. Doç. Dr. Zekeriya GİRĞİN'e, tezi okuyup yapıcı eleőtirilerle tez düzeltmelerime yardım eden ve sabır gösterip bana destek olan sevgili eőime, beni bu çalıőmamda teőviklendiren saygıdeğer aileme teşekkür ederim.

Mehmet ÖZAR

Bu tezin tasarımı, hazırlanması, yürütülmesi, araştırmalarının yapılması ve bulgularının analizlerinde bilimsel etiğe ve akademik kurallara özenle riayet edildiğini; bu çalışmanın doğrudan birincil ürünü olmayan bulguların, verilerin ve materyallerin bilimsel etiğe uygun olarak kaynak gösterildiğini ve alıntı yapılan çalışmalara atfedildiğini beyan ederim.

İmza :  
Öğrenci Adı Soyadı : Mehmet ÖZAR

## ÖZET

# KLASİK MEKANİKTEKİ MEKANİK SİSTEMLERİN BİLGİSAYAR PROGRAMLAMA İLE MODELLENMESİ

ÖZAR, Mehmet

Yüksek Lisans Tezi, Matematik ABD

Tez Yöneticisi: Yard. Doç. Dr. Şevket CİVELEK

Haziran 2007, 71 Sayfa

Bu çalışmada, ele alınan bir rigid cismin Kısıtlı Mekanik Sistemlerde Lagrange Denklemleri elde edildi. Bu cismin sürtülmeli ve sürtünmesiz ortamlardaki hareket ve enerji denklemleri analitik olarak hesaplandı. Daha sonra bu denklemler MATLAB-SIMULINK bilgisayar programı kullanılarak; bilgisayar ortamına taşınıp bazı mekanik sistemlerin simülasyonu yapıldı. Bu simülasyonlar sonucunda elde edilen verilerin grafikleri hazırlandı ve bu verilere dayanılarak, mekanik sistemler hakkında yorumlar yapılarak bazı önemli sonuçlar elde edildi.

**Anahtar Kelimeler:** Kısıtlı Mekanik Sistemler, Lagrange Denklemleri, Coulomb Kayma Sürtünmesi, MATLAB-SIMULINK, Bilgisayar Modeli

Yard. Doç. Dr. Şevket CİVELEK

Yard. Doç. Dr. Cansel ERKE

Yard. Doç. Dr. Zekeriya GİRGIN

**ABSTRACT****MECHANICS SYSTEMS THAT IS IN THE CLASSICAL  
MECHANIC MODELLED WITH COMPUTER PROGRAMME**

ÖZAR, Mehmet

M. Sc. Thesis in Mathematics

Supervisor: Asst. Prof. Dr. Şevket CİVELEK

June 2007, 71 Pages

In this study, the Lagrange equations of an evaluated rigid body in Constraint Mechanical Systems were obtained. Motion and energy equations of the body in friction and non-friction systems were calculated analytically. Then by using the MATLAB-SIMULINK computer programme; this equations were moved into the computer systems and simulate of some mechanical systems was done. The graphs of the obtained data according to the simulate results were prepared and the comments of mechanics systems were done, some important results were obtained considering these data.

**Keywords:** Constraint Mechanical Systems; Holonomic and Nonholonomic; Constraints; Lagrange Functions and Equations; Coulomb Sliding Friction; MATLAB-SIMULINK; Computer Modelling.

Asst. Prof. Dr. Şevket CİVELEK

Asst. Prof. Dr. Cansel ERKE

Asst. Prof. Dr. Zekeriya GİRĞİN

## İÇİNDEKİLER

	Sayfa
Yüksek Lisans Tezi Onay Formu .....	ii
Teşekkür .....	iii
Bilimsel Etik Sayfası .....	iv
Özet .....	v
Abstract .....	vi
İçindekiler .....	vii
Şekiller Dizini .....	viii
Tablolar Dizini .....	x
Simge ve Kısaltmalar Dizini .....	xi
1. GİRİŞ .....	1
2. KISITLI MEKANİK SİSTEMLER .....	2
2.1. Sanal İşler İlkesi .....	4
2.2. Lagrange Denklemleri .....	5
2.3. Çember Üzerinde Hareket Eden Sıkıştırılmış Cisim Örneği .....	6
2.4. Örnek 2.3'ün MATLAB-SIMULINK Modellemesi .....	8
2.5. Eğik Düzlemde Duran Katı Cisim Örneği .....	15
2.6. Örnek 2.5'in MATLAB-SIMULINK Modellemesi .....	16
2.7. Bağ Koşulları .....	22
2.8. Durgun Sürtünme Olayı .....	23
2.8.1. Coulomb sürtünmesi .....	23
2.8.2. Durgun sürtünme .....	23
2.8.3. Akışkan direnci sürtünmesi .....	24
2.8.4. Coulomb ek akışkan direnci sürtünmesi .....	25
2.8.5. Durgun Coulomb ek akışkan direnci sürtünmesi .....	25
2.8.6. Durgun, Coulomb ek akışkan direnci Stribeck sürtünmesi .....	26
2.8.7. Sürekli fonksiyonlar .....	26
2.8.8. Temel algoritmalar olayı .....	27
3. DÜZGÜN OLMAYAN MEKANİK SİSTEMLER .....	28
3.1. Düzgün Olmayan Sistemlere Örnek .....	31
3.2. Kütlelerin Sallanmasını Engelleme Problemi .....	32
4. KISITLI MEKANİK SİSTEMLERİN HAREKET DENKLEMLERİ .....	35
4.1 Giriş .....	35
4.2. Non-İdeal Kısıtlayıcı İle İlgili Lagrange Dinamiğinin Temel Prensipleri .....	35
4.3. Analitik Dinamiğin Temel Kuadratik Minimizasyon Prensipleri .....	38
4.4. Non-İdeal Kısıtlayıcılarla İlgili Sistemlerin Açık Hareket Denklemi .....	41
4.5. Açıklayıcı Örnekler .....	45
5. BİLGİSAYAR PROGRAMLAMA İLE MEKANİK SİSTEMLERİN MODELLENMESİ .....	50
5.1. Örnek 4.5.1'in MATLAB-SIMULINK Modeli .....	50
5.2. Örnek 4.5.2'nin MATLAB-SIMULINK Modeli .....	61
6. SONUÇ .....	68
KAYNAKLAR .....	70
ÖZGEÇMİŞ .....	71

## ŞEKİLLER DİZİNİ

	Sayfa
Şekil 2.1 Yeryüzüne dikey konumda bulunan Radius yarıçaplı çember üzerinde hareket eden sıkıştırılmış $m$ kütlesi .....	6
Şekil 2.2 Örnek 2.3'ün MATLAB-SIMULINK modeli.....	8
Şekil 2.3 İlk hız verilmeden oluşturulan modelleme grafiği .....	10
Şekil 2.4 Yalnız $x$ eksen yönünde hız verilerek oluşturulan modelleme grafiği .....	11
Şekil 2.5 $x$ ve $y$ eksen yönünde hız verilerek oluşturulan modelleme grafiği.....	12
Şekil 2.6 $y$ eksen yönünde hızın artırılmasıyla oluşturulan modelleme grafiği .....	13
Şekil 2.7 $x$ eksen yönünde hızın artırılmasıyla oluşturulan modelleme grafiği.....	14
Şekil 2.8 Eğim açısı $\theta$ olan sürtünmesiz bir eğik düzlem üzerinde kendi ağırlığının etkisinde hareket eden $m$ kütleli bir cismin hareketi .....	15
Şekil 2.9 Örnek 2.5'in MATLAB-SIMULINK modeli.....	16
Şekil 2.10 İlk hız verilmeden oluşturulan modelleme grafiği.....	17
Şekil 2.11 Yalnız $x$ eksen yönünde hız verilerek oluşturulan modelleme grafiği.....	18
Şekil 2.12 $x$ ve $y$ eksen yönünde hız verilerek oluşturulan modelleme grafiği .....	19
Şekil 2.13 İlk hızı olmayan eğim açısı değişen modelleme grafiği .....	20
Şekil 2.14. Eğim açısı değişen modele $x$ ve $y$ eksen yönünde hız verilerek oluşturulan modelleme grafiği.....	21
Şekil 2.15 Coulomb sürtünme modeli .....	23
Şekil 2.16 Durgun sürtünme modeli .....	24
Şekil 2.17 Akışkan direnci sürtünme modeli .....	24
Şekil 2.18 Coulomb ek akışkan direnci sürtünmesi modeli .....	25
Şekil 2.19 Durgun, Coulomb ek akışkan direnci sürtünmesi modeli .....	25
Şekil 2.20 Durgun, Coulomb akışkan direnci, ek Stribeck sürtünme modeli .....	26
Şekil 3.1.(a) Doğrusal yayların bir sistemi .....	28
Şekil 3.1.(b) Doğrusal yayların bir sistemi .....	29
Şekil 3.1.(c) Coulomb kayma sürtünmesinin bir çifti .....	30
Şekil 3.2.(a) Duvara çarpan bir kütle .....	30
Şekil 3.2.(b) İki kütleli bir birbirine çarpması .....	30
Şekil 3.2.(c) Bir uçakta $l$ uzunluğu boyunca rigid bir cismin $l$ radius dairesel halkası .....	31
Şekil 3.3.(a) Bir düzgün olmayan değişim ile parabolün iki kolunun varlığının bir göstergesi .....	31
Şekil 3.3.(b) 1956'dan sonraki günlerde inşa edilen nesnelere temellerinin dünya yüzeyinde düzenlenmesi .....	32
Şekil 3.3.(c) Rastgele tekrar eden etkiler için zıplayan top problemi .....	32
Şekil 3.3.(d) Taşıtlardaki vites makarası modeli .....	33
Şekil 3.4.(a) Sürtünme ile ilgili titreşim problemleri .....	33
Şekil 3.4.(b) Sürtünme oskülatörü .....	33
Şekil 3.4.(c) Sürtünme oskülatörü .....	34
Şekil 5.1 MATLAB-SIMULINK modelinin sabit değerleri .....	50
Şekil 5.2 MATLAB-SIMULINK modelinin terimleri .....	51
Şekil 5.3 MATLAB-SIMULINK modelinin $Q_i^c$ değeri .....	51
Şekil 5.4 Örnek 4.5.1'in MATLAB-SIMULINK modeli .....	51
Şekil 5.5 Yalnız $x$ eksen yönünde hız verilerek oluşturulan modelleme grafiği.....	53



<b>Şekil 5.6</b> Sürtünme katsayısı verilerek oluşturulan modelleme grafiği .....	<b>54</b>
<b>Şekil 5.7</b> $y$ eksenini yönünde hız verilmesiyle oluşturulan modelleme grafiği .....	<b>55</b>
<b>Şekil 5.8</b> Konum değiştirilerek oluşturulan modelleme grafiği .....	<b>56</b>
<b>Şekil 5.9</b> Konum değiştikten sonra $y$ eksenini yönünde hız verilmesiyle oluşturulan modelleme grafiği .....	<b>57</b>
<b>Şekil 5.10</b> Yalnız $y$ eksenini yönünde hız verilerek oluşturulan modelleme grafiği .....	<b>58</b>
<b>Şekil 5.11</b> Konum değiştirilerek oluşturulan modelleme grafiği .....	<b>59</b>
<b>Şekil 5.12</b> $x$ ve $y$ eksenini yönünde hız verilerek oluşturulan modelleme grafiği .....	<b>60</b>
<b>Şekil 5.13</b> Örnek 4.5.2'nin MATLAB-SIMULINK modeli .....	<b>62</b>
<b>Şekil 5.14</b> İlk hızı olmayan eğim açısı $30^\circ$ olan modelleme grafiği .....	<b>63</b>
<b>Şekil 5.15</b> Yalnız $x$ eksenini yönünde hız verilerek oluşturulan modelleme grafiği .....	<b>64</b>
<b>Şekil 5.16</b> $x$ ve $y$ eksenini yönünde hız verilerek oluşturulan modelleme grafiği .....	<b>65</b>
<b>Şekil 5.17</b> Sürtünme katsayısı değiştirilerek oluşturulan modelleme grafiği .....	<b>66</b>
<b>Şekil 5.18</b> Eğim açısı değiştirilerek oluşturulan modelleme grafiği .....	<b>67</b>

## TABLOLAR DİZİNİ

### Sayfa

<b>Tablo 2.1.</b> <i>R</i> radius dairesel halkasındaki dikey düzlemdeki daire içinde hareket eden sıkıştırılmış bir kütlenin sürtünmesiz bir ortamda Lagrange hareket denkleminin modellenmesindeki veriler .....	<b>9</b>
<b>Tablo 2.2.</b> Eğim açısı $\theta$ olan sürtünmesiz bir eğik düzlem üzerinde kendi ağırlığının etkisinde hareket eden $m$ kütleli bir cismin Lagrange hareket denkleminin modellenmesindeki veriler .....	<b>16</b>
<b>Tablo 5.1.</b> <i>R</i> radius dairesel halkasındaki dikey düzlemdeki daire içinde hareket eden sıkıştırılmış bir kütlenin Coulomb Kayma sürtünmesinin etkisiyle elde edilen Lagrange hareket denkleminin modellenmesindeki veriler .....	<b>52</b>
<b>Tablo 5.2.</b> Eğim açısı $\theta$ olan Coulomb sürtünmesi ile bir eğik düzlem üzerinde hareket eden $m$ kütleli bir cismin Lagrange hareket denkleminin modellenmesindeki veriler .....	<b>62</b>

**SİMGE VE KISALTMALAR DİZİNİ**

$g$	Yerçekimi İvmesi
$\mu$	Sürtünme Katsayısı
$C$	Düzgün $n$ -vektör
$T$	Kinetik Enerji
$V$	Potansiyel Enerji
$L$	Lagrange Fonksiyonu
$Q$	Kuvvet
$Q_i^c$	İdeal Kısıtlayıcı Kuvvet
$Q_{ni}^c$	İdeal olmayan Kısıtlayıcı Kuvvet

## 1. GİRİŞ

XVIII. yüzyılda Newton ile başlayan mekanik sistemler üzerindeki çalışmalar bize rigid bir cismin hareketinin önemini ortaya koymaktadır. İlerleyen yıllarda bir cismin hareket denklemi geliştirilmiştir. Günümüzde ise rigid bir cismin hareket denklemini elde etmek pek güç olmamakla birlikte, bilgisayar teknolojisinin ortaya çıkmasıyla bir cismin hareketi hakkında daha kesin sonuçlar elde edilmiş ve hesaplamalar kolay olmuştur.

Bu çalışmada sürtünmeli ve sürtünmesiz ortamlarda rigid bir cismin nasıl bir hareket izleyeceği, bilgisayar modellemesi ile birlikte iki hareket arasındaki farklar ortaya konacaktır. Yapılan modellemeler bize cismin hareketi hakkında bilgiler vererek, hareketi zorlaştıran ve kolaylaştıran etkilerin değerleri değiştiğinde hareketin nasıl olacağı hakkında yorum yapmamızı kolaylaştıracaktır. Bu ise bize kurulan mekanik sistemler hakkında net bir sonuç verecektir. Bu yapılar mühendislikte ve fizikte kullanılarak yeni, daha modern yapıların kurulmasını sağlayacaktır. Ayrıca yapılan bu çalışmadaki modelleme teknikleri yardımıyla, günümüzde hala hızlı bir şekilde gelişme gösteren kuantum mekaniğine katkıları bulunabilecek, yeni çalışmalara ufuk açacaktır.

## 2. KISITLI MEKANİK SİSTEMLER

Evrendeki cisimlerin fiziksel etkiler sebebiyle konumlarının zamanla değişmesi veya durum ve yapılarının bozulmadan kalabilmesiyle ilgili problemleri inceleyen ve bu problemlerde kesin sonuçlar elde edilmesini araştıran bilim dalına mekanik denir (Rızaoğlu 2002).

XVIII. yüzyılda Newton'un çalışmaları ile mekanik sistemler kurulmuş ve Newton yasaları adı altında üç temel yasa üzerine dayanmıştır. Newton yasaları üzerine kurulan bu yapı, bugün Klasik Mekanik veya Newton Mekaniği olarak adlandırılır. Klasik Mekanik her problemin çözümünde kullanılan bir yöntem olmasa da günümüzde gökdelenlerden uçaklara kadar pek çok sistemin yıkılmadan, parçalanmadan kalabilmesi için gerekli koşulların bulunmasında, dünya etrafında dolanan uyduların yerleştirilmesinde, gezegenlere ve daha ötelere uzay gemilerinin gönderilmesinde kullanılan bilgiler arasında, Klasik Mekaniğin verdiği sonuçlar önemli bir yer tutar. Bu nedenle; Klasik Mekanik hayatımızda önemli bir yere sahiptir. Ayrıca Klasik Mekanik, matematik becerilerimizin ve fiziksel düşünme yeteneğimizin artmasında da önemli bir rol oynar. Mekanik; XIX. yüzyılda pek çok araştırmacının katkılarıyla neredeyse kusursuz bir sistematik yapıya kavuşturulmuştur. XIX. yüzyılda geliştirilen sistematik yapıya Analitik Mekanik veya Analitik Dinamik olarak isimlendirilmektedir. Analitik Dinamik; Lagrange ve Hamilton denklemlerinden oluşmaktadır. Lagrange yöntemi, mekaniğin skaler büyüklükler kullanarak yeniden kurulması açısından önemlidir. Hamilton denklemlerinin önemi ise Kuantum Mekaniği alanında başarıyla uygulanabilmesidir (Rızaoğlu 2002).

Klasik mekanik cisimlere fiziksel etkilerin sebep olduğu kısıtlayıcı kuvvetler ile hareketin değişmesi ile ilgilidir. Bir cismin hareketinin gerçekleşebilmesi için bu kısıtlayıcı kuvvetleri yenmesi gerekir.

Kısıtlı mekanik sistemlerin hareket denklemleri önce D'Alembert tarafından ifade edilmiş ve daha sonra Lagrange tarafından daha detaylı bir hale getirilmiş ve geliştirilmiştir. Günümüzde bu denklemler D'Alembert'in prensipleri olarak ifade edilir (Udwadia 2000).

Bernoulli, Euler ve Leibnitz kısıtlı mekanik sistemler üzerinde çalışmış ve geliştirmiş olmalarına rağmen, kısıtlı hareketin genel bir kuramını sağlayan ve bu prensibin analitik mekanikte önemini belirten kişi Lagrange'dır. Lagrange yöntemi, mekanik sistemlerin hareket denklemlerinin elde edilmesini sıradan duruma getirir. Fakat bu denklemlerin çözülmesinde sistematik bir yol göstermez (Rızaoğlu 2002).

Lagrange yöntemi şunu ifade eder; her anlık  $t$  zamanında kısıtlı bir mekanik sistem öyle bir şekilde gelişir ki; herhangi bir dizi uygulamalı yer değiştirme altında kısıtlayıcının bütün gücüyle yapılan tüm işin toplamı sıfırdır (Udwadia 2000).

Mekanik sistem içinde rol alan kısıtlayıcı güçler, Lagrange dinamiğinin en temel esasları olarak görülmüştür. Kısıtlayıcılar, D'Alembert prensiplerine uyuyorsa genellikle ideal kısıtlayıcı olarak adlandırılır. Kısıtlı hareketin temel problemi üzerinde Voltera, Boltzmann, Hamel, Novozhilov, Whittaker ve Synge gibi bilim adamları çalışmıştır. Lagrange'dan 100 yıl sonra Gibbs ve Appell birbirlerinden habersiz olarak entegre edilemeyen eşitlik kısıtlayıcıları ile ilgili kısıtlı mekanik sistemlerin hareket denklemlerini kapsayan bugün Gibbs-Appell metodu olarak bilinen yöntemi bulmuşlardır. Dirac ise, tekil Lagranjyan'lar ile Hamilton sistemlerini ve açıkça zamana bağlı olmayan kısıtlayıcıları incelemiştir (Udwadia 2000).

Yakın geçmişte, klasik mekanik sınırı içinde hem korunumlu, hem de korunumsuz dinamik sistemlerin kısıtlı hareketini tanımlayan açık bir denklem Udwadia ve Kalaba tarafından geliştirildi. Udwadia ve Kalaba, En Az Kısıtlama Gauss Prensibini başlama noktası olarak kullandılar ve hem genelleştirilmiş hız ve yer değiştirme hem de açıkça zamana bağlı olabilen genel eşitlik kısıtlayıcılarını incelediler (Udwadia 2000).

Kısıtlı mekanik sistemlerin hareket denklemlerini kapsayan ve yukarıda bahsedilen yöntemlerin hepsi ideal kısıtlayıcılar ile ilgilidir. Genelde, kısıtlanmış bir sistemin hareketi kısıtlayıcıların zorlamaları ile değişir. Kısıtlanmış sistemin hareketindeki bu değişim ek kısıtlayıcı kuvvet'in oluşması ile kaynaklandığı görülür. Analitik dinamiğin ana görevinin bir görüşü şudur; herhangi bir anlık zamandaki belirli bir mekanik sistem içinde noktasal parçacıkların pozitif ivmesi, kütlesi, pozisyonları ve hızları verilir ve bunlar üzerinde etkisi olan kuvvetler ifade edilir. Belli bir mekanik sistemin hareketi sırasında oluşan kısıtlı kuvvetlerin doğası ve özellikleri özel fiziksel bir duruma

bağlıdır. Bu özellikler sayesinde, belli bir mekanik problemin sistem analizi, formülasyon ve deneyselleme ile modellenmesi yapılmış olur (Udwadia 2000).

Aslında genel olarak; bu prensip, uygulamalı yer değiştirme altında kısıtlayıcı kuvvetlerle yapılan işin toplamının sıfıra eşit olduğunu ortaya koymuştu. Ancak, kısıtlı bir mekanik sistemin hareketini modellemede, D'Alembert prensibinin geçersiz olduğu deneyler de mevcuttur. Kısıtlı kuvvetler aslında uygulamalı yer değiştirme altında çalışır. Kısıtlı hareketin olduğu durumda en önemli nokta Coulomb Kayma Sürtünmesi içermesidir. Uygulamalı yer değiştirme altında çalışan kısıtlayıcı kuvvetlere yol açan bu gibi kısıtlayıcılara ideal olmayan kısıtlayıcı denir. Bu güne kadar bu kısıtlayıcıların içeriği tam olarak tanımlanamamıştı. Goldstein, Kayma sürtünme kuvvetleri varsa kısıtlayıcı kuvvetler tarafından yapılan tüm işin sıfır olmadığını göstermiştir. Uygulamalı yer değiştirme altında oluşan denklem, bilinmeyen kısıtlayıcı kuvvetleri içerir. Kısıtlı sistemin hareketini tanımlayan ivme ve kısıtlayıcı kuvvetler, ideal olmayan kısıtlayıcıların sahip olmak zorunda olması, Lagrange dinamiğinde açık bir soru olarak kalır. Genel olarak; ideal olmayan kısıtlayıcıların varlığı kısıtlayıcı kuvvetler olarak katagorize edilemeyen kuvvetlere yol açar (Udwadia 2000).

Bu çalışmada, öncelikle sürtünmesiz bir ortamda cismin hareket denklemi elde edilecek ve MATLAB-SIMULINK programı kullanılarak modellenmesi yapılacak. Daha sonra kısıtlayıcı kuvvetlerin dahil olmasıyla hareket denklemleri elde edilecek ve modellenmesi yapılarak; sürtünmeli ve sürtünmesiz ortamlarda hareketin nasıl gerçekleşeceği gösterilecektir. Böylece, bu mekanik yapıların kurulması için gerekli olan bazı temel bilgiler verilmelidir.

## 2.1. Sanal İşler İlkesi

Bir noktasal cismin dengede olabilmesi için üzerine etkiyen toplam kuvvetin sıfır olması gerekir. Bu kavram, noktasal cisimle bir sisteme genellenebilir. Bu durumda sistemin her bir parçasına etkiyen toplam tork da kendiliğinden sıfır olur. Sistemin her hangi bir  $i$  numaralı parçası ele alınsın. Bu parçanın üzerine iç ve dış kuvvetler etki etmektedir. Ayrıca bu parça verilmiş olan bazı kısıtlamalara uymak zorundadır. Bu kısıtlamalara **bağ koşulu** denir (Rızaoğlu 2002).

$i$  numaralı parçanın üzerine etkiyen toplam kuvvet fiziksel kuvvetler ile kısıtlayıcı kuvvetlerinin toplamı  $(Q_i + Q_i^c)$ ' dir. Buradaki  $Q_i$ , fiziksel kuvvetleri ve  $Q_i^c$  ise kısıtlayıcı kuvvetleri göstermektedir. Sistemin parçalarının belli konumları sistemin bir konfigürasyonunu tanımlar. Herhangi bir sistemin birbirine yakın iki konfigürasyonunda,  $i$  numaralı parçanın konum vektörleri arasındaki fark  $\delta_{r_i}$  olsun. Bu durumda sistemin  $t$  anındaki konum vektörü  $r_i$  olarak düşünüleceği yerde, bu vektörden az fark eden  $r_i'$  olarak düşünüldüğünde, iki konum vektörü arasındaki fark  $r_i - r_i' \equiv \delta_{r_i}$  olur.  $\delta_{r_i}$  sanal öteleme olarak adlandırılır. Sanal ötelemeler bağ koşullarına uymak durumundadır.  $\delta_{r_i}$  sanal ötelemesi ile  $(Q_i + Q_i^c)\delta_{r_i}$  sanal iş yapılır. Sistem dengede ise,  $Q_i + Q_i^c$  kuvvetinin toplamı sıfırdır. Sonuç olarak; sanal iş de sıfır olacaktır;

$$\delta W = \sum_i (Q_i + Q_i^c) \delta_{r_i} = 0$$

olarak elde edilir.

Sistemin dengede olması fiziksel kuvvetlerin toplam sanal işinin sıfır olmasına denktir. Bu ifade, sanal işler ilkesi olarak bilinir. Sanal işler ilkesi, 1717 yılında Bernoulli tarafından bulunmuştur (Rızaoğlu 2002).

Sistemin üzerine etkiyen kayma sürtünme kuvvetinden söz edilebilmesi için parçanın konumunu gerçekten değiştirmesi gerekir. Bu durumda kayma sürtünmesi kuvvetlerini konum değiştirmelerin gerçek değil de sanal ötelemeler olduğu, sanal işler ilkesi içine yerleştirilemez. Sanal işler ilkesi kayma sürtünmesinin bulunmadığı durumlarda kullanılır (Rızaoğlu 2002).

## 2.2. Lagrange Denklemleri

Sistemi tanımlamak için yeterli olan birbirinden bağımsız genelleştirilmiş koordinatların  $q_1, q_2, \dots, q_n$  ve bunların zamana göre birinci türevlerinin,  $\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_n$  olduğunu kabul edelim. Sistemin Lagrange fonksiyonu; sistemin  $T$  kinetik enerjisi ile



$V$  potansiyel enerjisinin farkına eşit olup;  $L = T - V$  şeklinde gösterilir. Burada sistemin Lagrange denklemleri ise;

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0, \quad i = 1, 2, 3, \dots, n \quad (2.1)$$

olarak verilir (Rızaoğlu 2002).

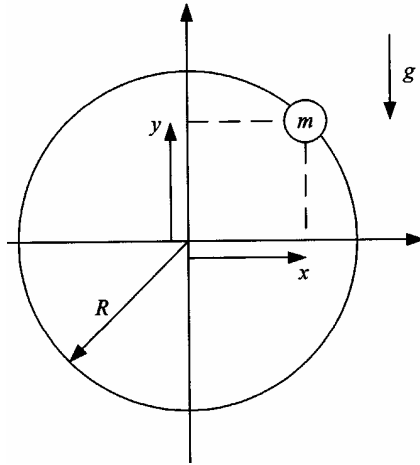
Bu denklem sistemi kartezyen koordinatlar  $x_1, x_2, \dots, x_n$  kullanılarak da ifade edilebilir.

Bu durumda (2.1) denklemi;

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial x_i} = 0, \quad i = 1, 2, 3, \dots, n$$

şeklinde yazılır.

### 2.3. Çember Üzerinde Hareket Eden Sıkıştırılmış Cisim Örneği



**Şekil 2.1** Yeryüzüne dikey konumda bulunan Radius yarıçaplı çember üzerinde hareket eden sıkıştırılmış  $m$  kütlesi

Yerçekimi etkisinde  $R$  radius dairesel halkasındaki dikey düzlemdeki daire içinde hareket eden sıkıştırılmış bir kütlenin sürtünmesiz bir ortamda Lagrange hareket denklemlerini elde edelim.

Kinetik ve potansiyel enerjisi,

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)$$

$$V = mgy$$

denklemleri ile verilir.

Burada  $x = r \cos \theta$ ,  $y = r \sin \theta$  kutupsal koordinatları kullanarak kinetik enerji;

$$T = \frac{1}{2}m \left[ (\dot{r} \cos \theta - r\dot{\theta} \sin \theta)^2 + (\dot{r} \sin \theta + r\dot{\theta} \cos \theta)^2 \right]$$

şeklinde bulunur ve gereken işlemler yapıldığında kinetik enerji;

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2)$$

olup potansiyel enerjisi;

$$V = mgr \sin \theta$$

şeklinde ifade edilir ve buradan Lagrange denklemi;

$$L = T - V = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) - mgr \sin \theta$$

şeklinde yazılır.

Böylece hareket denklemleri:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} \right) - \frac{\partial L}{\partial r} = 0 \qquad \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2}m2\dot{r} \right) - \left( \frac{1}{2}m2r\dot{\theta}^2 - mg \sin \theta \right) = 0$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0 \qquad \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2}m2r^2\dot{\theta} \right) - (-mgr \cos \theta) = 0$$

şeklinde olup gereken işlemlerin ardından;

$$m\ddot{r} - mr\dot{\theta}^2 + mg \sin \theta = 0$$

$$mr^2\ddot{\theta} + 2m\dot{r}\dot{\theta} + mgr \cos \theta = 0$$

denklemleri elde edilir.

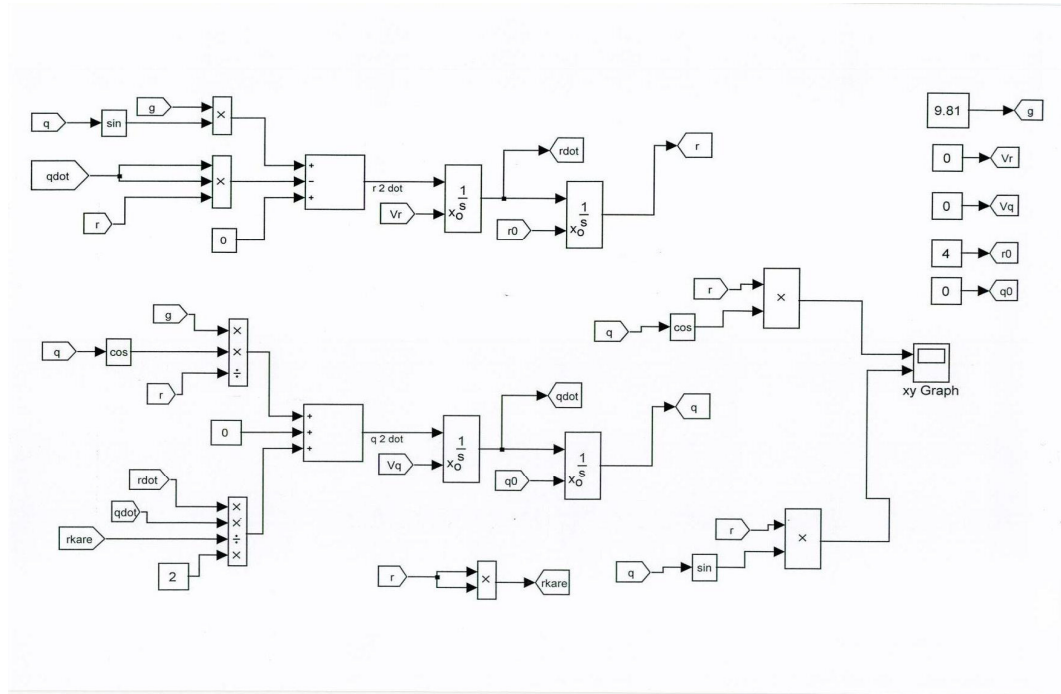
Bu elde edilen denklemler, bilgisayar programı yardımıyla modellendiğinde, hareketin nasıl gelişeceği ve hangi konumda nasıl bir hareket yapacağını hesaplanması

mümkündür. Rigid bir cismin hareketinin nasıl gerçekleşeceğini bilgisayar programları ile hesaplamak; bu hareket hakkında net bir sonuç verecektir ve zaman kaybını da ortadan kaldıracaktır.

#### 2.4. Örnek 2.3'ün MATLAB-SIMULINK Modellemesi

Aşağıdaki model, örnek 2.3'deki cismin Lagrange hareket denkleminin sürtünmesiz bir ortamda hareketini göstermek için tasarlanmıştır. Bu model MATLAB-SIMULINK bilgisayar programında hazırlanmıştır.

Modelin sağ tarafında bulunan değerler, hareket denkleminde geçen sabitlerdir.  $g$  yerçekimi ivmesi olup değeri 9,81 olarak alınmıştır.  $V_r$  ve  $V_q$  hareket denkleminin kutupsal koordinatlara çevrilerek elde edilmesinden sonraki ilk hızdır.  $r_0$  ve  $q_0$  ise cismin başlangıçtaki konumudur. Modelin sol tarafında ise, elde edilen hareket denkleminin diyagramı bulunmaktadır.



Şekil 2.2 Örnek 2.3'ün MATLAB-SIMULINK modeli

Modelimizi tamamlayıp *xy-graph* yazısının üstünde bulunan kutuya giriş yapıldığında, verilen sabit değerler ile modelimiz çalışır ve grafikler bulunur. Bu

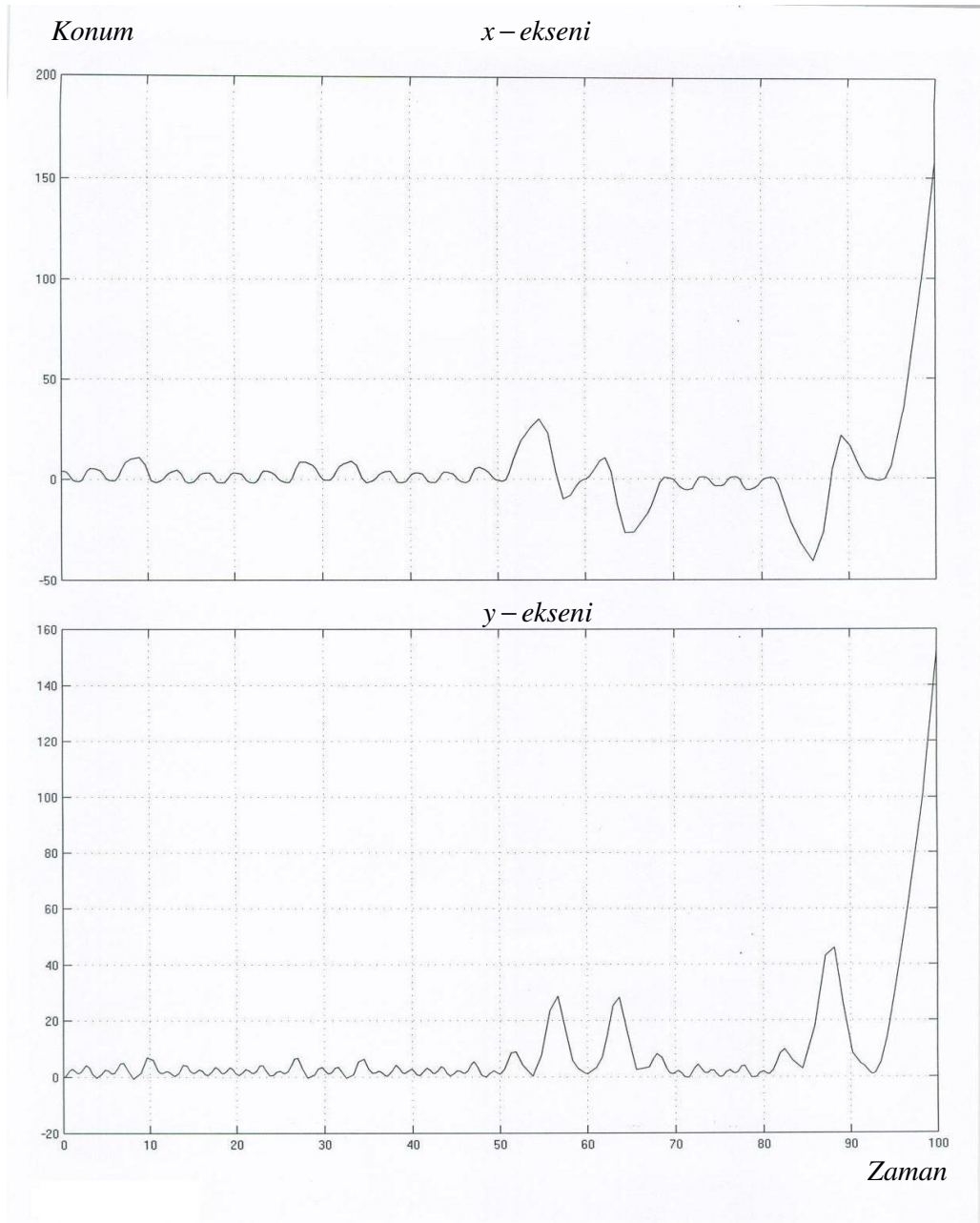
grafiklerin okunması ile rigid cismin hareketi hakkında yorum yapılabilir.

**Tablo 2.1**  $R$  yarıçaplı radius dairesel halkasındaki dikey düzlemdeki daire içinde hareket eden sıkıştırılmış bir kütlelin sürtünmesiz bir ortamda Lagrange hareket denkleminin modellenmesindeki veriler.

Şekli	$g$	Konum		Hız (m/sn)	
		$r_0$	$q_0$	$V_r$	$V_q$
2.3	9.81	4	0	0	0
2.4		4	0	0.5	0
2.5		4	0	0.5	0.5
2.6		4	0	0.5	0.6
2.7		4	0	0.8	0.6

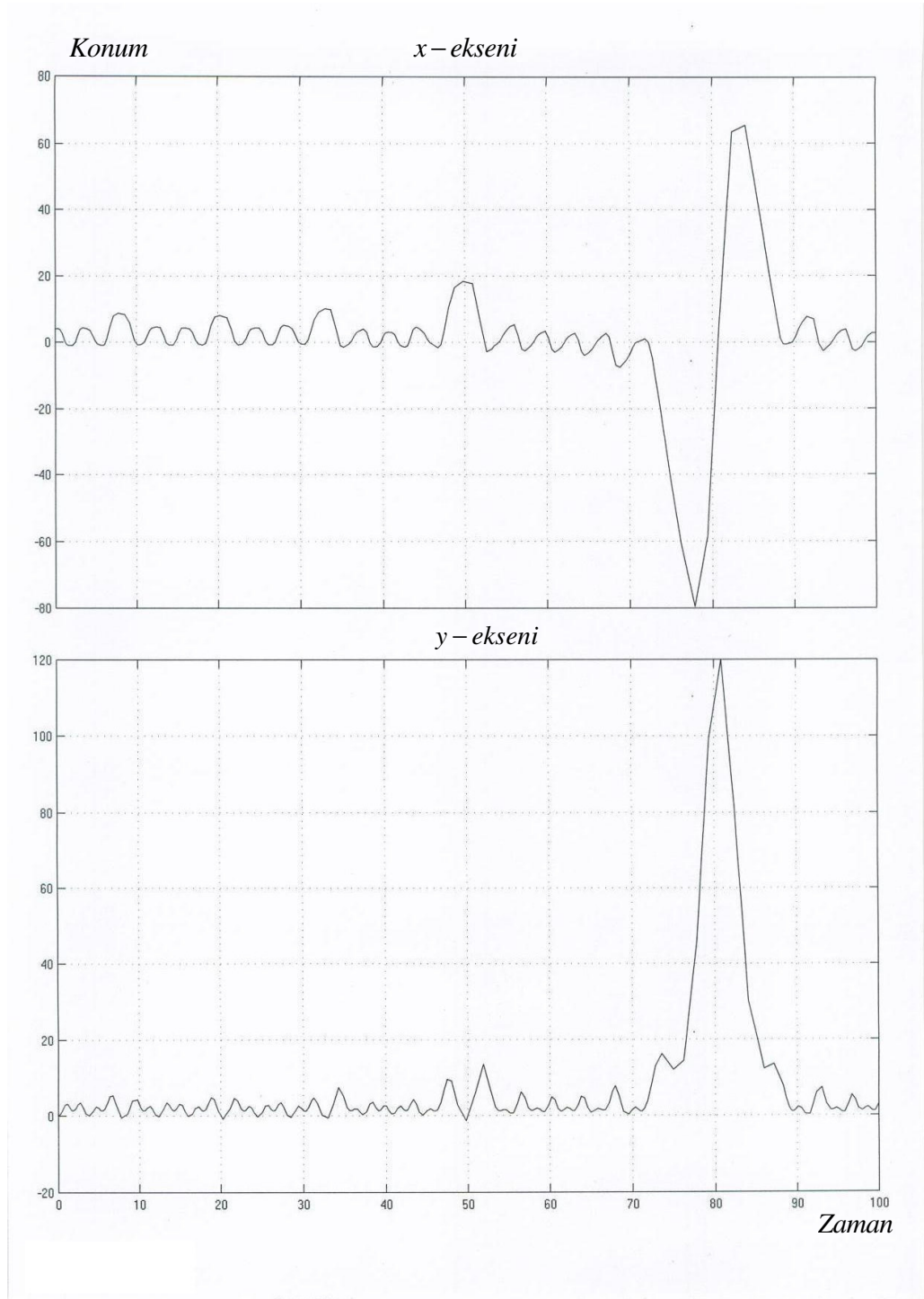
Tablo 2.1’de, modelimize; yerçekimi ivmesi  $g$  değeri 9.81 alınarak, rigid cismin konumunu (4,0) sabit bırakılmış ve  $x$  ile  $y$  eksenini boyunca hızını değiştirerek hareketin nasıl bir sonuç verdiği yandaki şekil numaralarında verilmiştir.

Aşağıdaki şekillerde hareketin model sonucunda oluşan grafikleri verilmiştir. Grafiklerde üst bölümündeki grafik rigid cismin  $x$  eksenini boyunca hareketini, alttaki grafik ise  $y$  eksenini boyunca hareketini göstermektedir. Düşey eksen yolu, metre birimi cinsinden, yatay eksen ise hareketin zamanını, saniye birimi cinsinden göstermektedir.



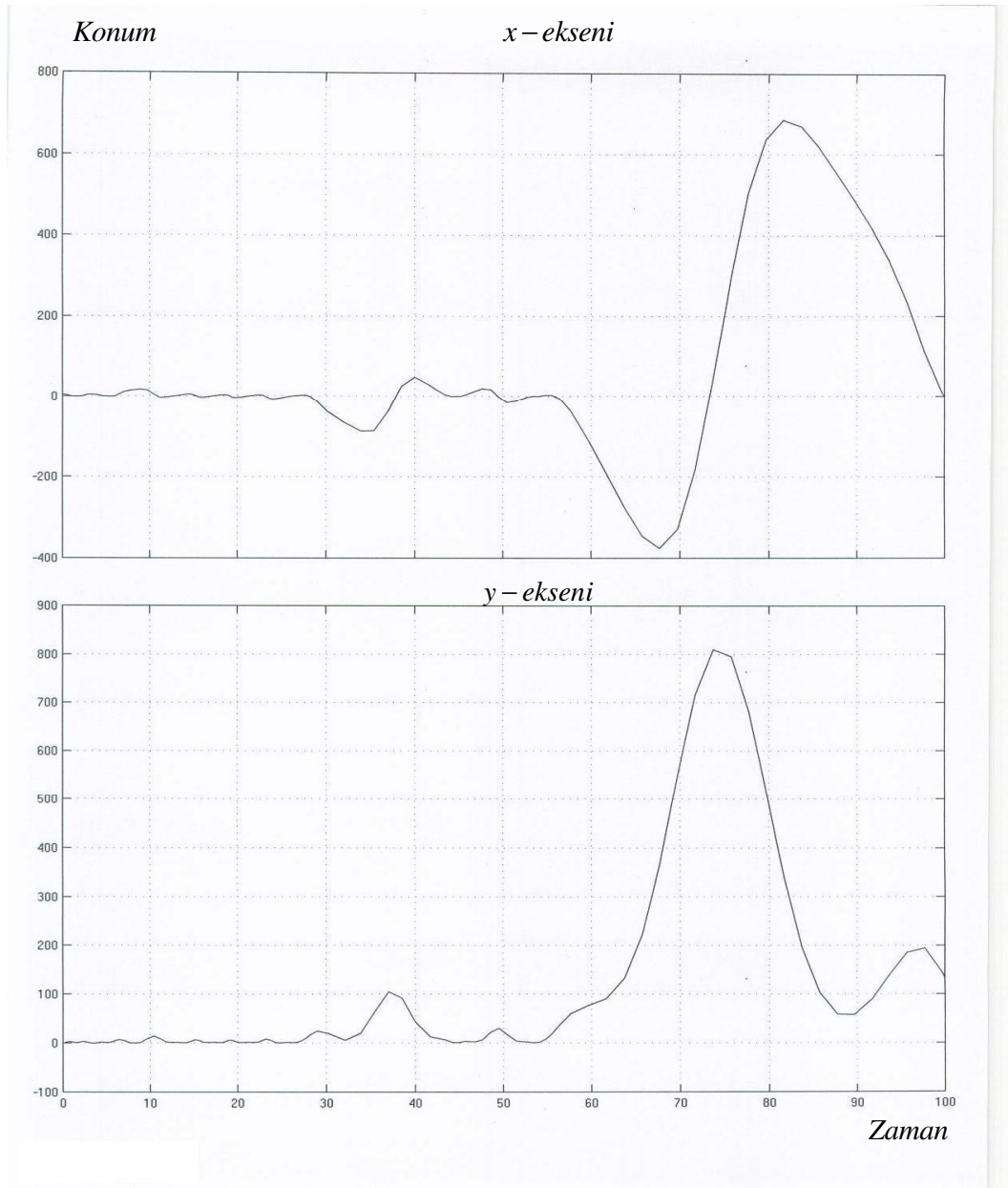
**Şekil 2.3** İlk hız verilmeden oluşturulan modelleme grafiği

İlk hızı olmayan  $(4,0)$  konumundan harekete başlayan rigid cismin hareketinin değişim grafiğidir. Rigid cisim  $x$  ve  $y$  eksenleri boyunca hızlanıp yavaşlayan bir hareket yapar.  $x$  eksenini boyunca 50. saniyeden sonra daha hızlı bir hareket yapmış artan azalan periyodu azalmıştır.  $y$  eksenini boyunca ise daha sık aralıklarla artan ve azalan bir hareket yapmıştır. 100. saniyede hem  $x$  eksenini hem de  $y$  eksenini boyunca en yüksek hıza ulaşmıştır.



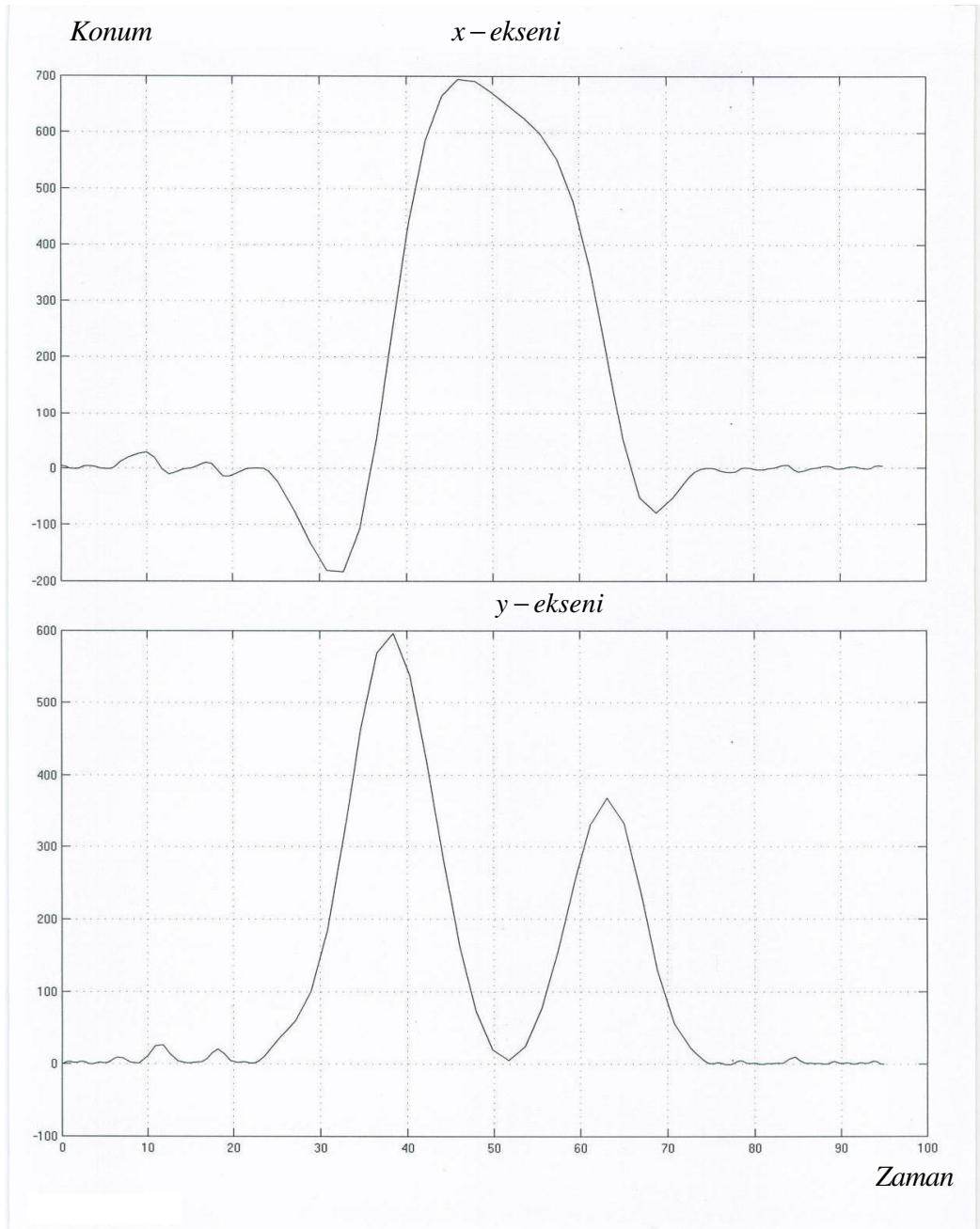
**Şekil 2.4** Yalnız  $x$  ekseninde hız verilerek oluşturulan modelleme grafiği

Sadece  $x$  yönünde  $0,5\text{ m/s}$  hız verildiğinde hareket değişmiştir. 70. saniyede hızı  $x$  ekseninde boyuna azalmaya,  $y$  ekseninde boyuna artmaya başlamış ve 80. saniyede maksimum düzeye çıkmıştır.  $x$  ekseninde boyuna 85. saniyede hız maksimum olmuştur.



**Şekil 2.5**  $x$  ve  $y$  ekseninde hız verilerek oluşturulan modelleme grafiği

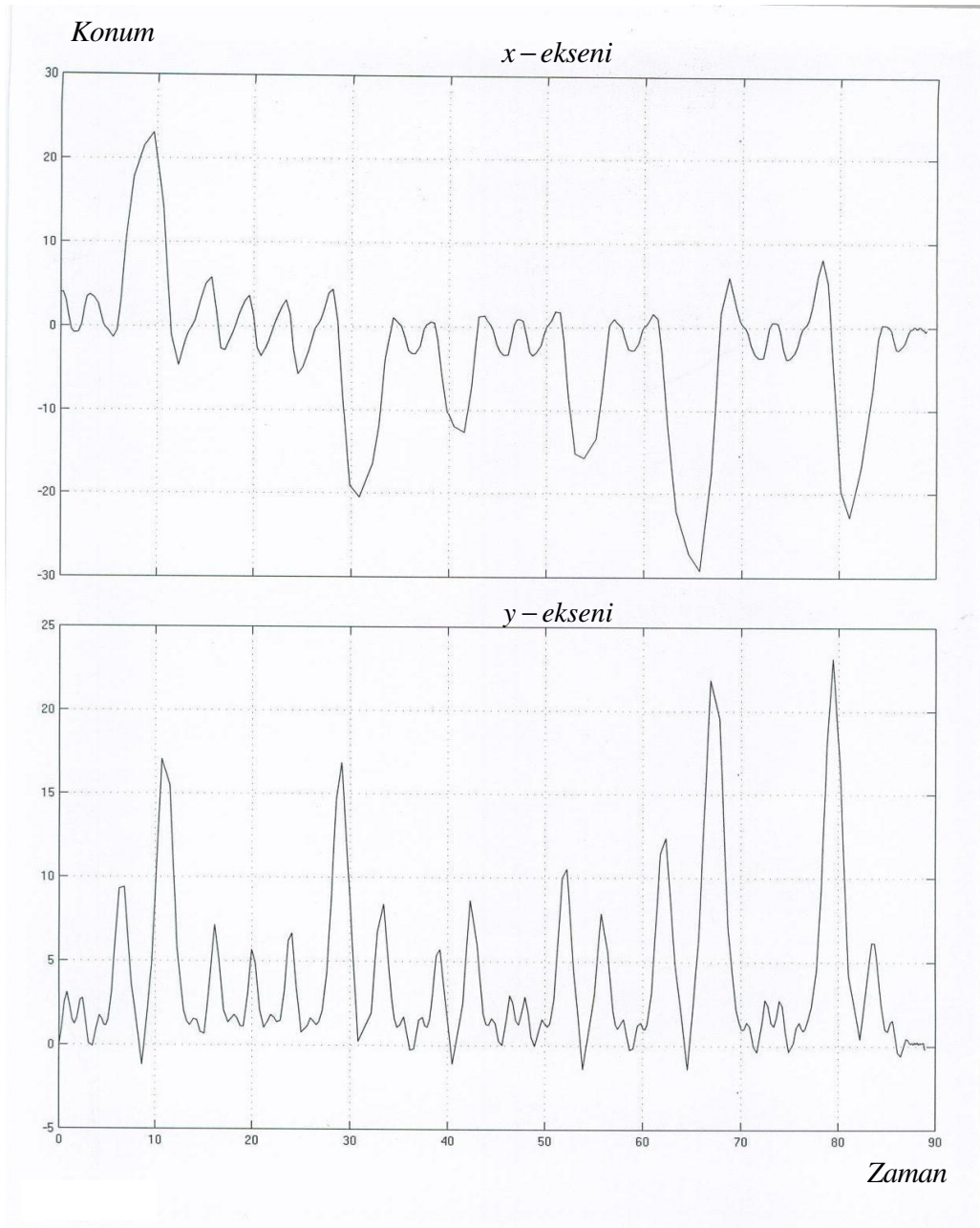
Hem  $x$  ve hem de  $y$  yönünde  $0,5\text{ m/s}$  hız verildiğinde 55. saniyeden sonra  $x$  ekseninde hız azalmış 65. saniyede minimum değerini almış ve sonra hız artmaya başlamış ve 82. saniyede maksimum değerini alarak tekrar azalmaya başlamıştır.  $y$  ekseninde ise 65. saniyeden itibaren hız artmaya başlamış 75. saniyede maksimum değerini almıştır. Hareketin kırılma noktası 65. saniyedir. Sadece  $x$  ekseninde hız verildiğinde konum maksimum  $(65,120)$ 'e çıkarken  $y$  ekseninde hız verildiğinde bu değer  $(65,800)$ 'e kadar çıkmıştır.



**Şekil 2.6** y ekseninde hızın artırılmasıyla oluşturulan modelleme grafiği

y yönündeki hız  $0,5m/s$ 'den  $0,6m/s$ 'e çıktığında hareket 95. saniyede sonlanmıştır. Hareketin kırılma noktası 25. saniyedir. x ekseninde boyunca 32. saniyede hız minimum, 47. saniyede hız maksimum olmuştur. y ekseninde boyunca 38. saniyede hız maksimum değerini almış ve 63. saniyede tekrar artmıştır.



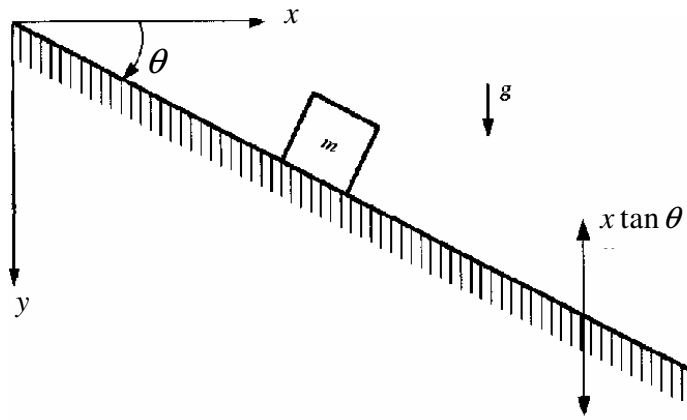


**Şekil 2.7**  $x$  ekseninde hızın artırılmasıyla oluşturulan modelleme grafiği

$x$  yönündeki hız  $0,5m/s$ 'den  $0,8m/s$ 'e çıktığında hareket 88. saniyede sonlanmıştır.  $x$  yönündeki hız arttığında cismin  $y$  yönündeki hızı sık periyotlarla değişmiştir.  $x$  ekseninde önce azalmış sonra artmaya başlamış ve 29. saniyede maksimum değerini almıştır. Daha sonra tekrar azalmaya başlamış ve artan azalan bir hareket izlemiştir.

Sonuç olarak cismin hareketi,  $y$  yönündeki hız arttırıldığında sonlanma eğilimindedir.  $x$  yönündeki hız arttırıldığında ise  $y$  yönündeki hız da değişmektedir. Hız arttığında hareket daha sık periyotlarla gerçekleşmiştir. Ancak hareketin sonlanma eğilimi de artmıştır. Bu grafiklerden de anlaşılacağı üzere hızın artırılması, her zaman hareketin devam edeceği anlamına gelmez.

### 2.5. Eğik Düzlemde Duran Katı Cisim Örneği



**Şekil 2.8** Eğim açısı  $\theta$  olan sürtünmesiz bir eğik düzlem üzerinde kendi ağırlığının etkisinde hareket eden  $m$  kütleli bir cismin hareketi

Eğim açısı  $\theta$  olan sürtünmesiz bir eğik düzlem üzerinde kendi ağırlığının etkisinde hareket eden  $m$  kütleli bir cismin hareketini Lagrange denklemlerini kullanarak bir önceki örnekteki benzer şekilde,

$$m\ddot{x} + mg \cos^2 \theta \tan \theta = 0$$

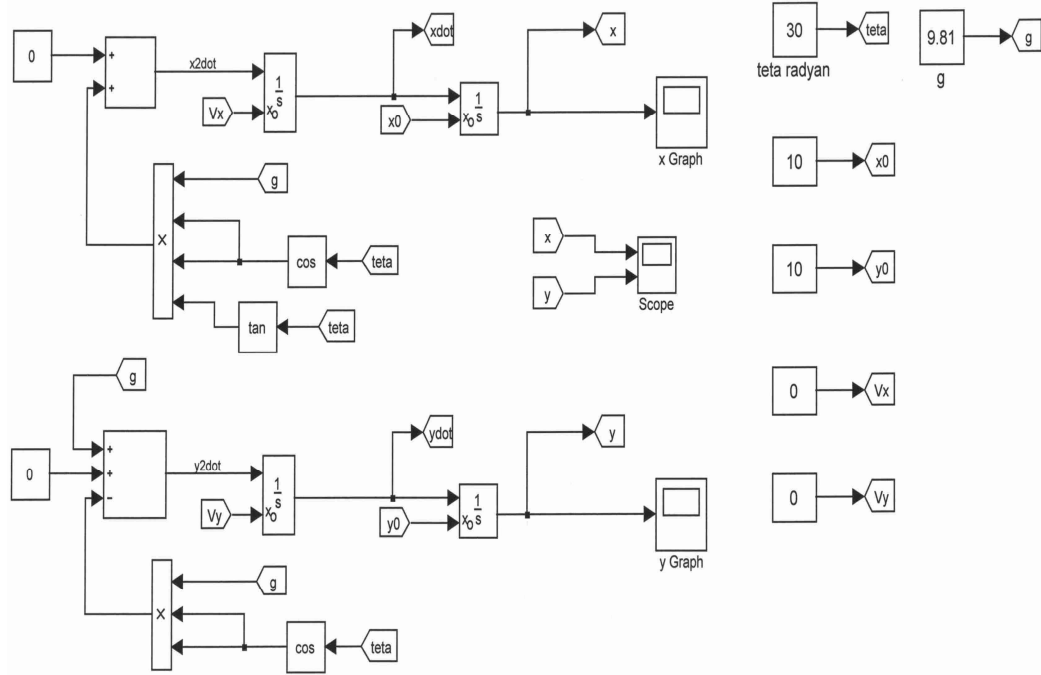
$$m\ddot{y} + mg - mg \cos^2 \theta = 0$$

hareket denklemleri elde edilir.

Bu hareket denklemleri 2.5'te yapıldığı gibi benzer şekilde modeli yapıldığı takdirde aşağıdaki model oluşturulur.

## 2.6. Örnek 2.5'in MATLAB-SIMULINK Modellemesi

Modelimiz bir önceki modele benzer şekilde oluşturulmuştur.

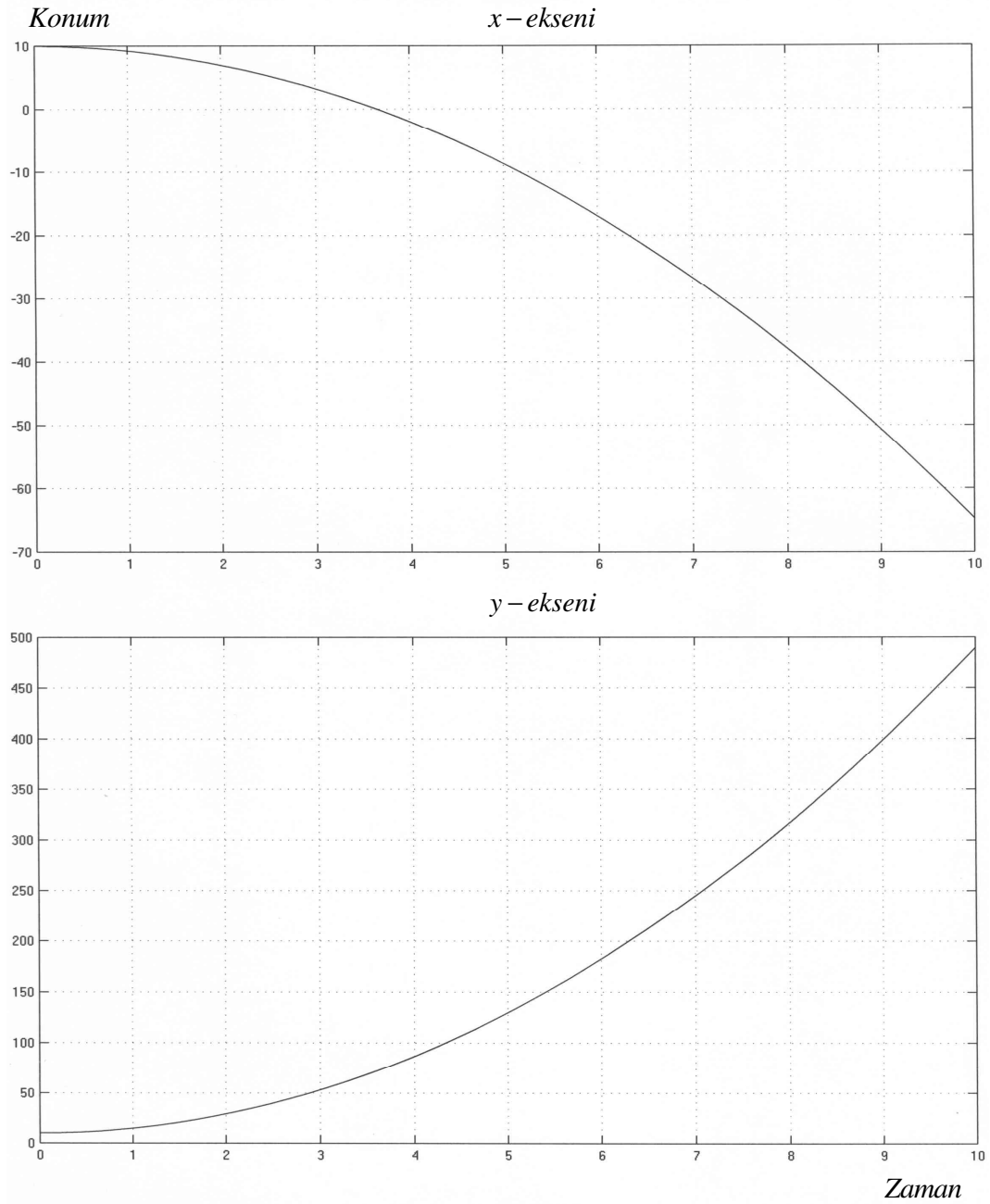


Şekil 2.9 Örnek 2.5'in MATLAB-SIMULINK modeli

Oluşturulan bu modelde yerçekimi ivmesi  $g = 9,81$  ve eğik düzlemin yatayla bir açı yapacak şekilde alalım. Rigid cismin konumunu (10,10) noktasında sabit tutup  $x$  ile  $y$  eksenini boyunca hızını değiştirerek hareketin nasıl bir sonuç vereceğini bulalım.

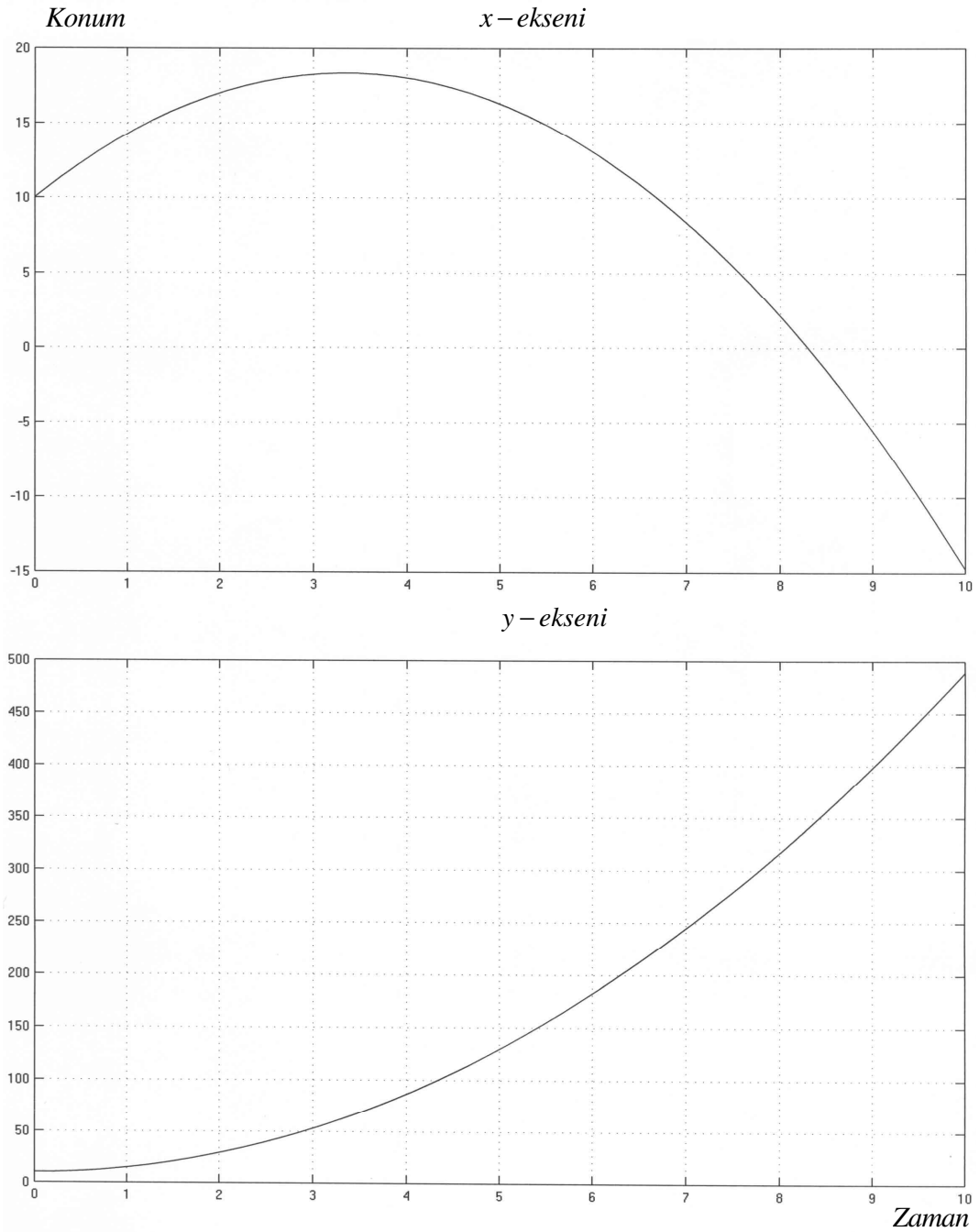
**Tablo 2.2** Eğim açısı  $\theta$  olan sürtünmesiz bir eğik düzlem üzerinde kendi ağırlığının etkisinde hareket eden  $m$  kütleli bir cismin Lagrange hareket denkleminin modellenmesindeki veriler

Şekil	$g$	$\theta$	Konum		Hız (m/sn)	
			$x_0$	$y_0$	$V_x$	$V_y$
2.10	9.81	30	10	10	0	0
2.11			10	10	5	0
2.12			10	10	5	5
2.13		45	10	10	0	0
2.14			10	10	5	5



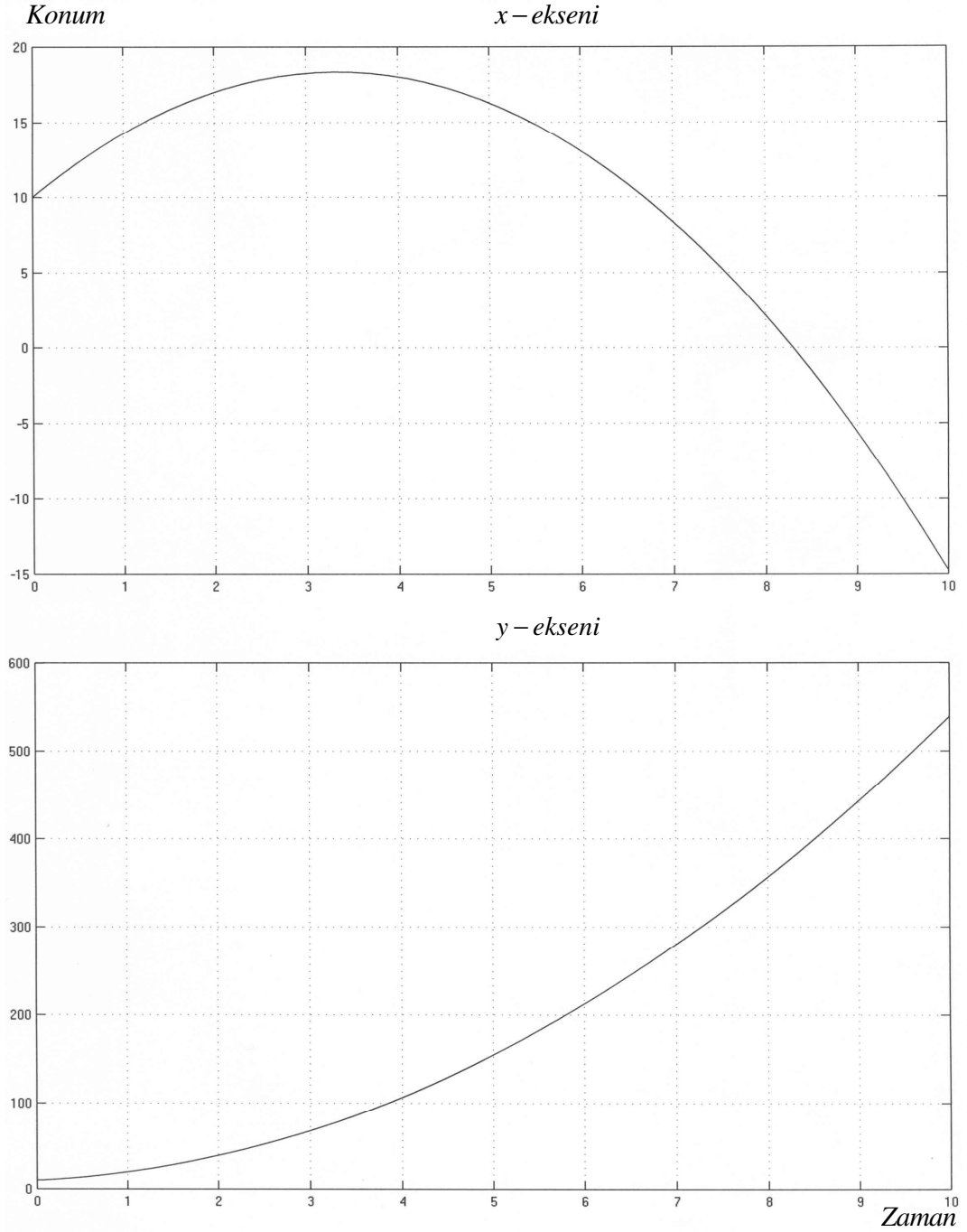
**Şekil 2.10** İlk hız verilmeden oluşturulan modelleme grafiği

İlk hız verilmeden yatayla  $30^\circ$  açı ile duran eğik düzlemdeki cismin hareketi  $x$  eksenini boyunca azalan  $y$  eksenini boyunca artan şekilde gerçekleşir. Cismin konumu  $x$  eksenini boyunca 10. saniyede  $-70$ 'e kadar düştüğü,  $y$  eksenini boyunca ise 10. saniyede 490'a kadar çıktığı gözlenmektedir.



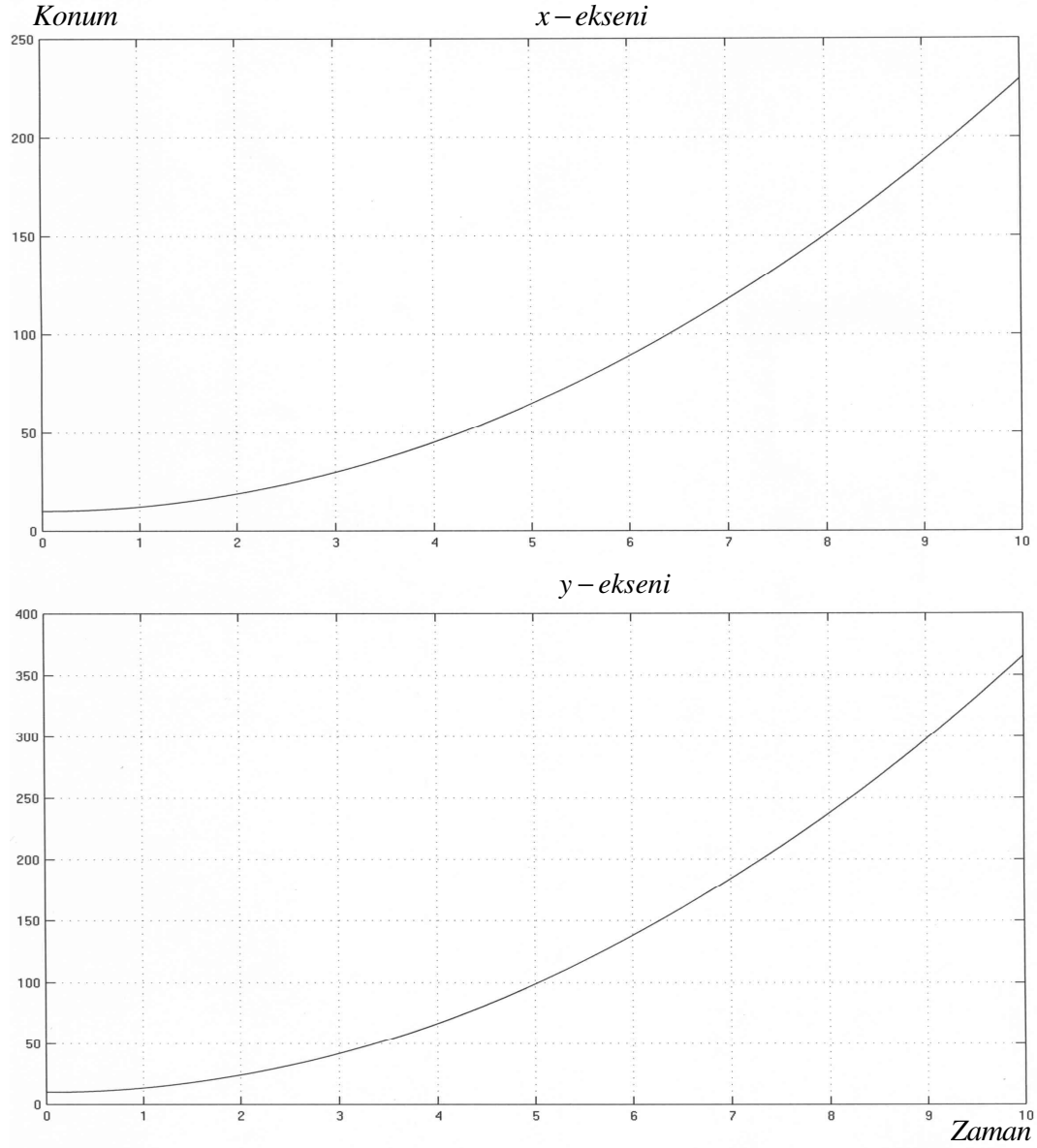
**Şekil 2.11** Yalnız  $x$  ekseninde hız verilerek oluşturulan modelleme grafiği

Sadece  $x$  yönünde  $5\text{ m/s}$  hız verildiğinde cisim  $x$  ekseninde boyunca 3. saniyeye kadar konumu artmış, maksimum 19'a kadar çıkmış ve daha sonra azalmaya başlamıştır.  $y$  ekseninde ise sürekli artan bir hareket yapmıştır ve bir önceki hareketin aynısını gerçekleştirmiştir.



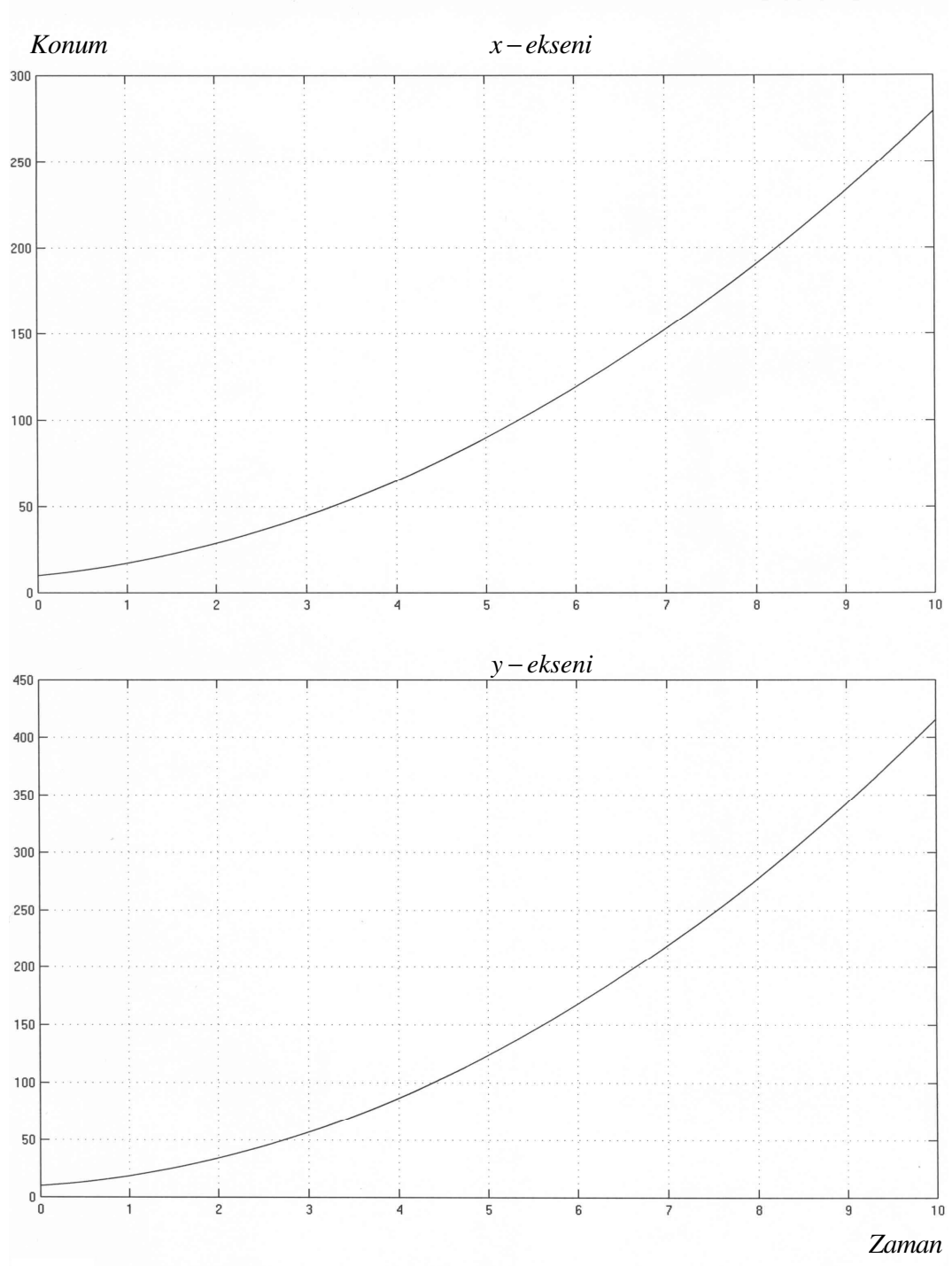
**Şekil 2.12**  $x$  ve  $y$  ekseninde hız verilerek oluşturulan modelleme grafiği

Cisme  $y$  yönünde de  $5\text{ m/s}$  hız verildiğinde  $x$  ekseninde boyunca yaptığı hareket değişmezken,  $y$  ekseninde boyunca daha hızlı bir hareket yapmış ve konumu 10. saniyede 550'e kadar çıkmıştır.



**Şekil 2.13** İlk hızı olmayan eğim açısı değişen modelleme grafiği

Cisme bu kez tekrardan ilk hız verilmiyor ve konumu (10,10) olarak bırakılıyor. Eğik düzlemin yatayla yaptığı açısı  $30^\circ$ 'den  $45^\circ$ 'e çıkartılıyor. Bu durumda cisim hem  $x$  eksenini hem de  $y$  eksenini boyunca artan bir hareket yapar.  $x$  eksenindeki konumu 230'e kadar çıkarken,  $y$  eksenindeki konumu 330'a kadar çıkmaktadır.  $30^\circ$ 'lik açı ile oluşan hareketten farklı olarak  $x$  eksenindeki konumu artmış ve  $y$  eksenindeki konumu 490'dan 390'a kadar düşmüştür.



**Şekil 2.14.** Eğim açısı değişen modele  $x$  ve  $y$  ekseninde hız verilerek oluşturulan modelleme grafiği

Şekil 2.13'deki grafiğin oluşması için verilen değerlere bu kez ilk hız hem  $x$  hem de  $y$  yönünde  $5\text{ m/s}$  kadar verildiğinde cismin  $x$  ekseninde ve  $y$  eksenindeki grafiği önceki konumuna göre çok az arttığı gözlenmektedir.



Bu model, verilen hız değerleri ile cismin hareketinin nasıl değiştiğini göstermiştir. Cisme ilk hız verilmeden yapılan modelde  $x$  eksenini boyunca azalan bir grafik çizildiği ve  $y$  eksenini boyunca artan bir grafik çizildiği gözlenmiştir.  $x$  eksenini boyunca belli bir miktar hız verildiğinde cismin önce artan sonra azalan bir grafik çizdiği bulunmuştur. Eğik düzlemin yatayla yaptığı açı değeri değiştirildiğinde, hareket değişmekte; açı arttığında  $x$  eksenini ve  $y$  eksenini boyunca hızın arttığı, açı azaldığında ise  $x$  eksenini boyunca hızın azaldığı ve  $y$  eksenini boyunca artmaya devam ettiği gözlenir. Yapılan modelleme değişik değerler verilerek çalıştırıldığında cismin kritik hız değerleri, açı değerleri hesaplanabilir. Yapılan hesaplamalar sonucunda cismin hareketi hakkında daha geniş bilgi edinme imkânı doğar.

Yukarıda yapılan modellemelerde sürtünmesiz bir ortamda çalışılmış ve hareketin denklemini Lagrange yöntemi ile elde edilmiştir. Bir cismin hareketinde kısıtlayıcı kuvvetlerin varlığını da hesaba katılarak modeller genişletilebilir. Bu modellemeleri yapabilmek için kısıtlayıcı kuvvetlerin iyi bilinmesi gerekir.

## 2.6. Bağ Koşulları

Bir sistemin hareketini kısıtlayan koşullar **bağ koşulları** olarak bilinir. Bu kısıtlamalar ile oluşan bağ koşulları geometrik olarak belirtilir. Bu koşullar cisimlerin ağırlıklarının yalnızca belirli doğrultulardaki bileşenlerinin cisimlerin hareketlerini sağlayan kuvvetlerin arasında yer alması sonucunu doğurur. Bağ koşulları çeşitli özelliklere sahiptir. Değişik özellikteki bu bağ koşulları aşağıdaki gibi sınıflandırılabilir.

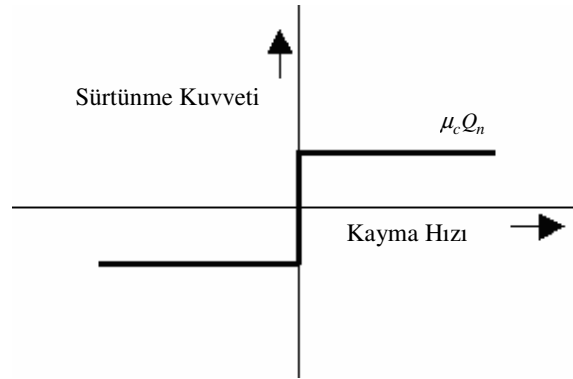
1. Koordinatlar cinsinden eşitliklerle verilen ve zamana açık olarak bağlı bulunmayan bağ koşulları **skleronom holonom** bağ koşulu olarak adlandırılır.
2. Koordinatların kendileri arasında eşitliklerle verilen ve zamana açık olarak bağlı bulunan bağ koşullarına **reonom holonom** bağ koşulu denir.
3. İntegre edilip holonom bağ koşullarına geçilememesi durumunda koordinatların diferansiyelleri arasındaki bağıntılar veya koordinatların sağladığı eşitsizliklerle verilen bağ koşullarına **anholonom** bağ koşulları denir.

4. Koşul zamana açık olarak bağlı değilse **sklerenom**, zamana bağlı ise **reonomdur** (Rızaoğlu 2002).

## 2.8. Durgun Sürtünme Olayı

### 2.8.1. Coulomb sürtünmesi

Durgun sürtünme olayı sadece hızda durgun bağlılığa sahiptir. İlk durgun sürtünme modeli, Leonardo Da Vinci'nin bulduğu klasik bir sürtünme modeli olup, bu model de sürtünme kuvvetinin orantılı yüklenişi, hareketin karşı yönleri ve bağlı bölgenin kurtuluşundan oluşmaktaydı. Coulomb 1785 yılında bu modeli geliştirdi ve bilinen Coulomb sürtünme modeli ile sürtünme olayını tanımladı. Bu model aşağıdaki şekilde verilir.



Şekil 2.15 Coulomb sürtünme modeli

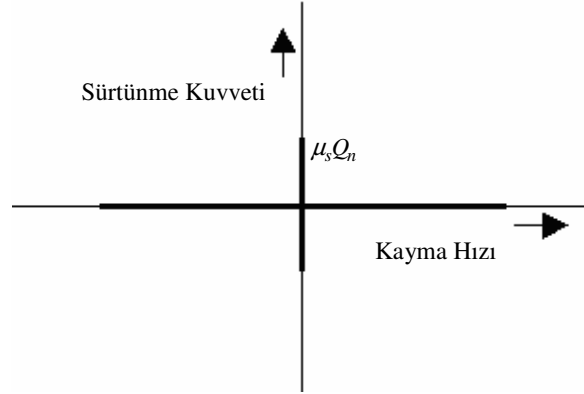
Sürtünme kuvveti şu şekilde tanımlanır.

$$Q_f = Q_n \cdot \mu_c \cdot \text{sign}(v)$$

Buradaki  $\mu_c$  Coulomb sürtünme sabitidir. Coulomb sürtünme modeli oldukça basit olup sık sık kullanılır. Birçok uygulama kitaplarında dinamik sürtünme kullanılır ve  $\mu_s$  dinamik sürtünme sabitidir.

### 2.8.2. Durgun sürtünme

1833 yılında Morin tarafından durgun sürtünme fikri ortaya atıldı ve şartları tanımlandı: Kayma hızı olduğunda, hareketin ters yönlerinin sürtünme kuvveti sıfırdır.



**Şekil 2.16** Durgun sürtünme modeli

Durgun sürtünme kuvveti maksimum veya minimum kuvvetlere eşittir, yani

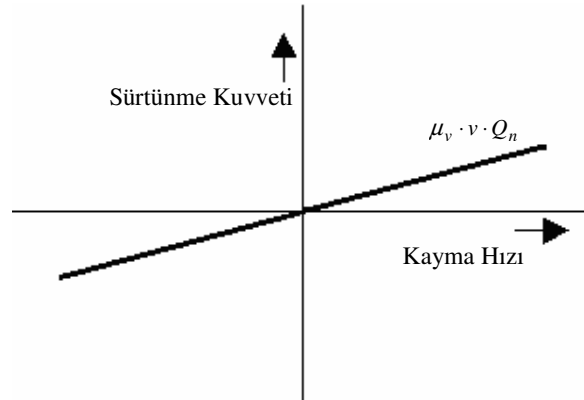
$$Qf_{\max} = Q_n \cdot \mu_s$$

$$Qf_{\min} = -Q_n \cdot \mu_s$$

olup, burada  $\mu_s$  durgun sürtünme sabitidir.

### 2.8.3. Akışkan direnci sürtünmesi

Reynolds 1866'da yağlı maddelerin akışkan direncinin sebep olduğu sürtünme kuvveti için bazı açıklamalar geliştirdi. Akışkan direnci sürtünmesi sürtünme olayı için kullanıldı.



**Şekil 2.17** Akışkan direnci sürtünme modeli

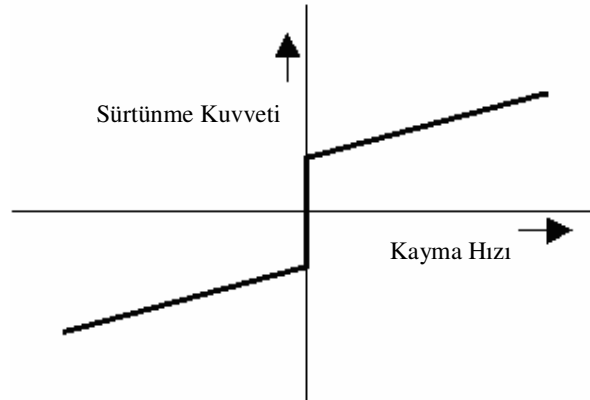
Bu modelde sürtünme kuvveti:

$$Q_f = Q_n \cdot \mu_v \cdot v$$

şeklinde tanılanır. Buradaki  $\mu_v$  akışkan direnci sürtünme sabitidir.

#### 2.8.4. Coulomb ek akışkan direnci sürtünmesi

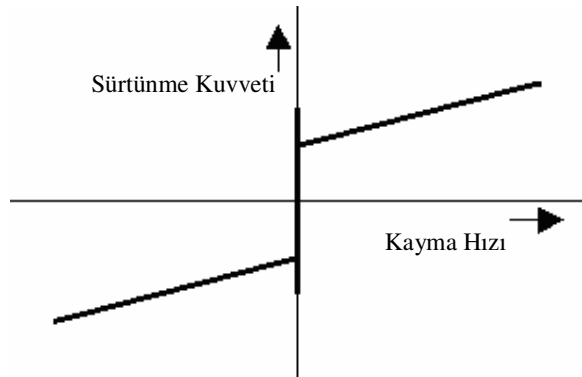
Akışkan direnci sürtünmesi, Coulomb sürtünmesi ile birleştirildi ve aşağıdaki şekildeki gibi bir model elde edildi.



Şekil 2.18 Coulomb ek akışkan direnci sürtünmesi modeli

#### 2.8.5. Durgun Coulomb ek akışkan direnci sürtünmesi

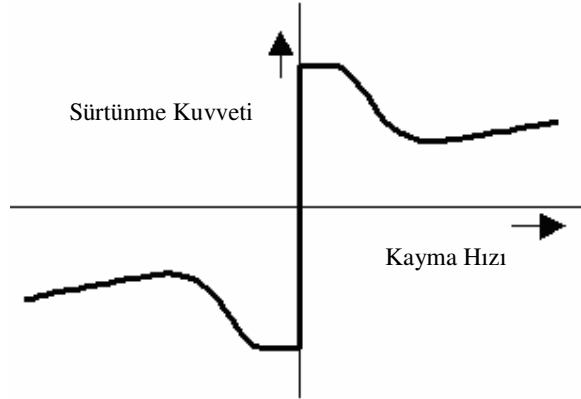
Mekanik sisteme durgun sürtünme eklendiğinde, bir sürtünme modeli ortaya çıkar, yani mühendislikte ortak kullanımda ek durgun Coulomb ek akışkan direnci sürtünmesi adı ile anılan sürtünmedir. Bu model aşağıdaki şekilde gösterilmiştir.



Şekil 2.19 Durgun, Coulomb ek akışkan direnci sürtünmesi modeli

### 2.8.6. Durgun, Coulomb ek akışkan direnci Stribeck sürtünmesi

Stribeck 1902' de düşük hızlar için meydana gelen sürtünme kuvvetini artan hızlar ile düşen süreklilik ile açıkladı ve sürekli olmayan durumlarda bunun olmayacağını ifade etti. Düşüşte azalan sürtünme olayına artan hızlarda Stribeck sürtünmesi veya etkisi adı verilir. Bu model aşağıdaki gibi verilen durgun Coulomb akışkan direnci ve Stribeck sürtünmesidir.



Şekil 2.20 Durgun, Coulomb akışkan direnci, ek Stribeck sürtünme modeli

Stribeck etkisi  $v_{st}$  parametresi ile tanımlanır ve Stribeck hız karakterizasyonudur. Durgun sürtünmenin yalnız %37 si aktif olduğunda kayma hızı anlamına gelir. Bir başka deyişle  $v_{st}$ 'nin küçük değerleri hızlı azalan Stribeck etkisini verir ve  $v_{st}$ 'nin büyük değerleri az azalan Stribeck etkisini verir (Peters 1997).

### 2.8.7. Sürekli fonksiyonlar

Bütün bu sürtünme modelleri sıfır hızda süreksizliği gösterir. Sıfır hızı, sürtünme kuvveti özel olmayan yalnız hızın bir fonksiyonu gibidir. Bu sığra yakın modelin davranışının süreksizliği, bazen sürekli bir fonksiyon ile yaklaşıktır. Örneğin;

$$Q = \tanh(eğim \cdot v)$$

ve tersi

$$v = \frac{\text{arc tanh}(Q)}{eğim}$$

olup, burada  $eğim$  çok büyük bir sabittir. Açıklanan modellerde sürekli fonksiyonların sonuçlarının kullanılması büyük kuvvetler ve hızlar için simülasyonu

kolaylaştırır. Küçük kuvvet ve hızlar, eğim parametresi uygun büyüklükte seçildiğinde yavaş ilerler. Model, izin verilen kuvvetler, durgun veya Coulomb sürtünme kuvvetinden daha küçük ise hareket başlar. Bu sonuçlar, sert modellerde simülasyonu zorlaştırır.

### **2.8.8. Temel algoritmalar olayı**

Küçük kuvvetler ve hızlar için doğru sürtünme modelinde temel algoritmalar olayı kullanılmaktadır. Eğer kuvvete izin veren sıfır hızı Coulomb sürtünme kuvvetinden veya durgun sürtünme kuvvetinden daha küçük ise, sürtünme kuvveti izin verilen kuvvete eşittir ve hareket başlamaz. Eğer kuvvete izin veren sıfır hızı, Coulomb sürtünme kuvvetinden veya durgun sürtünme kuvvetinden daha büyük ise, bu durumda sürtünme kuvveti Coulomb sürtünme kuvveti veya durgun sürtünme kuvveti olacaktır. Sürtünme kuvveti sıfır hızında doğru bir şekilde modellenirse, hızla beraber izin verilen kuvvet, bilinmek zorundadır (Peters 1997).

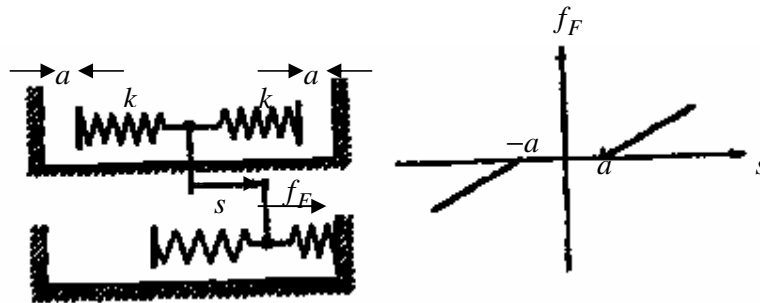
### 3. DÜZGÜN OLMAYAN MEKANİK SİSTEMLER

Düzgün olmayan olaylar sürtünme, etki-tepki gibi kinematik kısıtlamalar veya fiziksel etkilerle ortaya çıkmıştır. Gerçek pratik problemlerin modelinde bu ortaya çıkan olayların bazılarında hatalar elde edilmiş ve bu hatalar uzunca bir zaman ihmal edilmiştir. Sonra görüntünün fiziksel tanımından düzgün karakteristiklerle yaklaşık bir tavır içerisinde bu olaylar ifade edildi. Yakın geçmiş zamanda gerçek pratik problemler için daha kesin ve saf modeller düzgün olmayan etkiler gibi doğru hesaplamalar içerisinde açıklandı (Popp 2000).

Bu anlamda sürtünme ve etkiler gibi fiziksel etkiler basit bir yolla modellendi. Bunlarda; Coulomb kayma sürtünmesi ve Newton'un etki kanunu düzgün olmayan güç ve hareket karakteristiğine öncülük etmesiyle açıklandı. Düzgün modellerin vasıtasıyla düzgün olmayan bu modellerin değişmesiyle daha iyi sonuçlar elde edildi. Bu gerçekler ile ilginç ve açık olmayan yöntemlerle modellemeye **engineering art** adı verilir (Popp 2000).

Düzgün olmayan mekanik sistem, kuvvet ve hareket karakteristikleri tarafından karakterize edildiğinde süreksizdir veya diferensiyellenemez. Şekil 3.1'de, solda basit mekanik kuvvet elementleri ile sağda düzgün olmayan kuvvet karakteristikleri vardır. Genellikle bu elementler bir dinamik sistem formu ile eşleştirilebilir (Popp 2000).

Bu durumda şekil 3.1.(a) doğrusal yayların bir sistemi ( $k$  katılık)  $2a$  büyüklüğünün geri itilmesi ile elde edilir.



Şekil 3.1.(a) Doğrusal yayların bir sistemi

Bu da;

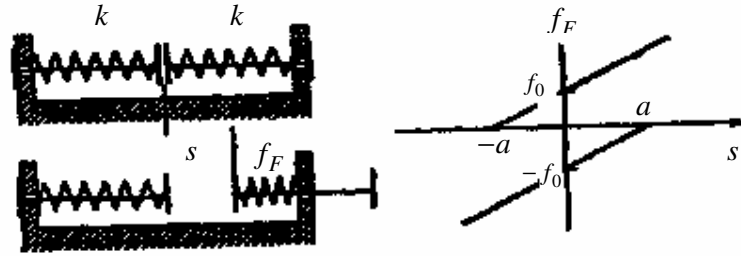
$$f_F = \begin{cases} s \geq a \Rightarrow k(s-a) \\ |s| \leq a \Rightarrow 0 \\ s \leq -a \Rightarrow k(s+a) \end{cases}$$

şeklinde yazılır.

Şekil 3.1.(b) ve 3.1.(c) de  $s$ ' nin işaretlerine göre değişir. Şekil 3.1.(b)' de  $|f_0| = ka$  ve kuvvet karakteristiği

$$\begin{aligned} s > 0 &\Rightarrow f_F = k(s+a) \\ s = 0 &\Rightarrow |f_F| \leq ka \\ s < 0 &\Rightarrow f_F = k(s-a) \end{aligned}$$

şeklindedir.



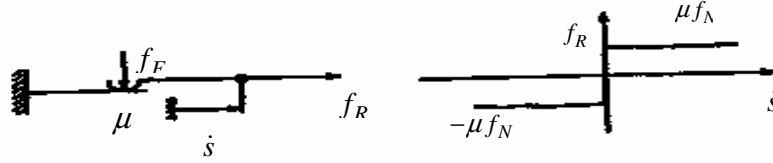
**Şekil 3.1.(b)** Doğrusal yayların bir sistemi

Şekil 3.1.(c)'de  $\mu$  sabiti ile Coulomb kayma sürtünmesinin bir çifti gösterilir. Böylece  $f_N$  normal bir yükür. Bu durumda kuvvet karakteristiği

$$\begin{aligned} \dot{s} > 0 &\Rightarrow f_R = \mu f_N \\ \dot{s} = 0 &\Rightarrow |f_R| \leq \mu f_N \\ \dot{s} < 0 &\Rightarrow f_R = -\mu f_N \end{aligned}$$

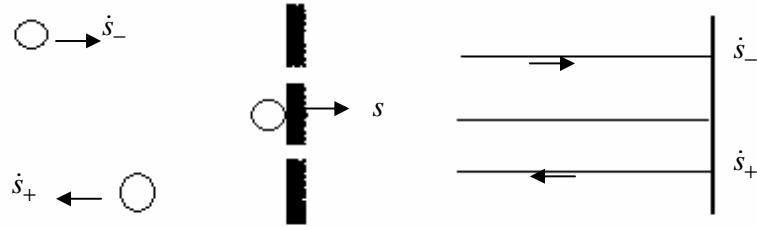
şeklindedir.





Şekil 3.1.(c) Coulomb kayma sürtünmesinin bir çifti

Şekil 3.2.(a) durumunda bir kütle  $s \leq 0$  bölgesinde kolayca taşınır.  $s = 0$  olduğunda duvara çarpar böylece  $\dot{s}_+ = -e\dot{s}_-$  olur ve burada  $0 < e \leq 1$  dir.

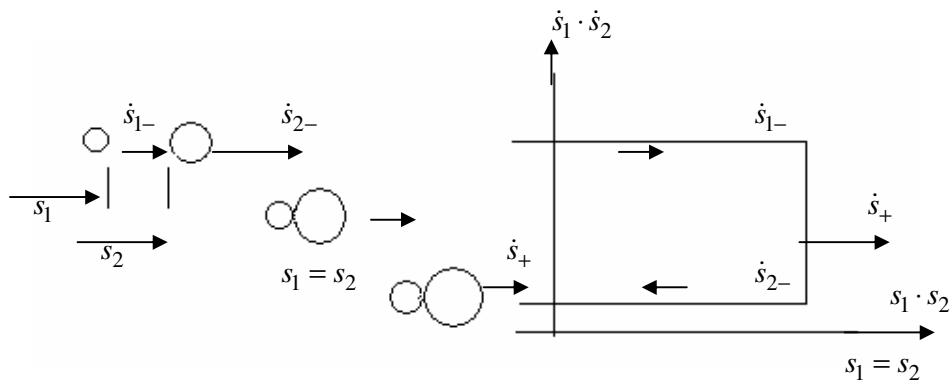


Şekil 3.2.(a) Duvara çarpan bir kütle

Şekil 3.2.(b) durumunda sistem  $s_1$  ve  $s_2$  koordinatları ile iki kütleden meydana gelir.  $s_2 - s_1 \geq 0$  ile açıklanır.  $s_1 = s_2$  olduğunda ideal plastik çarpma oluşur burada  $e = 0$  dır. Kütle ikiden bire iner ve hareket devam eder. Destek etki hızları;

$$\dot{s}_{1+} = \dot{s}_{2+} = \frac{m_1 \dot{s}_{1-} + m_2 \dot{s}_{2-}}{m_1 + m_2}$$

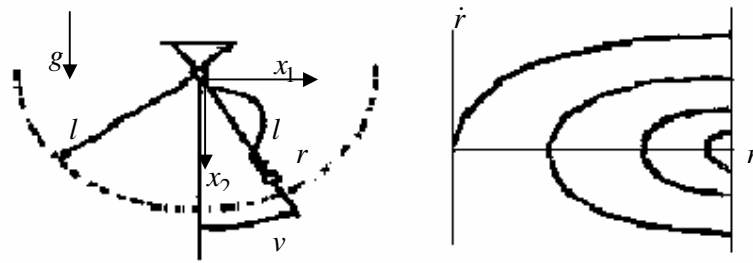
formülü ile açıklanır.



Şekil 3.2.(b) İki kütlenin birbirine çarpması

Snapper mekanizmasında merkez noktalar sabit olduğunda benzer durumlar oluşur. Uzay gemilerinden güneş panellerinin kapanmasına kadar birçok gelişmeler buna bir örnektir. Contiguous panelleri final pozisyonundan ayrılırken hareketleri aniden durur ve serbest hareketin bir kuvveti olan  $f$ 'de bir azalma ile sonuçlanır.

Bir başka örnek ise şekil 3.2.(c) verilmiştir. Bir uçakta  $l$  uzunluğu boyunca rigid bir cismin  $l$  yarıçaplı dairesel halkası ( $r < l, f = 2$ ) içinde veya onun sınırlarında ( $r = l, f = 1$ ) durdurulması modellenmiştir.



Şekil 3.2.(c) Bir uçakta  $l$  uzunluğu boyunca rigid bir cismin  $l$  radius dairesel halkası

### 3.1. Düzgün Olmayan Sistemlere Örnek

Aşağıdaki şekillerde mekanik modellerin durumları göz önünde bulundurulmaları ile birlikte basit etki problemlerinin bir koleksiyonunu gösterir ve bunun üzerine kolayca kurulabilir.

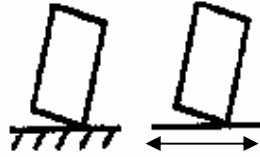
Şekil 3.3.(a) basit bir örnektir. Bir düzgün olmayan değişim ile parabolün iki kolunun varlığının bir göstergesidir.



Şekil 3.3.(a) Bir düzgün olmayan değişim ile parabolün iki kolunun varlığının bir göstergesi

### 3.2. Kütlelerin Sallanmasını Engelleme Problemi

Şekil 3.3.(b)'de 1956'dan sonraki günlerde inşa edilen nesnelerin temellerinin dünya yüzeyinde düzenlenmesi tartışıldı. Priestley, Evison ve Carr 1978'de yayınladıkları makalede titreşen bir masanın kullanılmasıyla harmonik ve rastgele etkiyi perforce etmişlerdir. 1993'te Lipscombe ve Pellegrino serbest sallanmanın engellenmesini araştırdı. 1994'te Hogan duvar kenarındaki engellemeleri araştırdı.



**Şekil 3.3.(b)** 1956'dan sonraki günlerde inşa edilen nesnelerin temellerinin dünya yüzeyinde düzenlenmesi

Şekil 3.3.(c)'de rastgele tekrar eden etkiler için zıplayan top problemi 1982'de K. Popp tarafından araştırıldı. Titreşen masa harmoniğine etkileri göz önünde bulunduruldu ve basitleşen birkaç varsayımlar altında iki boyutlu ayrık haritası bulundu. 1990'da Isomaki tarafından etkilerin bir bölgesinin sınırları hesaplandı ve Fractal eğrilerinin oluşumu bulundu. Düzenli hareket davranışları **enerji artış periyotları** ile izleyen etkiler arasında ve onun kendi rigid hareketinin periyodu ile geliştirildi. Bu davranış vurmali delme makinesinin durumuna simülasyon edilmiştir.



**Şekil 3.3.(c)** Rastgele tekrar eden etkiler için zıplayan top problemi

Taşıtlardaki vites makarası çalışmaya başlamadığında, yani vites kutusu yüklenmediği takdirde hareketin durumunu veren model şekil 3.3.(d)'de bir basit mekanik model olarak gösterilmiştir. Bu problemi birçok kişi geliştirmeye çalışmıştır.

Bu konu üzerinde periyodik ve karışık hareketler bulunmuştur ve simülasyon sonuçları değerlendirilerek yeni görünümeler elde edilmiştir. En sonunda farklı düşünce akımları ile vites makaraları yüklenir hale gelmiştir.

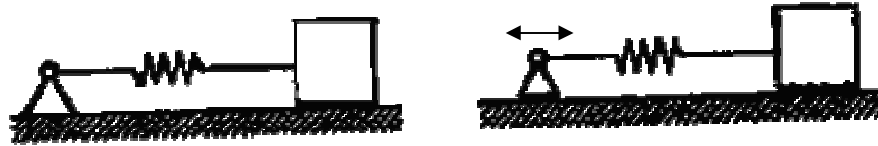


Şekil 3.3.(d) Taşıtlardaki vites makarası modeli

Kuru sürtünme olayı doğada iki farklı türde bulunur.

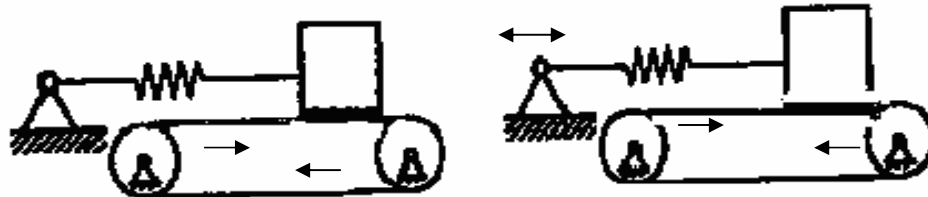
1. Yapıştırma modundaki bir hareketin direncindeki sürtünme kuvveti bir kısıtlayıcı kuvvettir.
2. Herhangi bir hareketteki bir direncin sürtünme kuvveti izin verilen güçtür.

Sürtünme ile ilgili titreşim problemlerinde şekil 3.4' te yukarıdaki iki olayda oluşur. Şekil 3.4.(a)'da basit sürtünme oskülatörde, ölüm noktası denen yerde kütle kararlılığına kadar enerji korunumuna sürtünme önderlik eder.



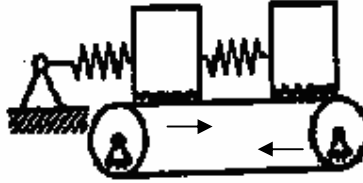
Şekil 3.4.(a) Sürtünme ile ilgili titreşim problemleri

Şekil 3.4.(a), sürtünme oskülatörü ile dış etkiyi gösterir. Harmonik veya rasgele etki burada gösterilir.



Şekil 3.4.(b) Sürtünme oskülatörü

Sadece kendi etkisiyle sürtünme osklatrleri Şekil 3.4.(b)'de sonuç limit sınırlarıdır. Hareketten osklatre enerji transferi her ikisinin sürtünme kuvvetleri ile karakterize edilmiş veya sürtünme kuvvetini içerenlerin durumunda gidip gelen normal kuvvetler ile karakterize edilmiştir.



**Şekil 3.4.(c)** Sürtünme oskülatörü

Osklatrler için Şekil 3.4.(a) (sağdaki Şekil) ile Şekil 3.4.(c) ikisi birlikte baŐarılı Şekilde oluşturulur sonuç rigid kararlı harekette olmasıdır.

Günlük yaŐamda mühendislik sistemlerinde yapıŐma-kayma titreşim sonuçları ortaya çıkar. Örneğin kaynamanın sesi, Őarap bardaklarının Őarkısı, kapıların gıcirtısı, robotların çıkardığı sesler ve makinelerin sesleri, tramvayların sesleri, otoyoldaki araçların lastik sesleri titreŐimlere örnektir (Popp 2000).

## 4. KISITLI MEKANİK SİSTEMLERİN HAREKET DENKLEMLERİ

### 4.1. Giriş

Kısıtlı mekanik sistemi modelleyen hareket denklemini belirlemede D'Alembert prensibinin 4 önemli sonucu;

1. Kısıtlayıcıların kinematik yapısının basitçe gösterilmesine,
2. Hareket denkleminin belirlenmesinde kolaylığa,
3. Her hangi bir  $t$  anında bilinmeyen ivme ve kısıtlayıcı kuvvetlerin belirlenmesinde,
4. Bu prensip, sistemin **belli kuvvetler** ve **kısıtlayıcı kuvvetler** olarak iki ayrı grupta incelenmesine ve sistemin parçaları üzerinde etkili olan kuvvetlerin ayrılmasına, olanak sağlar.

Sonuç olarak; ideal olmayan kısıtlayıcıları içeren hareket denklemleri bütün kısıtlayıcıların ideal olduğu özel durumlara, D'Alembert prensibine indirgenebilir (Udwadia 2000).

### 4.2. Non-İdeal Kısıtlayıcı ile İlgili Lagrange Dinamiğinin Temel Prensipleri

Noktasal parçacıkların kısıtlı olmayan sistemin, her parçanın sabit fakat muhtemelen kütlede olduğunu düşünelim. Newton'un mekanik sistem yasalarını ve Lagrange mekanik denklemlerini kullanarak, bu sistemin hareket denklemleri elde edilebilir. Böylece;

$$M(q,t)\ddot{q} = Q(q,\dot{q},t), \quad q(0) = q_0, \quad \dot{q}(0) = \dot{q}_0 \quad (4.1)$$

$q(t)$ , genelleştirilmiş koordinatların bir  $n$ -vektörüdür ( $n$ ' i 1 vektör alalım),  $M$  pozitif  $n \times n$  kare matris,  $Q$  verilen kuvvetlerin bilinen  $n$ -vektörü ve zamana bağlı

olarak diferensiyellenebilir. Kısıtlı olmayan sistem ile  $n$ -vektör  $\dot{q}_0$ 'ın elemanları bağımsız olarak özelleştirilir. Burada  $Q$  ile argümanları bilinen kuvvetler gösterilmiştir. Her hangi bir  $t$  anında kısıtlı olmayan sistemin ivmesi  $a = M^{-1}Q$  değeri ile verilir. Şimdi, bu sistemin sabit kısıtlayıcılara maruz kaldığı kabul edilirse,  $m = h + s$  olmak üzere;

$$\varphi(q, t) = 0 \quad (4.2)$$

ve

$$\psi(q, \dot{q}, t) = 0 \quad (4.3)$$

denklemleri verilir, burada  $\varphi$   $h$ -vektör,  $\psi$   $s$ -vektördür. Ayrıca  $t = 0$  anında kısıtlı denklemlerin  $q_0$  ve  $\dot{q}_0$  durumlarını verdiği kabul edilir. Denklem (4.2) ve (4.3)'ün yeteri kadar diferensiyellenebilir olduğunu varsayalım ve denklem (4.2)'yi zamana bağlı olarak; iki kez ve denklem (4.3)'ü zamana bağlı olarak bir kez türevleri alınırsa, böylece;

$$A(q, \dot{q}, t)\ddot{q} = b(q, \dot{q}, t) \quad (4.4)$$

denklemini elde edilir. Burada  $A$ ,  $m \times n$  matris ve  $b$   $m$ -vektör'dür. Denklem (4.4)'ün denklem (4.2) ve (4.3)'ün eşiti olduğunu vurgulamak önemlidir. Bu kısıtlı denklem kümesi diğerleri arasında olağan holonomik, non-holonomik, scleronomic, rheonomic, katastatik ve akatastatik değişkenlerini içerir. Sistemde bulunan kısıtlayıcılar yüzünden herhangi bir  $t$  zamanında kısıtlı mekanik sistemin hareketi, genellikle kısıtlayıcıları hareketsiz olduğu yerden sapar. Kısıtlı olmayan sistemden kısıtlı hareketin sapması  $t$  zamanında ek bir kuvvet ile ortaya çıktığı düşünülebilir. Bu ek kuvvete  $n$ -vektör  $Q^c$  kısıtlayıcı kuvveti denir. Kısıtlayıcının bu kuvveti'nin özellikleri ve doğası özel durumludur ve sistemin hareketini modellemek isteyen mekanikçi bu konu hakkında özel sistemin gerekli hareket denklemini elde etmek için onları tanımlamalıdır. Kısıtlı mekanik sistemin hareketi;

$$M(q, t)\ddot{q} = Q(q, \dot{q}, t) + Q^c(q, \dot{q}, t) \quad (4.5)$$

denklemleri ile açıklanır. Bu denklemde  $n$ -vektör  $Q^c$  kısıtlayıcının ortaya çıkardığı kuvveti belirtir. Denklem (4.1) bu yüzden verilen  $t$  zamanında kısıtlı sistem hareketinin tanımını kapsar; denklem (4.2) ve (4.3) sistemdeki kısıtlayıcıları içerir.

Mekanik sistemlerde kısıtlayıcı kuvvetin özellikleri, kısıtlayıcı kuvvetin doğasının karakterizasyonu boyunca özel bir durumdur. Denklem (4.1), (4.2) ve (4.3) durumu özelleştirir. Analitik dinamiğin görevi kısıtlı sistemden bildiğimiz  $t$  zamanındaki  $\ddot{q}(t)$   $n$ -vektörünün ivmesini belirleyen olarak görülebilir. Denklem (4.2) ve (4.3) (ve bunlara alternatif denklem (4.4))  $Q^c$   $n$ -vektör kısıtlayıcı kuvveti özellikleri ve yapısı hakkında ek bilgi verir.

Gelecek kullanımlar için, uygulamalı yer değiştirme altında  $t$  zamanındaki  $v(t)$   $n$ -vektörünü kullanılır.

$$A(q, \dot{q}, t)v = 0 \quad (4.6)$$

Şimdi Lagrange dinamiğindeki Temel Prensipler belirlenirse, denklem (4.1), (4.2) ve (4.3) tarafından tanımlanan kısıtlı mekanik sistem zamanla öyle bir değişir ki, herhangi bir  $t$  zamanında yapılan iş  $Q^c$   $n$ -vektör kısıtlayıcı kuvveti tarafından  $t$  zamanında uygulamalı yer değiştirme ile verilir (Udwadia and Kalaba 1996).

$$v^T Q^c = v^T C(q, \dot{q}, t) \quad (4.7)$$

Buradaki  $C(q, \dot{q}, t)$  bilinen, tanımlanan, yeterli bir şekilde düzgün  $n$ -vektör ve  $v$ ,  $t$  zamanında uygulamalı yer değiştirme  $n$ -vektördür. Bu  $C$  vektörü sistemin yapısını belirler ve onun hareketini modelleyen mekanikçi tarafından tanımlanır.

$C \equiv 0$  olduğunda, uygulamalı yer değiştirme altında kısıtlayıcı kuvvetler tarafından yapılan toplam işin sıfır olduğunu gösterilmişti. Bu yüzden bu prensip bütün kısıtlayıcıların ideal olduğu özel durumlarda ki olağan D'Alembert prensibine indirgenir. Bölüm 4.3'de bu prensip Lagrange dinamiğini kuadratik minimizasyon probleminde indirgemek için kullanılacaktır.



### 4.3. Analitik Dinamiğin Temel Kuadratik Minimizasyon Prensi

Kısıtlayıcı denklemi veren herhangi bir ivmenin  $n$ -vektör sistemi göz önüne alınsın. Bu durumda herhangi bir  $t$  zamanında  $q(t)$  ve  $\dot{q}(t)$   $n$ -vektörlerinin değerlerinin bilindiği kabul edilsin. Böylece  $\hat{q}(t)$  olası ivmenin denklem (4.4) kısıtlayıcısını veren herhangi bir  $n$ -vektördür.

$$A(q, \dot{q}, t) \hat{q} = b(q, \dot{q}, t) \quad (4.8)$$

Denklem (4.4) ve (4.8)'den

$$A(q, \dot{q}, t) (\hat{q} - \ddot{q}) = 0 \quad (4.9)$$

denklemi elde edilir. Kısıtlı sistemin  $\ddot{q}(t)$  gerçek ivmesinden,  $\hat{q}(t)$  olası ivmesine  $t$  zamanındaki sapması  $n$ -vektör  $d(t) = (\hat{q} - \ddot{q})$  ile gösterilir.

Herhangi bir  $t$  zamanında bir  $n$ -vektör  $v(t)$ ,  $A(q, \dot{q}, t)v = 0$  ile  $t$  zamanında uygulamalı yer değiştirmeyi içerir ve  $n$ -vektör  $d(t)$  uygulamalı yer değiştirmeyi temsil eder.

Denklem (4.5) kullanılarak; anlık  $t$  zamanında temel prensip;

$$v^T Q^c = v^T [M\ddot{q} - Q] = v^T C \quad (4.10)$$

şeklinde ifade edilir. Bu son eşitlik herhangi bir  $t$  zamanında;

$$v^T [M\ddot{q} - Q - C] = 0 \quad (4.11)$$

olmasını gerektirir ve böylece

$$d^T [M\ddot{q} - Q - C] = 0 \quad (4.12)$$

şeklini alır.  $n$ -vektör  $d(t) = (\hat{q} - \ddot{q})$ , herhangi olası ivme  $\hat{q}(t)$  vektörü için uygulamalı yer değiştirme vektörünü belirtir. Şimdi aşağıdaki yardımcı teoremler verilebilir.

**Yardımcı Teorem 1:**  $Y$ ,  $n \times n$  simetrik matris ve  $n$ -vektör  $e$ ,  $f$  ve  $g$  için

$$(e-g, e-g)_Y - (e-f, e-f)_Y = (g-f, g-f)_Y - 2(e-f, g-f)_Y \quad (4.13)$$

Herhangi iki  $n$ -vektör  $a$  ve  $b$  için  $(a, b)_Y \equiv a^T Y b$  olarak tanımlanır.

**İspat:** Doğrudan tanımlanarak gösterilir. ■

$Y$  pozitif tanımlı matris olduğunda, (4.13) sonucu,  $Y$  tarafından verilen metrik kullanarak bir üçgende “kosinüs teoremi” nin genelleştirilmesinin geometrik olarak gösterilmesidir.

**Yardımcı Teorem 2:** Herhangi  $n$ -vektör  $d(t) = (\hat{q} - \ddot{q})$  ile

$$\begin{aligned} & (M\hat{q} - (Q+C), M\hat{q} - (Q+C))_{M^{-1}} - (M\ddot{q} - (Q+C), M\ddot{q} - (Q+C))_{M^{-1}} \\ & = (d, d)_M + 2(M\ddot{q} - (Q+C), d) \end{aligned} \quad (4.14)$$

denklemini ifade edilir. Burada  $M$  pozitif tanımlı simetrik matristir.

**İspat:** Denklem (4.13) deki  $Y = M$ ,  $e = M^{-1}(Q+C)$ ,  $f = \ddot{q}$  ve  $g = \hat{q}$  olur ve aşağıdaki sonuçları verir. ■

Böylece analitik dinamiğin temel minimum prensibi verilebilir.

**Sonuç 1:** Holonomik ve/veya non-holonomik kısıtlayıcılara bağlı olan kısıtlı mekanik sistem zamanla öyle gelişir ki; herhangi bir anlık  $t$  zamanındaki  $n$ -vektör  $\hat{q}$  ivmesi ( $t$  zamanında  $q$  ve  $\dot{q}$  belli) quadratik formu;

$$G_{ni}(\hat{q}) := (M\hat{q} - (Q+C), M\hat{q} - (Q+C))_{M^{-1}} \quad (4.15)$$

şeklinde olup anlık  $t$  zamanındaki bütün olası  $\hat{q}$  ivmelerinin üzerinde azaltır. Denklem (4.5) kullanılarak,

$$G_{ni} = (Q^c - C, Q^c - C)_{M^{-1}} \quad (4.16)$$

tarafından verilen kısıtlayıcı, ölçümü minimize etmesine rağmen, mekanik sistem gelişir. Uygulamalı yer değiştirme  $v$  altında  $Q^c$  kısıtlayıcı kuvveti tarafından yapılan toplam iş  $v^T C$  ile verilir.

**İspat:** Denklem (4.1), (4.2) ve (4.3) tarafından tanımlanan kısıtlı mekanik sistem için,  $n$ -vektör  $d(t)$  denklem (4.12) ile ilişkilendirilir. Bundan dolayı denklem (4.14)'ün sağ tarafındaki son terim sıfır olur ve denklem (4.14);

$$\begin{aligned} & (M\hat{q} - (Q + C), M\hat{q} - (Q + C))_{M^{-1}} - (M\ddot{q} - (Q + C), M\ddot{q} - (Q + C))_{M^{-1}} \\ & = (d, d)_M \end{aligned} \quad (4.17)$$

şeklinde yazılır. Fakat,  $M$  pozitif tanımlı matristir ve bu yüzden denklem (4.17)'nin sağındaki skaler, sıfırdan farklı vektör  $d$  için pozitif olmalıdır. Denklem (4.15)'in minimumu  $\hat{q}(t) = \ddot{q}(t)$  olduğunda oluşur. Dahası, ideal olmayan kısıtlayıcılar ile kısıtlı mekanik sistemin gerçek hareketi, denklem (4.16) tarafından verilen kısıtlı kuvvetin ölçümü minimize eder.

**Yorum 1:** İdeal olmayan kısıtlayıcılara uygulanabilen Gauss prensibinin kısıtlayıcılarının bir genelleştirilmesi yukarıda verilen sonuçtur. Denklem (4.15) ve (4.16)'da ki  $G$  üzerinde  $ni$  alt simgesi bunu göstermektedir. İdeal olmayan kısıtlayıcıları içeren analitik dinamik için alternatif başlama noktası olarak düşünülebilir.  $Q^c - C$  miktarı, uygulamalı yer değiştirme altında kısıtlayıcı kuvvetlerin bir parçasıdır.

**Yorum 2:** Sonuç 1' de değinilen analitik dinamiğin temel prensibi, analitik dinamikte “minimum prensip” olarak görülür. Genelde diğerleri (hamilton prensipleri gibi) sınırlı fonksiyonlar ile ilgilenir. Dahası, zaman üzerinde integralleri içeren diğer sınırlı prensiplerin aksine, bu minimum prensip her hangi bir anlık zamanda geçerlidir.

**Yorum 3:** Kısıtlayıcılar ideal olduğu zaman,  $C = 0$  olduğunu görülür ve denklem (4.15) ve (4.16) da belirtilen minimum prensip, her hangi bir anlık  $t$  zamanındaki sistemin bütün olası ivmesi ile

$$G_{ni} = \left( Q^c, Q^c \right)_{M^{-1}} \quad (4.18)$$

kısıtlayıcı ölçümlerinin minimizasyonunu gerektiren En Az Kısıtlayıcı Gauss Prensibi olacaktır.

**Yorum 4:** Denklem (4.15) ve (4.16) daki minimum, denklem (4.14) ile verilen sınırlı olmayan olası ivmelere sahip olduğu görülmektedir.

**Yorum 5:** Sonuç 1' den: Mekanikçi tarafından sağlanan  $C$ 'nin tanımı ile ve kısıtlayıcı denklem ile o anda tutarlı olan olası ivmelerin hepsinin  $t$  zamanındaki mekanik sistemin durumunu belirler. Kısıtlı mekanik sistemin gerçek ivmesi  $G_{ni}$ 'yi minimize eder.

**Yorum 6:** Her hangi bir anlık  $t$  zamanında, ideal olmayan kısıtlayıcının kısıtlı sistemin  $\ddot{q}$  ivme vektörünün belirlenmesi aşağıdaki kısıtlı kuadratik minimizasyon probleminin çıkmasına neden olup, anlık bir  $t$  zamanında,

$$\underset{\{\hat{q} | A\hat{q}=b\}}{\text{Min}} \left[ G_{ni}(\hat{q}) \right] \quad (4.19)$$

şeklinde olur. Buradaki  $\hat{q}$  anlık  $t$  zamanında bu kuadratik form (4.19)'u minimize eder ve mekanik sistemin ivmesi  $\ddot{q}(t)$  olur.

#### 4.4. Non-İdeal Kısıtlayıcılarla İlgili Sistemlerin Açık Hareket Denklemi

Bu bölümde; mekanik sistemin açık hareket denklemi elde edilecektir. Kısıtlı sistemin ivmesi,  $a = M^{-1}Q$  ve  $c = M^{-1}C$  ile gösterilirse,  $G_{ni}$ ,

$$G_{ni}(\ddot{q}) = (\ddot{q} - a - c)^T M (\ddot{q} - a - c) \quad (4.20)$$

şeklinde ifade edilir.  $t$  zamanında  $A\ddot{q} = b$  ilişkisini veren bütün bu  $\ddot{q}$ 'lerden denklem (4.20)'yi minimize eden  $\ddot{q}$ 'nin bulunması gerekir.  $r = M^{-\frac{1}{2}}(\ddot{q} - a - c)$  olsun, bu durumda,

$$\ddot{q} = M^{-\frac{1}{2}}r + a + c \quad (4.21)$$

bulunur ve  $A\ddot{q} = b$  transformasyonu ile

$$AM^{-\frac{1}{2}}r = b - Aa - Ac \quad (4.22)$$

elde edilir. Bu kuadratik minimizasyon problemi, denklem (4.22)'yi veren ve  $\|r\|_2^2$  indirgeyen  $r$  vektörünün belirlenmesine indirgenir. Fakat bu problemin çözümü basitçe gösterilmiştir (Graybill 1983).

$$r = \left( AM^{-\frac{1}{2}} \right)^{\{1,4\}} (b - Aa - Ac) \quad (4.23)$$

Denkleminde  $\{1,4\}$ ,  $AM^{-\frac{1}{2}}$  matrisinde genelleştirilmiş ters matrisi gösterir. Şimdi (4.21) denklemi tekrar ele alınarak ve  $a$  ve  $c$ 'nin tanımları ile ilgili aşağıdaki sonuç verilebilir (Udwadia and Kalaba 1996).

## **Sonuç 2**

Non-İdeal kısıtlayıcılarla ilgili mekanik bir sistemin açık hareket denklemi

$$\ddot{q} = a + M^{-\frac{1}{2}} \left( AM^{-\frac{1}{2}} \right)^{\{1,4\}} (b - Aa) + M^{-\frac{1}{2}} \left[ I - \left( AM^{-\frac{1}{2}} \right)^{\{1,4\}} AM^{-\frac{1}{2}} \right] M^{-\frac{1}{2}} C \quad (4.24)$$

veya

$$\begin{aligned}
 M\ddot{q} = & Q + M^{\frac{1}{2}} \left( AM^{-\frac{1}{2}} \right)^{\{1,4\}} (b - AM^{-1}Q) \\
 & + M^{\frac{1}{2}} \left[ I - \left( AM^{-\frac{1}{2}} \right)^{\{1,4\}} AM^{-\frac{1}{2}} \right] M^{-\frac{1}{2}} C
 \end{aligned} \tag{4.25}$$

şeklinde verilebilir. Bütün kısıtlayıcılar ideal olduğunda  $C \equiv 0$  olur ve denklem (4.24) ve (4.25) her ikisinin de sağındaki üçüncü terim sıfır olur. Denklem (4.25) ile  $M(q, t)\ddot{q} = Q(q, \dot{q}, t) + Q^c(q, \dot{q}, t)$  denklemini kıyaslanırsa, toplam kısıtlayıcı kuvvet  $n$  vektör  $Q^c$  iki tane  $n$  vektör olarak yazılabileceğini görülür. Yani;

$$Q^c = Q_i^c + Q_{ni}^c \tag{4.26}$$

şeklinde olur. Burada

$$Q_i^c = M^{\frac{1}{2}} \left( AM^{-\frac{1}{2}} \right)^{\{1,4\}} (b - AM^{-1}Q) \tag{4.27}$$

ve

$$Q_{ni}^c = M^{\frac{1}{2}} \left[ I - \left( AM^{-\frac{1}{2}} \right)^{\{1,4\}} AM^{-\frac{1}{2}} \right] M^{-\frac{1}{2}} C \tag{4.28}$$

olur. Ayrıca toplam kısıtlayıcı kuvvetlerin iki durumundan da söz edilebilir:

i) Bütün kısıtlayıcılar ideal olduğunda  $Q_i^c$  sistemin kısıtlayıcı kuvveti olarak adlandırılır.

ii) Bütün kısıtlayıcılar ideal olmayan ise  $Q_i^c$ , sistemin toplam kısıtlayıcı kuvveti olarak adlandırılır.

Verilen bir mekanik sistem için denklem (4.26)'daki  $C(q, \dot{q}, t)$  (veya eşitlikleri) anlık zamanda tanımlanması gerekir. Her zaman için  $C \equiv 0$  olduğunda, kısıtlayıcılar idealdir. Böylece  $Q_{ni}^c$  sifıra eşittir. Fakat  $Q_{ni}^c$  kuvvetleri, kısıtlayıcılar ideal olsun olmasın her zaman mevcuttur.

Denklem (4.25), ideal olmayan holonomik ve non-holonomik kısıtlayıcıların olası varlığını içeren Udwadia ve Kalaba tarafından ortaya atılan hareket denkleminin bir genelleştirmesi olarak görülebilir. Denklem (4.24) ve (4.25) Lagrange dinamiğine dahil olan ideal olmayan kısıtlayıcıların bulunduğunu açık bir şekilde gösterir (Udwadia and Kalaba 1992).

**Yorum 7:** Denklem (4.23)'de elde edilen  $n$ -vektör  $r$ 'nin çözümü için  $AM^{-\frac{1}{2}}$  matrisinin herhangi bir  $\{1, 4\}$  genelleştirilmiş tersinden yararlanılmasına rağmen, vektör  $r$ 'nin çözümü tek olarak belirlidir. Sonuç olarak,  $n$ -vektör  $\ddot{q}$  denklem (4.24)'ün sağında tek olarak belirlidir.

**Yorum 8:**  $AM^{-\frac{1}{2}}$  matrisinin özel  $\{1, 4\}$  tersi genel olarak sözde tersi olarak adlandırılır ve buna  $\{1, 2, 3, 4\}$  tersi denir ve  $\left(AM^{-\frac{1}{2}}\right)^+$  tarafından belirlenir. Denklem (4.24) ve (4.25)'de bu tersleri kullanarak mekanik sistemin açık hareket denklemi bulunabilir (Penrose 1955).

$$\ddot{q} = a + M^{-\frac{1}{2}} \left(AM^{-\frac{1}{2}}\right)^+ (b - Aa) + M^{-\frac{1}{2}} \left[ I - \left(AM^{-\frac{1}{2}}\right)^+ AM^{-\frac{1}{2}} \right] M^{-\frac{1}{2}} C \quad (4.29)$$

ve

$$M\ddot{q} = Q + M^{\frac{1}{2}} \left(AM^{-\frac{1}{2}}\right)^+ (b - AM^{-1}Q) + M^{\frac{1}{2}} \left[ I - \left(AM^{-\frac{1}{2}}\right)^+ AM^{-\frac{1}{2}} \right] M^{-\frac{1}{2}} C \quad (4.30)$$

Denklem (4.27) ve (4.28)'de  $Q_i^c$  ve  $Q_{ni}^c$ 'nin her biri ayrı ayrı olarak denk açıklamaları elde etmek için  $\left(AM^{-\frac{1}{2}}\right)^{\{1,4\}}$ 'i  $\left(AM^{-\frac{1}{2}}\right)^+$  ile yer değiştirilebilir (Penrose 1955).

#### 4.5. Açıklayıcı Örnekler

##### Örnek 4.5.1.

Bu örnekte ideal olmayan kısıtlayıcılarla ilgili Mekanik Sistemin hareketini tanımlayan ve Coulomb sürtünmesini içeren problemlerde Denklem (4.25)'in nasıl uygulanacağı gösterilecektir.

Yerçekimi etkisinde  $R$  yarıçaplı dairesel halkasındaki dikey düzlemdeki daire içinde hareket eden sıkıştırılmış bir kütlenin parçacıkları ele alınırsa; halkanın merkezindeki orijin ile kartezyen koordinatların başlangıcı çakıştırıldığında;

$$\begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -g \end{bmatrix}$$

eşitliği elde edilir. Bu eşitlik ile verilen parçacığın sınırsız hareketi ve kısıtlayıcısı  $x^2 + y^2 = R^2$  ile temsil edilir. Zamana bağlı olarak 2. mertebeden diferensiyelleri ile;

$$[x \ y] \begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \end{bmatrix} = -(x^2 + y^2) \quad A = [x \ y] \quad A^+ = \frac{1}{R^2} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

denklemleri elde edilir. Burada, eğer kısıtlayıcı ideal olsaydı;  $Q_i^c$  kısıtlayıcı kuvveti denklem (4.27) tarafından verilirdi (Udwadia 2001).

$$Q^c = Q_i^c + Q_{ni}^c$$

$$Q_i^c = M^{\frac{1}{2}} \left( AM^{-\frac{1}{2}} \right)^{\{1,4\}} (b - AM^{-1}Q)$$



Buradan;

$$Q_i^c = - \begin{bmatrix} \frac{x}{R} \\ \frac{y}{R} \end{bmatrix} \frac{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 - gy)}{R}$$

elde edilir. Böylece, kısıtlı sistemin hareket denklemi;

$$\begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -g \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \frac{x}{R} \\ \frac{y}{R} \end{bmatrix} \frac{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 - gy)}{R}$$

şeklinde verilir. Eğer bu kısıtlayıcı kuvvetin büyüklüğü kısıtlayıcı ideal ise, o zaman;

$$|Q_i^c| = \left| \frac{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 - gy)}{R} \right|$$

şeklinde olacaktır. Böylece kütle ve halka arasındaki kayma sürtünme tarafından oluşturulan ideal olmayan kısıtlayıcı

$$V^T Q^c = v^T C = -v^T \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} \frac{\mu |Q_i^c|}{\sqrt{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)}}$$

denklemleri ile verilir. Buradaki  $\mu$  kütle ve halka arasındaki sürtünme sabitidir.

Parçacıkların dairesel yörünge boyunca hareketi  $x\dot{x} = y\dot{y}$  şartı ile gösterilirse;

$$\begin{aligned} C &= - \frac{\mu |Q_i^c|}{\sqrt{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)}} \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} \\ &= \frac{\mu |Q_i^c|}{R} \begin{bmatrix} -y \operatorname{sgn}(x) \\ |x| \end{bmatrix} \operatorname{sgn}(\dot{y}) \end{aligned}$$

eşitliği elde edilir. Bu denklem, denklem (4.28) tarafından ideal olmayan kısıtlayıcı kuvvetin elde edilmesi ile bulunur.

$$Q_{ni}^c = M^{\frac{1}{2}} \left[ I - \left( AM^{-\frac{1}{2}} \right)^{\{1,4\}} \left( AM^{-\frac{1}{2}} \right) \right] M^{-\frac{1}{2}} C$$

Bu denklemde verilen  $A^{\{1,4\}}$  ile  $A^+$  yer değiştirilirse;

$$\begin{aligned} Q_{ni}^c &= \{I - A^+ A\} C = \frac{\mu |Q_i^c|}{R} \left\{ I - \frac{1}{R^2} \begin{bmatrix} x^2 & xy \\ xy & y^2 \end{bmatrix} \right\} \begin{bmatrix} -y \operatorname{sgn}(x) \\ |x| \end{bmatrix} \operatorname{sgn}(\dot{y}) \\ &= -\mu |Q_i^c| \begin{bmatrix} \frac{-y \operatorname{sgn}(x)}{R} \\ \frac{x \operatorname{sgn}(x)}{R} \\ \frac{R}{R} \end{bmatrix} \operatorname{sgn}(\dot{y}) \end{aligned}$$

bulunur. Buradan açık hareket denklemi;

$$\begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -g \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \frac{x}{R} \\ \frac{y}{R} \end{bmatrix} \frac{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 - gy)}{R} - \mu |Q_i^c| \begin{bmatrix} \frac{-y \operatorname{sgn}(x)}{R} \\ \frac{x \operatorname{sgn}(x)}{R} \\ \frac{R}{R} \end{bmatrix} \operatorname{sgn}(\dot{y})$$

elde edilir.

#### Örnek 4.5.2.

Yatayla  $\theta$  açısı ile duran eğik bir düzlem üzerinde hareket eden bir  $m$  kütle blokunu göz önüne alalım. Bu kütle blokunun kısıtlı olmayan hareketi,

$$\begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -mg \end{bmatrix}$$

ile verilir (Udwadia 2005).

Bu eşitlikte sağ taraftaki vektöre  $Q$  kuvveti diyelim. Eğik düzlem bir kısıtlayıcı oluşturur. Bu kısıtlayıcı,

$$y = x \cdot \tan \theta \quad (4.31)$$

denklemleri ile ifade edilir. Denklem (4.31)'in her iki tarafı zamana göre iki kez türev alınır;

$$\ddot{y} = \ddot{x} \cdot \tan \theta$$

denklemleri elde edilir. Bu denklemler;

$$\begin{bmatrix} -\tan \theta & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \end{bmatrix} = 0$$

şeklinde ifade edebiliriz. Bu denklemdeki  $\begin{bmatrix} -\tan \theta & 1 \end{bmatrix}$  matrisine  $A$  matrisi diyelim. Buradan;

$$B^+ = \left( AM^{-\frac{1}{2}} \right)^+ = m^{\frac{1}{2}} \cos^2 \theta \begin{bmatrix} -\tan \theta \\ 1 \end{bmatrix}$$

denklemleri elde edilir ve  $b=0$  dır. Denklem (4.32) ile verilen kısıtlayıcı idealdir. Sistemin hareket denklemleri;

$$m \begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -mg \end{bmatrix} + mg \begin{bmatrix} -\sin \theta \cdot \cos \theta \\ \cos^2 \theta \end{bmatrix}$$

şeklinde bulunur. Eşitliğin sağ tarafındaki ikinci terim, denklem (4.31) ideal kısıtlayıcı ile  $Q_i^c$  kısıtlayıcı kuvvetini verir. Bu kısıtlayıcı kuvvetin büyüklüğü  $mg \cos \theta$  şeklindedir. Eğik düzlem üzerinde  $\mu$  sürtünme sabiti ile Coulomb sürtünmesi vardır ve ideal bir kısıtlayıcı değildir. Kısıtlayıcı kuvvet altında sanal yer değiştirme  $v$  ile gösterilirse;

$$v^T Q^c = -v^T C \equiv -v^T \frac{\mu}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}} \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} mg \cos \theta \quad (4.32)$$

eşitliği verilebilir. Kütle bloğunun hızının karşı yönünde sürtünme kuvveti vardır ve bu kuvvetin büyüklüğü  $\mu |Q_i^c|$  ile gösterilir.  $\dot{y} = \dot{x} \tan \theta$  denklemleri ile  $C$  vektörü,

$$C = \mu mg \cos \theta \begin{bmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{bmatrix} \text{sgn}(\dot{x})$$

denklemleri ile verilir. Denklem (4.32) ile ideal olmayan kısıtlayıcı tanımlanır ve kısıtlayıcı kuvvet,

$$Q_{ni}^c = -M^{\frac{1}{2}} \left\{ I - \left( AM^{-\frac{1}{2}} \right)^+ \left( AM^{-\frac{1}{2}} \right) \right\} M^{-\frac{1}{2}} C$$

$$Q_{ni}^c = - \left\{ I - \begin{bmatrix} \sin^2 \theta & -\sin \theta \cos \theta \\ -\sin \theta \cos \theta & \cos^2 \theta \end{bmatrix} \right\} C$$

$$Q_{ni}^c = - \begin{bmatrix} \mu mg \cos^2 \theta \\ \mu mg \cos \theta \sin \theta \end{bmatrix} \text{sgn}(\dot{x})$$

eşitlikleri ile verilecektir. Bu denklemler ile hareket denklemi;

$$m \begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -mg \end{bmatrix} + mg \begin{bmatrix} -\sin \theta \cos \theta \\ \cos^2 \theta \end{bmatrix} - \mu mg \begin{bmatrix} \cos^2 \theta \\ \sin \theta \cos \theta \end{bmatrix} \text{sgn}(\dot{x})$$

şeklinde ifade edilir. Bu denklemde açık olarak görülür ki, eşitliğin sağ tarafında sistemdeki kuvvetlerin farklı üç durumu meydana gelir. Birinci terim  $Q$  kuvvetini, ikinci terim  $Q_i^c$  kısıtlayıcı kuvvetini (buda ideal kısıtlayıcı) ve son olarak üçüncü terim eklenen kuvvet  $Q_{ni}^c$  ideal olmayan kısıtlayıcı olarak verilir.

## 5. BİLGİSAYAR PROGRAMLAMA İLE MEKANİK SİSTEMLERİN MODELLENMESİ

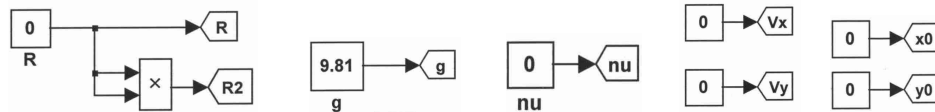
Klasik Mekanik Denklemleri klasik yöntemlerle çözmek oldukça zor ve zaman almaktaydı. 19. yy sonları ve 20. yy başlarında klasik mekanikteki mekanik sistemler diferansiyel yapılar ( Manifold, Tanjant Demet, Tensör vb.) kullanılarak oldukça basit ve anlaşılır denklemler ile ifade edildi ve çözümleri eski yöntemlere göre daha kolay çözülebildi. Günümüzde ise elektronik hesaplayıcıların devreye girmesi ile klasik mekanikteki mekanik sistemler modellenerek bilgisayar programları (Maple, Mathematica, MATLAB vb.) yardımıyla çözülmeye çalışılmaktadır. Modellemeler yüksek boyutlu ve karmaşık mekanik sistemlerin çözülmesinde yeni bir çığır açmış zamanda kazanç ve çözümde güvenilirliğin yüksek olması ile günümüzdeki araştırmacılar bu alana yönelmiştir.

### 5.1. Örnek 4.5.1'in MATLAB-SIMULINK Modeli

Yukarıda hareket denklemi çıkarılan örnek 4.5.1'i, MATLAB-SIMULINK programını kullanarak modelleyelim. Örnek 4.5.1'de hareket denklemi aşağıdaki şekildeydi.

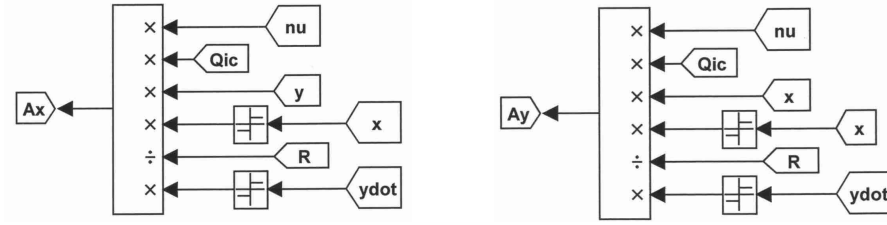
$$\begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -g \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \frac{x}{R} \\ \frac{y}{R} \end{bmatrix} \frac{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 - gy)}{R} - \mu |Q_i^c| \begin{bmatrix} \frac{-y \operatorname{sgn}(x)}{R} \\ \frac{x \operatorname{sgn}(x)}{R} \end{bmatrix} \operatorname{sgn}(\dot{y})$$

MATLAB' da öncelikle bu denklemin sabit değerlerini girelim;



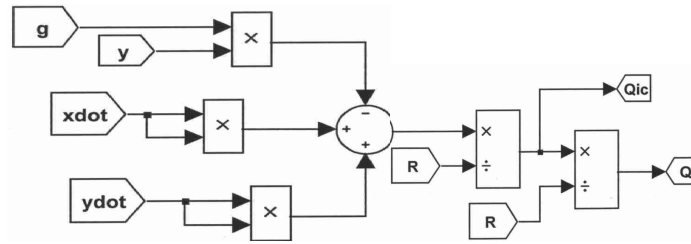
Şekil 5.1 MATLAB-SIMULINK modelinin sabit değerleri

Burada  $V_x$  ve  $V_y$  hareketin başlangıcındaki ilk hız,  $x_0$  ve  $y_0$  ise kütlelin bulunduğu konumdur. Sabitleri verdikten sonra denklemdaki terimleri verelim.



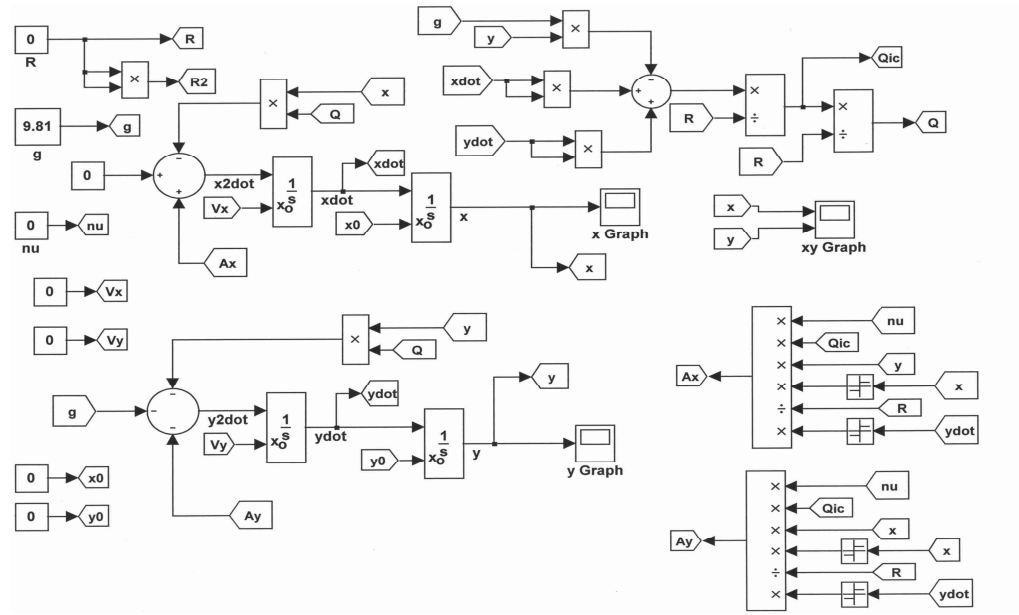
Şekil 5.2 MATLAB-SIMULINK modelinin terimleri

Buradaki  $A_x$  ve  $A_y$  değerleri denklemin sağ tarafındaki ikinci ve üçüncü terimleri vermektedir. Aşağıda ise  $Q_i^c$  değeri hesaplanmıştır.



Şekil 5.3 MATLAB-SIMULINK modelinin  $Q_i^c$  değeri

Sonuç olarak modelleme aşağıdaki genel şekilde yazılmıştır.



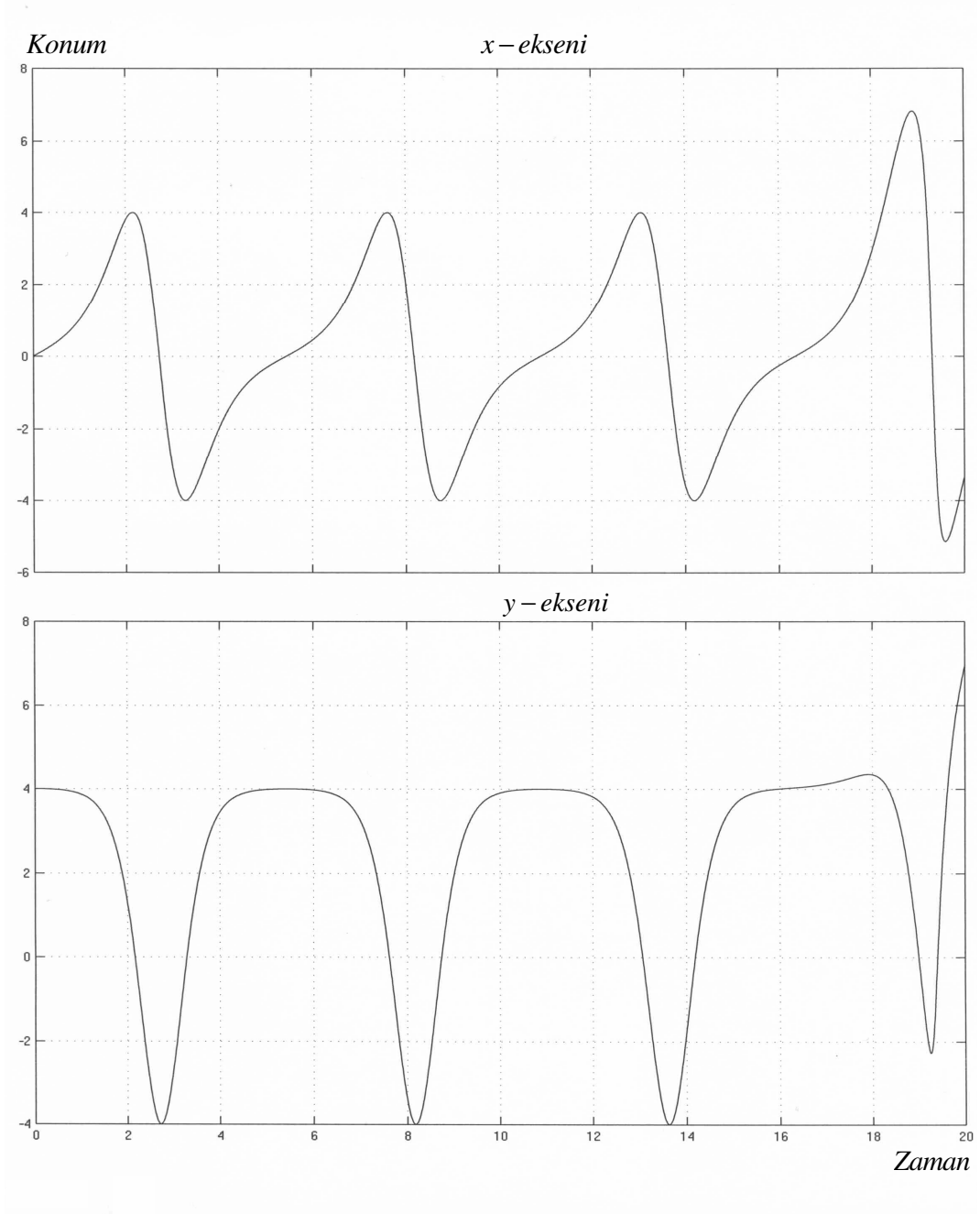
Şekil 5.4 Örnek 4.5.1'in MATLAB-SIMULINK modeli

Aşağıdaki tabloda çeşitli değerler verilerek program çalıştırılmış, hareketin sonlandığı andaki zaman hesaplanmış ve grafikler elde edilmiştir.

**Tablo 5.1**  $R$  radius dairesel halkasındaki dikey düzlemdeki daire içinde hareket eden sıkıştırılmış bir kütle için Coulomb kayma sürtünmesinin etkisiyle elde edilen Lagrange hareket denkleminin modellenmesindeki veriler.

Şekil	$g$	$R$	$\mu$	Konum		Hız (m/sn)		Hareketin Sonlandığı Zaman (sn)
				$x_0$	$y_0$	$V_x$	$V_y$	
5.5	9.81	4	0	0	4	0.7	0	32.6393681761429
5.6		4	0.05	0	4	0.7	0	29.4976792622003
5.7		4	0.05	0	4	0.7	0.7	10.19582315377807
5.8		4	0.05	4	0	0.7	0	14.7447675591768
5.9		4	0.05	4	0	0.7	0.7	10.96541979057925
5.10		4	0.05	4	0	0	0.7	23.02909675895902
5.11		4	0.05	0	-4	0	0.7	Sabit
5.12		4	0.05	0	-4	0.3	0.7	Sabit

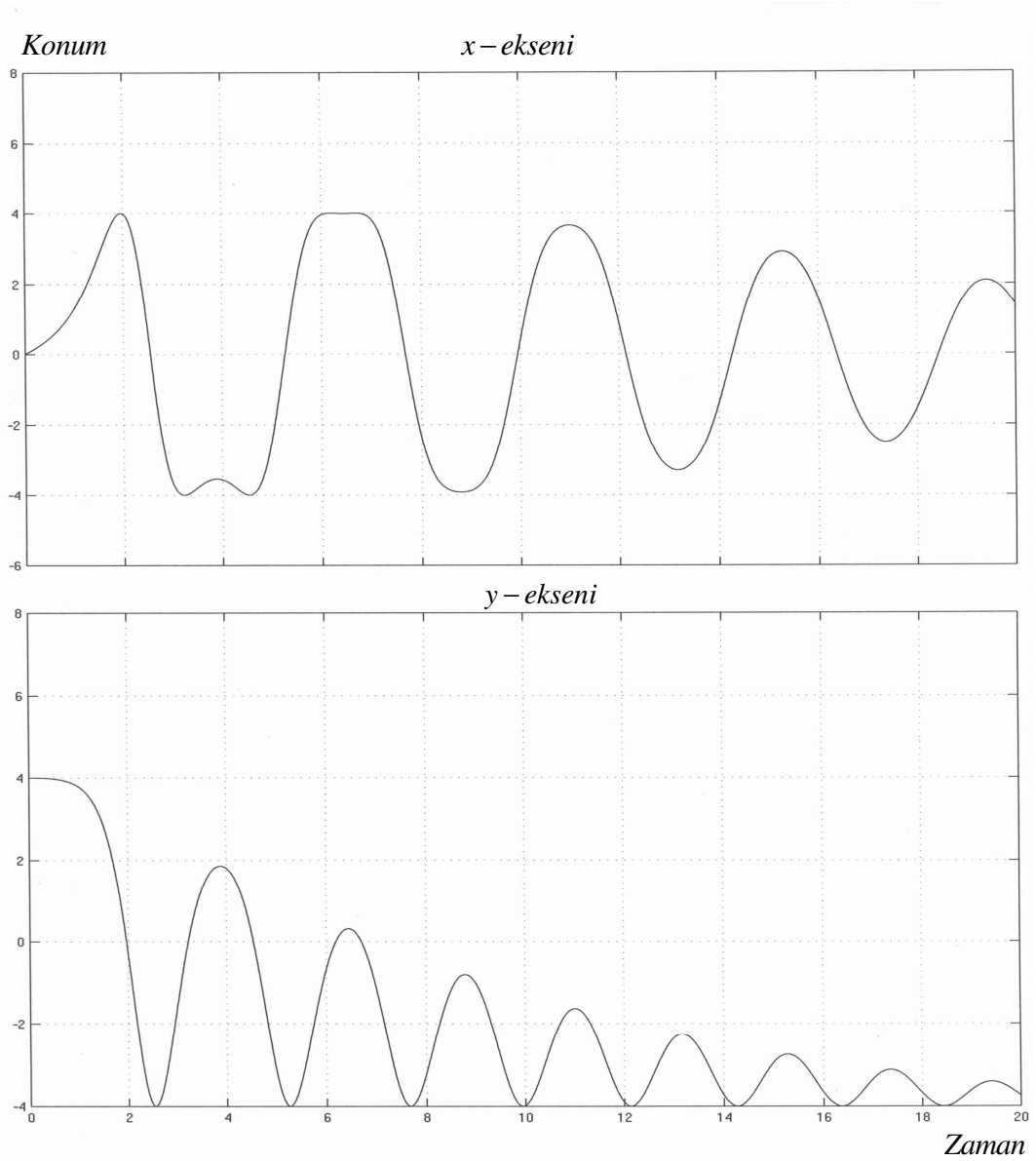
Bölüm 2'de ki modellerimizde sürtünme kuvvetleri ihmal edilmiş ve cisim önce ilk hızı olmaksızın harekete başlamış ve daha sonra hız verilerek modelleme oluşturulmuştur. Bu modellerimizde ise Coulomb kayma sürtünme kuvvetinin varlığı da modelimize dahil edilmiş  $(0,4)$  konumundan harekete başlayan cisimde hız değerleri ve sabitler değiştirilerek model oluşturulmuştur. Bu modelimizde cismin hareketinin sonlandığı zaman da belirtilmiştir.



**Şekil 5.5** Yalnız  $x$  ekseninde hız verilerinden oluşturulan modelleme grafiği

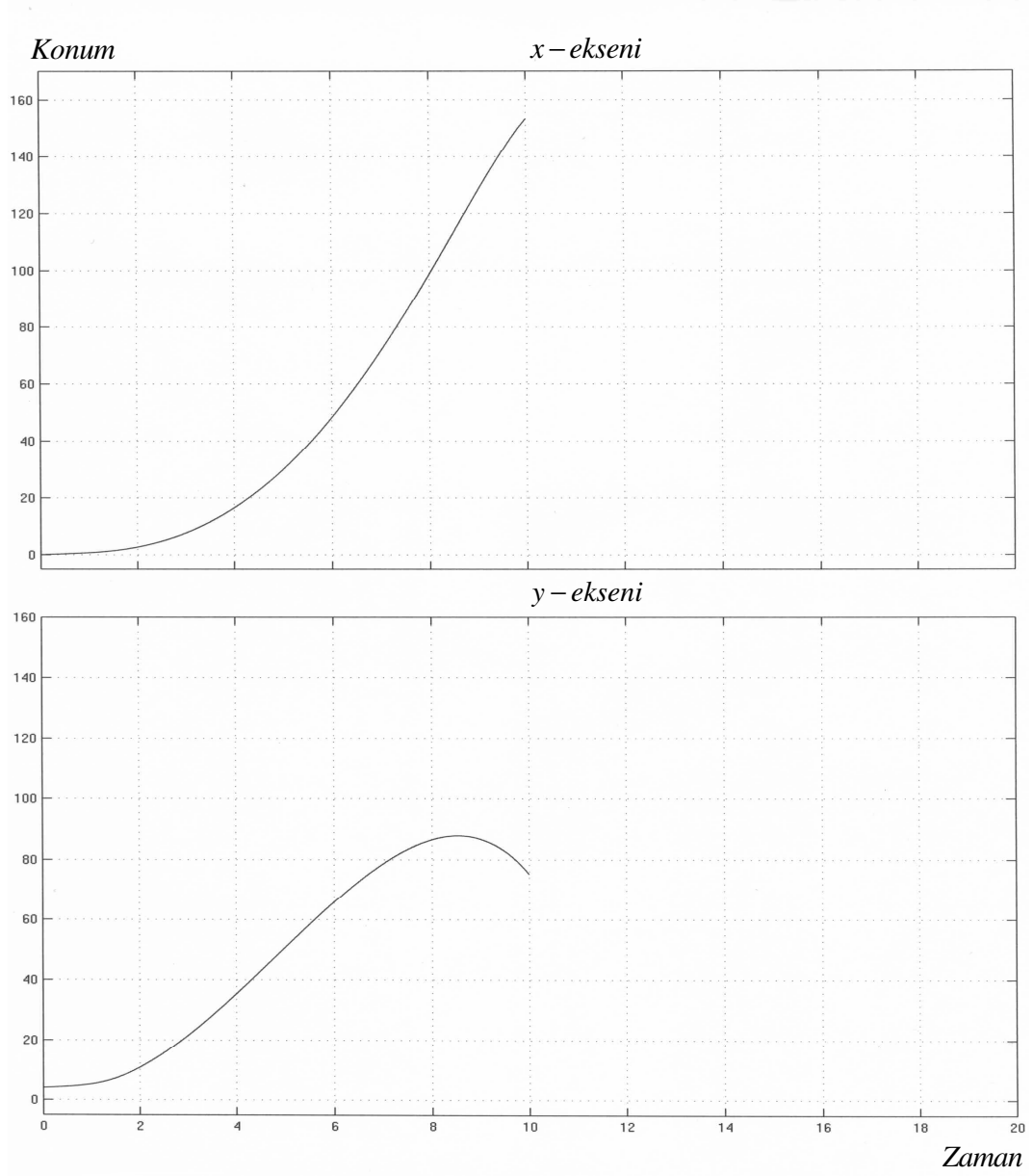
Cisim'in hareketi  $(0,4)$  konumunda başlamış  $x$  ekseninde  $0,7\text{ m/s}$  ilk hız verilmiş ve hareketin  $32,6393681761429$  saniyede sonlandığı hesaplanmıştır. Rigid cisim  $y$  ekseninde hızın azaldığı konumlarda  $x$  ekseninde hızın arttığı gözlenmektedir. Burada sürtünme katsayısı  $\mu = 0$  olarak alınmış ve harekete etkisi gözlenmiştir.





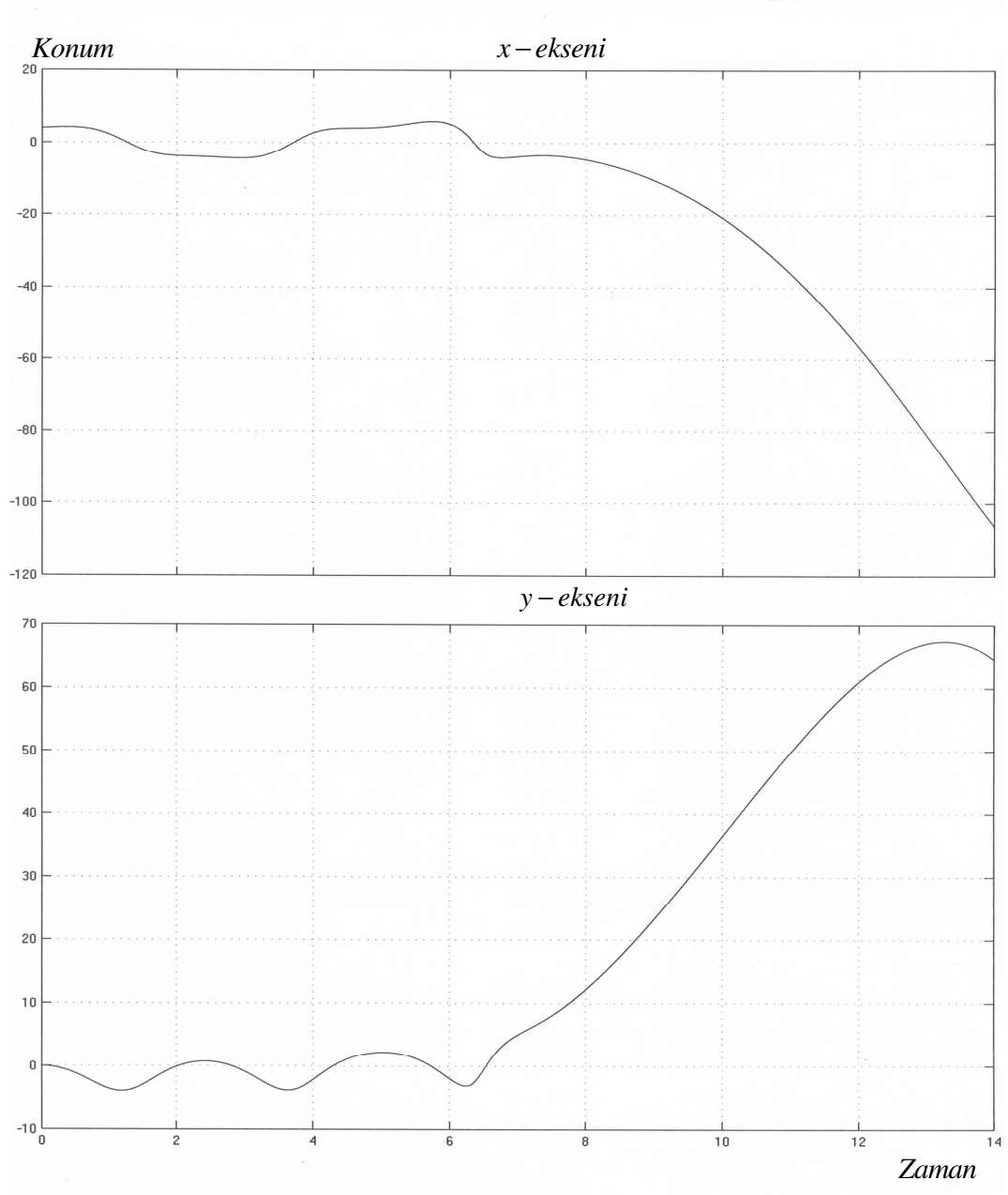
**Şekil 5.6** Sürtünme katsayısı verilerek oluşturulan modelleme grafiği

Bu grafikte sürtünme katsayısı değeri  $\mu=0,05$  olarak alınmış ve hız değerleri değiştirilmeden harekete sürtünmenin nasıl bir etkisi olacağı gözlenmiştir. Sürtünme katsayısının sıfır olduğu zamandakine benzer şekilde  $x$  eksenini boyunca hız artmış, daha sonra azalmış  $y$  eksenini boyunca önce azalmış, sonra  $x$  eksenini boyunca arttığı yerde azalmaya başlamıştır ve bu hareket artan azalan kısa periyotları şeklinde devam etmiş, sonunda 29,4976792622003 saniyede hareketin sonlandığı gözlenmiştir. Daha önceki hareketten daha kısa zamanda hareket sonlanmıştır.



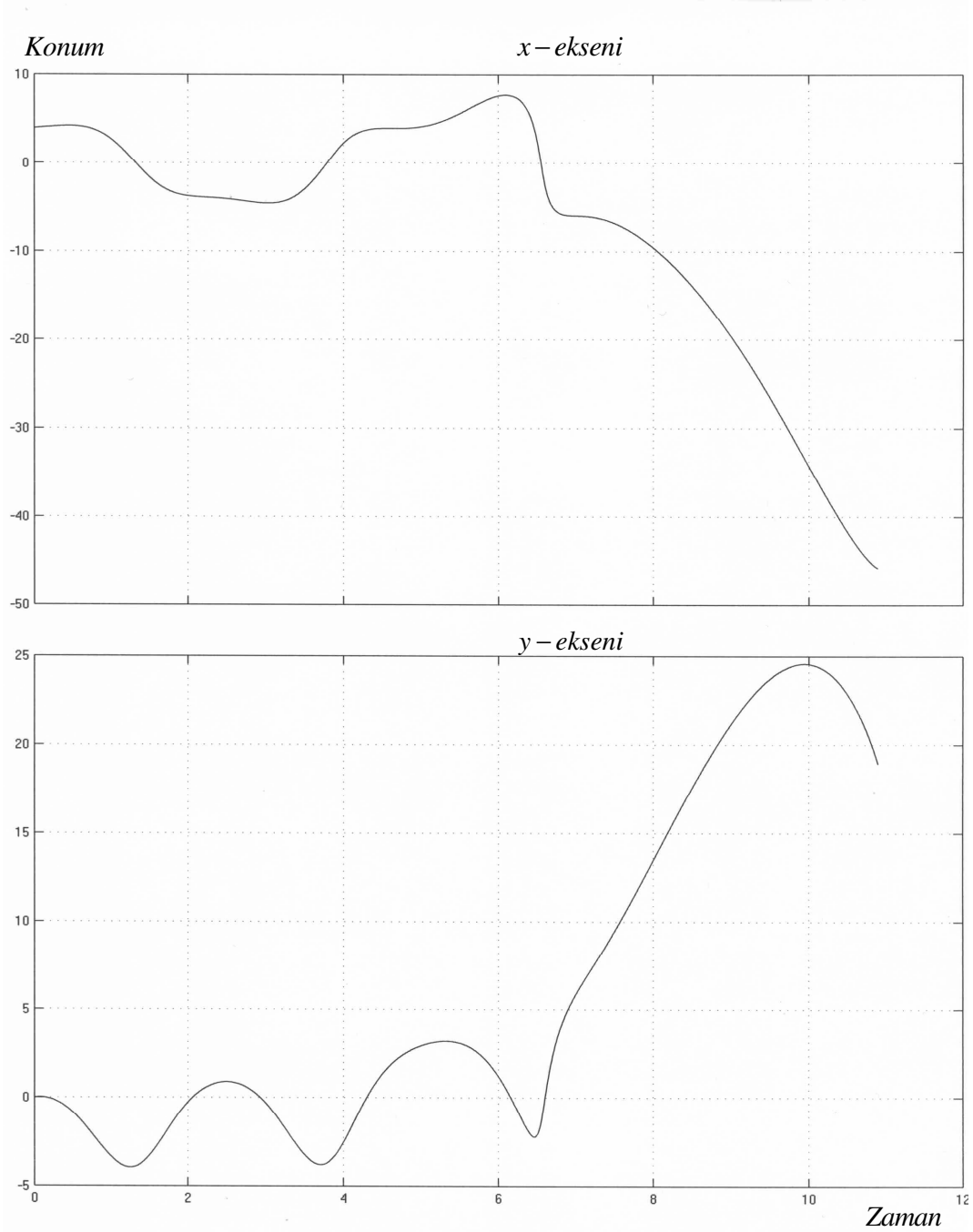
**Şekil 5.7** y ekseninde hız verilmesiyle oluşturulan modelleme grafiği

Burada ki harekette, y ekseninde boyunca  $0,7\text{ m/s}$  hız ilave edilerek cismin hareketi gözlemleniyor ve hareketin  $10,19582315377807$  saniyede sonlandığı tespit ediliyor. Cisme y ekseninde boyunca da hız verildiğinde, hareketin bir önceki hareketlerden çok farklılaştığı, konumun x ekseninde 150'ye ve y ekseninde 90'a kadar çıktığı görülmektedir.



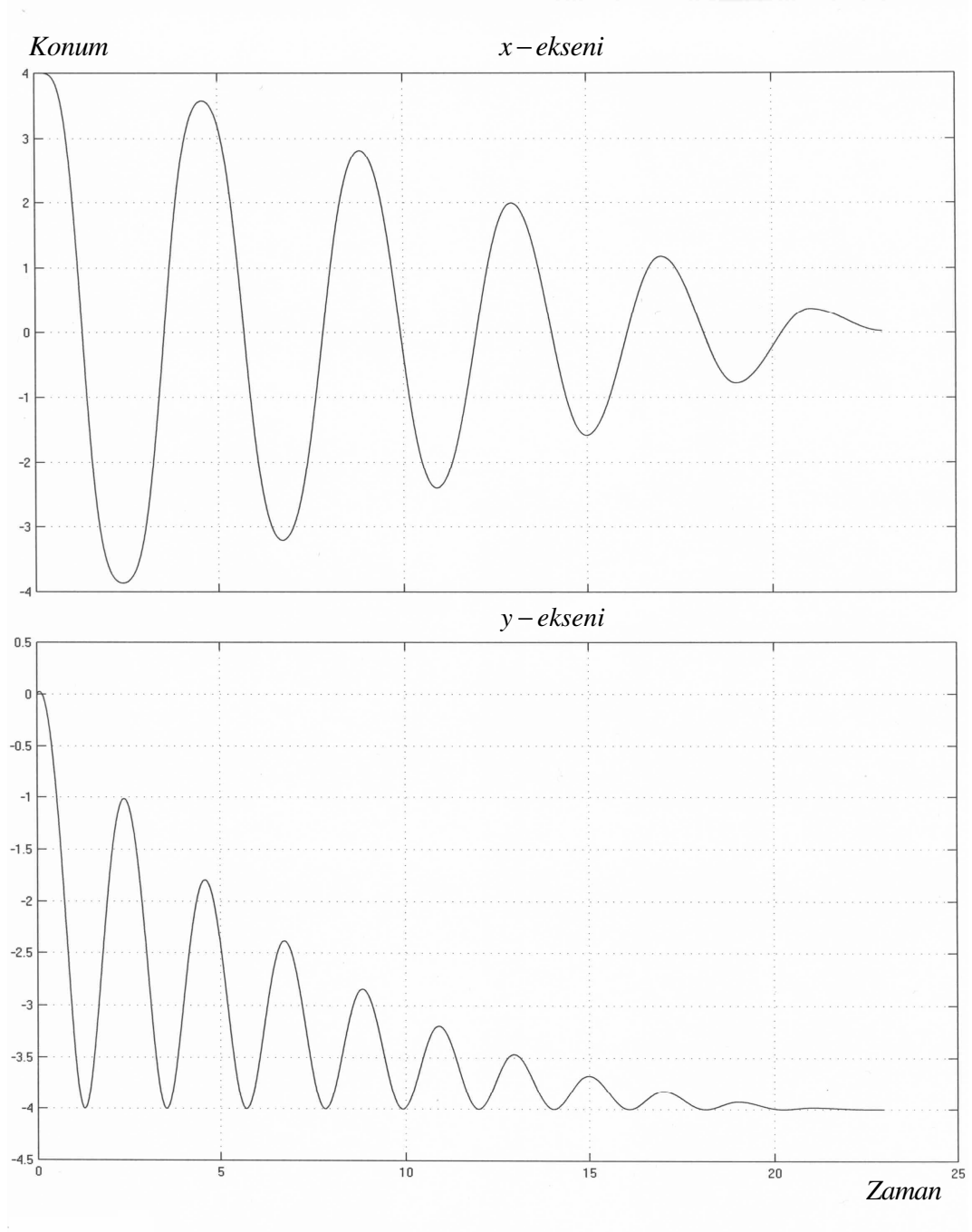
**Şekil 5.8** Konum değiştirilerek oluşturulan modelleme grafiği

Konum değiştirilerek hareketin gerçekleşme durumu incelenmiştir. Konum  $(4,0)$  noktası alınmış ve  $x$  eksen yönünde  $0,7m/s$  hızı veriliyor.  $y$  eksen yönünde hız verilmiyor. Hareket  $14,7447675591768$  saniyede bitmiştir.  $x$  eksen boyunca sürekli azalan bir grafik çıkmıştır.  $y$  eksen boyunca ise artan bir grafik çıkmıştır.



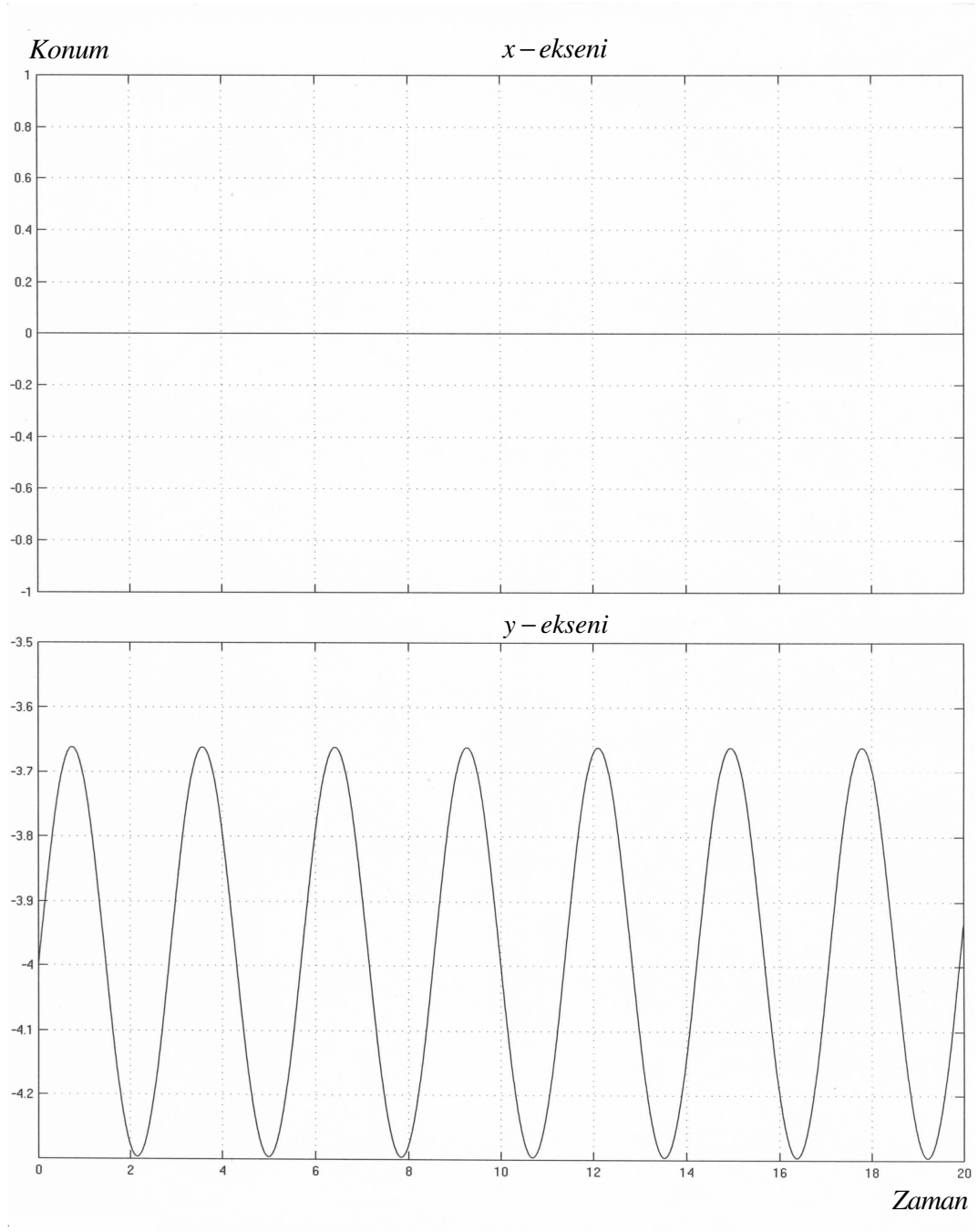
**Şekil 5.9** Konum değiştikten sonra  $y$  eksenini yönünde hız verilmesiyle oluşturulan modelleme grafiği

Bir nceki hareketekine benzer şekilde bu defa  $y$  eksenini yönünde de hız ilave edilmiş ve hareket 10,96541979057925 saniyede sonlanmıştır. Hareketin değişimini  $y$  eksenini yönünde verilen hız ile alakalı olup  $x$  eksenini ve  $y$  ekseninde konumlar artmıştır.



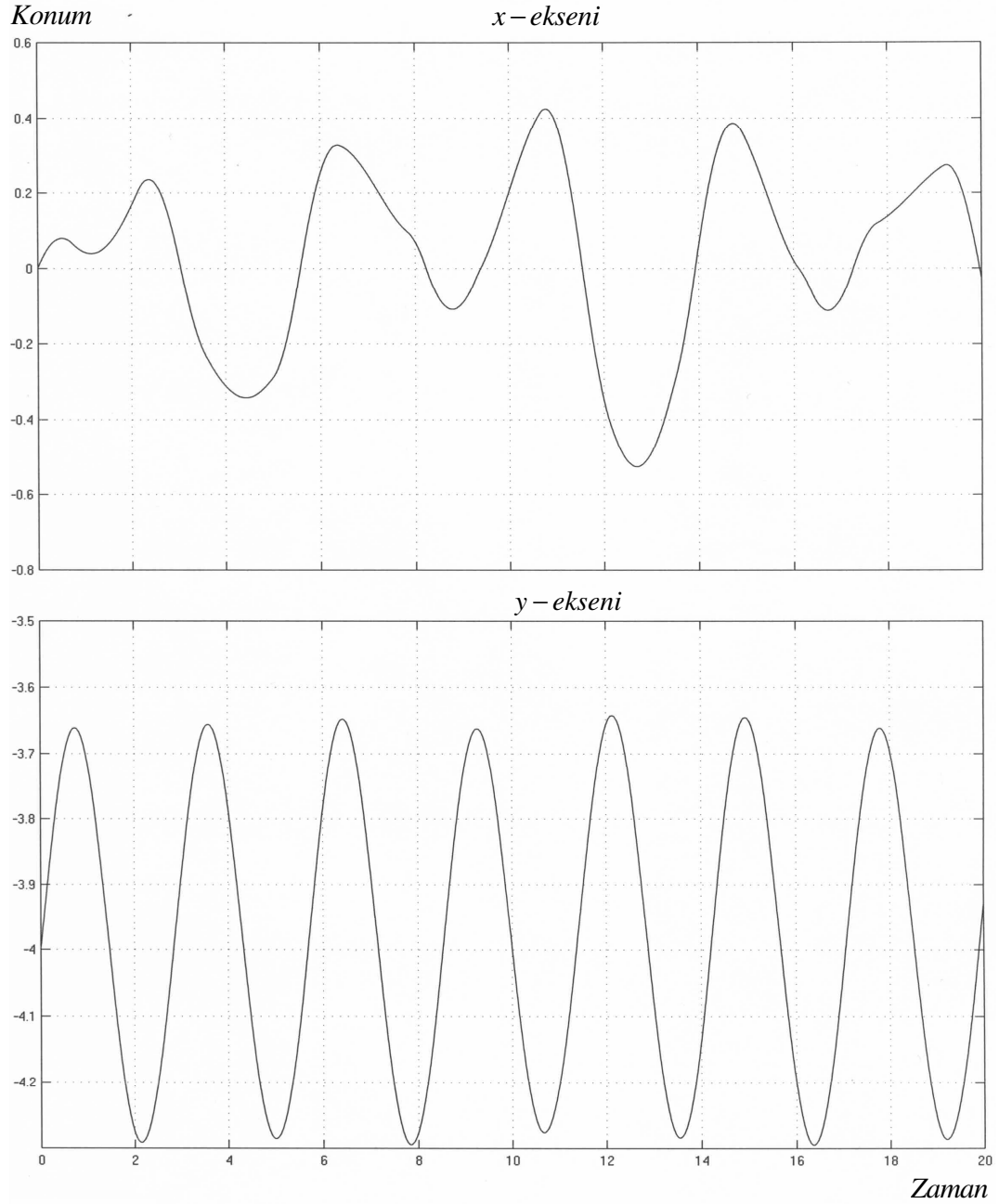
**Şekil 5.10** Yalnız  $y$  ekseninde hız verilerek oluşturulan modelleme grafiği

Konum ve sürtünme katsayısı aynı değerde bırakılıp,  $x$  ekseninde hız verilmeden sadece  $y$  ekseninde boyunca  $0,7\text{ m/s}$  hız veriliyor. Hareketin  $23,02909675895902$  saniyede bittiği ve artan azalan periyotlarının azalarak ilerlediği gözlenmektedir.



**Şekil 5.11** Konum değiştirilerek oluşturulan modelleme grafiği

Bu grafikte cismin konumu  $(0, -4)$  olarak değiştirilip sadece  $y$  hızı veriliyor. Cismin  $x$  eksenini boyunca hızının olmadığı ve  $y$  eksenini boyunca ise sabit olduğu görülmektedir. Yani, cisim sadece  $y$  eksenini boyunca aldığı hız ile sabit bir hareket izler. Sürtünmenin bu durumda harekete bir etkisi yoktur.



**Şekil 5.12**  $x$  ve  $y$  ekseninde hız verilerek oluşturulan modelleme grafiği

Benzer şekilde;  $x$  ekseninde de hız verildiğinde rigid cismin hareketi sabit bir şekilde ilerler. Cisim bu konumda sabit hareket yapmaktadır.

Bu modelimizde, Radians dairesel halkası içindeki rigid bir cismin hareketinin farklı konumlarda nasıl değiştiği incelendi. Öncelikle (0,4) konumunda harekete başlayan ve sürtünme katsayısı sıfır olan bir ortamda rigid cismin hareketinin grafiği bulundu. Daha sonra bu cisim için küçük bir sayı değerinde sürtünme katsayısı verildi ve cismin hareketi incelendi. Rigid cismin konumu model 2.4'de ki konuma getirildiğinde ve sadece Coulomb sürtünmesi cisme uygulandığında cismin hareketi incelendi.

(4,0) konumunda, Model 2.4'de sürtünmesiz ortamda cismin hareketi sonlanmadığı ve artan azalan hızlarda harekete devam ettiği ve bir noktaya geldiğinde maksimum hıza ulaştığı görüldü.  $x$  eksenini yönünde ve  $y$  eksenini yönünde hız verildiğinde hareketin farklılıkları ortaya kondu. Model 5.1'de ise Coulomb sürtünmesinin hareketi nasıl etkilediği gösterildi. Yapılan model ile ortaya çıkan en belirgin fark, aynı hareketi yapan aynı konumdan başlayan aynı cisimlerin, sürtünmesiz ortamda hareketlerinin sonlandığı, ancak sürtünmeli ortamda hareketin belli bir zaman devam ettiği bulundu.

## 5.2. Örnek 4.5.2'nin MATLAB-SIMULINK Modeli

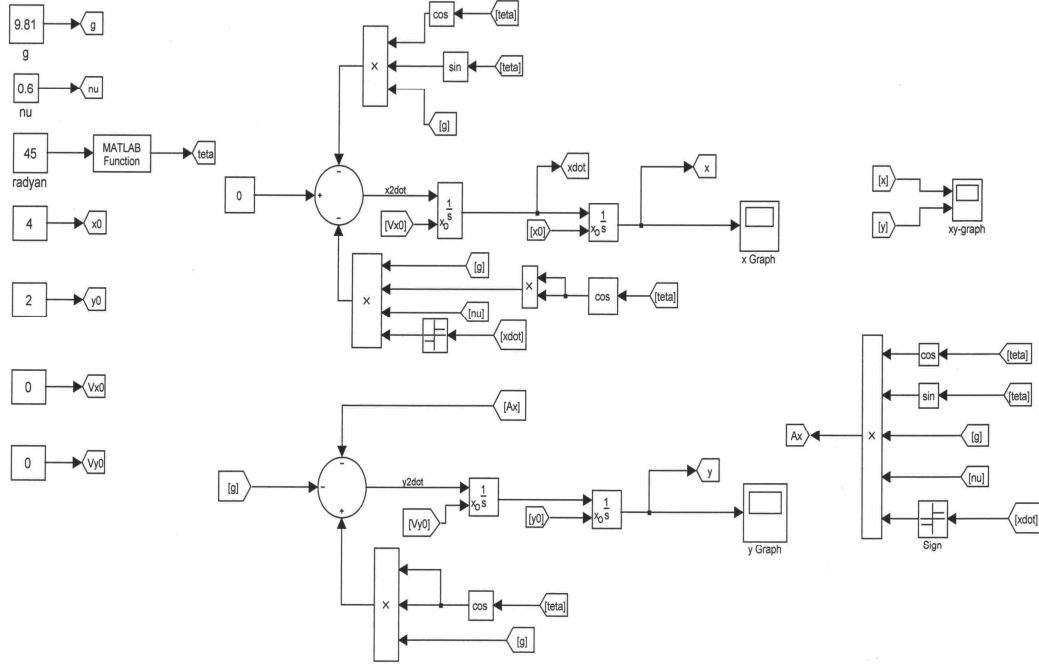
Yukarıda hareket denklemini çıkarılan örnek 4.5.2'i, MATLAB-SIMULINK programını kullanarak modelleyelim. Örnek 4.5.2 de hareket denklemini,

$$m \begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -mg \end{bmatrix} + mg \begin{bmatrix} -\sin \theta \cos \theta \\ \cos^2 \theta \end{bmatrix} - \mu mg \begin{bmatrix} \cos^2 \theta \\ \sin \theta \cos \theta \end{bmatrix} \text{sgn}(\dot{x})$$

şeklindeydi.

MATLAB' da daha önceki örneğe benzer şekilde modelleme aşağıdaki gibi oluşturulur. Önce sabit değerler alınır ve arkasından denklem yazılıp modelleme yapılırsa,





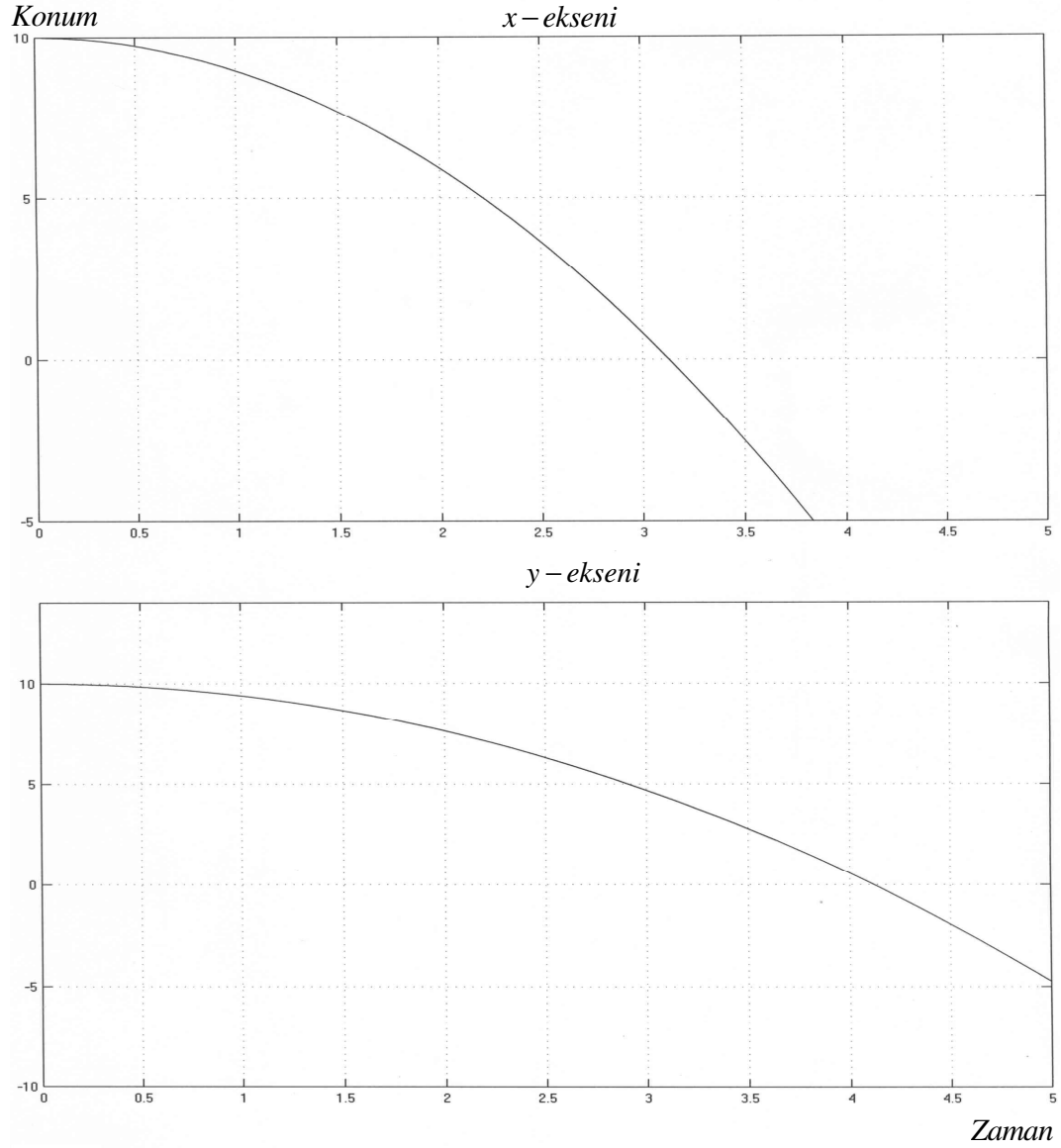
**Şekil 5.13** Örnek 4.5.2'nin MATLAB-SIMULINK modeli

modelini elde ederiz. Aşağıdaki tabloda çeşitli değerler verilerek program çalıştırılmış, hareketin nasıl gerçekleştiği ve harekete  $\theta$  değeri ve  $\mu$  sürtünme katsayısının etkisi incelenmiştir.  $\mu$  sürtünme katsayısı arttırıldığında hareketin gerçekleşmekte zorlandığı gözlenmektedir. Ancak açı değeri arttığında hareketin daha hızlı olduğu gözlenmektedir.

**Tablo 5.2** Eğim açısı  $\theta$  olan Coulomb sürtünmesi ile bir eğik düzlem üzerinde hareket eden  $m$  kütleli bir cismin Lagrange hareket denkleminin modellenmesindeki veriler.

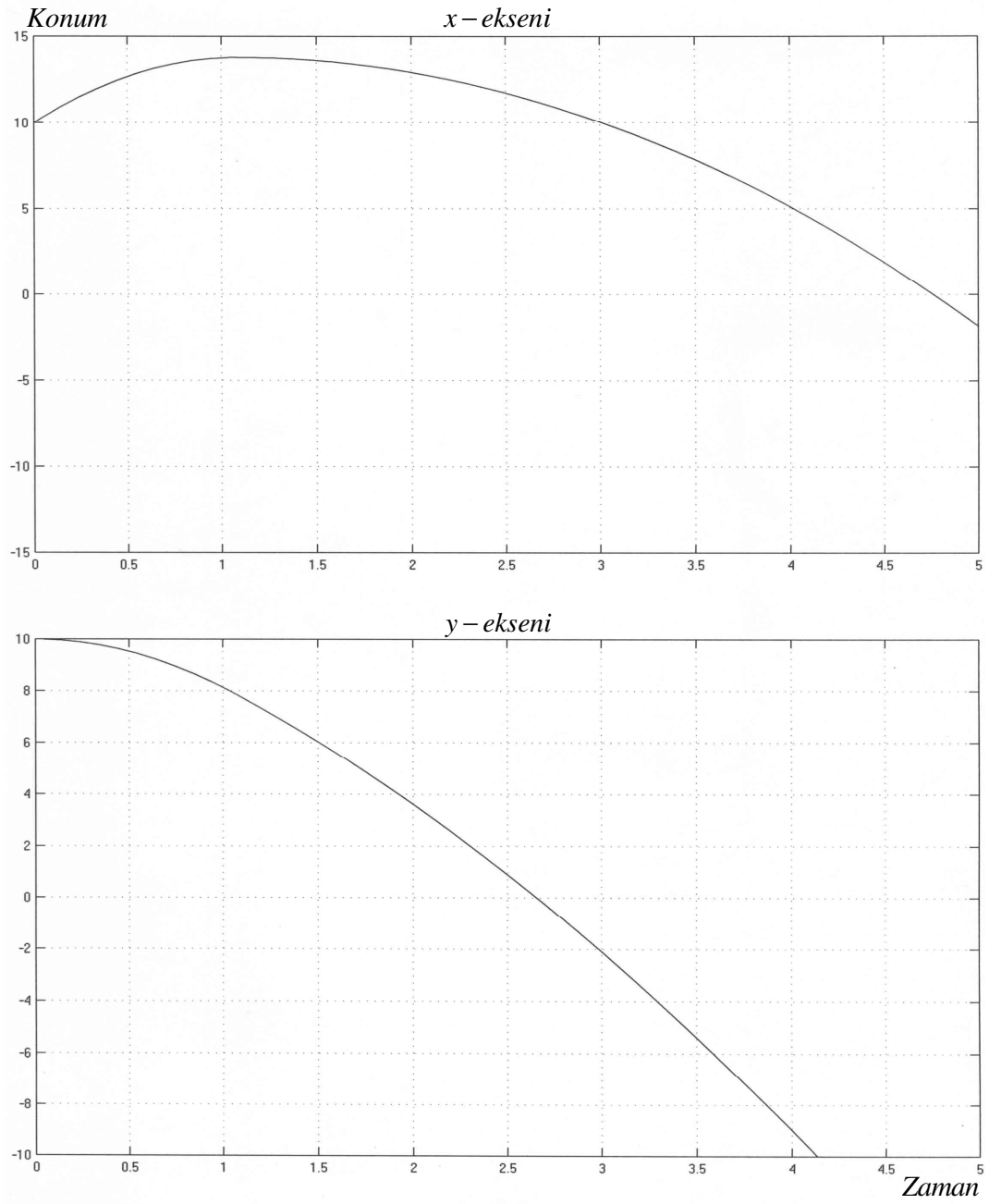
Şekil	$g$	$\theta$	$\mu$	Konum		Hız (m/sn)	
				$x_0$	$y_0$	$V_x$	$V_y$
5.14	9.81	30	0.3	10	10	0	0
5.15		30	0.3	10	10	7	0
5.16		30	0.3	10	10	7	3
5.17		30	0.577	10	10	7	3
5.18		45	0.577	10	10	7	3

Aşağıda, tablo 5.2'deki değerler ile oluşmuş hareket denklemlerinin grafikleri verilmiştir.



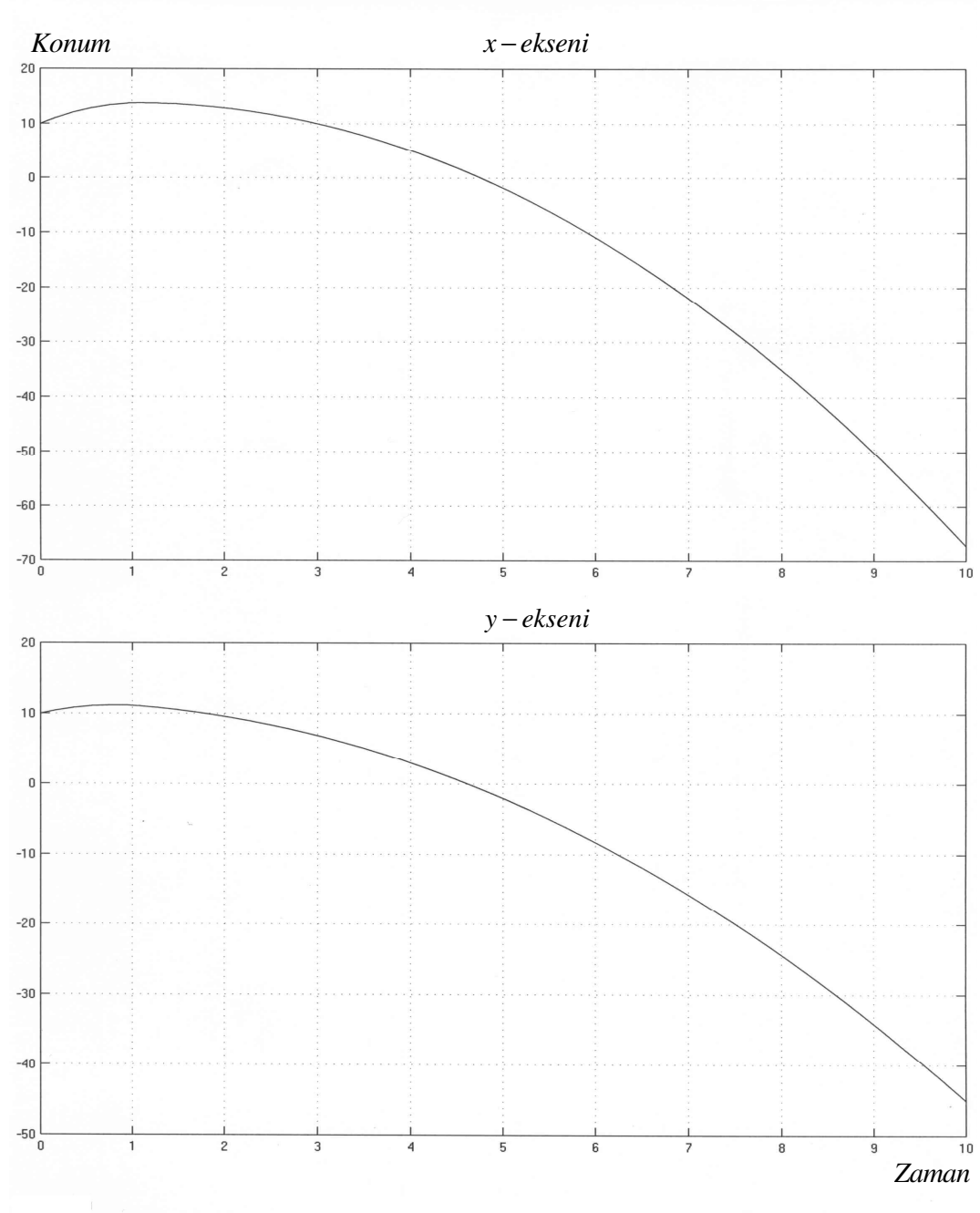
**Şekil 5.14** İlk hızı olmayan eğim açısı  $30^\circ$  olan modelleme grafiği

İlk hız verilmeden ve sürtünme katsayısı 0,3 seçilerek oluşturulan modelde hem  $x$  eksenine yönünde, hem de  $y$  eksenine boyunca hareketin azalan bir grafik çizdiği bulundu. Eğik düzlemin yatayla yaptığı açı  $30^\circ$  olarak verilmiştir. Bu açı değeri ve konum model 2.6'daki modelimiz ile aynıdır. İki model arasındaki fark; ilk modelimizde  $x$  eksenine yönünde artan,  $y$  eksenine boyunca azalan olmasına rağmen, bu modelde iki yönde de azalan bir hareket yapmaktadır. Coulomb sürtünmesinin harekete olan etkisi böylelikle daha kesin veriler ile bulunmuş olur.



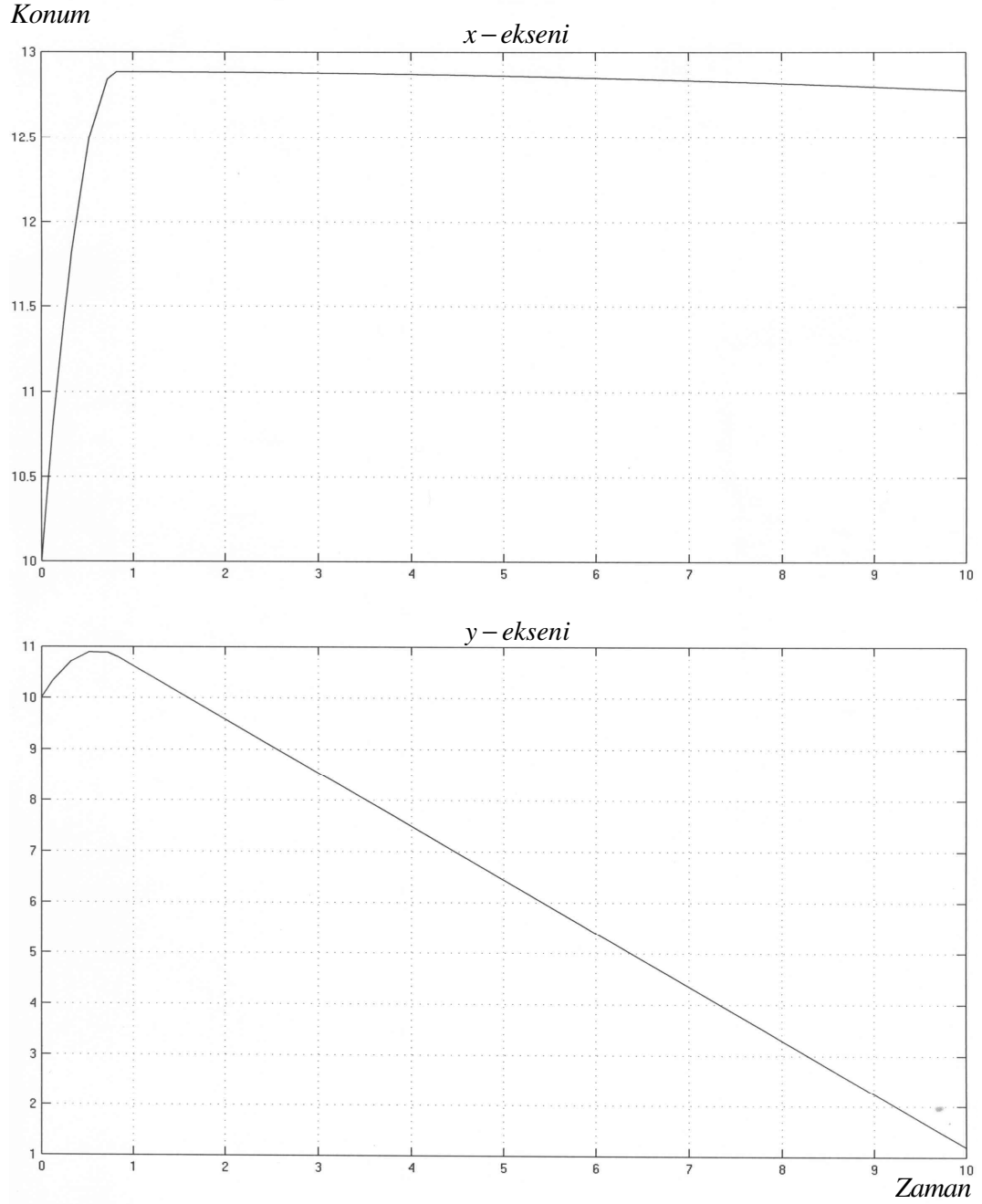
**Şekil 5.15** Yalnız  $x$  ekseninde hız verilerek oluşturulan modelleme grafiği

$x$  ekseninde hız verildiğinde,  $x$  ekseninde hız bir miktar artmış ve sonra tekrar azalmaya devam etmiştir. Model 2.6'da benzer bir hareket yapan cisim  $y$  ekseninde boyunca konumu 490'a kadar çıkarken bu modelimizde coulomb sürtünme katsayısının etkisiyle  $y$  ekseninde boyunca azalan bir grafik oluşmuş ve konum 4. saniyede  $-10$ 'a kadar düşmüştür.



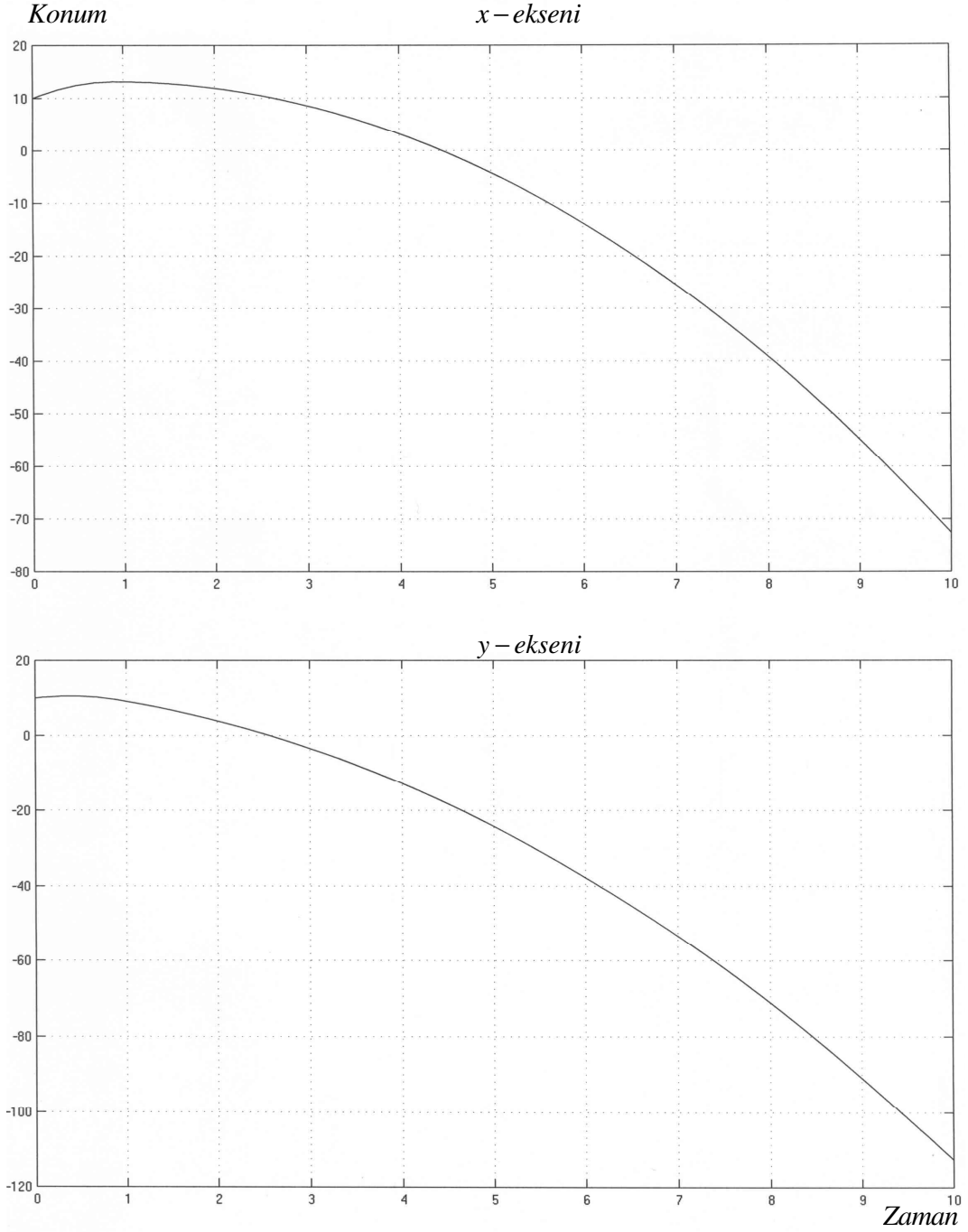
**Şekil 5.16**  $x$  ve  $y$  ekseninde hız verilerek oluşturulan modelleme grafiği

$y$  ekseninde de hız verildiğinde iki yöne doğru gerçekleşen hız önce artmış ve sonra azalmıştır. Model 2.6'da ki modelimize benzer şekilde bir hareket yapan cismin sadece hızı, sürtünmeden dolayı model 5.2'de daha yavaş olmaktadır.



**Şekil 5.17** Sürtünme katsayısı değiştirilerek oluşturulan modelleme grafiği

Bu modelde, sürtünme katsayısı üzerinde çalışılmış ve sürtünme katsayısı yapılan denemelerden sonra 0.577 değerinden küçük olana kadar hareket gerçekleşmiş ancak bu değer 0.578 olduğunda hareket gerçekleşmemiştir.



**Şekil 5.18** Eğim açısı değiştirilerek oluşturulan modelleme grafiği

Bu model de ise eğik düzlemin yatayla yaptığı açı  $45^{\circ}$ 'e çıkartılmış ve sürtünme katsayısı 0,577 seçilmiştir. Cisim,  $x$  eksenini yönünde ve  $y$  eksenini yönünde önce artan sonra azalan bir hareket yapmıştır.

## 6. SONUÇ

Lagrange dinamiği, 200 yıl önceki başlangıcından beri D'Alembert prensibinin temeline dayanmıştır. Bu prensip bütün kısıtlayıcılar ideal olduğu sınırlı varsayımı ile uygulamalı yer değiştirme altında kısıtlayıcı kuvvetler tarafından yapılan tüm işlerin sıfır olduğunu söylemiştir. Sık sık uygulanabilir olmasına rağmen deneyler Coulomb kayma sürtünmesinin önemli olduğu durumlar gibi birçok pratik durumda bu varsayımın geçersiz olduğunu göstermiştir.

Bu araştırma, Lagrange mekaniğini ideal olmayan holonomik ve non-holonomik kısıtlayıcıları hesaba katan açık hareket denklemini verir. Burada elde edilen açık hareket denklemi kısıtlayıcıların ideal olduğu özel durumlar olarak kabul eden D'Alembert'in prensiplerini içeren daha genel bir prensiptir. Bu yeni ilkedeki kısıtlayıcıların ideal olduğu özel durumlardaki *En Az Kısıtlayıcı Gauss Prensibine* indirgenen analitik dinamiğin temel minimum prensiplerinden türeyebilir. Sınırlı minimizasyon probleminin çözümü ideal olmayan kısıtlayıcılarla ilgili mekanik sistemin genel açık hareket denklemini verir.

Bu yapılanlar bize şunları gösterdi.

1. Sürtünmesiz ortamda Lagrange hareket denklemi elde edilip, modellenmesi yapıldı. İdeal olmayan kısıtlayıcılar, aynı örneklere ilave edildi ve hareket denklemleri tekrar bulundu.
2. İdeal olmayan kısıtlayıcıları kapsayan mekaniğin temel ilkeleri ile bütün kısıtlayıcılar ideal olduğunda D'Alembert ilkelerine indirgendiği görüldü.
3. Lagrange dinamiği, sınırlı kuadratik minimizasyon problemi olarak yeniden inşa edildi.
4. Bu kuadratik minimizasyon problemini çözerek, ideal olmayan holonomik ve non-holonomik kısıtlayıcılarla ilgili olan mekanik sistemle bağlantılı genel açık hareket denklemi elde edildi. Hareket denklemleri MATLAB-SIMULINK programı ile modellendi.

5. Kısıtlayıcılar yüzünden sistemde tatbik edilen toplam kısıtlayıcı kuvvetin iki ek katkısının oluşur. İlk katkı  $Q_i^c$  ideal oldukları varsayılan kısıtlayıcılardan doğan; ikinci katkısı ise  $Q_{ni}^c$  kısıtlayıcıların ideal olmayan özelliğinden gelen durumdur. Belli bir mekanik sistem için  $Q_{ni}^c$ , mekanikçi tarafından tanımlanması gereken  $C(q, \dot{q}, t)$  fonksiyon vektörüne bağlıdır.

6. Anlık zamanda  $C$  bilindiğinde genel ideal olmayan kısıtlayıcılar altında ivmelerin tek olarak belirlendiği gösterildi.

7. İdeal olmayan holonomik veya non-holonomik kısıtlayıcılarla ilgili sisteme bağlı hareket denklemleri sınırsız sistemi tanımlamak için kullanılan aynı koordinat sisteminde elde edilir. Bu, sınırlı ve sınırsız mekanik sistemin hareket denklemleri arasındaki direkt kıyaslamayı sağlar. Böylece ideal olsun olmasın ek kısıtlayıcıların sınırsız sistemdeki hareket denklemi üzerindeki etkilerini basit ve açıkça gösterir.

8. Elde edilen modellerin sürtünmeli ve sürtünmesiz hareket denklemleri arasındaki fark ortaya kondu. Sürtünme katsayısının artışı veya azalışı, hareketin sonlanması veya başlaması yönündeki etkisi gösterildi.

9. Yapılan modellemelerle hareketin seyri, kesin değerler ile bulundu. Bir hareketin hangi değer ile harekete başlayacağı veya hareketin bitişi, modellemeler ile en doğru şekilde bulunmuştur. Bir cismin hareketinde sürtünme katsayısının alacağı değer, ilk hızının alacağı değer ve hareket için gerekli olan diğer değerlerin ne olması gerektiğini, bu değerler ne olduğunda hareketin nasıl değişeceği gösterildi.



## KAYNAKLAR

- Civelek, Ş., (1996) The Lifts of Lagrange and Hamilton Equations to the Extended Vector Bundles, *Mathematical & Computational Applications*, 1: 21-28
- Graybill, F., (1983) Matrices and Applications To Statistics, 2nd Ed., *Wadsworth Publ. Co.*, Belmont, 461p
- Penrose, R., (1955) A Generalized Inverse for Matrices, *Proc. Cambridge Phil. Soc.*, 51:406-413
- Peters R. and Pritchett T., (1997) The Not So Simple Harmonic Oscillator, *Amer. J. Phys.* 65:1067-1073
- Popp K., (2000) Non-Smooth Mechanical Systems, *J. Appl. Maths.*, 5:765-772
- Rızaoğlu, E. ve Sünel, N., (2002) Klasik Mekanik, *Seçkin Yayıncılık*, Ankara, 570s
- Udwadia, F. E. and Kalaba, R. E., (1992) A New Perspective On Constrained Motion, *Proc. Roy. Soc.*, 439:407-410
- Udwadia, F. E. and Kalaba, R. E., (1996) Analytical Dynamics: A New Approach, *Cambridge University Press*, New York, 272p
- Udwadia, F. E., (2000) Fundamental Principles of Lagrangian Dynamics: Mechanical Systems with Non-ideal, Holonomic and Nonholonomic Constraints, *J. Maths. Analysis and Appl.*, 251:341-345
- Udwadia, F. E. and Kalaba, R. E., (2001) Analytical Dynamics Constraint Forces That Do Work in Virtual Displacements, *Appl. Maths and Computation*, 121: 211-217
- Udwadia, F. E. and Kalaba, R. E., (2004) Mechanical Systems With Nonideal Constraints: Explicit Equations Without the Use of Generalized Inverses, *Journal of Applied Mechanics*, 71:615-621
- Udwadia, F. E., (2005) New General Principle of Mechanics and Its Application to General Nonideal Nonholonomic Systems, *Journal of Engineering Mechanics*, 131:444-451

## ÖZGEÇMİŞ

20 Mayıs 1976 tarihinde Ankara'da doğdu. İlkokul ve ortaokul'u Balıkesir'de tamamlayıp memleketi olan Denizli'de lise öğrenimini tamamladı. 1993 yılında Muğla Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik bölümünü kazandı ve 1998 yılında mezun oldu. 1999 yılında M.E.B. tarafından ilk görev yeri olan Çankırı iline öğretmen olarak atandı. 2004 yılında Pamukkale Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Bölümü yüksek lisans programını kazandı. 2006 yılında evlendi. Halen Denizli ilinde M.E.B.'na bağlı bir ilköğretim okulunda matematik öğretmeni olarak görev yapmaktadır.