NORMLU UZAYLARDA LİNEER OPERATÖRLERİN SPEKTRAL TEORİSİ ÜZERİNE

Pamukkale Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Yüksek Lisans Tezi
Matematik Anabilim Dalı

Pembe (BARIM) BAŞEL

Danışman: Prof. Dr. M. Ali SARIGÖL

Eylül 2008
DENİZLİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ ONAY FORMU

Pembe (BARIM) BAŞEL tarafından Prof. Dr. Mehmet Ali SARIGÖL yönetiminde hazırlanan "Normlu Uzaylarda Lineer Operatörlerin Spektral Teorisi Üzerine" başlıklı tez tarafımızdan okunmuş, kapsamı ve niteliği açısından bir Yüksek Lisans Tezi olarak kabul edilmiştir.

Prof. Dr. Mehmet Ali SARIGÖL
Jüri Başkanı (Danışman)

Prof. Dr. Sadulla JAFAROV
Jüri Üyesi

Doç. Dr. Muzaffer ADAK
Jüri Üyesi

Pamukkale Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun …./…./2008 tarih ve …….. sayılı kararıyla onaylanmıştır.

Prof. Dr. Mehmet Ali SARIGÖL
Müdür

Bu tezin tasarımı, hazırlanması, yürütülmesi, araştırmalarının yapılması ve bu bulguların analizlerinde bilimsel etiğe ve akademik kurallara özenle riayet edildiğini; bu çalışmanın doğrudan birincil ürünü olmayan bulguların, verilerin ve materyallerin bilimsel etiğe uygun olarak kaynak gösterildiğini ve alıntı yapılan çalışmalara atfedildiğini beyan ederim.

İmza :

Öğrenci Adı Soyadı: Pembe (BARIM) BAŞEL

TEŞEKKÜR

Yüksek lisans öğrenimim ve tez çalışmalarım boyunca gösterdiği her türlü destek ve yardımdan dolayı çok değerli sayın hocam Prof. Dr. Mehmet Ali SARIGÖL'e ve Matematik Bölümündeki tüm hocalarıma en içten dileklerimle teşekkür ederim.

Ayrıca bu çalışmanın yapılması esnasında bana destek olmaya çalışan eşim Reşat BAŞEL'e komik sorunlarımda yardımcı olan arkadaşlarım Özkan SANDIKÇI ve Gülseli (ERMEZ) BURAK'a ve özellikle de yanımda olan annem Hafize BARIM ve babam Osman BARIM'a teşekkür ederim.

ÖZET

NORMLU UZAYLARDA LİNEER OPERATÖRLERİN SPEKTRAL TEORİSİ ÜZERİNE

(BARIM) BAŞEL, Pembe
Yüksek Lisans Tezi, Matematik ABD
Tez Yöneticisi: Prof. Dr. M. Ali SARIGÖL

Eylül 2008, 58 Sayfa

Bu çalışma dört bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölümde, bu çalışmada kullanılacak olan temel tanım ve teoremler verilmiştir.

İkinci bölümde, normlu uzaylar üzerinde tanımlanan sınırlı lineer operatörlerinin spektral teorisine bir giriş verilerek spektral ve resolvent kavramları ayrıntılı olarak incelenmiştir.

Üçüncü bölümde ise öncelikle sıfır dizi uzayında Cesaro operatörünün sonrasında ise yakınsak dizi uzayında Ağırlıklı Ortalama operatörünün spektrumları incelenmiş ve çeşitli uzaylarda bu iki operatörün spektrumları üzerinde durulmuştur.

Son olarak dördüncü bölümde de sıfır dizi uzayında Rhaly operatörünün spektrumu ve ince spektrumu incelenmiştir.

Anahtar Kelimeler: Spektral Teori, Spektrum Kümesi, Resolvent Kümesi, Resolvent Operatörü, İnce Spektrum, Cesaro Operatörü, Ağırlıklı Ortalama Operatörü, Rhaly Operatörü

Prof. Dr. Mehmet Ali SARIGÖL
Prof. Dr. Sadulla JAFAROV
Doç. Dr. Muzaffer ADAK

ABSTRACT

ABOUT SPECTRAL THEORY OF LINEAR OPERATORS IN NORMED SPACES

(BARIM) BAŞEL, Pembe
M. Sc. Thesis in Mathematics
Supervisor: Prof. Dr. M. Ali SARIGÖL

September 2008, 58 Pages

This study consists of four chapters.

In the first chapter the definitions and the theorems are given that used in other chapters.

In the second chapter an entry to spectral theory of bounded linear operators in normed spaces are given and the concept of spectrum and resolvent are detailed.

In the third chapter firstly the spectrum of Cesaro operator in null sequences space and then the spectrum of Weighted mean operators in convergent sequences space are considered and spectrums of these operators are examined in various spaces.

Finally in the fourth chapter spectrum and fine spectrum of Rhaly operators are considered in null sequences spaces.

Key Words: Spectral Theory, Spectrum Set, Resolvent Set, Resolvent Operator, Fine Spectra, Cesaro Operators, Weighted Mean Operators, Rhaly Operators

Prof. Dr. Mehmet Ali SARIGÖL
Prof. Dr. Sadulla JAFAROV
Assoc. Prof. Dr. Muzaffer ADAK

İÇİNDEKİLER

TABLOLAR DİZİNİ

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

$\mathbb{C}$	:	Kompleks sayılar kümesi
c_0	:	sıfıra yakınsayan dizilerin uzayı
c	:	yakınsak diziler uzayı
ℓ_∞	:	sınırlı diziler uzayı
ℓ_p	:	$1 \leq p < \infty$ olmak üzere p. kuvvetleri mutlak yakınsak seri oluşturan dizilerin uzayı
ℓ_1	:	mutlak yakınsak seri oluşturan dizilerin uzayı
bv	:	sınırlı salınımlı diziler uzayı
bv_0	:	sınırlı salınımlı ve sıfıra yakınsayan diziler uzayı
bs	:	sınırlı seri oluşturan diziler uzayı
$B(X,Y)$	:	X normlu uzayından Y normlu uzayına tanımlı bütün sınırlı lineer operatörlerin kümesi
$B(X)$	:	X normlu uzayından yine kendi içine tanımlı bütün sınırlı lineer operatörlerin kümesi
C_1	:	Cesaro operatörü
R_a	:	Rhaly operatörü
X^*	:	X normlu uzayının sürekli duali
T^*	:	T operatörünün adjointi
$Çek(T)$	:	T operatörünün çekirdeği
$R(T)$	:	T operatörünün görüntü uzayı
$\overline{R(T)}$	:	$R(T)$ kümesinin kapanışı
$\sigma(T)$	:	T operatörünün spektrum kümesi
$\sigma_p(T)$	:	T operatörünün nokta spektrum kümesi
$\sigma_c(T)$	:	T operatörünün sürekli spektrum kümesi
$\sigma_r(T)$	:	T operatörünün residual (artık) spektrum kümesi
$\rho(T)$	:	T operatörünün resolvent kümesi
T_λ	:	T operatörünün λ öz değerine karşılık gelen operatörü
R_λ	:	T operatörünün λ öz değerine karşılık gelen resolvent operatörü
$r_\sigma(T)$	:	T operatörünün spektral yarıçapı
$O(1)$	:	sınırlı ifade
$(A_n x)$	:	x dizisinin A matrisi altındaki dönüşüm dizisi
$\lim_A x$	:	$(A_n x)$ dönüşüm dizisinin limiti
E	:	$\left\{\lambda \in C : \left\lvert\lambda - \frac{1}{2}\right\rvert \leq \frac{1}{2}\right\}$
F	:	$\left\{\lambda \in C : \left\lvert\lambda - \frac{1}{2}\right\rvert < \frac{1}{2}\right\}$
G	:	$\overline{\left\{\frac{p_n}{P_n} : n \geq 0\right\}}$

GİRİŞ

Spektral teori modern fonksiyonel analiz ve uygulamalarının ana dallarından biridir. Ana hatlarıyla ters operatörlerin genel özellikleri ve bu operatörlerin orijinal operatörlerle olan ilişkileri ile ilgilenir. Bu alanın gelişmesinde Strum ve Liouville'nin sınır değer problemini araştırmaları ile Fredholm'un ünlü integral denklemlerinin teorisi önemli olmuştur.

Sonsuz boyutlu uzaylar üzerindeki dönüşümlerin spektrumları ve kullanım alanları oldukça ilginçtir. Örneğin fizikte kuantum mekaniğinde, Hamilton dönüşümünün nokta spektrumu sistemin sınır değerindeki enerji seviyelerine karşılık gelir. Yine bir örnek olarak toplanabilme teorisinde, daha önceden analitik yöntemlerle incelenmiş olan Mercerian Teoremlerinin fonksiyonel analiz yöntemleriyle daha kısa ve anlaşılır biçimde yeniden ele alınmasını sağlamıştır.

Bu çalışmada ise önce normlu uzaylar üzerinde tanımlanan $T : X \to X$ sınırlı lineer operatörlerinin spektral teorisine bir giriş verilerek c_0 uzayında Cesaro operatörünün sonrasında ise c uzayında Ağırlıklı Ortalama operatörünün spektrumları ve son olarak da c_0 uzayında Rhaly operatörünün ince spektrumu incelenecektir. Bu operatörlerle dünyada ve ülkemizde yapılan çalışmalara kısaca bakacak olursak şöyledir:

Cesaro operatörünün spektrumu ile ilgili ilk çalışmalar 1965 yılında A.Brown, P.R.Halmos ve A.L.Sheilds'in çalışmalarında ℓ_2 Hilbert uzayında Cesaro operatörünün sınırlılığını gösterip, spektrumunu incelemeleriyle başlamış, 1972 de G.Leibowitz'in ℓ_p uzayındaki çalışmasıyla devam etmiştir. Cesaro operatörünün spektrumu ile ilgili diğer çalışmalardan bazıları ise 1985 de J.B.Reade'nin c_0 uzayında, 1986 da J.I.Okutoyi'nin c, bv, bv_0 uzaylarında, 2003 de A.M.Akhmedov ve F.Başar'ın c_0 *ve* bv uzaylarında yaptıkları çalışmalardır. Cesaro operatörünün ince spektrumu ile ilgili çalışmalardan bazıları ise 1975 de R.B.Wenger'nin c uzayında, 2004 de A.M.Akhmedov ve F.Başar'ın c_0 uzayında yaptıkları çalışmalardır.

Ağırlıklı ortalama operatörünün spektrumu ile ilgili ilk çalışmalar 1977 yılında F.P.Cass ve B.E.Rhoades'in c uzayında ağırlıklı ortalama operatörünün spektrumunu incelemeleriyle başlamış, 1978 de J.M.Cartlidge'nin doktora çalışmasında ℓ_p uzayındaki incelemesiyle devam etmiştir. Ağırlıklı ortalama operatörünün ince spektrumu ile ilgili çalışmalardan biri de B.E.Rhoades'in 1987 de c_0 uzayında yaptığı çalışmadır.

Rhaly operatörünün spektrumu ile ilgili ilk çalışmalar 1987 yılında G.Leibowitz'in c_0, c, ℓ_p uzaylarında Rhaly operatörünün sınırlılığını göstermesiyle başlamış, 1989 da JR.H.C.Rhaly'nin ℓ_2 uzayındaki çalışmasıyla devam etmiştir. Rhaly operatörü ile ilgili sonraki çalışmalar ise 1996 de M.Yıldırım'ın kompakt Rhaly operatörün spektrumunu ve ince spektrumunu incelemesiyle devam etmiştir.

Spektral teoride bu operatörlerden farklı olarak time operatörü ve fark operatörü gibi operatörlerin spektrumları ile ilgili çalışmalar da yapılmış olup ilginç çalışmalardan birinin de 1972 de N.K.Sharma'nın konservatif matrislerin spektrumları ile ilgili çalışması olduğu da söylenebilir.

BÖLÜM 1
TEMEL TANIM VE KAVRAMLAR

Bu bölümde daha sonraki bölümlerde kullanacağımız temel tanım ve teoremleri vereceğiz.

1.1. Temel Tanımlar

Tanım 1.1.1: (Vektör uzayı) L boştan farklı bir küme ve K reel veya kompleks sayılar cismi olsun.

$+ : L \times L \to L \;\; ve \;\; \cdot : K \times L \to L$ fonksiyonları $\forall \; x, y, z \in L \; ve \; \alpha, \beta \in K$ için

$l_1)$ $x + y \in L$ (kapalılık özelliği)

$l_2)$ $x + (y + z) = (x + y) + z$ (birleşme özelliği)

$l_3)$ $x + \theta = \theta + x$ olacak şekilde $\theta \in L$ vardır. (birim eleman)

$l_4)$ $x + (-x) = (-x) + x = \theta$ olacak şekilde $-x \in L$ vardır. (ters eleman)

$l_5)$ $x + y = y + x$ (değişme özelliği)

$l_6)$ $\alpha \cdot x \in L$ (skalerle çarpma işleminde kapalılık)

$l_7)$ $\alpha \cdot (x + y) = \alpha \cdot x + \alpha \cdot y$

$l_8)$ $(\alpha + \beta) \cdot x = \alpha \cdot x + \beta \cdot x$

$l_9)$ $(\alpha\beta) \cdot x = \alpha \cdot (\beta \cdot x)$

$l_{10})$ $1 \in K \; birim \; eleman \; olmak \; üzere \; 1 \cdot x = x$

şartlarını sağlıyorsa L uzayına bir vektör uzayı (lineer uzay) denir.

Tanım 1.1.2: (Alt Vektör Uzayı) L, K cismi üzerinde bir vektör uzay ve M, L uzayının bir alt kümesi olsun. $\forall \alpha \in K \; ve \forall \; x, y \in M$ için

$$x + y \in M \quad ve \quad \alpha x \in M$$

şartları sağlanıyorsa M kümesine L uzayının alt uzayı denir. Bu iki şart $\alpha x + \beta y \in M$ olarak da alınabilir.

Tanım 1.1.3: (Lineer Bağımsızlık) L, K cismi üzerinde bir vektör uzayı ve $S = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$ kümesi de L uzayının sonlu bir alt kümesi olsun. $\alpha_i \in K$ olmak üzere

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i = 0 \Rightarrow i = 1, 2, ..., n \;\; için \;\; \alpha_i = 0$$

önermesi doğru ise K cismi üzerinde $x_1, x_2, ..., x_n$ vektörlerine veya S kümesine lineer bağımsız denir.

Tanım 1.1.4: (Normlu Uzay) Reel veya kompleks K cismi üzerinde tanımlanmış X vektör uzayında $\|\cdot\| : X \to \mathbb{R}$ fonksiyonu

$$n_1)\ \forall x \in X\ ,\ x \neq \theta \ için\ \|x\| > 0\ ,\ \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = \theta$$

$$n_2)\ \forall \lambda \in K\ ,\ \forall x \in X\ için\ \|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$$

$$n_3)\ \forall x, y \in X\ için\ \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$$

şartlarını sağlıyorsa $\|\cdot\|$ fonksiyonuna, X uzayı üzerinde bir norm, X uzayına da normlu uzay denir.

Tanım 1.1.5: (Lineer Operatör) $\wp(T)$ ve $\Re(T)$ aynı cisim üzerindeki vektör uzayları olmak üzere $T : \wp(T) \to \Re(T)$ biçimindeki dönüşüme operatör denir. Bu operatör için $\forall x, y \in \wp(T)$ ve α skaler olmak üzere

$$T(x + y) = Tx + Ty$$
$$T(\alpha x) = \alpha Tx$$

şartları sağlanıyorsa T ye lineer operatör adı verilir. Değer kümesi $\mathbb{R}$ reel sayılar veya $\mathbb{C}$ kompleks sayılar olan operatörlere fonksiyonel denir.

Buna göre T nin çekirdeği $Çek(T)$ ile gösterilirse

$$\wp(T) = \{x \in X : Tx \in Y\}$$

$$\Re(T) = \{y \in Y : y = Tx\ ,\ x \in X\}$$

$$Çek(T) = \{x \in \wp(T) : Tx = \theta\}$$

olur. (Kreyszig 1989, sh 82)

Tanım 1.1.6: (Sınırlı Lineer Operatör) X ve Y iki normlu uzay ve $\wp(T) \subset X$ olmak üzere $T : \wp(T) \to Y$ bir lineer operatör olsun. Eğer $\forall x \in \wp(T)$ için

$$\|Tx\| \leq c\|x\|$$

olacak şekilde bir $c \geq 0$ reel sayısı varsa T operatörüne sınırlı lineer operatör denir. (Soldaki norm Y uzayındaki sağdaki norm ise X uzayındaki normdur.) Burada bu eşitsizliği sağlayan c sayılarının en büyük alt sınırına T nin normu denir. Bu norm

$$\|T\| = \sup_{\substack{x\in\wp(T)\\ x\neq 0}} \frac{\|Tx\|}{\|x\|}$$

eşitliği ile de verilebilir. X den X 'e olan bütün sınırlı lineer dönüşümlerin uzayı $B(X,X)$ veya $B(X)$ ile gösterilir. Bu durumda $B(X)$, $\|T\| = \sup_{x\neq 0} \frac{\|T(x)\|}{\|x\|}$ ile normlu uzay olur. (Kreyszig 1989, sh 91)

Tanım 1.1.7: (Ters Operatör) $T:\wp(T)\to Y$ lineer dönüşümü verilsin. Eğer tanım kümesindeki farklı noktaların T altındaki görüntüleri farklı yani $x_1, x_2 \in \wp(T)$ ve $x_1 \neq x_2 \Rightarrow Tx_1 \neq Tx_2$ ise T 'ye injektif veya 1-1 adı verilir. Bu durumda $Tx_0 = y_0$ eşitliği için her $y_0 \in \Re(T)$ elemanını $x_0 \in \wp(T)$ elemanına dönüştüren $T^{-1}:\Re(T)\to\wp(T)$ dönüşümü mevcuttur ve bu operatöre T nin tersi denir. (Kreyszig 1989, sh 87)

Tanım 1.1.8: (Kapalı Lineer Operatör) $XxY = \{(x,y): x\in X \ ve \ y\in Y\}$,

$$(x_1,y_1)+(x_2,y_2) = (x_1+x_2, y_1+y_2)$$
$$\alpha(x,y) = (\alpha x, \alpha y)$$

işlemlerine göre bir vektör uzayı ve $\|(x,y)\| = \|x\| + \|y\|$ ile normlu uzaydır. $T: X\to Y$ bir lineer operatör olsun. Eğer T operatörünün $G(T) = \{(x,y): x\in X, y = T(x)\}$ grafiği, XxY normlu uzayında kapalı ise T ye kapalı operatör denir. (Kreyszig 1989, sh 292)

Tanım 1.1.9: (Dual Uzay) X normlu uzay olsun. Bu durumda

$$\|f\| = \sup_{\substack{x\in X\\ x\neq 0}} \frac{|f(x)|}{\|x\|} = \sup_{\substack{x\in X\\ \|x\|=1}} |f(x)|$$

normu ile normlanan X üzerindeki tüm sınırlı lineer fonksiyonellerin teşkil ettiği normlu uzay, X uzayının dual uzayı olarak adlandırılır ve X' ile gösterilir. (Kreyszig 1989, sh 119)

Tanım 1.1.10: (Adjoint operatör) X **,** K cismi üzerinde normlu uzay ve X^*, X in sürekli dualini göstermek üzere yani $X^* = B(X,K)$ olmak üzere, her $x\in X$ ve her $f\in X^*$ için

$$T^*: X^* \to X^* \ , \ \left(T^* f\right)x = f\left(T\left(x\right)\right)$$

biçiminde tanımlanan T^* operatörüne T nin adjointi denir. (Kreyszig 1989, sh 232)

Bazı özel uzaylar ve üzerlerinde tanımlanan normlar:

1. $c = \left\{ x = \left(x_k\right) : \lim_k x_k \ mevcut \right\}$ kümesine yakınsak dizilerin uzayı,

2. $c_0 = \left\{ x = \left(x_k\right) : \lim_k x_k = 0 \right\}$ kümesine sıfır dizilerinin uzayı,

3. $\ell_\infty = \left\{ x = \left(x_k\right) : \sup_k \left|x_k\right| < \infty \right\}$ kümesine sınırlı dizilerin uzayı,

4. $\ell_p = \left\{ x = \left(x_k\right) : \sum_k \left|x_k\right|^p < \infty, 1 < p < \infty \right\}$ kümesine p. kuvvetten mutlak yakınsak diziler uzayı,

5. $bv = \left\{ x = \left(x_k\right) : \sum_k \left|x_k - x_{k+1}\right| < \infty \right\}$ kümesine sınırlı salınımlı diziler uzayı denir.

6. $bv_0 = c_0 \cap bv$

Burada $c_0, c \ ve \ \ell_\infty$, $\|x\| = \sup_k |x_k|$ ile birlikte bir normlu uzay ℓ_p ise $\|x\|_p = \left(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p \right)^{\frac{1}{p}}$, $\left(p \geq 1\right)$ ile birlikte bir normlu uzaydır.

1.2. Temel Teoremler

Teorem 1.2.1: X ve Y iki normlu uzay ve $\wp(T) \subset X$ olmak üzere $T : \wp(T) \to Y$ bir lineer operatör olsun. Bu durumda

a) T operatörünün sürekli olması için gerek ve yeter şart sınırlı olmasıdır.

b) Eğer T bir tek noktada sürekli ise süreklidir.

(Kreyszig 1989, sh 97)

Teorem 1.2.2: X, Y normlu uzay ve $\wp\left(T\right) \subset X$ tanım kümesi , $\Re\left(T\right) \subset Y$ değer kümesi olmak üzere $T : \wp\left(T\right) \to \Re\left(T\right)$ lineer operatörü verilmiş olsun. T nin tersinin olması için gerek ve yeter şart çekirdeğinin sadece sıfır vektöründen oluşmasıdır. (Kreyszig 1989, sh 87)

Teorem 1.2.3: (Açık Dönüşüm-Sınırlı Ters) X Banach uzayından Y Banach uzayı üzerine tanımlanan sınırlı lineer T operatörü bir açık dönüşümdür. Eğer T bijektif (1-1 ve örten) ise T^{-1} sürekli dolayısıyla sınırlıdır. (Kreyszig 1989, sh 286)

Teorem 1.2.4: (Kapalı Lineer Operatör) X ve Y normlu uzaylar ve $\wp(T) \subset X$ olmak üzere $T : \wp(T) \to Y$ bir lineer operatör olsun. Bu durumda T operatörünün kapalı olması için gerek ve yeter şart $x_n \in \wp(T)$ için $x_n \to x$ ve $Tx_n \to y$ olduğunda $x \in \wp(T)$ ve $Tx = y$ olmasıdır. (Kreyszig 1989, sh 293)

Lemma 1.2.5: (Kapalı Operatör) X ve Y normlu uzaylar ve $\wp(T) \subset X$ tanım kümesi ile birlikte $T : \wp(T) \to Y$ sınırlı bir lineer operatör olsun. Bu durumda

a) $\wp(T)$ kümesi X uzayının kapalı bir alt kümesi ise T kapalıdır.

b) T kapalı ve Y tam ise $\wp(T)$ kümesi X uzayının kapalı bir alt kümesidir.

(Kreyszig 1989, sh 295)

Teorem 1.2.6: Eğer Y bir Banach uzayı ise $B(X,Y)$ bir Banach uzayıdır. (Kreyszig 1989, sh 118)

Teorem 1.2.7: X sonlu boyutlu bir normlu uzay ve M , X uzayının bir alt kümesi olsun. M kümesinin kompakt olması için gerek ve yeter şart M kümesinin kapalı ve sınırlı olmasıdır. (Kreyszig 1989, sh77)

Lemma 1.2.8: (Çarpımın Tersi): X, Y, ve Z vektör uzayları olmak üzere $T : X \to Y$ ve $S : Y \to Z$ operatörleri bijektif (1-1 ve örten) lineer operatörler olacak şekilde alalım. Bu durumda ST çarpımının tersi $(ST)^{-1} : Z \to X$ mevcuttur ve $(ST)^{-1} = T^{-1}S^{-1}$ dir. (Kreyszig 1989, sh 89)

Teorem 1.2.9: X normlu uzay ve $T \in B(X)$ olsun. Bu durumda $T^* \in B(X^*)$ *ve* $\|T\| = \|T^*\|$ dır. (Brown ve Page 1970, sh 239)

Teorem 1.2.10: T operatörünün yoğun bir değer kümesinin olması için gerek ve yeter şart T^* operatörünün 1-1 olmasıdır. (Goldberg 1966, II.3.7. Theorem)

Teorem 1.2.11: $\Re\left(T^*\right) = X^*$ olması için gerek ve yeter şart T operatörünün sınırlı bir terse sahip olmasıdır. (Goldberg 1966, II.3.11. Theorem)

1.3. Matris Dönüşümleri

Tanım 1.3.1: $A = (a_{nk})$ reel veya kompleks terimli bir sonsuz matris ve $x = (x_k)$ herhangi bir dizi olsun. Eğer $\forall n \in \mathbb{N}$ için

$$(Ax)_n = \sum_{k=0}^{\infty} a_{nk} x_k$$

serileri yakınsak ise $Ax = ((Ax)_n)$ dizisine x dizisinin A matrisi ile elde edilen dönüşüm dizisi denir.

Eğer $\forall x \in X$ için Ax dönüşüm dizisi mevcut ve Y uzayına ait ise A matrisi X uzayından Y dizi uzayına bir matris dönüşümü tanımlar denir.

X dizi uzayını Y dizi uzayına dönüştüren bütün matrislerin sınıfı (X, Y) ile gösterilir ve A matrisi X uzayından Y uzayının içine ise $A \in (X, Y)$ yazılır. Toplamı yada limiti koruyan matrislerin sınıfı ise $(X, Y; p)$ ile gösterilir. Özel olarak $A \in (c, c)$ ise A matrisine konservatif matris ve $A \in (c, c; p)$ ise A matrisine regüler matris denir.

Teorem 1.3.2: $A \in B(c_0)$ olması için gerek ve yeter şart

i) $\|A\| = \sup_n \sum_k |a_{nk}| < \infty$

ii) $\forall k$ için $\lim_n a_{nk} = 0$

şartlarının sağlanmasıdır. (Maddox 1970, sh 163)

Teorem 1.3.3: (Silverman -Teoplitz) $A = (a_{nk})$ matrisinin regüler olması için gerek ve yeter şart

i) $\|A\| = \sup_n \sum_k |a_{nk}| < \infty$

ii) $\forall n$ için $\lim\limits_{n} a_{nk} = 0$

iii) $\lim\limits_{n} \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_{nk} = 1$

şartlarının sağlanmasıdır. (Maddox 1970, sh165)

Teorem 1.3.4: $A \in B(c)$ olsun. Eğer A matrisi $\|B\| = \sup\limits_{k} \sum\limits_{n} |b_{nk}| < \infty$ şartını gerçekleyen bir $A^{-1} = B$ tersine sahip ise $A^{-1} \in B(c)$ dir. (Wilansky 1984, sh 92)

Teorem 1.3.5: $A \in B(\ell_\infty)$ olması için gerek ve yeter şart

$$\|A\| = \sup_{n} \sum_{k} |a_{nk}| < \infty$$

şartının sağlanmasıdır. (Maddox 1970, sh 174)

Teorem 1.3.6: $A \in B(\ell_1)$ olması için gerek ve yeter şart

$$\|A\| = \sup_{k} \sum_{n} |a_{nk}| < \infty$$

şartının sağlanmasıdır. (Maddox 1970, sh 167)

Teorem 1.3.7: Eğer $A \in B(\ell_\infty) \cap B(\ell_1)$ ise $A \in B(\ell_p)$, $(1 < p < \infty)$ dır. (Maddox 1970, sh 174)

Teorem 1.3.8: (Riesz Thorin): $A \in B(\ell_\infty)$ olsun. Eğer $A \in B(\ell_p)$, $(1 \leq p < \infty)$ ve $q > p$ ise $A \in B(\ell_q)$ dur. (Cartlidge 1978)

Teorem 1.3.9: (Abel Dini Teoremi) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} d_n$ pozitif terimli ıraksak bir seri olsun. $D_n = d_0 + d_1 + ... + d_n$ olmak üzere $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{d_n}{D_n^{\alpha}}$ serisi; $\alpha > 1$ için yakınsak, $\alpha \leq 1$ için ıraksaktır. (Knopp 1971, sh 290)

1.4.Bazı Özel Operatörler

Tanım 1.4.1 (Cesaro operatörü) : Bir $x=(x_n)$ dizisini onun aritmetik ortalaması olan $y=(y_n)=\left(\dfrac{x_0+x_1+...+x_n}{n+1}\right)$ dizisine dönüştüren dönüşüme Cesaro operatörü denir ve C_1 ile gösterilir. Bu operatörün matris gösterimi

$$C_1=(c_{nk})=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & ... \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & ... \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 & 0 & 0 & ... \\ 1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4 & 0 & ... \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

veya

$$c_{nk}=\begin{cases} \dfrac{1}{n+1} & ,0\le k\le n \\ 0 & ,k>n \end{cases}$$

ifadesi ile verilir.

Okutoyi 1986 da yaptığı doktora çalışmasında da

a) c_0^*, ℓ_p^* *ve* bv_0^* uzaylarına sırasıyla izometrik olarak izomorf olan ℓ_1, ℓ_q *ve* bs uzayları üzerinde göz önüne alınan C_1^* adjoint operatörünün matris gösteriminin

$$C_1^*=(c_{nk}^*)=\begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/3 & 1/4 & 1/5 & ... \\ 0 & 1/2 & 1/3 & 1/4 & 1/5 & ... \\ 0 & 0 & 1/3 & 1/4 & 1/5 & ... \\ 0 & 0 & 0 & 1/4 & 1/5 & ... \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

veya kısaca

$$c_{nk}^*=\begin{cases} \dfrac{1}{k+1} & ,0\le n\le k \\ 0 & ,k<n \end{cases}$$

olduğunu göstermiştir.

b) c^* ve bv^* uzaylarına sırasıyla izometrik olarak izomorf olan ℓ_1, ve $C \oplus bs$ uzayları üzerinde göz önüne alınan C_1^* adjoint operatörünün matris gösteriminin ise

$$C_1^* = c_{nk}^* = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 1 & 1/2 & 1/3 & 1/4 & \cdots \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/3 & 1/4 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 1/3 & 1/4 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

veya kısaca

$$c_{nk}^* = \begin{cases} 1 & , n = k = 0 \\ 0 & , n = 0 \ , \ n < k \\ \dfrac{1}{k} & , 1 \le n \le k \\ 0 & , 0 < k < n \end{cases}$$

olduğunu göstermiştir.

Teorem 1.4.2: Cesaro operatörü regülerdir.

Tanım 1.4.3.(Ağırlıklı Ortalama operatörü)

$p_0 > 0$, $n \ge 1$ *için* $p_n \ge 0$ *ve* $P_n = \sum_{k=0}^{n} p_k$ olmak üzere

$$a_{nk} = \begin{cases} \dfrac{p_k}{P_k} & ,0 \le k \le n \\ 0 & ,k > n \end{cases}$$

biçiminde verilen $A = (a_{nk})$ matrisi ile tanımlanan operatöre ağırlıklı ortalama operatörü denir ve bu operatörün matris gösterimi

$$(a_{nk}) = \begin{pmatrix} \frac{p_0}{P_0} & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ \frac{p_0}{P_1} & \frac{p_1}{P_1} & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ \frac{p_0}{P_2} & \frac{p_1}{P_2} & \frac{p_2}{P_2} & 0 & 0 & \cdots \\ \frac{p_0}{P_3} & \frac{p_1}{P_3} & \frac{p_2}{P_3} & \frac{p_3}{P_3} & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

şeklindedir.

Tanım 1.4.4. (Rhaly operatörü) Bir $a=(a_n)$ skaler dizisi için

$$R_a = a_{nk} = \begin{cases} a_n & ,0 \le k < n \\ 0 & ,\ diğer\ \ durumlar \end{cases}$$

biçiminde verilen $R_a=(a_{nk})$ matrisinin tanımladığı operatöre Rhaly operatörü denir ve bu operatörünün matris gösterimi

$$\begin{pmatrix} a_0 & 0 & 0 & 0 & \ldots \\ a_1 & a_1 & 0 & 0 & \ldots \\ a_2 & a_2 & a_2 & 0 & \ldots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

şeklindedir.

Teorem 1.4.5: R_a operatörünün c_0 üzerinde sınırlı bir lineer operatör olması için gerek ve yeter şart $R_a^{\,*}=R_a^{\,t}$ olmasıdır. (Wilansky 1964)

BÖLÜM 2

NORMLU UZAYLARDA LİNEER OPERATÖRLERİN SPEKTRAL TEORİSİ

Bu bölümde temel oluşturması nedeniyle önce sonlu boyutlu uzaylar üzerindeki operatörlerin spektrum ve resolventlerine kısaca değindikten sonra sonsuz boyutlu uzaylardaki operatörlerin spektrum ve resolventleri detaylı olarak incelenecektir.

2.1.Sonlu Boyutlu Normlu Uzaylarda Spektral Teori

X sonlu boyutlu bir normlu uzay ve $T : X \to X$ bir lineer operatör olduğunda X uzayının bazına bağlı olarak T lineer operatörü matrisler ile gösterilebilir.

$A = (\alpha_{jk})$ reel yada kompleks terimli nxn tipinde karesel bir matris ise özdeğer ve özvektörler

(1) $\qquad Ax = \lambda x$

denklemi ile tanımlanırlar.

Tanım 2.1.1: $x \neq 0$ olmak üzere $Ax = \lambda x$ denkleminin bir çözümü varsa bu λ sayısına $A = (\alpha_{jk})$ kare matrisinin <u>*özdeğeri*</u> ve bu özdeğere karşılık gelen x vektörüne ise <u>*özvektörü*</u> denir. (Burada λ, X normlu uzayının tanımlandığı K cisminin elemanıdır.)

λ özdeğerine karşılık gelen özvektörler ile sıfır vektörü, X uzayının bir alt vektör uzayını oluşturur ve bu uzaya λ ya karşılık gelen <u>*özuzayı*</u> denir.

A kare matrisinin tüm öz değerlerinin $\sigma(A)$ kümesi, A matrisinin <u>*spektrum kümesi*</u> ve kompleks düzlemde bu spektrum kümesinin tümleyeni olan $\rho(A) = \mathbb{C} - \sigma(A)$ kümesine ise <u>*resolvent kümesi*</u> denir. Buna göre $A = (\alpha_{jk})$ kare matrisi için

$$\sigma(A) = \{\lambda : Ax = \lambda x, x \neq 0\}$$

$$\rho(A) = \mathbb{C} - \sigma(A)$$

olur. nxn tipindeki A kare matrisi için özdeğer ve özvektörleri bulmak için öncelikle nxn tipindeki I birim matrisi için (1) denklemi

(2) $\qquad (A - \lambda I)x = 0$

şeklinde yazılır. Bu ifade, $x=(\xi_1,...,\xi_n)$ vektörünün bileşenlerini bilinmeyen olarak alan n tane lineer denklemin homojen bir sistemidir. (2) denkleminin $x \neq 0$ biçimde bir çözümünün olması için $\det(A-\lambda I)=0$ olmalıdır. Yani A kare matrisinin karakteristik denklemi $\det(A-\lambda I)$ için

$$\det(A-\lambda I)=\begin{vmatrix} \alpha_{11}-\lambda & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22}-\lambda & \alpha_{23} & \dots & \alpha_{2n} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33}-\lambda & \dots & \alpha_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \alpha_{n3} & \dots & \alpha_{nn}-\lambda \end{vmatrix}=0 \qquad (3)$$

olmalıdır. (Çünkü $\det(A-\lambda I)\neq 0$ olduğunda $(A-\lambda I)x=0$ denkleminin $x=0$ çözümü elde edilir. Bu ise aşikar çözüm olup zaten bilinmektedir.) Bu ifade ise A kare matrisinin karakteristik polinomunun, λ ya bağlı n. dereceden bir polinom olduğu gösterir.

Matrisin özdeğerlerinin nasıl bulanacağını ifade eden bu sonuç aşağıdaki teorem ile ifade edilebilir:

Teorem 2.1.2: *nxn* tipindeki $A=(\alpha_{jk})$ kare matrisinin özdeğerleri, A kare matrisinin karakteristik denklemi olan (3) denklemi ile bulunur ve A kare matrisinin en az bir tane ve en fazla n tane farklı özdeğeri vardır. (Kreyszig 1989)

Kare matrislerdeki bu sonuç n boyutlu X normlu uzayı üzerindeki $T:X\to X$ lineer operatörüne şöyle uygulanır: $e=\{e_1,e_2,...,e_n\}$, X normlu uzayının herhangi bir bazı ve bu baza göre T lineer operatörüne karşılık gelen matris $T_C=(\alpha_{jk})$ olsun. Bu durumda T_C matrisinin özdeğerleri, T lineer operatörünün özdeğerleri olur. Yine bu matrisin spektrum ve resolvent kümesi, T lineer operatörün spektrum ve resolvent kümesi olur.

Teorem 2.1.3: Sonlu boyutlu X normlu uzayı üzerinde verilmiş bir $T:X\to X$ lineer operatörünün X uzayının farklı bazlarına bağlı olarak tüm matris gösterimleri aynı özdeğerlere sahiptir. (Kreyszig 1989)

Tanım 2.1.4: T_1 *ve* T_2 , nxn tipinde sırasıyla e *ve* $\overset{\approx}{e}$ bazlarına göre aynı T operatörünü temsil eden matrisler olsun. Eğer $T_2 = C^{-1}T_1C$ eşitliğini sağlayacak şekilde singüler olmayan bir C matrisi mevcut ise nxn tipindeki T_2 ye, T_1 e benzerdir denir.

Buna göre:

a) Sonlu boyutlu X normlu uzayı üzerinde aynı T lineer operatörünü temsil eden iki matris, X normlu uzayının herhangi iki bazına göre benzerdir.

b) Benzer matrisler, aynı özdeğerlere sahiptir.

Teorem 2.1.5 (Varlık Teoremi) Sonlu boyutlu kompleks $X \neq \{0\}$ normlu uzayında bir lineer operatörün en az bir tane özdeğeri vardır. (Kreyszig 1989)

Teorem 2.1.6: X vektör uzayı üzerinde lineer bir T operatörünün farklı $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ özdeğerlerine karşılık gelen $x_1, x_2, ..., x_n$ özvektörleri lineer bağımsızdır. (Kreyszig 1989)

İspat: Kabul edelim ki $\{x_1, x_2, ..., x_n\}$ kümesi lineer bağımlı olsun. Bu kümenin lineer bağımsız olacak şekilde bir $\{x_1, x_2, ..., x_{m-1}\}$ alt kümesini alalım. Diyelim ki x_m elemanı bu kümenin elemanlarının lineer kombinasyonu olarak ifade edilen ilk vektör olsun. Bu durumda

(4) $$x_m = \alpha_1 x_1 + ... + \alpha_{m-1} x_{m-1}$$

olacak şekilde $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_m$ skalerleri vardır. $T - \lambda_m I$ operatörü (4) eşitliğinin her iki tarafına uygulanırsa

$$\begin{aligned} (T - \lambda_m I)x_m &= \sum_{j=1}^{m-1} (T - \lambda_m I)x_j \\ &= \sum_{j=1}^{m-1} \alpha_j (\lambda_j - \lambda_m) x_j \end{aligned}$$

eşitliği elde edilir. x_m vektörü, λ_m özdeğerine karşılık gelen bir özvektör olduğundan bu eşitliğin sol tarafı sıfırdır. Dolayısıyla $j = 1,2,...,m-1$ için x_j vektörleri lineer bağımsız olduğundan $\alpha_j(\lambda_j - \lambda_m) = 0$ olmalıdır. $j = 1,2,...,m-1$ için $\lambda_j \neq \lambda_m$ olduğundan da $\alpha_j = 0$ olmalıdır. Buna göre (4) ifadesinden $x_m = 0$ olur. Ancak x_m

vektörü bir özvektör olduğundan $x_m \neq 0$ dır. Çelişki. O halde varsayım yanlış olup, $\{x_1, x_2, ..., x_n\}$ kümesi lineer bağımsızdır.

2.2.Spektral ve Resolvent Kavramı

Normlu kompleks $X \neq \{0\}$ uzayı ve $\wp(T) \subset X$ tanım kümesi olmak üzere $T : \wp(T) \to X$ lineer operatör olsun. λ bir kompleks sayı ve I da $\wp(T)$ kümesi üzerinde birim operatör olmak üzere,

(1) $\qquad T_\lambda = T - \lambda I$

operatörünü tanımlayalım. Eğer T_λ operatörünün tersi varsa, bu ters operatöre T nin <u>*resolvent operatörü*</u> denir ve $R_\lambda(T)$ ile gösterilir. Buna göre

(2) $\qquad R_\lambda(T) = T_\lambda^{-1} = (T - \lambda I)^{-1}$

olur. Kullanılan T operatörü bilindiğinde kısalık için $R_\lambda(T)$ yerine R_λ kullanılır.

$R_\lambda(T)$ resolvent operatörü, $T_\lambda x = y$ denklemini çözmeye yardımcı olduğundan "resolvent-çözen" adı uygundur. Bu durumda $R_\lambda(T)$ mevcut olmak üzere $x = T_\lambda^{-1} y = R_\lambda(T) y$ olur. Lineer operatörlerin tersi de lineer operatör olduğundan R_λ resolvent operatörü de bir lineer operatördür.

Burada önemli olan R_λ resolvent operatörünün özelliklerinin araştırılmasının, T operatörünün özelliklerinin incelenmesi için temel olmasıdır. T_λ ve R_λ operatörlerinin bir çok özelliği λ kompleks sayısına bağlıdır. Spektral teori de bu özelliklerle ilgilenir.

Tanım 2.2.1: $X \neq \{0\}$ kompleks normlu uzayı ve $\wp(T) \subset X$ tanım kümesi olmak üzere $T : \wp(T) \to X$ lineer operatör olsun. Eğer

(R_1) $R_\lambda(T)$ mevcut

(R_2) $R_\lambda(T)$ sınırlı

(R_3) $R_\lambda(T)$, X uzayı içinde yoğun bir kümede tanımlı

şartları sağlanıyorsa λ kompleks sayısına T operatörünün <u>*regüler değeri*</u> ve bütün regüler değerlerin oluşturduğu $\rho(T)$ kümesine, T operatörünün <u>*resolvent kümesi*</u> denir. Buna göre

$$\rho(T)=\{\lambda:\lambda\, regüler\ değer\}$$
$$=\left\{\lambda:(T-\lambda I)^{-1}\ mevcut\ , sınırlı\ ve\ X\ de\ yoğun\ bir\ kümede\ tanımlı\right\}$$

olur. Resolvent kümesinin $\mathbb{C}$ kompleks düzlemindeki $\sigma(T)=\mathbb{C}-\rho(T)$ tümleyeni, T operatörünün <u>*spektrumu*</u> ve $\lambda\in\sigma(T)$ kompleks sayısı da T operatörünün <u>*spektral değeri*</u> olur. Buna göre

$$\sigma(T)=\{\lambda:\lambda\ spektral\ değer\}$$

Herhangi bir X vektör uzayı üzerinde tanımlı T operatörünün spektrumunu açık olarak belirtmemiz gerektiğinde $\sigma(T,X)$ ile gösterilir.

$\sigma(T)$ spektrum kümesi aşağıdaki gibi ayrık üç kümeye ayrılabilir:

<u>*Nokta Spektrum:*</u> (Discret-ayrık spektrum) $R_\lambda(T)$ resolvent operatörünün mevcut olmadığı λ sayılarının kümesi olup $\sigma_p(T)$ ile gösterilir. Bu durumda $\lambda\in\sigma_p(T)$ kompleks sayısı T operatörünün bir özdeğeri olur.

<u>*Sürekli Spektrum:*</u> $R_\lambda(T)$ resolvent operatörünün mevcut olduğu, (R_3) şartının sağlanıp (R_2) şartının sağlanmadığı yani, $R_\lambda(T)$ resolvent operatörünün sınırsız olduğu λ sayılarının kümesidir ve $\sigma_C(T)$ ile gösterilir.

<u>*Residü Spektrum:*</u> (Artık spektrum) $R_\lambda(T)$ resolvent operatörünün mevcut olduğu (sınırlı veya sınırsız) fakat (R_3) şartının sağlanmadığı yani $R_\lambda(T)$ resolvent operatörünün tanım kümesinin X uzayında yoğun olmadığı λ sayılarının kümesidir ve $\sigma_r(T)$ ile gösterilir.

Bu tanımda ifade edilen şartlar aşağıdaki tablo ile verilebilir:

Tablo 2.1. Resolvent ve Spektrum kümelerinin şartları

λ kompleks sayısının ait olduğu küme	Sağlanan şartlar	Sağlanmayan şartlar
$\rho(T)$ resolvent	$(R_1),(R_2),(R_3)$	
$\sigma_p(T)$ nokta spektrum		(R_1)
$\sigma_C(T)$ sürekli spektrum	$(R_1),(R_3)$	(R_2)
$\sigma_r(T)$ residü spektrum	(R_1)	(R_3)

Dikkat edilirse tablodaki dört küme ayrıktır ve birleşimleri tüm kompleks düzlemi oluşturur. Yani

$$\mathbb{C} = \rho(T) \cup \sigma_p(T) \cup \sigma_C(T) \cup \sigma_r(T)$$

dir. Bu tanımdaki bazı kümelerin boş küme olup olmaması tartışılması gereken bir varlık problemidir.

Teorem 1.2.2 nedeniyle $T_\lambda^{-1} = R_\lambda : \Re(T_\lambda) \to \wp(T_\lambda)$ dönüşümünün mevcut olması için gerek ve yeter şart $T_\lambda x = 0$ olduğunda $x = 0$ olmasıdır, yani T_λ operatörünün çekirdeğinin $\{0\}$ olmasıdır. Yani eğer $\exists\ x \neq 0$ vektörü için $T_\lambda x = (T - \lambda I)x = 0$ ise T_λ operatörünün tersi yani R_λ resolvent operatörü mevcut değildir. O halde $\lambda \in \sigma_p(T)$ dir. Bu ise λ değerinin T operatörünün özdeğeri olmasıdır. Bu durumda x vektörü T operatörünün λ özdeğerine karşılık gelen bir özvektörü olur. (Veya eğer X uzayı bir fonksiyon uzayı ise T operatörünün bir özfonksiyonu olarak adlandırılır.) Sonlu boyutlu uzaylarda olduğu gibi özuzay T nin λ özdeğerine karşılık gelen bütün özvektörleri ile 0 dan ibaret olan, $\wp(T)$ nin alt uzayı T nin λ ya karşılık gelen öz alt uzayını oluşturur.

Buradaki özdeğerin tanımı bir önceki tanım ile uyumludur. Çünkü sonlu boyutlu uzay üzerinde tanımlı lineer operatörün spektrumu sadece nokta spektrumu olup sürekli ve residü spektrumu boş kümedir. Dolayısıyla sonlu boyutlu uzaylarda her spektral değer bir özdeğerdir.

Eğer X sonsuz boyutlu ise bu durumda T operatörünün özdeğer olmayan spektral değerleri olabilir. Yani spektrum kümesinin elemanı olup nokta spektrum kümesinin elemanı olmayan değerler olabilir. Bunu aşağıdaki örnekle görelim.

Örnek 2.2.2: $X = \ell_2$ Hilbert dizi uzayı üzerinde $x = (\xi_j) \in \ell_2$ olmak üzere

(3) $$(\xi_1, \xi_2, ...) \mapsto (0, \xi_1, \xi_2, ...)$$

ile tanımlanan $T : \ell_2 \to \ell_2$ lineer operatörünü tanımlayalım. ℓ_2 uzayındaki norm $\|x\| = \left(\sum_{j=1}^{\infty} |x_j|^2 \right)^{1/2}$ olduğuna göre

$$\|Tx\| = \|(0, \xi_1, \xi_2, ...)\| = \left(\sum_{j=1}^{\infty} |\xi_j|^2 \right)^{1/2} = \|(\xi_1, \xi_2, ...)\| = \|x\|$$

olduğundan T sınırlıdır. Aynı zamanda $\|T\| = \sup\limits_{x\neq\theta} \dfrac{\|Tx\|}{\|x\|} = \sup\limits_{x\neq\theta} 1 = 1$ dir. Dolayısıyla

a) $Tx = 0 \Rightarrow x = 0$ dır, yani $R_0(T) = T^{-1} : T(X) \to X$, $(\xi_1, \xi_2, ...) \to (\xi_2, \xi_3, ...)$ operatörü mevcuttur. Yani $R_0(T), (R_1)$ şartını sağlar. Fakat (3) ifadesinden $T(X)$ kümesi, $Y = \{(\eta_j) : \eta_1 = 0\}$ uzayının bir alt uzayıdır. Bu ise $\overline{T(X)} \neq X$ olmasıdır yani $T(X)$ kümesi X uzayı içinde yoğun değildir. Yani $R_0(T), (R_3)$ şartını sağlamaz. Şu halde $\lambda = 0$, T operatörünün resolvent kümesinin bir elemanı olmayıp, spektrum kümesinin elemanıdır. Yani $\lambda = 0$ bir spektral değerdir.

b) Ayrıca (3) den $Tx = 0 \Rightarrow x = 0$ dır ve 0 vektörü öz vektör değildir. Dolayısıyla $\lambda = 0$ özdeğer değildir.

X tam uzay, $T : X \to X$ operatörü sınırlı ve lineer olmak üzere eğer bazı λ kompleks sayıları için $R_\lambda(T)$ resolventi mevcut ve X uzayının tamamı üzerinde tanımlı ise Açık dönüşüm – Sınırlı Ters teoremi nedeniyle söz konusu λ lar için resolventin sınırlı olduğu da söylenebilir.

Lemma 2.2.3: X kompleks Banach uzayı üzerinde $T : X \to X$ lineer operatörü ve $\lambda \in \rho(T)$ olsun. Eğer

(a) T kapalı veya (b) T sınırlı

ise bu taktirde $R_\lambda(T)$ resolvent operatörü, X uzayının tamamı üzerinde tanımlı ve sınırlıdır. (Kreyszig 1989)

2.3.Sınırlı Lineer Operatörlerin Spektral Özellikleri

Bu kısımda verilen bir operatörün spektrumunun genel özellikleri ele alınacaktır. Bu özellikler operatörün kendisine ve operatörün tanımlandığı uzaya bağlıdır. Önce kompleks X Banach uzayı üzerinde tanımlı ve sınırlı T lineer operatörleri ile başlayacağız. Yani $T \in B(X)$ alacağız.

Teorem 2.3.1: X Banach uzayı olmak üzere $T \in B(X)$ alalım. Eğer $\|T\| < 1$ ise bu durumda $(I-T)^{-1}$, X uzayının tamamı üzerinde sınırlı lineer bir operatördür ve eşitliğin sağındaki seri $B(X)$ kümesinin üzerindeki norma göre yakınsak olmak üzere

(1) $$(I-T)^{-1} = \sum_{j=0}^{\infty} T^j = I + T + T^2 + \dots$$

dır. (Kreyszig 1989)

İspat: Tümevarımdan $\|T^j\| \le \|T\|^j$ dır. Ayrıca $\sum \|T\|^j$ geometrik serileri $\|T\| < 1$ için yakınsak olduğundan (1) ifadesindeki seri $\|T\| < 1$ için mutlak yakınsaktır. X uzayı Banach uzayı olduğundan tamdır, Teorem 1.2.6 gereğince de $B(X)$ tamdır. Dolayısıyla mutlak yakınsaklık serinin yakınsaklığını gerektirir. Buna göre (1) serisi yakınsaktır. Şimdi $\forall x \in X$, $\sum T^j(x) = S(x)$ serisinin toplamını S ile gösterelim. Bu durumda $S = (I-T)^{-1}$ olduğunu göstermek yeterlidir. S_n, (1) serisinin kısmi toplamlar dizisini göstermek üzere

(2) $$\begin{aligned} (I-T)S_n &= (I-T)\left(I + T + T^2 + \dots + T^n\right) \\ &= I + T + T^2 + \dots + T^n - T - T^2 - T^3 - \dots - T^{n+1} \\ &= I - T^{n+1} \\ S_n(I-T) &= \left(I + T + T^2 + \dots + T^n\right)(I-T) = I - T^{n+1} \end{aligned}$$

yazılabilir. Öte yandan $\|T\| < 1$ olduğundan $n \to \infty$ için $T^{n+1} \to 0$ olur. Böylece (2) de $n \to \infty$ için limite geçilirse

(3) $$(I-T)S = I \;\; ve \;\; S(I-T) = I$$

elde edilir. Bu ise $S = (I-T)^{-1}$ olmasıdır. ■

Şimdi bu teoremin ilk uygulaması olarak sınırlı bir lineer operatörün spektrumunun kompleks düzlemde kapalı bir küme olduğunu gösterelim.

Teorem 2.3.2: X kompleks Banach uzayı üzerinde tanımlı sınırlı lineer bir T operatörünün $\rho(T)$ resolvent kümesi açıktır ve dolayısıyla $\sigma(T)$ spektrumu kapalıdır. (Kreyszig 1989)

İspat: Eğer $\rho(T) = \varnothing$ ise ispat aşikardır. Şimdi $\rho(T) \neq \varnothing$ olsun. Bu durumda $\lambda_0 \in \rho(T)$ sabitini ve herhangi bir $\lambda \in \mathbb{C}$ alalım.

$$T_\lambda = T - \lambda I = T - \lambda_0 I + \lambda_0 I - \lambda I = T - \lambda_0 I - (\lambda - \lambda_0) I$$
$$= (T - \lambda_0 I)\left[I - (\lambda - \lambda_0)(T - \lambda_0 I)^{-1}\right] = T_{\lambda_0}\left[I - (\lambda - \lambda_0) T_{\lambda_0}{}^{-1}\right]$$
$$= T_{\lambda_0}\left[I - (\lambda - \lambda_0) R_{\lambda_0}\right]$$

olur. Eğer

(4) $$V = I - (\lambda - \lambda_0) R_{\lambda_0}$$

dersek $T_\lambda = T_{\lambda_0} V$ yazılabilir. $\lambda_0 \in \rho(T)$ ve T operatörünün sınırlılığından Lemma 2.2.3-b gereğince R_{λ_0} resolvent operatörü X uzayının tamamı üzerinde tanımlı ve sınırlıdır. Şu halde $R_{\lambda_0} = T_{\lambda_0}{}^{-1} \in B(X)$ dir. Teorem 2.3.1 deki T operatörü yerine $(\lambda - \lambda_0) R_{\lambda_0} \in B(X)$ operatörü alınırsa $\left\| (\lambda - \lambda_0) R_{\lambda_0} \right\| < 1$ olmak üzere tüm λ değerleri için $\left[I - (\lambda - \lambda_0) R_{\lambda_0}\right]^{-1} = V^{-1}$ operatörü X uzayının tamamı üzerinde tanımlı ve sınırlı olup,

(5) $$V^{-1} = \left[I - (\lambda - \lambda_0) R_{\lambda_0}\right]^{-1} = \sum_{j=0}^{\infty} \left[(\lambda - \lambda_0) R_{\lambda_0}\right]^j = \sum_{j=0}^{\infty} (\lambda - \lambda_0)^j R_{\lambda_0}{}^j$$

dır. Ayrıca

(6) $$\left\| (\lambda - \lambda_0) R_{\lambda_0} \right\| < 1 \Rightarrow |\lambda - \lambda_0| \cdot \left\| R_{\lambda_0} \right\| < 1 \Rightarrow |\lambda - \lambda_0| < \frac{1}{\left\| R_{\lambda_0} \right\|}$$

dır. Şu halde $T_{\lambda_0}{}^{-1} = R_{\lambda_0} \in B(X)$ olduğundan ve (4) ifadesinden (6) yi sağlayan her λ değeri için T_λ operatörünün

(7) $$R_\lambda = T_\lambda{}^{-1} = \left(T_{\lambda_0} V\right)^{-1} = V^{-1} T_{\lambda_0}{}^{-1} = V^{-1} R_{\lambda_0}$$

şeklinde bir tersi vardır. Dolayısıyla (6), T operatörünün λ_0 ın regüler λ değerlerinden ibaret komşuluğunu gösterir. (R_λ mevcut, $R_\lambda = V^{-1} R_{\lambda_0}$ olduğundan sınırlı ve X uzayının tamamında tanımlıdır.) $\lambda_0 \in \rho(T)$ keyfi olduğundan $\rho(T)$ resolvent kümesi açık kümedir. Dolayısıyla tümleyeni $\sigma(T) = \mathbb{C} - \rho(T)$ kapalıdır. ■

Teorem 2.3.3: X kompleks Banach uzayı ve bu uzay üzerinde tanımlı sınırlı lineer bir T operatörü alalaım. $R_\lambda(T)$ resolvent operatörü her $\lambda_0 \in \rho(T)$ için kompleks düzlemde $|\lambda - \lambda_0| < \dfrac{1}{\left\| R_{\lambda_0} \right\|}$ diski içinde mutlak yakınsak olan

(8) $$R_\lambda = \sum_{j=0}^{\infty} (\lambda - \lambda_0)^j R_{\lambda_0}{}^{j+1}$$

gösterimine sahiptir. Bu disk, $\rho(T)$ resolvent kümesinin bir alt kümesidir. (Kreyszig 1989)

Teoremin ispatı için, yukarıdaki (7 ifadesinde (5) ifadesindeki eşitlik yazılırsa $R_\lambda = \left(\sum (\lambda - \lambda_0)^j R_{\lambda_0}{}^j \right) R_{\lambda_0} = \sum (\lambda - \lambda_0)^j R_{\lambda_0}{}^{j+1}$ elde edilir.

Teorem 2.3.4: X kompleks Banach uzayı üzerinde sınırlı $T : X \to X$ lineer operatörünün $\sigma(T)$ spektrumu kompakttır ve

(9) $$|\lambda| \le \|T\|$$

ile verilen diskin içindedir. Yani T operatörünün $\rho(T)$ resolvent kümesi boş değildir. (Kreyszig 1989)

İspat: Teorem 1.2.7 den $\sigma(T)$nin kapalı ve sınırlı olduğunu göstermek yeterlidir. Teorem 2.3.2 den $\sigma(T)$ kümesi kapalıdır. O halde sınırlılığa bakmak yeterlidir. $\lambda \neq 0$ alalım. Teorem 2.3.1 gereğince

(10) $$\begin{aligned} R_\lambda &= (T - \lambda I)^{-1} = \left(\lambda \left(\frac{1}{\lambda} T - I \right) \right)^{-1} = \left(-\lambda \left(I - \frac{1}{\lambda} T \right) \right)^{-1} \\ &= \frac{-1}{\lambda} \left(I - \frac{1}{\lambda} T \right)^{-1} = \frac{-1}{\lambda} \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{1}{\lambda} T \right)^j \end{aligned}$$

yazılabilir. Buradaki seri $\left\| \frac{1}{\lambda} T \right\| = \frac{\|T\|}{|\lambda|} < 1$ eşitsizliğini sağlayan her λ için yakınsaktır. Yani $|\lambda| > \|T\|$ için yakınsaktır. Aynı teorem sebebiyle $|\lambda| > \|T\|$ şartını sağlayan λ değerleri $\rho(T)$ resolvent kümesinin elemanlarıdır. Dolayısıyla $\sigma(T) = \mathbb{C} - \rho(T)$ eşitliğinden $\sigma(T)$ spektrumunun elemanları (9) ifadesindeki diskin içinde olmalıdır. Bu ise $\sigma(T)$ spektrum kümesinin sınırlı olmasıdır.

Tanım 2.3.5: $X \neq \{0\}$ ve $T \in B(X)$ olsun. $\sigma(T)$, T nin spektrumu olmak üzere

$$r_\sigma(T) = \sup_{\lambda \in \sigma(T)} |\lambda|$$

sayısına spektral yarıçapı denir. Eğer X bir Banach uzayı ise

(11) $$r_\sigma(T) = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\|T^n\|}$$

dır. (Brown ve Page 1970, sh 237)

Teorem 2.3.6: $X \neq \{0\}$ ve $T \in B(X)$ olsun. Bu durumda $\sigma(T^*) \subset \sigma(T)$ dir. Eğer X bir Banach uzayı ise $\sigma(T^*) = \sigma(T)$ dır. (Brown ve Page 1970, sh 242)

2.4. Resolvent ve Spektrumun Diğer Özellikleri

Teorem 2.4.1: X kompleks Banach uzayı, $T \in B(X)$ ve $\lambda, \mu \in \rho(T)$alalım. Bu durumda

a) T operatörünün R_λ resolvent operatörü,

(1) $$R_\mu - R_\lambda = (\mu - \lambda) R_\mu R_\lambda \qquad [\lambda, \mu \in \rho(T)]$$

resolvent denklemini sağlar.

b) R_λ resolvent operatörü, T operatörü ile değişmeli olan bir $S \in B(X)$ operatörü ile değişmelidir.

c) Ayrıca

(2) $$R_\lambda R_\mu = R_\mu R_\lambda \qquad [\lambda, \mu \in \rho(T)]$$

dir. (Kreyszig 1989)

İspat:

a) T operatörü sınırlı olduğundan Lemma 2.2.3'ü uygularsak R_λ resolvent operatörü X uzayının tamamı üzerinde tanımlı ve sınırlıdır. Yani T_λ operatörünün değer kümesi X uzayının kendisidir. $(R_\lambda : X \to X \ , T : X \to X)$ O halde I, X uzayı üzerinde birim operatör olmak üzere $\lambda, \mu \in \rho(T)$ için $I = T_\lambda R_\lambda \ \ ve \ \ I = R_\mu T_\mu$ yazılabilir. Dolayısıyla

$$\begin{aligned} R_\mu - R_\lambda &= R_\mu I - I R_\lambda = R_\mu (T_\lambda R_\lambda) - (R_\mu T_\mu) R_\lambda = R_\mu (T_\lambda - T_\mu) R_\lambda \\ &= R_\mu (T - \lambda I - (T - \mu I)) R_\lambda = R_\mu (-\lambda I + \mu I) R_\lambda = (\mu - \lambda) R_\mu R_\lambda \end{aligned}$$

dır. Yani $R_\mu - R_\lambda = (\mu - \lambda) R_\mu R_\lambda$ bulunur.

b) $S \in B(X)$ operatörü T ile değişmeli yani $ST = TS$ olsun.

$$ST_\lambda = S(T - \lambda I) = ST - \lambda SI = ST - \lambda S = TS - \lambda S$$
$$T_\lambda S = (T - \lambda I) S = TS - \lambda IS = TS - \lambda S$$

ifadelerinden $T_\lambda S = ST_\lambda$ dır. O halde (a) şıkkında bulunan $I = T_\lambda R_\lambda = R_\lambda T_\lambda$ eşitliği kullanılırsa

$$R_\lambda S = R_\lambda SI = R_\lambda ST_\lambda R_\lambda = R_\lambda T_\lambda SR_\lambda = ISR_\lambda = SR_\lambda$$

dır. Yani $R_\lambda S = SR_\lambda$ dır. Bu ise R_λ resolvent operatörünün S ile değişmeli olmasıdır.

c) Öncelikle (b) şıkkında R_λ yerine R_μ, T yerine T ve S yerine de T alınırsa, T operatörü kendi ile değişmeli olduğundan R_μ resolvent operatörü T operatörü ile değişmelidir.

Şimdi de (b) şıkkında R_λ yerine R_λ, T yerine T ve S yerine de R_μ alınırsa, R_λ resolvent operatörü R_λ resolvent operatörü ile değişmelidir. Yani $R_\lambda R_\mu = R_\mu R_\lambda$ dir. ▪

Spektral teorisinde önemli bir yeri olan diğer bir sonuç spektral dönüşüm teoremidir. Ön hazırlık amacıyla matris özdeğer teorisi ile başlayalım:

Eğer λ, A kare matrisinin bir özdeğeri ise $\exists\ x \neq 0$ için $Ax = \lambda x$ olduğunu biliyoruz. Buradan ise

$$A^2 x = AAx = A\lambda x = \lambda Ax = \lambda\lambda x = \lambda^2 x$$

yazılabilir. Yani $A^2 x = \lambda^2 x$ bulunur. Bu şekilde devam edilirse $\forall\, m \in \mathbb{Z}^+$ için

$$A^m x = \lambda^m x$$

olduğu elde edilir. Yani λ, A kare matrisinin bir özdeğeri ise λ^m, A^m kare matrisinin bir özdeğeridir ve daha genel olarak $p(\lambda) = \alpha_n \lambda^n + \alpha_{n-1}\lambda^{n-1} + ... + \alpha_0$, $p(A) = \alpha_n A^n + \alpha_{n-1} A^{n-1} + ... + \alpha_0 I$ matrisinin bir özdeğeridir.

Şimdi de sonlu boyutta elde edilen bu sonucun herhangi bir boyuttaki Banach uzayına da genişletilebileceğini görmeye çalışalım. Ancak bu yapılırken sınırlı bir lineer operatörün spektrumunun boştan farklı olduğu sonucu kullanılır.

Aşağıdaki teoremde $p(\sigma(T)) = \{\mu \in \mathbb{C} \mid \mu = p(\lambda) : \lambda \in \sigma(T)\}$ sembolünü kullanacağız.

Teorem 2.4.2: (Polinomlar için spektral dönüşüm teoremi) X kompleks Banach uzayı, $T \in B(X)$ ve $p(\lambda) = \alpha_n \lambda^n + \alpha_{n-1}\lambda^{n-1} + ... + \alpha_0$,$(\alpha_n \neq 0)$ olsun. Bu durumda

(3) $$\sigma(p(T)) = p(\sigma(T))$$

dir. Yani $p(T)=\alpha_n T^n+\alpha_{n-1}T^{n-1}+...+\alpha_0 I$ operatörünün $\sigma(p(T))$ spektrumu, T operatörünün $\sigma(T)$ spektrumuna ait noktaların p polinomu altındaki görüntülerinden ibarettir. (Kreyszig 1989)

İspat: $\sigma(T)\neq\varnothing$ olduğu bilinmektedir. Eğer $n=0$ ise eşitlik açıktır. Zira $p\left(\sigma\left(T\right)\right)=\{\alpha_0\}=\sigma\left(p\left(T\right)\right)$ dır.

$n>0$ olsun. Bu durumda $\sigma(p(T))\subset p(\sigma(T))$ ve $p(\sigma(T))\subset\sigma(p(T))$ olduğunu göstermek yeterlidir.

a) $\sigma(p(T))\subset p(\sigma(T))$ olduğunu görelim. Kolaylık açısından $\mu\in\mathbb{C}$ için $p(T)=S$ diyelim. Eğer $(p(T)-\mu I)^{-1}=(S-\mu I)^{-1}=S_\mu^{-1}$ operatörü mevcut ise bu durumda S_μ^{-1} operatörü, $p(T)$ polinomunun resolvent operatörü olur. μ yü sabit olarak alalım. X kompleks uzay olduğundan $S_\mu(\lambda)=p(\lambda)-\mu$ ile verilen polinom lineer çarpanlara ayrılabilir. Buna göre S_μ nün kökleri $\gamma_1,\gamma_2,...,\gamma_n$ olmak üzere (μ ye bağlı olan)

(4) $$S_\mu=p(\lambda)-\mu=\alpha_n(\lambda-\gamma_1)(\lambda-\gamma_2)...(\lambda-\gamma_n)$$

şeklinde yazılabilir. Bu durumda (4) ifadesine karşılık olarak

$$S_\mu=p(T)-\mu I=\alpha_n(T-\gamma_1 I)(T-\gamma_2 I)...(T-\gamma_n I)$$

yazabiliriz. Eğer her bir γ_j kökü $\rho(T)$ resolvent kümesinin elemanı ise bu durumda her bir $T-\gamma_j I$ Lemma 2.2.3 gereğince X in tamamında sınırlı bir inverse sahip olur. Lemma 1.2.8 den

$$S_\mu^{-1}=\frac{1}{\alpha_n}(T-\gamma_n I)^{-1}(T-\gamma_{n-1}I)^{-1}...(T-\gamma_1 I)^{-1}$$

dir. Bu durumda S_μ^{-1} operatörü mevcut, sınırlı ve X uzayının tamamında tanımlı olduğundan μ sabiti $p(T)$ polinomunun resolvent kümesinin elemanı, yani $\mu\in\rho(p(T))$ olur.

Şimdi $\mu\in\sigma(p(T))$ alalım. Bu durumda $\exists\,\gamma_j$ için $\gamma_j\in\sigma(T)$ olur. (4) ifadesi göz önüne alınırsa

$$S_\mu(\gamma_j)=p(\gamma_j)-\mu=0$$

ve dolayısıyla

$$\mu-p(\gamma_j)\in p(\sigma(T))$$

elde edilir. Fakat $\mu \in \sigma\left(p(T)\right)$ keyfi olduğundan

$$\sigma(p(T)) \subset p(\sigma(T))$$

olduğu görülür.

b) $p(\sigma(T)) \subset \sigma(p(T))$ olduğunu görelim. Bunun için $\kappa \in p(\sigma(T))$ alalım. Bu durumda $p(\sigma(T)) = \{p(\lambda) : \lambda \in \sigma(T)\}$ görüntü tanımından $\exists\ \beta \in \sigma(T)$ değeri için $\kappa = p(\beta)$ olur. Şimdi $\beta \in \sigma(T)$ için iki durum söz konusudur: $T - \beta I$ operatörünün ya bir tersi vardır, ya da bir tersi yoktur.

<u>1. durum:</u> $T - \beta I$ operatörünün bir tersi mevcut olmasın. $\kappa = p(\beta)$ eşitliği düzenlenirse $p(\beta) - \kappa = 0$ dır. Bu ise β nın $S_\kappa(\lambda) = p(\lambda) - \kappa$ ile verilen polinomun bir kökü olmasıdır. O halde $g(\lambda)$ polinomu $S_\kappa(\lambda)$ polinomunun diğer tam bölenlerinin ve α_n baş katsayısının çarpımını göstermek üzere $S_\kappa(\lambda) = p(\lambda) - \kappa = (\lambda - \beta)\, g(\lambda)$ yazılabilir. Bu gösterime göre de

(5) $$S_\kappa(\lambda) = p(T) - \kappa I = (T - \beta I)\, g(T)$$

elde edilir. $g(T)$ nin bütün çarpanları $T - \beta I$ ile değişmeli olduğundan $S_\kappa(\lambda) = g(\lambda)(\lambda - \beta)$ şeklinde de yazılabilir. O halde

(6) $$S_\kappa(\lambda) = g(T)(T - \beta I)$$

yazılabilir. Eğer S_κ ifadesinin bir tersi mevcut olsaydı (5) ve (6) ifadelerinden

$$I = (T - \beta I)\, g(T) S_\kappa^{-1} = S_\kappa^{-1} g(T)(T - \beta I)$$

ifadesi elde edilir. Buradan ise $T - \beta I$ operatörünün bir tersi vardır. Halbuki kabulümüz $T - \beta I$ operatörünün tersinin mevcut olmadığı idi. O halde S_κ ifadesinin S_κ^{-1} tersi mevcut değildir. Yani κ elemanı için $p(T)$ polinomunun resolvent operatörü $(p(T) - \kappa I)^{-1} = S_\kappa^{-1}$ mevcut değildir. O halde κ elemanı, $p(T)$ polinomunun spektrumun elemanıdır. Yani $\kappa \in \sigma(p(T))$ dır. $\kappa \in p(\sigma(T))$ keyfi olarak alındığından $T - \beta I$ operatörünün bir tersi mevcut olmamak üzere $p(\sigma(T)) \subset \sigma(p(T))$ bulunur.

<u>2. durum:</u> $T - \beta I$ operatörünün bir tersi mevcut olsun. $\kappa \in \sigma(p(T))$ yani $\kappa \notin \rho(p(T))$ olduğunu gösterelim. Bunun için de $(R_1), (R_2)$ *ve* (R_3) şartlarından en az birinin sağlanmadığını görmeliyiz. (R_3) şartının sağlanmadığını yani $T - \beta I$ operatörünün değer kümesi için

(7) $$\Re(T-\beta I)\neq X$$

olduğunu görelim. Eğer (R_3) sağlansaydı yani $\Re(T-\beta I)=X$ olsaydı Teorem 1.2.3 den $(T-\beta I)^{-1}$ operatörü sınırlı olur yani (R_2) şartı sağlanırdı. Buradan da $\beta\in\rho(T)$ olurdu. Bu ise kabulümüz olan $\beta\in\sigma(T)$ ile çelişir. O halde (7) ifadesi doğrudur. (5) ve (7) ifadelerinden de $\Re(S_\kappa)\neq X$ olur. Şimdi de Lemma 2.2.3-b de T operatörü yerine $p(T)$ alınırsa, $\kappa\in\rho(p(T))$ alındığında $\Re(S_\kappa)=X$ olacağından $\kappa\in\sigma(p(T))$ elde edilir. Şu halde $T-\beta I$ nin tersi mevcut olmamak üzere

$$p(\sigma(T))\subset\sigma(p(T))$$

olduğu görülür. Bu da teoremin ispatını tamamlar.

2.5. İnce Spektrum (Fine Spektrum)

X bir Banach uzayı ve $T\in B(X)$ olsun. T operatörünün değer kümesi $\Re(T)$ ve $\Re(T)$ kümesi üzerinde alınan T^{-1} ters operatörü için şu durumlar söz konusudur:

I. $\Re(T)=X$

II. $\Re(T)\neq X$ ancak $\overline{\Re(T)}=X$

III. $\overline{\Re(T)}\neq X$

1. T^{-1} mevcut ve sınırlı
2. T^{-1} mevcut ancak sınırlı değil
3. T^{-1} mevcut değil

Bu durumlar birlikte düşünüldüğünde $I_1, I_2, I_3, II_1, II_2, II_3, III_1, III_2, III_3$ olmak üzere dokuz tane farklı durum elde edilir. Eğer T operatörü III_2 durumunu sağlıyorsa $T\in III_2$ notasyonu kullanılır.

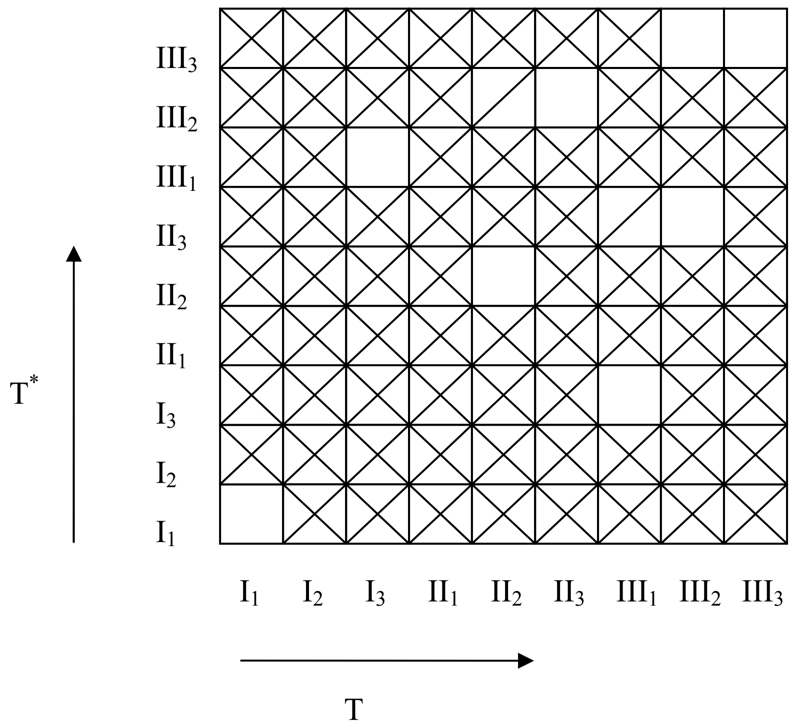
Örneğin $T\in III_2$ ise T^{-1} mevcut ancak sınırlı değil ve $\overline{\Re(T)}\neq X$ dir. Yine örnek olarak $T\in I_1$ ise T^{-1} mevcut ve sınırlı ve $\Re(T)=X$ dir.

Benzer şekilde T^{-1} operatörünün mevcut ve süreksiz olduğunu göstermek için $T\in 2$ notasyonu, $\overline{\Re(T)}\neq X$ olduğunu göstermek için ise $T\in III$ notasyonu kullanılır.

Eğer λ karmaşık sayısı $\lambda I - T \in I_1$ veya $\lambda I - T \in II_1$ olacak şekilde bir sayı ise bu durumda λ; T operatörünün, $\rho(T)$ resolvent kümesinin elemanıdır. Bu durumda $I_2, I_3, II_2, II_3, III_1, III_2, III_3$ durumları spektrum kümesinin ayrıntılı bir biçimde sınıflandırılmasıdır. Dolayısıyla $\lambda I - T \in III_1$ ise $\lambda \in III_1\sigma(T)$ yazılır. (Goldberg 1966, sh 66)

Bu kavramlar kısaca aşağıdaki tablo ile de belirtilebilir:

Tablo 2.2. T ve T^* Operatörlerinin İnce Spektrum şartlarının kesişim durumları



BÖLÜM 3

CESARO VE AĞIRLIKLI ORTALAMA OPERATÖRLERİNİN SPEKTRUMLARI

Bu bölümde c, ℓ_p, bv_0, bv uzayları üzerinde tanımlanan 1. mertebeden Cesaro ortalaması ile c_0, ℓ_p uzayları üzerinde tanımlanan Ağırlıklı ortalama operatörlerinin spektrumları incelenecektir.

3.1. c_0 Uzayında Cesaro Operatörünün Spektrumu

c_0, $\|x\| = \sup_n |x_n|$ normu ile birlikte Banach uzayıdır. J.B.Reade 1985 de yapmış olduğu çalışmalarda c_0 üzerindeki C_1 Cesaro operatörünün spektrumu ile ilgili önemli özellikleri vermiştir.

Teorem 1.4.2 gereğince $C_1 \in B(c_0)$ ve Teorem 1.3.2 gereğince $\|A\| = \sup_n \sum_k |a_{nk}|$ eşitliğinden de $\|C_1\| = 1$ olduğundan Teorem 1.2.9 gereğince $\|C_1^*\| = 1$ dir.

Teorem 3.1.1: $\sigma_p(C_1, c_0) = \varnothing$ dir. (Reade 1985)

İspat: $\sigma_p(C_1, c_0) \neq \varnothing$ olsun. Bu durumda (R_1) şartı sağlanmaz yani $R_\lambda(C_1) = (C_1 - \lambda I)^{-1}$ operatörü mevcut değildir. Bir başka değişle $C_1 - \lambda I$ operatörü 1-1 değildir (örtenliği sağlar). Buradan $Çek(C_1 - \lambda I) \neq \theta$ olur. Yani $(C_1 - \lambda I)x = 0$ olacak şekilde c_0 uzayında θ dan farklı bir $x = (x_n)$ dizisi vardır. Öyleyse:

$$C_1 x = \lambda x \;\Rightarrow\; \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & \cdots \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ \vdots \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ \vdots \end{pmatrix}$$

$$x_0 = \lambda x_0$$

$$\frac{1}{2}x_0 + \frac{1}{2}x_1 = \lambda x_1$$

$$\frac{1}{3}x_0 + \frac{1}{3}x_1 + \frac{1}{3}x_2 = \lambda x_2$$

$$\vdots$$

$$\frac{1}{n+1}\left(x_0 + x_1 + ... + x_n\right) = \lambda x_n$$

$$\vdots$$

denklemleri sağlanır. Bu denklemler çözüldüğünde $x = (x_n)$ dizisinin sıfırdan farklı ilk bileşeni x_m ise $\lambda = \dfrac{1}{m+1}$ ve $\forall\, n \geq m$ için $\dfrac{x_{n+1}}{x_n} = \dfrac{n+1}{n+1-m} \geq 1$ elde edilir. Bu ise $x_n \to 0$ $(n \to \infty)$ olması ile yani $(x_n) \in c_0$ olması ile çelişir. O halde varsayım yanlıştır ve dolayısıyla $\sigma_p(C, c_0) = \varnothing$ dir.

Lemma 3.1.2: Eğer $\mathrm{Re}\left(\dfrac{1}{\lambda}\right) = \alpha$ ise $n \to \infty$ için

$$\prod_{k=1}^{n}\left|1 - \frac{1}{k\lambda}\right| \sim \frac{1}{n^{\alpha}}$$

dır. Burada $a_n \sim b_n$ notasyonu ile (a_n / b_n) ve (b_n / a_n) dizilerinin sınırlı olması ifade edilmektedir. (Reade 1985)

Teorem 3.1.3: $\sigma_p\left(C_1^*, \ell_1\right) = F \cup \{1\}$ dir. Burada $F = \left\{\lambda \in \mathbb{C} : \left|\lambda - \frac{1}{2}\right| < \frac{1}{2}\right\}$ dır. (Reade 1985)

İspat: Teorem 3.1.1. in ispatında olduğu gibi $\left(C_1^* - \lambda I\right)x = 0$ olacak şekilde sıfırdan farklı bir $x = (x_n)$ dizisi vardır. Bu ifade açılırsa:

$$C_1^* x = \lambda x \;\Rightarrow\; \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/3 & 1/4 & ... \\ 0 & 1/2 & 1/3 & 1/4 & ... \\ 0 & 0 & 1/3 & 1/4 & ... \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ \vdots \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ \vdots \end{pmatrix}$$

$$
\begin{aligned}
x_0 + \frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{3}x_2 + \ldots &= \lambda x_0 \\
\frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{3}x_2 + \ldots &= \lambda x_1 \\
\frac{1}{3}x_2 + \ldots &= \lambda x_2 \\
&\vdots \\
\frac{1}{n+1}x_n + \frac{1}{n+2}x_{n+1} + \ldots &= \lambda x_n \\
&\vdots
\end{aligned}
$$

denklemleri elde edilir. Bu denklemler çözülürse $x_0 \neq 0$ olmak üzere $n \geq 1$ için

$$x_n = \prod_{k=1}^{n}\left(1 - \frac{1}{k\lambda}\right)x_0$$

elde edilir. Lemma 3.1.2 den $\operatorname{Re}\left(\frac{1}{\lambda}\right) = \alpha$ için $\sum\left(\prod_{k=1}^{n}\left|1 - \frac{1}{k\lambda}\right|\right)$ ve $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ serilerinin karakterleri aynıdır. Öte yandan $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ serisinin yakınsak olması için gerek ve yeter şart $\alpha > 1$ olmasıdır. Dolayısıyla $\sum |x_n|$ serisinin yakınsak olması için gerek ve yeter şart $\operatorname{Re}\left(\frac{1}{\lambda}\right) = \alpha > 1$ olmasıdır. Bir başka değişle $\sum |x_n| < \infty$ yani $x \in \ell_1$ olması için gerek ve yeter şart $\operatorname{Re}\left(\frac{1}{\lambda}\right) > 1$ olmasıdır. $\operatorname{Re}\left(\frac{1}{\lambda}\right) > 1$ ifadesi $\left|\lambda - \frac{1}{2}\right| < \frac{1}{2}$ ifadesine denk olduğuna göre $x \in \ell_1$ olması için gerek ve yeter şart $\left|\lambda - \frac{1}{2}\right| < \frac{1}{2}$ olmasıdır.

İspatın buraya kadar olan kısmını 1985 yılında Reade yapmıştır. Ancak 1989 yılında Okutoyi ve Thorpe $\lambda = 1$ değerinin de nokta spektrum kümesinin bir elemanı olduğunu yani bir öz değer olduğunu göstermişlerdir. Gerçekten de:

$x_0 \neq 0$ ve $n \geq 1$ için $x_n = 0$ dizisi yani $x = (x_0, 0, 0, \ldots)$ dizisi için $C_1^* x = \lambda x$ $(\lambda = 1)$ eşitliği sağlanır. Hâlbuki $x \neq \theta$ ve $x \in \ell_1$ olduğundan $\lambda = 1$ özdeğeridir.

Dolayısıyla $\sigma_p(C_1^*, \ell_1) = F \cup \{1\}$ dır. ■

c_0 uzayı bir Banach uzayı olduğundan Teorem 2.3.6 dan $\sigma(C_1,c_0)=\sigma(C_1^*,\ell_1)$ dir. Öte yandan $\sigma(C_1,c_0)$kümesi kapalı olduğundan $\left\{\lambda\in\mathbb{C}:\left|\lambda-\frac{1}{2}\right|\leq\frac{1}{2}\right\}\subseteq\sigma(C_1,c_0)$ yazılabilir. Şimdi bu kapsamanın eşitlik olduğunu görelim.

Teorem 3.1.4: $\sigma(C_1,c_0)=E=\left\{\lambda\in\mathbb{C}:\left|\lambda-\frac{1}{2}\right|\leq\frac{1}{2}\right\}$ dir (Reade 1985) .

İspat: $\rho(C_1,c_0)=\left\{\lambda\in\mathbb{C}:\left|\lambda-\frac{1}{2}\right|>\frac{1}{2}\right\}$ olduğunu göstermek yeterlidir. Diğer bir ifadeyle $\left|\lambda-\frac{1}{2}\right|>\frac{1}{2}$ şartını sağlayan λ sayıları için $(R_1),(R_2),(R_3)$ şartlarının sağlandığını göstermeliyiz. Teorem 3.1.1 gereğince $\sigma_p(C_1,c_0)=\varnothing$ olduğundan (R_1) şartı her λ sayısı için sağlanır. Buradan da $R_\lambda(C_1)$ operatörü mevcut olup $\lambda I-C_1$ operatörü 1-1 ve örtendir.

Şimdi de $\left|\lambda-\frac{1}{2}\right|>\frac{1}{2}$ şartını sağlayan λ sayıları için $(\lambda I-C_1)^{-1}\in B(c_0)$ olduğunu görelim. Bunun için Teorem 1.3.2 nin şartlarını sağlatalım. Eğer $(\lambda I-C_1)x=y$ denklemi açılırsa

$$\begin{pmatrix} \lambda-1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots \\ -1/2 & \lambda-1/2 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots \\ -1/3 & -1/3 & \lambda-1/3 & 0 & \dots & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots \\ -1/n & -1/n & -1/n & -1/n & \dots & \lambda-1/n & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \\ \vdots \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \\ \vdots \end{pmatrix}$$

$$(\lambda-1)x_0=y_0$$
$$\frac{-1}{2}x_0+\left(\lambda-\frac{1}{2}\right)x_1=y_1$$
$$\frac{-1}{3}x_0-\frac{1}{3}x_1+\left(\lambda-\frac{1}{3}\right)x_2=y_2$$
$$\vdots$$
$$\frac{-1}{n}x_0-\frac{1}{n}x_1-\dots+\left(\lambda-\frac{1}{n+1}\right)x_n=y_n$$
$$\vdots$$

denklem sistemi elde edilir. Bu denklemler y cinsinden çözülürse

$$x_0 = \frac{1}{\lambda - 1} y_0$$

$$x_1 = \frac{1}{\lambda - \frac{1}{2}} y_1 + \frac{1}{\lambda - \frac{1}{2}} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\lambda - 1} y_0$$

$$\vdots$$

$$x_n = \frac{1}{\lambda - \frac{1}{n+1}} y_n + \frac{1}{(n+1)\left(\lambda - \frac{1}{n+1}\right)\left(\lambda - \frac{1}{n}\right)} y_{n-1}$$

$$+ \frac{\lambda}{(n+1)\left(\lambda - \frac{1}{n+1}\right)\left(\lambda - \frac{1}{n}\right)\left(\lambda - \frac{1}{n-1}\right)} y_{n-2}$$

$$+ \cdots + \frac{\lambda^{n-2}}{(n+1)\prod_{i=2}^{n+1}\left(\lambda - \frac{1}{i}\right)} y_1 + \frac{\lambda^{n-1}}{(n+1)\prod_{i=1}^{n+1}\left(\lambda - \frac{1}{i}\right)} y_0$$

$$\vdots$$

elde edilir. Bu ise

$$a_{nk} = \begin{cases} \dfrac{\lambda^{n-(k+1)}}{(n+1)\prod_{i=k+1}^{n+1}\left(\lambda - \frac{1}{i}\right)} & ,0 \le k < n \\ \dfrac{1}{\lambda - \frac{1}{n+1}} & ,n = k \\ 0 & ,k > n \end{cases}$$

olmak üzere $A = (a_{nk}) = (\lambda I - C_1)^{-1}$ matrisini tanımlar. Dolayısıyla Lemma 3.1.2. gereğince her sabit k için $\lim_n a_{nk} = 0$ olur. Şimdi de $\|A\| = \sup_n \sum_k |a_{nk}| < \infty$ olduğunu görelim.

$n = 0$ için $\sum_{k=0}^{\infty} |a_{0k}| = |a_{00}| + |a_{01}| + |a_{02}| + ... = |a_{00}| = \left|\frac{1}{\lambda - 1}\right|$

$n \ge 1$ için $\operatorname{Re}\left(\frac{1}{\lambda}\right) = \alpha < 1$ olmak üzere Lemma 3.1.2 yardımıyla

$$\sum_{k=0}^{\infty} |a_{nk}| = \sum_{k=0}^{n-1} |a_{nk}| + |a_{nn}| + \sum_{k=n+1}^{\infty} |a_{nk}| = \left|\frac{1}{\lambda - \frac{1}{n+1}}\right| + \sum_{k=0}^{n-1}\left|\frac{\lambda^{n-(k+1)}}{(n+1)\prod_{i=k+1}^{n+1}\left(\lambda - \frac{1}{i}\right)}\right|$$

$$=\left|\frac{1}{\lambda-\frac{1}{n+1}}\right|+\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{(n+1)|\lambda|^{2}\prod_{i=k+1}^{n+1}\left|1-\frac{1}{i\lambda}\right|}$$

$$=\frac{1}{\left|\lambda-\frac{1}{n+1}\right|}+\frac{1}{(n+1)|\lambda|^{2}}\left\{\frac{1}{\prod_{i=1}^{n+1}\left|1-\frac{1}{i\lambda}\right|}+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{\prod_{i=1}^{k}\left|1-\frac{1}{i\lambda}\right|}{\prod_{i=1}^{n+1}\left|1-\frac{1}{i\lambda}\right|}\right\}$$

$$\leq O(1)+\frac{M(n+1)^{\alpha-1}}{|\lambda|^{2}}\left\{1+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k^{\alpha}}\right\}$$

$$\leq O(1)+\frac{M(n+1)^{\alpha-1}}{|\lambda|^{2}}\left\{1+\int_{0}^{n-1}\frac{dx}{x^{\alpha}}\right\}$$

$$\leq O(1)+\frac{M(n+1)^{\alpha-1}}{|\lambda|^{2}}\left\{1+\frac{(n-1)^{\alpha-1}}{1-\alpha}\right\}$$

$$\leq O(1)+\frac{1}{|\lambda|^{2}}\left\{(n+1)^{\alpha-1}+O(1)\right\}$$

elde edilir. Böylece $\operatorname{Re}\left(\frac{1}{\lambda}\right)=\alpha<1$ olduğundan $\sup_{n}\sum_{k=0}^{\infty}|a_k|<\infty$ olur. Böylece Teorem 1.3.2 nin şartları gerçeklendiğinden $(\lambda I-C_1)^{-1}=A\in B(c_0)$ dır. Dolayısıyla $\left|\lambda-\frac{1}{2}\right|>\frac{1}{2}$ için $\lambda\in\rho(C_1,c_0)$ dır.

3.2. c,ℓ_p,bv_0,bv Uzaylarında Cesaro Operatörünün Spektrumu

C_1 Cesaro operatörünün değişik uzaylar üzerindeki spektrumları Okutoyi ve Leibowitz tarafından verilmiştir. İlgili teorem ve sonuçları ispatsız olarak ifade edelim:

Teorem 3.2.1: $\sigma_p(C_1,c)=\{1\}$ dir (Okutoyi 1986) .

Teorem 3.2.2: $\sigma_p(C_1^{*},\ell_1)=F\cup\{1\}$ dir (Okutoyi 1986) .

Teorem 3.2.3: $\sigma(C_1,c)=E$ dir. Burada $E=\left\{\lambda\in\mathbb{C}:\left|\lambda-\frac{1}{2}\right|\leq\frac{1}{2}\right\}$ dır (Okutoyi 1986) .

Önerme 3.2.4: $A \in B(c)$ olsun. Bu durumda $\sigma(A,c) = \sigma(A,\ell_\infty)$ dur (Cartlidge 1978) .

Sonuç 3.2.5: $\sigma(C_1,\ell_\infty) = E$ dir.

Teorem 3.2.6: $1 < p < \infty$ olsun. Bu durumda $C_1 \in B(\ell_p)$ dir.

Teorem 3.2.7: $1 < p < \infty$ olsun. Bu durumda $\sigma_p(C_1,\ell_p) = \varnothing$ dir. (Leibowitz 1972)

Teorem 3.2.8: $\sigma_p\left(C_1^*,\ell_q\right) = \left\{\lambda \in \mathbb{C} : \left|\lambda - \frac{q}{2}\right| < \frac{q}{2}\right\}$ dur. (Leibowitz 1972)

Teorem 3.2.9: $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ olmak üzere $\sigma\left(C_1,\ell_p\right) = \left\{\lambda \in \mathbb{C} : \left|\lambda - \frac{q}{2}\right| \le \frac{q}{2}\right\}$ dur. (Leibowitz 1972)

Sonuç 3.2.10: $\sigma\left(C_1,\ell_2\right) = \left\{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda - 1| \le 1\right\}$ dir.

Teorem 3.2.11: $C_1 \in B(bv_0)$ dır (Okutoyi 1986).

Teorem 3.2.12: $\sigma_p(C_1,bv_0) = \varnothing$ dir (Okutoyi 1986) .

Lemma 3.2.13: $\lambda \in \mathbb{C}$ *ve* $\lambda \neq 0$ olmak üzere $z_n = \prod_{i=0}^{n}\left(1 - \frac{1}{(i+1)\lambda}\right)$ olsun. Bu durumda $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ serisinin kısmi toplamlar dizisinin sınırlı olması için gerek ve yeter şart $\lambda \neq 1$ olmak üzere $\mathrm{Re}\left(\frac{1}{\lambda}\right) \ge 1$ olmasıdır (Okutoyi 1986) .

Teorem 3.2.14: $\sigma_p\left(C_1^*,bs\right) = E - \{0\} = \left\{\lambda \in \mathbb{C} : \left|\lambda - \frac{1}{2}\right| \le \frac{1}{2}\right\} - \{0\}$ dur (Okutoyi 1986) .

Teorem 3.2.15: $\sigma(C_1, bv_0) = E$ dir (Okutoyi 1986) .

Teorem 3.2.16: $C_1 \in B(bv)$ dır (Okutoyi 1986) .

Teorem 3.2.17: $\sigma_p(C_1, bv) = \{1\}$dir (Okutoyi 1986) .

Teorem 3.2.18: $\sigma_p(C_1^*, C \oplus bs) = E - \{0\}$dir (Okutoyi 1986) .

Teorem 3.2.19: $\sigma(C_1, bv) = E$ dir (Okutoyi 1986) .

3.3. c Uzayında Ağırlıklı Ortalama Operatörünün Spektrumu

Bu kısımda c uzayı üzerinde ağırlıklı ortalama operatörünün spektrumu ile ilgili Cass F.P. ve Rhoades B.E'nin 1977 de yapmış olduğu çalışmaları ele alacağız. Aksi belirtilmedikçe $\gamma = \underline{\lim} \frac{p_n}{P_n}$, $\delta = \overline{\lim} \frac{p_n}{P_n}$ ve $G = \overline{\left\{ \frac{p_n}{P_n} : n \geq 0 \right\}}$ olacaktır.

Lemma 3.3.1: A bir ağırlıklı ortalama operatörü ve λ, $B = \lambda I - A = (b_{nk})$ olmak üzere $\forall\, n \text{ için } b_{nn} \neq 0$ olacak şekilde bir kompleks sayı olsun. Bu durumda $D = B^{-1} = (d_{nk})$ matrisi

(1) $$d_{nk} = \begin{cases} \dfrac{P_n}{\lambda P_n - p_n} & ,k = n \\ \dfrac{\lambda^{n-k-1} p_k}{P_n} \displaystyle\prod_{j=k}^{n} \dfrac{P_j}{P_j \lambda - p_j} & ,0 \leq k \leq n \\ 0 & ,k > n \end{cases}$$

ile verilir. (Cass ve Rhoades 1977)

Teorem 3.3.2: A bir ağırlıklı ortalama operatörü olsun. Bu durumda $\sigma(A, c) \subseteq E$ dir. (Cass ve Rhoades 1977)

İspat: İspat için Teorem 1.3.4'den yararlanacağız.

λ, $\left|\lambda - \frac{1}{2}\right| > \frac{1}{2}$ eşitsizliğini gerçekleyecek şekilde bir kompleks sayı olsun.

$\frac{-1}{\lambda} = \alpha + i\beta$ denirse $\alpha > -1$ olur. $j = 0,1,2,...$ için $0 \le \frac{p_j}{P_j} \le 1$ olduğundan

$$\left|1 - \frac{p_j}{P_j\lambda}\right| = \left|1 + (\alpha + i\beta)\frac{p_j}{P_j}\right| \ge \left|1 + \alpha\frac{p_j}{P_j}\right| = 1 + \alpha\frac{p_j}{P_j}$$

gerçeklenir. Lemma 3.3.1 den $k < n$ için

$$|d_{nk}| = \left|\frac{p_k\lambda^{n-k-1}}{P_n}\prod_{j=k}^{n}\frac{P_j}{P_j\lambda - p_j}\right| = \left|\frac{p_k\lambda^{n-k-1}}{P_n}\prod_{j=k}^{n}\frac{1}{\lambda - \frac{p_j}{P_j}}\right|$$

$$= \left|\frac{p_k\lambda^{n-k-1}}{P_n}\prod_{j=k}^{n}\frac{1}{\lambda\left(1 - \frac{p_j}{P_j\lambda}\right)}\right| = \left|\frac{p_k\lambda^{n-k-1}}{P_n}\frac{1}{\lambda^{n-(k-1)}}\prod_{j=k}^{n}\frac{1}{1 - \frac{p_j}{P_j\lambda}}\right|$$

$$= \left|\frac{p_k}{P_n\lambda^2}\prod_{j=k}^{n}\frac{1}{1 - \frac{p_j}{P_j\lambda}}\right| = \frac{p_k}{|\lambda|^2 P_n}\prod_{j=k}^{n}\frac{1}{\left|1 - \frac{p_j}{P_j\lambda}\right|}$$

$$\le \frac{p_k}{|\lambda|^2 P_n}\prod_{j=k}^{n}\frac{1}{1 + \alpha\frac{p_j}{P_j}} = f_{nk}$$

elde edilir. Buradan da

$$f_{n0} + f_{n1} = \frac{p_0}{|\lambda|^2 P_n}\prod_{j=0}^{n}\frac{1}{1 + \alpha\frac{p_j}{P_j}} + \frac{p_1}{|\lambda|^2 P_n}\prod_{j=1}^{n}\frac{1}{1 + \alpha\frac{p_j}{P_j}}$$

$$= \left(\frac{p_0}{|\lambda|^2 P_n}\frac{1}{1 + \alpha\frac{p_0}{P_0}} + \frac{p_1}{|\lambda|^2 P_n}\right)\prod_{j=1}^{n}\frac{1}{1 + \alpha\frac{p_j}{P_j}}$$

$$= \frac{p_0 + p_1(1+\alpha)}{|\lambda|^2 P_n(1+\alpha)}\prod_{j=1}^{n}\frac{1}{1 + \alpha\frac{p_j}{P_j}}$$

$$= \frac{P_1}{|\lambda|^2 P_n(1+\alpha)} \prod_{j=2}^{n} \frac{1}{1+\alpha \dfrac{p_j}{P_j}}$$

bulunur ve $0 < r < n$ için tümevarımla

$$\sum_{k=0}^{r} f_{nk} = \frac{P_r}{|\lambda|^2 P_n(1+\alpha)} \prod_{j=r+1}^{n} \frac{1}{1+\alpha \dfrac{p_j}{P_j}}$$

elde edilir. Dolayısıyla

$$\sum_{k=0}^{\infty} |d_{nk}| = \sum_{k=0}^{n-1} |d_{nk}| + |d_{nn}| + \sum_{k=n+1}^{\infty} |d_{nk}| \leq \frac{P_n}{|\lambda P_n - p_n|} + \sum_{k=0}^{n-1} f_{nk}$$

$$\leq \frac{1}{|\lambda|\left(1+\alpha \dfrac{p_n}{P_n}\right)} \left(1 + \frac{1}{(1+\alpha)|\lambda|}\right)$$

bulunur. Eğer $\alpha > 0$ ise $0 \leq \dfrac{p_n}{P_n} \leq 1$ olduğundan $1+\alpha \dfrac{p_n}{P_n} > 1$ ve eğer $-1 < \alpha \leq 0$ ise $1+\alpha \dfrac{p_n}{P_n} \geq 1+\alpha$ elde edilir. $M = \min\{1, 1+\alpha\}$ dersek yukarıdaki eşitsizlikte $\forall n$ için

$$\sum_{k=0}^{\infty} |d_{nk}| \leq \frac{1}{|\lambda| M} \left(1 + \frac{1}{M|\lambda|}\right) = O(1)$$

bulunur. Dolayısıyla

$$\sup_n \sum_k |d_{nk}| < \infty$$

elde edilir. Bu ise Teorem 1.3.4 gereğince $\left|\lambda - \dfrac{1}{2}\right| > \dfrac{1}{2}$ için $D = B^{-1} = (\lambda I - A)^{-1} \in B(c)$ olması demektir.

Teorem 3.3.3: A bir regüler ağılıklı ortalama operatörü olsun. Bu taktirde

$$\left\{\lambda \in \mathbb{C} : \left|\lambda - \frac{1}{2-\delta}\right| \leq \frac{1-\delta}{2-\delta}\right\} \cup G \subseteq \sigma(A, c)$$

dir. (Cass ve Rhoades 1977)

İspat: $\left|\lambda - \frac{1}{2-\delta}\right| \leq \frac{1-\delta}{2-\delta}$ şartlarını sağlayan λ kompleks sayıları için $\lambda \notin \rho(A,c)$ olduğunu görmek yeterlidir. Bunun için (R_2) şartının sağlanmadığını görelim. Önce her bir n için $\lambda \neq \frac{p_n}{P_n}$ olsun. Bu durumda (1) ifadesinden $k<n$ için

(2) $$|d_{nk}| = \frac{p_k}{|\lambda|^2 P_n} \prod_{j=k}^{n} \frac{P_j}{\left|P_j - \frac{p_j}{\lambda}\right|} = \frac{p_k}{|\lambda|^2 P_n} \frac{P_n}{P_{k-1}} \prod_{j=k}^{n} \frac{1}{\left|1+\left(1-\frac{1}{\lambda}\right)\frac{p_j}{P_{j-1}}\right|}$$

$$= \frac{p_k}{|\lambda|^2 P_{k-1}} \prod_{j=k}^{n} \frac{1}{\left|1+\left(1-\frac{1}{\lambda}\right)\frac{p_j}{P_{j-1}}\right|}$$

elde edilir. Diğer taraftan

$$\left|1+\left(1-\frac{1}{\lambda}\right)\frac{p_{n+1}}{P_n}\right| \leq 1$$

olması için gerek ve yeter şart $\frac{-1}{\lambda} = \alpha + i\beta$ olmak üzere

$$\left(1+(1+\alpha)\frac{p_{n+1}}{P_n}\right)^2 + \left(\beta\frac{p_{n+1}}{P_n}\right)^2 \leq 1$$

dır. Bu eşitsizliğin $p_{n+1}=0$ olacak biçimdeki her n için sağlandığı açıktır. Öte yandan $p_{n+1}>0$ biçimindeki her n için, bu ifade

$$2(1+\alpha) + \left[(1+\alpha)^2 + \beta^2\right]\frac{p_{n+1}}{P_n} \leq 0$$

ifadesine denktir. Bu ifadenin gerçekleşmesi için ise

$$\frac{p_{n+1}}{P_n} = \frac{\frac{p_{n+1}}{P_{n+1}}}{1-\frac{p_{n+1}}{P_{n+1}}}$$

ifadesi $\frac{p_n}{P_n}$ ye göre artan olduğundan yeterince büyük n ler için δ nın

$$2(1+\alpha) + \left[(1+\alpha)^2 + \beta^2\right]\frac{\delta}{1-\delta} \leq 0$$

ifadesini gerçeklemesi yeterlidir. Halbuki bu ifade

$$\left|\lambda-\frac{1}{2-\delta}\right|\leq\frac{1-\delta}{2-\delta}$$

eşitsizliğiyle eşdeğerdir. Dolayısıyla son eşitsizliği sağlayan λ kompleks sayısı bir önceki eşitsizliği de sağlar. O halde $\left|\lambda-\frac{1}{2-\delta}\right|\leq\frac{1-\delta}{2-\delta}$ şartını sağlayan λ kompleks sayıları için

$$|d_{nk}|\geq\frac{1}{|\lambda|^2}\frac{p_k}{P_k}$$

elde edilir. Böylece yeterince büyük n ler için

$$\sum_{k=N}^{n-1}|d_{nk}|\geq\frac{1}{|\lambda|^2}\cdot\sum_{k=N}^{n-1}\frac{p_k}{P_k}$$

olup $k\to\infty$ için $P_k\to\infty$ olduğundan Abel Dini Teoremi gereğince

$$\sup_n\sum_k|d_{nk}|=\infty$$

olur. Bu ise başlangıçtaki şartları sağlayan λ kompleks sayılar için $\lambda\notin\rho(A,c)$ ve dolayısıyla $\lambda\in\sigma(A,c)$ olmasıdır.

Şimdi de $\lambda=\frac{p_n}{P_n}$ için $\lambda\in\sigma(A,c)$ olduğunu görelim. Eğer $\lambda=\frac{p_n}{P_n}$ ise $B=\lambda I-A=(b_{nk})$ olmak üzere $b_{nn}=0$ olacağından $(\lambda I-A)^{-1}$ mevcut değildir. (R_1) şartı sağlanmadığından $\frac{p_n}{P_n}=\lambda\in\sigma(A,c)$ dir. Böylece

$$\left\{\lambda\in\mathbb{C}:\left|\lambda-\frac{1}{2-\delta}\right|\leq\frac{1-\delta}{2-\delta}\right\}\cup\left\{\frac{p_n}{P_n}:n\geq 0\right\}\subseteq\sigma(A,c)$$

elde edilir. c uzayının bir Banach uzayı ve $\sigma(A,c)$ kümesinin de kapalı olması nedeniyle ispat tamamlanmış olur.

Sonuç 3.3.4: A, $\delta=0$ olacak şekilde bir regüler ağırlıklı ortalama operatörü ise $\sigma(A,c)=E$ dir. (Cass ve Rhoades 1977)

İspat: Teorem 3.3.2 den $\sigma(A,c)\subseteq E$ dir. Teorem 3.3.3 de $\delta=0$ alınırsa $E\subseteq\sigma(A,c)$ dır. Bu ise ispatı tamamlar.

Teorem 3.3.5: A, $\gamma > 0$ olacak biçimde bir regüler ağırlıklı ortalama operatörü ise bu taktirde

$$\sigma(A,c) \subseteq \left\{ \lambda \in \mathbb{C} : \left| \lambda - \frac{1}{2-\gamma} \right| \le \frac{1-\gamma}{2-\gamma} \right\} \cup G$$

dir. (Cass ve Rhoades 1977)

İspat: Teorem 3.3.2 nedeniyle $\sigma(A,c) \subseteq E$ dir. Bu kapsamanın tersi ise $E^t \subset \rho(A,c)$ dir. E kapalı kümesinin içindeki hangi kompleks sayıların σ spektrum kümesine hangilerinin ρ resolvent kümesine ait olduğu araştırılıp, resolvent kümesinin elemanları daha iyi kavranmaya çalışılacaktır. Bunun için λ kompleks sayıları, $\left|\lambda - \frac{1}{2}\right| \le \frac{1}{2}$ eşitsizliğini gerçeklediğinde $\lambda \ne \frac{p_n}{P_n}$ ve $\left|\lambda - \frac{1}{2-\gamma}\right| > \frac{1-\gamma}{2-\gamma}$ şartını sağlayan λ kompleks sayıları için $\lambda \in \rho(A,c)$ olduğu görülecektir.

$\frac{-1}{\lambda} = \alpha + i\beta$ olsun. $\alpha \le -1$ dir. Ancak $\lambda \ne \frac{p_n}{P_n}$ kabul edildiğinden $\lambda \ne \frac{p_0}{P_0} = 1$ dır. $\lambda = 1$ için $\alpha = -1$ olacağından $\alpha < -1$ alınmalıdır.

(R_1) mevcutluk şartı (1) deki $D = (\lambda - IA)^{-1} = (d_{nk})$ matrisinin tanımlılığından sağlanır.

(R_3) yoğun kümede tanımlılık şartı da uzayın kendisinde tanımlı olduğundan sağlanır.

(R_2) sınırlılık şartını görelim. Bunu için $\sup_n \sum_k |d_{nk}| < \infty$ olduğunu görmeliyiz. Teorem 3.3.3 ün ispatındaki (2) ifadesinde $|d_{nk}| = \frac{p_k}{|\lambda|^2 P_{k-1}} \prod_{j=k}^{n} \frac{1}{\left| 1 + \left(1 - \frac{1}{\lambda}\right) \frac{p_j}{P_{j-1}} \right|}$ olduğu görülmüştü. O halde $\left| 1 + \left(1 - \frac{1}{\lambda}\right) \frac{p_j}{P_j} \right| > 1$ olduğunu görmeliyiz. Mutlak değerin içindeki değerler için $\frac{p_j}{P_j} = t$ ve $\frac{-1}{\lambda} = \alpha + i\beta$ denilirse;

$$f(t) = 1 + 2(1+\alpha)t + \left[(1+\alpha)^2 + \beta^2\right] t^2$$

fonksiyonunun $t_0 = \dfrac{-(1+\alpha)}{(1+\alpha)^2+\beta^2}$ noktasında bir minimum noktası vardır. Diğer yandan başta kabul edilen $\left|\lambda - \dfrac{1}{2-\gamma}\right| > \dfrac{1-\gamma}{2-\gamma}$ şartının bir denkliği de $\gamma\left(\alpha^2+\beta^2\right)+2\alpha > \gamma - 2$ dir. Buradan da $t_0 = \dfrac{-(1+\alpha)}{(1+\alpha)^2+\beta^2} < \dfrac{\gamma}{2(1-\gamma)}$ olduğundan $\forall\, t > \dfrac{\gamma}{2(1-\gamma)}$ için f fonksiyonu artandır. $\varepsilon > 0$ sayısı yeterince küçük seçilirse $f\left(\dfrac{\gamma}{1-\gamma} - \varepsilon\right) = f\left(\dfrac{\gamma}{1-\gamma}\right) - 2\cdot\varepsilon\cdot g(\varepsilon)$ elde edilir. f fonksiyonu $t > \dfrac{\gamma}{2(1-\gamma)}$ için artan olduğundan yeterince küçük $\varepsilon > 0$ için $g(\varepsilon) > 0$ dır.

Şimdi de $f\left(\dfrac{\gamma}{1-\gamma}\right) > 1$ olduğunu görelim. $\left|\lambda - \dfrac{1}{2-\gamma}\right| > \dfrac{1-\gamma}{2-\gamma}$ nın bir başka denkliği de $\left|\dfrac{1}{1-\gamma} - \dfrac{\gamma}{\lambda(1-\gamma)}\right| > 1$ olduğundan $f\left(\dfrac{\gamma}{1-\gamma}\right) > 1$ elde edilir.

Şimdi de ε sayısını $f\left(\dfrac{\gamma}{1-\gamma} - \varepsilon\right) = f\left(\dfrac{\gamma}{1-\gamma}\right) - 2\cdot\varepsilon\cdot g(\varepsilon) = \mu^2 > 1$ olacak şekilde seçelim. γ alt limit olduğundan $\forall\, n \geq N$ için

$$\frac{p_{n+1}}{P_n} = \frac{\dfrac{p_{n+1}}{P_{n+1}}}{1 - \dfrac{p_{n+1}}{P_{n+1}}} > \frac{\gamma}{1-\gamma} - \varepsilon$$

olacak biçimde bir $N > 0$ sayısı vardır. Böylece $\forall\, n \geq N$ için

$$f\left(\frac{p_n}{P_{n-1}}\right) > f\left(\frac{\gamma}{1-\gamma} - \varepsilon\right) = \mu^2$$

yazılabilir. Diğer taraftan $\forall\, n \geq N$ için

$$\frac{|d_{nk}|}{|d_{n+1,k}|} = f\left(\frac{p_{n+1}}{P_n}\right)^{1/2} > \mu > 1$$

elde edilir ki bu $\forall n,k \geq N$ için $|d_{nk}|$ nın n ye göre monoton azalmasıdır. Yani D matrisinin sütun elemanları sınırlıdır. Böylece $\sup_n \sum_k |d_{nk}| < \infty$ olduğunu görmek için $|d_{nn}|$ ve $\sum_{k=N}^{n-1} |d_{nk}|$ ifadelerinin sonlu olduğu görülmelidir.

$\dfrac{p_n}{P_{n-1}} = \dfrac{\dfrac{p_n}{P_n}}{1-\dfrac{p_n}{P_n}}$ ifadesi $\dfrac{p_n}{P_n}$ ifadesine göre monoton artan olduğundan $\forall\, n \geq N$ için $\dfrac{p_n}{P_n} < \dfrac{\gamma}{1-\gamma} + 1$ olacak biçimde yeterince büyük $N > 0$ sayısı seçilebilir. Bu durumda

$$\sum_{k=N}^{n-1} |d_{nk}| = \sum_{k=N}^{n-1} \frac{p_k}{|\lambda|^2 P_{k-1}} \prod_{j=k}^{n} \frac{1}{\left|1+\left(1-\frac{1}{\lambda}\right)\frac{p_j}{P_{j-1}}\right|}$$

$$\leq \frac{1}{|\lambda|^2}\left(\frac{\delta}{1-\delta}+1\right)\sum_{k=N}^{n-1}\prod_{j=k}^{n} \frac{1}{\left|1+\left(1-\frac{p_j}{P_{j-1}}\right)\right|}$$

$$< \frac{1}{|\lambda|^2}\left(\frac{\delta}{1-\delta}+1\right)\sum_{k=N}^{n-1} \frac{1}{\mu^{n-k-1}} = O(1)$$

eşitsizliği ile

$$|d_{nn}| = \left|\frac{P_n}{P_n\lambda - p_n}\right| = \frac{\dfrac{P_n}{P_{n-1}}}{|\lambda|\left|1+\left(1-\frac{1}{\lambda}\right)\frac{p_n}{P_{n-1}}\right|}$$

$$= \frac{1+\dfrac{p_n}{P_{n-1}}}{|\lambda|\left|1+\left(1-\frac{1}{\lambda}\right)\frac{p_n}{P_{n-1}}\right|} < \frac{2+\dfrac{\delta}{1-\delta}}{|\lambda|\,\mu} = O(1)$$

elde edilir. Son iki ifade birlikte göz önüne alındığında $\sup_n \sum_k |d_{nk}| < \infty$ dur. Teorem 1.3.4 den $(\lambda I - A)^{-1} = D \in B(c)$ dir. Bu ise (R_2) şartının sağlanmasıdır.

Sonuç 3.3.6: A, $\gamma = \lim \dfrac{p_n}{P_n} > 0$ olacak biçimde bir regüler ağırlıklı ortalama operatörü olsun. Bu durumda $W = \left\{ \dfrac{p_n}{P_n} : \dfrac{p_n}{P_n} < \dfrac{\gamma}{2-\gamma} \right\}$ olmak üzere

$$\sigma(A,c) = \left\{ \lambda \in \mathbb{C} : \left| \lambda - \frac{1}{2-\gamma} \right| \le \frac{1-\gamma}{2-\gamma} \right\} \cup W$$

dir. (Cass ve Rhoades 1977)

İspat: Teorem 3.3.3 ve Teorem 3.3.5 birlikte düşünülürse

$$\left\{ \lambda \in \mathbb{C} : \left| \lambda - \frac{1}{2-\gamma} \right| \le \frac{1-\gamma}{2-\gamma} \right\} \cup G \subseteq \sigma(A,c) \subseteq \left\{ \lambda \in \mathbb{C} : \left| \lambda - \frac{1}{2-\gamma} \right| \le \frac{1-\gamma}{2-\gamma} \right\} \cup G$$

dir. Eğer $\lambda \in G - W$ ise $\dfrac{\gamma}{2-\gamma} \le \lambda \le 1$ dir. Bu durumda ise

$$\left| \lambda - \frac{1}{2-\gamma} \right| \le \frac{1-\gamma}{2-\gamma}$$

olacağından

$$\sigma(A,c) = \left\{ \lambda \in \mathbb{C} : \left| \lambda - \frac{1}{2-\gamma} \right| \le \frac{1-\gamma}{2-\gamma} \right\} \cup W$$

bulunur.

3.4. c_0 *ve* ℓ_p Uzaylarında Ağırlıklı Ortalama Operatörünün Spektrumu

Ağırlıklı Ortalama Operatörünün c_0 *ve* ℓ_p uzayı üzerindeki spektrumu ile ilgili, önceki kısımdaki düşünce tarzıyla ispatlanabilen teoremleri ispatsız olarak, ℓ_p uzayı üzerindeki spektrumu ile ilgili teoremlerin bir kısmını da ispatlı olarak aşağıda ifade edelim.

Teorem 3.4.1: A, regüler bir ağırlıklı ortalama operatörü olsun. Bu durumda $\sigma(A,c_0) \subseteq E$ dir. (Rhoades 1987)

Teorem 3.4.2: A, regüler bir ağırlıklı ortalama operatörü olsun. Bu durumda

$$\left\{ \lambda \in \mathbb{C} : \left| \lambda - \frac{1}{2-\delta} \right| \le \frac{1-\delta}{2-\delta} \right\} \cup G \subseteq \sigma(A,c_0)$$

olur. (Rhoades 1987)

Sonuç 3.4.3: A, $\delta = 0$ olacak biçimde regüler bir ağırlıklı ortalama operatörü olsun. Bu durumda $\sigma(A, c_0) = E$ dir. (Rhoades 1987)

Teorem 3.4.4: A, $\gamma > 0$ olacak biçimde regüler bir ağırlıklı ortalama operatörü olsun. Bu durumda

$$\sigma(A, c_0) \subseteq \left\{ \lambda \in \mathbb{C} : \left| \lambda - \frac{1}{2-\delta} \right| \leq \frac{1-\delta}{2-\delta} \right\} \cup G$$

dir. (Rhoades 1987)

Sonuç 3.4.5: A, $\gamma = \lim \frac{p_n}{P_n} > 0$ olacak biçimde regüler bir ağırlıklı ortalama operatörü olsun. Bu durumda $W = \left\{ \frac{p_n}{P_n} : \frac{p_n}{P_n} < \frac{\gamma}{2-\gamma} \right\}$ olmak üzere

$$\sigma(A, c_0) \subseteq \left\{ \lambda \in \mathbb{C} : \left| \lambda - \frac{1}{2-\delta} \right| \leq \frac{1-\delta}{2-\delta} \right\} \cup W$$

dir. (Rhoades 1987)

Teorem 3.4.6: A bir ağırlıklı ortalama operatörü olsun. Bu durumda $A^{-1} \in B(\ell_p), (1 \leq p < \infty)$ olması için gerek ve yeter şart $0 \notin G$ olmasıdır. (Cartlidge 1978)

İspat: Kabul edelim ki $0 \in G$ olsun. $\ell_p, (1 \leq p < \infty)$ uzayı bir Banach uzayı olduğundan $\sigma(A, \ell_p)$ kapalıdır. Dolayısıyla $G \subset \sigma(A, \ell_p)$ dır. Kabulümüz de göz önünde bulundurulursa $0 \in \sigma(A, \ell_p)$ dır. Bu son ifade $\lambda = 0$ değerinin $(R_1), (R_2)$ *ve* (R_3) şartlarından en az birini sağlamadığı anlamındadır. $\lambda = 0$ için $\lambda I - A = -A$ operatörünün tersi mevcut dolayısıyla (R_1) şartı sağlanmaktadır. Bu durumda (R_2) sağlanmamaktadır. Yani $(\lambda I - A)^{-1} = (-A)^{-1}$ operatörü sınırlı değildir. Yani $A^{-1} \notin B(\ell_p)$ dir.

Şimdi de karşıt olarak $0 \notin G$ olsun. Lemma 3.3.1 den $\lambda = 0$ için

$$d_{nk}=\begin{cases}\dfrac{P_n}{p_n} & ,k=n\\ \dfrac{P_n}{p_n}-1 & ,k=n-1\\ 0 & ,diğer\ durumlarda\end{cases}$$

elde edilir. Böylece

$$\sup_n\sum_k|d_{nk}|=\sup_n\left\{|d_{n,n-1}|+|d_{nn}|\right\}=\sup_n\left\{\frac{2P_n}{p_n}-1\right\}$$
$$\leq 2\sup_n\left\{\frac{P_n}{p_n}\right\}-1=\frac{2}{\inf_n\left\{\frac{p_n}{P_n}\right\}}-1<\infty$$

$$\sup_k\sum_n|d_{nk}|=\sup_k\left\{|d_{k-1,k}|+|d_{kk}|\right\}=\sup_k\left\{\frac{P_k}{p_k}+\frac{P_k}{p_{k+1}}\right\}$$
$$\leq 2\sup_k\left\{\frac{P_k}{p_k}\right\}=\frac{2}{\inf_k\left\{\frac{p_k}{P_k}\right\}}<\infty$$

elde edilir. Teorem 1.3.5 ve Teorem 1.3.6 dan $A\in B(\ell_\infty)$ *ve* $A\in B(\ell_1)$ elde edilir. Teorem 1.3.7 gereğince $A^{-1}\in B(\ell_p)$ dir.

Lemma 3.4.7: $E_t=\left\{\lambda\in\mathbb{C}:(1-t)\dfrac{|\lambda|}{|\lambda-t|}\geq 1\right\}=\left\{\lambda\in\mathbb{C}:\left|\lambda-\dfrac{1}{2-t}\right|\leq\dfrac{1-t}{2-t}\right\}$

olmak üzere $0\leq t\leq r\leq 1$ için $E_r\subset E_t$ dir. (Cartlidge 1978)

Teorem 3.4.8: A bir ağırlıklı ortalama operatörü olsun. Eğer $A\in B(\ell_p)$, $(1\leq p<\infty)$ ise

$$\left\{\frac{p_n}{P_n}:n\geq 0\right\}\cup\left\{\lambda\in\mathbb{C}:\left|\lambda-\frac{1}{2-\delta}\right|\leq\frac{1-\delta}{2-\delta}\right\}\subseteq\sigma(A,\ell_p)$$

dir. (Cartlidge 1978)

Teorem 3.4.9: A bir ağırlıklı ortalama operatörü olsun. Bu durumda $A\in B(\ell_p),(1\leq p<\infty)$ ve $q>p$ ise

$$\rho(A,\ell_p)\cap\rho(A,\ell_\infty)\subseteq\rho(A,\ell_q)\quad \text{ve}\quad \sigma(A,\ell_q)\subseteq\sigma(A,\ell_p)\cup\sigma(A,\ell_\infty)$$

bağıntıları gerçeklenir. (Cartlidge 1978)

İspat: $A\in B(\ell_p),(1\le p<\infty)$ ve $q>p$ olsun. $\lambda\in\rho(A,\ell_p)\cap\rho(A,\ell_\infty)$ ise $(\lambda I-A)^{-1}\in B(\ell_p)\cap B(\ell_\infty)$ dur. Riesz Thorin teoremi gereğince $(\lambda I-A)^{-1}\in B(\ell_q)$ dur. Yani $\lambda\in\rho(A,\ell_q)$ dur. Bu ise $\rho(A,\ell_p)\cap\rho(A,\ell_\infty)\subseteq\rho(A,\ell_q)$ bağıntısının gerçeklenmesidir. Bu son ifadenin $\mathbb{C}$ kompleks sayılardaki tümleyeni de $\sigma(A,\ell_q)\subseteq\sigma(A,\ell_p)\cup\sigma(A,\ell_\infty)$ bağıntısıdır.

Teorem 3.4.10: Eğer A, $\gamma>0$ olacak şekilde bir ağırlıklı ortalama operatörü ise

$$\sigma(A,\ell_1)=\left\{\lambda\in\mathbb{C}:\left|\lambda-\frac{1}{2-\gamma}\right|\le\frac{1-\gamma}{2-\gamma}\right\}\cup\left\{\frac{p_n}{P_n}:n\ge 0\right\}$$

dır. (Cartlidge 1978)

Teorem 3.4.11: A, $\gamma>0$ olacak şekilde bir ağırlıklı ortalama operatörü olsun. Bu durumda $1\le p<\infty$ olmak üzere

$$\sigma(A,\ell_p)\subseteq\left\{\lambda\in\mathbb{C}:\left|\lambda-\frac{1}{2-\gamma}\right|\le\frac{1-\gamma}{2-\gamma}\right\}\cup\left\{\frac{p_n}{P_n}:n\ge 0\right\}$$

dır. (Cartlidge 1978)

Sonuç 3.4.12: A, $\lim\frac{p_n}{P_n}=\gamma>0$ olacak şekilde regüler bir ağırlıklı ortalama operatörü ise $1\le p<\infty$ olmak üzere

$$\sigma(A,\ell_p)=\left\{\lambda\in\mathbb{C}:\left|\lambda-\frac{1}{2-\gamma}\right|\le\frac{1-\gamma}{2-\gamma}\right\}\cup\left\{\frac{p_n}{P_n}:n\ge 0\right\}$$

dır. (Cartlidge 1978)

Teorem 3.4.13: A, $\lim \frac{p_n}{P_n} = \gamma$ olacak şekilde regüler bir ağırlıklı ortalama operatörü ve $A \in B(\ell_p), (1 \leq p < \infty)$ olsun. Eğer $q > p$ ise $\sigma(A, \ell_q) \subseteq \sigma(A, \ell_p)$ dır. (Cartlidge 1978)

İspat: $\gamma > 0$ olsun. Sonuç 3.4.12 den

$$\sigma(A, \ell_p) = \left\{ \lambda \in \mathbb{C} : \left| \lambda - \frac{1}{2-\gamma} \right| \leq \frac{1-\gamma}{2-\gamma} \right\} \cup \left\{ \frac{p_n}{P_n} : n \geq 0 \right\}$$

dır. O halde $\left| \lambda - \frac{1}{2-\gamma} \right| > \frac{1-\gamma}{2-\gamma}$ özelliğine sahip olan ve her n için $\lambda \neq \frac{p_n}{P_n}$ olan λ kompleks sayıları için $(\lambda I - A)^{-1} \in B(\ell_p)$ dolayısıyla da $(\lambda I - A)^{-1} \in B(\ell_\infty)$ dur. Riesz Thorin teoremi gereğince de $q > p$ için $(\lambda I - A)^{-1} \in B(\ell_q)$ elde edilir. Bu durumda $\lambda \in \rho(A, \ell_q)$ dur. Bu ise $\rho(A, \ell_p) \subseteq \rho(A, \ell_q)$ demektir.

$\gamma = 0$ olsun. Teorem 3.3.2 ve Önerme 3.2.4 nedeniyle $\sigma(A, \ell_\infty) \subseteq E$ dir. Teorem 3.4.8 de $\gamma = 0$ yazarsak $\left\{ \frac{p_n}{P_n} : n \geq 0 \right\} \cup E \subseteq \sigma(A, \ell_p)$ bulunur. Son iki kapsamadan $\sigma(A, \ell_\infty) \subseteq \sigma(A, \ell_p)$ dır. Teorem 3.4.9 nedeniyle de $\sigma(A, \ell_q) \subseteq \sigma(A, \ell_p)$ elde edilir.

BÖLÜM 4

c_0 UZAYINDA RHALY OPERATÖRÜNÜN SPEKTRUMU VE İNCE SPEKTRUMU

Bu bölümde bir $a=(a_n)$ skaler dizisi için

a) $L=\lim\limits_{n}(n+1)a_n$ limiti mevcut, sonlu ve sıfırdan farklı

b) $\forall n \text{ } için \text{ } a_n > 0$

c) $i \neq j \text{ } için \text{ } a_i \neq a_j$

d) $a=(a_n)$ monoton azalan bir dizi

olmak üzere $k \leq n$ *için* $a_{nk}=a_n$ ve diğer durumlarda $a_{nk}=0$ olmak üzere $R_a=(a_{nk})$ alt üçgensel Rhaly matrisinin, c_0 Banach uzayındaki ince spektrumu incelenecektir.

Bu bölümde aksi belirtilmedikçe $S=\{a_n : n=0,1,2,...\}$ olacaktır.

Lemma 4.1: Eğer $\operatorname{Re}\left(\frac{1}{\lambda}\right)=\alpha$ ise $n\to\infty$ için

$$\prod_{k=0}^{n-1}\left|1-\frac{a_k}{\lambda}\right| \sim \frac{1}{n^{\alpha L}}$$

dır. Burada $a_n \sim b_n$ notasyonu ile (a_n/b_n) ve (b_n/a_n) dizilerinin sınırlı olması ifade edilmektedir. (Yıldırım 1998)

Bu lemma özel olarak $(a_k)=\left(\frac{1}{k}\right)$ alınırsa Lemma 3.1.2 ye indirgenir.

Teorem 4.2: Eğer $0<L<\infty$ ise $S\cap(2L,\infty) \subseteq \sigma_p(R_a,c_0) \subseteq S\cap[2L,\infty)$ (Yıldırım 1998)

Teorem 4.3: Eğer $0<L<\infty$ ise

$$\left\{\lambda : \left|\lambda-\frac{L}{2}\right|<\frac{L}{2}\right\}\cup S\cup\{L\} \subseteq \sigma_p\left(R_a^*, c_o^* \cong \ell_1\right) \subseteq \left(\left\{\lambda : \left|\lambda-\frac{L}{2}\right|\leq\frac{L}{2}\right\}-\{0\}\right)\cup S$$

dır. (Yıldırım 1998)

Teorem 4.4: Eğer $0<L<\infty$ ise $\sigma(R_a,c_0)=\left\{\lambda:\left|\lambda-\frac{L}{2}\right|\leq\frac{L}{2}\right\}\cup S$ dır. (Yıldırım 1998)

Teorem 4.5: $0<L<\infty$ olsun. $\alpha=\mathrm{Re}\frac{1}{\lambda}$ olmak üzere eğer $\lambda\notin S$ ve $\alpha L>1$ ise bu durumda $\lambda\in III_1\sigma\left(R_a,c_0\right)$ dır. (Yıldırım 2002)

İspat: $\lambda\notin S$ olduğundan $T_\lambda=\lambda I-R_a$ matrisi bir alt üçgensel matris olup köşegen üzerindeki elemanları sıfırdan farklı olduğundan tersi vardır ve T_λ^{-1} mevcuttur.

Teorem 1.4.5 den c_0 uzayında $R_a^{*}=R_a^{\,t}$ dır. Bu durumda $T_\lambda^{*}x=\theta$ denklemini inceleyelim:

$$T_\lambda^{*}x=T_\lambda^{\,t}x\Rightarrow\begin{pmatrix}\lambda-a_0 & -a_1 & -a_2 & -a_3 & \cdots\\ 0 & \lambda-a_1 & -a_2 & -a_3 & \cdots\\ 0 & 0 & \lambda-a_2 & -a_3 & \cdots\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_0\\ x_1\\ x_2\\ \vdots\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\\ \vdots\end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}&\left(\lambda-a_0\right)x_0-\sum_{k=1}^{\infty}a_kx_k=0\\ &\left(\lambda-a_1\right)x_1-\sum_{k=2}^{\infty}a_kx_k=0\\ \Rightarrow&\left(\lambda-a_2\right)x_2-\sum_{k=3}^{\infty}a_kx_k=0\\ &\qquad\vdots\\ &\left(\lambda-a_n\right)x_n-\sum_{k=n+1}^{\infty}a_kx_k=0\\ &\qquad\vdots\end{aligned}$$

denklemleri elde edilir. Bu denklemler çözülürse

$$x_n=\left(1-\frac{a_{n-1}}{\lambda}\right)x_{n-1}$$

ifadesi buradan da $n\geq1$ için

$$x_n=\prod_{j=0}^{n-1}\left(1-\frac{a_j}{\lambda}\right)x_0$$

elde edilir. Buradan Lemma 4.1. nedeniyle

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|x_n\right|=\sum_{n=1}^{\infty}\left|\prod_{j=0}^{n-1}\left(1-\frac{a_j}{\lambda}\right)x_0\right|\ \text{ve}\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\alpha L}}$$

serilerinin karakterleri aynıdır. $\alpha L > 1$ olduğundan bu seri yakınsak olur, yani $x = (x_0, x_1, x_2, ...) \in \ell_1$ bulunur. Dolaysıyla T_λ^* operatörü 1-1 değildir. Teorem 1.2.10 den da T_λ operatörü yoğun bir değer kümesine sahip değildir yani $\overline{\Re(T_\lambda)} \neq c_0$ dır. Bu ise $T_\lambda \in III$ demektir.

Şimdi de $T_\lambda \in 1$ olduğunu görelim. Bunun için Teorem 1.2.11 den faydalanılabiliriz. Banach uzaylarında sınırlığın sürekliliğe denk olması ve c_0 ın Banach uzayı olması nedeniyle $\Re(T_\lambda^*) = c_0^*$ olduğunu göstermeliyiz. Fakat $c_0 \cong \ell_1$ olduğuna göre $R(T_\lambda^*) = \ell_1$ olduğunu göstermek yeterlidir. Bunun için $y = (y_n) \in \ell_1$ alalım. Bu durumda $T_\lambda^* x = y$ olacak şekilde $x = (x_n) \in \ell_1$ bulmalıyız. Şimdi $T_\lambda^* x = y$ denklemi incelenirse:

$$T_\lambda^* x = T_\lambda^t x \Rightarrow \begin{pmatrix} \lambda - a_0 & -a_1 & -a_2 & -a_3 & \cdots \\ 0 & \lambda - a_1 & -a_2 & -a_3 & \cdots \\ 0 & 0 & \lambda - a_2 & -a_3 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ \vdots \end{pmatrix}$$

yani

$$(\lambda - a_0)x_0 - \sum_{k=1}^{\infty} a_k x_k = y_0$$

$$(\lambda - a_1)x_1 - \sum_{k=2}^{\infty} a_k x_k = y_1$$

$$(\lambda - a_2)x_2 - \sum_{k=3}^{\infty} a_k x_k = y_2$$

$$\vdots$$

$$(\lambda - a_n)x_n - \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k x_k = y_n$$

$$\vdots$$

denklemleri elde edilir. $x_0 = 0$ alınırsa

$$x_1 = \frac{y_1 - y_0}{\lambda}$$

bulunur. Tümevarımla $n > 1$ için

$$x_n = \frac{1}{\lambda}\left\{\begin{array}{l} y_n - \frac{a_{n-1}}{\lambda}\cdot y_{n-1} - \frac{a_{n-2}}{\lambda}\cdot\left(1-\frac{a_{n-1}}{\lambda}\right)\cdot y_{n-2} \\ -\frac{a_{n-3}}{\lambda}\cdot\left(1-\frac{a_{n-2}}{\lambda}\right)\cdot\left(1-\frac{a_{n-1}}{\lambda}\right)\cdot y_{n-3} \\ -\cdots-\frac{a_1}{\lambda}\cdot\left(1-\frac{a_{n-1}}{\lambda}\right)\cdot\left(1-\frac{a_{n-2}}{\lambda}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{a_2}{\lambda}\right)\cdot y_1 \\ -\prod_{j=1}^{n-1}\left(1-\frac{a_j}{\lambda}\right)\cdot y_0 \end{array}\right\}$$

elde edilir. Bu ise $x = By$ için $n \geq 1$, $k \geq 0$ olmak üzere

$$\begin{array}{ll} b_{nn} = \frac{1}{\lambda} & \\ b_{n,n-1} = \frac{-a_{n-1}}{\lambda^2} & \\ b_{10} = \frac{-1}{\lambda} \; ve \; n>1 \; için \; b_{n0} = \frac{-1}{\lambda}\prod_{j=1}^{n-1}\left(1-\frac{a_j}{\lambda}\right) & \\ b_{nk} = \frac{-a_k}{\lambda^2}\prod_{j=k+1}^{n-1}\left(1-\frac{a_j}{\lambda}\right) & n \geq k+2 \; , \; n = 3,4,\ldots \; , \; k = 1,2,\ldots \\ b_{nk} = 0 \qquad k > n \geq 1 & \end{array}$$

ile verilen $b = (b_{nk})$ matrisini tanımlar. Lemma 4.1 gereğince

$$\frac{A}{n^{\alpha L}} \leq \prod_{j=1}^{n-1}\left|1-\frac{a_j}{\lambda}\right| \leq \frac{B}{n^{\alpha L}}$$

olacak şekilde A ve B pozitif sabitleri vardır. Böylece

$$\sum_{n=1}^{\infty}|b_{n0}| = |b_{10}| + \sum_{n=2}^{\infty}|b_{n0}| = \left|\frac{-1}{\lambda}\right| + \sum_{n=2}^{\infty}\left|\frac{-1}{\lambda}\prod_{j=1}^{n-1}\left(1-\frac{a_j}{\lambda}\right)\right|$$

$$= \frac{1}{|\lambda|} + \frac{1}{|\lambda|}\sum_{n=2}^{\infty}\left(\prod_{j=1}^{n-1}\left|1-\frac{a_j}{\lambda}\right|\right)$$

$$\leq \frac{1}{|\lambda|} + \frac{1}{|\lambda|}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{B}{n^{\alpha L}} = \frac{1}{|\lambda|} + \frac{B}{|\lambda|}\cdot\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^{\alpha L}}$$

ve $C = \sup ka_k$ olmak üzere $k \geq 1$ için

$$\sum_{n=1}^{\infty}|b_{nk}|=|b_{1k}|+|b_{2k}|+\ldots+|b_{k-1,k}|+|b_{kk}|+|b_{k,k+1}|+\sum_{n=k+2}^{\infty}|b_{nk}|$$

$$=\left|\frac{1}{\lambda}\right|+\left|\frac{-a_k}{\lambda^2}\right|+\sum_{n=k+2}^{\infty}\left|\frac{-a_k}{\lambda^2}\prod_{j=k+1}^{n-1}\left(1-\frac{a_j}{\lambda}\right)\right|$$

$$=\frac{1}{|\lambda|}+\frac{a_k}{|\lambda|^2}+\frac{a_k}{|\lambda|^2}\sum_{n=k+2}^{\infty}\left(\prod_{j=k+1}^{n-1}\left|1-\frac{a_j}{\lambda}\right|\right)$$

$$\leq\frac{1}{|\lambda|}+\frac{C}{|\lambda|^2}+\frac{a_k}{|\lambda|^2}\sum_{n=k+2}^{\infty}\left(\frac{\prod_{j=1}^{n-1}\left|1-\frac{a_j}{\lambda}\right|}{\prod_{j=1}^{k}\left|1-\frac{a_j}{\lambda}\right|}\right)$$

$$=\frac{1}{|\lambda|}+\frac{C}{|\lambda|^2}+\frac{a_k}{|\lambda|^2}\sum_{n=k+2}^{\infty}\left(\frac{\frac{B}{(n-1)^{\alpha L}}}{\frac{A}{k^{\alpha L}}}\right)$$

$$=\frac{1}{|\lambda|}+\frac{C}{|\lambda|^2}+\frac{a_k}{|\lambda|^2}\cdot\frac{B}{A}\cdot k^{\alpha L}\sum_{n=k+2}^{\infty}\frac{1}{(n-1)^{\alpha L}}$$

$$=\frac{1}{|\lambda|}+\frac{C}{|\lambda|^2}+\frac{a_k}{|\lambda|^2}\cdot\frac{B}{A}\cdot k^{\alpha L}\sum_{n=k}^{\infty}\frac{1}{(n+1)^{\alpha L}}$$

$$\leq\frac{1}{|\lambda|}+\frac{C}{|\lambda|^2}+\frac{a_k}{|\lambda|^2}\cdot\frac{B}{A}\cdot k^{\alpha L}\cdot\int_k^{\infty}\frac{1}{x^{\alpha L}}dx$$

$$=\frac{1}{|\lambda|}+\frac{C}{|\lambda|^2}+\frac{ka_k}{|\lambda|^2}\cdot\frac{B}{A}\cdot\frac{1}{\alpha L-1}$$

$$\leq\frac{1}{|\lambda|}+\frac{C}{|\lambda|^2}+\frac{C}{|\lambda|^2}\cdot\frac{B}{A}\cdot\frac{1}{\alpha L-1}$$

elde edilir. $\alpha L>1$ olduğundan $\sup_k\sum_n|b_{nk}|<\infty$ dur. Buradan ise $B\in B(\ell_1)$ olur. $y\in\ell_1$ olduğuna göre $x=By$ eşitliğinde $x\in\ell_1$ olup T_λ^* operatörü örtendir. Böylece Teorem 1.2.11 den T_λ operatörü sınırlı bir terse sahiptir. Yani $T_\lambda\in 1$ dir. Sonuç olarak $T_\lambda\in III_1$ yani $\lambda\in III_1\sigma(R_a,c_0)$ dır.

Teorem 4.6: $0<L<\infty$ olsun. Eğer $\lambda \notin S$ ve $\alpha L=1$ ise bu durumda $\lambda \in II_2\sigma\left(R_a,c_0\right)$ dır. (Yıldırım 2002)

İspat: $\lambda \notin S$ olduğundan $T_\lambda=\lambda I-R_a$ matrisi bir alt üçgensel matris olup köşegen üzerindeki elemanları sıfırdan farklı olduğundan tersi vardır ve T_λ^{-1} mevcuttur. O halde $T_\lambda \in 1\cup 2$ dir.

Bir önceki teoremdeki gibi T_λ^* adjoint operatörü göz önüne alınırsa $T_\lambda^* x=\theta$ denkleminde $n\geq 1$ için

$$x_n=\prod_{j=0}^{n-1}\left(1-\frac{a_j}{\lambda}\right)x_0$$

dır. Buradan Lemma yardımıyla

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|x_n\right|=\sum_{n=1}^{\infty}\left|\prod_{j=0}^{n-1}\left(1-\frac{a_j}{\lambda}\right)x_0\right| \quad \text{ve} \quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\alpha L}}$$

serilerinin karakterleri aynıdır. $\alpha L=1$ olduğundan da bu ifade ıraksak olur ve $x=\left(x_0,x_1,x_2,...\right)\in \ell_1$ olması için gerek ve yeter şart $x_0=0$ yani $x=0$ dır. Dolaysıyla T_λ^* operatörü 1-1 dir. O halde $T_\lambda^* \in 1\cup 2$ dır.

Tablo 2.2 gereğince $T_\lambda \in 1\cup 2$ ve $T_\lambda^* \in 1\cup 2$ ifadelerini sağlayan T_λ operatörü I_1 ya da II_2 durumunu sağlar. Yani $T_\lambda \in I_1\cup II_2$ dir. Teorem 4.3 den $\lambda\in\sigma\left(R_a,c_0\right)$ olduğundan $T_\lambda \notin I_1$ *ve* $T_\lambda \notin II_1$ dir. O halde $T_\lambda \in II_2$ dir. Bu ise $\lambda \in II_2\sigma\left(R_a,c_0\right)$ demektir.

Teorem 4.7: $0<L<\infty$ olsun. Eğer en az bir m $\left(m=0,1,2,...\right)$ için $\lambda=a_m$ ise bu durumda $\lambda=a_m \in III_3\sigma\left(R_a,c_0\right)$ dır. (Yıldırım 2002)

İspat: Önceki çalışmalarda olduğu gibi $\left(\lambda I-R_a^*\right)=T_\lambda^* x=0$ denklemi incelenirse

$$T_\lambda^* x=T_\lambda^t x \Rightarrow \begin{pmatrix} \lambda-a_0 & -a_1 & -a_2 & -a_3 & \cdots \\ 0 & \lambda-a_1 & -a_2 & -a_3 & \cdots \\ 0 & 0 & \lambda-a_2 & -a_3 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ \vdots \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix}$$

denklem sisteminden

$$\left(\lambda - a_0\right)x_0 - \sum_{k=1}^{\infty} a_k x_k = 0$$

$$\left(\lambda - a_1\right)x_1 - \sum_{k=2}^{\infty} a_k x_k = 0$$

$$\left(\lambda - a_2\right)x_2 - \sum_{k=3}^{\infty} a_k x_k = 0$$

$$\vdots$$

$$\left(\lambda - a_n\right)x_n - \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k x_k = 0$$

$$\vdots$$

denklemleri elde edilir.

Önce $\lambda = a_0$ olduğunu varsayalım. Bu durumda yukarıdaki denklem sisteminin ilk iki denkleminden $a_0 x_1 = 0$ elde edilir. Rhaly matrisinin elemanlarının pozitif olduğu hatırlanırsa $x_1 = 0$ dır. Diğer denklemlerde yerine yazılırsa $\forall n > 0$ *için* $x_n = 0$ olur.

Şimdi de $m > 0$ için $\lambda = a_m$ olduğunu varsayalım. Bu durumda yukarıdaki denklem sisteminin $m.$ *ve* $(m+1).$ denklemlerinden, $a_m x_{m+1} = 0$ yani $x_{m+1} = 0$ dır. Dolayısıyla da $\forall n > m$ *için* $x_n = 0$ dır. Demek ki $\lambda = a_0$ için $x = (x_n) = (x_0, 0, 0, ...)$ ve $\lambda = a_m$ için $x = (x_n) = (x_0, x_1, ..., x_m, 0, 0, ...)$ dır. Bu ise $x \in \ell_1$ anlamına gelir. Şu halde $(\lambda I - R_a^{\;*}) = T_\lambda^{\;*} x = 0$ eşitliğinde $x \in \ell_1$ bulunur. Bu ise $T_\lambda^{\;*} = T_{a_m}$ operatörünün 1-1 olmamasıdır. Teorem 1.2.10 den T_{a_m} yoğun bir değer kümesine sahip değildir. Yani $T_{a_m} \in III$ dır. Şu halde söz konusu n değerleri için $\lambda = a_m$ olduğundan $T_{a_m}^{\;-1}$ mevcut değildir. Yani $T_{a_m} \in 3$ tür. O halde $T_{a_m} \in III_3$ yani, $\lambda = a_m \in III_3 \sigma\left(R_a, c_0\right)$ elde edilir.

KAYNAKLAR

Akhmedov, A.M., Başar, F., (2003) On spectrum of the Cesaro operator. Proc. Inst. Math. Mech. Acad. Sci. Azerb., 19: 3-8

Akhmedov, A.M., Başar, F., (2004) On the fine spectrum of the Cesaro operator in c_0. Math. J. Ibaraki Univ., 36: 25-32

Brown, A., Halmos, P.R. ve Sheilds, A.L., (1965) Cesaro Operators. Acta Sci.Math., 26: 125-137

Brown, A. and Page, E., (1970) Elements of Functional Analysis. Von Nostrand Reinhold Comp. sh 237-242

Cass, F.P., and Rhoades, B.E., (1977) Mercerian Theorems Via Specrtal Theory. Pasific J.M. 73: 31-34

Cartlidge, J.M., (1978) Wegihted Mean Matrices as Operators on ℓ_p (Ph.D.Thesis). Indiana University

Goldberg, S., (1966) Unbounded Linear Operators. Mc Graw-Hill Book Comp, sh 59-66

Kreyszig, E., (1989) Introductory Functional Analysis with Applications. John Wiley & Sons Inc, New York, Chichester, Brisbane, Toronto, 688 s

Knopp, K., (1971) Theory and Applications of Infinite Series. Blackie and Son Ltd, London and Glasgow, 480 s

Leibowitz, G., (1972) Spectra of Discrete Cesaro Operators. Tamkang J. Math., 3: 123-132

Leibowitz, G., (1987) Rhaly Matrices. J.Math. Analysis and Aplications, 128: 272-286

Maddox, I.J., (1970) Elements of Functional Analysis. Cambridge University Pres, 208 s

Okutoyi, J.I., (1986) On the Spectrum of the Cesaro operator. (Ph.D. Thesis). Kenyatta University, Nairobi, Kenya,

Okutoyi, J.I., and Thorpe, B., (1989) The Spectrum of the Cesaro Operators on c_0. Math. Proc. Camb. Phil. Soc., 105: 123-129

Reade, J.B., (1985) On the Spectrum of the Cesaro operator. Bull. London. Math. Soc., 17: 263-267

Rhoades, B.E., (1987) The Spectrum of Weighted Mean Operators. Canad. Math. Bull., 30: (4)

Rhaly, JR.H.C., (1989) Terrace Matrices. Bull. London Math. Soc., 21: 399-406

Sharma N.K., (1972) Spectra of Conservative Matrices. Proceedings of the American Mathematical Society, 35: 515-518

Wenger, R.B., (1965) The Fine Spectra of Hölder Summability Operators. Indian J.Pure. Appl. Math., 6: 695-712

Wilansky, A., (1964) Topological divisors of zero and Tauberian Theorems. Trans. Amer. Math. Soc., 113: 240-251

Wilansky, A., (1984) Summability Through Functional Analysis. North Holland Mathematics Studies 85, Amsterdam, New York, Oxford

Yıldırım, M., (1996) On the Spectrum and fine spectrum of the Compact Rhaly Operators. Indian J.Pure Appl.Math., 27:779-784

Yıldırım, M., (1998)On the Spectrum of the Rhaly Operators on c_0 *and* c. Indian J. Pure. Appl. Math., 29(12): 1301-1309

Yıldırım, M., (2002) The Fine Spetra of the Rhaly Operators on c_0. Tuk J. Math, 26: 273-282

ÖZGEÇMİŞ

Pembe BARIM BAŞEL 1980 yılında Denizli'de doğdu. İlkokulu Denizli Müftü Ahmet Hulusi İlkokulunda, orta ve lise öğretimini ise Denizli Anadolu Lisesi'nde tamamladıktan sonra 2001 yılında Pamukkale Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümünden mezun oldu.

Bir yıl dershanede çalıştıktan sonra 2002 yılında M.E.B. tarafından Erzurum iline matematik öğretmeni olarak atanıp Erzurum ve Denizli illerinde çeşitli okullarda görev yaptı.

2005 yılında Pamukkale Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Yüksek Lisans programına başladı. Şu anda Denizli ilinde Acıpayam Anadolu Lisesinde görevine devam etmektedir.