

**T.C.
PAMUKKALE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
İNŞAAT MÜHENDİSLİĞİ ANABİLİM DALI**

**OPERATÖR AYIRMA METODU KULLANILARAK
ADVEKSİYON-DİSPERSİYON DENKLEMİNİN SAYISAL
ÇÖZÜMÜ**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

ERSİN BAHAR

DENİZLİ, OCAK - 2017

**T.C.
PAMUKKALE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
İNŞAAT MÜHENDİSLİĞİ ANABİLİM DALI**



**OPERATÖR AYIRMA METODU KULLANILARAK
ADVEKSİYON-DİSPERSİYON DENKLEMİNİN SAYISAL
ÇÖZÜMÜ**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

ERSİN BAHAR

DENİZLİ, OCAK - 2017

KABUL VE ONAY SAYFASI

ERSİN BAHAR tarafından hazırlanan “OPERATÖR AYIRMA METODU KULLANILARAK ADVEKSİYON-DİSPERSİYON DENKLEMİNİN SAYISAL ÇÖZÜMÜ” adlı tez çalışmasının savunma sınavı 13.01.2017 tarihinde yapılmış olup aşağıda verilen jüri tarafından oy birliği ile Pamukkale Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü İnşaat Mühendisliği Anabilim Dalı Yüksek Lisans Tezi olarak kabul edilmiştir.

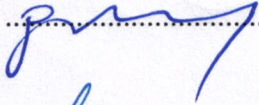
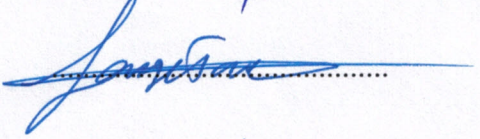
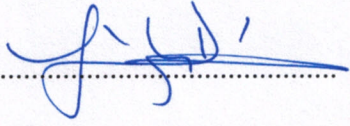
Jüri Üyeleri

İmza

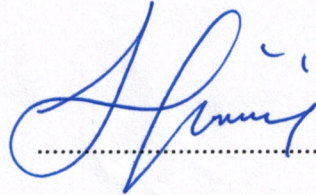
Danışman
Doç. Dr. Gürhan GÜRARSLAN
Pamukkale Üniversitesi

Üye
Prof. Dr. Gamze TANOĞLU
İzmir Yüksek Teknoloji Enstitüsü

Üye
Yrd. Doç. Dr. Fatih DİKBAŞ
Pamukkale Üniversitesi

Pamukkale Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun 18.01.2017 tarih ve 03/11 sayılı kararıyla onaylanmıştır.



Prof. Dr. Uğur YÜCEL

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

Bu tezin tasarımı, hazırlanması, yürütülmesi, araştırmalarının yapılması ve bulgularının analizlerinde bilimsel etiğe ve akademik kurallara özenle riayet edildiğini; bu çalışmanın doğrudan birincil ürünü olmayan bulguların, verilerin ve materyallerin bilimsel etiğe uygun olarak kaynak gösterildiğini ve alıntı yapılan çalışmalara atfedildiğine beyan ederim.


ERSİN BAHAR

ÖZET

OPERATÖR AYIRMA METODU KULLANILARAK ADVEKSİYON-DİSPERSİYON DENKLEMİNİN SAYISAL ÇÖZÜMÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

ERSİN BAHAR

PAMUKKALE ÜNİVERSİTESİ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

İNŞAAT MÜHENDİSLİĞİ ANABİLİM DALI

(TEZ DANIŞMANI: DOÇ. DR. GÜRHAN GÜRARSLAN)

DENİZLİ, OCAK - 2017

Operatör ayırma metotları adveksiyon-dispersiyon denkleminin çözümünde son yıllarda kullanım alanı bulmaya başlamıştır. Bu metotlar adveksiyon-dispersiyon denklemini, adveksiyon ve dispersiyon olmak üzere iki farklı prosese ayırmaktadır. Bu sayede hem proseslere uygun metot seçilerek sonuçlar iyileştirilmekte hem de çok boyutlu problemler bir boyutlu problemler gibi kolaylıkla çözülebilmektedir. Ancak bu metotların sağladığı faydaların yanında bazı ayırma hataları sonucu etkilemektedir.

Bu çalışmada operatör ayırma metotlarının çözüme olan etkileri incelenmiştir. Çalışma kapsamında Lie-Trotter ve Strang ayırma metotları olmak üzere iki operatör ayırma metodu kullanılmış ve çeşitli Courant ve Peclet sayılarında karşılaştırmaları yapılmıştır. Bu metotlar bir boyutta ve iki boyutta saf adveksiyon, adveksiyon-dispersiyon problemlerine uygulanmıştır. Ayrıca ani değişen çözümlere sahip problemde test edilmişlerdir.

Adveksiyon prosesinin çözümünde kübik spline interpolasyonunu kullanan bir karakteristikler metodu (MOC-CS), dispersiyon prosesinin çözümünde ise Crank-Nicolson (CN) sonlu fark şeması kullanılmıştır.

MOC-CS ve MOC-CS-CN metotları dört adet bir boyutlu ve iki adet iki boyutlu probleme uygulanmıştır. Elde edilen sonuçlar hem analitik çözümlerle hem de literatürdeki diğer yöntemlerle karşılaştırılmıştır. MOC-CS ve MOC-CS-CN metotlarının literatürdeki diğer yöntemlere göre daha düşük hata normlarına sahip olduğu görülmüştür. Bunun yanı sıra özellikle ani değişen çözümlere sahip problemlerde Strang ayırma metodunun etkinliği göze çarpmaktadır. MOC-CS ve MOC-CS-CN metotları koşulsuz stabildirler. Bununla birlikte yüksek zaman adımları kullanıldığında da kaliteli çözümler sağlamaktadırlar.

ANAHTAR KELİMELEER: Adveksiyon-Dispersiyon denklemi, Sonlu farklar, Operatör ayırma metodu, Karakteristikler metodu, Spline interpolasyonu

ABSTRACT

NUMERICAL SOLUTION OF ADVECTION-DISPERSION EQUATION USING OPERATOR SPLITTING METHOD

MSC THESIS

ERSİN BAHAR

PAMUKKALE UNIVERSITY INSTITUTE OF SCIENCE

CIVIL ENGINEERING

(SUPERVISOR:ASSOC. PROF. GÜRHAN GÜRARSLAN)

DENİZLİ, JANUARY 2017

In recent years operator splitting methods started to have an area of use in the solution of advection-dispersion equation. These methods split advection-dispersion equation into two different processes such as advection and dispersion. Thus suitable methods can be chosen for the nature of each process and also multidimensional problems can be solved as if they are one dimensional problems. However, in addition to the benefits provided by these methods, some splitting errors affect the end result.

In this study, effects of operator splitting methods to the solution of advection-dispersion equation are examined. Within the context of this work two operator splitting methods, Lie-Trotter and Strang splitting methods, were used and comparisons were made through various Courant and Peclet numbers. These methods have been implemented to pure advection and advection-dispersion problems in one- and two-dimensions. They have also been tested in a problem which has sharp gradient.

Numerical solutions of advection and dispersion processes were carried out by a characteristics method with cubic spline interpolation (MOC-CS) and Crank-Nicolson (CN) finite difference scheme, respectively.

MOC-CS and MOC-CS-CN methods were used to solve the six one- and two-dimensional problems. Obtained results were compared with analytical solutions of the problems and available methods in the literature. It is seen that MOC-CS and MOC-CS-CN methods have lower error norm values than the other methods. In addition, the effectiveness of Strang splitting in the solution of the problem which has a sharp gradient is eye-catching. MOC-CS and MOC-CS-CN methods are unconditionally stable and also they produce accurate results even while the time steps are great.

KEYWORDS: Advection-Dispersion Equation, Finite difference, Operator splitting method, Method of characteristics, Spline function

İÇİNDEKİLER

Sayfa

ÖZET.....	i
ABSTRACT	ii
İÇİNDEKİLER.....	iii
ŞEKİL LİSTESİ.....	v
TABLO LİSTESİ.....	vi
ÖNSÖZ.....	vii
1. GİRİŞ.....	1
1.1 Genel.....	1
1.2 Amaç.....	2
1.3 Kapsam.....	3
1.4 Literatür Özeti	3
2. AÇIK KANALLARDA KİRLETİCİ TAŞINIMI	14
2.1 Taşınım Mekanizması.....	14
2.1.1 Adveksiyon	15
2.1.2 Difüzyon	15
2.1.3 Hidrodinamik Dispersiyon.....	16
3. ADVEKSİYON DİSPERSİYON DENKLEMİNİN TÜRETİLMESİ...17	17
3.1 Yönetici Denklem.....	17
3.1.1 Advektif kütle girişi.....	18
3.1.2 Moleküler difüzyondan dolayı kütle girişi	18
3.1.3 Türbülanslı difüzyondan dolayı kütle girişi.....	19
3.1.4 Hidrodinamik dispersiyondan dolayı kütle girişi.....	20
4. ADVEKSİYON DİSPERSİYON DENKLEMİNİN NÜMERİK MODELLEMESİ.....24	24
4.1 Operatör Ayırma Metodu.....	25
4.1.1 Lie-Trotter Ayırma Metodu	26
4.1.2 Strang-Marchuk Ayırma Metodu.....	26
4.2 Adveksiyon Kısımının Çözümü	27
4.2.1 Spline Enterpolasyonuna Dayalı Karakteristikler Metodu.....	28
4.2.1.1 Lineer Splinelar	32
4.2.1.2 Kuadratik Splinelar	33
4.2.1.2.1 Bitiş Noktalarındaki Fonksiyon Değerleri	33
4.2.1.2.2 Ara Noktalardaki Fonksiyon Değerleri.....	34
4.2.1.2.3 Ara Noktalardaki Birinci Türevler.....	34
4.2.1.2.4 Sol Sınır Noktasındaki İkinci Türev Sıfır	35
4.2.1.3 Kübik Splinelar.....	35
4.2.1.3.1 Sabit Sınır Koşulu Kullanılarak Kübik Splineların Oluşturulması	37
4.2.1.3.2 Serbest Sınır Koşulu Kullanılarak Kübik Splineların Oluşturulması	41
4.3 Dispersiyon Kısımının Çözümü	42
4.3.1 Crank-Nicolson Şeması	42
5. SAYISAL UYGULAMALAR.....44	44
5.1 Bir Boyutlu Problemler	45
5.1.1 Birinci Problem	45

5.1.2	İkinci Problem.....	51
5.1.3	Üçüncü Problem.....	54
5.1.4	Dördüncü Problem	64
5.2	İki Boyutlu Problemler	65
5.2.1	Birinci Problem	65
5.2.2	İkinci Problem.....	69
6.	SONUÇLAR VE ÖNERİLER	72
7.	KAYNAKLAR	74
8.	ÖZGEÇMİŞ.....	82

ŞEKİL LİSTESİ

Sayfa

Şekil 2.1: Kirlenici taşınımının farklı mekanizmaları a) Adveksiyon, b) Difüzyon, c) Adveksiyon ve difüzyon, d) Dispersiyon.	14
Şekil 3.1: Sürelilik denklemi için elementsel düğüm noktalarının gösterimi. ..	17
Şekil 4.1: Karakteristikler metodunun düğüm noktaları.	30
Şekil 4.2: Geri karakteristiklerin düğüm noktaları.	31
Şekil 4.3: Crank-Nicolson metodunun sonlu farklar ile gösterimi.	42
Şekil 5.1: $\Delta x = 25$ m ve $\Delta t = 50$ s aralıklarında MOC-CS ile elde edilen nümerik çözümle analitik çözümün karşılaştırılması.	46
Şekil 5.2: $\Delta x = 25$ m ve $\Delta t = 50$ s aralıklarında MOC-CS ile elde edilen nümerik çözümle analitik çözümün karşılaştırılması ve kritik noktalar.....	52
Şekil 5.3: $\Delta x = 1$ m ve $\Delta t = 10$ s aralıklarında MOC-CS-CN ile elde edilen nümerik çözümle analitik çözümün karşılaştırılması ($Pe = 5$).....	55
Şekil 5.4: $\Delta x = 1$ m ve $\Delta t = 10$ s aralıklarında MOC-CS-CN ile elde edilen nümerik çözümle analitik çözümün karşılaştırılması ($Pe = 0.5$)...60	
Şekil 5.5: $\Delta x = 1$ m ve $\Delta t = 10$ s aralıklarında MOC-CS-CN ile elde edilen nümerik çözümle analitik çözümün karşılaştırılması ($Pe = 0.05$). 63	
Şekil 5.6: MOC-CS-CN ile elde edilen nümerik çözümle analitik çözümün karşılaştırılması.....	65
Şekil 5.7: İki boyutlu saf adveksiyon probleminin simülasyonu.....	66
Şekil 5.8: İki boyutlu adveksiyon-difüzyon probleminin simülasyonu.	70

TABLO LİSTESİ

Sayfa

Tablo 5.1: $t = 9600$ s' de çeşitli Courant sayıları için en büyük konsantrasyon değerleri.	46
Tablo 5.2: $t = 9600$ s' de sabit Δx ve farklı Δt ' ler için sonuçlar ve hatalar. .	48
Tablo 5.3: $t = 9600$ s' de sabit Δt ve farklı Δx ' ler için sonuçlar ve hatalar. .	49
Tablo 5.4: Hesaplanan sonuçların literatürdeki sonuçlarla karşılaştırılması.	49
Tablo 5.5: $t = 9600$ s'de hesaplanan hataların literatürdeki hatalarla karşılaştırılması.	50
Tablo 5.6: $t = 9600$ s'de hesaplanan hataların literatürdeki hatalarla karşılaştırılması.	50
Tablo 5.7: $t = 9600$ s'de kritik noktalarda hesaplanan konsantrasyon değerlerinin analitik çözümle karşılaştırılması ve hata normları ($\Delta x = 50$ m).	53
Tablo 5.8: Kritik noktalardaki değerlerin analitik çözümle karşılaştırılması ve hata normları.	54
Tablo 5.9: $t = 3000$ s' de hesaplanan konsantrasyon değerlerinin karşılaştırılması ($\Delta t = 1$ s).	56
Tablo 5.10: $t = 3000$ s' de hesaplanan konsantrasyon değerlerinin karşılaştırılması ($\Delta t = 10$ s).	57
Tablo 5.11: $t = 3000$ s' de hesaplanan konsantrasyon değerlerinin karşılaştırılması ($\Delta t = 30$ s).	58
Tablo 5.12: $t = 3000$ s' de hesaplanan konsantrasyon değerlerinin karşılaştırılması ($\Delta t = 60$ s).	59
Tablo 5.13: $t = 3000$ s' de hesaplanan konsantrasyon değerlerinin karşılaştırılması ($D = 0.02$ m ² /s).	61
Tablo 5.14: $t = 3000$ s' de hesaplanan konsantrasyon değerlerinin karşılaştırılması ($D = 0.2$ m ² /s).	62
Tablo 5.15: Farklı zaman aralıkları için hesaplanan L_{∞} hatalarının karşılaştırılması ($\Delta x = 1$ m).	62
Tablo 5.16: Çeşitli Courant sayıları için hesaplanan tepe noktasındaki hata değerleri ($\Delta x = 0.025$ m).	64
Tablo 5.17: Çeşitli Courant sayıları için hesaplanan kritik noktalardaki konsantrasyon ve hata değerleri ($\Delta x = \Delta y = 50$ m).	67
Tablo 5.18: Çeşitli Courant sayıları için hesaplanan kritik noktalardaki konsantrasyon ve hata değerleri ($\Delta x = \Delta y = 100$ m).	68
Tablo 5.19: Çeşitli Courant sayıları için hesaplanan tepe noktasındaki konsantrasyon ve hata değerleri ($\Delta x = \Delta y = 0.025$ m).	71

ÖNSÖZ

Tez çalışmam boyunca her zaman yanımda olan, bilgi ve tecrübelerini benimle paylaşan, manevi desteğini esirgemeyen, bugünkü bilgi seviyeme ulaşmamda çok büyük payı olan danışmanım, değerli hocam Doç. Dr. Gürhan GÜRARSLAN' a teşekkürü bir borç bilirim.

Çalışma süresince hoş sohbetleriyle keyiflendiren İnş. Yük. Müh. Ahmet TANRIKULU' na ve bölümdeki bütün değerli çalışma arkadaşlarıma teşekkürlerimi sunuyorum.

Ayrıca, hayatımın her alanında bana yol gösteren, maddi ve manevi desteklerini hiçbir zaman esirgemeyen, beni yetiştirip bugünlere gelmemde en büyük paya sahip olan, karşılıksız sevgilerini her zaman hissettiğim sevgili annem Semahat BAHAR' a, babam Tuncay BAHAR' a ve abim Emin BAHAR' a ne kadar teşekkür etsem azdır.

1. GİRİŞ

1.1 Genel

Nehirler, göller ve diğer doğal sular, medeniyetin ilk zamanlarından beri kentsel ve endüstriyel atıkların boşaltıldığı alıcı ortamlar olmuşlardır. İlk zamanlarda bu atıkların miktarı ve kompozisyonu çok önemli seviyelerde olmadığı için sucul ortamlarda olumsuz bir etki oluşturmuyorlardı. Ancak hızlı nüfus artışı, yaşam standartlarının yükselmesi ve sanayinin gelişmesi sonucu sucul ortamlara boşaltılan atık miktarının artmasına neden olmuştur. Bu durum çevreye geri dönüşü olmayan zararlar vermektedir. Büyük miktarda atığın ortadan kaldırılmasında yeteri kadar güvenilir yöntemlerin olmamasından dolayı, çevreye zarar verme eğilimi en azından birkaç on yıl boyunca daha devam edecektir. Nehirlerde meydana gelen kirliliği gidermek veya azaltmak için, açık kanallardaki kirletici taşınım süreçleri iyi kavranmalı ve yapılacak işlemler bu süreçlerin doğasına uygun hale getirilmelidir.

Akarsulardaki kirletici kaynakları aşağıdaki gibi sınıflandırılabilir:

- 1) Doğal kirleticiler: havza alanındaki yüzey zemininde yada kanal sınırı üzerindeki malzemede bulunan inorganik tuzlardır.
- 2) Kentsel kirleticiler: kanalizasyon ve yağmursuyu borularıyla taşınan atıklardır.
- 3) Endüstriyel kirleticiler: çok sayıda farklı endüstri tipinden kaynaklanan atıklardır. Deri endüstrisinden krom, tekstil ve boya endüstrisinden kurşun atıkları örnek olarak verilebilir.
- 4) Kaza sonucu ortama giren kirleticiler: kaza sonucu kimyasal, biyolojik veya radyoaktif atıkların sulara dökülmesi.

Bu kirleticilerin kısa vadedeki varlığı, sucul yaşamı olumsuz yönde etkilemektedir. Ancak, bu kirleticilerin balıklar tarafından sürekli olarak absorbe edilmesi insanların yaşamlarını tehlikeye sokabilmektedir. Örneğin, Japonya'daki civa kirliliği, kirlenmiş balıkları tüketen yüzlerce insanın ölümüne sebep olmuştur.

Bu kirleticilerin miktarı kritik bir seviyeye ulaştığında, nehirdeki çözülmüş oksijen miktarı ciddi miktarda azalmaya başlar ve bunun sonucunda sucul ortamdaki yaşam olumsuz etkilenir. Nehir debisinin büyük olduğu zamanlarda, kirleticiler boşaltım noktasından akış aşağısına doğru ilerledikçe konsantrasyonlarında seyrelme meydana gelmektedir. Bu nedenle, eğer kirletici boşaltım noktasından oldukça aşağısında yeralan bir su temini sistemi için bir su alma yapımız varsa bu sistem boşaltımdan çok fazla etkilenmeyecektir. Ancak akarsu debisi zamana göre çok değişken olduğu için yılın bazı dönemlerinde yeterli seyrelme sağlanamayabilmektedir. Planlanan tüm nehir deşarjlarının güvenli sınırlar dahilinde olmasını ve ekosisteme kalıcı hasar vermemesini sağlamak için, akım üzerindeki etkileri bakımından farklı giderim stratejilerinin analiz edilmesi gerekmektedir. Bu araştırmaları yapmak için kirletici karakteristikleri, taşınım süreci, farklı nitelikteki parametrelerin izin verilebilir sınırları (maksimum ağır metaller veya minimum çözülmüş oksijen gibi) ve iyileştirme seçenekleri hakkında yeterli seviyede bilgiye sahip olmak gerekmektedir (Srivastava, 2008).

1.2 Amaç

Nehirlerdeki, göllerdeki, okyanuslardaki ve yeraltı suyundaki kirletici madde taşınımını adveksiyon-dispersiyon denklemi ile temsil edilmektedir. Adveksiyon ve dispersiyon prosesleri eşzamanlı prosesler olmasına rağmen kütle taşınımını çok farklı bir biçimde yaparlar. Adveksiyon prosesi akış yönünde gerçekleşirken dispersiyon prosesi ise hem akış yönünde hem de akışın tersi yönünde gerçekleşir. Adveksiyon-dispersiyon denkleminde farklı davranış sergileyen hiperbolik (adveksiyon) ve parabolik (dispersiyon) terimlerin var olması matematiksel olarak bu problemin çözümünde birtakım nümerik güçlükler meydana getirmektedir. Adveksiyon-dispersiyon denkleminin sayısal çözümünde, klasik sonlu farklar ya da sonlu elemanlar yöntemlerinin kullanılması durumunda nümerik dispersiyon ve yapay salınım gibi iki önemli olumsuzluk söz konusudur.

Bu tez çalışmasının amacı, nümerik dispersiyon ve yapay salınımı önlemede operatör ayırma metodunun etkinliğini araştırmaktır. Tez çalışması kapsamında adveksiyon-dispersiyon denklemi operatör ayırma metodu kullanılarak adveksiyon

ve dispersiyon denklemleri olarak ikiye bölünecektir. Dispersiyon kısmı için Crank-Nicolson sonlu fark şeması, adveksiyon kısmı içinse kübik spline interpolasyonuna dayalı bir karakteristikler yöntemi uygulanacaktır. Elde edilen sonuçlar, literatürde verilen analitik ve nümerik sonuçlarla karşılaştırılacaktır.

1.3 Kapsam

Bu tez çalışması altı bölümden oluşmaktadır. Çalışmanın ikinci bölümünde, açık kanallardaki kirletici taşınımı hakkında bilgiler verilmiştir. Kirletici taşınımını etkileyen adveksiyon, difüzyon ve hidrodinamik dispersiyon süreçleri anlatılmış ve bu süreçlerin tanımları yapılmıştır. Üçüncü bölümde, adveksiyon-dispersiyon denklemini kirletici kütle dengesinden türetilmiştir. Dördüncü bölümde tez kapsamında, adveksiyon-dispersiyon denkleminin çözümünde kullanılacak nümerik metotlara yer verilmiştir. Bunlar operatör ayırma metotları, spline interpolasyonuna dayalı karakteristikler metodu ve Crank-Nicolson şemasından oluşmaktadır. Beşinci bölümde, tez kapsamında kullanılacak nümerik metotların etkinliği bir boyutlu ve iki boyutlu sayısal örneklere uygulanarak test edilmiştir. Elde edilen sonuçlar analitik ve literatürdeki diğer çalışmaların sonuçlarıyla karşılaştırılmıştır. Altıncı bölümde ise, çalışmanın tamamında elde edilen sonuçlar değerlendirilerek özetlenmiş ve ileriye yönelik yapılacak olan çalışmalara ilişkin çeşitli öneriler sunulmuştur.

1.4 Literatür Özeti

Adveksiyon-dispersiyon denkleminin içerdiği proseslerin doğasından kaynaklanan bazı zorluklardan dolayı nümerik çözümü literatürde uzun yıllardır aktif bir araştırma alanı olmuştur. Adveksiyon ve dispersiyon eşzamanlı prosesler olmasına rağmen kütle taşınımına çok farklı etki etmektedirler. Adveksiyon taşınımı sadece geçmişteki durumdan etkilenecek şekilde karakteristik çizgi boyunca meydana gelir. Ancak dispersiyon taşınımı hem geçmiş hem de anlık durumların her ikisinden de etkilenecek şekilde karakteristik çizgiler arasında meydana gelir. Bunun anlamı hiperbolik terimleri(adveksiyon) ve parabolik terimleri(dispersiyon) eş zamanlı olarak ele alabilen bir nümerik metoda ihtiyaç duyulmasıdır. Bu problemin

tamamıyla üstesinden gelebilecek bir nümerik metot yoktur (Baptista, 1987; Zheng ve Bennett, 2002).

Holly ve Usseglio-Polatera (1984), iki boyutlu gelgit akımlarındaki kirlatici dispersiyonunu modellemek için hassas bir nümerik metot geliştirmişlerdir. Bu metot adveksiyon kısmının çözümünde yüksek mertebe bikübik Hermite enterpolasyonu ile karakteristikler yaklaşımını kullanmaktadır. Çoğu sonlu farklar ve sonlu elemanlar şemalarında meydana gelen aşırı salınımlardan kaçınılmaktadır. Çalışmada difüzyon kısmı için ise Crank-Nicolson şeması kullanılmıştır. Operatör ayırma algoritması sabit bir Eulerian mesh üzerindeki kirlatici dispersiyonunun hassas simülasyonu için basit ve ekonomik bir metot sağlamaktadır. Konsantrasyon bölgelerinin dispersiyonunun Lagrangian hesapları için özel bir yöntem, kaynak çıkış noktalarının gelişiminin erken evrelerini simule etmiştir. Bu çeşitli yöntemleri detaylı olarak açıklamışlar, performanslarını gösteren uygulamalar yapmışlar ve Fransa'daki Saint-Brieuc körfezine uygulamışlardır.

Noye ve Tan (1989) adveksiyon-difüzyon denkleminin çözümü için düzenlenmiş eşdeğer kısmi diferansiyel denklem yaklaşımı ile ağırlık katsayılı ayrıştırma kullanarak çeşitli hassas sonlu farklar metotları geliştirmişlerdir. Bu yeni metotlar önce bir boyutlu daha sonra ise iki boyutlu adveksiyon-difüzyon denkleminde başarılı bir şekilde uygulanmıştır. Hassaslık ve stabilite faktörleri göz önünde bulundurularak söz konusu metotların sonuçları geleneksel sonlu farklar şemalarının sonuçları ile karşılaştırılmıştır. Çalışma sonucunda yeni metotların daha hassas ve genellikle daha stabil olduğu sonucuna varılmıştır.

Yang ve Hsu (1990) çalışmasında Holly-Preissmann (1977)' in uyguladıkları metoda benzer şekilde yeni bir interpolasyon tekniği oluşturmuşlardır. Polinom parametreleri olarak zaman ekseni üzerindeki iki noktada bağımlı değişkenlerin zamana göre türevlerini kullanmaktadır. Yapılan hata analizleri sonuçlarına göre yeni metodun Holly-Preissmann (1977) metoduna göre daha doğru sonuçlar verdiğini göstermişlerdir. Yeni önerdikleri metot saf adveksiyon ve adveksiyon-difüzyon problemlerinde Courant sayısının 1' den küçük olduğu durumlarda daha iyi sonuçlar vermektedir.

Chen ve Falconer (1992) nehir ağızlarındaki ve kıyılardaki su kalitesini modelleme çalışmalarında son yıllarda oldukça yaygın şekilde kullanılan QUICK sonlu farklar şemasını modifiye etmişler ve stabilite analizlerini yapmışlardır. Üç farklı sınır koşuluna göre çözülen örneklerden elde edilen sonuçları, diğer ikinci merteye hassas fark şemalarının sonuçları ve analitik sonuçlarla karşılaştırmışlardır. Ayrıca operatör ayırma yöntemlerinden ADI tekniğini kullanarak QUICK şemasını (ADI-QUICK) iki boyutlu probleme de uygulamışlardır. Benzer metotlardan elde edilen sonuçlarla karşılaştırıldığında ilgi çekici sonuçlar elde etmişlerdir.

Szymkiewicz (1993) bir boyutlu adveksiyon-difüzyon denkleminin çözümüyle ilgilenmiştir. Uyguladığı çözüm yönteminin temeli proses ayırma tekniğine dayanmaktadır. Denklem, adveksiyon ve difüzyon olmak üzere prosesleri ifade eden iki parçaya ayrılarak çözülmüştür. Adveksiyon taşınım denklemini, enterpolasyon için kübik spline denklemini kullanan karakteristikler metodu ile çözmüştür. Difüzyon denklemini ise standart Galerkin sonlu elemanlar metodu ile çözmüştür. Elde ettiği sonuçları Holly-Preissmann (1977)'in çözümü ve analitik sonuçlarla karşılaştırarak metodun oldukça hassas sonuçlar verdiğini göstermiştir.

Ataie-Ashtiani ve diğ. (1996) Taylor serisi analizinden adveksiyon-dispersiyon-reaksiyon denkleminin sonlu fark çözümlerinde meydana gelen kesme hataları için bir iyileştirme yöntemi geliştirmişlerdir. Birinci mertebeden reaksiyon terimi içeren adveksiyon-dispersiyon denkleminin çözümüne etkisini göstermek için açık bir sonlu fark şeması kullanmışlardır. Analitik sonuçlarla karşılaştırdığında iyileştirme uygulanmayan çözümdeki hataların göz ardı edilemez olduğunu ve iyileştirme uygulandığında sonuçların daha hassas olduğunu göstermişlerdir.

Mohamad (1997) saf adveksiyon ve adveksiyon-difüzyon denklemlerini çözmek için konumda dördüncü ve zamanda ikinci merteye hassas bir metot önermiştir. Adveksiyon terimlerini ayırırken MacCormack (MC) zaman ayırma şemalarını, çeşitli sonlu fark şemaları ile birlikte kullanmıştır. Çeşitli sonlu fark şemaları kullanarak, hata mertebeleri aynı olmasına rağmen her sonlu fark şemasının aynı hassaslıkta çözüm sağlamadığını görmüştür. Önerdiği metodu çeşitli örneklere uygulamıştır ve elde ettiği sonuçları geleneksel MC şemasının sonuçları ve analitik sonuçlarla karşılaştırmıştır. Hassaslık ve uygulamada basitlik düşünüldüğünde

önerilen metodun çekici olduğu fakat stabilite analizlerinin gösterdiği üzere koşullu stabil olduğu sonucuna varmıştır.

Karpik ve Crockett (1997) çalışmasında karmaşık geometriye sahip kararsız adveksiyon-difüzyon denkleminin çözümü için yarı-Lagrangian bir metod sunmuşlardır. Adveksiyon ve difüzyon süreçlerini ayırarak çözen bir strateji uygulamışlardır. Adveksiyon kısmının çözümü için karakteristik çizgiler boyunca geriye doğru yörüngeyi takip etmişler ve arada kalan değerleri enterpolasyon ile hesaplamışlardır. Enterpolasyonu bir kübik spline denklemi ile yapmışlardır. Metod programlama açısından basittir ve oldukça hassas sonuçlar vermektedir. Geleneksel Eularian şemalarına göre nümerik hatalar oldukça düşüktür. Bir boyutlu ve dikdörtgen biçiminde iki boyutlu çözüm uzaylarında önerilen metod, iyi bilinen yarı-Lagrangian şema ile karşılaştırılabilir sonuçlar vermektedir. Ancak yeni metod karmaşık geometriye sahip problemlerin çözümünde oldukça etkilidir.

Zerroukat ve diğ. (2000) doğrusal adveksiyon-difüzyon problemlerini serbest düğüm noktaları oluşturarak çözen açık ve kapalı şemalar geliştirmişlerdir. Sabit düğüm aralıklarına sahip metodların aksine bu şemaların iyi dağıtılan yarı-rastgele düğüm aralıkları kullandığını ve küresel radyal tabanlı denklemleri kullanarak sonuca yaklaştığını açıklamışlardır. Şemalar, sabit düğüm aralıklarından oluşan bir sistem yerine rastgele noktalar kullanan genelleştirilmiş sonlu farklar şeması olarak görülebilir. Bu özelliğin faydasını, karmaşık şekilli sınırlara sahip çok boyutlu problemlerde karmaşık düğüm yapısına ihtiyaç duymadan çözüm sağlaması olarak belirtmişlerdir.

Tsai ve diğ. (2001) adveksiyon-dispersiyon denkleminin çözümü için integrale dayalı bir şema önermişlerdir. Önerilen şemada, çözüm bölgesi çeşitli sayıda elemanlara ayrılmaktadır. Her elemanın orta noktasındaki yaklaşık konsantrasyon değeri kuadratik bir polinom yardımıyla elde edilmektedir. Daha sonra elemanlar, komşu elemanların sınır noktalarındaki konsantrasyon değerlerinin birinci türevlerinin sürekliliği ilkesiyle birbirleriyle ilişkilendirilmektedir. Önerilen şema koşulsuz stabildir ve tridiyagonal sistem denklemleri verir. Bu denklemler Thomas algoritmasıyla etkili bir şekilde çözülebilir. Önerilen şema, operatör ayırma metodu yardımıyla kolay bir şekilde çok boyutlu problemlerin çözümünde kullanılabilir. Önerilen şemanın performansı beş adet nümerik örnekte

denenmiştir. Sonuçlara bakıldığında önerilen şemanın tatmin edici hesaplama performansı verdiği görülmüştür.

Ahmad ve Kothary (2001) saf adveksiyon sürecinin çözümü için yeni bir nümerik şema önermişlerdir. Önerilen şemanın temeli geri karakteristikler metoduna dayanmaktadır. Bu şema zaman çizgisi üzerindeki karakteristik konsantrasyonları kübik spline enterpolasyon metodunu kullanarak elde eder. 1, 1/2, 1/3, 1/4 vb. gibi Courant sayılarında elde edilen sonuçlar analitik çözümle aynıdır. Diğer Courant sayıları içinde önerilen şemanın performansı iyidir. Yazarlar şemayı iki boyutlu adveksiyon denklemine genişletmişlerdir. Bir boyutlu adveksiyon-difüzyon denkleminin adveksiyon kısmı için önerilen şemayı ve difüzyon kısmı için ise Crank-Nicolson şemasını kullanmışlardır. Elde ettikleri sonuçları analitik çözümle karşılaştırmışlardır.

Kalita ve diğ. (2002) çeşitli konveksiyon katsayılarına sahip iki boyutlu kararsız konveksiyon-difüzyon denklemi için zaman ayrıştırmasında ağırlık katsayılı yüksek mertebeden kompakt şemalar geliştirmişlerdir. Şemalar, ağırlık parametresi seçimine bağlı olarak zamanda ikinci veya daha düşük mertebeye ve konumda ise dördüncü mertebeden kesinliğe sahiptir. $0 \leq \mu \leq 1$ aralığında şemalar koşulsuz stabildir. Bir boyutlu doğrusal konveksiyon-difüzyon problemine ve üç farklı akım için iki boyutlu Navier-Stokes denklemlerine uygulamışlardır. Analitik sonuçlarla kusursuz uyum içinde olan nümerik sonuçlar elde etmişlerdir. Şemaların güçlü, etkili ve hassas olduğu sonucuna varmışlardır.

Dehghan (2004) sabit katsayılı bir boyutlu adveksiyon-difüzyon denkleminin çözümü için çeşitli nümerik teknikler geliştirmiş ve karşılaştırmıştır. Bu teknikleri iki-seviye sonlu fark yaklaşımlarına dayanarak geliştirmiştir. Bu çalışmada kullandığı sonlu fark denklemlerinin analizinin temeli 1974 Warming ve Hyett' in çalışmasından geliştirilen düzenlenmiş eşdeğer kısmi diferansiyel denklem yaklaşımıdır. Yeni geliştirilen metotlar geleneksel metotlara göre daha kesin ve daha etkili sonuçlar vermiştir. Bu metotlar nümerik difüzyondan bağımsızlardır.

Karaa ve Zhang (2004) zamana bağlı konveksiyon-difüzyon problemlerinin çözümü için yüksek mertebeden bir ADI metodu önermişlerdir. Önerilen metot konumda dördüncü ve zamanda ikinci mertebededir ve çoklu bir boyutlu

tridiyagonal algoritma kullanımına olanak sağlayarak, hesaplama süresinde önemli miktarda kazanç sağlamakta ve etkili bir çözüm sunmaktadır. Fourier analizi ile metodun iki boyutlu problemler için koşulsuz stabil olduğunu göstermişlerdir. Metodun hassaslığını standart ikinci mertebe Peaceman-Rachford ADI metodu ve Noye ve Tan'ın konumda üçüncü mertebeden kompakt şeması ile karşılaştırmak için nümerik çözümler yapmışlardır.

Tsai ve diğ. (2004) adveksiyon-difüzyon denkleminin çözümü için kübik-spline enterpolasyonunu kullanan karakteristikler metodunu önermişlerdir. Kübik-spline enterpolasyonu yapmak için sınır noktalarında kullanılan kısıtların çözüm kalitesi üzerindeki etkileri incelenmiştir. Kullanılan dört farklı kısıt (birinci türev, ikinci türev, kuadratik ve not-a-knot) içerisinde not-a-knot ve birinci türev kısıtlarının en iyi sonucu verdiği gözlemlenmiştir. Ancak kesinlik ve uygulama kolaylığı düşünüldüğünde, not-a-knot kısıtının adveksiyon-difüzyon denkleminin çözümü için en iyi seçenek olduğu ifade edilmiştir.

Shou-dong ve diğ. (2005) yapmış oldukları çalışmada operatör ayırma metodu fikrine dayanan iki tane yüksek mertebeden şema önermişlerdir. Bu iki operatör ayırma şeması kullanılarak, üç boyutlu adveksiyon-difüzyon denklemi çok sayıda bir boyutlu denkleme ayrıştırılmıştır. Her yönde sadece üç düğüm noktasına ihtiyaç olmasına rağmen konumdaki hassaslık dördüncü mertebededir. Ayrıca, bu çalışmada, klasik ADI şemasına dayanan üçüncü bir şema önerilmiştir ve bu şemanın adveksiyon teriminin konumdaki kesinliği dördüncü mertebededir. Bu şemaların Peclet sayısının 5' ten küçük olduğu durumlarda analitik sonuçlarla uyumlu sonuçlar verdiğini gözlemlemişlerdir.

Dağ ve diğ. (2006) adveksiyon-difüzyon denklemi için lineer ve kuadratik B-spline tabanlı polinom denklemlerini kullanarak konumda-zamanda en küçük kareler sonlu eleman metotlarını geliştirmişlerdir. Geliştirilen metotların kesinliğini ölçmek için iki test problemini çözmüşlerdir ve sonuçlarını karşılaştırmışlardır.

Tsai ve diğ. (2006) adveksiyon-difüzyon denkleminin çözümü için konum veya zaman çizgisi üzerinde Hermite kübik enterpolasyonu veya kübik-spline enterpolasyonu ile entegre edilmiş karakteristikler yönteminin kullanımını incelemiş ve sonuçlarını karşılaştırmıştır. Bu yöntemleri karşılaştırmak için akımın üniform ve

difüzyon katsayısının sabit olduğu kabulü yapılarak Gaussian konsantrasyon dağılımına sahip bir kirleticinin davranışı simüle edilmiştir. Zaman yada konum çizgisi üzerinde kullanılan bu dört tane şema (HCSL, HCTL, CSSL ve CSTL) üzerinde Peclet sayısı, Courant sayısı ve reachback sayısı gibi parametrelerin etkisi detaylı olarak incelenmiştir.

Verma ve diğ. (2006) adveksiyon-difüzyon denkleminin çözümünde operatör ayırma metodunu kullanmışlardır. Adveksiyon denkleminin çözümünde MacCormack şeması, dispersiyon denkleminin çözümünde Crank-Nicolson sonlu farklar şeması kullanılmıştır. Geliştirilen yöntemin performansı farklı Courant ve Peclet sayıları için test edilmiştir. Sonuçlara bakıldığında, yöntemin düşük ve orta Peclet sayılarında oldukça iyi sonuçlar ürettiği buna karşın yüksek Peclet sayılarında ise çözüm kalitesinin düştüğü ve çözümde ciddi salınımlar olduğu gözlenmiştir. Ayrıca, Courant sayısındaki artışla salınımların büyüklüklerinde azalma olduğu tespit edilmiştir.

Badrot-Nico ve diğ. (2007) kartezyen düğüm noktalarında çok boyutlu doğrusal adveksiyon denkleminin sonlu hacimler upwind nümerik şeması ile çözümünü sunmuşlardır. Bu çalışmada bir boyutta modifiye edilmiş süreksiz profil metodunu (MDPM) ve bu metodun iki ve üç boyuta genelleştirilmesini sunmuşlardır. İki ve üç boyutlu durumlarda MDPM metodunu MUSCL şemasına karşı test etmişlerdir. Bazı bozulmalar olmasına rağmen metot sharp (keskin) eğimli problemlerde yüksek kalitede sonuçlar vermiştir. Düzgün eğimlerde MDPM şeması orijinal şeklin düzgünlüğünü MUSCL şeması kadar koruyamamasına rağmen uç değerleri en iyi MDPM şeması korumuştur. Ancak düğüm aralıkları geniş olduğunda hata terimleri ve CPU süresi dikkate alındığında MDPM şemasının daha etkili olduğu kanıtlanmış iken düğüm aralıkları küçük olduğunda ise MUSCL şeması daha kısa CPU süresinde daha hassas sonuçlar vermektedir.

Tian ve Ge (2007) çalışmasında iki boyutlu zamana bağlı konveksiyon-difüzyon problemlerinin çözümü için zaman ayrıştırmasında Crank-Nicolson şemasını, konum ayrıştırmasında eksponansiyel (exponential) bir dördüncü mertebe kompakt fark formülü kullanan (EHOC), bir yüksek mertebeden kompakt ADI metodu geliştirmişlerdir. EHOC-ADI şemasının her ADI çözüm adımında verdiği tridiyagonal matris denkleminin çözümü Thomas algoritması uygulanarak kısa

zamanda elde edilebilir. Metodun koşulsuz stabil karakterini Von-Neumann analizi ile ispatlamışlardır. Metodu, Karaa ve Zhang'ın yüksek mertebeden ADI metodu ve Noye ve Tan'ın konumda üçüncü mertebeden kompakt şeması ile karşılaştırmışlardır.

Man ve Tsai (2008) adveksiyon-difüzyon denkleminin çözümü için şaşırtmalı -düğüm sisteminde yüksek mertebeden bir şema geliştirmişlerdir. Birinci mertebe konumsal türevlerin hesaplanmasında dördüncü mertebeden bir sonlu fark şeması kullanarak bütün kesme hatalarını difüzyon terimlerinden daha küçük tutmuşlardır. Böylelikle nümerik difüzyonu dengelemek için yapay bir difüzyon terimi eklemeye gerek kalmamıştır. Zaman türevi için Adam-Bashforth tahmin-düzeltilme metodunu uygulamışlardır. Metodun stabilite analizini von Neumann metodunu kullanarak yapmışlardır. Sonuçlar metodun iyi stabiliteye sahip olduğunu göstermiştir. Ayrıca bu metod diğer düşük mertebeden nümerik şemalara göre çok az yapay salınım oluşturmaktadır. Sonuç olarak önerilen nümerik şema uzun süren simülasyonlarda daha hassas sonuçlar sağlamaktadır. Önerilen metod bir ve iki boyutlu taşınım problemlerine uygulanmıştır.

Dehghan ve Mohebbi (2008) iki boyutlu zamana bağlı konveksiyon-difüzyon denkleminin çözümü için yeni yüksek mertebeden metodlar önermişlerdir. Bu metodlar zaman çizgileri yaklaşımına (method of lines) dayanmaktadır. Konumdaki türevlerin ayrıştırılmasında dördüncü mertebeden bir sonlu fark yaklaşımı, zamanda ise dördüncü mertebeden bir sınır değer metodu uygulamışlardır. Önerilen metod hem konumda hem de zamanda dördüncü mertebeden kesinliğe sahiptir. Ayrıca, önerilen sınır değer metodları koşulsuz stabildir. Çözülen çok çeşitli problemlerden elde edilen sonuçlar dördüncü mertebeden kompakt sonlu fark yaklaşımı ve dördüncü mertebeden bir sınır değer metodu bu tarz problemlerin çözümü için etkili bir algoritma vermiştir.

Kadalbajoo ve Arora (2010) zamana bağlı adveksiyon-difüzyon problemlerinin çözümünde doğrusal ve kuadratik B-spline polinomlarına dayalı Taylor-Galerkin yöntemi kullanmışlardır. Metodun hassaslığını ölçmek için bazı test problemlerini çözmüşlerdir. Elde edilen sonuçların analitik çözümlerle iyi bir uyum içerisinde olduğunu göstermişlerdir.

Mohebbi ve Dehghan (2010) yaptıkları çalışmada bir boyutlu ısı ve adveksiyon-difüzyon denklemlerinin çözümü için yüksek mertebeden bir metot önermişlerdir. Bu denklemlerin konumdaki türevlerinin ayrıştırılmasında dördüncü mertebeden bir kompakt sonlu fark yaklaşımı ve adi diferansiyel denklemlerle sonuçlanan doğrusal sistem için kübik C^1 -spline kollokasyon metodunu uygulamışlardır. Kübik C^1 -spline kollokasyon metodu parabolik denklemlerin zamanda birleştirilmesi için A-stabil bir metottur. Önerilen metot konumda ve zamanda dördüncü mertebeden kesinliğe sahiptir. Yüksek mertebeden kesinliğe ek olarak metodun koşulsuz stabil olduğunu ispatlamışlardır. Problemlerden elde edilen sonuçlar önerilen metodun ısı ve adveksiyon-difüzyon denklemlerinin çözümünde etkili olduğunu göstermiştir.

Sari ve diğ. (2010) bir boyutlu adveksiyon-difüzyon denkleminin çözümü için onuncu mertebeye kadar sonlu fark şemaları önermişlerdir. Şemalar Taylor serisi açılımına dayanmaktadır. Çözümleri elde etmek için mesafede onuncu mertebeye kadar sonlu fark şemaları ile zamanda dördüncü mertebeye bir Runge-Kutta şemasını birleştirmişlerdir. Metotları kesin çözümleri bilinen iki probleme uygulamışlardır. Tekniklerin oldukça hassas sonuçlar verdiğini göstermişlerdir. Ayrıca elde ettikleri sonuçların literatürdeki bazı mevcut sonuçlardan daha iyi olduğunu göstermişlerdir.

Dağ ve diğ. (2011) bu çalışmada ilgili zaman ayrıştırmasında Taylor serisi açılımını kullanan B-spline Galerkin sonlu eleman metotlarını kullanarak zamana bağlı adveksiyon-difüzyon probleminin nümerik çözümlerini elde etmeyi amaçlamışlardır.

Dhawan ve diğ. (2012) çalışmasında B-spline denklemlerini kullanarak adveksiyon-difüzyon denkleminin kapsamlı bir incelemesini yapmışlardır. Önerilen şemanın avantajlarının anlaşılabilmesi için doğrusal ve kuadratik B-spline denklemlerinin her ikisini de kullanmışlardır. Önerdikleri şemayı bazı örneklere uygulamış ve elde ettikleri sonuçların karşılaştırmasını yapmışlardır.

Korkmaz ve Dağ (2012) çalışmasında diferansiyel kuadratur metotlarını tanıtmışlardır. Test problemlerinde iki farklı örnek seçmişlerdir. İlk problemde başlangıç konsantrasyonunun taşınımını, ikincisinde ise başlangıç konsantrasyonunun dağılımını simüle etmişlerdir. Diferansiyel kuadratur metodunu

oluşturmak için kübik B-spline denklemlerini test polinomu olarak seçmişlerdir. Çeşitli hata normları kullanarak nümerik sonuçların oluşturduğu hataları belirlemişlerdir.

Mittal ve Jain (2012) çalışmasında Neumann sınır koşullarında konveksiyon-difüzyon kısmi diferansiyel denkleminin yaklaşık çözümü için iki tane nümerik metot önermişlerdir. Metotlar sonlu elemanlar üzerinde B-spline kollokasyonuna dayanmaktadır. Böylelikle çözüm boyunca bağımlı değişkenin ve onun ilk iki türevinin sürekliliğini sağlamışlardır. Birinci metotta, zaman türevlerinin ayrıştırılmasında Crank-Nicolson şemasını, mesafe türevlerinde ise kübik B-spline polinomlarını kullanmışlardır. Metodun koşulsuz stabil olduğunu göstermişlerdir. İkinci metotta, konum türevlerinde kübik B-spline uygulamışlar ve birinci mertebe adi diferansiyel denklem sistemi elde etmişlerdir. Bu sistemi SSP-RK54 şeması ile çözmüşlerdir. Bu metotlar az depolama alanına ihtiyaç duyarlar ve bu yüzden daha az nümerik hata biriktirirler. Nümerik test problemlerinde metotların performansını ve hatalarını hesaplayarak göstermişlerdir. Metotları beş örneğe uygulamışlar ve kesin sonuçlarla uyumlu sonuçlar elde etmişlerdir. Metotların güçlü tarafı ekonomik ve kolay uygulanabilir olmalarıdır.

Gürarşlan ve diğ. (2013) yaptıkları çalışmada zamanda dördüncü mertebeden bir Runge-Kutta şeması ve mesafede altıncı mertebeden bir kompakt sonlu fark şeması kullanarak bir boyutlu adveksiyon-difüzyon denkleminde nümerik çözümler üretmeyi amaçlamışlardır. Önerilen şemanın oldukça hassas olduğu ve kirlenici madde taşınımı denkleminde $Pe \leq 5$ 'e kadar çözümler ürettiği belirlenmiştir. Önerilen nümerik modelin kesinliğini ve geçerliliğini verilen örnek sonuçları ve literatür aracılığıyla sağlamışlardır. Önerilen tekniğin, mevcut tekniklere göre oldukça güvenilir bir alternatif olabileceği sonucuna varmışlardır.

Gürarşlan (2014) tarafından yapılan çalışmada, adveksiyon-dispersiyon denkleminin nümerik simülasyonu yüksek mertebeden kompakt sonlu farklar şemaları ile gerçekleştirilmiştir. Kompakt sonlu farklar şemaları MacCormack ve Runge-Kutta şemaları ile birlikte kullanılarak altıncı mertebeden kesinliğe sahip çözümler elde edilmiştir. Mevcut şemaların yüksek mertebeden kesinliğini ve etkinliğini göstermek için bir ve iki boyutlu sayısal örnekler sunulmuştur. Elde edilen

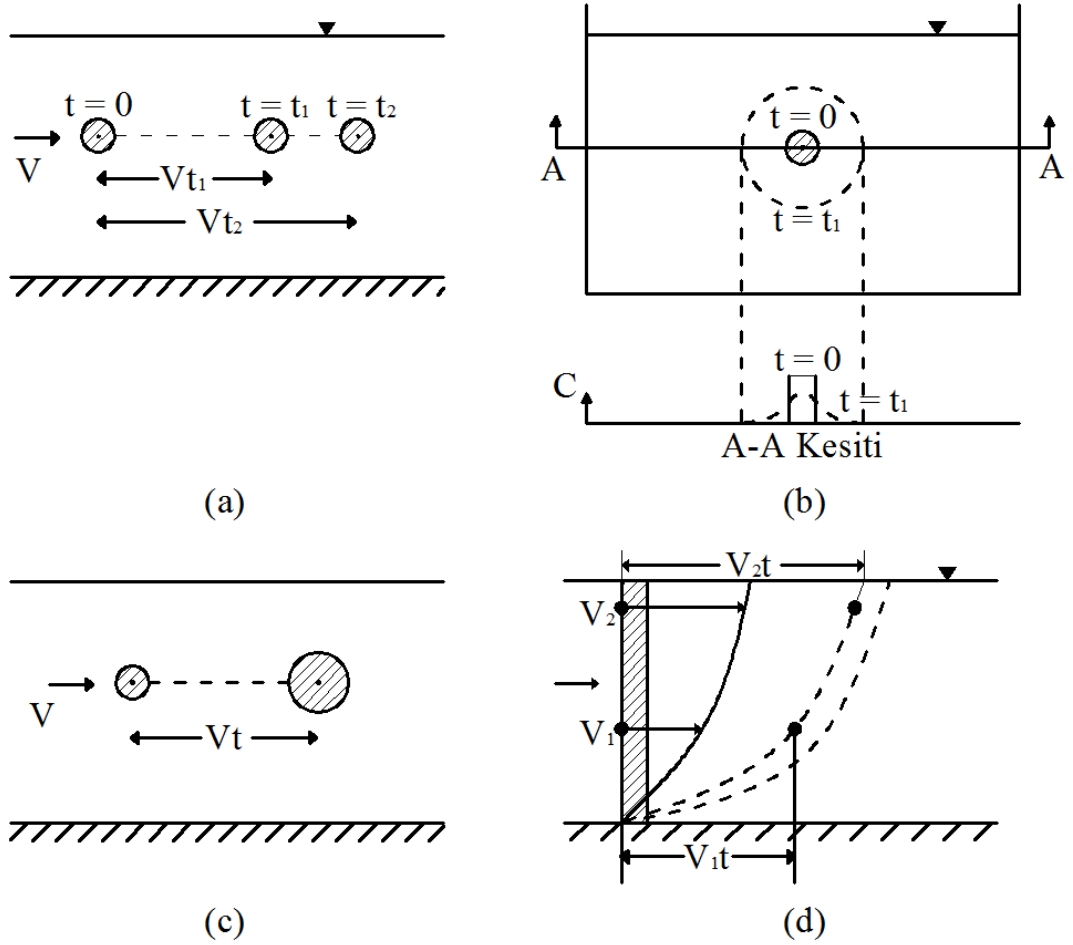
sonuçlar analitik sonuçlar ile karşılaştırıldığında, önerilen şemaların minimum hesaplama çabasıyla yüksek mertebeden kesinlik sağladığı görülmüştür.

Nazir ve diğ. (2016) yapmış oldukları çalışmada Dirichlet ve Neumann tipi sınır koşullarında adveksiyon-difüzyon denkleminin nümerik çözümü için yeni bir kübik trigonometrik B-spline kollokasyon yaklaşımı geliştirmişlerdir. Bu yaklaşımda, zamana bağlı türev ifadesi klasik sonlu farklar şeması ile konumdaki türevler ise bir θ ağırlık katsayısı yardımıyla kübik trigonometrik B-spline enterpolasyonuna dayalı olarak ayrıştırılmaktadır. Önerilen bu yeni şema çeşitli adveksiyon-difüzyon problemlerinde test edilmiştir. Önerilen yaklaşımın ikinci mertebeden olduğu sayısal olarak doğrulanmıştır ve Peclet sayısının 5'ten kk olduğu durumlarda çalıştığı görülmektedir.

2. AÇIK KANALLARDA KİRLETİCİ TAŞINIMI

2.1 Taşınım Mekanizması

Akarsuya boşaltılan herhangi bir kirletici, akımın taşıyabileceği ağırlıkta olursa boşaltım noktasında sabit kalmayarak akımla beraber akış aşağısına doğru taşınmaktadır. Bu taşınım sırasında kirletici, etrafındaki su ile karışarak seyrelmektedir. Kirletici; bazen suda bulunan askıdaki katı maddelerle bazen de kendi kendine(radyoaktif madde) veya bakterilerin etkisiyle(çoğu organik ve bazı inorganik kirleticiler) tepkimeye girerek bozulabilmektedir. Bütün bu prosesler konsantrasyonu etkilemektedir.



Şekil 2.1: Kirletici taşınımının farklı mekanizmaları a) Adveksiyon, b) Difüzyon, c) Adveksiyon ve difüzyon, d) Dispersiyon.

2.1.1 Adveksiyon

Atmosferik bir özelliğin veya bir maddenin, sıvının yatay hareketiyle taşınımına adveksiyon denir. Doğal akımlarla ilgilendiğimiz için sıvıyı su olarak kabul edebiliriz. Taşınan özellikler kimyasal madde, ısı veya farklı özellikteki su (tuzlu su) bile olabilmektedir. Eğer taşınım mekanizması sadece adveksiyon (saf adveksiyon) ise ve kirletici tek bir parçacık kabul edilirse, bu parçacık akımın ortalama hızına eşit bir hız ile taşınmaktadır. Böylece bir noktadaki parçacığın konumu aradan t zamanı geçtikten sonra Vt kadar yer değiştirmiş olacaktır. Benzer şekilde Şekil 2.1(a)'daki gibi bir parçacık kümesi ele alındığında bu kümedeki bütün parçacıklar aynı yer değiştirmeyi yapacaklarından, şeklini aynen koruyacaktır. Gerçekte bu kümenin şekli, parçacıklar dışı doğru yayılacağı için değişecektir.

2.1.2 Difüzyon

Adveksiyon ve difüzyon proseslerini birleştirmeden önce difüzyon prosesini ayrı bir şekilde inceleyelim. Bir tanktaki hareketsiz suyun içindeki bir parçacığı ele alırsak, bu parçacığa etrafındaki su moleküllerinin Brownian hareketinden dolayı kuvvetler etki edecektir. Eğer parçacığın su ile aynı yoğunlukta olduğu kabul edilirse, Brownian hareketinin (molekülün herhangi bir yöne gitme olasılığı eşit olarak) rastgele doğasından dolayı parçacığa etki eden net bir kuvvet olmayacaktır. Böylece bir süre sonra parçacık ilk konumunu koruyacaktır. Ancak bir parçacık kümesi ele alındığında parçacık hareketini belirlemede parçacık sayısı önemli bir özellik haline gelecektir. Bir parçacığın herhangi bir yöne gitme olasılığı hala eşittir. Ancak biri düşük biri yüksek konsantrasyonlu iki komşu bölge düşünüldüğünde, sadece parçacık sayısının çokluğundan dolayı daha fazla parçacık yüksek konsantrasyonlu bölgeden düşük konsantrasyonlu bölgeye hareket edecektir. Bu olaya difüzyon denir ve düşük konsantrasyonlu bölgelere, rastgele Brownian hareketinin oluşturduğu yönelme ile meydana gelmektedir.

Bir tank yerine akışın olduğu bir akımı ele alırsak adveksiyon ve difüzyon prosesleri birleşecektir. Parçacık kümesi ortalama Vt kadar yer değiştirecek ancak difüzyondan dolayı şeklini koruyamayacaktır. Parçacıklar çevrelerindeki düşük

konsantrasyonlu bölgelere dağılmaya devam edecektir. Bu dağılmanın etkisiyle küme genişleyecek fakat konsantrasyonu düşecektir. Bir adım daha ileri gidip türbülanslı bir akımı ele alırsak burada hız değişimlerinden dolayı Brownian hareketine benzer difüzyon meydana gelecektir. Türbülanstaki hız değişimleri Brownian hareketine benzetilebilir fakat çok daha büyüktürler. Bu iki mekanizmayı birbirinden ayırmak için Brownian hareketinden kaynaklanan difüzyona *moleküler difüzyon*, türbülanstaki kaynaklanan difüzyona ise *türbülanslı difüzyon* denmektedir. *Difüzyon* terimi iki mekanizmanın birleşimi için kullanılmaktadır. Çoğu akım koşullarında moleküler difüzyon türbülanslı difüzyonla karşılaştırıldığında göz ardı edilmektedir. Ancak çok yavaş akışın olduğu akımlarda (örneğin; yeraltı suyu akımları) moleküler difüzyon türbülanslı difüzyondan daha etkili olmaktadır.

Arazi koşullarında akım hızı bir enkesit boyunca önemli ölçüde değişiklik göstermektedir. Hız değişimi derinliğe bağlıdır ve tabanda sıfır, yüzeyde veya yüzeye çok yakın kısımda maksimum olmaktadır. Eğer bir enkesit hem derin hem de sığ bölge barındırıyor ise derin bölgede hız daha yüksek olacaktır. Buna göre bir parçacık kümesinin enkesitinde boylu boyunca önemli ölçüde dispersiyon meydana gelecektir. Çünkü farklı parçacıklar farklı hızlara sahiptirler.

2.1.3 Hidrodinamik Dispersiyon

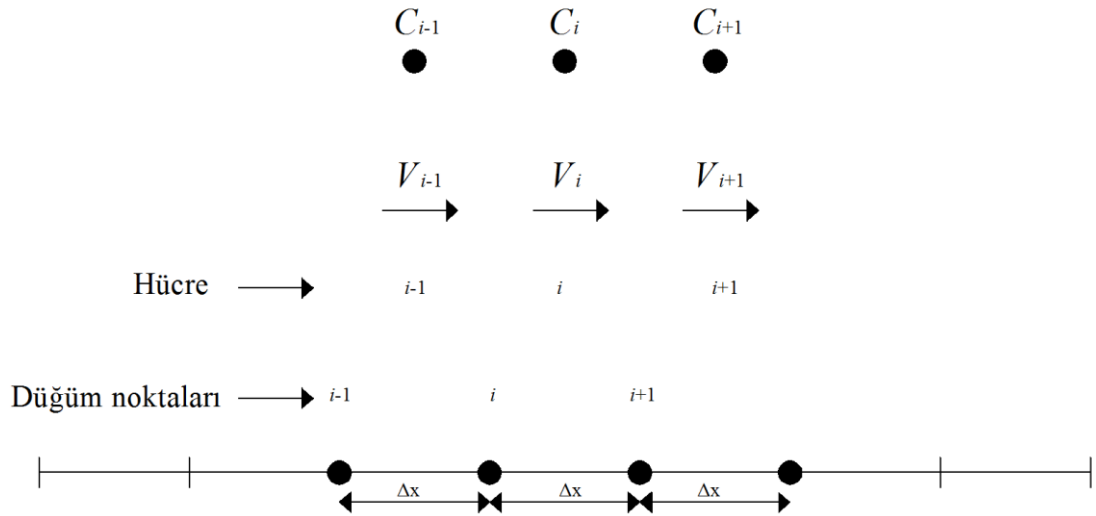
Difüzyonu ihmal edip sadece adveksiyonu dikkate aldığımızda hız değişimlerinden kaynaklanan yayılma etkisi olmaktadır. Buna *hidrodinamik dispersiyon* denir ve etkisi difüzyondan daha büyüktür. Aslında difüzyon parçacıkları hızlı hareket eden yüksek konsantrasyonlu bölgelerden yavaş hareket eden düşük konsantrasyonlu bölgelere taşıyarak dispersiyonu azaltma eğilimindedir. Difüzyon ve dispersiyonun genel etkileri bir kümenin yayılması olduğu için bu ikisi tek bir dispersiyon bileşeninde birleştirilmektedir. Sonuç olarak bu proses advektif-dispersif taşınım olarak adlandırılmaktadır ve adveksiyon-dispersiyon denklemi ile ifade edilmektedir (Srivastava, 2008).

3. ADVEKSİYON DİSPERSİYON DENKLEMİNİN TÜRETİLMESİ

3.1 Yönetici Denklem

Konumda ve zamanda konsantrasyon değişimlerini temsil eden adveksiyon-dispersiyon denklemi, taşınanların kütle dengesinden türetilmiştir. Adveksiyon ve dispersiyona ek olarak reaksiyon tepkimelerinden etkilenebilmektedir. Örneğin kirletici madde, akımla beraber taşınan katı maddelere bağlanabilmekte veya kimyasal, biyolojik veya radyoaktif değişimlere uğrayabilmektedir. Tepkimeler anlık veya yavaş olabilmektedir. Anlık tepkimeleri modellemek kolaydır. Yavaş tepkimelerde tepkime hızı fazladan bir parametre olur ve analizlere başka diferansiyel denklemlerin eklenmesi gerekmektedir. Bunlar da modellemeyi karmaşıktır.

Dikkate aldığımız bir elemanın boyutu sıfıra yaklaşırkenki limit durumunda kütle dengesine bakılarak yönetici denklem türetilmektedir. Basit olması için bir boyutta analiz yapılabilir fakat dispersiyon katsayısı aracılığıyla kesitlerdeki hız değişimlerinin etkileri dahil edilmelidir.



Şekil 3.1: Sürelilik denklemi için elementel düğüm noktalarının gösterimi.

Şekil 3.1' de Δx boyutlarında elemanlara ayrılmış kanalın bir kısmını göstermektedir. Burada C_i i elemanındaki kirletici konsantrasyonunu (birim hacimdeki kütle) simgelemektedir. Bir kesit alanını dikkate aldığımızda, böylece i ' inci elemandaki kirletici kütlesi $C_i \Delta x$ ve Δt zamanı boyunca kütle birikimi $[\partial(C\Delta x)/\partial t] \Delta t$ olmaktadır. Bu birikim kontrol yüzeyine giren net kütleyle eşit olmalıdır. Bu terimler adveksiyon, moleküler difüzyon, türbülanslı difüzyon ve dispersiyon durumları için incelenmiştir.

3.1.1 Advektif kütle girişi

Şekil 3.1' de görüldüğü gibi $i-1$ hücresindeki akım hızı V_{i-1} ve konsantrasyon C_{i-1} ' dir. Böylece Δt zamanında $i-1$ ve i hücrelerinin arayüzündeki kütle girişi $V_{i-1} \Delta t C_{i-1}$ ' dir. Benzer şekilde i ve $i+1$ hücrelerinin arayüzündeki çıkış $V_i \Delta t C_i$ ' dir. Kontrol yüzeyi boyunca net advektif kütle girişi denklem (3.1)' de verilmiştir.

$$m_a = V_{i-1} \Delta t C_{i-1} - V_i \Delta t C_i = -\frac{\partial(VC)}{\partial x} \Delta x \Delta t \quad (3.1)$$

3.1.2 Moleküler difüzyondan dolayı kütle girişi

$i-1$ ve i hücrelerinin arayüzünde, $i-1$ hücresinden sağ tarafa ve i hücresinden sol tarafa yönelen birtakım parçacıklar olacaktır. Bu parçacıklar konsantrasyonla orantılıdır. A. Fick tarafından 1850' lerde önerilen ampirik Fick kanunu, i ' inci hücredeki olan kütle değişimini $(C_{i-1} - C_i)/\Delta x$ ' ye orantılı olarak yazmada kullanılabilir.

Fick kanununa göre, difüzyon kütle akısı ile konsantrasyon gradyanı orantılıdır ve bu orantıya difüzyon katsayısı adı verilmektedir. Bu ampirik bağıntının ispatı Brownian hareketine benzer şekilde yapılabilmektedir. Eğer parçacığın mevcut pozisyonunu koruma ihtimalini yok sayarsak, sağa veya sola gitme ihtimali eşit

olmaktadır. i hücresinde n_i sayıda parçacıkla başlırsak Δt zamanda meydana gelen parçacık sayısındaki artış aşağıdaki gibi olmaktadır.

$$n_i^{t+\Delta t} - n_i^t = \frac{1}{2}(n_{i-1}^{t+\Delta t} - n_i^t) - \frac{1}{2}(n_i^{t+\Delta t} - n_{i+1}^t) \quad (3.2)$$

(3.2) eşitliğinin sağ tarafındaki ilk terim $i-1$ ve i arayüzündeki artışı, ikinci terim ise i ve $i+1$ arayüzündeki azalışı temsil etmektedir. Genel olarak şu şekilde yazılabilir:

$$\frac{\partial n}{\partial t} \Delta t = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 n}{\partial x^2} \Delta x^2 \quad (3.3)$$

$\Delta x^2 / 2\Delta t$ değerini sabit difüzyon katsayısı D_m olarak aldığımızda Δt zamanda kütle girişini $D_m \frac{C_{i-1} - C_i}{\Delta x} \Delta t$ olarak yazabiliriz (difüzyon katsayının boyutları $L^2 T^{-1}$, dir ve genellikle cm^2 / s birimleriyle kullanılır). Benzer şekilde diğer arayüzdeki kütle çıkışı $D_m \frac{C_i - C_{i+1}}{\Delta x} \Delta t$ olarak yazılabilir ve kontrol ara yüzündeki net difüzyon kütle girişi aşağıdaki gibidir.

$$\begin{aligned} m_m &= D_m \frac{C_{i-1} - C_i}{\Delta x} \Delta t - D_m \frac{C_i - C_{i+1}}{\Delta x} \Delta t \\ &= D_m \left(\left. \frac{\partial C}{\partial x} \right|_{i-1,i} - \left. \frac{\partial C}{\partial x} \right|_{i,i+1} \right) \Delta t = D_m \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} \Delta x \Delta t \end{aligned} \quad (3.4)$$

3.1.3 Türbülanslı difüzyondan dolayı kütle girişi

Denklem 3.1' de görüldüğü gibi advectif kütle girişi hız ve konsantrasyonun zamana göre türeviyle orantılıdır. Türbülanslı akımda hız ve konsantrasyonun ikisi de ortalama bir değerde birleştirilmiş dalgalanmalara sahiptirler ve aşağıdaki gibi yazılabilmektedir.

$$V(x,t) = \bar{V}(x) + V'(x,t) \quad (3.5)$$

(3.5) eşitliğinde herhangi bir konumdaki ortalama hız aşağıdaki gibidir.

$$\bar{V}(x) = \frac{1}{T} \int_0^T V(x,t) dt \quad (3.6)$$

(3.6) eşitliğindeki T seçilen uygun bir zamandır. Seçilen bu zaman aralığı türbülans dalgalanmalarından büyük, ortalama hız değişimlerinden küçük olmalıdır. Ortalama akımın kararlı olduğu kabul edilmektedir. Benzer ifadeler konsantrasyon için yazılıp denklem (3.1)' de yerine konulursa adveksiyonun ve türbülanslı difüzyonun oluşturduğu zamana bağlı kütle giriş oranı elde edilmektedir.

$$M_{a+t} = \frac{\partial \left[(\bar{V} + V') (\bar{C} + C') \right]}{\partial x} \quad (3.7)$$

Zamana göre ortalaması alınmış değerler olarak aşağıdaki gibidir.

$$\bar{M}_{a+t} = \frac{\partial (\bar{V}\bar{C})}{\partial x} + \frac{\partial (\bar{V}'C')}{\partial x} \quad (3.8)$$

(3.8) eşitliğinin sağ tarafındaki ilk terim advektif girişi, ikinci terim ise türbülanslı difüzyonu ifade etmektedir. Moleküler difüzyona benzer olarak türbülanslı difüzyon katsayısını D_t olarak belirlersek net kütle girişi aşağıdaki gibi olmaktadır.

$$m_t = D_t \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} \Delta x \Delta t \quad (3.9)$$

3.1.4 Hidrodinamik dispersiyondan dolayı kütle girişi

Türbülanslı difüzyon analizine benzer olarak denklem (3.1)' i ele alarak ancak burada zamana bağlı ortalama hız yerine enkesitsel bir ortalama hız tanımlanmaktadır. Böylelikle noktasal hız bu hızların toplamının ortalaması olacaktır. Daha sonra denklem (3.8)' e benzer bir denklem elde edilmekte olup

hidrodinamik dispersiyon katsayısı D_h olarak belirlendiğinde dispersif kütle girişi aşağıda gibi olmaktadır.

$$m_h = D_h \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} \Delta x \Delta t \quad (3.10)$$

Bütün kütle girişleri (adveksiyondan, moleküler difüzyondan, türbülanslı difüzyondan ve hidrodinamik dispersiyondan dolayı) bulunduğunda kütle dengesi aşağıdaki gibi yazılabilmektedir (Türbülanslı akımlar için V ve C anlık değerleri değil zamana bağlı ortalaması alınmış değerleri temsil etmektedir).

$$\frac{\partial(C_i \Delta x)}{\partial t} \Delta t = -\frac{\partial(VC)}{\partial x} \Delta x \Delta t + (D_m + D_t + D_h) \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} \Delta x \Delta t \quad (3.11)$$

Başka bir deyişle;

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \frac{\partial(VC)}{\partial x} = D \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} \quad (3.12)$$

(3.12) denklemindeki D dispersiyon ve difüzyon etkilerini içeren efektif dispersiyon katsayısıdır. Dispersiyon genellikle hem boyuna hem de enine olmak üzere iki yönde de meydana gelmektedir. Boyuna dispersiyon katsayısı D_L , enine dispersiyon katsayısı D_T 'dir. Su sıkıştırılmaz olduğundan dolayı süreklilik denklemini ($\partial V / \partial x = 0$) kullanarak (3.12) denklemi aşağıdaki gibi yazılabilmektedir.

$$\frac{\partial C}{\partial t} + V \frac{\partial C}{\partial x} = D \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} \quad (3.13)$$

(3.13) denklemi adveksiyon-dispersiyon denklemdir. Zamana ve konuma bağlı konsantrasyon değişimlerini elde etmek için analitik ve nümerik metotlar kullanılarak çözülebilmektedir. Denklem zamanda bir, konumda ikinci mertebe olduğundan çözümü için bir başlangıç ve iki sınır koşulu gerekmektedir. Örneğin, başlangıçta temiz bir akımdaki kirletici yayılımını simüle etmek için başlangıç koşulu her yerde sıfır, sınır koşulları ise kirletici salınım yöntemine bağlı olmaktadır. Eğer kirletici salınımı bir sefere mahsus, kazara meydana gelmişse sınır

koşullarından birisi salınım noktasında kirletici girişi pulse şeklinde olmaktadır. Ancak bir nehre kanalizasyonun boşaltılması gibi düzenli kirletici salınımı var ise sınır koşulu için gün içinde konsantrasyonda değişimler olmasına rağmen sabit bir konsantrasyon değeri kullanılabilir. Diğer sınır koşulu kirletici kaynağından uzak mesafelerde sıfır olarak alınabilir. Bu uzak mesafe analitik çözümden sonsuz, nümerik modelde sonlu büyük bir değer olabilir. Çoğunlukla ortalama hızı x eksenine doğru, dispersiyonu enine yönlere oluşabilen bir boyutlu akımlar kullanılmaktadır. V_x , V_y , V_z bileşenleri sırasıyla x -, y -, z - yönlerindeki hızları belirtmek üzere ve dispersiyon katsayısının konuma bağlı değiştiği varsayılarak adveksiyon-dispersiyon denkleminin üç boyutlu genel hali aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$\frac{\partial C}{\partial t} + V_x \frac{\partial C}{\partial x} + V_y \frac{\partial C}{\partial y} + V_z \frac{\partial C}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial x} \left(D_x \frac{\partial C}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(D_y \frac{\partial C}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(D_z \frac{\partial C}{\partial z} \right) \quad (3.14)$$

Ancak denklemin en genel formunda dispersiyon katsayısı D_{xy} , D_{xz} , D_{yz} gibi köşegen dışı terimleri içeren 3×3 bir tensördür. Bu terimler bir yöndeki konsantrasyon eğiminden dolayı diğer bir yöne olan dispersif akışı temsil etmektedir. (3.14) denkleminin sağ tarafındaki parantez içindeki her dispersiyon katsayısı üç terimin toplamından oluşmaktadır. Bu köşegen dışı terimler genellikle yok sayılmaktadır. Sadece V_x hız bileşenin olduğu veya baskın olduğu ve akıma çapraz yöndeki (y , z) dispersiyon katsayıları eşit ise (3.14) denklemi aşağıdaki şekilde yazılmaktadır.

$$\frac{\partial C}{\partial t} + V \frac{\partial C}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(D_L \frac{\partial C}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(D_T \frac{\partial C}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(D_T \frac{\partial C}{\partial z} \right) \quad (3.15)$$

(3.15) denklemindeki D_L boyuna, D_T çapraz yöndeki dispersiyon katsayılarını ifade etmektedir. Moleküler difüzyon hızından bağımsız olarak düşünülebilmektedir ancak türbülanslı difüzyon ve dispersiyon önemli ölçüde hızla bağlıdır ve dispersiyon katsayısı aşağıdaki gibi yazılmaktadır.

$$D_L = D_m + \alpha_L V \quad \text{ve} \quad D_T = D_m + \alpha_T V \quad (3.16)$$

(3.16) denklemlerindeki α_L , α_T ifadeleri uzunluk boyutunda boyuna ve çapraz dispersiviteyi temsil etmektedir. Akarsu akımlarının dahil olduğu çoğu durumda diğer terimlere göre moleküler difüzyon yok sayılmaktadır. Dispersiyon katsayısı akarsu karakteristiklerine bağlıdır ve doğru tahmini açık kanallardaki kirletici taşınımı analizlerinde kritik öneme sahiptir (Srivastava, 2008).

4. ADVEKSİYON DİSPERSİYON DENKLEMİNİN NÜMERİK MODELLEMESİ

Nehirlerdeki, göllerdeki, okyanuslardaki ve yeraltı suyundaki çözünmüş madde taşınımını ifade eden ana denklemlerden birisi olan adveksiyon-dispersiyon denkleminin çözümünde kullanılan nümerik metotlar Eulerian, Lagrangian veya karma Eulerian-Lagrangian olarak sınıflandırılabilir (Neuman, 1984; Baptista, 1987). Eulerian metotlar taşınım denklemini konumda sabit düğüm noktalarına ayırarak çözmektedir. Sonlu fark ve sonlu eleman metotları bu sınıfın temel metotlarıdır. Taşınım modellemesine uygulanan en eski metotlar arasında olan Eulerian metotlar günümüzde hala sıklıkla kullanılmakta ve akım simülasyonunda iyi sonuçlar vermektedir. Bu metotlar konumda sabit düğüm noktalarının avantajına ve kolaylığına sahip olup, dispersiyonun baskın olduğu problemleri hassas ve etkili bir şekilde çözebilmektedir. Oldukça kolay bir şekilde programlanabilmekte ve uygulanabilmektedir. Ancak Eulerian metotlar mevcut arazi koşullarında sıklıkla karşılaştığımız adveksiyonun baskın olduğu problemlerde nümerik dispersiyon veya yapay salınımdan çok fazla etkilenmeye yatkındır (Pinder ve Gray, 1977; Anderson, 1979). Bu tarz hatalar konumda kullanılan düğüm noktalarını arttırarak ve küçük zaman aralıklarında hesaplama yapılarak azaltılabilmektedir fakat bu iyileştirmeler arazi ölçekli uygulamalarda hesaplama süresini çok fazla arttıracığından çözüme ulaşamayabilmektedir.

Lagrangian metotlar çözünmüş madde taşınımını ifade eden kısmi diferansiyel denklemi doğrudan çözmektedir. Onun yerine çok sayıda hareket eden parçacığı kullanarak adveksiyon ve dispersiyonu tahmin etmeye çalışmaktadır. Lagrangian metotlar adveksiyonun baskın olduğu problemlerdeki nümerik dispersiyonu ortadan kaldırarak hassas ve etkili bir çözüm sağlamaktadır (Prickett ve diğ., 1981; Kinzelbach, 1986; Tompson ve Gelhar, 1990). Ancak Lagrangian bir metottaki sabit düğüm noktalarının veya sabit bir koordinat sisteminin eksikliği, özellikle birden fazla kirletici kaynağının ve karmaşık sınır koşullarının olması durumunda nümerik dengesizliğe ve hesaplama zorluklarına yol açabilmektedir (Yeh, 1990). Parçacık takibinde hız enterpolasyonuna ihtiyaç duyulması yersel kütle

denkliği hataları ve çözüm anormallikleriyle sonuçlanabilmektedir (LaBolle ve diğ., 1996). Dahası Lagrangian bir metot ile elde edilen konsantrasyon çözümü genellikle “kaba” bir görünüşe sahiptir ve bu durum ters problemler ve optimizasyon modellemesinde sorunlar yaratabilmektedir. Lagrangian metotların esnekliğini, verimliliğini ve sürekliliğini geliştirmek için çalışmalar yapılmaya devam etmektedir (LaBolle ve diğ., 1998; Sun, 1999).

Karma Eulerian-Lagrangian metotlar ise iki sınıfın da avantajlarını birleştirmeyi amaçlamaktadır. Bu yüzden operatör ayırma metotları sayesinde denklem adveksiyon ve dispersiyon olmak üzere ikiye ayrılmaktadır. Bu sayede adveksiyon teriminin çözümünde iyi olan Lagrangian metotlar, dispersiyon teriminin çözümünde ise Eulerian metotlar kullanılmaktadır (Zheng ve Bennett, 2002).

4.1 Operatör Ayırma Metodu

Operatör ayırma metotları kısmi diferansiyel denklemlerin sayısal çözümlerinde yaygın olarak kullanılan bir metottur. Bu metot genellikle iki şekilde kullanılmaktadır. Birincisi diferansiyel denklem her bir koordinat eksenine ait türevlerine ikinci olarak ise her parça belirli bir fiziksel durumu ifade edecek şekilde ayrılarak kullanılabilir. Örneğin; adveksiyon, difüzyon vb. Her iki durumda da kullanılacak sayısal metot, ayrılan her parçanın çözümlerinin birleştirilmesi olarak tanımlanmaktadır. Bu durum çok etkili metotların ortaya çıkmasını sağlayabilmektedir. Çünkü ayrılan her parçaya farklı çözüm metotları uygulanabilmektedir.

Operatör ayırma, denklemlerde bulunan konumsal diferansiyel operatörlerin basit formlara sahip farklı alt operatörlerin toplamına ayrılması anlamına gelir ve böylece denklem kolayca çözülebilir. Operatör ayırma, gruplanmış kısmi diferansiyel denklem sistemlerinin çözümü için önemlidir. Çünkü karmaşık denklem sistemlerinin çözümü basit parçalara ayrılarak yapılabilir.

Aşağıda verilen diferansiyel denklemde iki lineer operatör olması durumuna odaklanalım ve Cauchy problemini düşünelim:

$$\frac{\partial u(t)}{\partial t} = Au(t) + Bu(t), \quad t \in (0, T), \quad u(0) = u_0 \quad (4.1)$$

Başlangıç fonksiyonu u_0 verilmiş olsun. A ve B 'nin Banach uzayında $A, B: X \rightarrow X$ sınırlandırılmış lineer operatörler olduğu varsayılır. Gerçek uygulamalarda bu operatörler adveksiyon, difüzyon operatörleri gibi fiziksel operatörlere karşılık gelir. Çeşitli operatör ayırma metotları mevcuttur fakat bu çalışmada Lie-Trotter ve Strang-Marchuk olmak üzere iki adet operatör ayırma metodu kullanılacaktır.

4.1.1 Lie-Trotter Ayırma Metodu

Lie-Trotter ayırma metodu birinci merteye bir operatör ayırma metodu olmakla birlikte ardışık ayırma metodu olarakta isimlendirilmektedir. Bu metot $n=0,1,\dots,N-1$, $t^0=0$ ve $t^N=T$ olduğu $[t^n, t^{n+1}]$ alt aralıklarda iki alt problemi ardışık olarak çözmektedir. Farklı alt problemler başlangıç koşulları aracılığı ile birleştirilmektedir. (4.1)' deki problemi alt aralıklarda alt problemlere ayırarak Lie-Trotter ayırma metodunun algoritmasını aşağıdaki gibi gösterebiliriz.

$$\frac{\partial u^*(t)}{\partial t} = Au^*(t), \quad t \in (t^n, t^{n+1}) \quad u^*(t^n) = u_{sp}^n \quad (4.2)$$

$$\frac{\partial u^{**}(t)}{\partial t} = Bu^{**}(t), \quad t \in (t^n, t^{n+1}) \quad u^{**}(t^n) = u^*(t^{n+1}) \quad (4.3)$$

$n=0,1,\dots,N-1$ olmak üzere $u_{sp}^n = u_0$ eşitliği (4.1)' de verilmiştir. $t = t^{n+1}$ zamanındaki yaklaşık çözüm $u_{sp}^{n+1} = u^{**}(t^{n+1})$ olarak hesaplanmaktadır.

4.1.2 Strang-Marchuk Ayırma Metodu

Strang-Marchuk ayırma metodu ikinci merteye bir operatör ayırma metodu olmakla birlikte operatör ayırma metotları arasında en çok kullanılan ve en popüler

metotlardan birisidir. Strang ayırma metodu olarakta isimlendirilmektedir. (4.1)'deki probleme uygulandığında algoritması aşağıdaki gibi olmaktadır.

$$\frac{\partial u^*(t)}{\partial t} = Au^*(t), \quad t^n \leq t \leq t^{n+1/2}, \quad u^*(t^n) = u_{sp}^n \quad (4.4)$$

$$\frac{\partial u^{**}(t)}{\partial t} = Bu^{**}(t), \quad t^n \leq t \leq t^{n+1}, \quad u^{**}(t^n) = u^*(t^{n+1/2}) \quad (4.5)$$

$$\frac{\partial u^{***}(t)}{\partial t} = Au^{***}(t), \quad t^{n+1/2} \leq t \leq t^{n+1}, \quad u^{***}(t^{n+1/2}) = u^{**}(t^{n+1}) \quad (4.6)$$

$t^{n+1/2} = t^n + 0.5\Delta t$ eşitliği yarım zaman aralığını ifade etmektedir. Bu aralık kullanılarak ilk alt problem çözülür ve buradan elde edilen sonuç ikinci alt problemin başlangıç koşulu olarak kullanılır. Tam zaman aralığında çözülen ikinci alt problemde elde edilen sonuç tekrardan ilk alt problemin başlangıç koşulu olur ve yarım zaman aralığında çözümlenerek bir tam zaman aralığında yaklaşık çözüm elde edilir. Son olarak bulunan sonuç bir sonraki zaman aralığındaki başlangıç koşulu olmaktadır. $u_{sp}^{n+1} = u^{***}(t^{n+1})$ eşitliği bunu ifade etmektedir (Yazıcı, 2010; Geiser, 2011).

Lie-Trotter ve Strang-Marchuk operatör ayırma metotlarının hata mertebeleri ile ilgili detaylı bilgi için Geiser (2011) tarafından yapılan çalışmaya bakılabilir.

4.2 Adveksiyon Kısımının Çözümü

Adveksiyon kısmının çözümünde spline interpolasyonuna dayalı karakteristikler metodu seçilmiştir. Çünkü stabilite koşulu olmadan hiperbolik denklemler için en iyi sonucu veren yöntem karakteristikler metodudur. Metodun kesinliğini belirleyen kullanılacak interpolasyon metodudur. Tez kapsamında lineer, kuadratik ve kübik spline interpolasyonları anlatılmıştır. Bunlardan en iyi sonucu kübik spline interpolasyon yöntemi verdiği için analizlerde bu yöntem kullanılmıştır.

4.2.1 Spline Enterpolasyonuna Dayalı Karakteristikler Metodu

Denklem (3.13)' te verilen bir boyutlu adveksiyon-dispersiyon denklemini operatör ayırma metotları yardımıyla adveksiyon ve dispersiyon olmak üzere iki prosese ayırabiliriz. Saf adveksiyon denklemi, denklem (4.7)' deki gibi olmaktadır.

$$\frac{\partial C}{\partial t} + V_x \frac{\partial C}{\partial x} = 0 \quad (4.7)$$

Saf adveksiyon denkleminin nümerik çözümünde türevlerin tahminine dayanan metotların kullanılmasından kaynaklanan zorluklar alternatif yaklaşımlar araştırılmasına sebep olmuştur. Bu yaklaşımlardan birisi uzun zamandan beri hiperbolik denklemlerin çözümünde kullanılan karakteristikler metodudur.

Denklem (4.7)' nin her iki tarafı dt ile çarpılırsa:

$$\frac{\partial C}{\partial t} dt + V_x dt \frac{\partial C}{\partial x} = 0 \quad (4.8)$$

Denklem (4.9)' daki notasyonu kabul edersek:

$$dx = V_x dt \quad (4.9)$$

Denklem (4.9)' u denklem (4.8)' de yerine yazdığımızda denklem (4.10) elde edilir.

$$\frac{\partial C}{\partial t} dt + \frac{\partial C}{\partial x} dx = 0 \quad (4.10)$$

Denklem (4.10)' un sol tarafı $C(x,t)$ fonksiyonunun tam diferansiyelidir. Bu durumda denklem (4.8) için aşağıdaki eşitlikler yazılabilir:

$$dC = 0 \quad (4.11a)$$

$$dx = V_x dt \quad (4.11b)$$

veya

$$\frac{dC}{dt} = 0 \quad (4.12a)$$

$$\frac{dx}{dt} = V_x \quad (4.12b)$$

Böylece kısmi diferansiyel denklem olan denklem (4.7), (x,t) düzleminde denklem (4.9)' da tanımlanan doğru boyunca basit bir adi diferansiyel gibi çözülebilmektedir. Denklem (4.12a)' dan çıkan sonuca göre bu doğru boyunca C fonksiyonunun zamana göre değişimi sifıra eşittir. Sonuç olarak bu karakteristik çizgi boyunca konsantrasyonda herhangi bir değişiklik olmamaktadır.

Denklem (4.12b) saf adveksiyon denkleminin karakteristiğini tanımlamaktadır. Bu da karakteristik çizginin tanjantına yani eğimine eşittir. Akışkan hızı sabit olduğunda karakteristik çizgisi doğru olmaktadır. Ancak akışkan hızı değişken olduğunda karakteristik çizgisi (x,t) düzleminde tanımlı eğriler olmaktadır.

Karakteristik çizgi boyunca $C(x,t)$ fonksiyonu değişmediğinden başlangıç değerlerinin verilmesi koşuluyla saf adveksiyon denklemi adi diferansiyel denklem gibi kolaylıkla çözülebilir. Bu özellikler hiperbolik tipteki kısmi diferansiyel denklemlerin çözümünde kullanılan temel metotlardan birisi olan karakteristikler metodunun temelini oluşturur (Abbott ve Basco, 1989).

Denklem (4.12a)' nın sonucuna bakılarak anlaşılan, denklem (4.12b)' de tanımlanan karakteristik doğru boyunca konsantrasyonun değişmeyeceği bilgisini kullanarak denklem (4.7)' nin kesin çözümünü temsil eden eşitlik denklem (4.13)' teki gibi yazılabilir.

$$C(x,t) = C(x_0,t_0) = C\left(x - \int_{t_0}^t V_x dt, t_0\right) \quad (4.13)$$

Böylece t anında x konumunda tanımlanan bir parçacığın $t=t_0$ anındaki konumu denklem (4.14) ile hesaplanabilir.

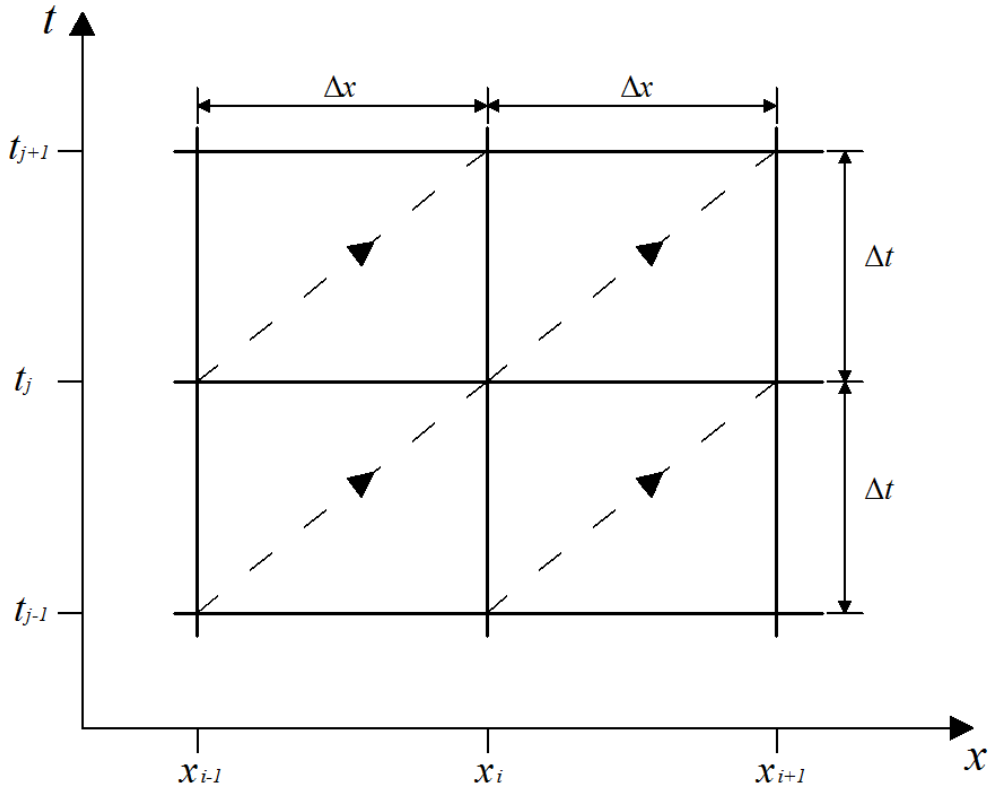
$$x_0 = x - \int_{t_0}^t V_x dt \quad (4.14)$$

Akışkan hızının sabit olduğu durumlarda karakteristik çizginin $1/V_x$ eğimli doğru olması sebebiyle denklem (4.14) düzenlenerek denklem (4.15)' teki gibi yazılabilir.

$$C(x, t) = C(x - (t - t_0)V_x, t_0) \quad (4.15)$$

Denklem (4.15), akışkanın sabit bir hızı olduğunda başlangıç konsantrasyonun kanal eksenini boyunca değişime uğramadan taşınacağını göstermektedir.

Eğer ağ boyutlarını Δx ve Δt 'den oluşturursak bu aralıklar denklem (4.9)' u sağlamaktadır.



Şekil 4.1: Karakteristikler metodunun düğüm noktaları.

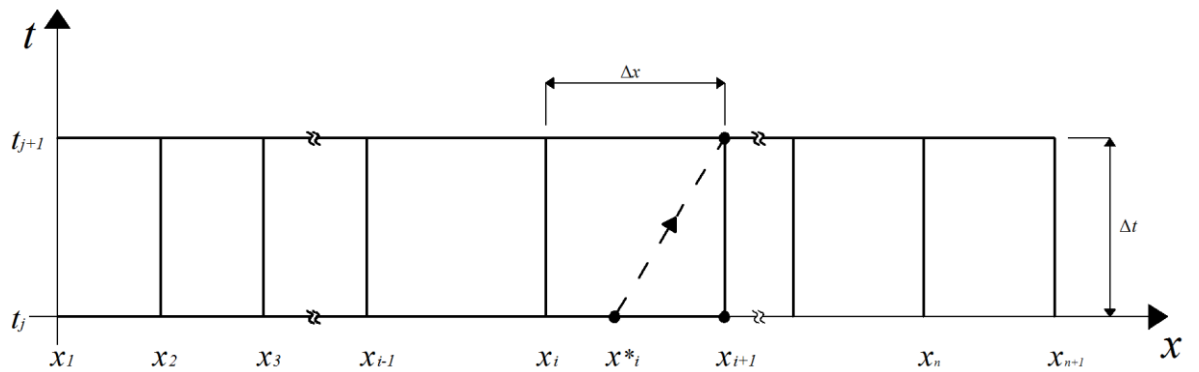
$$\Delta x = V_x \Delta t \quad (4.16)$$

Şekil (4.3)' te görüldüğü üzere seçilen aralıklar denklem (4.16)' yı sağladığında ağı köşegenleri ile karakteristik çizgiler kesişmektedir. Karakteristik çizgi boyunca konsantrasyonun değişmeyeceği bilindiğinden yeni zamandaki konsantrasyonlar denklem (4.17)' de belirtilmiştir.

$$\begin{aligned} C(x_{i+1}, t_{j+1}) &= f(x_i, t_j) \\ C_{i+1}^{j+1} &= C_i^j \end{aligned} \quad (4.17)$$

Denklem (4.17)' ye göre t_j zamanında (x_i, t_j) düğüm noktasında bulunan parçacık Δt zaman adımından sonra (x_{i+1}, t_{j+1}) düğüm noktasında olacaktır. Bu sonuca göre eğer hız sabit ise adveksiyon denkleminin karakteristikler metoduyla çözümü analitik çözüme eşittir.

Maalesef doğal kanallarda akım hızı konuma göre ($V_x = V_x(x)$) veya hatta zamana göre ($V_x = V_x(x, t)$) değişmektedir. Bu durumda denklem (4.16)' yı sağlayan bir düğüm yapısı oluşturmak mümkün değildir. Şekil (4.4)' ten görüldüğü üzere bundan böyle karakteristikler ağı köşegenleri ile çakışmayıp t_j zamanında düğüm noktaları arasında bir noktadan geçmektedir.



Şekil 4.2: Geri karakteristiklerin düğüm noktaları.

Karakteristik çizgi boyunca konsantrasyon değeri değişmediğinden $(i, j + 1)$ düğüm noktasındaki konsantrasyon değeri (x^*, j) noktasındakine eşittir:

$$C_i^{j+1} = C(x^*, t_j) \quad (4.18)$$

$$x^* = x_{i+1} - V_x \Delta t \quad (4.19)$$

Denklem (4.19) kullanılarak x^* noktasının konumu hesaplanmaktadır. Bütün düğüm noktalarındaki konsantrasyon değerleri başlangıç koşullarından bilindiğinden x^* noktasındaki konsantrasyonu hesaplamak için bir enterpolasyon yöntemine ihtiyacımız vardır. Lineer splinelar, kuadratik splinelar ve kübik splinelar bunlardan bazılarıdır (Szymkiewicz, 2010).

4.2.1.1 Lineer Splinelar

Lineer splinelar veri noktaları arasında oluşturulan düz çizgilerdir. Örneğin (x_1, y_1) , (x_2, y_2) , (x_3, y_3) ve (x_4, y_4) gibi dört noktadan oluşan bir veri setine uygun enterpolasyon polinomu üçüncü dereceden olmaktadır. Ancak her aralık için lineer splinelar kullanıldığında bunlar birinci dereceden basit lineer fonksiyonlar şeklindedir. Lagrange formu kullanılarak aşağıdaki gibi oluşturulmaktadır.

$$S_1(x) = \frac{x-x_2}{x_1-x_2} y_1 + \frac{x-x_1}{x_2-x_1} y_2, \quad x_1 \leq x \leq x_2 \quad (4.20)$$

$$S_2(x) = \frac{x-x_3}{x_2-x_3} y_2 + \frac{x-x_2}{x_3-x_2} y_3, \quad x_2 \leq x \leq x_3 \quad (4.21)$$

$$S_3(x) = \frac{x-x_4}{x_3-x_4} y_3 + \frac{x-x_3}{x_4-x_3} y_4, \quad x_3 \leq x \leq x_4 \quad (4.22)$$

Lineer splineların en büyük kusuru birleşim noktalarında ani eğim değişimlerinden etkilenmeleridir. Bunun sebebi komşu lineer fonksiyonların birinci türevlerinin uyuşmamalarıdır. Bu problemi çözmek için birleşim noktalarındaki türevlerin uyuşmasını sağlayan yüksek mertebe polinom splineları kullanılmaktadır. Birleşim noktalarında birinci türevlerin sürekliliğini kuadratik splinelar, birinci ve ikinci türevlerin her ikisinin de sürekliliğini kübik splinelar sağlamaktadır. Pratikte en çok kübik splinelar kullanılmaktadır.

4.2.1.2 Kuadratik Splinelar

Kuadratik splinelar enterpolasyon yapmak için her aralıkta oluşturulan ikinci derece polinomları kullanmaktadır. $(x_1, y_1), \dots, (x_{n+1}, y_{n+1})$ gibi $n+1$ adet veriden oluşan bir veri setinde n adet aralık ve n adet kuadratik polinom bulunmaktadır. Kuadratik polinomların genel formu aşağıdaki gibidir.

$$S_i(x) = a_i(x-x_i)^2 + b_i(x-x_i) + c_i, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (4.23)$$

(4.23) eşitliğindeki a_i, b_i, c_i ($i = 1, 2, \dots, n$) hesaplanması gereken bilinmeyen katsayılarıdır. n adet polinom ve her polinom da üç katsayı olduğundan toplamda $3n$ adet bilinmeyen katsayı vardır. Bundan dolayı bütün bilinmeyen katsayıları belirlemek için $3n$ adet denkleme ihtiyacımız vardır. Bu denklemlerin elde edilişleri aşağıdaki dört başlıkta açıklanmaktadır.

4.2.1.2.1 Bitiş Noktalarındaki Fonksiyon Değerleri

İlk polinom $S_1(x)$ (x_1, y_1) noktalarından, son polinom $S_n(x)$ (x_{n+1}, y_{n+1}) noktalarından geçmektedir. Böylece bu polinomlar aşağıdaki eşitlikleri sağlamaktadır.

$$\left. \begin{array}{l} S_1(x_1) = y_1 \\ S_n(x_{n+1}) = y_{n+1} \end{array} \right\} \text{2denklem} \quad (4.24)$$

(4.24)' teki eşitlikleri daha açık bir şekilde yazmamız gerekirse aşağıdaki gibi yazılmaktadır.

$$\begin{array}{l} a_1 x_1^2 + b_1 x_1 + c_1 = y_1 \\ a_n x_{n+1}^2 + b_n x_{n+1} + c_n = y_{n+1} \end{array} \quad (4.25)$$

4.2.1.2.2 Ara Noktalardaki Fonksiyon Değerleri

Ara noktalarda iki şart sağlanmak zorundadır. İlk olarak polinomlar veri noktalarından geçmelidir. İkincisi ise birbirine komşu polinomlar ara noktalarda eşit olmalıdır.

$$\left. \begin{aligned} S_1(x_2) = y_2, S_2(x_3) = y_3, \dots, S_{n-1}(x_n) = y_n \\ S_2(x_2) = y_2, S_3(x_3) = y_3, \dots, S_n(x_n) = y_n \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} n-1 \text{ denklem} \\ n-1 \text{ denklem} \end{array} \quad (4.26)$$

(4.26)' daki denklemlerin daha genel ve açık ifadeleri aşağıdaki gibi olmaktadır.

$$\left. \begin{aligned} S_i(x_{i+1}) = y_{i+1}, \quad i = 1, 2, \dots, n-1 \\ S_i(x_i) = y_i, \quad i = 2, 3, \dots, n \end{aligned} \right\} \quad (4.27)$$

$$\left. \begin{aligned} a_i x_{i+1}^2 + b_i x_{i+1} + c_i = y_{i+1}, \quad i = 1, 2, \dots, n-1 \\ a_i x_i^2 + b_i x_i + c_i = y_i, \quad i = 2, 3, \dots, n \end{aligned} \right\} \quad (4.28)$$

4.2.1.2.3 Ara Noktalardaki Birinci Türevler

Birbirine komşu kuadratik polinomların birinci türevleri ara noktalarda eşit olmalıdır.

$$S'_1(x_2) = S'_2(x_2), \quad S'_2(x_3) = S'_3(x_3), \dots, \quad S'_{n-1}(x_n) = S'_n(x_n) \Big\}_{n-1 \text{ denklem}} \quad (4.29)$$

Bu denklemlerin genel ifadesi aşağıdaki gibi olmaktadır.

$$S'_i(x_{i+1}) = S'_{i+1}(x_{i+1}), \quad i = 1, 2, \dots, n-1 \quad (4.30)$$

Polinomların genel ifadesinin birinci türevi $S'_i(x) = 2a_i x + b_i$ olduğuna göre bu eşitlik (4.30)' da yerine yazılarak genel ifade aşağıdaki gibi daha açık olarak elde edilmektedir.

$$2a_i x_{i+1} + b_i = 2a_{i+1} x_{i+1} + b_{i+1}, \quad i = 1, 2, \dots, n-1 \quad (4.31)$$

Kuadratik polinomların en başında belirttiğimiz gibi bilinmeyen katsayıları hesaplamak için $3n$ adet denkleme ihtiyacımız vardır. Şimdiye kadar $2 + (n-1) + (n-1) + (n-1) = (3n-1)$ adet denklem elde ettik. Bilinmeyen katsayıları hesaplamak için son bir denkleme ihtiyacımız kaldı. Bu denklemi de sol sınır noktasındaki ikinci türevin sifıra eşit olduğunu kabul ederek bulabiliriz.

4.2.1.2.4 Sol Sınır Noktasındaki İkinci Türev Sıfır

$$S_1''(x_1) = 0 \Big\} \text{denklem} \quad (4.32)$$

Polinomların genel ifadesinin sol sınır noktasındaki ikinci türevi $S_1''(x_1) = 2a_1$ olduğundan bu eşitlik (4.32)' de yerine yazıldığında buradan a_1 katsayısının değeri hesaplanır.

$$a_1 = 0 \quad (4.33)$$

Böylece toplamda $3n$ adet denklem elde edilmiş olur. (4.33) eşitliği doğrudan $a_1 = 0$ değerini verdiğinden geriye $3n-1$ hesaplanması gereken katsayı kalır. Bunlar da diğer $3n-1$ adet denklem kullanılarak hesaplanır.

4.2.1.3 Kübik Splinelar

Kübik splinelar enterpolasyon yapmak için her aralıkta oluşturulan üçüncü derece polinomları kullanmaktadır. $(x_1, y_1), \dots, (x_{n+1}, y_{n+1})$ gibi $n+1$ adet veriden oluşan bir veri setinde n adet aralık ve n adet kübik polinom bulunmaktadır. Kübik polinomlar genel olarak aşağıdaki formda gösterilmektedir.

$$S_i(x) = a_i(x-x_i)^3 + b_i(x-x_i)^2 + c_i(x-x_i) + d_i, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (4.34)$$

(4.34) eşitliğindeki a_i, b_i, c_i, d_i ($i = 1, 2, \dots, n$) hesaplanması gereken bilinmeyen katsayılardır. n adet polinom ve her polinomda dört katsayı olduğundan

toplamda $4n$ adet bilinmeyen katsayı vardır. Bundan dolayı bütün bilinmeyen katsayıları belirlemek için $4n$ adet denkleme ihtiyacımız vardır. Bu denklemlerin elde edilişleri kuadratik splinelara benzemektedir. Farklı olarak birbirine komşu kübik polinomların ikinci türevleri de ara noktalarda eşit olmak zorundadır. Ayrıca iki sınır koşulu gerekmektedir. $4n$ adet denklemin oluşturulması aşağıdaki gibi olmaktadır.

Splinelar ara ve bitiş noktalarından geçmekte olup birbirine komşu splinelar ara noktalar da aynı değeri vermektedir ($2n$ adet denklem).

$$\begin{aligned} S_1(x_1) &= y_1, & S_n(x_{n+1}) &= y_{n+1} \\ S_{i+1}(x_{i+1}) &= S_i(x_{i+1}), & i &= 1, 2, 3, \dots, n-1 \\ S_i(x_i) &= y_i, & i &= 2, 3, \dots, n \end{aligned} \quad (4.35)$$

Birbirine komşu splineların birinci türevleri ara noktalarda eşittir ($n-1$ adet denklem).

$$S'_i(x_{i+1}) = S'_{i+1}(x_{i+1}), \quad i = 1, 2, \dots, n-1 \quad (4.36)$$

Birbirine komşu splineların ikinci türevleri ara noktalarda eşittir ($n-1$ adet denklem).

$$S''_i(x_{i+1}) = S''_{i+1}(x_{i+1}), \quad i = 1, 2, \dots, n-1 \quad (4.37)$$

Şimdiye kadar toplamda $4n-2$ adet denklem oluşturulmuştur. İhtiyacımız olan son 2 denklem ise sınır koşulları eşitliklerinden sağlanmaktadır. Sınır koşulları için çeşitli yaklaşımlar kullanılmaktadır. Yaygın olarak kullanılan koşullardan iki tanesi için kübik spline fonksiyonları elde edilecektir. Bunlardan birincisi sabit sınır koşulu, ikincisi ise serbest sınır koşuludur. Bu sınır koşulları denklem (4.38) ve (4.39)' da verilmiştir.

Sabit sınır koşulunda (x_1, y_1) noktasından başlayan S_1 fonksiyonunun birinci türevi ve (x_{n+1}, y_{n+1}) noktasında biten S_n fonksiyonunun birinci türevi belirtilmiştir.

$$\begin{aligned} S_1'(x_1) &= p \\ S_n'(x_{n+1}) &= q \end{aligned} \quad (4.38)$$

Serbest sınır koşulunda (x_1, y_1) noktasından başlayan S_1 fonksiyonunun ikinci türevi ve (x_{n+1}, y_{n+1}) noktasında biten S_n fonksiyonunun ikinci türevi sıfır olarak alınmaktadır.

$$\begin{aligned} S_1''(x_1) &= 0 \\ S_n''(x_{n+1}) &= 0 \end{aligned} \quad (4.39)$$

4.2.1.3.1 Sabit Sınır Koşulu Kullanılarak Kübik Splineların Oluşturulması

a_i, b_i, c_i, d_i ($i=1,2,\dots,n$) katsayıları (4.38)' de verilen sabit sınır koşulu eşitlikleri ile (4.35)-(4.37) denklemleri kullanılarak belirlenecektir.

(4.34) denkleminde $S_i(x_i) = d_i$ ($i=1,2,3,\dots,n$) olmaktadır. (4.35)' deki ilk ve son denklemlerden $S_i(x_i) = y_i$ ($i=1,2,3,\dots,n$) olduğu görülmektedir. Böylece;

$$d_i = y_i \quad (i=1,2,3,\dots,n) \quad (4.40)$$

Veri noktaları arasındaki mesafeyi $h_i = x_{i+1} - x_i$ ($i=1,2,\dots,n$) olarak tanımlayalım. Bunu ve $S_{i+1}(x_{i+1}) = d_{i+1}$ eşitliğini dikkate aldığımızda (4.35)' deki ikinci denklemin düzenlenmiş hali aşağıdaki gibi olmaktadır.

$$d_{i+1} = a_i h_i^3 + b_i h_i^2 + c_i h_i + d_i, \quad i=1,2,\dots,n-1 \quad (4.41)$$

Eğer $d_{n+1} = y_{n+1}$ olarak tanımlarsak (4.41) denklemini $i=1,2,\dots,n$ aralığında geçerli olacaktır. Çünkü $S_n(x_{n+1}) = y_{n+1}$ 'dir. Böylece;

$$d_{i+1} = a_i h_i^3 + b_i h_i^2 + c_i h_i + d_i, \quad i=1,2,\dots,n \quad (4.42)$$

$S_i(x)$ ' in birinci türevini alıp (4.36) denklemini uyguladığımızda aşağıdaki eşitliği elde ederiz.

$$c_{i+1} = 3a_i h_i^2 + 2b_i h_i + c_i, \quad i = 1, 2, \dots, n-1 \quad (4.43)$$

Eğer $c_{n+1} = S_n'(x_{n+1})$ olarak tanımlarsak (4.43) denklemi $i = 1, 2, \dots, n$ aralığında geçerli olacaktır. Böylece;

$$c_{i+1} = 3a_i h_i^2 + 2b_i h_i + c_i, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (4.44)$$

$S_i(x)$ ' in ikinci türevini alıp (4.37) denklemini uyguladığımızda aşağıdaki eşitliği elde ederiz.

$$2b_{i+1} = 6a_i h_i + 2b_i, \quad i = 1, 2, \dots, n-1 \quad (4.45)$$

Eğer $b_{n+1} = \frac{1}{2} S_n''(x_{n+1})$ olarak tanımlarsak (4.45) denklemi $i = 1, 2, \dots, n$ aralığında geçerli olacaktır. Böylece;

$$b_{i+1} = 3a_i h_i + b_i, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (4.46)$$

Buradaki amacımız sadece b_i ($i = 1, 2, \dots, n+1$) katsayılarını içeren bir denklem sistemi oluşturmaktır. (4.46) denklemi $a_i = (b_{i+1} - b_i) / 3h_i$ olacak şekilde düzenlendikten sonra (4.42) ve (4.44) denklemlerinde yerine yazıldığında aşağıdaki eşitlikler elde edilmektedir.

$$d_{i+1} = \frac{1}{3} (2b_i + b_{i+1}) h_i^2 + c_i h_i + d_i, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (4.47)$$

ve

$$c_{i+1} = (b_i + b_{i+1}) h_i + c_i, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (4.48)$$

(4.47) denklemi c_i için düzenlenirse aşağıdaki denklem elde edilir.

$$c_i = \frac{d_{i+1} - d_i}{h_i} - \frac{1}{3}(2b_i + b_{i+1})h_i \quad (4.49)$$

(4.48) ve (4.49) denkleminde i ' ler $i-1$ olarak düzenlenip tekrar yazıldığında aşağıdaki eşitlikler edilir.

$$c_{i-1} = \frac{d_i - d_{i-1}}{h_{i-1}} - \frac{1}{3}(2b_{i-1} + b_i)h_{i-1} \quad (4.50)$$

$$c_i = (b_{i-1} + b_i)h_{i-1} + c_{i-1} \quad (4.51)$$

Son olarak (4.49) ve (4.50) denklemleri (4.51) denkleminde yerlerine yazılıp düzenlenirse aşağıdaki denklem elde edilmektedir.

$$b_{i-1}h_{i-1} + 2b_i(h_i + h_{i-1}) + b_{i+1}h_i = \frac{3(d_{i+1} - d_i)}{h_i} - \frac{3(d_i - d_{i-1})}{h_{i-1}}, \quad i = 2, 3, \dots, n \quad (4.52)$$

(4.52) denklemi sadece b_i ($i = 1, 2, \dots, n+1$) katsayılarının bilinmediği bir sistem denklemini ifade etmektedir. d_i ($i = 1, 2, \dots, n+1$) değerleri veri noktalarındaki fonksiyon değerlerini, h_i ($i = 1, 2, \dots, n$) değerleri ise veri noktaları arasındaki mesafeleri ifade ettiğinden hepsi bilinmektedir. Ancak (4.52) denklemi $n+1$ bilinmeyen olduğu $n-1$ adet denklemden meydana gelen bir sistemdir. Bu sistemi çözebilmek için iki adet denkleme daha ihtiyacımız vardır. Bu denklemler (4.38) denklemindeki sabit sınır koşulundan elde edilmektedir. (4.49) denklemi $i = 1$ için yazılırsa;

$$c_1 = \frac{d_2 - d_1}{h_1} - \frac{1}{3}(2b_1 + b_2)h_1 \quad (4.53)$$

Sınır koşulundan bulunan $c_1 = S'_1(x_1) = p$ eşitliği kullanılarak (4.53) denkleminde yerine yazılıp düzenlendiğinde aşağıdaki denklem elde edilmektedir.

$$(2b_1 + b_2)h_1 = \frac{3(d_2 - d_1)}{h_1} - 3p \quad (4.54)$$

(4.48) denklemi kullanılarak;

$$c_{n+1} = (b_n + b_{n+1})h_n + c_n \quad (4.55)$$

Sınır koşulundan bulunan $c_{n+1} = S'_n(x_{n+1}) = q$ eşitliği kullanılarak (4.55) denkleminde yerine yazılıp düzenlendiğinde aşağıdaki denklem elde edilmektedir.

$$c_n = q - (b_n + b_{n+1})h_n \quad (4.56)$$

(4.49) denklemi $i = n$ için yazılırsa;

$$c_n = \frac{d_{n+1} - d_n}{h_n} - \frac{1}{3}(2b_n + b_{n+1})h_n \quad (4.57)$$

(4.56) eşitliği (4.57) denkleminde yerine yazılarak düzenlendiğinde aşağıdaki denklem elde edilmektedir.

$$(2b_{n+1} + b_n)h_n = -\frac{3(d_{n+1} - d_n)}{h_n} + 3q \quad (4.58)$$

(4.58), (4.54) ve (4.52) denklemleri birleştirilmesi $n+1$ adet b_i ($i=1,2,\dots,n+1$) bilinmeyen içeren $n+1$ adet denklemden oluşan bir sistemi meydana getirmektedir.

Özet olarak b_i katsayıları aşağıda verilen denklemlerin oluşturduğu sistem çözümlenerek elde edilmektedir.

$$\begin{aligned} (2b_1 + b_2)h_1 &= \frac{3(d_2 - d_1)}{h_1} - 3p \\ b_{i-1}h_{i-1} + 2b_i(h_i + h_{i-1}) + b_{i+1}h_i &= \frac{3(d_{i+1} - d_i)}{h_i} - \frac{3(d_i - d_{i-1})}{h_{i-1}}, \quad i = 2, 3, \dots, n \\ (2b_{n+1} + b_n)h_n &= -\frac{3(d_{n+1} - d_n)}{h_n} + 3q \end{aligned} \quad (4.59)$$

(4.46)'daki denklemler tridiagonal bir matris sistemi oluşturmaktadır. Bu sistem Thomas algoritması ile etkili bir biçimde çözülebilmektedir. b_i katsayıları elde edildikten sonra denklem (4.49) kullanılarak c_i katsayıları hesaplanabilmektedir.

$$c_i = \frac{d_{i+1} - d_i}{h_i} - \frac{1}{3}(2b_i + b_{i+1})h_i, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (4.60)$$

Son olarak denklem (4.33) kullanılarak a_i katsayıları hesaplanabilmektedir.

$$a_i = \frac{b_{i+1} - b_i}{3h_i}, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (4.61)$$

4.2.1.3.2 Serbest Sınır Koşulu Kullanılarak Kübik Splinelerin Oluşturulması

Serbest sınır koşulunda sınırdaki değerler denklem (4.39)' da belirtilmiştir. $S_1''(x) = 6a_1(x - x_1) + 2b_1$ eşitliği bilindiğine göre birinci sınır koşulu kullanılarak $b_1 = 0$ olarak elde edilir. Önceki kısımda elde edilen $b_{n+1} = \frac{1}{2}S_n''(x_{n+1})$ eşitliği ile ikinci sınır koşulu kullanılarak $b_{n+1} = 0$ olarak elde edilir. Elde edilen bu iki değeri denklem (4.52) ile birleştirdiğimizde $n+1$ adet bilinmeyen içeren $n+1$ adet denklemden oluşan sistem oluşturulabilir. Bu sistemin içerdiği denklemler aşağıdaki gibi olmaktadır.

$$\begin{aligned} b_1 &= 0 \\ b_{i-1}h_{i-1} + 2b_i(h_i + h_{i-1}) + b_{i+1}h_i &= \frac{3(d_{i+1} - d_i)}{h_i} - \frac{3(d_i - d_{i-1})}{h_{i-1}}, \quad i = 2, 3, \dots, n \\ b_{n+1} &= 0 \end{aligned} \quad (4.62)$$

Bu tridiagonal matris sistemi Thomas algoritması yardımıyla etkili bir biçimde çözümlenerek b_i katsayıları hesaplanmaktadır. Diğer bilinmeyen katsayılar sabit sınır koşulundaki gibi belirlenmektedir. Özet olarak d_i ($i = 1, 2, \dots, n+1$) veri noktalarındaki fonksiyon değerleri, h_i ($i = 1, 2, \dots, n$) veri noktaları arasındaki mesafeyi ifade etmektedir. b_i katsayıları denklem (4.62), c_i katsayıları denklem (4.60) ve a_i katsayıları denklem (4.61) kullanılarak hesaplanmaktadır (Esfandiari, 2013).

4.3 Dispersiyon Kısımının Çözümü

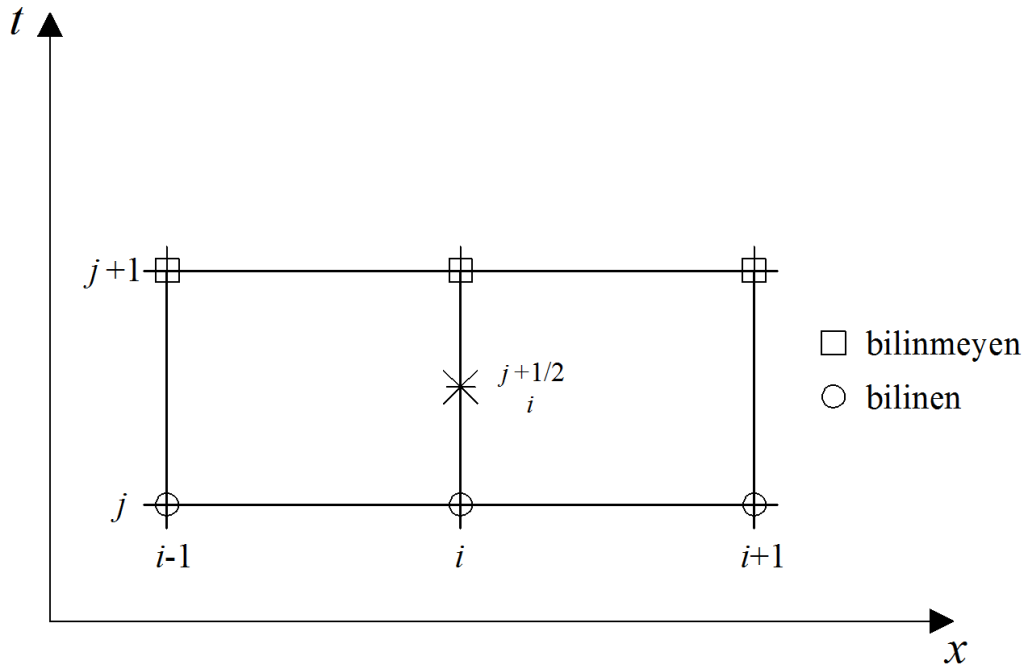
Dispersiyon kısmının çözümü için Crank-Nicolson (CN) sonlu fark şeması seçilmiştir. Bunun sebebi dispersiyon probleminde ürettiği kesinliği yüksek ve stabil sonuçlardır. Ayrıca kolay uygulanabilir olması ve işlem süresinin çok fazla olmaması diğer sağladığı faydalardır.

4.3.1 Crank-Nicolson Şeması

Operatör ayırma metotları ile proseslerine ayrılan adveksiyon-dispersiyon denkleminin adveksiyon prosesi spline enterpolasyonuna dayalı karakteristikler metodu ile çözülecektir. Geriye kalan dispersiyon prosesinin çözümünde Crank-Nicolson şeması uygulanacaktır.

$$\frac{\partial C}{\partial t} = D \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} \quad (4.63)$$

Dispersiyon denklemi denklem (4.63)' te verilmiştir. Crank-Nicolson metodunun sonlu farklar formunda üç adet yeni zamanda, üç adette eski zamanda olmak üzere toplamda altı adet düğüm noktası kullanılmaktadır. Bu düğüm noktaları şekil (4.5)' te gösterilmiştir.



Şekil 4.3: Crank-Nicolson metodunun sonlu farklar ile gösterimi.

Dispersiyon denkleminin zamandaki türevi hesaplanırken $(i, j+1/2)$ noktasında merkezi fark açılımı kullanılmaktadır. Konumdaki türevi ise $(i, j+1)$ ve (i, j) noktalarındaki merkezi fark açılımlarının ortalaması alınarak hesaplanmaktadır.

$$\frac{C_i^{j+1} - C_i^j}{\Delta t} = \frac{1}{2} \left\{ \frac{D}{(\Delta x)^2} (C_{i+1}^j - 2C_i^j + C_{i-1}^j) + \frac{D}{(\Delta x)^2} (C_{i+1}^{j+1} - 2C_i^{j+1} + C_{i-1}^{j+1}) \right\} \quad (4.64)$$

Denklem (4.64)' teki bilinen değerler sağ tarafta, bilinmeyen değerler sol tarafta toplanırsa denklem (4.65) elde edilmektedir.

$$a_i' C_{i-1}^{j+1} + b_i' C_i^{j+1} + c_i' C_{i+1}^{j+1} = f_i' \quad (4.65)$$

Denklem (4.65)' teki katsayılar ve sağ tarafın eşitlikleri sırasıyla:

$$a_i' = \frac{1}{2} \frac{\Delta t D}{(\Delta x)^2} \quad (4.66)$$

$$b_i' = -\frac{\Delta t D}{(\Delta x)^2} - 1 \quad (4.67)$$

$$c_i' = \frac{1}{2} \frac{\Delta t D}{(\Delta x)^2} \quad (4.68)$$

$$f_i' = -C_i^j - \frac{1}{2} \frac{\Delta t D}{(\Delta x)^2} (C_{i+1}^j - 2C_i^j + C_{i-1}^j) \quad (4.69)$$

Denklem (4.65) tridiagonal bir cebirsel eşitlikler sistemi oluşturmaktadır. Bu sistem Thomas algoritmasıyla eş zamanlı olarak etkili bir biçimde çözülebilmektedir (Lam, 1994).

5. SAYISAL UYGULAMALAR

Bu bölümde, operatör ayırma metotları ile birlikte diğer nümerik metotların bir boyutlu ve iki boyutlu kirletici taşınımı problemleri üzerindeki etkinliği çok çeşitli Courant ve Peclet sayıları için detaylı olarak incelenecektir.

Courant sayısı akışkanın hızına, seçilen düğümler arası genişliğe (Δx) ve zaman aralıklarına (Δt) bağlı boyutsuz bir sayıdır. Bir algoritmanın stabil olup olmadığı Courant sayısının değerine bağlı olarak ifade edilmektedir. Genellikle $Cr < 1$ için çoğu algoritma stabildir. Courant sayısı büyüdükçe metotların stabiliteeleri düşmekte ve ürettikleri çözümler bozulmaktadır. Çoğu nümerik metot Courant sayısının 1' den büyük olduğu durumlarda çözüm üretememekte veya yüksek hatalı çözümler elde etmektedir.

$$Cr = V \frac{\Delta t}{\Delta x} \quad (5.1)$$

Peclet sayısı ise akışkanın hızına, difüzyon katsayısına ve düğümler arası genişliğe bağlı olan boyutsuz bir sayıdır. Peclet sayısı o problemde hangi prosesin baskın olduğunu anlamamızı sağlamaktadır. Peclet sayısının büyük olması adveksiyonun, küçük olması ise difüzyonun baskın olduğunu göstermektedir.

$$Pe = V \frac{\Delta x}{D} \quad (5.2)$$

Bu incelemelerde saf adveksiyon, adveksiyon-dispersiyon, keskin (sharp) çözümlü adveksiyon-dispersiyon ve iki boyutlu adveksiyon-dispersiyon gibi farklı tarzda problemler kullanılacaktır. Problemlerin çözümünde adveksiyon prosesi için kübik spline interpolasyonuna dayalı karakteristikler metodu (MOC-CS) difüzyon prosesi içinse Crank-Nicolson (CN) sonlu fark şeması kullanılacaktır. Nümerik metotlardan elde edilen sonuçların doğruluğu iki şekilde incelenecektir. İlk olarak problemlerin kritik noktalarındaki değerler literatürdeki diğer araştırmacıların sonuçlarıyla ve analitik çözümlerle karşılaştırılarak yapılacaktır. İkinci olarak elde edilen nümerik sonuçlar ile analitik çözümler arasında hesaplanan hata normları

sayesinde metotların kesinliği ölçülecektir. Hata normlarının hesaplanması aşağıdaki gibi olmaktadır.

$$L_{\infty} = \max_i |c_i^{kesin} - c_i^{nümerik}| \quad (5.3)$$

$$L_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^N |c_i^{kesin} - c_i^{nümerik}|^2} \quad (5.4)$$

5.1 Bir Boyutlu Problemler

5.1.1 Birinci Problem

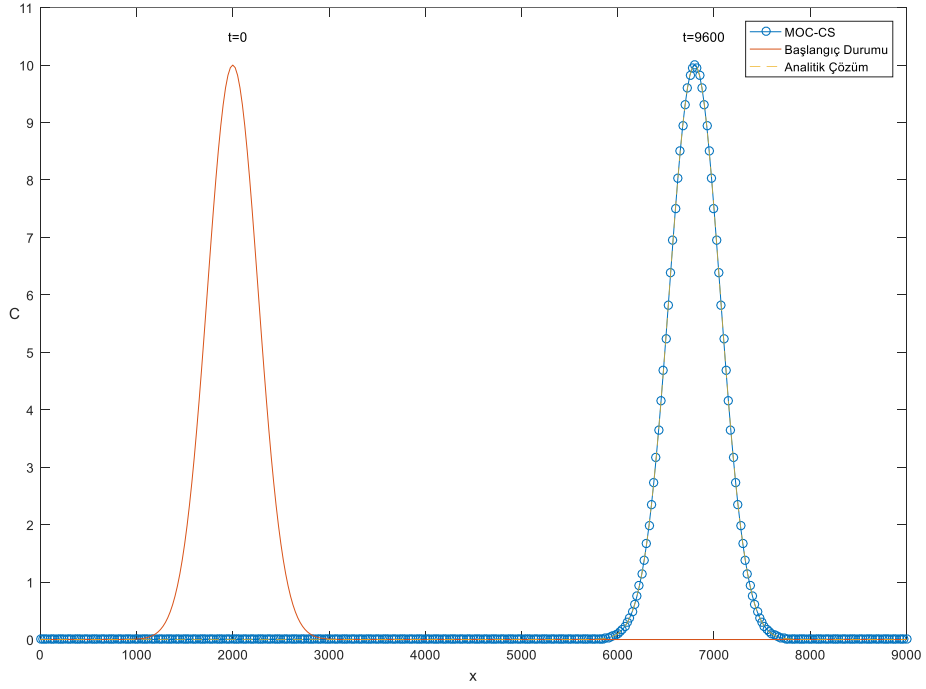
Sabit kesit alanına sahip sonsuz uzunlukta bir kanalda saf adveksiyon denklemini inceleyelim. Akışkan hızı $V = 0.5$ m/s olarak alınmıştır. Gaussian dağılımına sahip konsantrasyonun standart sapması $\rho = 264$ m ve başlangıç tepe noktası $x_0 = 2000$ m' dir. Problem çözümünde kanal uzunluğu $L = 9000$ m olarak ele alınmıştır. Başlangıç dağılımı kanalda $t = 9600$ s boyunca şekil değiştirmeden taşınmaktadır. Bu problemin analitik çözümü aşağıdaki denklemin çözümüyle elde edilmektedir (Szymkiewicz, 1993).

$$C(x, t) = 10 \exp \left[-\frac{(x - x_0 - Vt)^2}{2\rho^2} \right] \quad (5.5)$$

Sınırlarda aşağıdaki sınır koşulları kullanılmıştır.

$$\begin{aligned} C(0, t) &= 0 \\ -D \left(\frac{\partial C}{\partial x} \right) (L, t) &= 0 \end{aligned} \quad (5.6)$$

Denklem (5.5)' te $t = 0$ kullanıldığında başlangıç değerleri, $t = 9600$ s kullanıldığında ise problemin analitik çözümü hesaplanmaktadır.



Şekil 5.1: $\Delta x = 25$ m ve $\Delta t = 50$ s aralıklarında MOC-CS ile elde edilen nümerik çözümle analitik çözümün karşılaştırılması.

Tez kapsamında adveksiyon prosesinin çözümünde Szymkiewicz (1993) tarafından önerilen kübik spline interpolasyonuna dayalı karakteristikler metodu (MOC-CS) kullanılmıştır. Bu sebeple tablo (5.1)' den görülebileceği gibi saf adveksiyon problemi için elde edilen sonuçlar Szymkiewicz (1993) tarafından elde edilen sonuçlarla birebir uyuşmaktadır. Bu algoritma çok büyük Courant sayılarında bile etkili sonuçlar üretebildiği için seçilmiştir.

Tablo 5.1: $t = 9600$ s' de çeşitli Courant sayıları için en büyük konsantrasyon değerleri.

C_r	Δx (m)	Δt (s)	Holly-Preissmann (1977)	Szymkiewicz (1993)	MOC-CS	Analitik Çözüm
0.25	100	50	9.677	9.816	9.816	10
0.50	100	100	9.756	9.836	9.836	10
0.75	100	150	9.805	9.934	9.934	10
1.00	100	200	10.000	10.000	10.000	10
1.50	100	300	-	9.941	9.941	10
2.00	100	400	-	10.000	10.000	10
2.40	100	480	-	9.966	9.966	10
3.20	100	640	-	9.988	9.988	10
4.80	100	960	-	9.992	9.992	10

Tablo (5.1)'deki sonuçlar incelendiğinde araştırmacı problemin yapısını ve $t=9600$ s' de en büyük konsanstrasyon değerinin $x=6800$ m' de oluşacağını dikkate alarak bir Δx aralığı seçmiş ve bu aralığı sabit tutarak çok farklı Δt değerleri için elde ettiği sonuçları sunmuştur. Çok büyük Courant sayılarında dahi hesaplanan en büyük konsantrasyon değeri analitik çözüme oldukça yakındır. Holly-Preissmann (1977) Courant sayısının 1' den büyük olduğu durumlarda sonuç bulamamıştır.

Algoritmanın aynı Courant sayılarındaki etkinliğini detaylı olarak inceleyebilmek için tablo (5.2) ve tablo (5.3) oluşturulmuştur. Δx aralıkları sabit tutularak sadece Δt aralıkları değiştirilerek yapılan hesaplamalardan elde edilen sonuçlar tablo (5.2)'de verilmiştir. Benzer şekilde Δt aralıkları sabit tutularak sadece Δx aralıkları değiştirilerek yapılan hesaplamalardan elde edilen sonuçlar tablo (5.3)'de verilmiştir.

Tablo (5.2) ve tablo (5.3) birlikte incelendiğinde Courant sayısının, tam sayı olduğu durumda elde edilen sonuçlar analitik çözümle birebir aynıdır. Courant sayısını denklem (5.1)'den görülebileceği üzere Δx ve Δt büyüklüklerine bağlıdır. Bu büyüklüklere müdahale ederek aynı Courant sayılarında çok farklı sonuçlar elde etmek mümkündür.

Δx ve Δt aralıklarının küçük seçilmesi hesaplama sürelerini arttırmakta ve elde edilen sonuçların doğruluğunu etkilemektedir. Tablo (5.2) ve tablo (5.3) incelendiğinde açıkça görülmektedir ki Δx aralığı yeteri kadar küçük seçildiğinde yüksek Courant sayılarında Crank-Nicolson şeması bile analitik çözüme yaklaşmaktadır. Bu sebeple Δx aralığı küçük seçilerek elde edilen Courant sayılarında hesaplanan doğruluğu yüksek değerler, geliştirilen nümerik metodun performansını tam olarak ifade edememektedir. Metodun yüksek Courant sayılarındaki gerçek performansını görebilmek amacıyla sabit bir Δx aralığında Δt aralığı değiştirilerek hesaplamalar yapılmış ve tablo (5.2)'de sunulmuştur.

Tablo 5.2: $t = 9600$ s' de sabit Δx ve farklı Δt ' ler için sonuçlar ve hatalar.

Cr	Δx (m)	Δt (s)	CN	MOC- CS	Analitik Çözüm	L_2		L_∞	
						CN	MOC- CS	CN	MOC- CS
0.25	200	100	5.012	8.836	10	12.210	1.846	5.315	1.164
0.50	200	200	4.885	8.969	10	12.480	1.522	5.338	1.031
0.75	200	300	4.699	9.426	10	12.878	0.897	5.341	0.574
1.00	200	400	4.477	10.000	10	13.350	0.000	5.523	0.000
1.50	200	600	4.010	9.497	10	14.333	0.709	5.990	0.503
2.00	200	800	3.584	10.000	10	15.213	0.000	6.416	0.000
2.40	200	960	3.292	9.665	10	15.805	0.469	6.708	0.335
3.00	200	1200	2.931	10.000	10	16.524	0.000	7.069	0.000
4.80	200	1920	2.221	9.905	10	17.880	0.160	7.779	0.095
0.25	100	50	7.434	9.816	10	9.445	0.368	3.948	0.184
0.50	100	100	7.288	9.836	10	9.908	0.309	4.062	0.164
0.75	100	150	7.066	9.934	10	10.615	0.130	4.203	0.066
1.00	100	200	6.792	10.000	10	11.488	0.000	4.492	0.000
1.50	100	300	6.182	9.941	10	13.436	0.109	5.039	0.059
2.00	100	400	5.591	10.000	10	15.321	0.000	5.242	0.000
2.40	100	480	5.169	9.966	10	16.657	0.064	5.498	0.034
3.20	100	640	4.475	9.988	10	18.819	0.024	5.525	0.012
4.80	100	960	3.540	9.992	10	21.624	0.016	6.460	0.008
0.25	50	25	9.320	9.978	10	4.835	0.060	1.663	0.022
0.50	50	50	9.030	9.980	10	6.183	0.052	2.100	0.020
0.75	50	75	8.583	9.992	10	8.179	0.020	2.704	0.008
1.00	50	100	8.053	10.000	10	10.524	0.000	3.320	0.000
1.50	50	150	6.993	9.993	10	15.270	0.017	4.452	0.007
2.00	50	200	6.105	10.000	10	19.301	0.000	5.128	0.000
2.40	50	240	5.532	9.996	10	21.895	0.010	5.425	0.004
3.20	50	320	4.671	9.999	10	25.740	0.003	5.582	0.001
4.80	50	480	3.614	9.999	10	30.268	0.002	6.414	0.001

MOC-CS ile literatürdeki diğer araştırmacıların metotları tablo (5.4)' te karşılaştırılmaktadır.

Tablo (5.4) incelendiğinde Δt aralığı sabit tutularak Δx aralığı değiştirilerek Courant sayısı büyütülmüştür. Bu sebepten dolayı bütün araştırmacıların sonuçları Courant sayısının büyümesiyle analitik çözüme yaklaşmaktadır. MOC-CS metodunun performansı her Courant sayısı için iyi olmakla birlikte $Cr \geq 1$ olduğu durumlarda analitik çözümle aynı sonucu vermektedir. Diğer araştırmacılar büyük Δt aralıkları için sonuç vermediklerinden karşılaştırma yapılamamıştır. MOC-CS metodunun büyük Δt aralıklarındaki performansı detaylı olarak tablo (5.2)' de incelenmiştir.

Tablo 5.3: $t = 9600$ s' de sabit Δt ve farklı Δx ' ler için sonuçlar ve hatalar.

Cr	Δx (m)	Δt (s)	CN	MOC- CS	Analitik Çözüm	L_2		L_∞	
						CN	MOC- CS	CN	MOC- CS
0.25	400.0	200	3.919	6.552	10	12.100	4.453	6.081	3.448
0.50	200.0	200	4.885	8.969	10	12.480	1.522	5.338	1.031
0.75	133.3	200	5.791	9.834	10	12.249	0.296	5.087	0.166
1.00	100.0	200	6.792	10.000	10	11.488	0.000	4.492	0.000
1.50	66.7	200	7.647	9.984	10	10.689	0.037	3.797	0.016
2.00	50.0	200	8.053	10.000	10	10.524	0.000	3.320	0.000
2.50	40.0	200	8.267	9.998	10	10.707	0.006	3.107	0.002
3.18	31.5	200	8.461	10.000	10	11.450	0.001	2.870	0.000
4.79	20.9	200	8.612	10.000	10	12.724	0.000	2.735	0.000
0.24	309.1	150	3.949	7.484	10	12.050	3.426	6.051	2.516
0.55	136.0	150	5.935	9.638	10	11.874	0.603	4.951	0.362
0.75	100.0	150	7.066	9.934	10	10.615	0.130	4.203	0.066
0.99	75.6	150	7.903	10.000	10	9.307	0.001	3.471	0.000
1.50	50.0	150	8.583	9.993	10	8.179	0.017	2.704	0.007
2.00	37.6	150	8.845	10.000	10	7.847	0.000	2.366	0.000
2.38	31.5	150	9.081	9.999	10	7.837	0.003	2.029	0.001
3.20	23.4	150	9.164	10.000	10	8.058	0.000	1.913	0.000
4.81	15.6	150	9.268	10.000	10	9.035	0.000	1.762	0.000
0.25	200.0	100	5.012	8.836	10	12.210	1.846	5.315	1.164
0.50	100.0	100	7.288	9.836	10	9.908	0.309	4.062	0.164
0.75	66.7	100	8.455	9.982	10	7.576	0.043	2.843	0.018
1.00	50.0	100	9.030	10.000	10	6.183	0.000	2.100	0.000
1.50	33.3	100	9.484	9.998	10	4.980	0.006	1.410	0.002
2.00	25.0	100	9.639	10.000	10	4.626	0.000	1.135	0.000
2.40	20.8	100	9.749	9.995	10	4.573	0.001	1.024	0.000
3.20	15.6	100	9.752	10.000	10	4.706	0.000	0.912	0.000
4.80	10.4	100	9.777	10.000	10	5.258	0.000	0.830	0.000
0.25	100.0	50	7.434	9.836	10	9.445	0.309	3.948	0.164
0.50	50.0	50	9.320	10.000	10	4.835	0.000	1.663	0.000
0.75	33.3	50	9.765	9.998	10	3.107	0.006	0.878	0.002
1.00	25.0	50	9.888	10.000	10	2.383	0.000	0.579	0.000
1.50	16.7	50	9.953	10.000	10	1.846	0.000	0.362	0.000
2.00	12.5	50	9.970	10.000	10	1.695	0.000	0.286	0.000
2.40	10.4	50	9.971	10.000	10	1.669	0.000	0.257	0.000
3.20	7.8	50	9.986	9.999	10	1.711	0.000	0.227	0.000
4.80	5.2	50	9.980	10.000	10	1.906	0.000	0.207	0.000

Tablo 5.4: Hesaplanan sonuçların literatürdeki sonuçlarla karşılaştırılması.

Cr	Δx (m)	Δt (s)	Gardner (1994)	Dağ (2006)		Dağ (2011)		Gürarslan (2013)	CN	MOC- CS	Analitik Çözüm
				FEMLSF	FEMQSF	TC	TG				
0.25	100	50	9.986	9.647	9.926	9.940	9.989	9.999	7.434	9.836	10
0.50	50	50	9.986	9.864	9.932	9.984	9.991	10.000	9.320	10.000	10
0.75	33.3	50	9.993	9.918	9.949	9.993	9.996	10.000	9.765	9.998	10
1.00	25	50	9.986	9.943	9.961	9.986	9.991	10.000	9.888	10.000	10
1.50	16.7	50	9.994	9.951	9.959	9.994	9.996	-	9.953	10.000	10
2.00	12.5	50	9.986	9.956	9.961	9.986	9.995	-	9.970	10.000	10
2.40	10.4	50	9.994	9.959	9.962	9.994	9.996	-	9.971	10.000	10
3.20	7.8	50	9.999	9.960	9.962	9.993	9.996	-	9.986	9.999	10
4.80	5.2	50	9.994	9.961	9.962	9.994	9.996	-	9.980	10.000	10

Tablo 5.5: $t = 9600$ s'de hesaplanan hataların literatürdeki hatalarla karşılaştırılması.

Cr	Δx (m)	Δt (s)	L_2		L_{∞}	
			Korkmaz (2012)	MOC- CS	Korkmaz (2012)	MOC- CS
			DQM		DQM	
0.25	200	100	34.789	1.846	3.322	1.164
0.50	100	100	2.867	0.309	1.160	0.164
1.00	50	100	0.377	0.000	0.146	0.000
1.50	33.3	100	-	0.006	-	0.002
2.00	25.0	100	-	0.000	-	0.000
2.40	20.8	100	-	0.001	-	0.000
3.20	15.6	100	-	0.000	-	0.000
4.80	10.4	100	-	0.000	-	0.000

Tablo (5.5)' te MOC-CS metodu ile Korkmaz (2012) diferansiyel kuadratör metodunun (DQM) hataları karşılaştırılmaktadır. DQM metodunun hata değerleri yüksek olmakla birlikte $Cr > 1$ için sonuç bulamamıştır. MOC-CS metodunun hem hata değerleri oldukça küçüktür hem de Courant sınırlaması yoktur yani koşulsuz stabildir.

Tablo 5.6: $t = 9600$ s'de hesaplanan hataların literatürdeki hatalarla karşılaştırılması.

Cr	Δx (m)	Δt (s)	L_2				MOC-CS
			Dağ (2006)		Korkmaz (2012)	Gürarlan (2013)	
			FEMLSF	FEMQSF	DQM	CD6	
0.125	200	50	32.874	12.555	34.734	0.8511	1.9526
0.250	100	50	10.596	7.951	2.685	0.0218	0.3683
0.500	50	50	7.984	7.908	0.170	0.0024	0.0520
1.000	25	50	7.881	7.908	0.023	0.0029	0.0000
1.500	16.7	50	7.892	7.896	-	-	0.0011
2.000	12.5	50	7.899	7.908	-	-	0.0000
2.400	10.4	50	7.901	7.928	-	-	0.0002
3.200	7.8	50	7.904	7.933	-	-	0.0000
4.800	5.2	50	7.906	7.872	-	-	0.0000
Cr	Δx (m)	Δt (s)	L_{∞}				MOC-CS
			Dağ (2006)		Korkmaz (2012)	Gürarlan (2013)	
			FEMLSF	FEMQSF	DQM	CD6	
0.125	200	50	1.350	0.518	1.156	0.4293	1.0873
0.250	100	50	0.494	0.376	0.136	0.0100	0.1845
0.500	50	50	0.380	0.373	0.008	0.0008	0.0199
1.000	25	50	0.377	0.379	0.001	0.0007	0.0000
1.500	16.7	50	0.378	0.378	-	-	0.0002
2.000	12.5	50	0.378	0.379	-	-	0.0000
2.400	10.4	50	0.378	0.380	-	-	0.0000
3.200	7.8	50	0.379	0.380	-	-	0.0000
4.800	5.2	50	0.378	0.377	-	-	0.0000

Tablo (5.6)' da çeşitli metotların hesaplama hataları verilmiştir. MOC-CS metodunun avantajlı ve dezavantajlı olduğu noktalar görülmektedir. DQM ve CD6 metotlarına göre düşük Courant sayılarında daha kötü sonuçlar vermektedir. Ancak bu metotlar Courant sayısına bağlıdır ($Cr \leq 1$) yani koşullu stabildirler. FEMLSF ve FEMQSF metotları Courant sayısından bağımsız görünmektedir. Bu metotların hataları karşılaştırıldığında MOC-CS metodunun sonuçları oldukça iyidir.

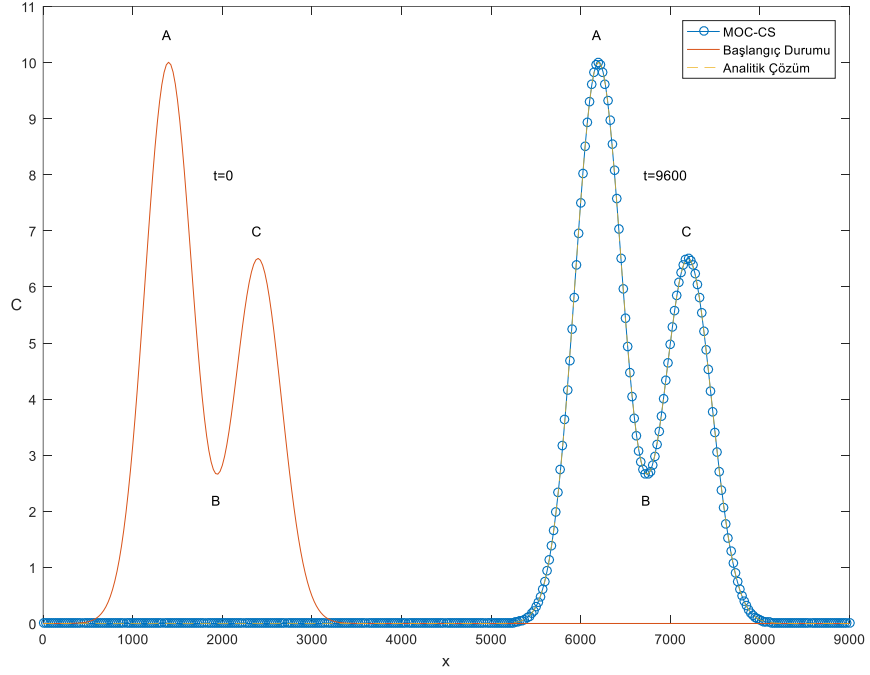
Genel olarak saf adveksiyon problemi için verilen bütün tablolar incelendiğinde yüksek Courant sayılarında bile MOC-CS koşulsuz stabil olmakla birlikte analitik çözüme yakın sonuçlar vermektedir.

5.1.2 İkinci Problem

Birinci probleme benzer şekilde bu problem de Gaussian dağılımına sahiptir. Ancak bu dağılımda iki adet tepe bulunmaktadır. Akışkan hızı $V = 0.5$ m/s ve konsantrasyonun standart sapmaları sırasıyla $\rho_1 = 264$ m ve $\rho_2 = 264$ m'dir. Konsantrasyon tepe noktaları başlangıçta sırasıyla $x_1 = 1400$ m ve $x_2 = 2400$ m koordinatlarındadır. Başlangıç konsantrasyonu $L = 9000$ m uzunluğundaki kanalda $t = 9600$ s boyunca taşınacaktır. Problemin analitik çözümü aşağıda verilmektedir (Yong-hong ve diğ, 2001).

$$C(x,t) = 10 \exp\left[-\frac{(x-x_1-Vt)^2}{2\rho_1^2}\right] + 6.5 \exp\left[-\frac{(x-x_2-Vt)^2}{2\rho_2^2}\right] \quad (5.7)$$

Probleme ait başlangıç ve sınır koşulları analitik çözümden alınabilir. Elde edilen sonuçların değerlendirilmesinde kritik noktalar olan tepe noktalarındaki konsantrasyonlar ve iki tepe noktası arasındaki en düşük konsantrasyon kullanılacaktır. Bu kritik noktalar şekil (5.7)'de açıkça görüldüğü gibi sırasıyla A, B, C noktaları olarak isimlendirilmiştir.



Şekil 5.2: $\Delta x = 25$ m ve $\Delta t = 50$ s aralıklarında MOC-CS ile elde edilen nümerik çözümle analitik çözümün karşılaştırılması ve kritik noktalar.

Problemin çözümünde kullanılan MOC-CS'nin ürettiği sonuçlar tablo (5.7)'de verilmiştir. Elde edilen sonuçların analitik çözümle iyi bir uyum içerisinde olduğu net bir biçimde görülmektedir. Bu çözümlerde düğüm aralığı $\Delta x = 50$ m olarak seçilmiş ve bütün analizlerde sabit tutulmuştur. Her analizde sadece zaman aralığı Δt değiştirilerek çok çeşitli Courant sayıları için çözümler elde edilmiştir. MOC-CS'in yüksek Courant sayılarında düşük Courant sayılarına göre analitik çözüme daha yakın sonuçlar ürettiği açıktır. Bu sebeple yüksek Courant sayılarında çözüm üretmek hem sonucu iyileştirecek hem de hesaplama süresini kısaltacaktır.

Tablo 5.7: $t = 9600$ s'de kritik noktalarda hesaplanan konsantrasyon değerlerinin analitik çözümlle karşılaştırılması ve hata normları ($\Delta x = 50$ m).

Cr	A noktası	B noktası	C noktası	L_2	L_∞
0.01	10.0035	2.6639	6.5063	0.0256	0.0079
0.05	9.9978	2.6664	6.5024	0.0334	0.0110
0.10	9.9920	2.6690	6.4986	0.0468	0.0152
0.15	9.9876	2.6709	6.4957	0.0584	0.0189
0.20	9.9844	2.6722	6.4936	0.0670	0.0215
0.25	9.9823	2.6730	6.4923	0.0725	0.0229
0.30	9.9813	2.6733	6.4916	0.0752	0.0237
0.40	9.9817	2.6728	6.4920	0.0731	0.0233
0.50	9.9847	2.6712	6.4941	0.0634	0.0203
0.60	9.9893	2.6689	6.4973	0.0489	0.0157
0.75	9.9973	2.6653	6.5026	0.0243	0.0077
0.80	9.9997	2.6643	6.5042	0.0168	0.0054
1.00	10.0050	2.6622	6.5077	0.0000	0.0000
1.20	10.0015	2.6638	6.5053	0.0112	0.0036
1.50	9.9982	2.6651	6.5031	0.0212	0.0068
1.60	9.9991	2.6647	6.5037	0.0184	0.0059
2.00	10.0050	2.6622	6.5077	0.0000	0.0000
2.40	10.0011	2.6639	6.5050	0.0123	0.0039
3.00	10.0050	2.6622	6.5077	0.0000	0.0000
3.20	10.0037	2.6628	6.5068	0.0042	0.0014
4.00	10.0050	2.6622	6.5077	0.0000	0.0000
4.80	10.0041	2.6625	6.5071	0.0028	0.0009
6.00	10.0050	2.6622	6.5077	0.0000	0.0000
6.40	10.0035	2.6628	6.5067	0.0046	0.0015
8.00	10.0050	2.6622	6.5077	0.0000	0.0000
9.60	10.0040	2.6626	6.5070	0.0031	0.0010
12.00	10.0050	2.6622	6.5077	0.0000	0.0000
16.00	10.0050	2.6622	6.5077	0.0000	0.0000
19.20	10.0048	2.6623	6.5075	0.0007	0.0002
Analitik Çözüm	10.0050	2.6622	6.5077	-	-

Tablo (5.8)'de düğüm aralığı $\Delta x = 100$ m olarak seçilmiş ve bütün analizlerde sabit tutulmuştur. Elde edilen sonuçlar incelendiğinde MOC-CS Courant sayısının tam sayı olduğu analizler hariç analitik çözüme tam olarak ulaşamamıştır. Bu da seçilen düğüm aralığının olması gerekenden daha büyük seçildiğini göstermektedir. Yine de MOC-CS kabul edilebilir sonuçlar üretmiştir. Ayrıca tablo (5.7)'deki sonuçlara benzer şekilde Courant sayısının büyük olduğu analizlerde analitik çözüme daha yakın sonuçlar bulmuştur. Bu sonuç hata normlarının incelenmesiyle de kolay bir şekilde görülmektedir. Courant sayısı ile hata normlarının sonuçları ters orantılıdır.

Tablo 5.8: Kritik noktalardaki değerlerin analitik çözümlerle karşılaştırılması ve hata normları.

Cr	A noktası	B noktası	C noktası	L_2	L_∞
0.005	9.9768	2.7507	6.4836	0.3010	0.1360
0.025	9.9536	2.7647	6.4677	0.3027	0.1306
0.050	9.9281	2.7808	6.4502	0.3149	0.1341
0.075	9.9058	2.7953	6.4350	0.3333	0.1449
0.100	9.8864	2.8083	6.4219	0.3542	0.1540
0.125	9.8698	2.8196	6.4107	0.3751	0.1612
0.15	9.8556	2.8293	6.4014	0.3945	0.1668
0.20	9.8338	2.8442	6.3873	0.4259	0.1733
0.25	9.8198	2.8534	6.3789	0.4452	0.1852
0.30	9.8127	2.8575	6.3753	0.4522	0.1922
0.375	9.8133	2.8552	6.3775	0.4412	0.1917
0.40	9.8160	2.8525	6.3800	0.4323	0.1889
0.50	9.8380	2.8347	6.3966	0.3759	0.1670
0.60	9.8732	2.8097	6.4213	0.2947	0.1318
0.75	9.9375	2.7721	6.4643	0.1559	0.0675
0.80	9.9582	2.7621	6.4779	0.1124	0.0483
1.00	10.0050	2.7452	6.5077	0.0000	0.0000
1.20	9.9744	2.7611	6.4865	0.0755	0.0329
1.50	9.9452	2.7728	6.4680	0.1307	0.0598
1.60	9.9529	2.7679	6.4735	0.1141	0.0521
2.00	10.0050	2.7452	6.5077	0.0000	0.0000
2.40	9.9701	2.7615	6.4843	0.0766	0.0349
3.00	10.0050	2.7452	6.5077	0.0000	0.0000
3.20	9.9934	2.7512	6.4997	0.0286	0.0126
4.00	10.0050	2.7452	6.5077	0.0000	0.0000
4.80	9.9971	2.7480	6.5026	0.0191	0.0084
6.00	10.0050	2.7452	6.5077	0.0000	0.0000
8.00	10.0050	2.7452	6.5077	0.0000	0.0000
9.60	9.9960	2.7488	6.5018	0.0194	0.0089
Analitik Çözüm	10.0050	2.7452	6.5077	-	-

5.1.3 Üçüncü Problem

Bu problemde akışkan hızı $V = 0.01$ m/s, difüzyon katsayısı $D = 0.002$ m²/s olarak alınmıştır. Ancak difüzyonun çözüm üzerindeki etkisini araştırmak amacıyla farklı difüzyon katsayıları ile de çözümler elde edilmiştir. Kanal uzunluğu $L = 100$ m olarak seçilmiştir. Bu problemin analitik çözümü aşağıdaki denklemin çözümüyle elde edilmektedir (Szymkiewicz, 1993).

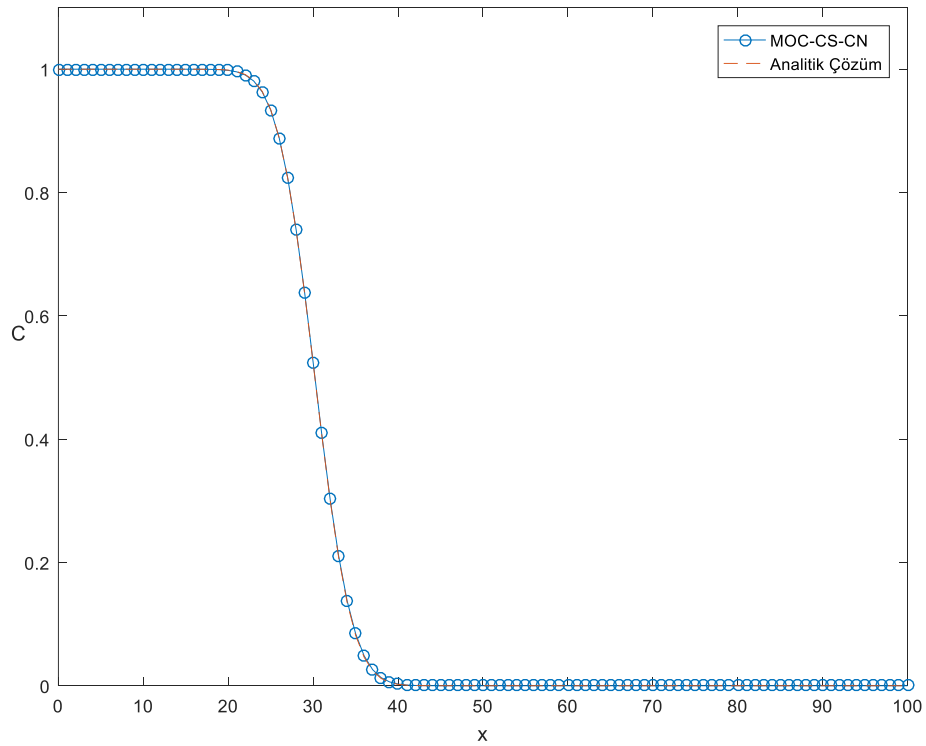
$$C(x,t) = \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \left(\frac{x-Vt}{\sqrt{4Dt}} \right) + \frac{1}{2} \exp \left(\frac{Vx}{D} \right) \operatorname{erfc} \left(\frac{x+Vt}{\sqrt{4Dt}} \right) \quad (5.9)$$

Sınırlarda denklem (5.10)' da verilen sınır koşulları kullanılmıştır.

$$C(0,t) = 1$$

$$-D \left(\frac{\partial C}{\partial x} \right) (L,t) = 0 \quad (5.10)$$

Sınır koşullarından görüldüğü üzere bu problemde akış yukarısından kanala sürekli kirletici girişi vardır. Denklem (5.9)' da $t=0$ kullanıldığında başlangıç değerleri, $t=3000$ s kullanıldığında ise problemin analitik çözümü hesaplanmaktadır.



Şekil 5.3: $\Delta x = 1$ m ve $\Delta t = 10$ s aralıklarında MOC-CS-CN ile elde edilen nümerik çözümle analitik çözümün karşılaştırılması ($Pe = 5$).

Bu problem adveksiyon ve difüzyon proseslerinin her ikisini de barındırmaktadır. Öncelikle operatör ayırma metotları kullanılarak adveksiyon ve difüzyon olmak üzere ikiye ayrılacaktır. Böylece operatör ayırma metotlarının performansları karşılaştırılacaktır. Problem sharp (keskin) bir çözüme sahip olduğu için metotların gerçek performanslarını açık bir şekilde göstermektedir. Yapılan bütün hesaplamalarda Δx aralığı 1 m olarak seçilmiştir.

Tablo 5.9: $t = 3000$ s' de hesaplanan konsantrasyon değerlerinin karşılaştırılması ($\Delta t = 1$ s).

Mesafe x (m)	CN	Gürarlan (2013)	Gürarlan (2014)	Nazir (2016)	MOC-CS-CN		Analitik Çözüm
		RK4- CD6	MC-CD6	CuTBSM	Lie- Trotter	Strang	
0	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
18	0.999	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
19	1.000	0.999	0.999	0.999	0.999	0.999	0.999
20	1.003	0.998	0.998	0.998	0.998	0.998	0.998
21	1.008	0.996	0.996	0.996	0.996	0.996	0.996
22	1.009	0.991	0.991	0.991	0.990	0.990	0.991
23	1.004	0.982	0.982	0.982	0.981	0.981	0.982
24	0.984	0.964	0.964	0.964	0.963	0.963	0.964
25	0.944	0.935	0.934	0.934	0.933	0.933	0.934
26	0.883	0.889	0.889	0.888	0.888	0.888	0.889
27	0.800	0.824	0.823	0.822	0.823	0.823	0.823
28	0.701	0.739	0.738	0.736	0.738	0.738	0.738
29	0.592	0.637	0.636	0.635	0.635	0.635	0.636
30	0.483	0.523	0.523	0.522	0.522	0.522	0.523
31	0.379	0.408	0.408	0.408	0.408	0.408	0.408
32	0.287	0.301	0.301	0.301	0.301	0.301	0.301
33	0.209	0.208	0.208	0.208	0.209	0.209	0.208
34	0.148	0.135	0.135	0.136	0.137	0.137	0.135
35	0.100	0.082	0.082	0.082	0.084	0.084	0.082
36	0.066	0.047	0.046	0.046	0.048	0.048	0.046
37	0.042	0.025	0.024	0.024	0.026	0.026	0.024
38	0.026	0.012	0.012	0.012	0.013	0.013	0.012
39	0.016	0.005	0.005	0.005	0.006	0.006	0.005
40	0.009	0.002	0.002	0.002	0.003	0.003	0.002
41	0.005	0.001	0.001	0.001	0.001	0.001	0.001
42	0.003	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
L_2	0.0979	0.0017	0.0017	-	0.0046	0.0046	
L_∞	0.0437	0.0008	0.0008	-	0.0019	0.0019	

Problem sharp (keskin) bir yapıya sahip olduğundan analitik çözüme yaklaşmak oldukça zordur. Bu sebeple yapılan hesaplamalar oldukça küçük bir zaman aralığından başlamaktadır. Tablo (5.9)'daki hesaplamalar zaman aralığı $\Delta t = 1$ olarak seçilerek $Cr = 0.01$ için yapılmıştır. Böyle küçük bir zaman aralığında bile Crank-Nicolson şemasının bu kadar kötü sonuç vermesi problemin ne kadar zor olduğunu göstermektedir. Ancak diğer metotların hepsi hemen hemen analitik çözümlerle aynı değerleri bulmuşlardır. Ayrıca açıkça görülmektedir ki operatör ayırma metotları arasında fark yoktur. Bu sebeple bu fark net bir şekilde görününceye kadar zaman aralığı ile birlikte Courant sayısı kademe kademe büyütülerek karşılaştırmalar yapılacaktır.

Tablo 5.10: $t = 3000$ s' de hesaplanan konsantrasyon değerlerinin karşılaştırılması ($\Delta t = 10$ s).

Mesafe x (m)	CN	Gürarlan (2013)	Gürarlan (2014)	Nazir (2016)	MOC-CS-CN		Analitik Çözüm
		RK4- CD6	MC-CD6	CuTBSM	Lie- Trotter	Strang	
0	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
18	0.999	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
19	1.000	0.999	0.999	0.999	0.999	0.999	0.999
20	1.003	0.998	0.998	0.998	0.998	0.998	0.998
21	1.008	0.996	0.996	0.996	0.996	0.996	0.996
22	1.010	0.991	0.992	0.991	0.991	0.991	0.991
23	1.004	0.982	0.982	0.982	0.981	0.981	0.982
24	0.984	0.965	0.965	0.963	0.963	0.963	0.964
25	0.944	0.936	0.936	0.933	0.934	0.934	0.934
26	0.883	0.891	0.891	0.885	0.889	0.889	0.889
27	0.800	0.827	0.827	0.818	0.824	0.824	0.823
28	0.701	0.743	0.743	0.732	0.739	0.739	0.738
29	0.592	0.642	0.641	0.631	0.637	0.637	0.636
30	0.482	0.529	0.528	0.517	0.525	0.524	0.523
31	0.379	0.414	0.413	0.404	0.410	0.410	0.408
32	0.287	0.306	0.306	0.298	0.303	0.302	0.301
33	0.209	0.213	0.212	0.207	0.211	0.210	0.208
34	0.148	0.138	0.138	0.134	0.138	0.138	0.135
35	0.100	0.084	0.084	0.081	0.085	0.084	0.082
36	0.066	0.048	0.048	0.045	0.049	0.049	0.046
37	0.042	0.025	0.025	0.023	0.026	0.026	0.024
38	0.026	0.012	0.012	0.011	0.013	0.013	0.012
39	0.016	0.006	0.006	0.005	0.006	0.006	0.005
40	0.009	0.002	0.002	0.002	0.003	0.003	0.002
41	0.005	0.001	0.001	0.001	0.001	0.001	0.001
42	0.003	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
L_2	0.0984	0.0148	0.0142	-	0.0073	0.0064	
L_∞	0.0439	0.0060	0.0055	-	0.0028	0.0025	

Tablo (5.10)' daki hesaplamalar $Cr = 0.1$ için yapılmıştır. Zaman aralığındaki bu ufak değişim diğer metotların analitik çözümden uzaklaşmaya başlamalarına yetmektedir. Hesaplanan konsantrasyon değerleri karşılaştırıldığında MOC-CS-CN metodunun her iki operatör ayırma metodu için de analitik çözüme en yakın sonuçlara ve en düşük hata normlarına sahip olduğu açık bir biçimde görülmektedir. Böylece MOC-CS-CN metodunun sharp (keskin) problemlerde ne kadar etkili olduğu ortaya çıkmıştır. Ayrıca az da olsa operatör ayırma metotlarının etkisi belirlemektedir.

Tablo 5.11: $t = 3000$ s' de hesaplanan konsantrasyon değerlerinin karşılaştırılması ($\Delta t = 30$ s).

Mesafe x (m)	CN	MOC-CS-CN		Analitik Çözüm
		Lie- Trotter	Strang	
0	1.000	1.000	1.000	1.000
18	0.999	1.000	1.000	1.000
19	1.000	0.999	0.999	0.999
20	1.004	0.998	0.998	0.998
21	1.008	0.996	0.996	0.996
22	1.011	0.991	0.991	0.991
23	1.005	0.982	0.981	0.982
24	0.985	0.964	0.964	0.964
25	0.945	0.936	0.935	0.934
26	0.882	0.891	0.890	0.889
27	0.799	0.828	0.826	0.823
28	0.699	0.744	0.742	0.738
29	0.591	0.643	0.641	0.636
30	0.481	0.531	0.528	0.523
31	0.378	0.416	0.414	0.408
32	0.286	0.309	0.306	0.301
33	0.209	0.215	0.214	0.208
34	0.148	0.141	0.140	0.135
35	0.101	0.087	0.086	0.082
36	0.067	0.050	0.049	0.046
37	0.043	0.027	0.027	0.024
38	0.026	0.013	0.013	0.012
39	0.016	0.006	0.006	0.005
40	0.009	0.003	0.003	0.002
41	0.005	0.001	0.001	0.001
42	0.003	0.000	0.000	0.000
L_2	0.1019	0.0210	0.0152	
L_∞	0.0454	0.0083	0.0057	

Tablo (5.11)' deki hesaplamalar $Cr = 0.3$ için yapılmıştır. Hesaplanan konsantrasyon değerleri incelendiğinde seçilecek operatör ayırma metodunun sonuçlar üzerindeki etkisi açıkça görülmektedir. Strang operatör ayırma metodu analitik çözüme daha yakın sonuçlar vermekle birlikte hata normları da daha küçüktür. Strang ayırma yöntemi ile hesaplanan sonuçlar, Gürarlan (2013) ve Gürarlan (2014)' te verilen yüksek mertebe kompakt şemalar ile Nazir (2016)' da önerilen kübik trigonometrik B-spline kollokasyon metodunun $Cr = 0.1$ için bulduğu sonuçlarla hemen hemen aynıdır.

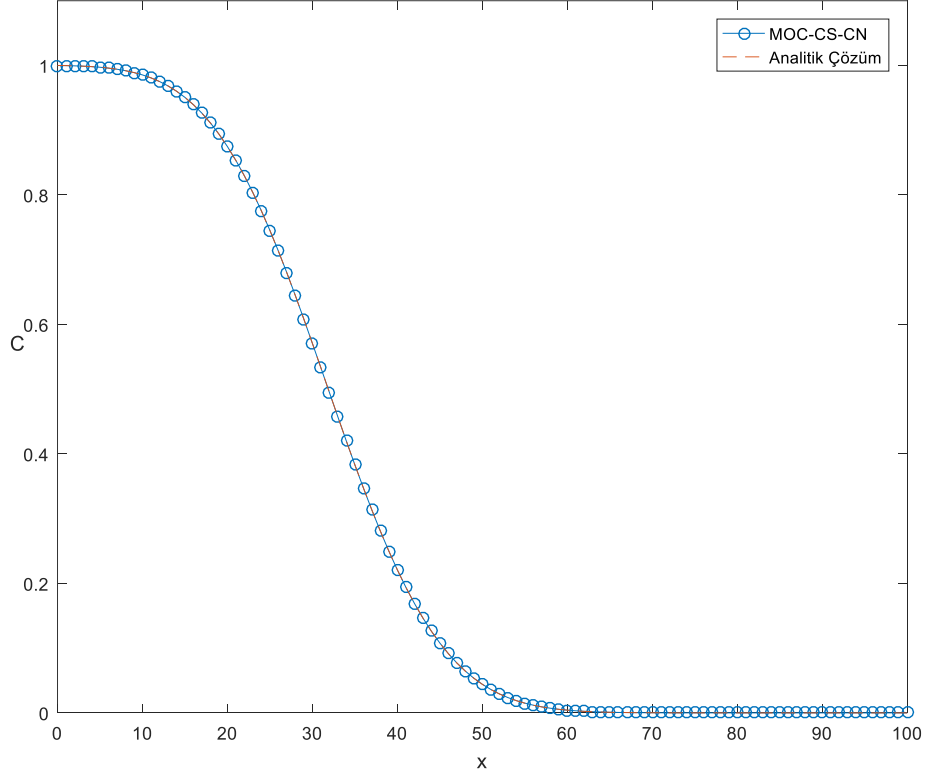
Tablo 5.12: $t = 3000$ s' de hesaplanan konsantrasyon değerlerinin karşılaştırılması ($\Delta t = 60$ s).

Mesafe x (m)	Holly- Preissmann (1977)	Szymkiewicz (1993)	Gardner (1994)	Dağ (2006)		Dağ (2011)		CN	MOC-CS-CN		Analitik Çözüm
				FEMLSF	FEMQSF	TC	TG		Lie- Trotter	Strang	
0	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
18	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	0.998	1.000	1.000	1.000
19	1.000	0.999	1.000	1.000	1.000	0.999	0.999	1.000	0.999	0.999	0.999
20	1.000	0.998	0.999	0.999	1.000	0.999	0.998	1.004	0.998	0.998	0.998
21	1.000	0.996	0.996	0.997	0.999	0.999	0.996	1.010	0.996	0.996	0.996
22	1.000	0.990	0.991	0.993	0.996	0.998	0.991	1.014	0.992	0.991	0.991
23	1.000	0.978	0.981	0.985	0.989	0.994	0.980	1.009	0.983	0.982	0.982
24	1.000	0.957	0.961	0.970	0.974	0.987	0.960	0.988	0.967	0.965	0.964
25	1.000	0.922	0.927	0.943	0.946	0.972	0.926	0.946	0.940	0.937	0.934
26	0.996	0.870	0.874	0.902	0.900	0.945	0.874	0.882	0.897	0.893	0.889
27	1.013	0.799	0.800	0.842	0.832	0.902	0.800	0.796	0.836	0.830	0.823
28	1.047	0.708	0.706	0.763	0.743	0.838	0.705	0.695	0.754	0.747	0.738
29	0.897	0.602	0.596	0.666	0.638	0.755	0.595	0.586	0.654	0.647	0.636
30	0.457	0.488	0.479	0.556	0.524	0.653	0.479	0.476	0.542	0.535	0.523
31	0.067	0.375	0.366	0.442	0.411	0.541	0.366	0.374	0.427	0.420	0.408
32	-0.036	0.272	0.265	0.332	0.306	0.427	0.264	0.284	0.318	0.312	0.301
33	-0.010	0.185	0.181	0.235	0.218	0.320	0.181	0.208	0.222	0.218	0.208
34	0.002	0.118	0.118	0.156	0.147	0.227	0.117	0.148	0.146	0.143	0.135
35	0.000	0.070	0.072	0.096	0.095	0.152	0.072	0.102	0.090	0.088	0.082
36	0.000	0.038	0.042	0.055	0.058	0.096	0.041	0.068	0.052	0.051	0.046
37	0.000	0.020	0.023	0.030	0.034	0.057	0.023	0.044	0.028	0.027	0.024
38	0.000	0.009	0.012	0.015	0.019	0.032	0.012	0.028	0.014	0.014	0.012
39	0.000	0.004	0.006	0.007	0.010	0.017	0.006	0.017	0.007	0.006	0.005
40	0.000	0.002	0.003	0.003	0.005	0.008	0.002	0.010	0.003	0.003	0.002
41	0.000	0.001	0.001	0.001	0.003	0.004	0.001	0.006	0.001	0.001	0.001
42	0.000	0.000	0.001	0.000	0.001	0.001	0.000	0.003	0.001	0.000	0.000
L_2	-	-	-	-	-	-	-	0.1139	0.0479	0.0300	
L_∞	-	-	-	-	-	-	-	0.0505	0.0194	0.0118	

Tablo (5.12)' deki hesaplamalar $Cr = 0.6$ için yapılmıştır. Öncelikle operatör ayırma metotlarının sonuçları karşılaştırıldığında Strang metodunun sağladığı iyileştirme açık bir şekilde görülmektedir. Ancak bu iyileştirme yeterli olmamıştır. Genel olarak bakıldığında hiçbir araştırmacı analitik çözüme yeterince yaklaşmamıştır. Bu da hesap yapılan zaman aralığının olması gerektiğinden daha büyük seçildiğini göstermektedir (Gürarlan, 2013). Bu zaman aralığı için sonuçlarda daha fazla iyileştirme sağlamak için kullanılan metotların mertebeleri veya operatör ayırma metodunun mertebesi artırılmalıdır.

Tablo (5.9), (5.10), (5.11) ve (5.12)' deki bütün hesaplamalar Peclet sayısı 5 için yapılmıştır. Bu tablolardaki sonuçlar zaman aralığı değiştirilerek Courant sayısının çözüme olan etkilerini göstermektedir. Courant sayısı sabit tutularak sadece Peclet sayısının sharp (keskin) yapıya sahip bir problem üzerindeki etkisini görmek için difüzyon katsayısı değiştirilerek bazı hesaplamalar yapılacaktır. Önceki analizlerden de görüleceği gibi hem Lie-Trotter hem de Strang ayırma metoduna

dayalı MOC-CS-CN $\Delta t = 30$ s için yeterince doğru sonuçlar üretmiştir. Bu sebeple Peclet sayısının etkisini ölçerken zaman aralığı $\Delta t = 30$ s olarak seçilmiştir.



Şekil 5.4: $\Delta x = 1$ m ve $\Delta t = 10$ s aralıklarında MOC-CS-CN ile elde edilen nümerik çözümlerle analitik çözümün karşılaştırılması ($Pe = 0.5$).

Tablo (5.13)' teki analizlerde Peclet sayısı 0.5' tir. Konum aralığının değişmediği durumlarda Peclet sayısının küçülmesi difüzyon etkisinin arttığı anlamına gelmektedir. Sonuçlar incelendiğinde bütün metodların analitik çözüme yakın sonuçlar verdiği görülmektedir. Strang operatör ayırma metodu ise analitik çözümlerle hemen hemen aynı konsantrasyon değerlerini vermektedir.

Tablo 5.13: $t = 3000$ s' de hesaplanan konsantrasyon değerlerinin karşılaştırılması ($D = 0.02$ m²/s).

Mesafe x (m)	CN	MOC-CS-CN		Analitik Çözüm
		Lie- Trotter	Strang	
0	1.000	1.000	1.000	1.000
18	0.911	0.909	0.911	0.911
19	0.894	0.892	0.894	0.894
20	0.874	0.872	0.875	0.875
21	0.853	0.851	0.853	0.853
22	0.829	0.827	0.830	0.829
23	0.803	0.801	0.804	0.803
24	0.774	0.772	0.776	0.775
25	0.744	0.742	0.745	0.745
26	0.712	0.710	0.713	0.713
27	0.678	0.676	0.680	0.679
28	0.643	0.641	0.644	0.644
29	0.606	0.604	0.608	0.608
30	0.569	0.567	0.571	0.571
31	0.531	0.529	0.533	0.533
32	0.493	0.491	0.495	0.495
33	0.456	0.453	0.457	0.457
34	0.418	0.416	0.420	0.420
35	0.382	0.379	0.383	0.383
36	0.347	0.344	0.348	0.347
37	0.313	0.310	0.313	0.313
38	0.280	0.277	0.281	0.281
39	0.249	0.247	0.250	0.250
40	0.221	0.218	0.221	0.221
41	0.194	0.191	0.194	0.194
42	0.170	0.167	0.169	0.169
L_2	0.0060	0.0165	0.0016	
L_∞	0.0015	0.0039	0.0004	

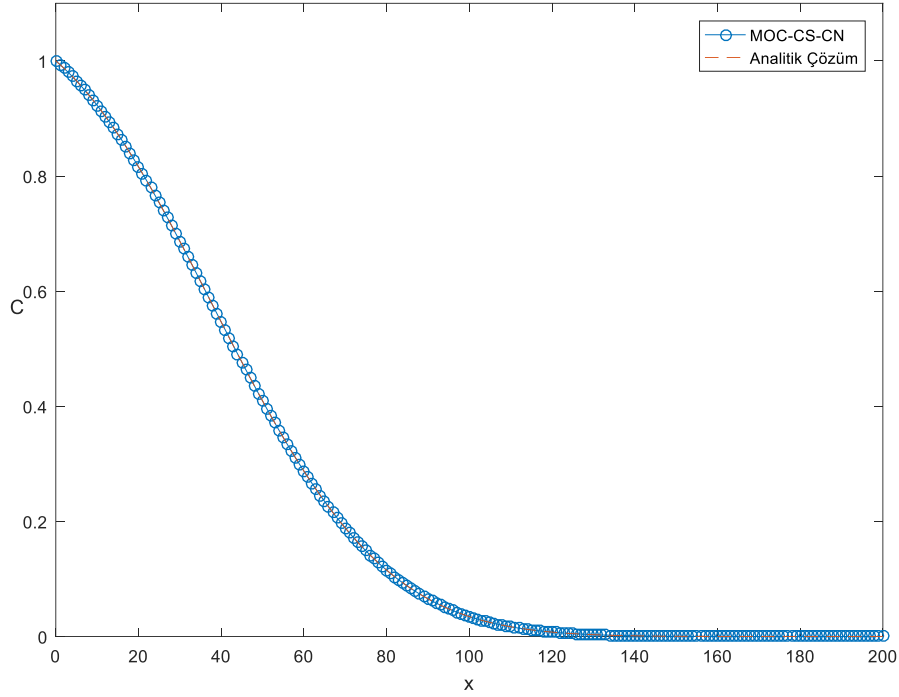
Tablo (5.14)' teki analizlerde Peclet sayısı 0.05' tir. Hesaplanan sonuçlar incelendiğinde sonuçların analitik çözümle aynı veya çok yakın olduğu görülmektedir. Bu durum problemin neredeyse tamamen difüzyon etkisi altında olup sharp (keskin) yapısını kaybetmesinden kaynaklanmaktadır. Bu tarz problemlerin çözümleri kolaylıkla elde edilmektedir. Asıl problem Peclet sayısının yüksek olduğu yani adveksiyon etkisinin çok fazla olduğu durumlarda ortaya çıkmaktadır.

Tablo 5.14: $t = 3000$ s' de hesaplanan konsantrasyon değerlerinin karşılaştırılması ($D = 0.2$ m²/s).

Mesafe x (m)	CN	MOC-CS-CN		Analitik Çözüm
		Lie- Trotter	Strang	
0	1.000	1.000	1.000	1.000
18	0.839	0.838	0.839	0.839
19	0.828	0.826	0.828	0.828
20	0.816	0.814	0.816	0.816
21	0.804	0.802	0.804	0.804
22	0.792	0.790	0.792	0.792
23	0.779	0.777	0.779	0.779
24	0.766	0.764	0.766	0.766
25	0.753	0.752	0.753	0.753
26	0.740	0.738	0.740	0.740
27	0.727	0.725	0.727	0.727
28	0.714	0.712	0.714	0.714
29	0.700	0.698	0.700	0.700
30	0.687	0.685	0.687	0.687
31	0.673	0.671	0.673	0.673
32	0.659	0.657	0.659	0.659
33	0.645	0.643	0.645	0.645
34	0.631	0.629	0.631	0.631
35	0.617	0.615	0.617	0.617
36	0.603	0.601	0.603	0.603
37	0.589	0.587	0.589	0.589
38	0.575	0.573	0.575	0.575
39	0.560	0.558	0.561	0.561
40	0.546	0.544	0.546	0.546
41	0.532	0.530	0.532	0.532
42	0.518	0.516	0.518	0.518
L_2	0.0004	0.0150	0.0001	
L_∞	0.0000	0.0021	0.0000	

Tablo 5.15: Farklı zaman aralıkları için hesaplanan L_∞ hatalarının karşılaştırılması ($\Delta x = 1$ m).

Δt (s)	Irk (2015)		MOC-CS-CN	
	BSCM	ECuBSCM	Lie-Trotter	Strang
60	0.04330	0.04250	0.01942	0.01180
30	0.01962	0.01961	0.00828	0.00567
20	0.01270	0.01260	0.00512	0.00376
10	0.00685	0.00608	0.00284	0.00251
5	0.00409	0.00307	0.00222	0.00212
1	0.00224	0.00127	0.00188	0.00187



Şekil 5.5: $\Delta x = 1$ m ve $\Delta t = 10$ s aralıklarında MOC-CS-CN ile elde edilen nümerik çözümle analitik çözümün karşılaştırılması ($Pe = 0.05$).

Tablo (5.15)'te hesaplanan L_∞ hata değerleri farklı zaman aralıkları için literatürde verilen diğer hatalarla karşılaştırılmıştır. $\Delta t = 1$ ' deki genişletilmiş kübik B-spline kollokasyon metodunun hatası hariç her zaman aralığında MOC-CS-CN daha küçük hata değerlerine sahiptir. Ayrıca zaman aralığının büyümesi operatör ayırma metodunun çözüm üzerindeki etkisini daha fark edilebilir hale getirmektedir. Strang ayırma metodunun çözümü iyileştirdiği açıktır.

Genel olarak çözümü zor olan sharp (keskin) yapıya sahip ikinci problem için verilen tablolar incelendiğinde MOC-CS-CN metodu iyi sonuçlar vermiştir. Literatürdeki karşılaştırmalardan sadece küçük Courant sayılarında yüksek mertebeli metotlardan kötü sonuç vermiştir. Ancak Courant sayısı büyüdükçe bulduğu sonuçlar diğer metotlardan iyidir. Özellikle yüksek zaman aralıklarında ürettiği doğru sonuçlar dikkat çekicidir. Kullanılan operatör ayırma metotlarının çözüme olan katkıları incelenmiş ve Strang operatör ayırma metodunun çözümü iyileştirdiği görülmüştür. Sağladığı iyileştirmelerin etkisi Courant sayısı ile birlikte artmaktadır.

5.1.4 Dördüncü Problem

Bu problemde akışkan hızı $V = 0.8$ m/s, difüzyon katsayısı $D = 0.005$ m²/s olarak alınmıştır. Kanal uzunluğu $L = 9$ m olarak ele alınmıştır. Problemin analitik çözümü aşağıdaki denklemin çözümüyle elde edilmektedir (Sankaranarayanan ve diğ., 1998).

$$C(x,t) = \frac{1}{\sqrt{4t+1}} \exp \left[-\frac{(x-1-Vt)^2}{D(4t+1)} \right] \quad (5.11)$$

Sınırlarda aşağıdaki sınır koşulları kullanılmıştır.

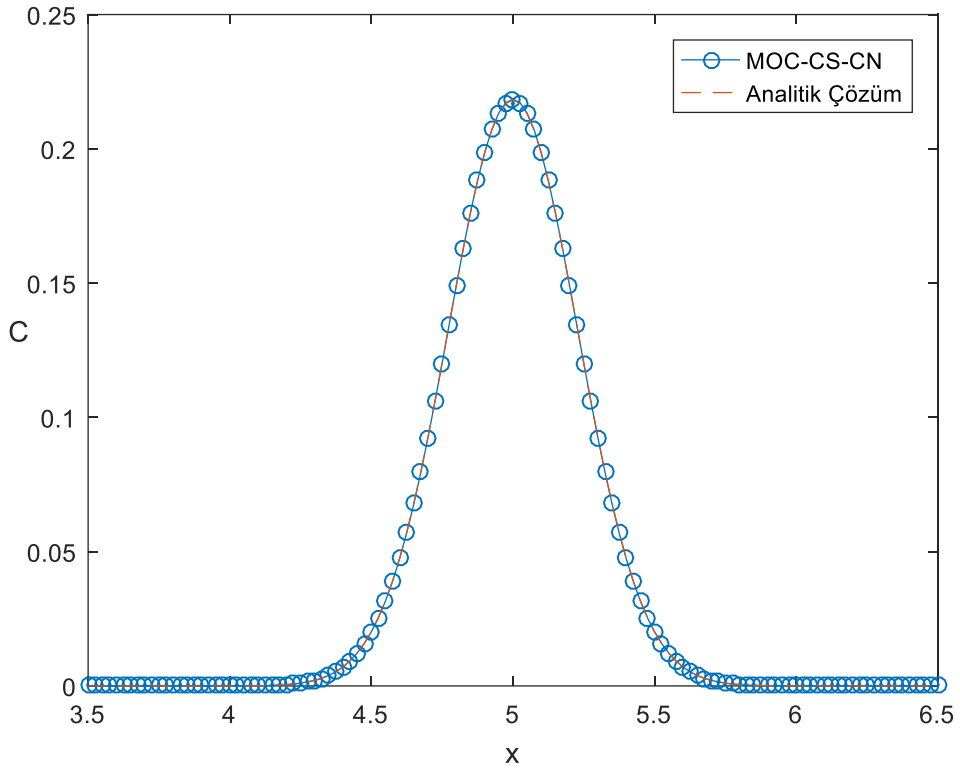
$$C(0,t) = \frac{1}{\sqrt{4t+1}} \exp \left[-\frac{(-1-Vt)^2}{D(4t+1)} \right] \quad (5.12)$$

$$C(L,t) = \frac{1}{\sqrt{4t+1}} \exp \left[-\frac{(8-Vt)^2}{D(4t+1)} \right]$$

Bu problemde sınır koşulları zamana bağlı olduğu için her zaman aralığında sınırlardaki değerlerin, (5.12)'deki denklemler yardımıyla hesaplanarak güncellenmesi gerekmektedir. Denklem (5.11)'de $t=0$ kullanıldığında başlangıç değerleri, $t=5$ s kullanıldığında ise problemin analitik çözümü hesaplanmaktadır.

Tablo 5.16: Çeşitli Courant sayıları için hesaplanan tepe noktasındaki hata değerleri ($\Delta x = 0.025$ m).

Cr	Δt (s)	CN	Gürarslan (2013)	MOC-CS-CN	
			CD6-RK4	Lie-Trotter	Strang
0.016	0.0005	1.57E-03	5.64E-09	3.01E-04	3.06E-04
0.032	0.001	1.57E-03	5.64E-09	2.92E-04	3.01E-04
0.064	0.002	1.57E-03	5.78E-09	2.76E-04	2.92E-04
0.08	0.0025	1.57E-03	5.99E-09	2.68E-04	2.88E-04
0.16	0.005	1.59E-03	1.10E-08	2.39E-04	2.68E-04
0.32	0.01	1.66E-03	8.18E-08	2.17E-04	2.39E-04
0.64	0.02	2.01E-03	9.02E-07	2.58E-04	2.17E-04
0.8	0.025	2.31E-03	1.79E-06	2.90E-04	2.19E-04
1.6	0.05	-	-	2.85E-04	2.88E-04
3.2	0.1	-	-	2.94E-04	2.76E-04
6.4	0.2	-	-	2.58E-04	2.59E-04
8	0.25	-	-	2.37E-04	2.37E-04
16	0.5	-	-	5.96E-05	5.96E-05
32	1	-	-	9.26E-03	9.26E-03



Şekil 5.6: MOC-CS-CN ile elde edilen nümerik çözümle analitik çözümün karşılaştırılması.

Tablo (5.16)' da çok farklı zaman aralıklarında problemin en büyük konsantrasyon değerine sahip olduğu noktadaki hata değerleri literatürdeki diğer araştırmacıların hesapladığı hatalarla karşılaştırılmıştır. Bu tablodaki bütün hesaplamalarda Peclet sayısı 4' tür. MOC-CS-CN metodu yüksek mertebe kompakt şema hariç diğer yöntemlerden daha düşük hataya sahip sonuçlar bulmuştur. Araştırmacılar Courant sayısının 1' den büyük olduğu durumlarda herhangi bir sonuç bulamamışlardır. MOC-CS-CN metodu Courant sayısı 32 olduğunda bile oldukça doğru sonuçlar elde etmiştir.

5.2 İki Boyutlu Problemler

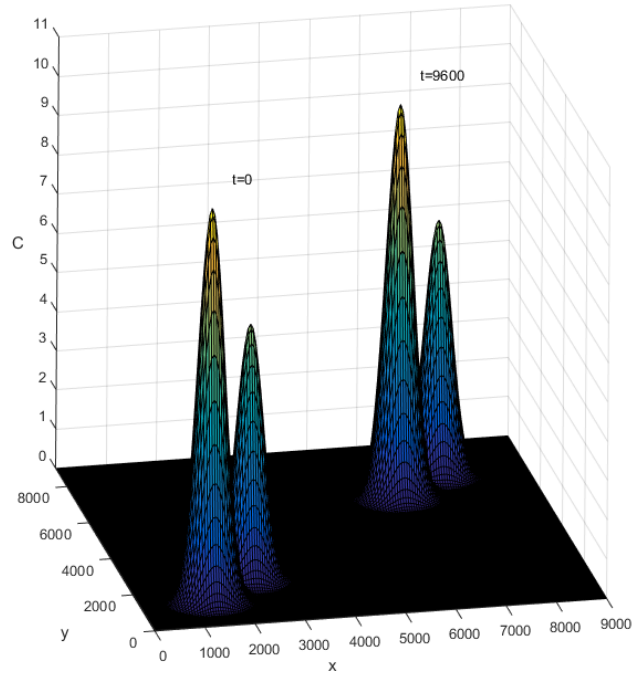
5.2.1 Birinci Problem

Bir boyutlu ikinci problemin iki boyutlu hali olan bu problemde bir çift Gaussian konsantrasyon dağılımı vardır. Her iki yöndeki akışkan hızları

$V_x = V_y = 0.5$ m/s olarak birbirine eşittir. Konsantrasyonun standart sapmaları sırasıyla $\rho_1 = 264$ m ve $\rho_2 = 264$ m'dir. Konsantrasyon tepe noktaları başlangıçta sırasıyla $(x_1, y_1) = 1400$ m ve $(x_2, y_2) = 2400$ m koordinatlarındadır. Başlangıç konsantrasyonu $L_x = L_y = 9000$ m olarak alınmış kanalda $t = 9600$ s boyunca taşınacaktır. Problemin analitik çözümü aşağıdaki denklem çözülerek elde edilmektedir (Yong-hong ve diğ, 2001).

$$C(x, y, t) = 10 \exp \left[-\frac{(x - x_1 - V_x t)^2 + (y - y_1 - V_y t)^2}{2\rho_1^2} \right] + 6.5 \exp \left[-\frac{(x - x_2 - V_x t)^2 + (y - y_2 - V_y t)^2}{2\rho_2^2} \right] \quad (5.13)$$

Probleme ait başlangıç ve sınır koşulları denklem (5.13) kullanılarak hesaplanabilir. Bir boyutlu çift tepe noktasına sahip olan saf adveksiyon problemine benzer şekilde elde edilen sonuçların değerlendirilmesinde kritik noktalar olan tepe noktalarındaki konsantrasyonlar ve iki tepe noktası arasındaki en düşük konsantrasyon kullanılacaktır.



Şekil 5.7: İki boyutlu saf adveksiyon probleminin simülasyonu.

Şekil (5.12)' deki problemin simülasyonunda düğüm aralıkları $\Delta x = \Delta y = 50$ m ve zaman aralığı $\Delta t = 100$ s seçilerek Courant sayısının 1 olduğu durum için çözüm üretilmiştir.

Tablo (5.17)' de farklı Courant sayıları için hesaplamalar tekrarlanmıştır. Ayrıca, problem iki adet adveksiyon terimi içerdiğinden Lie-Trotter ve Strang operatör ayırma metotlarının etkinlikleri de karşılaştırılmıştır.

Tablo 5.17: Çeşitli Courant sayıları için hesaplanan kritik noktalardaki konsantrasyon ve hata değerleri ($\Delta x = \Delta y = 50$ m).

Cr	Lie-Trotter	Strang	Lie-Trotter	Strang	Lie-Trotter	Strang	Lie-Trotter	Strang	Lie-Trotter	Strang
	A noktası		B noktası		C noktası		L_2		L_∞	
0.10	9.9742	9.9798	0.4592	0.4588	6.4832	6.4869	0.1593	0.1386	0.2471	0.2207
0.15	9.9655	9.9725	0.4600	0.4594	6.4776	6.4821	0.2001	0.1719	0.3106	0.2711
0.20	9.9594	9.9668	0.4605	0.4598	6.4736	6.4784	0.2300	0.1987	0.3552	0.3071
0.25	9.9554	9.9625	0.4607	0.4602	6.4710	6.4756	0.2493	0.2182	0.3839	0.3306
0.30	9.9533	9.9594	0.4609	0.4604	6.4697	6.4736	0.2586	0.2314	0.3997	0.3512
0.40	9.9542	9.9568	0.4607	0.4606	6.4703	6.4719	0.2515	0.2410	0.3903	0.3722
0.50	9.9602	9.9578	0.4601	0.4604	6.4741	6.4726	0.2183	0.2344	0.3394	0.3672
0.60	9.9693	9.9613	0.4593	0.4601	6.4801	6.4749	0.1682	0.2198	0.2615	0.3494
0.75	9.9850	9.9692	0.4579	0.4593	6.4902	6.4800	0.0836	0.1971	0.1296	0.3108
0.80	9.9898	9.9720	0.4575	0.4591	6.4933	6.4818	0.0578	0.1902	0.0893	0.2972
1.00	10.0000	9.9801	0.4567	0.4584	6.5000	6.4870	0.0000	0.1606	0.0001	0.2447
1.20	9.9932	9.9812	0.4574	0.4583	6.4956	6.4878	0.0386	0.1272	0.0596	0.1980
1.50	9.9866	9.9858	0.4578	0.4579	6.4913	6.4908	0.0731	0.0785	0.1137	0.1231
1.60	9.9884	9.9891	0.4577	0.4576	6.4925	6.4929	0.0633	0.0606	0.0984	0.0940
2.00	10.0000	10.0000	0.4567	0.4567	6.5000	6.5000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0001
2.40	9.9923	9.9927	0.4574	0.4574	6.4950	6.4953	0.0422	0.0405	0.0655	0.0625
3.00	10.0000	9.9933	0.4567	0.4573	6.5000	6.4957	0.0000	0.0538	0.0001	0.0819
3.20	9.9974	9.9929	0.4570	0.4573	6.4983	6.4954	0.0145	0.0479	0.0224	0.0745
4.00	10.0000	10.0000	0.4567	0.4567	6.5000	6.5000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0001
4.80	9.9983	9.9953	0.4569	0.4571	6.4989	6.4969	0.0097	0.0319	0.0149	0.0498
6.00	10.0000	10.0000	0.4567	0.4567	6.5000	6.5000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0001
6.40	9.9971	9.9973	0.4570	0.4570	6.4981	6.4982	0.0159	0.0152	0.0246	0.0235
8.00	10.0000	10.0000	0.4567	0.4567	6.5000	6.5000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0001
9.60	9.9981	9.9982	0.4569	0.4569	6.4987	6.4988	0.0106	0.0101	0.0164	0.0157
12.00	10.0000	10.0000	0.4567	0.4567	6.5000	6.5000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0001
16.00	10.0000	10.0000	0.4567	0.4567	6.5000	6.5000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0001
19.20	9.9996	9.9988	0.4568	0.4568	6.4997	6.4992	0.0024	0.0080	0.0037	0.0124
Anolitik Çözüm	10.0000		0.4567		6.5000		-		-	

Tablo (5.17)' de verilen konsantrasyon değerleri incelendiğinde her iki operatör ayırma metodu için de sonuçlar genel olarak analitik çözüme yakındır. Düğüm aralıkları $\Delta x = \Delta y = 50$ m olarak alındığında kritik noktalardaki konsantrasyon değerleri birbirine yakın olduğundan operatör ayırma metotlarının çözüme olan etkileri ancak hata normları incelenerek görülmektedir. Küçük Courant

sayılarında Strang ayırma metodunun, büyük Courant sayılarında ise Lie-Trotter ayırma metodunun hata normları daha düşüktür. Bunun sebebi Strang ayırma metodunun herhangi yöndeki adveksiyon prosesini Lie-Trotter operatör ayırma metodunu kullanıyormuş gibi yarı zaman aralığında ($\Delta t / 2$) iki defa çözmesinden kaynaklanmaktadır. Daha önceki analizlerden de görüldüğü üzere karakteristikler metodu zaman aralığının büyük olduğu durumlarda daha iyi sonuç vermektedir. Sonuç olarak Strang operatör ayırma metodu zaman aralığını küçülterek işlem yaptığı için ürettiği sonuçlar az da olsa kötüleşmektedir. Eğer Strang operatör ayırma metodu zaman aralığı seçiminden oldukça fazla etkilenen metotlarla birlikte kullanılırsa sonuçlar üzerindeki iyileştirme etkisinin çok belirgin olabileceği öngörülmektedir.

Tablo 5.18: Çeşitli Courant sayıları için hesaplanan kritik noktadaki konsantrasyon ve hata değerleri ($\Delta x = \Delta y = 100$ m).

Cr	Lie-Trotter	Strang	Lie-Trotter	Strang	Lie-Trotter	Strang	Lie-Trotter	Strang	Lie-Trotter	Strang
	A noktası		B noktası		C noktası		L_2		L_∞	
0.050	9.8448	9.8702	0.4691	0.4664	6.3991	6.4156	0.7471	0.7263	1.1273	1.0990
0.075	9.8006	9.8349	0.4740	0.4702	6.3704	6.3927	0.7936	0.7585	1.1923	1.1387
0.100	9.7625	9.8035	0.4783	0.4737	6.3456	6.3723	0.8450	0.7952	1.2685	1.1868
0.125	9.7299	9.7758	0.4821	0.4768	6.3244	6.3542	0.8994	0.8332	1.3439	1.2362
0.15	9.7023	9.7513	0.4854	0.4797	6.3065	6.3384	0.9524	0.8694	1.4101	1.2822
0.20	9.6605	9.7114	0.4905	0.4843	6.2793	6.3124	1.0311	0.9403	1.5515	1.3843
0.25	9.6345	9.6820	0.4936	0.4878	6.2624	6.2933	1.0760	0.9925	1.6364	1.4884
0.30	9.6219	9.6620	0.4949	0.4901	6.2542	6.2803	1.0954	1.0250	1.6784	1.5648
0.375	9.6245	9.6469	0.4941	0.4917	6.2559	6.2705	1.0683	1.0403	1.6415	1.6183
0.40	9.6303	9.6454	0.4932	0.4918	6.2597	6.2695	1.0470	1.0382	1.6081	1.6214
0.50	9.6742	9.6543	0.4870	0.4902	6.2883	6.2753	0.9099	1.0007	1.3999	1.5793
0.60	9.7433	9.6824	0.4785	0.4866	6.3331	6.2935	0.7165	0.9346	1.1061	1.4972
0.75	9.8688	9.7458	0.4657	0.4797	6.4147	6.3348	0.3791	0.8283	0.5799	1.3267
0.80	9.9092	9.7688	0.4624	0.4775	6.4410	6.3497	0.2730	0.7971	0.4115	1.2544
1.00	10.0000	9.8358	0.4567	0.4716	6.5000	6.3933	0.0000	0.6738	0.0001	1.0032
1.20	9.9390	9.8407	0.4621	0.4702	6.4604	6.3964	0.1832	0.5457	0.2703	0.8445
1.50	9.8825	9.8756	0.4660	0.4659	6.4236	6.4192	0.3189	0.3499	0.4912	0.5486
1.60	9.8980	9.9036	0.4643	0.4634	6.4337	6.4373	0.2782	0.2743	0.4281	0.4307
2.00	10.0000	10.0000	0.4567	0.4567	6.5000	6.5000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0001
2.40	9.9311	9.9351	0.4622	0.4621	6.4552	6.4578	0.1868	0.1842	0.2860	0.2871
3.00	10.0000	9.9411	0.4567	0.4613	6.5000	6.4617	0.0000	0.2363	0.0001	0.3483
3.20	9.9770	9.9374	0.4587	0.4615	6.4850	6.4593	0.0693	0.2122	0.1019	0.3225
4.00	10.0000	10.0000	0.4567	0.4567	6.5000	6.5000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0001
4.80	9.9846	9.9578	0.4577	0.4599	6.4900	6.4726	0.0463	0.1426	0.0690	0.2172
6.00	10.0000	10.0000	0.4567	0.4567	6.5000	6.5000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0001
8.00	10.0000	10.0000	0.4567	0.4567	6.5000	6.5000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0001
9.60	9.9824	9.9835	0.4579	0.4578	6.4886	6.4893	0.0472	0.0466	0.0725	0.0729
Analistik Çözüm	10.0000		0.4567		6.5000		-		-	

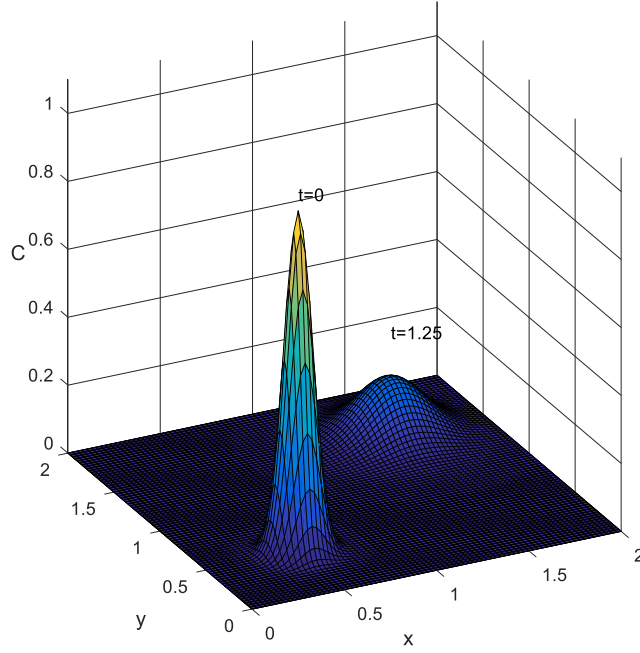
Tablo (5.18)' deki analizler düğüm aralıkları $\Delta x = \Delta y = 100$ m olarak yapılmıştır. Küçük Courant sayılarında elde edilen sonuçlar her iki operatör ayırma metodu için de analitik çözüme yaklaşamamıştır. Ancak büyük Courant sayılarında sonuçlar analitik çözüme daha yakındır. Genel olarak hata normları incelendiğinde seçilen düğüm aralıklarının olması gerekenden daha büyük seçildiği anlaşılmaktadır. Operatör ayırma metodlarının çözüme olan etkileri araştırıldığında ise tablo (5.17)' deki benzer sonuçlar görülmektedir.

5.2.2 İkinci Problem

Son örnekte dikdörtgensel bir alandaki Gaussian pulse biçimindeki kirliliğin adveksiyon-difüzyon etkisi altındaki hareketi simüle edilmiştir. Akışkan hızı her iki yön için de eşit olmakla birlikte $V_x = V_y = 0.8$ m/s olarak alınmıştır. Başlangıç durumunda 1 birim olan Gaussian pulse (0.5, 0.5) koordinatlarındadır. Alan genişlikleri $L_x = L_y = 2$ m olarak hesap yapılacaktır. Gaussian pulse adveksiyon ve difüzyonun etkisiyle 1.25 s sonra 1/6 birime düşmüş ve (1.5, 1.5) koordinatlarına ilerlemiş olacaktır. Difüzyon katsayıları $D_x = D_y = 0.01$ m²/s olarak alınmıştır. Problemin analitik çözümü denklem (5.14) çözülerek hesaplanmaktadır (Yong-hong ve diğ, 2001).

$$C(x, y, t) = \frac{1}{4t+1} \exp\left(-\frac{(x-0.5-V_x t)^2}{D_x(4t+1)} - \frac{(y-0.5-V_y t)^2}{D_y(4t+1)}\right) \quad (5.14)$$

Başlangıç ve sınır koşulları denklem (5.14)'ten hesaplanabilir. Başlangıç konsantrasyon değerleri denklem (5.14)'te $t=0$ eşitliği yerine yazılarak elde edilmektedir. Nümerik metodun performansı Gaussian pulse'ın 1.25 s' de alacağı değer analitik çözümlerle karşılaştırılarak ve hata normlarına bakılarak değerlendirilecektir.



Şekil 5.8: İki boyutlu adveksiyon-difüzyon probleminin simülasyonu.

Şekil (5.8)' deki simülasyon oluşturulurken zaman aralığı ($\Delta t = 0.0125$ s) düğüm aralıkları $\Delta x = \Delta y = 0.025$ m olarak seçilmiştir. Bu aralıklara bağlı olarak $Cr = 0.4$ ve $Pe = 2$ 'dir.

Tablo (5.19)' da verilen sonuçlar hesaplanırken düğüm aralıkları $\Delta x = \Delta y = 0.025$ seçilmiştir. Çeşitli Courant sayıları için elde edilen tepe noktasındaki konsantrasyon değerleri incelendiğinde $Cr \leq 2$ ' ye kadar bir bozulma gözlenmemiştir. Lie-Trotter ve Strang operatör ayırma metotlarının çözüm üzerindeki etkileri gözlenmemiştir. Bunun sebebi olarak problemin yapısının oldukça kolay olması düşünülmektedir. Problem yapısının kolay olduğu bütün analizlerde hesaplanan değerlerin analitik sonuca oldukça yaklaşmasından anlaşılmaktadır. Buna bağlı olarak her analizde yaklaşık olarak aynı hata normları elde edilmiştir.

Tablo 5.19: Çeşitli Courant sayıları için hesaplanan tepe noktasındaki konsantrasyon ve hata değerleri
($\Delta x = \Delta y = 0.025$ m).

Cr	Lie-Trotter	Strang	Lie-Trotter	Strang	Lie-Trotter	Strang
	Tepe noktası		L_2		L_∞	
0.0016	0.1674	0.1674	0.0119	0.0119	0.0448	0.0448
0.0032	0.1674	0.1674	0.0119	0.0119	0.0448	0.0448
0.0064	0.1674	0.1674	0.0119	0.0119	0.0448	0.0448
0.0080	0.1674	0.1674	0.0119	0.0119	0.0448	0.0448
0.010	0.1674	0.1674	0.0119	0.0119	0.0448	0.0448
0.016	0.1674	0.1674	0.0119	0.0119	0.0448	0.0448
0.020	0.1674	0.1674	0.0118	0.0119	0.0448	0.0448
0.032	0.1674	0.1674	0.0118	0.0119	0.0448	0.0448
0.040	0.1674	0.1674	0.0118	0.0118	0.0448	0.0448
0.080	0.1673	0.1674	0.0117	0.0118	0.0448	0.0448
0.10	0.1673	0.1674	0.0117	0.0118	0.0448	0.0448
0.16	0.1673	0.1673	0.0116	0.0117	0.0448	0.0448
0.20	0.1673	0.1673	0.0116	0.0117	0.0448	0.0448
0.32	0.1673	0.1673	0.0115	0.0116	0.0448	0.0448
0.40	0.1673	0.1673	0.0116	0.0115	0.0448	0.0448
0.80	0.1674	0.1673	0.0121	0.0115	0.0448	0.0448
1.00	0.1674	0.1673	0.0123	0.0116	0.0448	0.0448
1.60	0.1673	0.1673	0.0125	0.0118	0.0448	0.0448
2.00	0.1673	0.1674	0.0127	0.0120	0.0448	0.0448
Analitik Çözüm	0.1667		-	-	-	-

6. SONUÇLAR VE ÖNERİLER

Bu tez çalışması kapsamında açık kanallarda kirletici taşınımını temsil eden adveksiyon-dispersiyon denkleminin çözümü operatör ayırma metoduna dayalı olarak yapılmıştır. Adveksiyon kısmının çözümü MOC-CS ile dispersiyon kısmının çözümü ise CN şeması ile gerçekleştirilmiştir. Kullanılan bütün metotlar MATLAB programında kodlanmış ve analizler bu program yardımıyla yapılmıştır. Bu çalışma sonunda elde edilen bulgular aşağıda maddeler halinde özetlenmektedir.

- 1) Adveksiyon prosesinin çözümünde kullanılan MOC-CS metodu koşulsuz stabil olmakla birlikte yüksek Courant sayılarında da kesinliği yüksek sonuçlar üretmektedir.
- 2) MOC-CS metodu bir boyutlu veya iki boyutlu saf adveksiyon problemlerinde Courant sayısının tam sayı olduğu durumlarda doğrudan analitik çözümü vermektedir.
- 3) MOC-CS metodunda dikkat edilmesi gereken en önemli nokta konumdaki düğüm aralığının (Δx) çok büyük seçilmemesidir. Konumda uygun bir düğüm aralığı (Δx) seçildikten sonra zaman aralığının (Δt) büyük seçilmesiyle daha iyi sonuçlar elde edilmektedir. Bu sayede hem çözüm kalitesi iyileştirilirken hem de büyük zaman aralığı seçilerek hesaplama süresi kısaltılmaktadır. Özellikle çok boyutlu problemlerde bu durum oldukça önemlidir.
- 4) Genel olarak sonuçlar incelendiğinde Lie-Trotter ve Strang operatör ayırma metotlarının çözüme olan etkileri arasında büyük bir fark görülmemiştir. Sadece keskin (sharp) yapıya sahip olan bir boyutlu problemde zaman aralığı (Δt) büyüdükçe Strang ayırma metodunun sağladığı iyileştirme açık bir biçimde görülmektedir. Büyük zaman aralıkları kullanıldığında literatürde verilen sonuçlardan daha iyi sonuçlar elde edilmiştir.
- 5) MOC-CS-CN şemasının bazı yüksek mertebeden yöntemler hariç diğer yöntemlere göre daha düşük hata normlarına sahip olduğu görülmüştür. Bu yüksek mertebeden metotlar Courant sayısına bağlı yani koşullu stabil olmalarına rağmen MOC-CS-CN şeması koşulsuz stabil olup tüm zaman aralıklarında kabul

edilebilir sonuçlar üretmektedir. Bu önemli avantajlarıyla adveksiyon-dispersiyon denkleminin çözümü için oldukça uygun bir metot olduğunu kanıtlamıştır.

- 6) Adveksiyon prosesinin simülasyonunu iyileştirmek için MOC-CS metodunda kullanılan kübik spline interpolasyonunun mertebeleri yükseltilebilir veya daha yüksek mertebeden başka interpolasyon teknikleri kullanılabilir.
- 7) Dispersiyon prosesinin simülasyonunu iyileştirmek için Crank-Nicolson sonlu fark şemasının konumdaki mertebesi yükseltilebilir veya daha yüksek mertebeden başka bir şema kullanılabilir.
- 8) Özellikle bilinmeyen kirlilik kaynaklarının belirlenmesi gibi ters problemlerde koşulsuz stabil, oldukça kesin ve hesaplama zamanı düşük olan MOC-CS-CN şemasının kullanılması yerinde bir seçim olacaktır.
- 9) Daha sonra yapılacak çalışmalarda MOC-CS-CN şemasının kirlilik kaynaklarının yerlerinin ve sayılarının belirlenmesi problemlerinin çözümündeki başarısı test edilecektir.

7. KAYNAKLAR

Ahmad, Z. and Kothyari, U. C., “Time-line cubic spline interpolation scheme for solution of advection equation”, *Computers and Fluids*, 30(6), 737–752, (2001).

Anderson, M. P., “Using Models to Simulate the Movement of Contaminants Through Ground Water Flow Systems”, *Criti. Rev. Environ. Control*, 9(2), 97-156, (1979).

Ataie-Ashtiani, B. Lockington, D. A. and Volker, R. E., “Numerical correction for finite-difference solution of the advection-dispersion equation with reaction”, *Journal of Contaminant Hydrology*, 23(1–2), 149–156, (1996).

Badrot-Nico, F., Brissaud, F. and Guinot, V., “A finite volume upwind scheme for the solution of the linear advection-diffusion equation with sharp gradients in multiple dimensions”, *Advances in Water Resources*, 30(9), 2002–2025, (2007).

Baptista, A. E. De M., “Solution of Advection-Dominated Transport by Eulerian-Lagrangian Methods Using the Backward Method of Characteristics”, Ph.D Thesis, MIT, Cambridge, (1987).

Chen, Y. and Falconer, R. A., “Advection-diffusion modelling using the modified QUICK scheme”, *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 15(10), 1171–1196, (1992).

Dag, I., Canivar, A. and Sahin, A., “Taylor-Galerkin method for advection-diffusion equation”, *Kybernetes*, 40(5/6), 762–777, (2011).

Dag, I., Irk, D. and Tombul, M., “Least-squares finite element method for the advection-diffusion equation”, *Applied Mathematics and Computation*, 173(1), 554–565, (2006).

Dehghan, M. and Mohebbi, A., “High-order compact boundary value method for the solution of unsteady convection-diffusion problems”, *Mathematics and Computers in Simulation*, 79(3), 683–699, (2008).

Dehghan, M., “Weighted finite difference techniques for the one-dimensional advection-diffusion equation”, *Applied Mathematics and Computation*, 147(2), 307–319, (2004).

Dhawan, S., Kapoor, S. and Kumar, S., “Numerical method for advection diffusion equation using FEM and B-splines”, *Journal of Computational Science*, 3(5), 429–437, (2012).

Esfandiari, R. S., *Numerical Methods for Engineers and Scientists Using MATLAB*, New York: Taylor and Francis Group, (2013).

Gardner, L. R. T. and Dag, I., “A numerical solution of the advection-diffusion equation using B-spline finite element”, *Proceedings International AMSE Conference*, Lyon, France, 109-116, (1994).

Gurarslan, G., “Accurate Simulation of Contaminant Transport Using High-Order Compact Finite Difference Schemes”, *Journal of Applied Mathematics*, 2014, 1–8, (2014).

Gurarslan, G., Karahan, H., Alkaya, D., Sari, M. and Yasar, M., “Numerical solution of advection-diffusion equation using a sixth-order compact finite difference

method”, *Mathematical Problems in Engineering*, vol. 2013, Article ID 672936, 7 pages, (2013).

Holly, F. M. and Preissmann, A., “Accurate calculation of transport in two dimensions”, *Journal of Hydraulic Division*, 103(11), 1259-1277, (1977).

Holly, F. M. and Usseglio-Polatera, J., “Dispersion Simulation in Two-dimensional Tidal Flow”, *Journal of Hydraulic Engineering*, 110(7), 905–926, (1984).

Irk, D., Dag, I. and Tombul, M., “Extended Cubic B-spline Solution of the Advection-Diffusion Equation”, *KSCE Journal of Civil Engineering*, 19(4), 929-934, (2015).

Kadalbajoo, K. M. And Arora, P., “Dynamic Data-Driven Finite Element Models for Laser Treatment of Cancer”, *Numerical Methods for Partial Differential Equations*, 26, 1206–1223, (2010).

Kalita, J. C., Dalal, D. C. and Dass, A. K., “A class of higher order compact schemes for the unsteady two-dimensional convection-diffusion equation with variable convection coefficients”, *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 38(12), 1111–1131, (2002).

Karaa, S. and Zhang, J., “High order ADI method for solving unsteady convection-diffusion problems”, *Journal of Computational Physics*, 198(1), 1–9, (2004).

Karpik, B. S. R. and Crockett, S. R., “Semi-lagrangian algorithm for two-dimensional advection-diffusion equation on curvilinear coordinate meshes”, *Journal of Hydraulic Engineering*, 123(5), 389–401, (1997).

Kinzelbach, W. K. H., *Groundwater Modeling, An Introduction with Sample Programs in BASIC*, Amsterdam, Elsevier, (1986).

Korkmaz, A. and Dag, I., “Cubic B-spline differential quadrature methods for the advection-diffusion equation”, *International Journal of Numerical Methods for Heat and Fluid Flow*, 22(8), 1021–1036, (2012).

LaBolle, E. M., Fogg, G. E. And Tompson, A. F. B., “Random-walk Simulation of Transport in Heterogeneous Porous Media: Local Mass Conservation Problem and Implementation Methods”, *Water Resour. Res.*, 32(3), 583-593, (1996).

LaBolle, E. M., Quastel, J. and Fogg, G. E., “Diffusion theory for transport in porous media: Transition-probability densities of diffusion corresponding to advection-dispersion equations”, 34(7), *Water Resour. Res.*, 1685-1693, (1998).

Lam, C. Y., *Applied Numerical Methods for Partial Differential Equations*, Singapore, Simon and Schuster, (1994).

Man, C. and Tsai, W. C., “A higher-order predictor-corrector scheme for two-dimensional advection-diffusion equation”, *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 56, 401–418, (2008).

MATLAB 2009a, The MathWorks, Inc., Natick, Massachusetts, United States.

Mittal, R. C. and Jain, R. K., “Numerical solution of convection-diffusion equation using cubic B-splines collocation methods with Neumann ’ s boundary conditions”, *International Journal of Applied Mathematics and Computation*, 4(2), 115–127, (2012).

Mohamad, A. A., “Spatially Fourth-Order-Accurate Scheme for Unsteady-Convection Problems”, *Numerical Heat Transfer, Part B: Fundamentals*, 31(3), 373–385, (1997).

Mohebbi, A. and Dehghan, M., “High-order compact solution of the one-dimensional heat and advection-diffusion equations”, *Applied Mathematical Modelling*, 34(10), 3071–3084, (2010).

Nazir, T., Abbas, M., Izani, A. and Abd, A., “The numerical solution of advection-diffusion problems using new cubic trigonometric B-splines approach”, *Applied Mathematical Modelling*, 40(7–8), 4586–4611, (2016).

Neuman, S. P., “Adaptive Eulerian-Lagrangian finite element method for advection-dispersion”, *Int. J. Num. Meth. Eng.*, 20, 321-337, (1984).

Noye, B. and Tan, H., “Finite difference methods for solving the two-dimensional advection–diffusion equation”, *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 9, 75–98, (1989).

Pinder, G. F. and Gray, W. G., *Finite Elements in Surface and Subsurface Hydrology*, San Diego, Academic Press, (1977).

Prickett, T. A., Naymik, T. G. and Lonquist C. G., A “Random Walk” Solute Transport Model for Selected Groundwater Quality Evaluations, Illinois, Illinois State Water Survey, (1981).

Sankaranarayanan, S., Shankar, N. J. and Cheong, H. F., “Three-dimensional Finite Difference Model for Transport of Conservative Pollutants”, *Ocean Engng.*, 25(6), 425-442, (1998).

Sari, M., Gürarlan, G. and Zeytinoglu, A., “High-order finite difference schemes for solving the advection-diffusion equation”, *Mathematical and Computational Applications*, 15(3), 449–460, (2010).

Shou-dong, W. and Yong-ming, S., “Three high-order splitting schemes for 3D transport equation”, *Applied Mathematics and Mechanics*, 26(8), 1007–1016, (2005).

Srivastava, R., Flow Through Open Channels, India, Oxford University Press, (2008).

Sun, N. –Z., “A finite cell method for simulating the mass transport process in porous media”, *Water Resour. Res.*, 35(12), 3649-3662, (1999).

Szymkiewicz, R., “Solution of the advection-diffusion equation using the spline function and finite elements”, *Communications in Numerical Methods in Engineering*, 9, 197–206, (1993).

Szymkiewicz, R., Numerical Modeling in Open Channel Hydraulics, New York, London Heidelberg: Springer- Dordrecht, (2010).

Tian, Z. F. and Ge, Y. B., “A fourth-order compact ADI method for solving two-dimensional unsteady convection-diffusion problems”, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 198(1), 268–286, (2007).

Tompson A. F. B. and Gelhar, L. W., “Numerical Simulation of Solute Transport in three-dimensional Randomly Heterogeneous Porous Media”, *Water Resour. Res.*, 26(10), 2541-2562, (1990).

Tsai, T. L., Chiang, S. W. and Yang, J. C., “Examination of characteristics method with cubic interpolation for advection-diffusion equation”, *Computers and Fluids*, 35, 1217–1227, (2006).

Tsai, T. L., Yang, J. C. and Huang, L. H., “An accurate integral-based scheme for advection-diffusion equation”, *Communications in Numerical Methods in Engineering*, 17(10), 701–713, (2001).

Tsai, T. L., Yang, J. C. and Huang, L. H., “Characteristics Method Using Cubic–Spline Interpolation for Advection–Diffusion Equation”, *Journal of Hydraulic Engineering*, 130(6), 580–585, (2004).

Verma, P., Prasad, K. S. H. and Ojha, C. S. P., “MacCormack scheme based numerical solution of advection-dispersion equation”, *ISH Journal of Hydraulic Engineering*, 12(1), 27-38, (2006).

Yang, J. C. and Hsu, E. L., “Time-Line Interpolation for Solution of the Dispersion Equation”, *Journal of Hydraulic Research*, 28(4), 503–523, (1990).

Yazici, Y., “Operator Splitting Methods for Differential Equations”, M.Sc Thesis, Izmir Institute of Technology, Izmir, (2010).

Yeh, G. T., “A Lagrangian-Eulerian Method with Zoomable Hidden Fine-Mesh Approach to Solving Advection-Dispersion Equations”, *Water Resour. Res.*, 26(6), 1133-1144, (1990).

Yong-hong, Z., Yong-ming, S. and Da-hong, Q., “A High-order Splitting Scheme for the Advection-diffusion Equation”, *Journal of Environmental Sciences*, 13(4), 444-448, (2001).

Zerroukat, M., Djidjeli, K. and Charafi, A., “Explicit and Implicit Meshless Methods for Linear Advection-Diffusion-Type Partial Differential Equations”, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 48, 19–35, (2000).

Zheng, C. and Bennett, G. D., *Applied Contaminant Transport Modeling*, New York: John Wiley and Sons, (2002).

8. ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı : Ersin BAHAR

Doğum Yeri ve Tarihi : Momtchilgrad / BULGARİSTAN - 28.08.1990

Lisans Üniversite : Süleyman Demirel Üniversitesi - ISPARTA

Elektronik posta : ebahar@pau.edu.tr

Tel : 0 (258) 296 34 36

İletişim Adresi : Pamukkale Üniversitesi Mühendislik Fakültesi
B Blok İnşaat Mühendisliği Bölümü