

**T.C.
PAMUKKALE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI**

**BURGERS DENKLEMİNİN PETROV-GALERKİN SONLU
ELEMEN METODU ÇÖZÜMÜ**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MEHTAP BAYRAKTAR

DENİZLİ, ARALIK - 2016

T.C.
PAMUKKALE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI
UYGULAMALI MATEMATİK



**BURGERS DENKLEMİNİN PETROV-GALERKİN SONLU
ELEMEN METODU ÇÖZÜMÜ**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MEHTAP BAYRAKTAR

DENİZLİ, ARALIK - 2016

KABUL VE ONAY SAYFASI

Mehtap BAYRAKTAR tarafından hazırlanan “BURGERS DENKLEMİNİN PETROV-GALERKİN SONLU ELEMAN METODU ÇÖZÜMÜ” adlı tez çalışmasının savunma sınavı 12.12.2016 tarihinde yapılmış olup aşağıda verilen jüri tarafından oy birliği / oy çokluğu ile Pamukkale Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı Uygulamalı Matematik Yüksek Lisans Tezi olarak kabul edilmiştir.

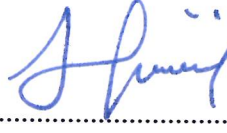
Jüri Üyeleri

İmza

Danışman
Doç. Dr. Murat SARI
Yıldız Teknik Üniversitesi

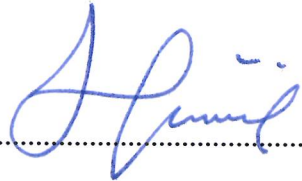


Üye
Prof. Dr. Uğur YÜCEL
Pamukkale Üniversitesi
Üye
Doç. Dr. Özcan SERT
Pamukkale Üniversitesi





Pamukkale Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun
18.01.2017 tarih ve 03/10 sayılı kararıyla onaylanmıştır.



Prof. Dr. Uğur YÜCEL

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

Bu tezin tasarımı, hazırlanması, yürütülmesi, araştırmalarının yapılması ve bulgularının analizlerinde bilimsel etiğe ve akademik kurallara özenle riayet edildiğini; bu çalışmanın doğrudan birincil ürünü olmayan bulguların, verilerin ve materyallerin bilimsel etiğe uygun olarak kaynak gösterildiğini ve alıntı yapılan çalışmalara atfedildiğine beyan ederim.


Mehtap BAYRAKTAR

ÖZET

**BURGERS DENKLEMİNİN PETROV-GALERKİN SONLU ELEMAN
METODU ÇÖZÜMÜ
YÜKSEK LİSANS TEZİ
MEHTAP BAYRAKTAR
PAMUKKALE ÜNİVERSİTESİ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI
UYGULAMALI MATEMATİK
(TEZ DANIŞMANI: DOÇ. DR. MURAT SARI)**

DENİZLİ, ARALIK - 2016

Bu tez, Petrov-Galerkin yöntemine dayalı olarak Burgers denkleminin nümerik çözümlerini araştırmayı amaç edinir. Bunu gerçekleştirebilmek için lineer B-spline ve kuadratik B-spline yaklaşımları kullanılmıştır. Hesaplanan çözümler hem nitel hem de nicel olarak sunulmaktadır. Mevcut sonuçlarla literatür ve analitik çözümler arasında çok iyi bir uyum gözlenmiştir. Çözümlerin hesaplaması, burada üretilen MATLAB kodları ile yapılmıştır.

ANAHTAR KELİMELER: Burgers denklemi, Sonlu eleman metodu, B-Spline fonksiyonlar, Petrov-Galerkin yöntemi, Kuadratik B-spline, Lineer B-spline

ABSTRACT

SOLUTION OF BURGERS EQUATION USING PETROV-GALERKIN FINITE ELEMENT METHOD

MSC THESIS

MEHTAP BAYRAKTAR

PAMUKKALE UNIVERSITY INSTITUTE OF SCIENCE

MATHEMATICS

APPLIED MATHEMATICS

(SUPERVISOR: ASSOC. PROF. DR. MURAT SARI)

DENİZLİ, DECEMBER 2016

The aim of this thesis is to investigate numerical solutions of the Burgers equation in terms of the Petrov-Galerkin Finite Element Method. To achieve this, both linear B-spline and quadratic B-spline approaches have been used. The computed solutions have been present qualitatively and quantitatively. Very good agreement between the current results and the literature as well as the analytical solutions has been observed. The solutions have been calculated through currently produced computer codes in MATLAB.

KEYWORDS: Burgers equation, Finite element method, B-spline functions, Petrov-Galerkin method, Quadratic B-spline, Linear B-spline

İÇİNDEKİLER

Sayfa

| | |
|--|------------|
| ÖZET | i |
| ABSTRACT | ii |
| İÇİNDEKİLER | iii |
| ŞEKİL LİSTESİ | iv |
| TABLO LİSTESİ | vi |
| SEMBOL LİSTESİ | ix |
| ÖNSÖZ | x |
| 1. GİRİŞ | 1 |
| 1.1 Türbülans | 1 |
| 1.2 Şok Dalga | 1 |
| 1.3 Burgers Denklemi..... | 3 |
| 2. SONLU ELEMAN METODU | 7 |
| 2.1 Sonlu Eleman Metodunun Adımları..... | 8 |
| 2.2 Ağırlıklı Kalanlar Yöntemi | 10 |
| 2.3 Galerkin Yöntemi | 11 |
| 2.4 Petrov-Galerkin Yöntemi | 11 |
| 2.5 Kollokasyon Yöntemi..... | 12 |
| 2.6 Altbölge Yöntemi | 12 |
| 2.7 En küçük Kareler Yöntemi..... | 13 |
| 3. SPLINE FONKSİYONLAR | 14 |
| 3.1 B-Spline Fonksiyonlar | 15 |
| 3.2 Lineer B-Spline Fonksiyonlar | 15 |
| 3.3 Kuadratik B-Spline Fonksiyonlar | 17 |
| 3.4 Kübik B-Spline Fonksiyonlar..... | 18 |
| 4. BURGERS DENKLEMİNİN PETROV-GALERKİN SONLU ELEMANLAR YÖNTEMİ İLE ÇÖZÜMÜ | 21 |
| 4.1 Lineer B-Spline Fonksiyonlar ile Petrov-Galerkin Yöntemi | 22 |
| 4.2 Kuadratik B-Spline Fonksiyonlar ile Petrov-Galerkin Yöntemi | 23 |
| 5. NÜMERİK YÖNTEMLERİN UYGULANMASI | 26 |
| 5.1 Test Problemleri | 26 |
| 6. BULGULAR | 55 |
| 7. SONUÇ VE ÖNERİLER | 56 |
| 8. KAYNAKLAR | 57 |
| 9. EKLER | 64 |
| EK A | |
| 10. ÖZGEÇMİŞ | 66 |

ŞEKİL LİSTESİ

Sayfa

| | |
|---|----|
| Resim 1.1: Havada süzülen bir uçağın basınç dalgaları | 2 |
| Resim 2.2: Sonlu elemanlarla freze makinesinin tasviri | 7 |
| Şekil 3.1: Birinci dereceden spline fonksiyonlar | 15 |
| Şekil 3.2: Lineer B-spline şekil fonksiyonları | 16 |
| Şekil 3.3: Kuadratik B-spline şekil fonksiyonları..... | 18 |
| Şekil 3.4: Kübik B-spline şekil fonksiyonları | 20 |
| Şekil 5.5: PGLB yöntemi ile Problem 1 için $\nu = 0.1$, $\Delta x = 0.01$, $\Delta t = 0.005$ değerleri için çözümler..... | 27 |
| Şekil 5.6: PGLB yöntemi ile Problem 1 için $\nu = 0.01$, $\Delta x = 0.01$, $\Delta t = 0.005$ değerleri için çözümler..... | 28 |
| Şekil 5.7: PGKB yöntemi ile Problem 1 için $\nu = 0.1$, $\Delta x = 0.01$, $\Delta t = 0.005$ değerleri için çözümler..... | 29 |
| Şekil 5.8: PGKB yöntemi ile Problem 1 için $\nu = 0.01$, $\Delta x = 0.01$, $\Delta t = 0.005$ değerleri için çözümler..... | 29 |
| Şekil 5.9: PGLB yöntemi ile Problem 2 için $\nu = 1$, $\Delta x = 0.02$, $\Delta t = 0.01$ değerleri için çözümler..... | 32 |
| Şekil 5.10: PGLB yöntemi ile Problem 2 için $\nu = 0.1$, $\Delta x = 0.01$, $\Delta t = 0.05$ değerleri için çözümler..... | 33 |
| Şekil 5.11: PGLB yöntemi ile Problem 2 için $\nu = 0.01$, $\Delta x = 0.005$, $\Delta t = 0.005$ değerleri için çözümler..... | 34 |
| Şekil 5.12: PGKB yöntemi ile Problem 2 için $\nu = 1$, $\Delta x = 0.02$, $\Delta t = 0.01$ değerleri için çözümler..... | 35 |
| Şekil 5.13: PGKB yöntemi ile Problem 2 için $\nu = 0.1$, $\Delta x = 0.01$, $\Delta t = 0.05$ değerleri için nümerik çözümlerin farklı zamanlardaki davranışları | 36 |
| Şekil 5.14: PGKB yöntemi ile Problem 2 için $\nu = 0.01$, $\Delta x = 0.005$, $\Delta t = 0.005$ değerlerinde nümerik çözümler..... | 37 |

| | |
|--|----|
| Şekil 5.15: PGKB yöntemi ile Problem 2 için $v = 0.001$, $\Delta x = 0.001$, $\Delta t = 0.001$ değerlerinde nümerik çözümler | 37 |
| Şekil 5.16: PGLB yöntemi ile Problem 3 için $v = 0.5$, $\Delta x = 0.08$, $\Delta t = 0.05$, $[a, b] = [0, 8]$ değerlerinde nümerik çözümler | 41 |
| Şekil 5.17: PGLB yöntemi ile Problem 3 için $v = 0.05$, $\Delta x = 0.03$, $\Delta t = 0.05$, $[a, b] = [0, 3]$ değerlerinde nümerik çözümlerin davranışları | 42 |
| Şekil 5.18: PGLB yöntemi ile Problem 3 için $v = 0.005$, $\Delta x = 0.012$, $\Delta t = 0.05$, $[a, b] = [0, 1.2]$ değerlerinde nümerik çözümlerin davranışları | 43 |
| Şekil 5.19: PGLB yöntemi ile Problem 3 için $v = 0.001$, $\Delta x = 0.005$, $\Delta t = 0.025$, $[a, b] = [0, 1]$ değerlerinde nümerik çözümler | 44 |
| Şekil 5.20: PGLB yöntemi ile Problem 3 için $v = 0.001$, $\Delta x = 0.005$, $\Delta t = 0.01$, $[a, b] = [0, 1]$ değerlerinde nümerik çözümlerin davranışları | 45 |
| Şekil 5.21: PGKB yöntemi ile Problem 3 için $v = 0.5$, $\Delta x = 0.08$, $\Delta t = 0.05$, $[a, b] = [0, 8]$ değerlerinde nümerik çözümlerin davranışları | 46 |
| Şekil 5.22: PGKB yöntemi ile Problem 3 için $v = 0.05$, $\Delta x = 0.03$, $\Delta t = 0.05$, $[a, b] = [0, 3]$ değerlerinde nümerik çözümlerin davranışları | 47 |
| Şekil 5.23: PGKB yöntemi ile Problem 3 için $v = 0.005$, $\Delta x = 0.012$, $\Delta t = 0.05$, $[a, b] = [0, 1.2]$ değerlerinde nümerik çözümlerin davranışları | 48 |
| Şekil 5.24: PGKB yöntemi ile Problem 3 için $v = 0.001$, $\Delta x = 0.005$, $\Delta t = 0.025$, $[a, b] = [0, 1]$ değerlerinde nümerik çözümler | 49 |
| Şekil 5.25: PGLB yöntemi ile Problem 4 için $v = 1$, $\Delta x = 0.1$, $\Delta t = 0.04$ değerlerinde nümerik çözümler..... | 52 |
| Şekil 5.26: PGKB yöntemi ile Problem 4 için $v = 1$, $\Delta x = 0.1$, $\Delta t = 0.04$ değerlerinde nümerik çözümler..... | 52 |
| Şekil 5.27: PGKB yöntemi ile Problem 4 için $v = 0.1$, $\Delta x = 0.1$, $\Delta t = 0.04$ değerlerinde nümerik çözümlerin davranışları..... | 53 |
| Şekil 5.28: PGKB yöntemi ile Problem 4 için $v = 0.01$, $\Delta x = 0.01$, $\Delta t = 0.01$ değerlerinde nümerik çözümler..... | 53 |

TABLO LİSTESİ

Sayfa

| | |
|---|----|
| Tablo 3.1: $L_i(x)$ ve $L_i'(x)$ in düğüm noktalarındaki değerleri..... | 16 |
| Tablo 3.2: $Q_i(x)$ ve $Q_i'(x)$ in düğüm noktalarındaki değerleri..... | 17 |
| Tablo 3.3: $\phi_i(x), \phi_i'(x)$ ve $\phi_i''(x)$ in düğüm noktalarındaki değerleri..... | 19 |
| Tablo 5.4: PGKB yöntemi ile Problem 1 için $\nu = 0.1, \Delta x = 0.01, \Delta t = 0.005$ değerlerinde farklı zamanlardaki nümerik ve analitik çözümler.... | 28 |
| Tablo 5.5: PGKB yöntemi ile Problem 1 için $\nu = 0.01, \Delta x = 0.01, \Delta t = 0.005$ değerleri için farklı zamanlardaki nümerik ve gerçek çözümler.... | 30 |
| Tablo 5.6: PGLB yöntemi ile Problem 2 için $\nu = 1, \Delta x = 0.02, \Delta t = 0.01$ değerlerinde farklı zamanlardaki nümerik ve analitik çözümler... | 31 |
| Tablo 5.7: PGLB yöntemi ile Problem 2 için $\nu = 0.1, \Delta x = 0.01, \Delta t = 0.05$ değerlerinde farklı zamanlardaki nümerik ve analitik çözümler.... | 32 |
| Tablo 5.8: PGLB yöntemi ile Problem 2 için $\nu = 0.01, \Delta x = 0.005, \Delta t = 0.005$ değerlerinde farklı zamanlardaki nümerik ve analitik çözümler.... | 33 |
| Tablo 5.9: PGKB yöntemi ile Problem 2 için $\nu = 1, \Delta x = 0.02, \Delta t = 0.01$ değerleri için farklı zamanlardaki nümerik ve analitik çözümler .. | 34 |
| Tablo 5.10: PGKB yöntemi ile Problem 2 için $\nu = 0.1, \Delta x = 0.01, \Delta t = 0.05$ değerleri için farklı zamanlardaki nümerik ve analitik çözümler .. | 35 |
| Tablo 5.11: PGKB yöntemi ile Problem 2 için $\nu = 0.01, \Delta x = 0.005, \Delta t = 0.005$ değerlerinde farklı zamanlardaki nümerik ve analitik çözümler | 36 |
| Tablo 5.12: Problem 2 için $\nu = 1, \Delta t = 0.00001, t = 0.1$ değerlerinde maksimum hata normları..... | 38 |
| Tablo 5.13: Problem 2 için $\nu = 1.0, \Delta x = 0.0125, \Delta t = 0.0001$ değerlerinde farklı zamanlardaki nümerik çözümlerin karşılaştırılması..... | 38 |
| Tablo 5.14: Problem 2 için $\nu = 0.1, \Delta x = 0.0125, \Delta t = 0.0001$ değerlerinde farklı zamanlardaki nümerik çözümlerin karşılaştırılması..... | 39 |

| | |
|---|----|
| Tablo 5.15: Problem 2 için $\nu = 0.01$, $\Delta x = 0.0125$, $\Delta t = 0.0001$ değerlerinde farklı zamanlardaki nümerik çözümlerin karşılaştırılması..... | 39 |
| Tablo 5.16: Problem 2 için maksimum hata normları..... | 40 |
| Tablo 5.17: PGLB yöntemi ile Problem 3 için $\nu = 0.5$, $\Delta x = 0.08$, $\Delta t = 0.05$, $[a, b] = [0, 8]$ değerlerinde farklı zamanlardaki nümerik ve analitik çözümler | 41 |
| Tablo 5.18: PGLB yöntemi ile Problem 3 için $\nu = 0.05$, $\Delta x = 0.03$, $\Delta t = 0.05$, $[a, b] = [0, 3]$ değerlerinde farklı zamanlardaki nümerik ve analitik çözümler | 42 |
| Tablo 5.19: PGLB yöntemi ile Problem 3 için $\nu = 0.005$, $\Delta x = 0.012$, $\Delta t = 0.05$, $[a, b] = [0, 1.2]$ değerlerinde farklı zamanlardaki nümerik ve analitik çözümler | 43 |
| Tablo 5.20: PGLB yöntemi ile Problem 3 için $\nu = 0.001$, $\Delta x = 0.005$, $\Delta t = 0.025$, $[a, b] = [0, 1]$ değerlerinde farklı zamanlardaki nümerik ve analitik çözümler | 44 |
| Tablo 5.21: PGKB yöntemi ile Problem 3 için farklı ν ve b değerlerinde $t = 3.25$ zamanında hata normları | 45 |
| Tablo 5.22: PGKB yöntemi ile Problem 3 için $\nu = 0.5$, $\Delta x = 0.08$, $\Delta t = 0.05$, $[a, b] = [0, 8]$ değerlerinde farklı zamanlardaki nümerik ve analitik çözümler | 46 |
| Tablo 5.23: PGKB yöntemi ile Problem 3 için $\nu = 0.05$, $\Delta x = 0.03$, $\Delta t = 0.05$, $[a, b] = [0, 3]$ değerlerinde farklı zamanlardaki nümerik ve analitik çözümler | 47 |
| Tablo 5.24: PGKB yöntemi ile Problem 3 için $\nu = 0.005$, $\Delta x = 0.012$, $\Delta t = 0.05$, $[a, b] = [0, 1.2]$ değerlerinde farklı zamanlardaki nümerik ve analitik çözümler | 48 |
| Tablo 5.25: PGKB yöntemi ile Problem 3 için $\nu = 0.001$, $\Delta x = 0.005$, $\Delta t = 0.025$, $[a, b] = [0, 1]$ değerlerinde farklı zamanlardaki nümerik ve analitik çözümler | 49 |
| Tablo 5.26: Problem 3 için $\nu=0.5$, $[a,b]=[0,8]$, $\Delta x=0.05$, $\Delta t=0.0001$, $t=1.5$ değerlerinde nümerik çözümlerin karşılaştırılması..... | 50 |
| Tablo 5.27: Problem 3 için $\nu=0.5$, $[a,b]=[0,8]$, $\Delta x=0.05$, $\Delta t=0.0001$, $t=3.0$ değerlerinde nümerik çözümlerin karşılaştırılması..... | 50 |

Tablo 5.28: Problem 3 için $v=0.5$, $[a,b]=[0,8]$, $\Delta x=0.05$, $\Delta t=0.0001$, $t=4.5$
değerlerinde nümerik çözümlerin karşılaştırılması 51

SEMBOL LİSTESİ

| | | |
|-------------|---|---|
| ν | : | Kinematik viskozite |
| Δx | : | Konum adımı |
| Δt | : | Zaman adımı |
| t | : | Maksimum zaman |
| u | : | Hız vektörü |
| u_N | : | Yaklaşık çözüm |
| SEM | : | Sonlu eleman metodu |
| DKY | : | Diferansiyel kuadratür yöntemi |
| GL | : | Galerkin lineer yöntemi |
| PGLB | : | Petrov-Galerkin lineer B-spline yöntemi |
| PGKB | : | Petrov-Galerkin kuadratik B-spline yöntemi |
| EKKB | : | En küçük kareler kuadratik B-spline yöntemi |

ÖNSÖZ

Tez çalışmam boyunca bilgi ve deneyimleriyle beni aydınlatan, her pes ettiğimde beni cesaretlendiren ve en önemlisi bir şeyleri öğrendiğime dair ışık gördüğünde heyecanlanıp coşkuya kapılan, sabrına hayran olduğum saygıdeğer hocam Doç. Dr. Murat SARI' ya sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Ayrıca, kafamda kaos oluşturan o müthiş sorularıyla her ihtiyaç duyduğumda gönül rahatlığıyla kapılarını tıklattığım bölüm hocalarım Prof. Dr. Uğur YÜCEL, Doç. Dr. İbrahim ÇELİK ve Doç. Dr. Mustafa AŞÇI' ya, Nevşehir Üniversitesi'nden Yrd. Doç. Dr. S. B. Gazi KARAKOÇ hocaya ve kıymetli arkadaşlarım Eren DİNÇER ve Sevil ÇULHA' ya teşekkürü bir borç bilirim.

1. GİRİŞ

Araştırmacıların üzerine yoğunlaştığı kimi önemli fiziksel süreçlerin Burgers denklemi ile temsil edildiği bilinmektedir (Sari 2009). İşaret edilen fiziksel süreçleri kısaca açıklayalım.

1.1 Türbülans

Yüksek hıza ve şiddete sahip yapılarda, beklenen şiddetinden farklı ve beklenmeyen yönlerden aralıklarla gelen rüzgarın yol açtığı hava akımı türbülans olarak tanımlanabilir. Başka bir ifadeyle türbülans, sıvı veya gaz halindeki maddelerin hareketlerindeki düzensizlik olarak açıklanabilir.

Akışkanlar mekaniğinde akış, katmanlı veya türbülanslı olarak kategorize edilir. Bu ayrımın kararını ise akışkanın yoğunluğu, hızı, kinematik viskozitesi, dinamik viskozitesi gibi şartlarının belirlediği Reynolds sayıları (boyutsuz) verir.

Ruelle ile Takens (1971), türbülansın bağımsız üç hareket ile betimlenebileceği düşüncesini ortaya koymuşlardır. Çalışmalarının en önemli sonucu garip çeker kavramıdır. Bir çeker (*attractor*), faz uzayında bir noktadan ibarettir. Eğer sistem, periyodik hareket yapıyorsa yörüngesi bir çemberdir. Bu çemberin merkezi, kararlı bir çekerdir. Çeker, sistemi, çıkışın bir çekim havzası gibi kendi üzerine kapanmaya zorlamaktadır. Sisteme sürtünme eklendiğinde ise mümkün olan bütün yörüngeler bir helezon çizerek merkezde son bulur.

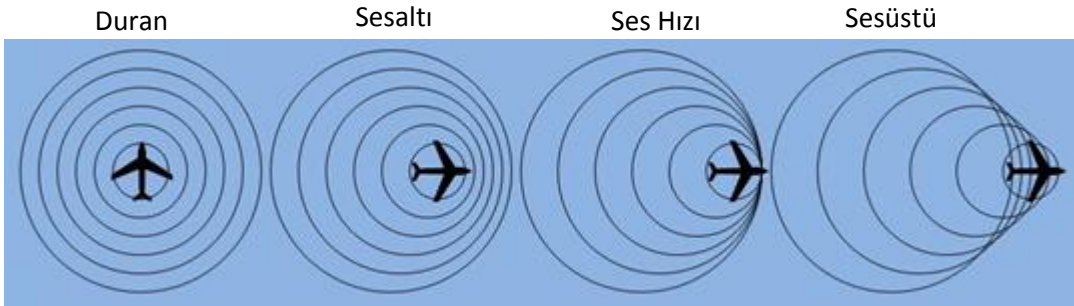
1.2 Şok Dalga

Ani basınç değişiklerine neden olan olguların, bir akışkan ya da esnek bir katı ortam içinde yarattığı güçlü basınç dalgası şok dalgası olarak tanımlanmaktadır.

Şok dalgaları sahip olduğu kimi özellikler sebebiyle ses dalgalarından farklılaşır. Bu dalgalarda, sıkışmanın gerçekleştiği dalga cephesinde ani ve şiddetli

gerilim, basınç şiddeti ve sıcaklık farklılıkları oluşur. Bu nedenle şok dalgaları, ses dalgalarından farklı biçimde ilerler. Ayrıca, şok dalgası, sesten hızlı hareket eder ve genliği büyüdükçe hızı artar. Şok dalgasında enerjinin bir bölümü hareket sırasında ortama geçtiği için şok dalgasının şiddeti ses dalgasınınkinden çok daha hızlı bir şekilde azalır.

Bir uçak havadayken havayı çarpıp sıkıştırarak önünde ve arkasında basınç dalgaları oluşturur (Resim 1.1). Bu basınç dalgaları da ses hızıyla hareket ederler. Eğer uçak, ses hızından düşük hızda hareket ediyorsa uçaktan yayılan basınç dalgaları, uçağın her yerinde hissedilir. Uçak ses hızına yaklaşırken ön ve arkadaki basınç dalgaları uçağın gerisinde kalarak birbiri üzerinde birikir ve basınç daha çok uçağın arkasında hissedilir. Arkada biriken basınç dalgaları, gözlemci tarafından tek bir şok dalgası olarak algılanır. Yayılan dalgalar bir koni içindeymiş gibi görünerek yol alır ve buna Mach konisi -Ernst Mach'ın şok dalgasına katkılarından dolayı- denir. Dalgalar, Mach konisinde birikerek genliği yüksek bir basınç dalgası oluşturur ve bu dalga, gözlemciye ulaştığında yüksek sesli bir patlama (sonik patlama) olarak duyulur.



Resim 1.1: Havada süzülen bir uçağın basınç dalgaları (Ryder28 2012)

Bir şok dalgası, cisimlere kısmen veya tamamen zarar verebilir. Cisim kırılabilir, yumuşak ise bükebilir. Bazı cisimler tek bir şok dalgasıyla zarar görmese bile zamanla yorulabilir veya deforme olabilir. Cihazların, aletlerin kalibrasyonları bozulabilir. Şokun etkisiyle bazı patlayıcılar infilak edebilir.

Şok dalgası sadece sesüstü akışlarda görülen bir durum değildir. Mesela şimşek çakması ya da bir bombanın patlaması anında oluşan yüksek basınçtan kaynaklı bir enerji yayılımı da bir şok dalgasıdır.

Şok dalganın istenmeyen etkileriyle yüz yüze kalan bilim insanları, bu durumu tersine çevirmeye çalışmış ve şok dalga cihazları geliştirilerek üroloji, ortopedi ve travmatoloji alanındaki hastalıkların tedavisi için yöntem üretmişlerdir (Loew ve diğ. 1999).

1.3 Burgers Denklemi

Teknolojinin gelişmesiyle birlikte hava yolu trafiği önemli ölçüde artış göstermiştir. Bu durum, toplumda çoğu insanın türbülans kavramını duymasına veya türbülansa girmiş bir uçak içerisinde şiddetli sarsıntı hissetmesine ya da yüzlerce metre irtifa kaybetmesine neden olmuştur. Bununla birlikte, savunma sanayiine yapılan yatırımlar sayesinde de askeri uçaklar süpersonik hızlara ulaşmıştır. Ancak bu tarz uçaklar, uçuş sırasında şok dalgalar oluşturmuş ve arkasındaki hava akımını dengesizleştirmiştir. Bu dengesizlik uçak kumandalarını olumsuz etkilemiş ve kontrol etme güçlüğü yaşatmıştır. Uçuşu tehlikeye sokan bu fiziksel problemlerin analizi ve çözümü için çalışmalar başlatılmış ve uygun yöntemler, materyaller kullanılarak aşılmaya çalışılmıştır. Doğadaki her problem gibi bu problem de matematiksel bir modele ihtiyaç duymaktadır ve bu ihtiyaç Burgers denklemi ile karşılanmaktadır.

Burgers denklemi, $\nu > 0$ bir sabit olmak üzere

$$u_t + uu_x - \nu u_{xx} = 0, \quad a \leq x \leq b, t \geq 0$$

biçimindedir. Bu denklem, keyfi sınır koşulları

$$u(a,t) = f_1(t), \quad u(b,t) = f_2(t), \quad t \geq 0$$

ve başlangıç koşulu

$$u(x,0) = g(x), \quad a \leq x \leq b$$

ile tek analitik çözümü bulunabilen bir problemdir. Burada $f_1(t)$, $f_2(t)$ ve $g(x)$ test problemlerinde belirlenen fonksiyonlardır. Burgers denklemi, νu_{xx} difüzyon terimi

ve nonlinear konveksiyon uu_x teriminden dolayı Navier-Stokes denkleminin özel bir durumu gibi görülebilir. Burgers denkleminin analitik çözümü mevcut olduğu için nümerik metotların ve Navier-Stokes denkleminin nümerik yöntemlerinin kararlılık ve doğruluğunun test edilmesinde kullanılır.

Burgers denklemi, matematiksel açıdan ilginç özellikler taşımaktadır. Denklem, ν nün çok küçük olması durumunda parabolik yapısını yitirerek hiperbolik bir yapı kazanır. Ayrıca ν değeri küçüldükçe akışkanda şok dalga hareketi ve dinamik dalgaların yayılmasında dik yönelmeler meydana getirir. Bu durum çok sayıda araştırmacıyı cezbetmiş ve uğruna oldukça fazla çalışma yapılmıştır (Ali ve diğ. 1992; Sari ve Gürarslan 2009; Soliman 2012; Korkmaz ve Dağ 2013).

Burgers denklemini ilk olarak, Bateman (1915) bir çalışmada ele almış ve denklemin denge durumu çözümlerini ortaya koymuştur. Burgers (1939) denkleme bir makalesinde yer vermiş. Burgers (1948), bu denklem sayesinde türbülans teorisinin matematiksel modelini tanımlamış ve denkleme onun adı verilerek onurlandırılmıştır. Literatürde Cole (1951) ısı iletimini ve stokastik süreçler teorisindeki uygulamaları, Van der Pol (1951) sayı teorisini, Lighthill (1952) aerodinamiği, nonlinear akustiği, nehirlerdeki su taşkını dalgalarını ve otobandaki trafik akışını, Pospelov (1966) izotropik katılardaki elastik dalgaları modellemiştir.

Hopf (1950) ve Cole (1951) birbirinden bağımsız olarak Burgers denklemini, lineer difüzyon denklemine dönüştürmüş ve problemin tam çözümünü elde etmişlerdir. Farklı başlangıç koşulları için çözümler, Benton ve Platzman (1972) tarafından listelenmiştir. Ancak, analitik çözümlerin sonsuz seriler içermesinden dolayı küçük ν viskozite değerleri için çok yavaş yakınsamaktadır. Bu nedenle araştırmacılar ν değeri küçüldükçe ortaya çıkacak durumları gözleyebilmek için çok sayıda nümerik yöntem geliştirmiştir. Dolayısıyla bu yöntemlerin başarılı olma ölçütü de küçük ν değerleri için fiziksel duruma uygunluk sağlayıp sağlamamasıdır.

Burgers denklemine sonlu eleman metodunu uygulayarak nümerik çözüme ulaşmak isteyen araştırmacılar, farklı interpolasyon şekil fonksiyonları ile ağırlıklı kalan yöntemleri tercih etmiştir. Bu amaç için Rubin ve Khosla (1976) kübik spline fonksiyonlar ile kollokasyon, Christie ve diğ. (1981) kuadratik fonksiyonlar ile Petrov-Galerkin, Herbst ve diğ. (1982) lineer ve kübik fonksiyonlar ile Petrov-

Galerkin, Nguyen ve Reynen (1987) lineer fonksiyonlar ile en küçük kareler, Ali ve diğ. (1990) kuadratik B-spline fonksiyonlar ile Galerkin, Doğan ve diğ. (1997) kuadratik B-spline fonksiyonlar ile Petrov-Galerkin, Kutluay ve diğ. (2004) kuadratik B-spline fonksiyonlar ile en küçük kareler yöntemlerini etkili olarak kullanmışlardır. Ayrıca Aksan ve Özdeş (2004) $\sin(n\pi x)$ fonksiyonlar ile Galerkin yöntemini, Öziş ve diğ. (2003,2005) lineer ve kuadratik fonksiyonlar ile Galerkin yöntemini, Ramadan ve diğ. (2005) septik B-spline fonksiyonlar ile kollokasyon yöntemini, Dağ ve diğ. (2005) zaman-ayrıklaştırma denklem için kuadratik ve kübik B-spline fonksiyonlar ile Galerkin yöntemini problemlerinde benimsemişlerdir. Aksan (2005) lineer B-spline fonksiyonlar ile Galerkin yöntemini, Irk (2009) sextic B-spline fonksiyonlar ile kollokasyon yöntemini, Mittal ve Jain (2012) değiştirilmiş kübik B-spline fonksiyonlar ile kollokasyon yöntemini seçmiştir.

Burgers denkleminin sonlu farklar yöntemiyle de elde edilmiş çok sayıda nümerik çözümü mevcuttur. Bunu sağlayan araştırmacılardan Iskandar ve Mohsen (1992) denklemi önce ikiye parçalamış sonra yöntemi uygulamıştır. Buna benzer biçimde Jain ve diğ. (1995) de önce denklemi üçe parçalamış sonra kübik spline fonksiyonlar yardımıyla yöntemi uygulamıştır. Diğer araştırmacılar: Kutluay ve Esen (2004) lineerleştirilmiş kapalı, Kadalbajoo ve diğ. (2005) bir parametreye bağlı olarak düzgün yakınsayan, Hassanien ve diğ. (2005) dördüncü mertebeden, Gülsu ve Öziş (2005) restrictive Taylor yaklaşımını kullanarak klasik açık, Zhang ve Wang (2012) kestirici-düzeltilici kompakt, İnan ve Bahadır (2014) Crank-Nicolson üstel sonlu fark yöntemini uygulamıştır. Bu konuda yüksek lisans tezinde Dinçer (2015) çeşitli sonlu fark şemalarına yer vererek nümerik çözümler üretmiştir.

Korkmaz ve Dağ (2011) sinc Diferansiyel Kuadratür Yöntemini (DKY), Korkmaz ve Dağ (2011) polinom esaslı DKY, Mittal ve Jiwari (2012) DKY, Jiwari ve diğ. (2013) ağırlıklı ortalama DKY, Mittal ve diğ. (2013) DKY kullanarak Burgers denkleminin nümerik çözümler önermişlerdir.

Kakuda ve Tosaka (1990) genelleştirilmiş sınır elemanları yöntemini Burgers denkleminin çözümü için kullanmıştır. Bahadır ve Sağlam (2005) denklemi önce sonlu farklarla lineerleştirmiş sonra da karışık sınır elemanları yöntemi ile yollarına devam etmişlerdir.

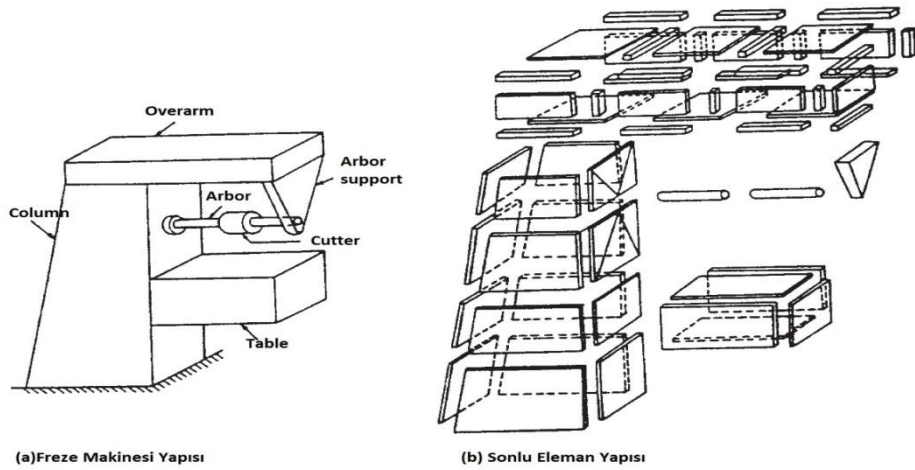
Denklemin değişik seri yöntemleri ile çözümüne de literatürde yer verilmiştir (Inc 2005; Abbansbandy ve Darvishi 2005).

Burgers denkleminin en hassas nümerik çözümü için çok çeşitli yöntemler geliştirilmiştir. Rubin ve Graves (1975) yarı lineerleştirme ve spline fonksiyon tekniğini kullanarak problemin bir nümerik çözümünü elde etmiştir. Bu amaçla Varoğlu ve Finn (1980) ağırlıklı kalanlar yöntemi ile sahne almıştır. Mittal ve Singhal (1993), Bazley (1976) tarafından geliştirilen tekniği kullanarak elde ettikleri adi diferansiyel denklem sistemini çözmek için Runga-Kutta-Chebyshev yöntemini uygulamışlardır. Öziş ve Özdeş (1996) varyasyonel yöntemi, Katsuhiko (1997) bir sonlu fark yöntemine yer vermişlerdir. Hon ve Mao (1998) multiquadric yöntemi, Abd-el-Malek ve El-Mansi (2000) grup teoretik yöntemi, Lin ve Zhou (2001) multiresolution yöntemi tercih etmiştir. Abdou ve Soliman (2005) varyasyonel iterasyon yöntemini, Darvishi ve Javidi (2005) pseudospektral yöntemini, Öziş ve Aslan (2005) büyük Reynolds sayıları içeren denklem için asimptotik açılım yöntemini, Ramadan ve diğ. (2007) polinom olmayan spline yaklaşımını uygulamıştır. Zhu ve Wang (2009) kübik B-spline quasi interpolasyon, Liu ve diğ. (2009) Lie simetri analizini, Asaithambi (2010) otomatik farklılaşma yöntemini, Khalifa (2010) spektral düzenleme yöntemini gündemlerine almışlardır. Bu problemi nümerik analiz etmede Dağ ve diğ. (2011) B-spline kullanarak Taylor-Galerkin ve Taylor-kollokasyon yöntemlerini, Altıparmak (2011) çarpanlarına ayrılmış köşegen Padé yaklaşımını, Bulut ve diğ. (2013) değiştirilmiş deneme denklemi metodunu ele almışlardır. Stokastik Burgers denklemi için Blömker ve Jentzen (2013) Galerkin yaklaşımlarını, Grafke ve diğ. (2013) instanton filtreleme tekniğini kullanmışlardır. Ayrıca, Doha ve diğ. (2014) denkleme, Jacobi kollokasyon yaklaşımını uygulamışlar, Gonçalves ve diğ. (2015) denklemi mikroskobik etkileşimler sınıfı ile ilişkilendirmiştir, Hristov ve diğ. (2016) kesirli Burgers denklemi üzerine çalışmıştır.

2. SONLU ELEMAN METODU

Sonlu Eleman Metodu (SEM), pek çok karmaşık problemin çözümü için kullanılabilen bir nümerik yöntemdir. Metot ilk kez 1956 yılında uçakların yapısal problemlerinin analizinde kullanılmıştır (Turner ve diğ.). Yaklaşık on yıl sonra farklı problem tiplerinin çözümleri için metodun potansiyeli tanınmıştır. Yıllar geçtikçe de SEM geniş bir alana hitap eden problemlerin çözümünde en iyi metotlardan biri olmuştur. Hatta SEM uygulamalı matematikçiler için aktif araştırma alanlarından biri haline gelmiştir. Farklı bilim alanlarında metodun popüler olmasının ana nedenlerinden biri, genel bir bilgisayar programının yazılabilmesi ve herhangi bir problemin çözümü için kullanılabilmesidir.

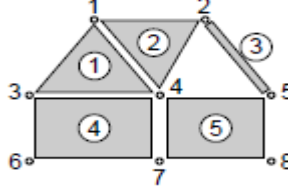
SEM de, çözüm bölgesi çok küçük yapılar gibi düşünülebilir ve birbirine bağlanan alt bölgeler “sonlu elemanlar” olarak adlandırılır. Sonlu elemanlar modelinin nasıl olduğunu örneklersek, Resim 2.2 (a)’da karmaşık bir geometrik şekil tasvir edilmektedir. Herhangi belirli şartlar altında makinenin kesin tepkisini bulmak oldukça zor olduğundan, SEM’ de bu yapı Resim 2.2 (b)’deki gibi birkaç parçadan oluşarak yaklaşılmıştır. Her bir parça veya eleman, bir uygun yaklaşık çözüm farz edilerek yapının baştanbaşa tüm dengesinin şartları türetilir. Bu şartlar sağlandığında yaklaşık bir çözüm bulunmuş olacaktır.



Resim 2.2: Sonlu elemanlarla freze makinesinin tasviri (Rao 2005)

2.1 Sonlu Eleman Metodunun Adımları

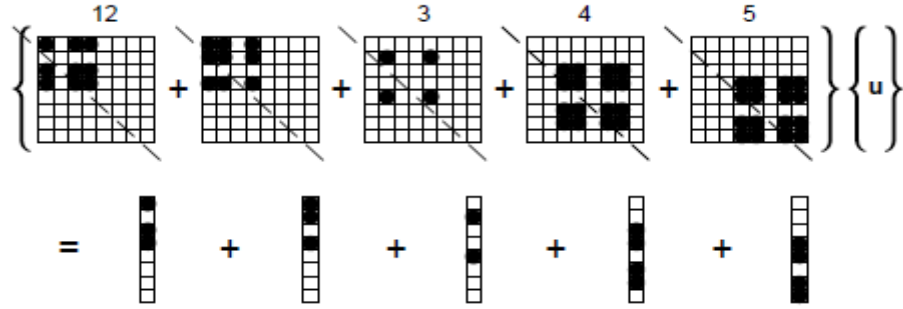
1. Problem, diferansiyel denklemlerle tanımlanır. Problem için virtüel iş, varyasyonel veya zayıf form gibi integral form oluşturulur.
2. Analizde kullanılacak sonlu elemanların tipi ve mertebesi seçilir.



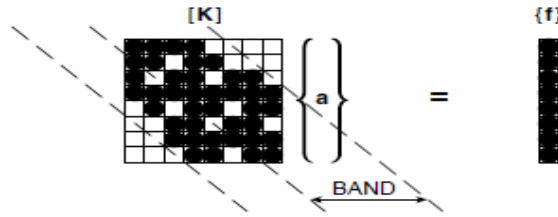
3. Düğüm ve elemanların yerleşim düzeni tanımları yapılır.

| Eleman | 1 | Bağlantı | 1 3 4 |
|--------|---|----------|---------|
| | 2 | | 1 4 2 |
| | 3 | | 2 5 |
| | 4 | | 3 6 7 4 |
| | 5 | | 4 7 8 5 |

4. Eleman dizileri hesaplanır. Özel virtüel iş, varyasyonel veya zayıf form, her elemanın özel ilişkilerinin hesaplanmasında temel sağlar.



5. Bilinmeyen parametreler için lineer cebirsel denklem sistemi çözülür.



6. Düğüm ve eleman değişkenleri için sonuçlar çıkarılır. Bu adımda grafiksel veriler de kullanışlı olur (Zienkiewicz and Taylor 2000).

Literatürde, üçgen bölgeler üzerinde tanımlanmış parçalı sürekli fonksiyonların kullanımını içeren SEM'e benzer bir yaklaşımı 1943 yılında ilk kez Courant ileri sürmüştür. Günümüzde SEM'in temel fikri Turner ve diğ. (1956) ile Argyris ve Kelsey (1954-1955)'in çalışmalarına dayanır. Sonlu eleman ismi, Clough (1960) tarafından türetilmiştir. Turner ve diğ.'nin çalışmaları, SEM'in

geliştirilmesinde kilit noktalardan biri olarak görülmüş ve uçak yapısının analizi için basit sonlu elemanlar uygulamasını sunmuşlardır. Ayrıca bilgisayarların gelişmesiyle birlikte sonlu elemanların uygulanması etkileyici şekilde artarak ilerleme kaydedilmiştir. Zienkiewicz ve Cheung (1967) metodun geniş yorumunu ve herhangi probleme uygulanabilmesini göstermişlerdir. SEM'in bu geniş yorumuyla, Galerkin ve en küçük kareler gibi ağırlıklı kalan yöntemleri kullanılarak türetilen sonlu eleman denklemleri bulunmuştur. Bu durum, lineer veya nonlineer diferansiyel denklemlerin çözümü için SEM'i uygulayanlar arasında ilgi çekici olmuştur. Metot, yapı mekanikleri alanlarında geniş çapta kullanılmasının yanı sıra ısı iletimi, akış dinamiği, sızıntı akışları, elektrik ve manyetik alanlar gibi alanlarda da başarıyla uygulanmıştır. Günümüzde SEM, bilim insanlarınınca ele alınan pek çok problemde dezavantajlarına rağmen popülaritesini sürdürmektedir.

SEM, diğer yöntemlerle kıyaslandığında oldukça fazla avantaja sahiptir. Düzensiz şekle sahip yapıları ve diğer yöntemlerle modellenemeyen farklı, karmaşık bölgeleri kolay bir şekilde modelleyebilir. Bunun yanında, eleman denklemleri ayrı ayrı oluşturulabildiği için farklı malzemelerden oluşan yapıları modelleyebilir. Ayrıca, sınır şartlarının değişmesi sonlu eleman modelini değiştirmediği için çok farklı sınır şartları ile birlikte kullanılabilir. Gerekli olması durumunda elemanların büyüklükleri ya da modeli değiştirilebilir.

Her nümerik yöntemin olduğu gibi SEM in de bazı dezavantajları vardır. Bilgisayar kullanımı gerektiriyor olması metodun ekonomik dezavantajıdır. Ayrıca, daha kesin sonuçlar elde etmek için daha küçük eleman boyutları kullanılmalıdır. Eleman boyutlarının bu şekilde küçülmesi daha büyük bilgisayar hafızası gerektirir. Bilgisayar hafızasının sınırlı oluşu da çözümün hassasiyetine bir sınırlama getirecektir.

Problemimize sonlu eleman metodunu uygulayabilmek için ihtiyaç duyduğumuz integral formu, ağırlıklı kalanlar ile oluşturacağız. Bu nedenle çözüm adımına geçmeden önce ağırlıklı kalanlar yöntemine kısaca değineceğiz.

2.2 Ağırlıklı Kalanlar Yöntemi

Bir diferansiyel denklemin elde edilen yaklaşık çözümleri ile gerçek çözümleri arasındaki farkın, sıfırdan farklı bir ağırlık fonksiyonu ile çarpıldıktan sonra toplamlarının minimize edilmesine ağırlıklı kalanlar (rezidü) yaklaşımı denir. Bu yaklaşıma dayanan yöntemlere ise ağırlıklı kalanlar yöntemi denir. Bu yöntemler, varyasyonel yöntemler ile kıyaslandığında daha avantajlıdır. Çünkü ağırlıklı kalanlar yöntemi sayesinde her denklemin ağırlıklı integral formu oluşturulabilir. Ağırlıklı integral form, problemin sınır şartlarından hiçbirini içermez. Dolayısıyla, ağırlık fonksiyonları seçilirken yaklaşık çözümün hem doğal hem de temel sınır şartlarını sağlayacak biçimde olmasına dikkat edilmelidir. Ağırlıklı kalanlar yöntemini anlatabilmek için V bölgesinde

$$A(u) = f \quad (2.1)$$

operatör denklemini dikkate alınır. Burada A lineer veya nonlineer bir operatör, u bağımlı değişken ve f bağımsız değişkenlerin bir fonksiyonu olarak tanımlanır. (2.1) denklemindeki u çözümü için

$$u_N = \sum_{j=1}^N a_j \phi_j + \phi_0 \quad (2.2)$$

biçiminde bir yaklaşım tanımlanır. (2.1) denkleminde (2.2) ile verilen u_N yaklaşık çözümü yerine yazıldığında $f_N = A(u_N)$ fonksiyonu elde edilir ki bu fonksiyonun f ye eşit olmak zorunluluğu yoktur. f_N ile f arasındaki farka

$$R = f_N - f = A\left(\sum_{j=1}^N a_j \phi_j + \phi_0\right) - A(u) \neq 0 \quad (2.3)$$

yaklaşımın kalanı denir. Burada R kalan fonksiyonu, hem a_j parametrelerine hem de ϕ_j ifadelerinden dolayı konuma bağlıdır. a_j parametrelerini tespit edebilmek için

$$\int_V \psi_i(x, y) R(x, y, a_j) dx dy = 0, \quad i = 1, 2, 3, \dots, N \quad (2.4)$$

integrali sifira eşitlenerek R kalanı sıfırlanmaya zorlanır. Burada V iki boyutlu bir bölge ve ψ_i 'ler ise ağırlıklı kalan fonksiyonlarıdır. Seçilecek bu fonksiyonların kümesi lineer bağımsız olmalıdır. Aksi takdirde (2.4) integralinden elde edilen denklemler çözülemez. En küçük kareler, Galerkin, Petrov-Galerkin, kollokasyon ve altbölge ağırlıklı kalanlar yönteminin bazılarıdır.

2.3 Galerkin Yöntemi

ψ_i ağırlık fonksiyonları ile ϕ_i yaklaşım fonksiyonları eşit seçilir ise yöntemin adı Galerkin olur. Galerkin yaklaşımının cebirsel denklemleri $A_{ij} = \int_V \phi_i A(\phi_j) dV$ ve

$$F_i = \int_V \phi_i [f - A(\phi_0)] dV \text{ olmak üzere,}$$

$$\sum_{j=1}^N A_{ij} u_j = F_i$$

biçimindedir.

2.4 Petrov-Galerkin Yöntemi

ψ_i ağırlık fonksiyonları ile ϕ_i yaklaşım fonksiyonları $\psi_i \neq \phi_i$ olacak biçimde seçilirse bu yöntem Petrov-Galerkin olarak isimlendirilir. A lineer bir operatör olmak üzere V bölgesinde (2.4) yaklaşımı,

$$\sum_{i=1}^N \left(\int_V \psi_j A(\phi_i) dx dy \right) a_i = \int_V \psi_j [f - A(\phi_0)] dx dy$$

veya

$$\sum_{i=1}^N A_{ij} a_i = F_i$$

şeklinde yazılabilir. Bu yöntemde elde edilen $[A_{ij}]$ katsayılar matrisi simetrik olmayabilir. Bu durumun matematiksel karşılığı $A_{ij} \neq A_{ji}$ biçimidir.

2.5 Kollokasyon Yöntemi

Bu yöntemde V çözüm bölgesinden seçilen N adet $\mathbf{x}^j \equiv (x^j, y^j)$ kollokasyon noktasında kalanın sıfır olması gerekir. Başka bir deyişle,

$$R(x^j, y^j, a_i) = 0, \quad j = 1, 2, \dots, N$$

olmalıdır. \mathbf{x}^j kollokasyon noktaları, denklem sisteminin iyi şartlı olmasını sağlayacak şekilde seçilmelidir. Bu yöntemde ağırlık fonksiyonu $\psi_j = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}^j)$ olur ve (2.4) denkleminde yerine yazılırsa

$$\int_V \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}^j) R(\mathbf{x}, a_i) dx dy = 0$$

veya

$$R(\mathbf{x}^j, a_i) = 0$$

elde edilir. Burada $\delta(x)$ Dirac delta fonksiyonudur ve $\int_V f(\mathbf{x}) \delta(\mathbf{x} - \xi) dx dy = f(\xi)$ şeklinde tanımlanır.

2.6 Alt bölge Yöntemi

Alt bölge yönteminin uygulanabilmesi için ψ_i ağırlık fonksiyonları

$$\psi_i = \begin{cases} 1, & x_i \leq x \leq x_{i+1} \\ 0, & \text{diğer durumlar} \end{cases}$$

biçiminde seçilir. Burada $i = 0, 1, \dots, N$ alınır. a_j parametrelerinin sayısı alt aralıkların sayısına eşit olmalıdır. ψ_i ağırlık fonksiyonları (2.4) denkleminde yerine yazılırsa

$$\int_V R(x, y, a_j) dx dy = 0, \quad i = 0, 1, \dots, N$$

elde edilir. Bu denklem sisteminin çözülmesi ile a_j parametreleri bulunur.

2.7 En küçük Kareler Yöntemi

Bu yöntemde, ağırlıklı kalan integralindeki kalanı minimize etmek amacıyla yaklaşım kalanının karesi üzerinden integral alma işlemi gerçekleştirilir.

$$\int_V R(x, y, a_j) R(x, y, a_j) dV = \int_V R^2 dV$$

Bu fonksiyonun minimum yapılması için bütün bilinmeyen sabitlere göre türevler alınarak, aşağıdaki gibi, sıfıra eşitleme işlemi gerçekleştirilir.

$$\frac{\partial \left(\int_V R^2 dV \right)}{\partial a_j} = 0 .$$

3. SPLINE FONKSİYONLAR

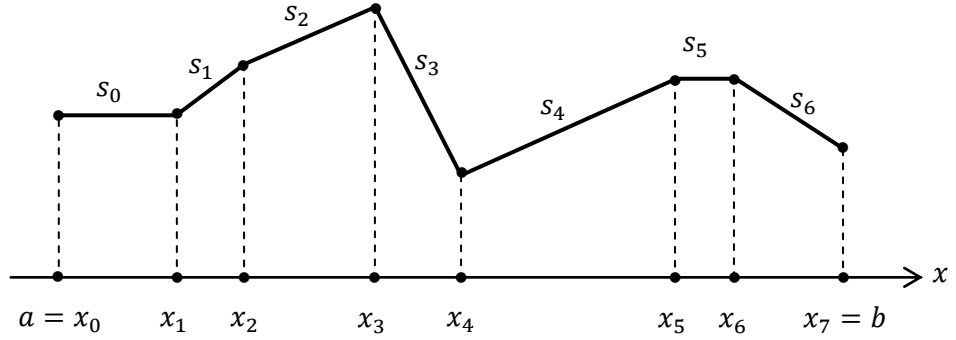
Polinom yaklaşımları, yaklaşım yöntemleri içinde oldukça önemli bir yere sahiptir. Ancak polinom yaklaşımı ile her zaman arzu edilen hassasiyette çözümler elde edilemeyebilir. Bunun sebebi fonksiyonun türevlerde hızlı değişim gösteriyor olması veya fonksiyonun keskin köşelerinin varlığı olabilir. Bu durumu telafi etmek için yüksek dereceden polinomlar tercih edilse bile istenilen hassasiyette bir yaklaşım yapılamayabilir. Bununla birlikte, nokta sayısı arttığı zaman yaklaşımda kullanılacak (Newton ve Lagrange interpolasyon polinomları) polinomun derecesi de artar ve bunun sonucu olarak bazı hesaplama hataları oluşur. Böyle durumlarda ardışık iki veri arasında birinci, ikinci ya da üçüncü dereceden fonksiyonlarla yaklaşımın yapıldığı spline interpolasyon yöntemi tercih edilmelidir. Spline interpolasyonu, tanımlanan aralık üzerinde ve sonlu noktalarda birbirini örtmeyen alt aralıklarda daha küçük dereceden polinom bulma esasına dayanır. Spline fonksiyonlar, parçalı polinomlar sınıfına ait olup polinomların süreklilik özelliklerini taşıyan dizilişlerinden meydana gelmektedir.

Reel sayıların monoton artan bir dizisi $-\infty = x_0 < x_1 < \dots < x_n < x_{n+1} = \infty$ olacak şekilde x_1, x_2, \dots, x_n 'e bağlı ve reel doğru üzerinde tanımlı m . dereceden bir $s(x)$ spline fonksiyonu aşağıdaki iki özelliği sağlar:

$s(x)$ her bir (x_i, x_{i+1}) , $i = 0, 1, \dots, n$ aralığında m . veya daha düşük dereceden bir polinomdur. Burada $x_0 = -\infty, x_{n+1} = \infty$.

$s(x)$ fonksiyonu ve $s(x)$ in $1, 2, \dots, (m-1)$. mertebeden türevleri, tanımlanan her aralıkta ve $x_i, i = 1, 2, \dots, n$ bölünme noktalarında süreklidir.

Bu tanıma göre, bir spline fonksiyonun oluşması için parçalı polinom fonksiyonların sürekli ve türevlerinin belirli şartları sağlaması gerekir. $m=0$ için ikinci şart geçersizdir. Sıfırıncı dereceden spline fonksiyon, *adım fonksiyonu* olarak adlandırılır. $m=1$ için ise $s(x)$ fonksiyonu bir poligon (kırık çizgi) olup lineer polinomların birleştirilmesi ile oluşur (Şekil 3.1).



Şekil 3.1: Birinci dereceden spline fonksiyonlar

3.1 B-Spline Fonksiyonlar

Bütün spline fonksiyonlar kümesi için bir baz oluşturan fonksiyonlara B-spline fonksiyonlar denir. B-spline fonksiyonlar nümerik hesaplamalar için oldukça kullanışlıdır.

3.2 Lineer B-Spline Fonksiyonlar

$L_i(x)$ lineer B-spline fonksiyonlar olmak üzere, $[a, b]$ aralığının düzgün bir parçalanışı $a = x_0 < x_1 < \dots < x_{N-1} < x_N = b$ olsun. $i = 0, 1, \dots, N$ noktaları için $\Delta x = x_{i+1} - x_i$ olmak üzere x_i düğüm noktalarında

$$L_i(x) = \frac{1}{\Delta x} \begin{cases} (x_{i+1} - x) - 2(x_i - x) , & [x_{i-1}, x_i] \\ (x_{i+1} - x) & , [x_i, x_{i+1}] \\ 0 & , \text{diğer durumlar} \end{cases}$$

şeklinde tanımlanır. $a \leq x \leq b$ aralığında tanımlı fonksiyonlar için $\{L_0(x), L_1(x), \dots, L_N(x)\}$ kümesi bir baz oluşturur. Lineer B-spline fonksiyon ve türevi, $[x_{i-1}, x_{i+1}]$ aralığının dışında sıfırdır. Şekil 3.2'de görüldüğü üzere, her bir $[x_i, x_{i+1}]$ sonlu eleman sadece L_i, L_{i+1} gibi iki lineer B-spline fonksiyon tarafından

örtülmektedir. $L_i(x)$ ve birinci mertebeden türevinin düğüm noktalarındaki değerleri Tablo 3.1 ile verilmiştir.

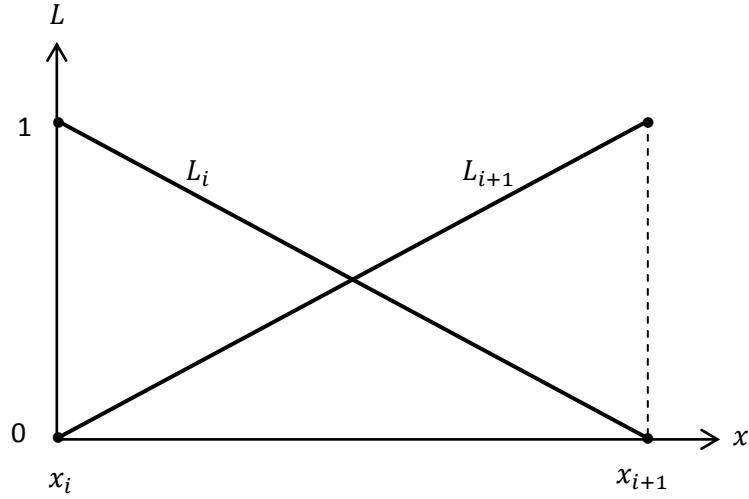
Tablo 3.1: $L_i(x)$ ve $L_i'(x)$ in düğüm noktalarındaki değerleri

| x | x_{i-1} | x_i | x_{i+1} |
|-----------------|-----------|-------|-----------|
| L_i | 0 | 1 | 0 |
| $\Delta x L_i'$ | 0 | -1 | 1 |

Bir $[x_i, x_{i+1}]$ aralığı, $\Delta x \xi = x - x_i$, $0 \leq \xi \leq 1$ yerel koordinat dönüşümü yardımıyla $[0,1]$ aralığına dönüştürülür. Böylece lineer B-spline fonksiyonlar $[0,1]$ aralığında ξ cinsinden,

$$\begin{aligned} L_i &= 1 - \xi \\ L_{i+1} &= \xi \end{aligned} \quad (3.1)$$

biçiminde bulunur.



Şekil 3.2: Lineer B-spline şekil fonksiyonları

3.3 Kuadratik B-Spline Fonksiyonlar

$Q_i(x)$ kuadratik B-spline fonksiyonlar olmak üzere, $[a, b]$ aralığının düzgün bir parçalanışı $a = x_0 < x_1 < \dots < x_{N-1} < x_N = b$ olsun. $i = -1, 0, \dots, N$ noktaları için $\Delta x = x_{i+1} - x_i$ olmak üzere x_i düğüm noktalarında

$$Q_i = \frac{1}{\Delta x^2} \begin{cases} (x_{i+2} - x)^2 - 3(x_{i+1} - x)^2 + 3(x_i - x)^2, & [x_{i-1}, x_i] \\ (x_{i+2} - x)^2 - 3(x_{i+1} - x)^2 & , [x_i, x_{i+1}] \\ (x_{i+2} - x)^2 & , [x_{i+1}, x_{i+2}] \\ 0 & , \text{diğer durumlar} \end{cases}$$

şeklinde tanımlanır. $a \leq x \leq b$ aralığında tanımlı fonksiyonlar için $\{Q_{-1}(x), Q_0(x), \dots, Q_N(x)\}$ kümesi bir baz oluşturur. Kuadratik B-spline fonksiyon ve türevi, $[x_{i-1}, x_{i+2}]$ aralığının dışında sıfırdır. Şekil 3.3'de görüldüğü üzere, her bir $[x_i, x_{i+1}]$ sonlu eleman, Q_{i-1}, Q_i, Q_{i+1} gibi üç kuadratik B-spline fonksiyon tarafından örtülmektedir. $Q_i(x)$ ve $Q_i'(x)$ düğüm noktalarındaki değerleri Tablo 3.2 ile verilmiştir.

Tablo 3.2: $Q_i(x)$ ve $Q_i'(x)$ in düğüm noktalarındaki değerleri

| x | x_{i-1} | x_i | x_{i+1} | x_{i+2} |
|-----------------|-----------|-------|-----------|-----------|
| Q_i | 0 | 1 | 1 | 0 |
| $\Delta x Q_i'$ | 0 | 2 | -2 | 0 |

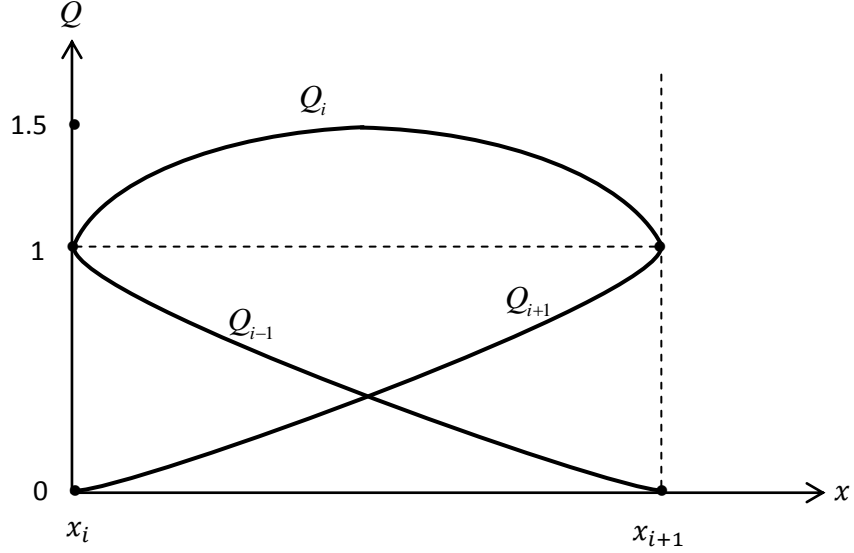
Bir $[x_i, x_{i+1}]$ aralığı yerel koordinat dönüşümü yardımıyla $[0, 1]$ aralığna dönüşür. Böylece kuadratik B-spline fonksiyonlar $[0, 1]$ aralığında ξ cinsinden,

$$\begin{aligned} Q_{i-1} &= (1 - \xi)^2 \\ Q_i &= 1 + 2\xi - 2\xi^2 \\ Q_{i+1} &= \xi^2 \end{aligned} \quad (3.2)$$

biçiminde bulunur. (3.2) kuadratik B-spline fonksiyonlar kullanılarak x_i düğüm noktasında u_N ve u_N' çözümlerinin δ_i eleman parametreleri cinsinden,

$$\begin{aligned}
u_N(x_i, t) &= u_i = \delta_{i-1} + \delta_i \\
u'_i &= \frac{2}{\Delta x} (\delta_i - \delta_{i-1})
\end{aligned} \tag{3.3}$$

şeklinde yazılabilir.



Şekil 3.3: Kuadratik B-spline şekil fonksiyonları

3.4 Kübik B-Spline Fonksiyonlar

$\phi_i(x)$ kübik B-spline fonksiyonlar olmak üzere, $[a, b]$ aralığının düzgün bir parçalanışı $a = x_0 < x_1 < \dots < x_{N-1} < x_N = b$ olsun. $i = -1, 0, \dots, N+1$ noktaları için $\Delta x = x_{i+1} - x_i$ olmak üzere x_i düğüm noktalarında

$$\phi_i(x) = \frac{1}{\Delta x^3} \begin{cases} (x - x_{i-2})^3 & , [x_{i-2}, x_{i-1}] \\ \Delta x^3 + 3\Delta x^2(x - x_{i-1}) + 3\Delta x(x - x_{i-1})^2 - 3(x - x_{i-1})^3 & , [x_{i-1}, x_i] \\ \Delta x^3 + 3\Delta x^2(x_{i+1} - x) + 3\Delta x(x_{i+1} - x)^2 - 3(x_{i+1} - x)^3 & , [x_i, x_{i+1}] \\ (x_{i+2} - x)^3 & , [x_{i+1}, x_{i+2}] \\ 0 & , \text{diğer durumlar} \end{cases}$$

olacak biçimde tanımlanır. $a \leq x \leq b$ aralığında tanımlı fonksiyonlar için $\{\phi_{-1}(x), \phi_0(x), \dots, \phi_N(x), \phi_{N+1}(x)\}$ kümesi bir baz oluşturur. Kübik B-spline $\phi_i(x)$

fonksiyonu ve türevi, $[x_{i-2}, x_{i+2}]$ aralığının dışında sıfırdır. Şekil 3.4'de görüldüğü üzere, her bir $[x_i, x_{i+1}]$ sonlu eleman, $\phi_{i-1}, \phi_i, \phi_{i+1}, \phi_{i+2}$ gibi dört kübik B-spline fonksiyon tarafından örtülmektedir. $\phi_i(x), \phi_i'(x)$ ve $\phi_i''(x)$ fonksiyonlarının düğüm noktalarındaki değerleri Tablo 3.3 ile verilmiştir.

Tablo 3.3: $\phi_i(x), \phi_i'(x)$ ve $\phi_i''(x)$ in düğüm noktalarındaki değerleri

| x | x_{i-2} | x_{i-1} | x_i | x_{i+1} | x_{i+2} |
|-----------------------|-----------|-----------|-------|-----------|-----------|
| ϕ_i | 0 | 1 | 4 | 1 | 0 |
| $\Delta x \phi_i'$ | 0 | 3 | 0 | -3 | 0 |
| $\Delta x^2 \phi_i''$ | 0 | 6 | -12 | 6 | 0 |

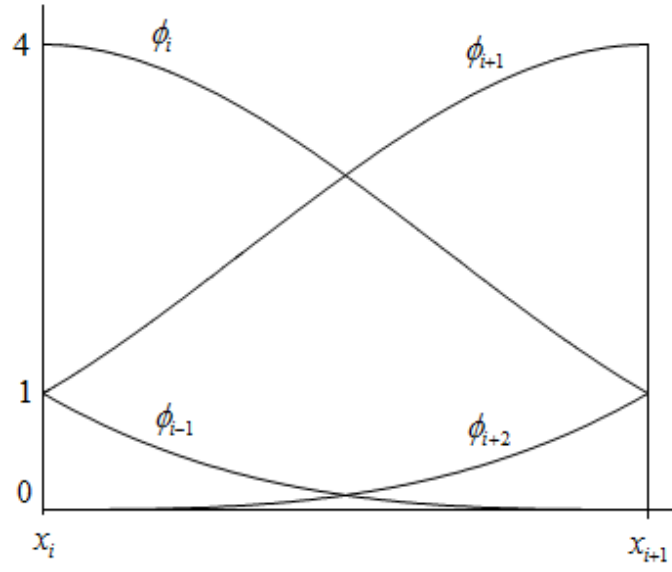
$[x_i, x_{i+1}]$ aralığı yerel koordinat dönüşümü yardımıyla $[0,1]$ aralığına dönüşür. Böylece kübik B-spline fonksiyonlar $[0,1]$ aralığında ξ cinsinden,

$$\begin{aligned}
 \phi_{i-1} &= (1-\xi)^3 \\
 \phi_i &= 1+3(1-\xi)+3(1-\xi)^2-3(1-\xi)^3 \\
 \phi_{i+1} &= 1+3\xi+3\xi^2-3\xi^3 \\
 \phi_{i+2} &= \xi^3
 \end{aligned} \tag{3.4}$$

bulunur. (3.4) kübik B-spline fonksiyonlar kullanılarak x_i düğüm noktasında u_N, u_N' ve u_N'' çözümlerinin δ_i eleman parametreleri cinsinden,

$$\begin{aligned}
 u_N(x_i, t) = u_i &= \delta_{i-1} + 4\delta_i + \delta_{i+1} \\
 u_i' &= \frac{3}{\Delta x} (-\delta_{i-1} + \delta_{i+1}) \\
 u_i'' &= \frac{6}{\Delta x^2} (\delta_{i-1} - 2\delta_i + \delta_{i+1})
 \end{aligned} \tag{3.5}$$

şeklinde yazılabilir.



Şekil 3.4: Kübik B-spline şekil fonksiyonları (Karakoç, 2011)

4. BURGERS DENKLEMİNİN PETROV-GALERKİN SONLU ELEMENLAR YÖNTEMİ İLE ÇÖZÜMÜ

Bir boyutlu Burgers denklemi

$$u_t + uu_x - vu_{xx} = 0 \quad (4.1)$$

için ağırlıklı kalan integrali $a = x_0 < x < x_N = b$ olmak üzere,

$$\int_{x_0}^{x_N} w_i (u_t + uu_x - vu_{xx}) dx = 0, \quad i = 0, 1, \dots, N-1 \quad (4.2)$$

olur. Ağırlık fonksiyonunu Dirac delta fonksiyonu seçersek

$$w_i = \begin{cases} 1, & x_i \leq x \leq x_{i+1} \\ 0, & x < x_i, x > x_{i+1} \end{cases} \quad (4.3)$$

(4.2) denklemi sadece $[x_i, x_{i+1}]$ elemanı için var olur. Başka bir deyişle,

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} (u_t + uu_x - vu_{xx}) dx = 0 \quad (4.4)$$

olarak sadeleşir. Gerekli integral işlemleri yapılırsa

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} u_t dx + \int_{x_i}^{x_{i+1}} u(u_x dx) - v \int_{x_i}^{x_{i+1}} u_{xx} dx = 0 \quad (4.5)$$

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} u_t dx + \frac{1}{2} u^2 \Big|_{x_i}^{x_{i+1}} - v(u_x) \Big|_{x_i}^{x_{i+1}} = 0 \quad (4.6)$$

elde edilir. Öte yandan t zaman değişkeni için Crank-Nicolson yaklaşımı ele alınırsa

$$u_t = \frac{1}{\Delta t} (u^{j+1} - u^j) \quad (4.7)$$

$$u = \frac{1}{2} (u^j + u^{j+1}) \quad (4.8)$$

$$u^2 = u^{j+1}u^j \quad (4.9)$$

olur. (4.7-4.9) denklemlerini (4.6) denkleminde kullanırsak,

$$\frac{1}{\Delta t} \int_{x_i}^{x_{i+1}} (u^{j+1} - u^j) dx + \frac{1}{2} (u^{j+1}u^j) \Big|_{x_i}^{x_{i+1}} - \frac{v}{2} (u_x^{j+1} + u_x^j) \Big|_{x_i}^{x_{i+1}} = 0 \quad (4.10)$$

elde edilir.

4.1 Lineer B-Spline Fonksiyonlar ile Petrov-Galerkin Yöntemi

$[x_i, x_{i+1}]$ elemanı üzerindeki şekil fonksiyonu olarak lineer B-spline seçilen yaklaşım fonksiyonu

$$u_N = u = \sum_{j=i}^{i+1} L_j(x) \delta_j(t) \quad (4.11)$$

$$\Rightarrow u = L_i \delta_i + L_{i+1} \delta_{i+1} \quad (4.12)$$

$$\Rightarrow u = (1 - \xi) \delta_i + \xi \delta_{i+1} \quad (4.13)$$

olur. Burada δ_i nicelikleri düğümsüz eleman parametreleridir. Diğer bir ifadeyle, x_i noktalarına bağlı değil ancak zamana bağlıdır. (4.10) denkleminde (4.13) denklemindeki test fonksiyonu dikkate alınırsa aşağıdaki iterasyon elde edilir.

$$i = 0, 1, \dots, N-2, \quad n = 0, 1, \dots, \quad \alpha = \frac{\Delta t}{\Delta x} \quad \text{ve} \quad \beta = \frac{v \Delta t}{\Delta x^2} \quad \text{olmak üzere,}$$

$$(1 - \beta - \alpha \delta_i^n) \delta_i^{n+1} + (1 + 2\beta + \alpha \delta_{i+1}^n) \delta_{i+1}^{n+1} - \beta \delta_{i+2}^{n+1} = (1 + \beta) \delta_i^n + (1 - 2\beta) \delta_{i+1}^n + \beta \delta_{i+2}^n$$

biçimindedir.

$i = 0, 1, \dots, N-2$ değerleri, iterasyon denkleminde dikkate alınırsa $(N+1)$ bilinmeyen ve $N-1$ tane denklemden oluşan denklem sistemi elde edilir. Bu sıkıntıyı gidermek için problemin sınır koşulları dikkate alınarak ilk ve son denklemden ortaya çıkan δ_0, δ_N parametreleri yok edilir.

u_0 alt sınır koşulu olmak üzere $i = 0$ için $\delta_0 = u_0$ olur ve ilk eleman için,

$$(1 + 2\beta + \alpha\delta_1^n)\delta_1^{n+1} - \beta\delta_2^{n+1} = (1 - 2\beta)\delta_1^n + \beta\delta_2^n + (2\beta + \alpha u_0)u_0$$

denklemini elde edilir.

u_N üst sınır koşulu olmak üzere $i = N$ için $\delta_N = u_N$ olur ve son eleman için,

$$(1 - \beta - \alpha\delta_{N-2}^n)\delta_{N-2}^{n+1} + (1 + 2\beta + \alpha\delta_{N-1}^n)\delta_{N-1}^{n+1} = (1 + \beta)\delta_{N-2}^n + (1 - 2\beta)\delta_{N-1}^n + 2\beta u_N$$

denklemini elde edilir. Bu düzenlemelerle birlikte artık $N-1$ bilinmeyenli $N-1$ denklemden oluşan sistem elde edilmiş olur.

δ_i^{n+1} parametrelerinin hesaplanabilmesi için δ^0 başlangıç vektörünün bilinmesi gerekir. δ^0 , problem ile verilen başlangıç şartı kullanılarak hesaplanır. Bunun için δ_i^0 belirlenecek parametreler olmak üzere;

$$\delta_i^0 = u(i, 0)$$

alınır.

Buradaki yöntemlerin açıklanmasında Doğan (1997)'in prosedürü takip edilmiştir.

4.2 Kuadratik B-Spline Fonksiyonlar ile Petrov-Galerkin Yöntemi

$[x_i, x_{i+1}]$ elemanı üzerinde şekil fonksiyonu olarak kuadratik B-spline seçilen yaklaşım fonksiyonu

$$u_N = u = \sum_{j=i-1}^{i+1} Q_j(x)\delta_j(t) \quad (4.14)$$

$$\Rightarrow u = Q_{i-1}\delta_{i-1} + Q_i\delta_i + Q_{i+1}\delta_{i+1} \quad (4.15)$$

$$\Rightarrow u = (1 - 2\xi + \xi^2)\delta_{i-1} + (1 + 2\xi - 2\xi^2)\delta_i + \xi^2\delta_{i+1} \quad (4.16)$$

olur. Burada δ_i nicelikleri x_i noktalarına bağlı değil sadece zamana bağlıdır.

(4.16) denklemindeki test fonksiyonu dikkate alındığında (4.10) denklemi aşağıdaki şekli alır:

$$i = 0, 1, \dots, N-1, \quad n = 0, 1, \dots, \quad \alpha = \frac{3\Delta t}{2\Delta x} \quad \text{ve} \quad \beta = 3\frac{v\Delta t}{\Delta x^2} \quad \text{için,}$$

$$\begin{aligned} & (1 - \beta - \alpha[\delta_{i-1}^n + \delta_i^n])\delta_{i-1}^{n+1} + (4 + 2\beta + \alpha[\delta_{i+1}^n - \delta_{i-1}^n])\delta_i^{n+1} + (1 - \beta + \alpha[\delta_i^n + \delta_{i+1}^n])\delta_{i+1}^{n+1} \\ & = (1 + \beta)\delta_{i-1}^n + (4 - 2\beta)\delta_i^n + (1 + \beta)\delta_{i+1}^n \end{aligned} \quad . \quad (4.17)$$

$i = 0, 1, \dots, N-1$ değerleri, iterasyon denkleminde dikkate alınırsa $(N+2)$ bilinmeyen ve N tane denklemden oluşan denklem sistemi elde edilir. Denklem sayısı-bilinmeyen dengesini sağlamak için problemin sınır koşulları dikkate alınarak ilk ve son denklemde ortaya çıkan δ_{-1} ve δ_N parametreleri yok edilir.

u_0 alt sınır koşulu olmak üzere $i = 0$ için $\delta_{-1} = u_0 - \delta_0$ olur ve ilk eleman için,

$$(3 + 3\beta + \alpha[\delta_0^n + \delta_1^n])\delta_0^{n+1} + (1 - \beta + \alpha[\delta_0^n + \delta_1^n])\delta_1^{n+1} = (3 - 3\beta)\delta_0^n + (1 + \beta)\delta_1^n + (2\beta + \alpha u_0)u_0$$

denklemini elde edilir.

u_N üst sınır koşulu olmak üzere $i = N-1$ için $\delta_N = u_N - \delta_{N-1}$ olur ve son eleman için,

$$\begin{aligned} & (1 - \beta - \alpha[\delta_{N-2}^n + \delta_{N-1}^n])\delta_{N-2}^{n+1} + (3 + 3\beta - \alpha[\delta_{N-2}^n + \delta_{N-1}^n])\delta_{N-1}^{n+1} = (1 + \beta)\delta_{N-2}^n + (3 - 3\beta)\delta_{N-1}^n \\ & \quad + (2\beta - \alpha u_N)u_N \end{aligned}$$

denklemini elde edilir. Bu düzenlemelerle birlikte artık N bilinmeyenli N denklemden oluşan sistem elde edilmiş olur.

δ_i^{n+1} parametrelerinin hesaplanabilmesi için δ^0 başlangıç vektörünün bilinmesi gerekir. δ^0 , problem ile verilen başlangıç ve sınır şartları kullanılarak hesaplanır. Bunun için δ_i^0 belirlenecek parametreler olmak üzere

$$u_N(x,0) = \sum_{i=1}^N Q_i \delta_i^0$$

şeklinde yazılabilir. Böylece başlangıç şartlarının x_i düğüm noktalarındaki $u_N(x_i,0) = u(x_i,0)$, $i = 0,1,\dots,N$ değerleri kullanılarak δ_i^0 parametreleri için,

$$\begin{aligned} u(x_0,0) &= \delta_{-1} + \delta_0 \\ u(x_1,0) &= \delta_0 + \delta_1 \\ u(x_2,0) &= \delta_1 + \delta_2 \\ &\vdots \\ u(x_{N-1},0) &= \delta_{N-2} + \delta_{N-1} \\ u(x_N,0) &= \delta_{N-1} + \delta_N \end{aligned}$$

$(N+2)$ bilinmeyenli $(N+1)$ tane denklemden oluşan cebirsel denklem sistemi elde edilir. Bu denklem sisteminde ilave şart olarak;

$$u'(x_0,0) = u_0' = \frac{2}{\Delta x} (\delta_0 - \delta_{-1})$$

türevli sınır şartı kullanılırsa δ^0 başlangıç parametreleri,

$$\begin{bmatrix} -2/\Delta x & 2/\Delta x & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ & & \ddots & & & \\ 0 & \dots & & 1 & 1 & 0 \\ 0 & \dots & & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_{-1} \\ \delta_0 \\ \delta_1 \\ \vdots \\ \delta_{N-1} \\ \delta_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_0' \\ u(x_0) \\ u(x_1) \\ \vdots \\ u(x_{N-1}) \\ u(x_N) \end{bmatrix}$$

matris denkleminin çözülmesi ile elde edilir.

5. NÜMERİK YÖNTEMLERİN UYGULANMASI

Bu bölümde dört farklı test problemi kullanılacak ve sonuçlar karşılaştırılacaktır. Problem 1 ve Problem 4, bir şok dalga davranışını tanımlar ve bu problemler için sınır koşulları $x \rightarrow x_0$ iken $u \rightarrow 1$ ve $x \rightarrow x_N$ iken Problem 1’de $u \rightarrow 0.2$, Problem 4’te $u \rightarrow 0.0$ alınır. Problem 2 ve Problem 3, bir kutu içindeki türbülans bozulmasını modeller ve sınır koşulları olarak kutunun $x = x_0$ ve $x = x_N$ uçlarında $u = 0$ kullanılır.

Farklı metotlardan elde edilen nümerik çözümler ile analitik çözümler arasında kantitatif karşılaştırmalar yapmak için maksimum hata

$$L_\infty = \|u - u_N\|_\infty = \max_i |u_i - (u_N)_i|$$

ile ortalama hata

$$L_2 = \|u - u_N\|_2 = \left(\Delta x \sum_{i=1}^N |u_i - (u_N)_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

normları kullanıldı.

5.1 Test Problemleri

Problem 1 (Doğan, 1997): Bir şok dalga davranışını modelleyen Burgers denkleminin çözümü $\alpha = 0.4$, $\mu = 0.6$, $\gamma = 0.125$, $\eta = \frac{\alpha(x - \mu t - \gamma)}{\nu}$ olmak üzere

$$u(x, t) = \frac{\alpha + \mu + (\mu - \alpha) \exp(\eta)}{1 + \exp(\eta)}, \quad -2 \leq x \leq 5, \quad t \geq 0$$

şeklindedir. Sınır şartları

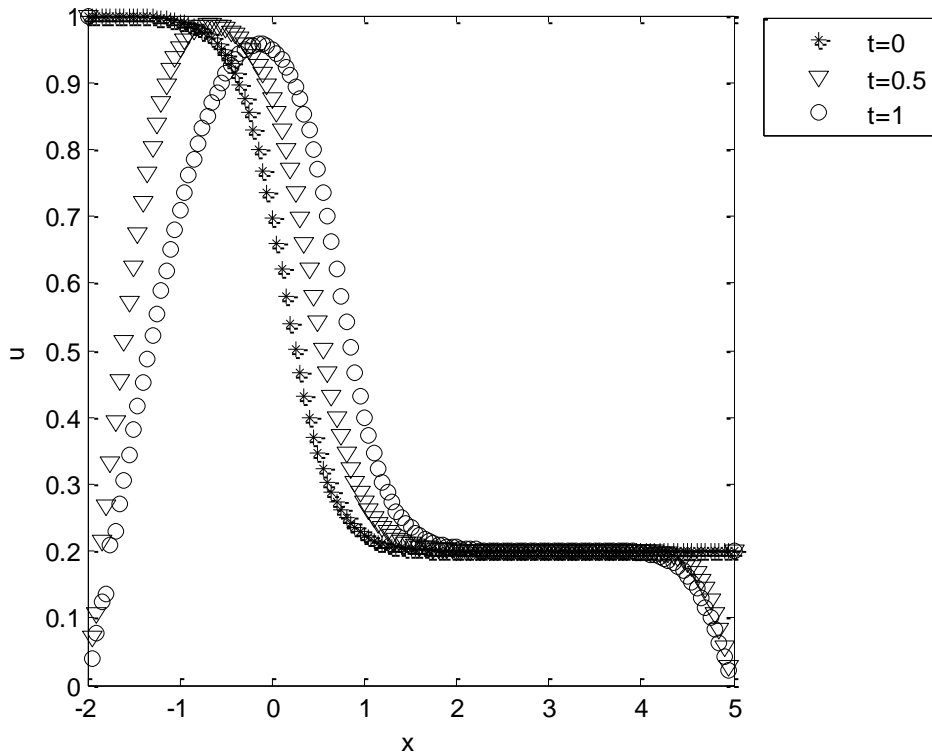
$$\begin{cases} u(-2,t) = 1, & t \geq 0 \\ u(5,t) = 0.2, & t \geq 0 \end{cases}$$

ve başlangıç şartı

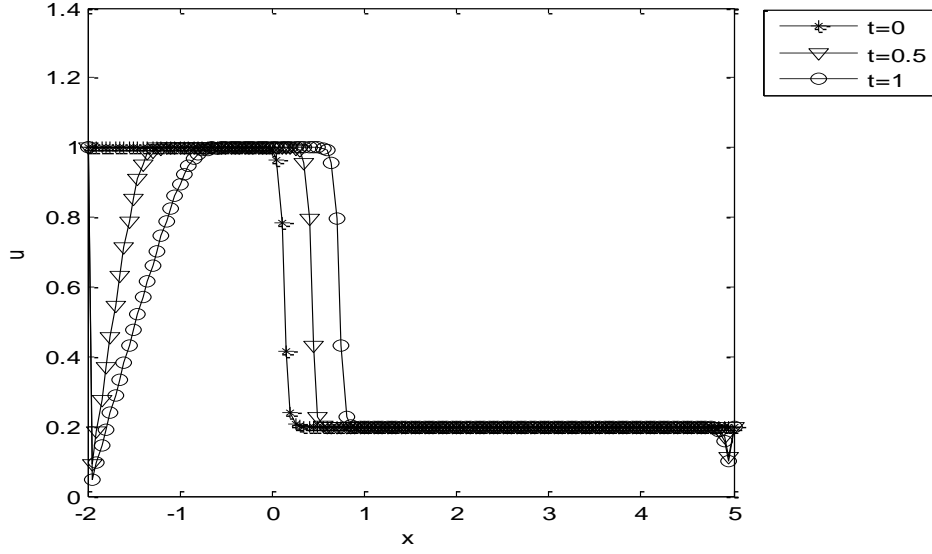
$$u(x,0) = \frac{\alpha + \mu + (\mu - \alpha) \exp\left(\frac{\alpha}{v}(x - \gamma)\right)}{1 + \exp\left(\frac{\alpha}{v}(x - \gamma)\right)}, \quad -2 \leq x \leq 5$$

olarak alınmıştır.

PGLB yöntemiyle $v = 0.1$ için üretilen çözüm eğrileri Şekil 5.5' deki gibi ve hata normları $L_\infty = 0.9922$ ve $L_2 = 0.6755$ iken, $v = 0.01$ için çözüm eğrileri Şekil 5.6' deki gibi ve hata normları $L_\infty = 0.9904$ ve $L_2 = 0.5907$ olarak oldukça yüksek elde edilmiştir.



Şekil 5.5: PGLB yöntemi ile Problem 1 için $v = 0.1$, $\Delta x = 0.01$, $\Delta t = 0.005$ değerleri için çözümler

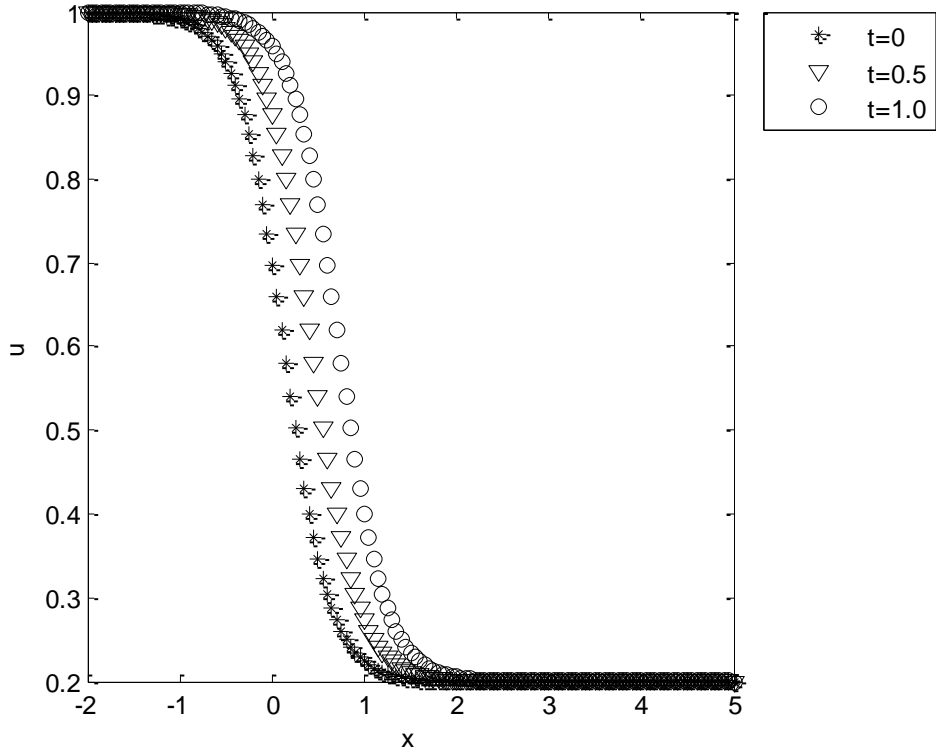


Şekil 5.6: PGLB yöntemi ile Problem 1 için $\nu = 0.01$, $\Delta x = 0.01$, $\Delta t = 0.005$ değerleri için çözümler

PGKB yöntemi, hem $\nu = 0.1$ hem de $\nu = 0.01$ değerleri için Tablo 5.4 ve Tablo 5.5'den anlaşılacağı üzere oldukça hassas sonuçlar üretmiştir.

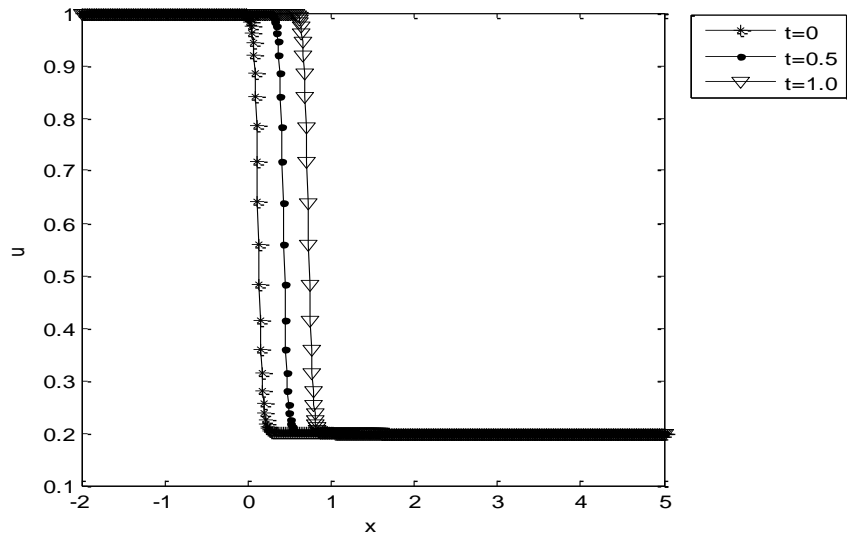
Tablo 5.4: PGKB yöntemi ile Problem 1 için $\nu = 0.1$, $\Delta x = 0.01$, $\Delta t = 0.005$ değerlerinde farklı zamanlardaki nümerik ve analitik çözümler

| t | 0.5 | | 1.0 | |
|------------|----------------------|-----------------------|----------------------|-----------------------|
| x | <i>Nümerik Çözüm</i> | <i>Analitik Çözüm</i> | <i>Nümerik Çözüm</i> | <i>Analitik Çözüm</i> |
| 0.1 | 0.9992366 | 0.9991945 | 0.9998110 | 0.9997667 |
| 0.2 | 0.9869595 | 0.9869580 | 0.9960532 | 0.9961816 |
| 0.3 | 0.8286639 | 0.8286679 | 0.9393154 | 0.9415190 |
| 0.4 | 0.3459436 | 0.3459404 | 0.5404475 | 0.5482909 |
| 0.5 | 0.2107088 | 0.2107095 | 0.2344848 | 0.2358301 |
| 0.6 | 0.2006594 | 0.2006595 | 0.2021852 | 0.2022745 |
| 0.7 | 0.2000401 | 0.2000401 | 0.2001332 | 0.2001386 |
| 0.8 | 0.2000024 | 0.2000024 | 0.2000081 | 0.2000084 |
| 0.9 | 0.2000001 | 0.2000001 | 0.2000004 | 0.2000004 |
| L_∞ | 7.3770E-005 | | 5.5455E-005 | |
| L_2 | 5.5749E-005 | | 5.1548E-005 | |



Şekil 5.7: PGKB yöntemi ile Problem 1 için $v = 0.1$, $\Delta x = 0.01$, $\Delta t = 0.005$ değerleri için çözümler

Dalganın ön tarafı, ilk şeklini koruyarak sabit hızla sağa doğru hareket eder (Şekil 5.7-5.8). Şok dalgı grafiği, tanımlı parametrelerle düz kalır ve hiçbir fiziksel kırıldanma görünmez. Ayrıca elde edilen hatalar oldukça küçüktür.



Şekil 5.8: PGKB yöntemi ile Problem 1 için $v = 0.01$, $\Delta x = 0.01$, $\Delta t = 0.005$ değerleri için çözümler

Tablo 5.5: PGKB yöntemi ile Problem 1 için $\nu = 0.01$, $\Delta x = 0.01$, $\Delta t = 0.005$ değerleri için farklı zamanlardaki nümerik ve gerçek çözümler

| t | 0.5 | | 1.0 | |
|------------|----------------------|-----------------------|----------------------|-----------------------|
| x | <i>Nümerik Çözüm</i> | <i>Analitik Çözüm</i> | <i>Nümerik Çözüm</i> | <i>Analitik Çözüm</i> |
| 0.1 | 1.00000000 | 1.00000000 | 1.00000000 | 1.00000000 |
| 0.2 | 1.00000000 | 1.00000000 | 1.00000000 | 1.00000000 |
| 0.3 | 0.99999837 | 0.99999819 | 0.99999999 | 0.99999999 |
| 0.4 | 0.20000022 | 0.20000024 | 0.23776179 | 0.23794069 |
| 0.5 | 0.20000000 | 0.20000000 | 0.20000000 | 0.20000000 |
| 0.6 | 0.20000000 | 0.20000000 | 0.20000000 | 0.20000000 |
| 0.7 | 0.20000000 | 0.20000000 | 0.20000000 | 0.20000000 |
| 0.8 | 0.20000000 | 0.20000000 | 0.20000000 | 0.20000000 |
| 0.9 | 0.20000000 | 0.20000000 | 0.20000000 | 0.20000000 |
| L_∞ | 6.8736E-004 | | 6.6461E-004 | |
| L_2 | 1.6557E-004 | | 1.6412E-004 | |

Problem 2 (Dinçer, 2015): Bir boyutlu Burgers denklemini,

$$u_t + uu_x = \nu u_{xx}$$

$$\begin{cases} u(0,t) = 0, & t > 0 \\ u(1,t) = 0, & t > 0 \end{cases}$$

homojen sınır şartları ve

$$u(x,0) = \sin(\pi x), \quad 0 \leq x \leq 1$$

başlangıç şartı ile birlikte göz önüne alalım. Problemin bu koşullar altındaki analitik çözümü,

$$a_0 = \int_0^1 \exp\{-(2\pi v)^{-1}[1 - \cos(\pi x)]\} dx$$

$$a_n = 2 \int_0^1 \exp\{-(2\pi v)^{-1}[1 - \cos(\pi x)]\} \cos(n\pi x) dx, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Fourier katsayıları olmak üzere problemin tam çözümü,

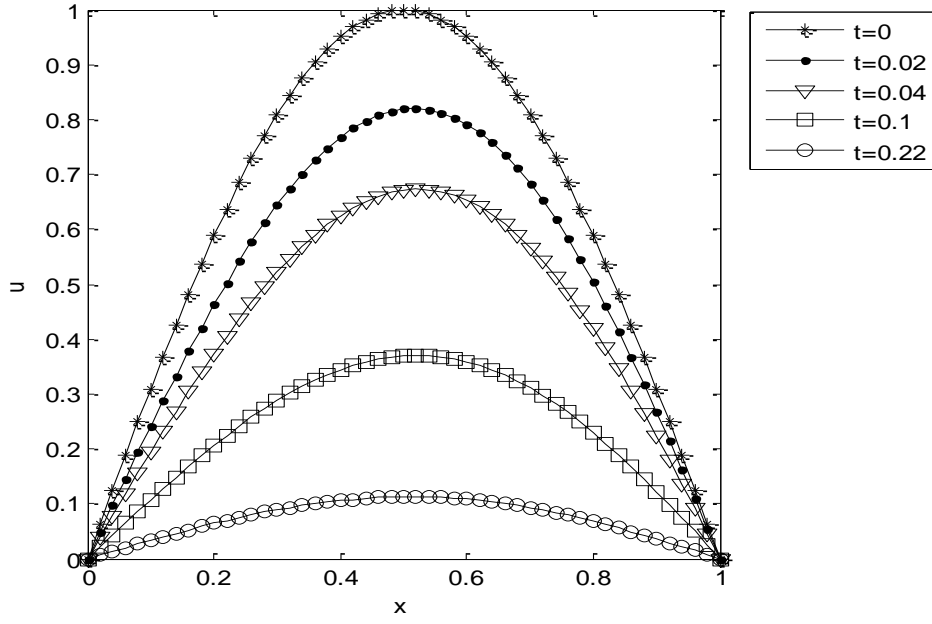
$$u(x, t) = 2\pi v \frac{\sum_{n=1}^{\infty} a_n \exp(-n^2 \pi^2 vt) n \sin(n\pi x)}{a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \exp(-n^2 \pi^2 vt) \cos(n\pi x)}$$

biçimindedir. Bu problem için çok sayıda çalışma yapılmıştır.

Tablo 5.6'da bazı düğüm noktalarında zaman ilerledikçe elde edilen çözümlere ve hata normlarına yer verilmiştir. PGLB yöntemiyle üretilen bu sonuçların grafikleri Şekil 5.9'daki gibidir. Tablo 5.9 incelendiğinde aynı verilerle PGKB yöntemi kullanılarak problemin gerçek çözümüne çok daha yakın çözümler üretilmiş ve benzer grafikler Şekil 5.12'de sunulmuştur.

Tablo 5.6: PGLB yöntemi ile Problem 2 için $v = 1$, $\Delta x = 0.02$, $\Delta t = 0.01$ değerlerinde farklı zamanlardaki nümerik ve analitik çözümler

| t | 0.02 | | 0.04 | | 0.1 | | 0.22 | |
|--------------|----------------------|-----------------------|----------------------|-----------------------|----------------------|-----------------------|----------------------|-----------------------|
| x | <i>Nümerik çözüm</i> | <i>Analitik çözüm</i> | <i>Nümerik çözüm</i> | <i>Analitik çözüm</i> | <i>Nümerik çözüm</i> | <i>Analitik çözüm</i> | <i>Nümerik çözüm</i> | <i>Analitik çözüm</i> |
| 0.2 | 0.4626 | 0.4661 | 0.3732 | 0.3776 | 0.2061 | 0.2098 | 0.0643 | 0.0659 |
| 0.4 | 0.7677 | 0.7699 | 0.6250 | 0.6283 | 0.3446 | 0.3479 | 0.1060 | 0.1075 |
| 0.6 | 0.7915 | 0.7904 | 0.6523 | 0.6514 | 0.3588 | 0.3590 | 0.1082 | 0.1087 |
| 0.8 | 0.5030 | 0.4994 | 0.4192 | 0.4151 | 0.2301 | 0.2278 | 0.0682 | 0.0678 |
| L_{∞} | 0.0036 | | 0.0046 | | 0.0040 | | 0.0017 | |
| L_2 | 0.0026 | | 0.0031 | | 0.0025 | | 9.9557E-004 | |

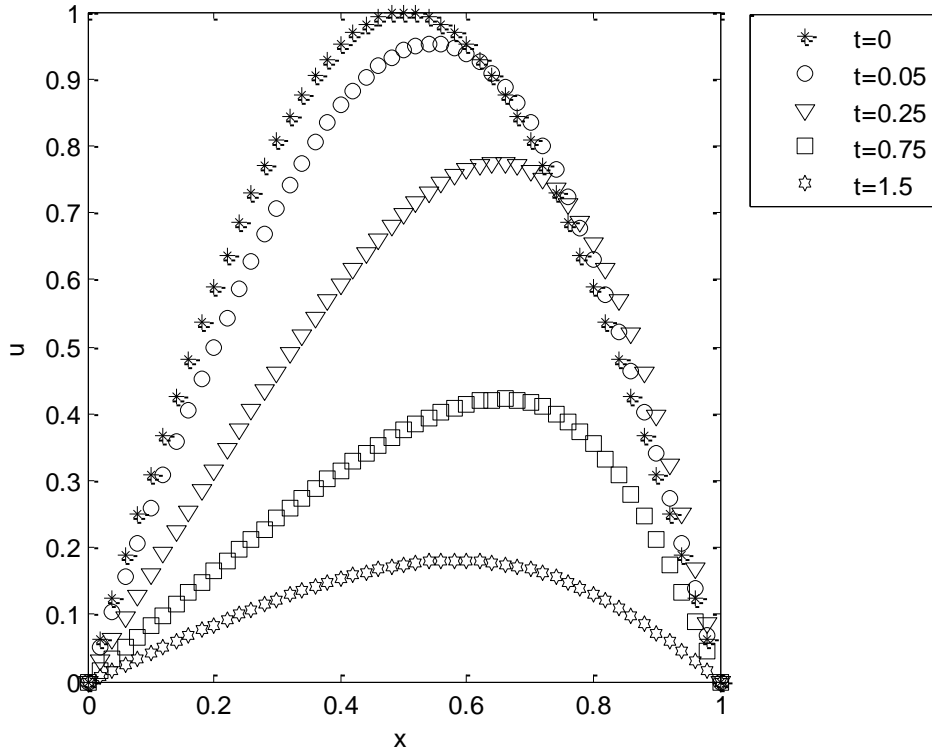


Şekil 5.9: PGLB yöntemi ile Problem 2 için $\nu = 1$, $\Delta x = 0.02$, $\Delta t = 0.01$ değerleri için çözümler

Tablo 5.7-5.10' da $\nu = 0.1$ için konum daha fazla bölünerek ideal çözümlere ulaşılmaya çalışılmış ve buna karşılık PGKB yöntemi için daha az sayıdaki elemanlar için oldukça başarılı sonuçlar üretilmiştir. Bunun yanı sıra parabolik durumun bozulmaya başlaması hem PGLB hem de PGKB yöntemleriyle gözlenmiştir (Şekil 5.10-5.13).

Tablo 5.7: PGLB yöntemi ile Problem 2 için $\nu = 0.1$, $\Delta x = 0.01$, $\Delta t = 0.05$ değerlerinde farklı zamanlardaki nümerik ve analitik çözümler

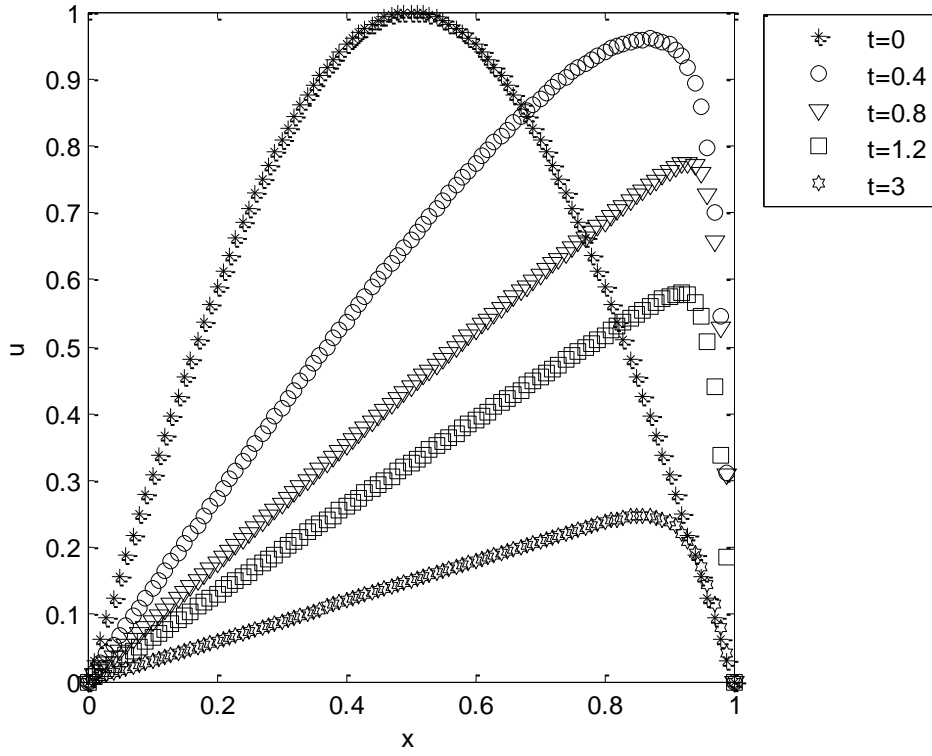
| t | 0.05 | | 0.25 | | 0.75 | | 1.5 | |
|------------|---------------|----------------|---------------|----------------|---------------|----------------|---------------|----------------|
| x | Nümerik çözüm | Analitik çözüm | Nümerik çözüm | Analitik çözüm | Nümerik çözüm | Analitik çözüm | Nümerik çözüm | Analitik çözüm |
| 0.1 | 0.2578 | 0.2587 | 0.1595 | 0.1603 | 0.0829 | 0.0834 | 0.0431 | 0.0437 |
| 0.2 | 0.4990 | 0.5001 | 0.3150 | 0.3162 | 0.1645 | 0.1655 | 0.0844 | 0.0858 |
| 0.3 | 0.7057 | 0.7065 | 0.4614 | 0.4630 | 0.2428 | 0.2445 | 0.1220 | 0.1240 |
| 0.4 | 0.8597 | 0.8599 | 0.5922 | 0.5941 | 0.3149 | 0.3174 | 0.1530 | 0.1556 |
| 0.5 | 0.9427 | 0.9424 | 0.6981 | 0.7000 | 0.3755 | 0.3789 | 0.1739 | 0.1769 |
| 0.6 | 0.9380 | 0.9374 | 0.7634 | 0.7653 | 0.4147 | 0.4192 | 0.1801 | 0.1833 |
| 0.7 | 0.8338 | 0.8334 | 0.7623 | 0.7637 | 0.4158 | 0.4209 | 0.1668 | 0.1696 |
| 0.8 | 0.6292 | 0.6290 | 0.6540 | 0.6537 | 0.3549 | 0.3590 | 0.1306 | 0.1325 |
| 0.9 | 0.3397 | 0.3394 | 0.3951 | 0.3926 | 0.2118 | 0.2131 | 0.0724 | 0.0732 |
| L_∞ | 0.0010 | | 0.0027 | | 0.0051 | | 0.0032 | |
| L_2 | 5.5636E-004 | | 0.0016 | | 0.0029 | | 0.0021 | |



Şekil 5.10: PGLB yöntemi ile Problem 2 için $\nu = 0.1$, $\Delta x = 0.01$, $\Delta t = 0.05$ değerleri için çözümler

Tablo 5.8: PGLB yöntemi ile Problem 2 için $\nu = 0.01$, $\Delta x = 0.005$, $\Delta t = 0.005$ değerlerinde farklı zamanlardaki nümerik ve analitik çözümler

| t | 0.4 | | 0.8 | | 1.2 | | 3.0 | |
|------------|---------------|----------------|---------------|----------------|---------------|----------------|---------------|----------------|
| x | Nümerik çözüm | Analitik çözüm | Nümerik çözüm | Analitik çözüm | Nümerik çözüm | Analitik çözüm | Nümerik çözüm | Analitik çözüm |
| 0.2 | 0.27447 | 0.27452 | 0.17733 | 0.17736 | 0.13090 | 0.13092 | 0.06009 | 0.06009 |
| 0.4 | 0.53785 | 0.53792 | 0.35278 | 0.35282 | 0.26125 | 0.26128 | 0.12015 | 0.12016 |
| 0.6 | 0.77335 | 0.77345 | 0.52395 | 0.52401 | 0.39040 | 0.39043 | 0.18016 | 0.18018 |
| 0.8 | 0.94072 | 0.94100 | 0.68699 | 0.68708 | 0.51747 | 0.51752 | 0.23799 | 0.23863 |
| L_∞ | 0.1151 | | 0.0311 | | 0.0190 | | 0.0045 | |
| L_2 | 0.0163 | | 0.0054 | | 0.0037 | | 0.0013 | |

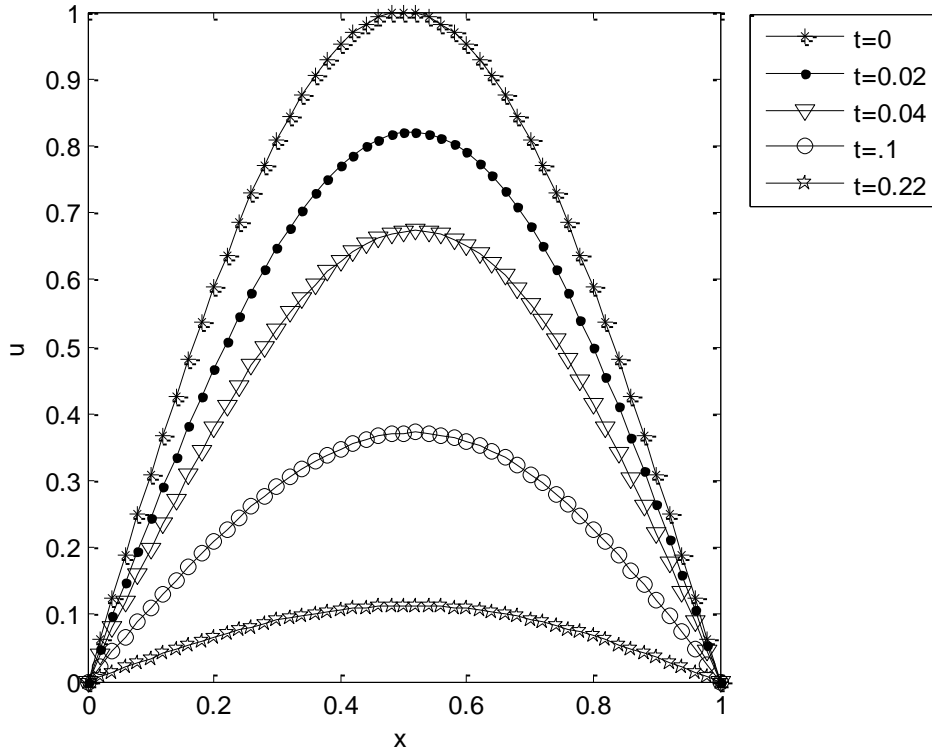


Şekil 5.11: PGLB yöntemi ile Problem 2 için $\nu = 0.01$, $\Delta x = 0.005$, $\Delta t = 0.005$ değerleri için çözümler

$\nu = 0.01$ alınarak analitik çözüme en yakın çözümlerin elde edilmesi için, hem konum hem zaman adımının oldukça küçük seçilmesi gerekmektedir. Tablo 5.8-5.11'deki sonuçlar, arzu edilen hassas çözümlerin PGKB ile elde edildiğini göstermektedir. Ayrıca Şekil 5.11-5.14 parabolik davranışın zaman geçtikçe tamamen bozulduğunu ve dik iniş hareketinin sergilendiğini anlatmaktadır.

Tablo 5.9: PGKB yöntemi ile Problem 2 için $\nu = 1$, $\Delta x = 0.02$, $\Delta t = 0.01$ değerleri için farklı zamanlardaki nümerik ve analitik çözümler

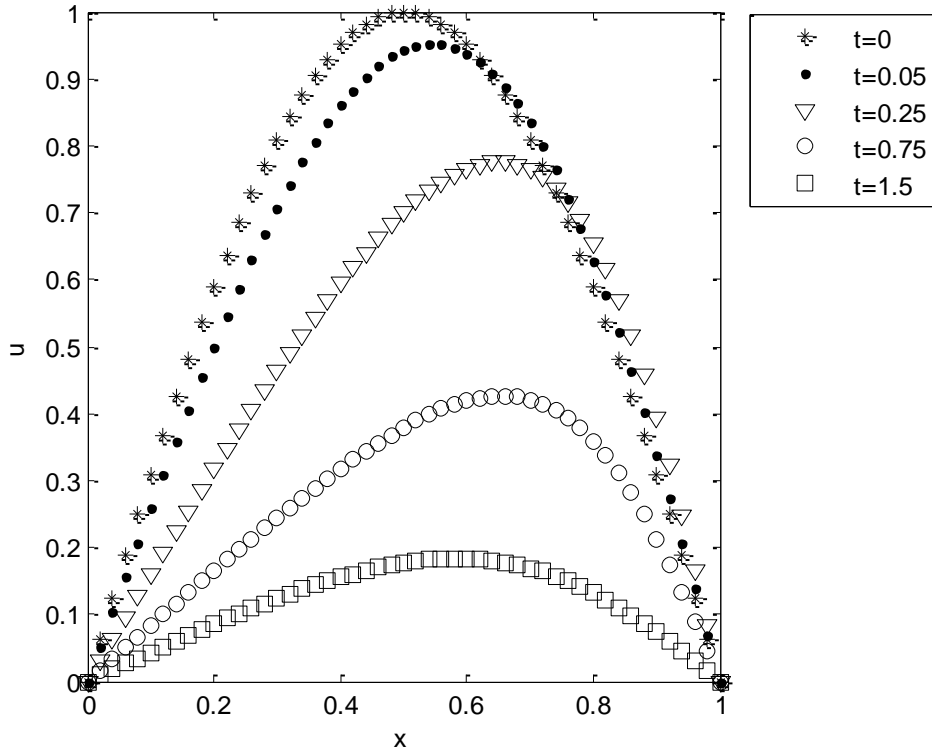
| t | 0.02 | | 0.04 | | 0.1 | | 0.22 | |
|------------|---------------|----------------|---------------|----------------|---------------|----------------|---------------|----------------|
| x | Nümerik çözüm | Analitik çözüm | Nümerik çözüm | Analitik çözüm | Nümerik çözüm | Analitik çözüm | Nümerik çözüm | Analitik çözüm |
| 0.2 | 0.4659 | 0.4661 | 0.3773 | 0.3776 | 0.2096 | 0.2098 | 0.0657 | 0.0659 |
| 0.4 | 0.7696 | 0.7699 | 0.6279 | 0.6283 | 0.3475 | 0.3479 | 0.1073 | 0.1075 |
| 0.6 | 0.7904 | 0.7904 | 0.6512 | 0.6514 | 0.3586 | 0.3590 | 0.1084 | 0.1087 |
| 0.8 | 0.4995 | 0.4994 | 0.4151 | 0.4151 | 0.2275 | 0.2278 | 0.0676 | 0.0678 |
| L_∞ | 3.5921E-004 | | 3.9345E-004 | | 4.2060E-004 | | 2.8206E-004 | |
| L_2 | 2.0247E-004 | | 2.3956E-004 | | 2.9737E-004 | | 1.9909E-004 | |



Şekil 5.12: PGKB yöntemi ile Problem 2 için $\nu = 1$, $\Delta x = 0.02$, $\Delta t = 0.01$ değerleri için çözümler

Tablo 5.10: PGKB yöntemi ile Problem 2 için $\nu = 0.1$, $\Delta x = 0.01$, $\Delta t = 0.05$ değerleri için farklı zamanlardaki nümerik ve analitik çözümler

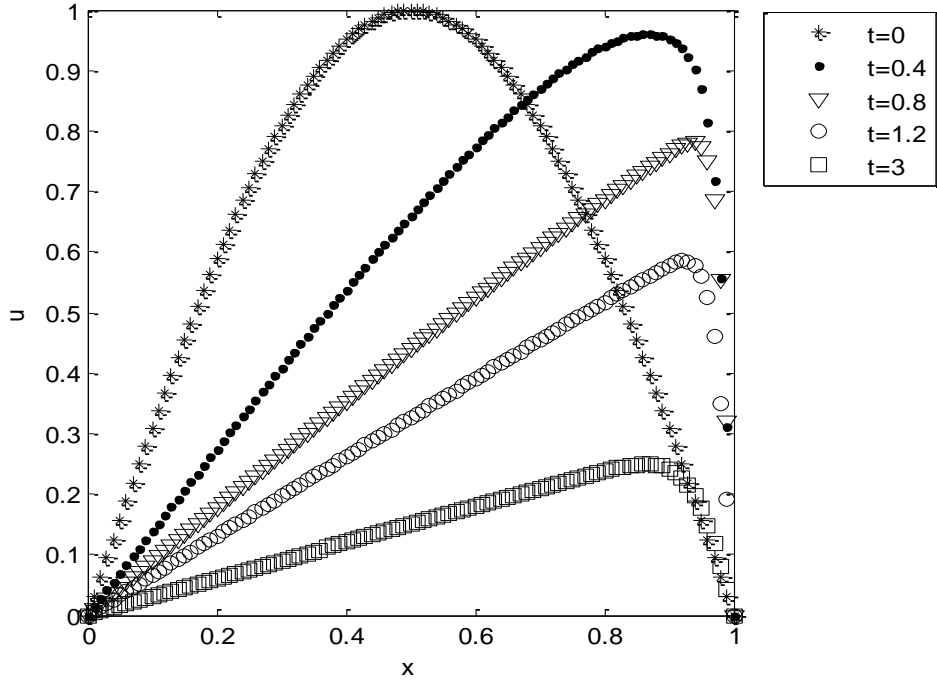
| t | 0.05 | | 0.25 | | 0.75 | | 1.5 | |
|------------|---------------|----------------|---------------|----------------|---------------|----------------|---------------|----------------|
| x | Nümerik çözüm | Analitik çözüm | Nümerik çözüm | Analitik çözüm | Nümerik çözüm | Analitik çözüm | Nümerik çözüm | Analitik çözüm |
| 0.1 | 0.2583 | 0.2587 | 0.1601 | 0.1603 | 0.08339 | 0.0834 | 0.04374 | 0.0437 |
| 0.2 | 0.4996 | 0.5001 | 0.3159 | 0.3162 | 0.16545 | 0.1655 | 0.08574 | 0.0858 |
| 0.3 | 0.7062 | 0.7065 | 0.4626 | 0.4630 | 0.24440 | 0.2445 | 0.12393 | 0.1239 |
| 0.4 | 0.8601 | 0.8599 | 0.5938 | 0.5941 | 0.31731 | 0.3174 | 0.15554 | 0.1556 |
| 0.5 | 0.9429 | 0.9424 | 0.7000 | 0.7000 | 0.37888 | 0.3789 | 0.17687 | 0.1769 |
| 0.6 | 0.9380 | 0.9374 | 0.7657 | 0.7653 | 0.41921 | 0.4192 | 0.18320 | 0.1833 |
| 0.7 | 0.8335 | 0.8334 | 0.7644 | 0.7637 | 0.42093 | 0.4209 | 0.16953 | 0.1696 |
| 0.8 | 0.6286 | 0.6290 | 0.6545 | 0.6537 | 0.35892 | 0.3590 | 0.13243 | 0.1325 |
| 0.9 | 0.3389 | 0.3394 | 0.3930 | 0.3926 | 0.21305 | 0.2131 | 0.07317 | 0.0732 |
| L_∞ | 5.9196E-004 | | 7.8079E-004 | | 8.0775E-005 | | 9.7565E-005 | |
| L_2 | 3.7414E-004 | | 4.2225E-004 | | 5.1389E-005 | | 5.1599E-005 | |



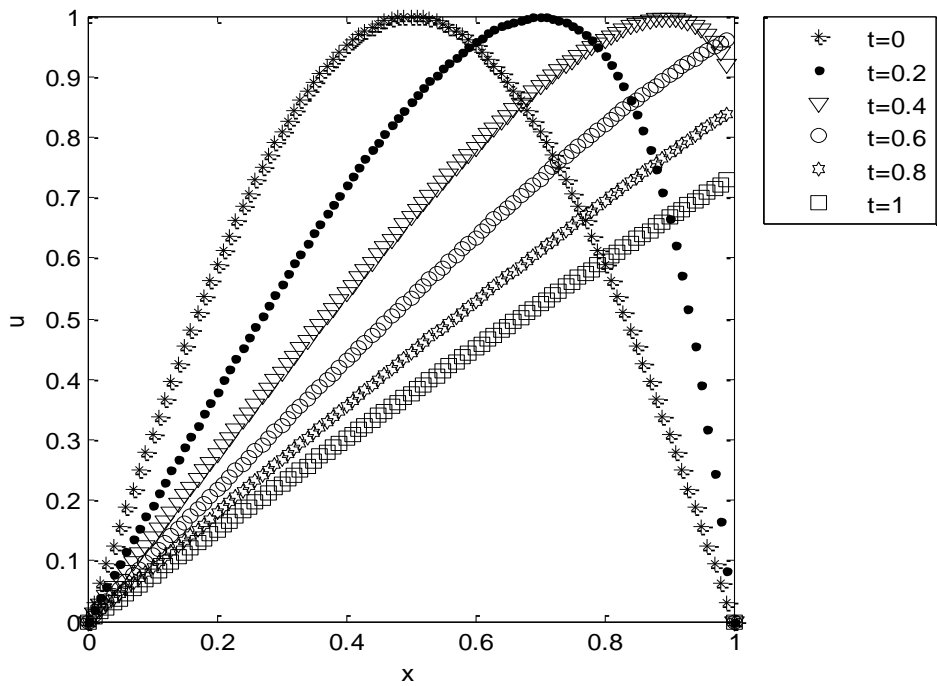
Şekil 5.13: PGKB yöntemi ile Problem 2 için $\nu = 0.1$, $\Delta x = 0.01$, $\Delta t = 0.05$ değerleri için nümerik çözümlerin farklı zamanlardaki davranışları

Tablo 5.11: PGKB yöntemi ile Problem 2 için $\nu = 0.01$, $\Delta x = 0.005$, $\Delta t = 0.005$ değerlerinde farklı zamanlardaki nümerik ve analitik çözümler

| t | 0.4 | | 0.8 | | 1.2 | | 3.0 | |
|------------|---------------|----------------|---------------|----------------|---------------|----------------|---------------|----------------|
| x | Nümerik çözüm | Analitik çözüm | Nümerik çözüm | Analitik çözüm | Nümerik çözüm | Analitik çözüm | Nümerik çözüm | Analitik çözüm |
| 0.2 | 0.27452 | 0.27452 | 0.177358 | 0.177358 | 0.1309201 | 0.1309201 | 0.06009 | 0.06009 |
| 0.4 | 0.53792 | 0.53792 | 0.352823 | 0.352823 | 0.2612813 | 0.2612812 | 0.12016 | 0.12016 |
| 0.6 | 0.77346 | 0.77345 | 0.524010 | 0.524008 | 0.3904389 | 0.3904385 | 0.18018 | 0.18018 |
| 0.8 | 0.94106 | 0.94100 | 0.687088 | 0.687083 | 0.5175298 | 0.5175280 | 0.23864 | 0.23863 |
| L_∞ | 0.1215 | | 0.0017 | | 8.4137E-004 | | 8.7299E-005 | |
| L_2 | 0.0171 | | 2.3177E-004 | | 1.2095E-004 | | 1.8471E-005 | |



Şekil 5.14: PGKB yöntemi ile Problem 2 için $\nu = 0.01$, $\Delta x = 0.005$, $\Delta t = 0.005$ değerlerinde nümerik çözümler



Şekil 5.15: PGKB yöntemi ile Problem 2 için $\nu = 0.001$, $\Delta x = 0.001$, $\Delta t = 0.001$ değerlerinde nümerik çözümler

$\nu = 0.001$ değeri için bilgisayarın sonuç vermesi çok uzun sürmüş ve maksimum hata normu istenilenden çok daha fazla elde edilmiştir. Ancak grafikte keskin inişler gözlemlendiği için kabul görmüştür (Şekil 5.15).

Tablo 5.12: Problem 2 için $\nu = 1$, $\Delta t = 0.00001$, $t = 0.1$ değerlerinde maksimum hata normları

| Δx | L_∞ | | | |
|------------|-------------|-------------|-------------|--|
| | <i>PGKB</i> | <i>PGLB</i> | <i>LG</i> | <i>EKKB Kutluay ve diğ. (2004)</i> |
| 0.1 | 0.00312 | 0.02150 | 0.00201 | 0.00417 |
| 0.05 | 7.8173E-04 | 0.00985 | 0.00151 | 0.00217 |
| 0.025 | 1.95465E-04 | 0.00474 | 9.19069E-04 | 0.00110 |
| 0.0125 | 4.88694E-05 | 0.00232 | 5.07405E-04 | 5.49995E-04 |
| 0.00625 | 1.22177E-05 | 0.00115 | 2.65828E-04 | 2.70000E-04 |

Tablo 5.12’ de dört yöntemin çok küçük zaman adımı ve farklı konum adımları için maksimum hataları karşılaştırılmıştır. En gerçekçi sonuçlar PGKB tarafından sağlanmıştır. Bu yöntemler arasında kullanılan LG yöntemine ilişkin formülasyon Eklerde verilmiştir.

Tablo 5.13: Problem 2 için $\nu = 1.0$, $\Delta x = 0.0125$, $\Delta t = 0.0001$ değerlerinde farklı zamanlardaki nümerik çözümlerin karşılaştırılması

| x | t | <i>PGKB</i> | <i>PGLB</i> | <i>LG</i> | <i>EKKB Kutluay ve diğ. (2004)</i> | <i>Analitik Çözüm</i> |
|------|-----|-------------|-------------|-----------|--|---------------------------|
| 0.25 | 0.4 | 0.01357 | 0.01340 | 0.01360 | 0.01359 | 0.01357 |
| | 0.6 | 0.00189 | 0.00186 | 0.00189 | 0.00189 | 0.00189 |
| | 0.8 | 0.00026 | 0.00026 | 0.00026 | 0.00026 | 0.00026 |
| | 1.0 | 0.00004 | 0.00004 | 0.00004 | 0.00004 | 0.00004 |
| | 3.0 | 0.00000 | 0.00000 | 0.00000 | 0.00000 | 0.00000 |
| 0.50 | 0.4 | 0.01923 | 0.01913 | 0.01928 | 0.01927 | 0.01924 |
| | 0.6 | 0.00267 | 0.00266 | 0.00268 | 0.00268 | 0.00267 |
| | 0.8 | 0.00037 | 0.00037 | 0.00037 | 0.00037 | 0.00037 |
| | 1.0 | 0.00005 | 0.00005 | 0.00005 | 0.00005 | 0.00005 |
| | 3.0 | 0.00000 | 0.00000 | 0.00000 | 0.00000 | 0.00000 |
| 0.75 | 0.4 | 0.01362 | 0.01366 | 0.01366 | 0.01365 | 0.01363 |
| | 0.6 | 0.00189 | 0.00189 | 0.00189 | 0.00189 | 0.00189 |
| | 0.8 | 0.00026 | 0.00026 | 0.00026 | 0.00026 | 0.00026 |
| | 1.0 | 0.00004 | 0.00004 | 0.00004 | 0.00004 | 0.00004 |
| | 3.0 | 0.00000 | 0.00000 | 0.00000 | 0.00000 | 0.00000 |

Tablo 5.14: Problem 2 için $\nu = 0.1$, $\Delta x = 0.0125$, $\Delta t = 0.0001$ değerlerinde farklı zamanlardaki nümerik çözümlerin karşılaştırılması

| x | t | <i>PGKB</i> | <i>PGLB</i> | <i>LG</i> | <i>EKKB Kutluay ve diğ. (2004)</i> | <i>Analitik Çözüm</i> |
|------|-----|-------------|-------------|-----------|--|---------------------------|
| 0.25 | 0.4 | 0.30890 | 0.30757 | 0.31219 | 0.31215 | 0.30889 |
| | 0.6 | 0.24075 | 0.23933 | 0.24362 | 0.24360 | 0.24074 |
| | 0.8 | 0.19569 | 0.19407 | 0.19817 | 0.19815 | 0.19568 |
| | 1.0 | 0.16258 | 0.16073 | 0.16474 | 0.16473 | 0.16256 |
| | 3.0 | 0.02720 | 0.02629 | 0.02771 | 0.02771 | 0.02720 |
| 0.50 | 0.4 | 0.56965 | 0.56644 | 0.57300 | 0.57293 | 0.56963 |
| | 0.6 | 0.44723 | 0.44329 | 0.45094 | 0.45088 | 0.44721 |
| | 0.8 | 0.35925 | 0.35488 | 0.36291 | 0.36286 | 0.35924 |
| | 1.0 | 0.29192 | 0.28745 | 0.29536 | 0.29532 | 0.29192 |
| | 3.0 | 0.04019 | 0.03907 | 0.04096 | 0.04097 | 0.04021 |
| 0.75 | 0.4 | 0.62538 | 0.62058 | 0.63046 | 0.63038 | 0.62544 |
| | 0.6 | 0.48715 | 0.48099 | 0.49274 | 0.49268 | 0.48721 |
| | 0.8 | 0.37385 | 0.36803 | 0.37916 | 0.37912 | 0.37392 |
| | 1.0 | 0.28741 | 0.28246 | 0.29206 | 0.29204 | 0.28747 |
| | 3.0 | 0.02976 | 0.02913 | 0.03037 | 0.03038 | 0.02977 |

Tablo 5.15: Problem 2 için $\nu = 0.01$, $\Delta x = 0.0125$, $\Delta t = 0.0001$ değerlerinde farklı zamanlardaki nümerik çözümlerin karşılaştırılması

| x | t | <i>PGKB</i> | <i>PGLB</i> | <i>LG</i> | <i>EKKB Kutluay ve diğ. (2004)</i> | <i>Analitik Çözüm</i> |
|------|-----|-------------|-------------|-----------|--|---------------------------|
| 0.25 | 0.4 | 0.34192 | 0.34176 | 0.34824 | 0.34819 | 0.34191 |
| | 0.6 | 0.26897 | 0.26884 | 0.27541 | 0.27536 | 0.26896 |
| | 0.8 | 0.22148 | 0.22139 | 0.22757 | 0.22752 | 0.22148 |
| | 1.0 | 0.18819 | 0.18812 | 0.19378 | 0.19375 | 0.18819 |
| | 3.0 | 0.07511 | 0.07510 | 0.07754 | 0.07754 | 0.07511 |
| 0.50 | 0.4 | 0.66071 | 0.66045 | 0.66545 | 0.66543 | 0.66071 |
| | 0.6 | 0.52942 | 0.52922 | 0.53526 | 0.53525 | 0.52942 |
| | 0.8 | 0.43914 | 0.43899 | 0.44527 | 0.44526 | 0.43914 |
| | 1.0 | 0.37442 | 0.37430 | 0.38048 | 0.38047 | 0.37442 |
| | 3.0 | 0.15018 | 0.15015 | 0.15362 | 0.15362 | 0.15018 |
| 0.75 | 0.4 | 0.91027 | 0.90958 | 0.91203 | 0.91201 | 0.91026 |
| | 0.6 | 0.76725 | 0.76686 | 0.77132 | 0.77132 | 0.76724 |
| | 0.8 | 0.64740 | 0.64715 | 0.65254 | 0.65254 | 0.64740 |
| | 1.0 | 0.55605 | 0.55587 | 0.56157 | 0.56157 | 0.55605 |
| | 3.0 | 0.22483 | 0.22417 | 0.22877 | 0.22874 | 0.22481 |

Farklı viskozite değerlerine karşılık, yöntemlerin ürettiği nümerik çözümler Tablo 5.13-5.15’de yerini almıştır. Bu tablolarda, farklı maksimum zamanlarda bazı düğüm noktalarındaki çözümler mevcuttur. Bu çözümlerden elde edilen maksimum hatalara Tablo 5.16’da yer verilmiştir.

Tablo 5.16: Problem 2 için maksimum hata normları

| $\nu = 1.0, \Delta x = 0.0125, \Delta t = 0.0001$ | | | | | |
|--|------------|------------|------------|------------|------------|
| t | 0.4 | 0.6 | 0.8 | 1.0 | 3.0 |
| KBPG | 9.7241E-06 | 2.0286E-06 | 3.7594E-07 | 6.5295E-08 | 5.2394E-16 |
| LBPG | 1.7803E-04 | 2.6455E-05 | 3.8840E-06 | 5.6836E-07 | 2.3319E-15 |
| LG | 3.9963E-05 | 5.0106E-06 | 6.0433E-07 | 7.0891E-08 | 1.6051E-16 |
| $\nu = 0.1, \Delta x = 0.0125, \Delta t = 0.0001$ | | | | | |
| KBPG | 1.7296E-04 | 1.4913E-04 | 1.0871E-04 | 7.7874E-05 | 1.0643E-05 |
| LBPG | 0.00511 | 0.00643 | 0.00627 | 0.00562 | 0.00115 |
| LG | 0.00730 | 0.00644 | 0.00547 | 0.00460 | 7.6346E-04 |
| $\nu = 0.01, \Delta x = 0.0125, \Delta t = 0.0001$ | | | | | |
| KBPG | 0.10721 | 0.01610 | 0.01152 | 0.00758 | 5.3855E-04 |
| LBPG | 0.10028 | 0.08780 | 0.07226 | 0.05466 | 0.01095 |
| LG | 0.21554 | 0.09642 | 0.07437 | 0.05552 | 0.01206 |

Problem 3 (Gülbahar, 2007): Bir kutudaki türbülansın bozulması problemi temsil eden Burgers denkleminin analitik çözümü

$$u(x,t) = \frac{\frac{x}{t}}{1 + \sqrt{\frac{t}{t_0}} \exp\left(\frac{x^2}{4vt}\right)}, \quad t \geq 1, a \leq x \leq b$$

biçimdedir ve burada $t_0 = \exp\left(\frac{1}{8\nu}\right)$ olarak alınmıştır. Sınır şartları

$$u(a,t) = u(b,t) = 0, \quad t > 1$$

ve başlangıç şartı

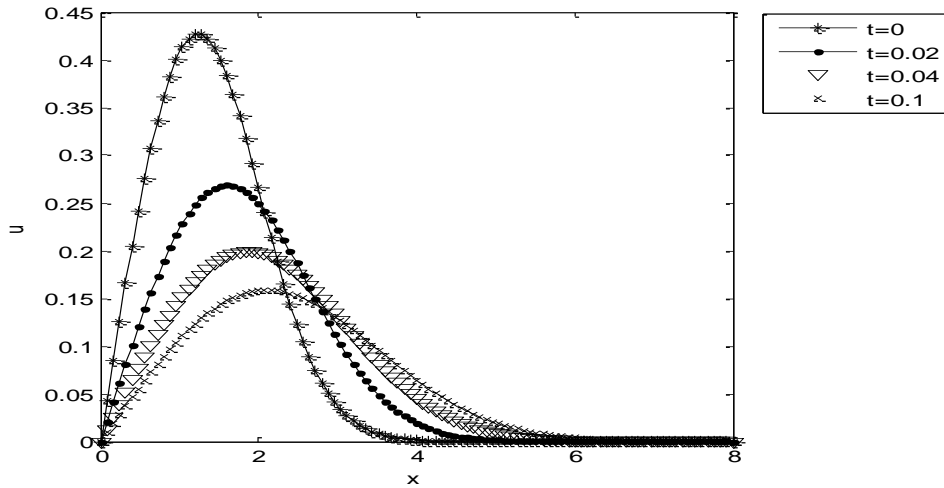
$$u(x,1) = \frac{x}{1 + \exp\left(\frac{1}{4\nu}(x^2 - 0.25)\right)}, \quad a \leq x \leq b$$

kullanılmıştır. Bu başlangıç şartı, kapalı formda ifade edilen analitik çözüm sonucu için çok kullanışlıdır. Bu sayede, her v değeri için L_2 ve L_∞ hata normları kolaylıkla hesaplanabilir.

Tablo 5.17: PGLB yöntemi ile Problem 3 için $v = 0.5$, $\Delta x = 0.08$, $\Delta t = 0.05$, $[a, b] = [0, 8]$ değerlerinde farklı zamanlardaki nümerik ve analitik çözümler

| t | 1.0 | | 1.75 | | 2.5 | | 3.25 | |
|------------|---------------|----------------|---------------|----------------|---------------|----------------|---------------|----------------|
| x | Nümerik çözüm | Analitik çözüm | Nümerik çözüm | Analitik çözüm | Nümerik çözüm | Analitik çözüm | Nümerik çözüm | Analitik çözüm |
| 0.8 | 0.3611 | 0.3611 | 0.18833 | 0.19034 | 0.12262 | 0.12375 | 0.08877 | 0.08933 |
| 1.6 | 0.3833 | 0.3833 | 0.26890 | 0.26687 | 0.19352 | 0.19229 | 0.14752 | 0.14657 |
| 2.4 | 0.1435 | 0.1435 | 0.19911 | 0.19445 | 0.18140 | 0.17727 | 0.15515 | 0.15197 |
| 3.2 | 0.0215 | 0.0215 | 0.08105 | 0.08031 | 0.11132 | 0.10832 | 0.11674 | 0.11333 |
| 4.0 | 0.0015 | 0.0015 | 0.01893 | 0.02007 | 0.04541 | 0.04541 | 0.06398 | 0.06263 |
| 4.8 | 0.0000 | 0.0000 | 0.00271 | 0.00325 | 0.01270 | 0.01362 | 0.02595 | 0.02633 |
| 5.6 | 0.0000 | 0.0000 | 0.00025 | 0.00035 | 0.00251 | 0.00303 | 0.00796 | 0.00865 |
| 6.4 | 0.0000 | 0.0000 | 0.00001 | 0.00003 | 0.00036 | 0.00051 | 0.00188 | 0.00227 |
| 7.2 | 0.0000 | 0.0000 | 0.00000 | 0.00000 | 0.00004 | 0.00006 | 0.00034 | 0.00048 |
| L_∞ | 1.1480E-013 | | 0.0048 | | 0.0043 | | 0.0037 | |
| L_2 | 3.2471E-014 | | 0.0051 | | 0.0049 | | 0.0045 | |

Tablo 5.17 ile Tablo 5.22'deki sonuçlar incelendiğinde PGKB yönteminin PGLB yöntemine göre daha hassas sonuçlar ürettiği görülmektedir.



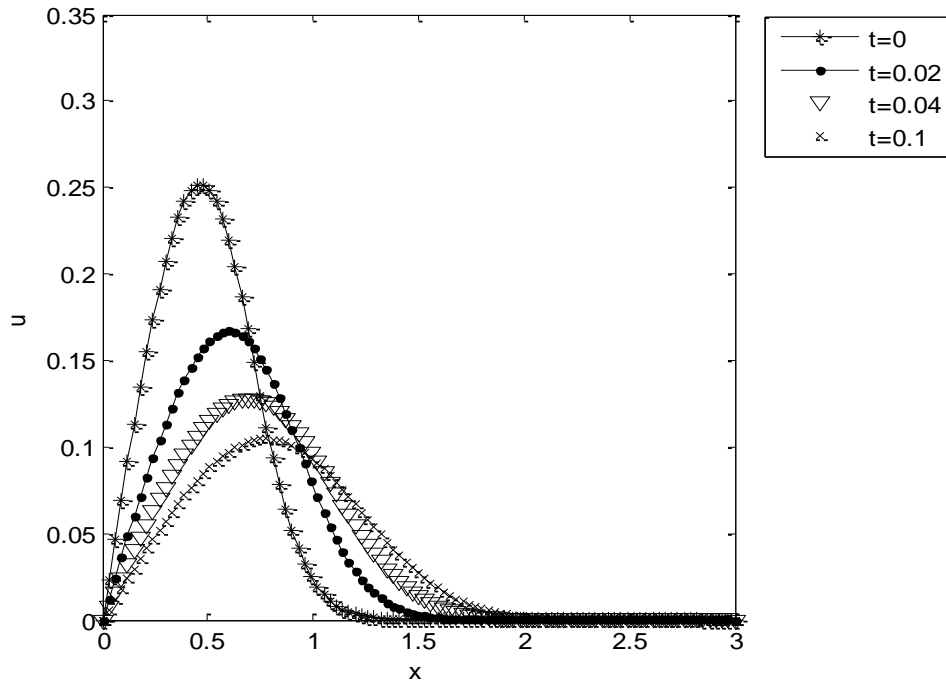
Şekil 5.16: PGLB yöntemi ile Problem 3 için $v = 0.5$, $\Delta x = 0.08$, $\Delta t = 0.05$, $[a, b] = [0, 8]$ değerlerinde nümerik çözümler

Zaman ilerledikçe dalga boyunda azalma ve daha geniş alana yayılma gözlenir (Şekil 5.16-5.20).

Tablo 5.18: PGLB yöntemi ile Problem 3 için $\nu = 0.05$, $\Delta x = 0.03$, $\Delta t = 0.05$, $[a, b] = [0, 3]$ değerlerinde farklı zamanlardaki nümerik ve analitik çözümler

| t | 1.0 | | 1.75 | | 2.5 | | 3.25 | |
|------------|---------------|----------------|---------------|----------------|---------------|----------------|---------------|----------------|
| x | Nümerik çözüm | Analitik çözüm | Nümerik çözüm | Analitik çözüm | Nümerik çözüm | Analitik çözüm | Nümerik çözüm | Analitik çözüm |
| 0.3 | 0.20699 | 0.20699 | 0.11353 | 0.11504 | 0.07668 | 0.07780 | 0.05717 | 0.05794 |
| 0.6 | 0.21952 | 0.21952 | 0.16698 | 0.16643 | 0.12427 | 0.12431 | 0.09708 | 0.09723 |
| 0.9 | 0.05159 | 0.05159 | 0.10968 | 0.10637 | 0.11223 | 0.10945 | 0.10091 | 0.09905 |
| 1.2 | 0.00312 | 0.00312 | 0.02787 | 0.02835 | 0.05454 | 0.05292 | 0.06670 | 0.06440 |
| 1.5 | 0.00007 | 0.00007 | 0.00301 | 0.00364 | 0.01371 | 0.01436 | 0.02672 | 0.02644 |
| 1.8 | 0.00000 | 0.00000 | 0.00016 | 0.00026 | 0.00195 | 0.00243 | 0.00667 | 0.00724 |
| 2.1 | 0.00000 | 0.00000 | 0.00000 | 0.00001 | 0.00017 | 0.00027 | 0.00110 | 0.00141 |
| 2.4 | 0.00000 | 0.00000 | 0.00000 | 0.00000 | 0.00001 | 0.00002 | 0.00012 | 0.00020 |
| 2.7 | 0.00000 | 0.00000 | 0.00000 | 0.00000 | 0.00000 | 0.00000 | 0.00001 | 0.00002 |
| L_∞ | 5.5511E-017 | | 0.0034 | | 0.0030 | | 0.0026 | |
| L_2 | 1.3456E-017 | | 0.0020 | | 0.0019 | | 0.0017 | |

Tablo 5.18-5.23 ile Tablo 5.17-5.22' deki sonuçlar kıyaslandığında viskozitenin küçülmesinin yanı sıra konum adımının ve üzerinde çalışılan bölgenin de küçültülmesi hata miktarlarının azalması sonucunu vermiştir.

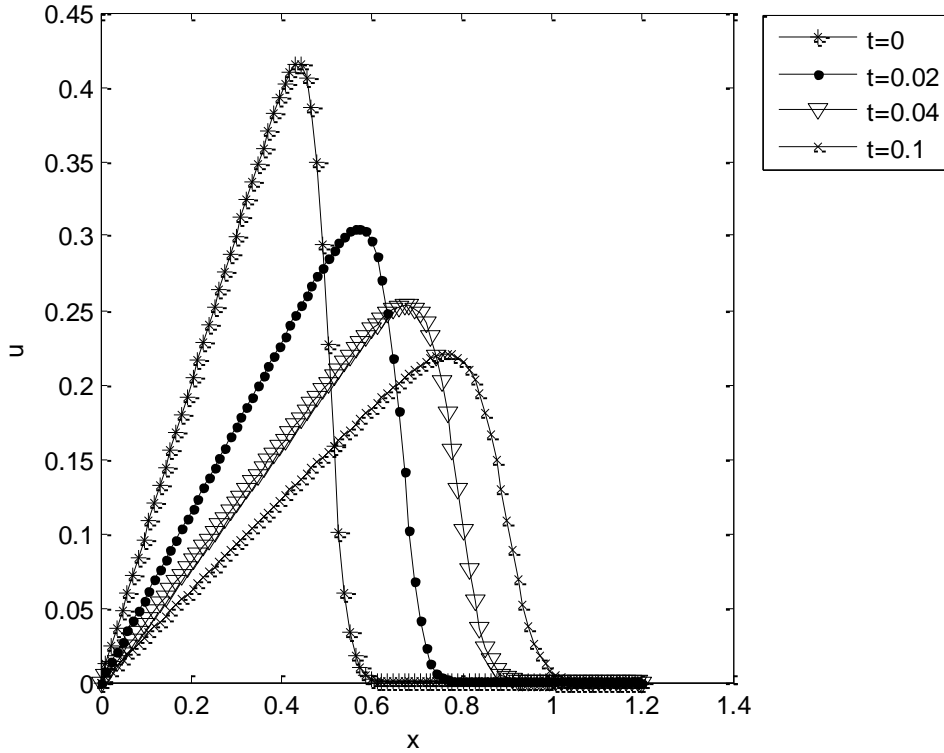


Şekil 5.17: PGLB yöntemi ile Problem 3 için $\nu = 0.05$, $\Delta x = 0.03$, $\Delta t = 0.05$, $[a, b] = [0, 3]$ değerlerinde nümerik çözümlerin davranışları

Tablo 5.19: PGLB yöntemi ile Problem 3 için $\nu = 0.005$, $\Delta x = 0.012$, $\Delta t = 0.05$, $[a, b] = [0, 1.2]$ değerlerinde farklı zamanlardaki nümerik ve analitik çözümler

| t | 1.0 | | 1.75 | | 2.5 | | 3.25 | |
|------------|---------------|----------------|---------------|----------------|---------------|----------------|---------------|----------------|
| x | Nümerik çözüm | Analitik çözüm | Nümerik çözüm | Analitik çözüm | Nümerik çözüm | Analitik çözüm | Nümerik çözüm | Analitik çözüm |
| 0.12 | 0.12000 | 0.12000 | 0.06857 | 0.06857 | 0.04800 | 0.04800 | 0.03692 | 0.03692 |
| 0.24 | 0.23998 | 0.23998 | 0.13714 | 0.13714 | 0.09600 | 0.09600 | 0.07384 | 0.07384 |
| 0.36 | 0.35913 | 0.35913 | 0.20562 | 0.20568 | 0.14397 | 0.14399 | 0.11075 | 0.11076 |
| 0.48 | 0.34901 | 0.34901 | 0.27243 | 0.27331 | 0.19173 | 0.19189 | 0.14760 | 0.14766 |
| 0.60 | 0.00244 | 0.00244 | 0.29694 | 0.29957 | 0.23688 | 0.23812 | 0.18398 | 0.18430 |
| 0.72 | 0.00000 | 0.00000 | 0.02327 | 0.02869 | 0.24133 | 0.24252 | 0.21561 | 0.21729 |
| 0.84 | 0.00000 | 0.00000 | 0.00002 | 0.00017 | 0.03647 | 0.03764 | 0.19356 | 0.19172 |
| 0.96 | 0.00000 | 0.00000 | 0.00000 | 0.00000 | 0.00015 | 0.00064 | 0.02631 | 0.02771 |
| 1.08 | 0.00000 | 0.00000 | 0.00000 | 0.00000 | 0.00000 | 0.00001 | 0.00027 | 0.00079 |
| L_∞ | 1.1102E-016 | | 0.0145 | | 0.0101 | | 0.0079 | |
| L_2 | 1.4734E-017 | | 0.0033 | | 0.0025 | | 0.0021 | |

Üzerinde çalışılan bölgenin daraltılması, viskozite değerinin iyice küçültülmesi durumunda hata miktarını azaltmaya yetmemiştir (Tablo 5.19).

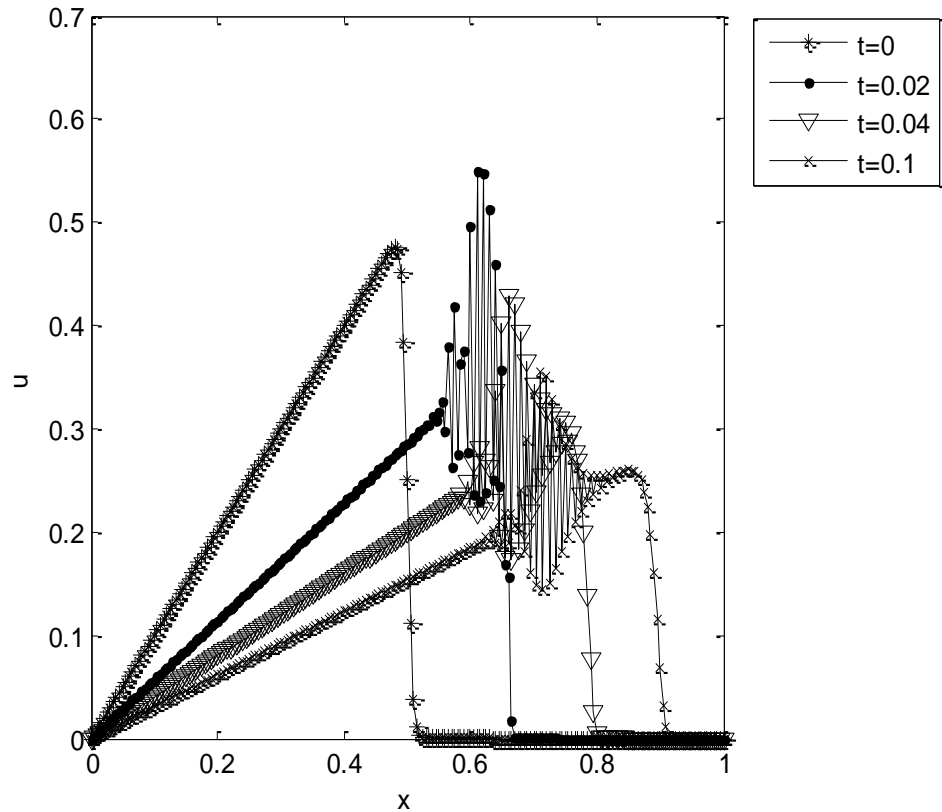


Şekil 5.18: PGLB yöntemi ile Problem 3 için $\nu = 0.005$, $\Delta x = 0.012$, $\Delta t = 0.05$, $[a, b] = [0, 1.2]$ değerlerinde nümerik çözümlerin davranışları

Viskozite değeri küçüldükçe dalgalarda sağa doğru ilerlemenin yanında keskin inişler gözlenmektedir (Şekil 5.18-5.22).

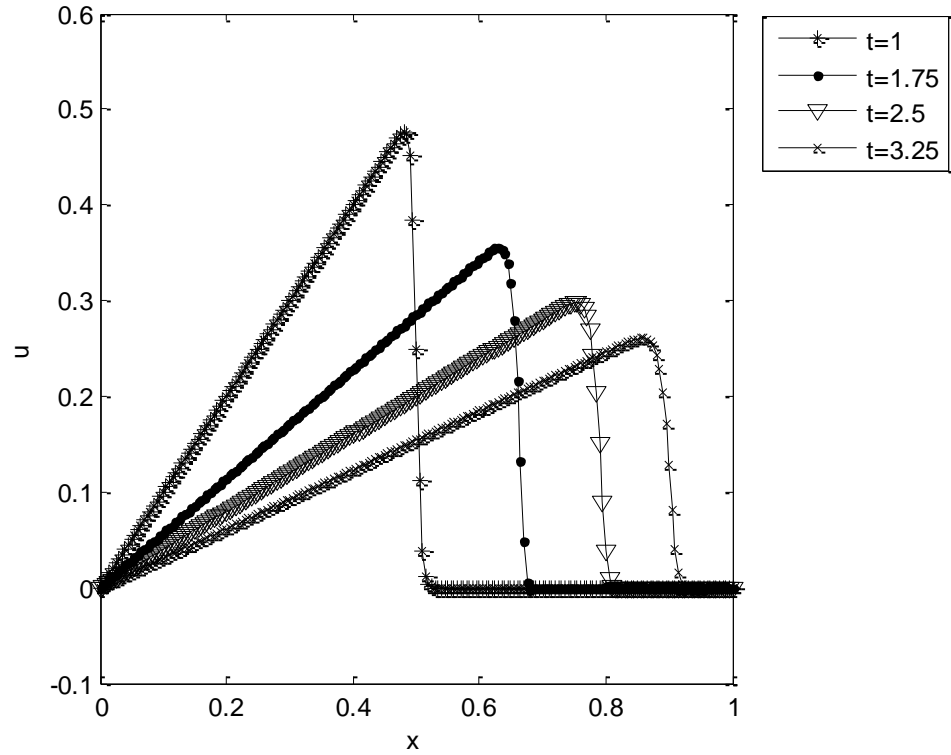
Tablo 5.20: PGLB yöntemi ile Problem 3 için $\nu = 0.001$, $\Delta x = 0.005$, $\Delta t = 0.025$, $[a, b] = [0, 1]$ değerlerindeki farklı zamanlardaki nümerik ve analitik çözümler

| t | 1.0 | | 1.75 | | 2.5 | | 3.25 | |
|------------|---------------|----------------|---------------|----------------|---------------|----------------|---------------|----------------|
| x | Nümerik çözüm | Analitik çözüm | Nümerik çözüm | Analitik çözüm | Nümerik çözüm | Analitik çözüm | Nümerik çözüm | Analitik çözüm |
| 0.1 | 0.1000 | 0.1000 | 0.0571 | 0.0571 | 0.0400 | 0.0400 | 0.0308 | 0.0308 |
| 0.2 | 0.2000 | 0.2000 | 0.1143 | 0.1143 | 0.0800 | 0.0800 | 0.0615 | 0.0615 |
| 0.3 | 0.3000 | 0.3000 | 0.1714 | 0.1714 | 0.1200 | 0.1200 | 0.0923 | 0.0923 |
| 0.4 | 0.4000 | 0.4000 | 0.2286 | 0.2286 | 0.1600 | 0.1600 | 0.1231 | 0.1231 |
| 0.5 | 0.2500 | 0.2500 | 0.2857 | 0.2857 | 0.2000 | 0.2000 | 0.1538 | 0.1539 |
| 0.6 | 0.0000 | 0.0000 | 0.4954 | 0.3429 | 0.2253 | 0.2400 | 0.1847 | 0.1846 |
| 0.7 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0001 | 0.3435 | 0.2800 | 0.3342 | 0.2154 |
| 0.8 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0055 | 0.0396 | 0.2543 | 0.2462 |
| 0.9 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0679 | 0.1113 |
| L_∞ | 3.3307E-016 | | 0.2009 | | 0.1654 | | 0.1373 | |
| L_2 | 3.3842E-017 | | 0.0350 | | 0.0288 | | 0.0244 | |



Şekil 5.19: PGLB yöntemi ile Problem 3 için $\nu = 0.001$, $\Delta x = 0.005$, $\Delta t = 0.025$, $[a, b] = [0, 1]$ değerlerindeki nümerik çözümler

Çok küçük viskozite değeri için PGKB yönteminde kullanılan zaman ve konum adımı seçilmiş ama bu durum PGLB yönteminin kötü sonuçlar vermesine sebep olmuştur (Tablo 5.20). Ayrıca Şekil 5.19 incelendiğinde düğüm noktalarının ikinci yarısında osilasyonlar meydana gelmiştir. Bu sıkıntıyı gidermek için zaman adımı biraz daha küçültülmüştür (Şekil 5.20) ve bu sayede $L_\infty = 0.01617$ ve $L_2 = 0.00195$ hata değerleri elde edilmiştir.



Şekil 5.20: PGLB yöntemi ile Problem 3 için $v = 0.001$, $\Delta x = 0.005$, $\Delta t = 0.01$, $[a,b] = [0,1]$ değerlerinde nümerik çözümlerin davranışları

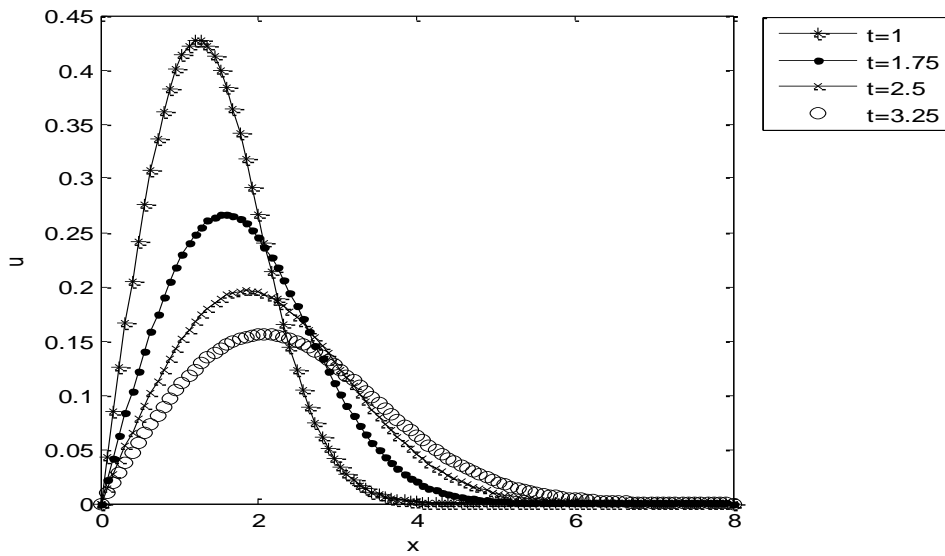
Tablo 5.21: PGKB yöntemi ile Problem 3 için farklı v ve b değerlerinde $t = 3.25$ zamanında hata normları

| v | b | Δx | Δt | L_∞ | L_2 |
|-------|-----|------------|------------|------------|---------|
| 0.5 | 8 | 0.08 | 0.05 | 0.00008 | 0.0001 |
| 0.05 | 3 | 0.03 | 0.05 | 0.00004 | 0.00003 |
| 0.005 | 1.2 | 0.012 | 0.05 | 0.00020 | 0.00009 |
| 0.001 | 1.0 | 0.005 | 0.025 | 0.00120 | 0.00020 |

Tablo 5.21’de dikkate alınan bölge uygun ölçüde alınır ve bunun yanında uzay ve zaman adımı ideal ölçüde seçilirse küçük viskozite değerleri için, hata normlarından da anlaşılacağı üzere, yöntem gerçeğe yakın sonuçlar vermiş olur.

Tablo 5.22: PGKB yöntemi ile Problem 3 için $\nu = 0.5$, $\Delta x = 0.08$, $\Delta t = 0.05$, $[a, b] = [0, 8]$ değerlerinde farklı zamanlardaki nümerik ve analitik çözümler

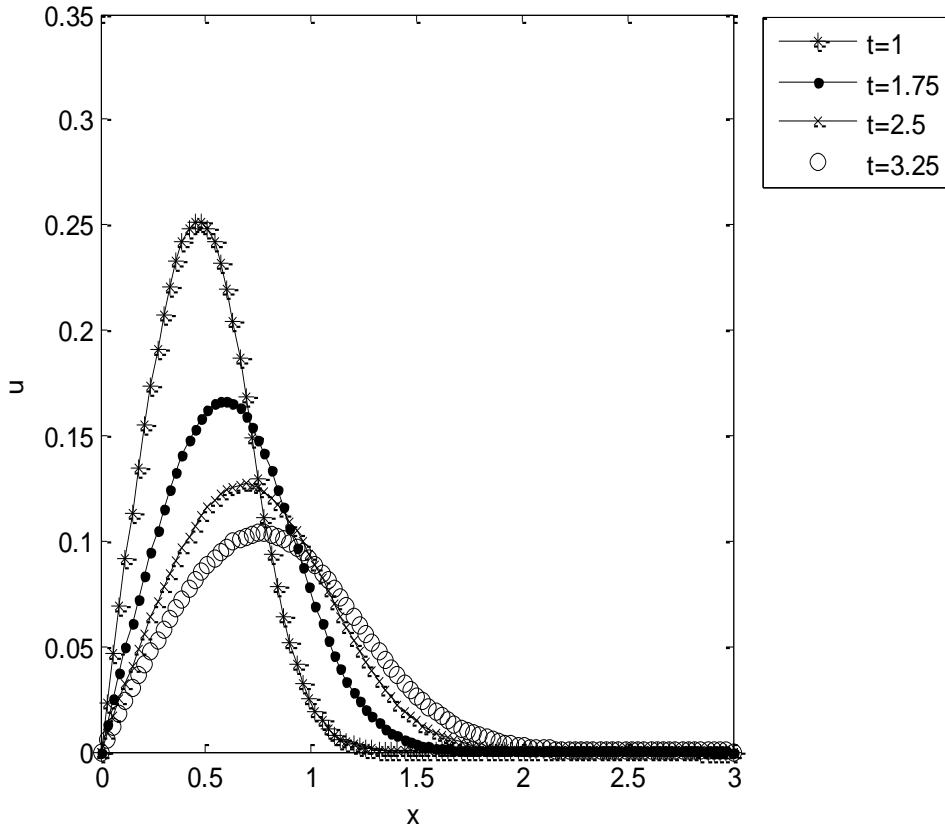
| t | 1.0 | | 1.75 | | 2.5 | | 3.25 | |
|------------|---------------|----------------|---------------|----------------|---------------|----------------|---------------|----------------|
| x | Nümerik çözüm | Analitik çözüm | Nümerik çözüm | Analitik çözüm | Nümerik çözüm | Analitik çözüm | Nümerik çözüm | Analitik çözüm |
| 0.8 | 0.3611 | 0.3611 | 0.19024 | 0.19034 | 0.12366 | 0.12375 | 0.08928 | 0.08933 |
| 1.6 | 0.3833 | 0.3833 | 0.26676 | 0.26687 | 0.19220 | 0.19229 | 0.14650 | 0.14657 |
| 2.4 | 0.1435 | 0.1435 | 0.19451 | 0.194451 | 0.17725 | 0.17727 | 0.15193 | 0.15197 |
| 3.2 | 0.0215 | 0.0215 | 0.08037 | 0.080307 | 0.10837 | 0.10832 | 0.11334 | 0.11333 |
| 4.0 | 0.0015 | 0.0015 | 0.02006 | 0.02007 | 0.04544 | 0.04541 | 0.06267 | 0.06263 |
| 4.8 | 0.0000 | 0.0000 | 0.00324 | 0.00325 | 0.01362 | 0.01362 | 0.02634 | 0.02633 |
| 5.6 | 0.0000 | 0.0000 | 0.00035 | 0.00035 | 0.00302 | 0.00303 | 0.00865 | 0.00865 |
| 6.4 | 0.0000 | 0.0000 | 0.00003 | 0.00003 | 0.00050 | 0.00051 | 0.00226 | 0.00227 |
| 7.2 | 0.0000 | 0.0000 | 0.00000 | 0.00000 | 0.00006 | 0.00006 | 0.00046 | 0.00048 |
| L_∞ | 1.1480E-013 | | 1.2702E-004 | | 9.6373E-005 | | 8.1923E-005 | |
| L_2 | 3.2471E-014 | | 1.4947E-004 | | 1.1962E-004 | | 1.0170E-004 | |



Şekil 5.21: PGKB yöntemi ile Problem 3 için $\nu = 0.5$, $\Delta x = 0.08$, $\Delta t = 0.05$, $[a, b] = [0, 8]$ değerlerinde nümerik çözümlerin davranışları

Tablo 5.23: PGKB yöntemi ile Problem 3 için $\nu = 0.05$, $\Delta x = 0.03$, $\Delta t = 0.05$, $[a, b] = [0, 3]$ değerlerinde farklı zamanlardaki nümerik ve analitik çözümler

| t | 1.0 | | 1.75 | | 2.5 | | 3.25 | |
|------------|---------------|----------------|---------------|----------------|---------------|----------------|---------------|----------------|
| x | Nümerik çözüm | Analitik çözüm | Nümerik çözüm | Analitik çözüm | Nümerik çözüm | Analitik çözüm | Nümerik çözüm | Analitik çözüm |
| 0.3 | 0.20699 | 0.20699 | 0.11502 | 0.11504 | 0.07778 | 0.07780 | 0.05792 | 0.05794 |
| 0.6 | 0.21952 | 0.21952 | 0.16635 | 0.16643 | 0.12425 | 0.12431 | 0.09719 | 0.09723 |
| 0.9 | 0.05159 | 0.05159 | 0.10642 | 0.10637 | 0.10944 | 0.10945 | 0.09902 | 0.09905 |
| 1.2 | 0.00312 | 0.00312 | 0.02836 | 0.02835 | 0.05296 | 0.05292 | 0.06442 | 0.06440 |
| 1.5 | 0.00007 | 0.00007 | 0.00362 | 0.00364 | 0.01436 | 0.01436 | 0.02646 | 0.02644 |
| 1.8 | 0.00000 | 0.00000 | 0.00026 | 0.00026 | 0.00242 | 0.00243 | 0.00724 | 0.00724 |
| 2.1 | 0.00000 | 0.00000 | 0.00001 | 0.00001 | 0.00027 | 0.00027 | 0.00141 | 0.00141 |
| 2.4 | 0.00000 | 0.00000 | 0.00000 | 0.00000 | 0.00002 | 0.00002 | 0.00020 | 0.00020 |
| 2.7 | 0.00000 | 0.00000 | 0.00000 | 0.00000 | 0.00000 | 0.00000 | 0.00002 | 0.00002 |
| L_∞ | 5.5511E-017 | | 7.4224E-005 | | 5.6461E-005 | | 4.3798E-005 | |
| L_2 | 1.3456E-017 | | 5.1138E-005 | | 4.1679E-005 | | 3.3849E-005 | |

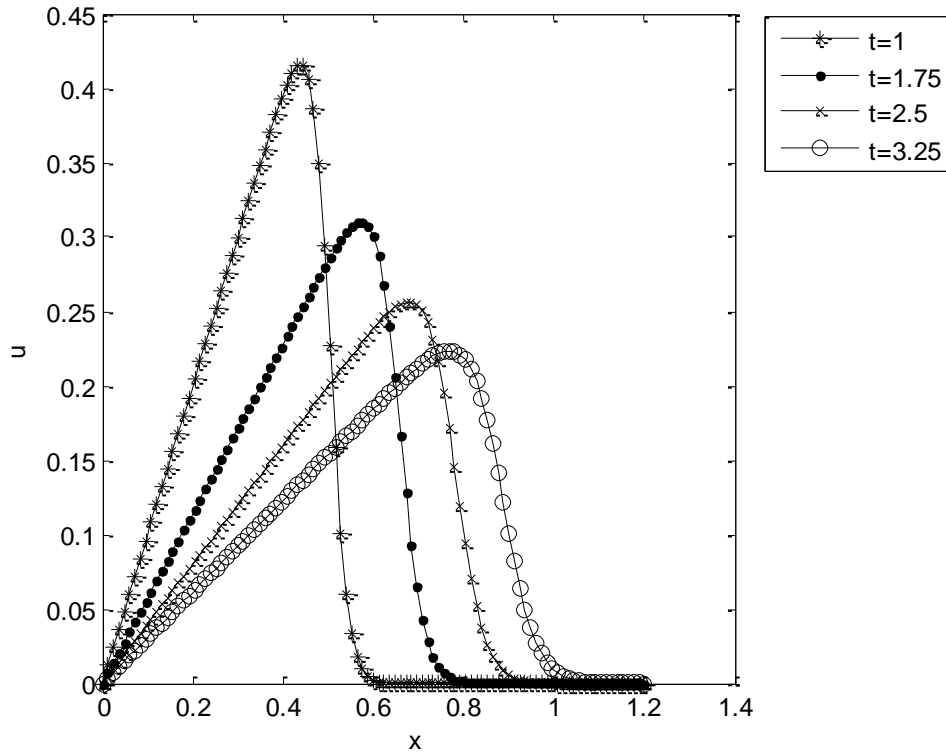


Şekil 5.22: PGKB yöntemi ile Problem 3 için $\nu = 0.05$, $\Delta x = 0.03$, $\Delta t = 0.05$, $[a, b] = [0, 3]$ değerlerinde nümerik çözümlerin davranışları

Tablo 5.24: PGKB yöntemi ile Problem 3 için $\nu = 0.005$, $\Delta x = 0.012$, $\Delta t = 0.05$, $[a, b] = [0, 1.2]$ değerlerinde farklı zamanlardaki nümerik ve analitik çözümler

| t | 1.0 | | 1.75 | | 2.5 | | 3.25 | |
|------------|---------------|----------------|---------------|----------------|---------------|----------------|---------------|----------------|
| x | Nümerik çözüm | Analitik çözüm | Nümerik çözüm | Analitik çözüm | Nümerik çözüm | Analitik çözüm | Nümerik çözüm | Analitik çözüm |
| 0.12 | 0.12000 | 0.12000 | 0.06857 | 0.06857 | 0.04800 | 0.04800 | 0.03692 | 0.03692 |
| 0.24 | 0.23998 | 0.23998 | 0.13714 | 0.13714 | 0.09600 | 0.09600 | 0.07384 | 0.07384 |
| 0.36 | 0.35913 | 0.35913 | 0.20568 | 0.20568 | 0.14399 | 0.14399 | 0.11076 | 0.11076 |
| 0.48 | 0.34901 | 0.34901 | 0.27338 | 0.27331 | 0.19190 | 0.19189 | 0.14766 | 0.14766 |
| 0.60 | 0.00244 | 0.00244 | 0.30036 | 0.29957 | 0.23822 | 0.23812 | 0.18432 | 0.18430 |
| 0.72 | 0.00000 | 0.00000 | 0.02805 | 0.02869 | 0.24284 | 0.24252 | 0.21741 | 0.21729 |
| 0.84 | 0.00000 | 0.00000 | 0.00016 | 0.00017 | 0.03730 | 0.03764 | 0.19176 | 0.19172 |
| 0.96 | 0.00000 | 0.00000 | 0.00000 | 0.00000 | 0.00061 | 0.00064 | 0.02754 | 0.02771 |
| 1.08 | 0.00000 | 0.00000 | 0.00000 | 0.00000 | 0.00000 | 0.00001 | 0.00077 | 0.00079 |
| L_∞ | 1.1102E-016 | | 8.4312E-004 | | 3.6692E-004 | | 2.0357E-004 | |
| L_2 | 1.4734E-017 | | 2.8613E-004 | | 1.4784E-004 | | 8.6949E-005 | |

Tablo 5.24, PGKB yönteminin bu kadar küçük viskozite değerinde bile gerçeğe yakın çözümler sunduğunu ifade etmektedir.

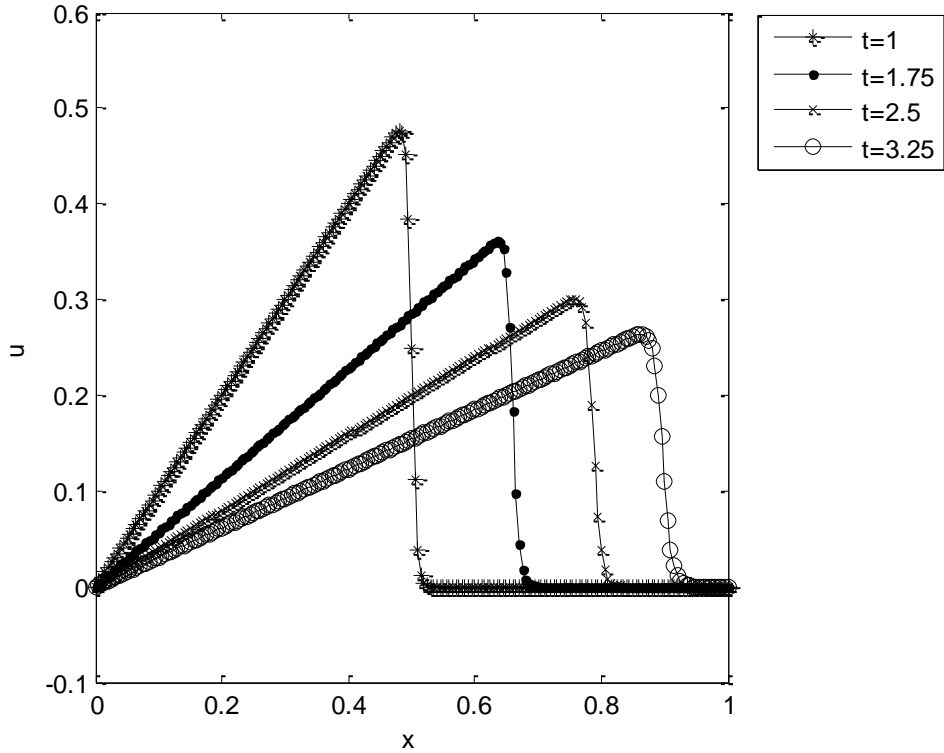


Şekil 5.23: PGKB yöntemi ile Problem 3 için $\nu = 0.005$, $\Delta x = 0.012$, $\Delta t = 0.05$, $[a, b] = [0, 1.2]$ değerlerinde nümerik çözümlerin davranışları

Tablo 5.25: PGKB yöntemi ile Problem 3 için $\nu = 0.001$, $\Delta x = 0.005$, $\Delta t = 0.025$, $[a, b] = [0, 1]$ değerlerinde farklı zamanlardaki nümerik ve analitik çözümler

| t | 1.0 | | 1.75 | | 2.5 | | 3.25 | |
|------------|---------------|----------------|---------------|----------------|---------------|----------------|---------------|----------------|
| x | Nümerik çözüm | Analitik çözüm | Nümerik çözüm | Analitik çözüm | Nümerik çözüm | Analitik çözüm | Nümerik çözüm | Analitik çözüm |
| 0.1 | 0.1000 | 0.1000 | 0.0571 | 0.0571 | 0.0400 | 0.0400 | 0.0308 | 0.0308 |
| 0.2 | 0.2000 | 0.2000 | 0.1143 | 0.1143 | 0.0800 | 0.0800 | 0.0615 | 0.0615 |
| 0.3 | 0.3000 | 0.3000 | 0.1714 | 0.1714 | 0.1200 | 0.1200 | 0.0923 | 0.0923 |
| 0.4 | 0.4000 | 0.4000 | 0.2286 | 0.2286 | 0.1600 | 0.1600 | 0.1231 | 0.1231 |
| 0.5 | 0.2500 | 0.2500 | 0.2857 | 0.2857 | 0.2000 | 0.2000 | 0.1539 | 0.1539 |
| 0.6 | 0.0000 | 0.0000 | 0.3429 | 0.3429 | 0.2400 | 0.2400 | 0.1846 | 0.1846 |
| 0.7 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0001 | 0.0001 | 0.2800 | 0.2800 | 0.2154 | 0.2154 |
| 0.8 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0377 | 0.0396 | 0.2462 | 0.2462 |
| 0.9 | 0.0000 | 0.0000 | -0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.1104 | 0.1113 |
| L_∞ | 3.3307E-016 | | 0.0072 | | 0.0024 | | 0.0012 | |
| L_2 | 3.3842E-017 | | 0.0010 | | 4.1035E-004 | | 2.1243E-004 | |

Beklediği gibi viskozite değeri küçüldükçe hata miktarları artmıştır (Tablo 5.25). Bu şekilde üretilen çözümlerin kalitatif davranışı Şekil 5.24’de sunulmuştur.



Şekil 5.24: PGKB yöntemi ile Problem 3 için $\nu = 0.001$, $\Delta x = 0.005$, $\Delta t = 0.025$, $[a, b] = [0, 1]$ değerlerinde nümerik çözümler

Tablo 5.26: Problem 3 için $v=0.5$, $[a,b]=[0,8]$, $\Delta x=0.05$, $\Delta t=0.0001$, $t=1.5$ değerlerinde nümerik çözümlerin karşılaştırılması

| x | <i>PGKB</i> | <i>PGLB</i> | <i>LG</i> | <i>EKKB Kutluay ve diğ. (2004)</i> | <i>Analitik Çözüm</i> |
|--------------|-------------|-------------|------------|--|---------------------------|
| 0.5 | 0.15326 | 0.15186 | 0.15397 | 0.15398 | 0.15327 |
| 1.0 | 0.26574 | 0.26488 | 0.26632 | 0.26634 | 0.26577 |
| 1.5 | 0.30409 | 0.30520 | 0.30448 | 0.30451 | 0.30412 |
| 2.0 | 0.26141 | 0.26415 | 0.26189 | 0.26190 | 0.26142 |
| 2.5 | 0.17219 | 0.17434 | 0.17270 | 0.17268 | 0.17217 |
| 3.0 | 0.08810 | 0.08843 | 0.08840 | 0.08839 | 0.08807 |
| 3.5 | 0.03583 | 0.03520 | 0.03594 | 0.03594 | 0.03582 |
| 4.0 | 0.01185 | 0.01127 | 0.01188 | 0.01189 | 0.01186 |
| 4.5 | 0.00324 | 0.00295 | 0.00325 | 0.00325 | 0.00325 |
| 5.0 | 0.00074 | 0.00063 | 0.00074 | 0.00074 | 0.00074 |
| L_{∞} | 3.8653E-05 | 2.8185E-03 | 7.1097E-04 | | |

Tablo 5.27: Problem 3 için $v=0.5$, $[a,b]=[0,8]$, $\Delta x=0.05$, $\Delta t=0.0001$, $t=3.0$ değerlerinde nümerik çözümlerin karşılaştırılması

| x | <i>PGKB</i> | <i>PGLB</i> | <i>LG</i> | <i>EKKB Kutluay ve diğ. (2004)</i> | <i>Analitik Çözüm</i> |
|--------------|-------------|-------------|------------|--|---------------------------|
| 0.5 | 0.06425 | 0.06382 | 0.06466 | 0.06468 | 0.06426 |
| 1.0 | 0.11878 | 0.11853 | 0.11939 | 0.11942 | 0.11880 |
| 1.5 | 0.15506 | 0.15556 | 0.15573 | 0.15576 | 0.15509 |
| 2.0 | 0.16760 | 0.16914 | 0.16829 | 0.16832 | 0.16762 |
| 2.5 | 0.15629 | 0.15858 | 0.15697 | 0.15699 | 0.15630 |
| 3.0 | 0.12739 | 0.12969 | 0.12803 | 0.12803 | 0.12738 |
| 3.5 | 0.09134 | 0.09291 | 0.09186 | 0.09185 | 0.09134 |
| 4.0 | 0.05799 | 0.05857 | 0.05835 | 0.05834 | 0.05798 |
| 4.5 | 0.03285 | 0.03270 | 0.03306 | 0.03305 | 0.03284 |
| 5.0 | 0.01674 | 0.01629 | 0.01684 | 0.01684 | 0.01674 |
| L_{∞} | 4.0664E-05 | 2.4070E-03 | 6.7639E-04 | | |

Tablo 5.28: Problem 3 için $v=0.5$, $[a,b]=[0,8]$, $\Delta x=0.05$, $\Delta t=0.0001$, $t=4.5$ değerlerinde nümerik çözümlerin karşılaştırılması

| x | <i>PGKB</i> | <i>PGLB</i> | <i>LG</i> | <i>EKKB Kutluay ve diğ. (2004)</i> | <i>Analitik Çözüm</i> |
|------------|-------------|-------------|------------|--|---------------------------|
| 0.5 | 0.03798 | 0.03788 | 0.03824 | 0.03825 | 0.03799 |
| 1.0 | 0.07186 | 0.07190 | 0.07229 | 0.07231 | 0.07187 |
| 1.5 | 0.09792 | 0.09835 | 0.09845 | 0.09847 | 0.09793 |
| 2.0 | 0.11337 | 0.11435 | 0.11397 | 0.11399 | 0.11339 |
| 2.5 | 0.11697 | 0.11847 | 0.11759 | 0.11761 | 0.11698 |
| 3.0 | 0.10948 | 0.11129 | 0.11010 | 0.11011 | 0.10949 |
| 3.5 | 0.09369 | 0.09545 | 0.09425 | 0.09425 | 0.09369 |
| 4.0 | 0.07361 | 0.07499 | 0.07409 | 0.07409 | 0.07361 |
| 4.5 | 0.05331 | 0.05412 | 0.05368 | 0.05367 | 0.05330 |
| 5.0 | 0.03572 | 0.03600 | 0.03598 | 0.3597 | 0.03572 |
| L_∞ | 7.7456E-04 | 1.8311E-03 | 7.7456E-04 | | |

Zaman çok küçük adımlara bölünerek farklı maksimum zamanlarda yöntemlerin işe yararlığı test edilmiştir (Tablo 5.26-5.28). EKKB verilerinin alındığı kaynakta hata miktarları belirtilmediği için ilgili bölüm boş bırakılmıştır. Tablolar bu haliyle kıyaslandığında en iyi yöntemin PGKB olduğu çıkarımı yapılmıştır.

Problem 4 (Doğan, 1997): Bir şok dalga davranışının ikinci modeli için

$$u(x,0) = \begin{cases} 1, & -2 < x < 5 \\ 6-x, & 5 \leq x < 6 \\ 0, & 6 \leq x \leq 16 \end{cases}$$

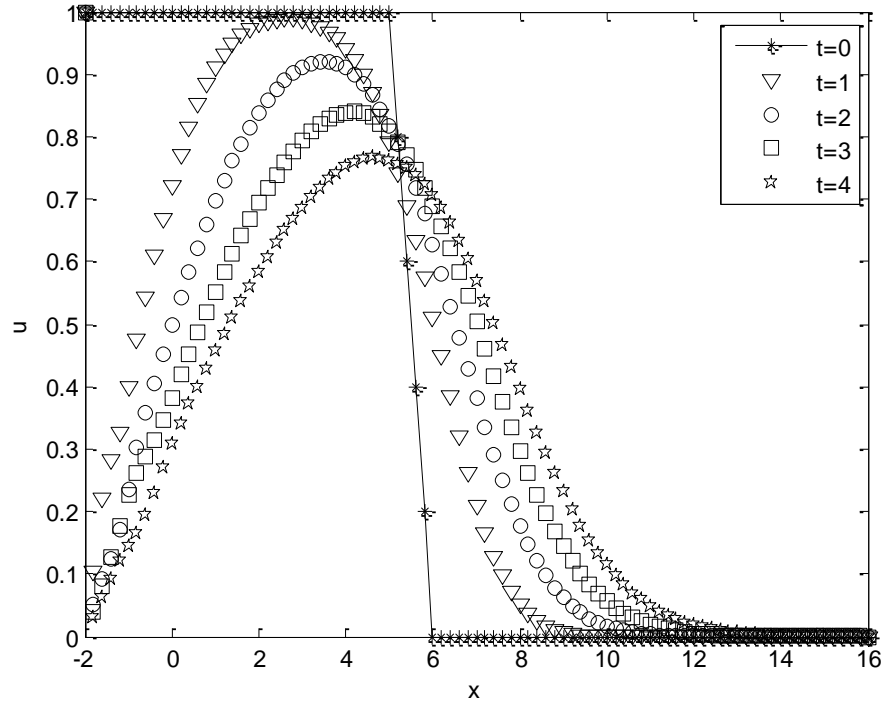
başlangıç koşulu kullanılır. Sınır koşulları $u(-2, t) = 1$, $u(16, t) = 0$ biçimindedir.

Bu problemin nümerik çözümleri, $v = 0$ ve $t \geq 1$ için sağlanan analitik çözüm

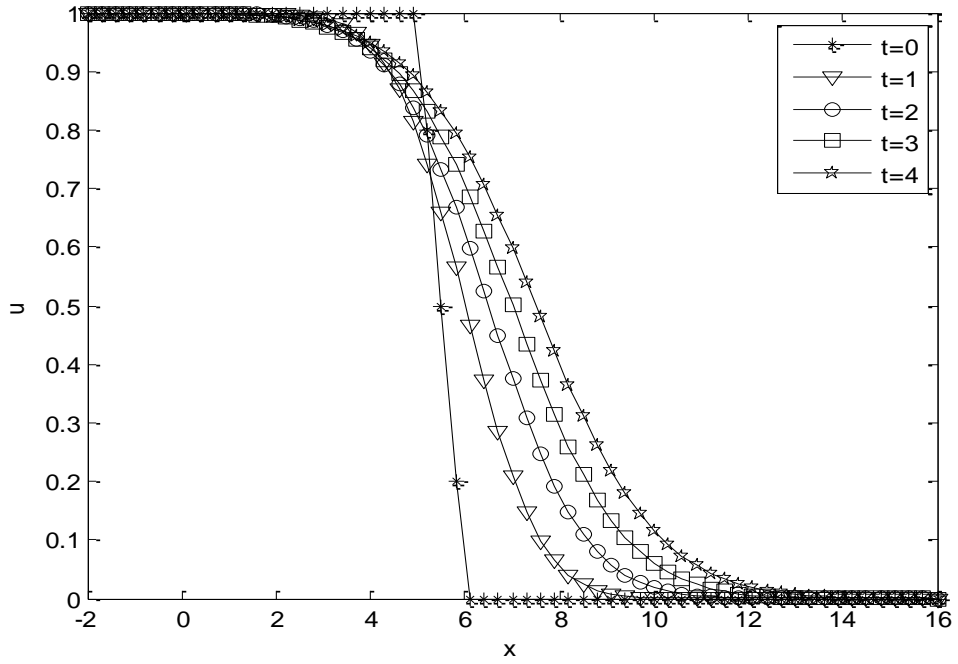
$$u(x,t) = \begin{cases} 1, & x < 5.5 + 0.5t \\ 0, & x > 5.5 + 0.5t \end{cases}$$

ile neredeyse tam bir uyum içindedir.

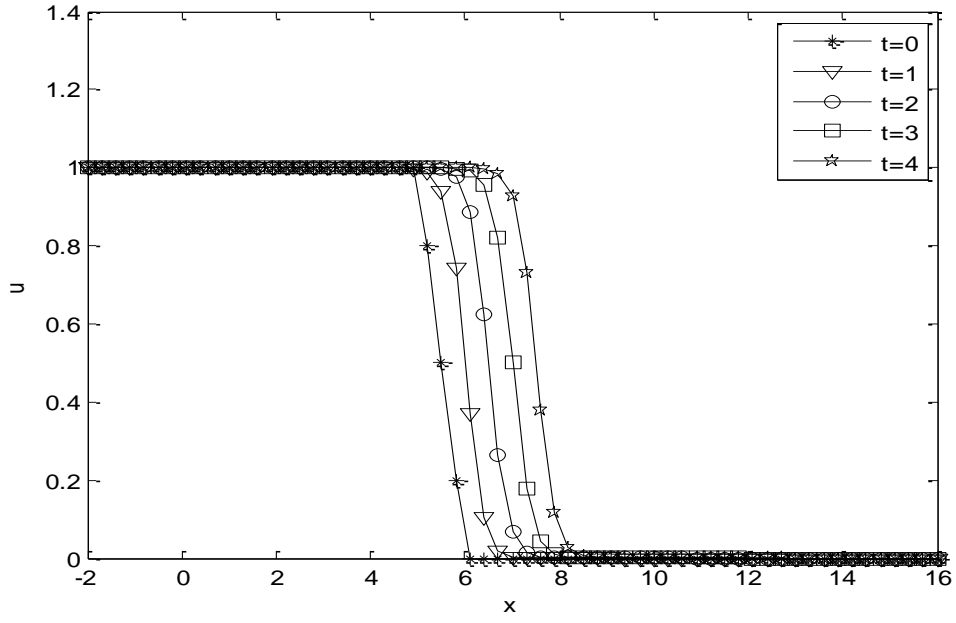
Sırasıyla; $v = 1.0, 0.1, 0.01$ için $t = 0, 1, 2, 3, 4$ zamanlarındaki nümerik çözümler Şekil 5.25'den Şekil 5.28'ya kadar verilmiştir.



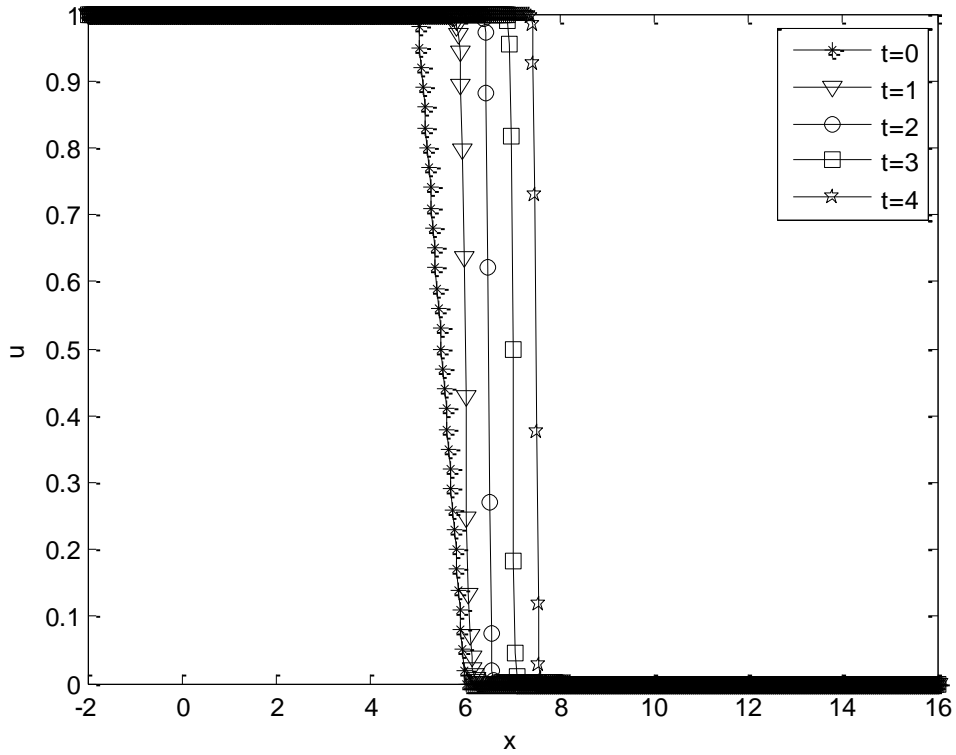
Şekil 5.25: PGLB yöntemi ile Problem 4 için $\nu = 1$, $\Delta x = 0.1$, $\Delta t = 0.04$ değerlerinde nümerik çözümler



Şekil 5.26: PGKB yöntemi ile Problem 4 için $\nu = 1$, $\Delta x = 0.1$, $\Delta t = 0.04$ değerlerinde nümerik çözümler



Şekil 5.27: PGKB yöntemi ile Problem 4 için $\nu = 0.1$, $\Delta x = 0.1$, $\Delta t = 0.04$ değerlerinde nümerik çözümlerin davranışları



Şekil 5.28: PGKB yöntemi ile Problem 4 için $\nu = 0.01$, $\Delta x = 0.01$, $\Delta t = 0.01$ değerlerinde nümerik çözümler

$\nu = 1$ için viskozite, başlangıç süreksizliğinin hızlı bir şekilde düzleştiği görülür. Dalganın ön tarafı zamanla dikliğini azaltır (Şekil 5.26).

$\nu = 0.1$ ile dalganın ön tarafı başlangıç dik açısında kalırken ve 0.5 sabit hız ile sağa doğru hareket ederken değişim bölgesi düzleşir (Şekil 5.27).

$\nu = 0.01$ için simülasyon ilerlerken dalga önü $t = 1$ zamanına kadar dikleşir. Şekiller eşit 0.5 hızla sağa doğru hareket eder (Şekil 5.28).

Çözüm grafiklerindeki büyük farklar, küçük viskoziteler tarafından düzleşen nümerik çözüm eğrilerinin olduğu değişim bölgelerinde ortaya çıkar. Uzay ve zaman adımları ile seçilen dalga grafikleri simülasyonlar boyunca düz kalır.

Çözüm grafiklerindeki temel farklar, küçük viskoziteler sayesinde düzleştirilen nümerik çözüm eğrilerinin olduğu değişim bölgelerinde ortaya çıkar. Uzay ve zaman adımlarıyla birlikte seçilen dalga grafikleri simülasyonlar boyunca düz kalır.

6. BULGULAR

Ele alınan nümerik yöntemlerden PGKB yönteminin, Burgers denklemini başarılı ve etkin bir şekilde çözebildiği ve elde edilen sonuçların analitik çözüm ile uyum içinde olduğu görülmüştür. Ayrıca bu yöntemin sunduğu sonuçların, literatürde ilgili problemler için mevcut olan bazı nümerik sonuçlarla da uyum içinde olduğu ve hatta bazılarında daha hassas olduğu gözlenmiştir.

Problem 1'in çözümleri sağa doğru ilerleyen bir şok dalga hareketini ifade etmektedir. Problemin temsil ettiği davranış PGKB ile oldukça iyi üretilirken, PGLB ile bu durum birazcık geriden gelmektedir

Problem 2 için Tablo 5.12'den Tablo 5.16'a kadar yöntemler arasında çeşitli viskozite değerleri için kıyaslamalar yapılmış ve en hassas çözümleri PGKB yönteminin ortaya koyduğu anlaşılmıştır. Beklendiği gibi nispeten az hassas sonuçlar PGLB yöntemine aittir. Ağırlık fonksiyonunun Dirac delta fonksiyonu olarak seçilmesi ağırlıklı kalan integralindeki fonksiyonun derecesinin oldukça küçük kalmasına sebep olmuştur. GL yöntemiyle kıyaslandığında bu yöntem PGLB'e göre daha avantajlıdır. Çünkü hem ağırlık fonksiyonu hem de yaklaşım fonksiyonunun aynı olması durumunun, sonuçları olumlu yönde etkilediği bilinmektedir.

Problem 3'ün PGLB yönteminden elde edilen çözümler analitik çözüm ile uyum içindedir. Viskozite değeri iyice küçük seçildiğinde arzu edilen davranışın elde edilebilmesi için zamanın daha fazla bölünmesi gerekmektedir. PGKB yöntemi ise daha az denklem sistemi kullanarak istenen davranışları göstermiştir.

Problem 4 için arzu edilen çözümler PGKB yöntemiyle elde edilmiştir.

Burada hesaplanan tüm sonuçlar ve grafikler için üretilen bilgisayar yazılımları MATLAB R2009a sürümünde çalıştırılmıştır.

7. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu çalışmada, Petrov-Galerkin sonlu eleman metodu kullanılarak Burgers denkleminin kalitatif ve kantitatif davranışları incelenmiştir. Denklemin dört farklı analitik çözümü için oluşturulan başlangıç-sınır değer problemlerinin nümerik çözümleri elde edilmiştir. Bu sayede ele alınan yöntemler birbirleriyle karşılaştırılmış, avantajlarına ve dezavantajlarına yer verilmiştir.

Kuadratik B-spline fonksiyonlarının kullanıldığı yaklaşımın, lineer B-spline yaklaşıma göre daha hassas olduğu görülmüş ve söz konusu yöntem, bütün problemleri oldukça hassas biçimde çözmeyi başarmış ve olması gereken keskin davranışları yakalayabilmiştir. Yöntem bu bağlamda, adveksiyonun dominant olması durumları için de yüksek doğrulukta sonuçlar üretebilmiştir. İlgili problemler için literatürde mevcut olan çalışmalar ile yapılan karşılaştırmalarda burada üretilen Petrov-Galerkin kuadratik B-spline yönteminin daha etkili olduğu gözlenmiştir. Ancak zaman adımının küçültülmesi hesaplama süresinin artmasına sebep olmuş bu durum da, çoğu nümerik çalışmalarda olduğu gibi, yöntemin dezavantaj hanesine yazılmıştır.

Petrov-Galerkin lineer B-spline yönteminin, dikkate alınan her problem için diğeri kadar başarılı çözümler sunamasa da nümerik çalışmalara alışmada çok değerli bir aşama olduğu görülmüştür. Bununla beraber, küçük parametre değerleri için Petrov-Galerkin lineer B-spline yöntemiyle üretilen sonuçların kuadratik B-spline ile üretilen sonuçlara oldukça yaklaştığı da gözlenmiştir.

Burada ortaya çıkan göreceli dezavantajları azaltmada kübik B-spline yaklaşımının yanı sıra diğeri bazı hibrit yöntemlere de yer verilmesi kayda değer bir çalışma olacaktır.

8. KAYNAKLAR

- Abbasbandy, S. and Darvishi, M. T., "A numerical solution of Burgers' equation by modified Adomian method", *Appl. Math. Comput.*, 163(3), 1265-1272, (2005).
- Abd-el-Malek, M. B. and El-Mansi, S. M. A., "Group theoretic methods applied to Burgers' equation", *J. Comp. Appl. Math.*, 115(1-2), 1-12, (2000).
- Abdou, M. A. and Soliman, A. A., "Variational iteration method for solving Burgers' and coupled Burgers' equation", *J. Comput. Appl. Math.*, 181, 245-251, (2005).
- Aksan, E. N. and Ozdes, A., "A numerical solution of Burgers' equation", *Appl. Math. Comput.*, 156(2), 395-402, (2004).
- Aksan, E. N., "A numerical solution of Burgers' equation by finite element method constructed on the method of discretization on time", *Appl. Math. Comput.*, (in press) (2005).
- Ali, A. H. A., Gardner, L. R. T. and Gardner, G. A., "A collocation method for Burgers' equation using cubic splines", *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.*, 325-337, (1992).
- Ali, A. H. A., Gardner, L. R. T. and Gardner, G. A., "A Galerkin approach to the solution of Burgers' equation", *UCNW maths PRE-print*, 90.04, (1990).
- Altıparmak K., "Numerical solution of Burgers' equation with factorized diagonal Pade approximation", *Int. J. Numer.*, 21, 310-319, (2011).
- Argyris, J.H. and Kelsey, S., "Energy theorems and structural analysis", *Aircraft Engineering*, 26-27, (1954-1955).
- Asaithambi, A., "Numerical solution of the Burgers' equation by automatic differentiation", *Appl. Math. Comput.*, 216, 2700-2708, (2010).
- Bahadır, A. R. and Sağlam, M., "A mixed finite difference and boundary element approach to one-dimensional Burgers' equation", *Appl. Math. Comput.*, 160, 663-673, (2005).
- Bateman, H., "Some recent researches on the motion of fluids", *Mon. Weather Rev.*, 43, 163-170, (1915).
- Bazley, N. W., "Approximation of operators with reproducing non-linearities", *Manuscripta Math.*, 18, 353-369, (1976).
- Benton, E. R. and Platzman, G. W., "A table of solutions of the one dimensional Burgers' equations", *Quart. Appl. Math.*, 30, 195-212, (1972).

- Blömker, D. and Jentzen, A., “Galerkin approximations for the stochastic Burgers equation”, *SIAM J. Numer. Anal.*, 51, 694-715, (2013).
- Bulut, H., Baskonus, H.M. and Pandir, Y., “The modified trial equation method for fractional wave equation and time fractional generalized Burgers equation”, *Abstract Appl. Anal.*, 8, (2013).
- Burgers, J. M., “A mathematical model illustrating the theory of turbulence”, *Adv. Appl. Mech.*, 1, 171-199, (1948).
- Burgers, J. M., “Mathematical examples illustrating relations occurring in the theory of turbulent fluid motion”, *Trans. Roy. Neth. Acad. Sci.*, 17,1-53, (1939).
- Christie, I., Griffiths, D. F., Mitchell, A.R. and Sanz-Serna, J. M., “ Product approximation for non-linear problems in the FEM”, *IMA, J. Num. Anal.*, 1, 253-266, (1981).
- Clough, R.W. , “The finite element method in plane stress analysis”, *Proceedings, Second ASCE Conference on Electronic Computation*, 345-378, (1960).
- Cole, J. D., “On a quasi-linear parabolic equations occurring in aerodynamics”, *Quart. Appl. Math.*, 9,225-236, (1951).
- Dağ, İ., Canıvar, A. and Şahin, A., “Taylor-Galerkin and Taylor-Collocation methods for the numerical solutions of Burgers’ equation using B-spline”, *Communications in Nonlinear Sci. Numer. Simulation*, 16, 2696-2708, (2011).
- Dağ, İ., Saka, B. and Boz, A. “B-spline Galerkin methods for numerical solution of Burgers equation”, *Appl. Math. Comput.*, 166, 506-522, (2005).
- Darvishi, M. T. and Javidi, M., “A numerical solution of Burgers’ equation by pseudospectral method and Darvishi’s preconditioning”, (in press) (2005).
- Dinçer, E., “Burgers Denkleminein Çeşitli Sonlu Fark Şemaları ile Çözümleri”, Yüksek Lisans Tezi, Pamukkale Üniversitesi, *Fen Bilimleri Enstitüsü*, Matematik Anabilim Dalı, Denizli, (2015).
- Doğan, A., “Petrov-Galerkin Finite Element Methods”, Doktora Tezi, University of Wales, School of Mathematics, Gwynedd, (1997).
- Doha, E. H., Bhrawy, A. H., Abdelkawy M. A. and Hafez, R. M., “A Jacobi collocation approximation for nonlinear coupled viscous Burgers’ equation”, *Cent. Eur. J. Phys.*, 12, 111-122, (2014).
- Gonçaves, P. Milton, J. and Sethuraman, S., “A stochastic Burgers equation from a class of microscobic interactions”, *Ann. Probab.*, 43, 286-338, (2015).

Grafke, T., Grauer, R. and Schafer, T., “Instanton filtering for the stochastic Burgers’ equation”, *J. Phys. A: Mathematical and Theoretical*, 46,(2013).

Gülbahar, M., “ Burgers Denklemlerinin Sayısal Çözümü”, Yüksek Lisans Tezi, Niğde Üniversitesi, *Fen Bilimleri Enstitüsü*, Matematik Anabilim Dalı, Niğde, (2007).

Gülsu, M. and Öziş, T., “Numerical solution of Burgers’ equation with restrictive Taylor approximation”,(in press) (2005).

Hassanien, I. A., Salama, A. A. and Hosham, H. A., “Fourth-order finite difference method for solving Burgers’ equation”, (in press) (2005).

Herbst, B. M., Schoombie, S. W. and Mitchell, A. R., “A moving Petrov-Galerkin method for transport equations”, *Int. J. Num. Meth. Eng.*, 18, 1321-1336, (1982).

Hon, Y. C. and Mao, X. Z., “ An efficient numerical scheme for Burgers’ equation”, *Appl. Math. Comput.*, 95,37-50, (1998).

Hopf, E., “The partial differential equation $u_t + uu_x = \mu u_{xx}$ ”, *Comm. Pure Appl. Math.*, 9, 201-230, (1950).

Hristov, J., Machado, J. A. T. and Yang, X. J., “ Nonlinear dynamics for local fractional Burgers’ equation arising in fractal flow”, *Nonlinear Dynamics*, 1,3-7, (2016).

Inc, M., “On numerical solutions of one-dimensional nonlinear Burgers’ equation and convergence of the decomposition method”, *Appl. Math. Comput.*,(in press) (2005).

Irk, D., “Sextic B-spline collocation method for the modified Burgers’ equation”, *Kybernetes*, 38, 1599-1620, (2009).

Iskandar, L. and Mohsen, A., “Some numerical experiments on the splitting of Burgers’ equation”, *Num. Meth. Par. Diff. Eq.*, 8, 267-276, (1992).

İnan, B. and Bahadır, A. R., “A numerical solution of the Burgers’ equation using a Crank-Nicolson exponential finite difference method”, *J. Math. Comput. Sci.*, 4, 849-860, (2014).

Jain, P. C., Shankar, R. and Singh, T. V., “Numerical technique for solving convective-reaction-diffusion equation”, *Math. Comput. Modelling*, 22, 113-125, (1995).

Jiwari, R., Mittal, R. C. and Sharma, K.K., “A numerical scheme based on weighted average differential quadrature method for the numerical solution of Burgers’ equation”, *Appl. Math. Comp.*, 219, 6680-6691, (2013).

Kadalbajoo, M. K., Sharma, K. K. and Awasthi, A., “A parameter-uniform implicit difference scheme for solving time-dependent Burgers’ equation”, *Appl. Math. Comput.*, (in press) (2005).

Kakuda, K. and Tosaka, N., “The generalized boundary element approach to Burgers’ equation”, *Int. J. Num. Methods Eng.*, 29, 245-261, (1990).

Karakoç, S. B. G., “Sonlu Elemanlar Yöntemi ile Modifiye Edilmiş Eşit Genişlikli Dalga Denkleminin Sayısal Çözümleri”, Doktora Tezi, İnönü Üniversitesi, *Fen Bilimleri Enstitüsü*, Matematik Anabilim Dalı, Malatya, (2011).

Katsuhiro, S., “A new finite variable difference method with application to non-linear Burgers’ equation”, *Nonlinear Analysis, Theory, Methods Applications*, 30, 2169-2180, (1997).

Khalifa, A. K., Noor, K.I. and Noor, M. A., “Some numerical methods for solving Burgers’ equation”, *Int. J. Phys. Sci.*, 216, 3105-3110, (2010).

Korkmaz, A. and Dağ, İ., “Cubic B-spline differential quadrature methods and stability for Burgers’ equation”, *Eng. Comput. Int. J. Comput. Aided Eng.*, 30, 320-344, (2013).

Korkmaz, A. and Dağ, İ., “Polynomial based differential quadrature method for numerical solution of nonlinear Burgers’ equation”, *J. Franklin Inst.*, 348, 2863-2875, (2011).

Korkmaz, A. and Dağ, İ., “Shock wave simulations using sinc differential quadrature methods”, *Eng. Comput. Int. J. Comput. Aided Eng.*, 28, 654-674, (2011).

Kutluay, S. and Esen, A., “A linearized numerical scheme for Burgers-like equations”, *Appl. Math. Comp.*, 156, 295-305, (2004).

Kutluay, S. and Esen, A., “A lumped Galerkin method for solving the Burgers’ equation”, *Int. J. Comput. Math.*, 81, 1433-1444, (2004).

Kutluay, S., Esen, A. and Dağ, İ., “Numerical solutions of the Burgers’ equation by the least-squares quadratic B-spline finite element method”, *J. Comput. Appl. Math.*, 167, 21-33, (2004).

Lighthill, M. J., "On sound generated aerodynamically. II. Turbulence as a source of sound". *Proceedings of the Royal Society A*. 222 (1148): 1–32, (1954).

Lin, E. B. and Zhou, X., "Connection coefficient on an interval and wavelet solution of Burgers' equation", *J. Comp. Appl. Math.*, 135, 63-78, (2001).

Liu, H., Li, J. and Zhang, Q., "Lie symmetry analysis and explicit solutions for general Burgers' equation", *J. Computational Appl. Math.*, 228, 1-9, (2009).

Loew, M., Daecke, W., Kusnierczak, D., Rahmzadeh, M. and Ewerbeck, V., "Shock-wave therapy is effective for chronic calcifying tendinitis of the shoulder", *Bone and Joint Journal*, 5, 863-867, (1999).

Mittal, R. C. and Jain, R. K., "Numerical solutions of nonlinear Burgers' equation with modified cubic B-splines collocation method", *Appl. Math. Comp.*, 218, 7839-7855, (2012).

Mittal, R. C. and Jiwari, R., "Differential quadrature method for numerical solution of coupled viscous Burgers' equations", *International J. for Computational Methods in Engineering Sci. and Mechanics*, 13, 88-92, (2012).

Mittal, R. C. and Singhal, P., "Numerical solution of Burgers' equation", *Communications in Numerical Methods in Engineering*, 9, 397-406, (1993).

Mittal, R. C., Jiwari, R. and Sharma, K. K., "A numerical scheme based on differential quadrature method to solve time dependent Burgers' equation", *Engineering Computations*, 30, 117-131, (2013).

Nguyen, H. and Reynen, J., "A space-time finite element approach to Burgers' equation", in: E. Hinton et al. (Eds.), "Numerical methods for nonlinear problems", Pneridge Press, 3, 718-728, (1987).

Ozis, T., Aksan, E. N. and Ozdes, A., "A finite element approach for solution of Burgers' equation", *Appl. Math. Comput.*, 139, 43-57, (2003).

Ozis, T., Esen, A. and Kutluay, S., "Numerical solution of Burgers' equation by quadratic B-spline finite elements", *Appl. Math. Comput.*, 165, 237-249, (2005).

Öziş, T. and Aslan, Y., "The semi-approximate approach for solving Burgers' equation with high Reynolds number", *Appl. Math. Comput.*, 163, 131-145, (2005).

Öziş, T. and Özdeş, A., "A direct variational method to Burgers' equation", *J. Comput. Appl. Math.*, 71, 163-175, (1996).

Pospelov, L.A., "Propagation of finite-amplitude elastic waves", Soviet Lighthill, M. J., "On sound generated aerodynamically. I. General theory"., Proceedings of the Royal Society A. 211 (1107): 564-587, (1952).

- Ramadan, M. A., El-Danaf, T. S. and Abd Alaal, F. E. I., “ Application of the nonpolynomial spline approach to the solution of the Burgers’ equation”, *Open Appl. Math.*, 15-20, (2007).
- Ramadan, M. A., El-Danaf, T. S. and Abd Alaal, F. E. I., “Numerical solution of Burgers equation using septic B-splines”, *Chaos, Solitons and Fractals*, 26, 795-804, (2005).
- Rao, S. S., “*The finite element method in engineering*”, Oxford: Butterworth-Heinemann, (2005).
- Rubin, S. G. and Graves, R.A., “Cubic spline approximation for problems in fluid mechanics”, *Nasa TR R-436*, Washington, D. C., (1975).
- Rubin, S. G. and Khosla, P.K., “Higher-order numerical solutions using cubic splines”, *AIAA Journal*, 14, 851-858, (1976).
- Ruelle, D. and Takens, F., “On the nature of turbulence”, *Commun. Math. Phys.*, 20,167-192, (1971).
- Ryder28, “Two wings “is megl’ che one!” (1) Some notes about sound. [online]”, (01 Aralık 2016), <https://hronrad.wordpress.com/2012/04/25/two-wings-is-megl-che-one-1-some-notes-about-sound/25/04/2012>, (2012).
- Sari, M. and Gürarlan, G., “A sixth-order compact finite difference scheme to the numerical solutions of Burgers’ equation”, *Appl. Math. Comp.*, 208, 475-483, (2009).
- Soliman, A. A., “A Galerkin solution for Burgers’ equation using cubic B-spline finite elements”, *Abstract Appl. Anal.*, 15, (2012).
- Turner, M. C., Clough, R.W., Martin, H.C. and Topp, L.J., “Stiffness and deflection analysis of complex structures”, *Journal of Aeronautical Sciences*, 23, 805–824, (1956).
- Van der Pol, B., “On a non-linear partial differential equation satisfied by the logarithm of the Jacobean theta-functions, with arithmetical applications”, *Proc. Acad. Sci.*, A13, 261-284, (1951).
- Varoğlu, E. and Finn, W. D. L., “Space-time finite elements incorporating characteristics for Burgers’ equations”, *Int. J. Num. Meth. Eng.*, 16, 171-184, (1980).
- Zhang, P. G. and Wang, J. P., “A predictor-corrector compact finite difference scheme for Burgers’ equation”, *Appl. Math. Comp.*, 219, 892-898, (2012).
- Zhu, Chun-G. and Wang, Ren-H., “Numerical solution of Burgers’ equation by cubic B-spline quasi interpolation”, *Appl. Math. Comp.*, 208, 260-272, (2009).
- Zienkiewicz, O.C. and Taylor, R. L., “*The finite element method*”, volume 1, Oxford: Butterworth-Heinemann, (2000).

EKLER

9. EKLER

EK A Burgers Denkleminin Galerkin Sonlu Eleman Yöntemiyle Çözümü

Burgers denkleminin ağırlıklı kalan integraline yerel koordinat dönüşümü uygulanır ve

$$\int_0^1 (u_t + cu_\xi - du_{\xi\xi}) w_i d\xi = 0$$

elde edilir. Burada $c = \frac{u^e}{dx}$, $d = \frac{v}{dx^2}$ biçimindedir. İntegrali basitleştirmek için u her eleman üzerinde bir sabit olarak alınmaktadır. Lineer şekil fonksiyonları

$$L_1 = 1 - \xi, \quad L_2 = \xi$$

ve buna bağlı yaklaşım fonksiyonu

$$u_N^e = \sum_{i=1}^2 L_i \delta_i$$

şeklinde olur.

$$\int_0^1 (u_t + cu_\xi - du_{\xi\xi}) L_i d\xi = 0, \quad i = 1, 2$$

integraline kısmi integrasyon uygulanarak türevin derecesi düşürülür.

$$\int_0^1 \left[\left(\frac{\partial u}{\partial t} + c \frac{\partial u}{\partial \xi} \right) L_i + d \frac{\partial u}{\partial \xi} \frac{\partial L_i}{\partial \xi} \right] d\xi = 0$$

denkleminde u_N^e yaklaşım fonksiyonu yerine konulursa her bir elemanın katkısı

$$\sum_{j=1}^2 \int_0^1 \left[L_i L_j \frac{\partial \delta_j}{\partial t} + c L_i \frac{\partial L_j}{\partial \xi} \delta_j + d \frac{\partial L_i}{\partial \xi} \frac{\partial L_j}{\partial \xi} \delta_j \right] \partial \xi = 0$$

olur. Bu denklemin matris formu

$$A^e \frac{\partial \delta^e}{\partial t} + (B^e + dC^e) \delta^e = 0, \quad \delta^e = (\delta_1, \delta_2)^T$$

şeklindedir. Elemanların matrisleri

$$A_{ij}^e = \int_0^1 L_i L_j d\xi = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad B_{ij}^e = \int_0^1 L_i \frac{\partial L_j}{\partial \xi} d\xi = \frac{c}{2} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad C_{ij}^e = \int_0^1 \frac{\partial L_i}{\partial \xi} \frac{\partial L_j}{\partial \xi} d\xi = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

olur. Denklem sistemini oluşturmak için bütün elemanlar bir araya getirilir ve

$$A \frac{\partial \delta}{\partial t} + [B + dC] \delta = 0, \quad \delta = (\delta_0, \delta_1, \dots, \delta_N)^T$$

elde edilir. Bu sistemin tipik üyesi

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{1}{6} \delta_{i-1} + \frac{2}{3} \delta_i + \frac{1}{6} \delta_{i+1} \right] = \left(\frac{1}{2} c_{i-1} + d \right) \delta_{i-1} - \left[\frac{1}{2} (c_{i-1} - c_i) + 2d \right] \delta_i - \left(\frac{1}{2} c_i - d \right) \delta_{i+1}$$

biçimindedir. Burada $c_i = \frac{u_i^n}{dx}$ ile bulunur. Bu adi diferansiyel denklem sistemini

çözmek için Crank-Nicolson yaklaşımı kullanılır. $t = (n + 0.5) \Delta t$ olmak üzere,

$$\frac{\partial \delta_i}{\partial t} = \frac{1}{\Delta t} (\delta_i^{n+1} - \delta_i^n), \quad \delta_i = \frac{1}{2} (\delta_i^{n+1} + \delta_i^n)$$

olarak ele alınır. Böylece iterasyon,

$$\begin{aligned} & \left(\frac{1}{6} - \frac{d\Delta t}{2} - \frac{\Delta t}{4} c_{i-1} \right) \delta_{i-1}^{n+1} + \left(\frac{2}{3} + d\Delta t + \frac{\Delta t}{4} [c_{i-1} - c_i] \right) \delta_i^{n+1} + \left(\frac{1}{6} - \frac{d\Delta t}{2} + \frac{\Delta t}{4} c_i \right) \delta_{i+1}^{n+1} \\ & = \left(\frac{1}{6} + \frac{d\Delta t}{2} + \frac{\Delta t}{4} c_{i-1} \right) \delta_{i-1}^n + \left(\frac{2}{3} - d\Delta t - \frac{\Delta t}{4} [c_{i-1} - c_i] \right) \delta_i^n + \left(\frac{1}{6} + \frac{d\Delta t}{2} - \frac{\Delta t}{4} c_i \right) \delta_{i+1}^n \end{aligned}$$

bulunur.

10. ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı : Mehtap BAYRAKTAR

Doğum Yeri ve Tarihi : Bornova-28.02.1987

Lisans Üniversite : Pamukkale Üniversitesi

Elektronik posta : bayraktarmehtap@gmail.com

Çalıştığı Kurum : Kelekçi Çok Programlı Anadolu Lisesi (2015-...)