



**AKIŞKANLAR MEKANIĞININ TEMEL MODEL PROBLEMLERİNİN  
SONLU FARK ÇÖZÜMLERİ**

**Abdurrahim GÜNAY**

**Ağustos 2010  
DENİZLİ**

**PAMUKKALE ÜNİVERSİTESİ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**AKIŞKANLAR MEKANİĞİNİN TEMEL MODEL PROBLEMLERİNİN  
SONLU FARK ÇÖZÜMLERİ**

**YÜKSEK LİSANS TEZİ  
Abdurrahim GÜNAY**

**Anabilim Dalı : Matematik**

**Tez Danışmanı : Yrd. Doç. Dr. Murat SARI**

**AĞUSTOS 2010**

## YÜKSEK LİSANS TEZ ONAY FORMU

Pamukkale Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü 081441005 nolu öğrencisi Abdurrahim GÜNAY tarafından hazırlanan “AKIŞKANLAR MEKANİĞİNİN TEMEL MODEL PROBLEMLERİNİN SONLU FARK ÇÖZÜMLERİ” başlıklı tez tarafımızdan okunmuş, kapsamı ve niteliği açısından bir Yüksek Lisans Tezi olarak kabul edilmiştir.

Tez Danışmanı : Yrd. Doç. Dr. Murat SARI (PAÜ)  
(Jüri Başkanı)

Jüri Üyesi : Doç. Dr. Uğur YÜCEL (PAÜ)

Jüri Üyesi : Prof. Dr. İdris DAĞ (ESOGÜ)

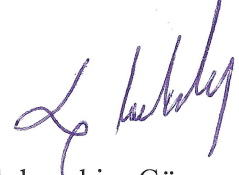
Pamukkale Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun  
02/09/2010 tarih ve ...23/11... sayılı kararıyla onaylanmıştır.

  
Prof. Dr. Halil KARAHAN  
Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

Bu tezin tasarımı, hazırlanması, yürütülmesi, araştırmalarının yapılması ve bulgularının analizlerinde bilimsel etiğe ve akademik kurallara özenle riayet edildiğini; bu çalışmanın doğrudan birincil ürünü olmayan bulguların, verilerin ve materyallerin bilimsel etiğe uygun olarak kaynak gösterildiğini ve alıntı yapılan çalışmalara atfedildiğine beyan ederim.

İmza

:



Öđrenci Adı Soyadı: Abdurrahim Günay

## ÖNSÖZ

Bu çalışmada akışkanlar mekaniğinde kimi temel problemlere yüksek mertebeden sonlu fark yöntemlerini kullanılarak hassas çözümler üretilmiştir. Bunu gerçekleştirebilmek için bilgisayar programları MATLAB ortamında kodlanmıştır. Grafikler ise SURFER ve MATLAB ortamlarında çizilmiştir. Bu tezin gerçekleşmesi sürecinde aşağıdaki kişi/kurumları özellikle anmak isterim:

Öncelikle Lisans tez danışmanlığımı yaptıktan sonra şimdi de yüksek lisans tez danışmanlığımı yapan gerekli bütün imkanları sağlayarak her zaman benden yakın ilgi ve yardımlarını esirgemeyen değerli hocam Yrd. Doç. Dr. Murat Sarı'ya, teşekkürü bir borç bilirim.

Her zaman yanımda olan ve her konuda bana yol gösteren İnşaat Mühendisliği bölümünden Okut. Gürhan Gürarlan ve Yrd. Doç. Dr. M. Tamer Ayvaz'a teşekkür etmek benim için bir borçtur.

Teze maddi destek veren Pamukkale Üniversitesi Bilimsel Araştırma Projeleri Koordinasyon Birimine (PAUBAP Proje No: 2010FBE004 ) teşekkürlerimi sunarım.

Ayrıca, maddi ve manevi desteklerini daima arkamda hissettiğim aileme teşekkürlerimi sunmak istiyorum.

Ağustos 2010

Abdurrahim Günay

## İÇİNDEKİLER

### Sayfa

<b>ÖZET</b> .....	<b>xi</b>
<b>SUMMARY</b> .....	<b>xii</b>
<b>1. GİRİŞ</b> .....	<b>1</b>
1.1 Akışkanlarla İlgili Bazı Temel Kavramlar .....	3
1.1.1 Hareket .....	3
1.1.2 Gerilme.....	3
1.1.3 İdeal akışkan ve Newtonian akışkan kavramı.....	4
1.1.4 Akışkan viskozitesi .....	5
1.1.5 Reynolds sayısı ve kinematik viskozite .....	5
1.1.6 Deformasyon .....	6
1.1.7 Gerilme ile deformasyon arasındaki bağıntı .....	10
1.1.8 Süreklilik (kütle korunum) denkleminin çıkarılışı.....	11
1.1.9 Momentum korunum denklemi.....	13
1.1.10 Hareket denklemleri.....	16
1.1.11 Navier-Stokes ve diğer model denklemler.....	18
1.1.12 Literatür taraması .....	23
1.1.13 Tez planı.....	31
<b>2. SONLU FARK YÖNTEMLERİ</b> .....	<b>33</b>
2.1 Birinci Mertebeden Türevler için Sonlu Fark Yaklaşımları.....	34
2.1.1 İleri fark yaklaşımı .....	34
2.1.2 Geri fark yaklaşımı.....	35
2.1.3 Merkezi fark yaklaşımı .....	35
2.1.4 Birinci mertebeden türevler için beş nokta sonlu fark formülleri.....	36
2.2 İkinci Mertebeden Türevler için Sonlu Fark Yaklaşımları .....	39
2.2.1 İleri fark yaklaşımı .....	39
2.2.2 Geri fark yaklaşımı.....	39
2.2.3 Merkezi fark yaklaşımı .....	40
2.2.4 İkinci mertebeden türevler için beş nokta sonlu fark formülleri.....	40
2.2.4.1 İleri fark yaklaşımı .....	40
2.2.4.2 Geri fark yaklaşımı.....	41
2.2.4.3 Merkezi fark yaklaşımı .....	42
2.3 Sonuç.....	43
<b>3. MODEL DENKLEMLERİN SONLU FARK FORMÜLASYONLARI</b> .....	<b>44</b>
3.1 Laplace ve Poisson Denklemlerinin Sonlu Fark Formülasyonları.....	44
3.2 Bir Boyutlu Lineer Konveksiyon-Difüzyon Denkleminin Sonlu Fark Formülasyonları .....	49
3.3 İki Boyutlu Lineer Konveksiyon-Difüzyon Denkleminin Sonlu Fark Formülasyonları .....	51
3.4 Burgers Denkleminin Sonlu Fark Formülasyonları .....	54

3.5 Navier-Stokes Denklemlerinin Sonlu Fark Formülasyonları.....	56
3.6 Sonuç.....	61
<b>4. PROBLEMLER VE SONUÇLAR .....</b>	<b>62</b>
4.1 Laplace Denkleminin Sonlu Fark Çözümleri.....	62
4.2 Poisson Denkleminin Sonlu Fark Çözümleri .....	72
4.3 Bir Boyutlu Konveksiyon Difüzyon Denkleminin Sonlu Fark Çözümleri .....	77
4.4 İki Boyutlu Konveksiyon Difüzyon Denkleminin Çözümleri .....	81
4.5 Burgers Denkleminin Sonlu Fark Çözümleri.....	89
4.6 Navier-Stokes Denklemlerinin Sonlu Fark Çözümleri .....	95
<b>5. SONUÇ VE ÖNERİLER.....</b>	<b>106</b>
<b>KAYNAKLAR .....</b>	<b>108</b>
<b>EKLER.....</b>	<b>113</b>
<b>ÖZGEÇMİŞ.....</b>	<b>116</b>

## KISALTMALAR

<b>AAG</b>	: Ardışık Aşırı Gevşeme
<b>TDA</b>	: Toplam Değişim Azaltan
<b>SF2</b>	: İkinci Mertebeden Sonlu Fark
<b>SF4</b>	: Dördüncü Mertebeden Sonlu Fark
<b>SF6</b>	: Altıncı Mertebeden Sonlu Fark
<b>KSF6</b>	: Altıncı Mertebeden Kompakt Sonlu Fark
<b>HC</b>	: Hopf-Cole
<b>KHC</b>	: Kısıtlı Hopf-Cole
<b>KPY</b>	: Kısıtlı Padé Yaklaşımı
<b>SEM</b>	: Sonlu Eleman Metodu
<b>TDA-RK3</b>	: Üçüncü Mertebeden Toplam Değişim Azaltan Runge-Kutta
<b>OKH</b>	: Ortalama Kare Hata



## TABLO LİSTESİ

### Tablolar

Tablo 4.1: Problem 4.1.1' in sonlu fark çözümleri.....	71
Tablo 4.2: Bir boyutlu lineer konveksiyon difüzyon denkleminin sonlu fark çözümlerinin analitik çözümler ile karşılaştırılması: $V_x = 0.1$ , $D_x = 0.02$ , $\Delta t = 0.001$ , $\Delta x = 0.025$ , $t = 0.1$ .....	80
Tablo 4.3: Problem 4.4.1'in sonlu fark çözümlerinde oluşan ortalama kare hatalar ve bulunan Gaussian etkinin pik değeri.....	81
Tablo 4.4: Bir boyutlu viskoz Burgers denkleminin sonlu fark çözümlerinin analitik çözüm ve literatürde bulunan diğer bazı sonuçlarla karşılaştırılması, $\nu = 1$ , $\Delta t = 0.0001$ , $\Delta x = 0.0125$ .....	90
Tablo 4.5: Bir boyutlu viskoz Burgers denkleminin sonlu fark çözümlerinin analitik çözüm ve literatürde bulunan diğer sonuçlarla karşılaştırılması; $\nu = 0.1$ , $\Delta t = 0.0001$ , $\Delta x = 0.0125$ .....	91
Tablo 4.6: Bir boyutlu viskoz Burgers denkleminin sonlu fark çözümlerinin analitik çözüm ve literatürde bulunan diğer bazı sonuçlarla karşılaştırılması: $\nu = 1$ , $t = 0.1$ .....	92
Tablo 4.7: Bir boyutlu viskoz Burgers denkleminin sonlu fark çözümlerinin analitik çözüm ve literatürde bulunan diğer sonuçlarla karşılaştırılması: $\nu = 0.01$ , $t = 0.5$ , $\Delta x = 1/36$ .....	94
Tablo.4.8: Birincil vorteksteki akım fonksiyonu değerlerinin karşılaştırılması.....	99
Tablo 4.9: Birincil vorteksteki akım fonksiyonunun koordinat değerlerinin karşılaştırılması.....	100
Tablo 4.10: $Re=1000$ için birincil vorteksteki akım fonksiyonu değerlerinin karşılaştırılması: akım fonksiyonunun maksimum değerleri ve koordinatları ile bu noktalarda yer alan burgaç değerlerinin literatürde var olan bazı çalışmalar ile karşılaştırılması.....	101

## ŞEKİL LİSTESİ

### Şekiller

Şekil 1.1 : Bir akışkana etkiyen yüzey kuvvetleri.....	4
Şekil 1.2 : Bir akışkan elemanında meydana gelen doğrusal deformasyon.....	7
Şekil 1.3 : Bir akışkan elemanın açısal deformasyonu .....	8
Şekil 1.4 : Bir akışkan elemanına giren ve çıkan kütle miktarı .....	12
Şekil 1.5 : Akışkan elemanına etki eden yüzey kuvvetlerinin oluşturduğu gerilmeler .....	14
Şekil 3.1: Poisson ve Laplace denkleminin çözümünde kullanılan SF2 şeması.....	45
Şekil 3.2: Poisson ve Laplace denkleminin çözümünde kullanılan SF4 şeması.....	47
Şekil 4.1: Problem 4.1.1 de ifade edilen bölmenin taslağı ve problemin sınır koşulları .....	62
Şekil 4.3: Problem 4.1.1 in SF2 yöntemi ile çözümü .....	65
Şekil 4.4: Problem 4.1.1' in SF2 yöntemi ile çözümünün kontur grafiğı .....	66
Şekil 4.5: Problem 4.1.1 'in SF4 yöntemi ile çözümü .....	67
Şekil 4.6: Problem 4.1.1' in SF4 yöntemi ile çözümünün kontur grafiğı .....	68
Şekil 4.7: Problem 4.1.1 in SF6 yöntemi ile çözümü .....	69
Şekil 4.8: Problem 4.1.1'in SF6 yöntemi ile çözümünün kontur grafiğı.....	70
Şekil 4.9: Problem 4.2.1 için kullanılan koordinat ve boyutlar .....	72
Şekil 4.10: Poisson denkleminin analitik ve sonlu fark çözümleri .....	74
Şekil 4.11: Poisson denkleminin analitik ve sonlu fark çözümlerinin kontur grafikleri .....	75
Şekil 4.12: Poisson denkleminin sonlu fark çözümlerinde oluşan mutlak hataların kontur grafikleri .....	76
Şekil 4.13: Bir boyutlu konveksiyon difüzyon denkleminin $\Delta t = 0.001$ , $\Delta x = 0.025$ için $t = 1$ anındaki sonlu fark çözümlerinin mutlak hataları.....	78
Şekil 4.14: Bir boyutlu konveksiyon difüzyon denkleminin $\Delta t = 0.001$ , $\Delta x = 0.025$ için $t = 2$ anındaki analitik ve sonlu fark çözümleri.....	79
Şekil 4.15: $\Delta x = \Delta y = 0.025$ , $\Delta t = 0.025$ , $D_x = 0.01$ , $D_y = 0.01$ , $V_x = 0.8$ , $V_y = 0.8$ için $t = 1.25$ anındaki $[1,2] \times [1,2]$ bölgesindeki SF2 yaklaşık çözümlerinin (sağdaki) ve mutlak hataların (soldaki) kontur grafikleri .....	83
Şekil 4.16: $\Delta x = \Delta y = 0.025$ , $\Delta t = 0.025$ , $D_x = 0.01$ , $D_y = 0.01$ , $V_x = 0.8$ , $V_y = 0.8$ için $t = 1.25$ anındaki $[0,2] \times [0,2]$ bölgesindeki SF2 yaklaşık çözümünün grafiğı.....	84
Şekil 4.17: $\Delta x = \Delta y = 0.025$ , $\Delta t = 0.00125$ , $D_x = 0.01$ , $D_y = 0.01$ , $V_x = 0.8$ , $V_y = 0.8$ için $t = 1.25$ anındaki $[1,2] \times [1,2]$ bölgesindeki SF4 yaklaşık çözümlerinin (sağdaki) ve mutlak hataların (soldaki) kontur grafikleri .....	85
Şekil 4.18: $\Delta x = \Delta y = 0.025$ , $\Delta t = 0.00125$ , $D_x = 0.01$ , $D_y = 0.01$ , $V_x = 0.8$ , $V_y = 0.8$ için $t = 1.25$ anındaki $[0,2] \times [0,2]$ bölgesindeki SF4 yaklaşık çözümlerinin grafikleri.....	86

Şekil 4.19: $\Delta x = \Delta y = 0.025$ , $\Delta t = 0.00125$ , $D_x = 0.01$ , $D_y = 0.01$ , $V_x = 0.8$ , $V_y = 0.8$ için $t = 1.25$ anındaki $[1,2] \times [1,2]$ bölgesindeki SF6 yaklaşık çözümlerinin (sağdaki) ve mutlak hataların (soldaki) kontur grafikleri .....	87
Şekil 4.20: $\Delta x = \Delta y = 0.025$ , $\Delta t = 0.00125$ , $D_x = 0.01$ , $D_y = 0.01$ , $V_x = 0.8$ , $V_y = 0.8$ için $t = 1.25$ anındaki $[0,2] \times [0,2]$ bölgesindeki SF6 yaklaşık çözümlerinin grafikleri.....	88
Şekil 4.21: Üst sınırı hareketli kare oyuğun şeması ve kaygan olmayan sınır koşulları .....	95
Şekil 4.22: Üst sınırı hareketli kare oyuğun SF6 ile çözümünde kullanılan sınır noktaları şeması.....	99
Şekil 4.23: Bazı Reynolds sayılarında SF2 ile elde edilen akım fonksiyonu çözümlerinin kontur grafikleri: (a) $Re = 100$ ; (b) $Re = 400$ ; (c) $Re = 500$ ve (d) $Re = 1000$ .....	102
Şekil 4.24: Bazı Reynolds sayılarında SF4 ile elde edilen akım fonksiyonu çözümlerinin kontur grafikleri: (a) $Re = 100$ ; (b) $Re = 400$ ; (c) $Re = 500$ ve (d) $Re = 1000$ .....	103
Şekil 4.25: Bazı Reynolds sayılarında SF6 ile elde edilen akım fonksiyonu çözümlerinin kontur grafikleri: (a) $Re = 100$ ; (b) $Re = 400$ ; (c) $Re = 500$ ve (d) $Re = 1000$ .....	104
Şekil 4.26: Bazı Reynolds sayılarında SF6 ile elde edilen burgaç çözümlerinin kontur grafikleri: (a) $Re = 100$ ; (b) $Re = 400$ ; (c) $Re = 500$ ve (d) $Re = 1000$ .....	105

## SEMBOL LİSTESİ

$a$	İvme vektörü
$\Delta t$	Zaman adımı
$\Delta x$	$x$ yönündeki adım uzunluğu
$\Delta y$	$y$ yönündeki adım uzunluğu
$\mathbf{F}$	Kuvvet
$f'$	$f$ fonksiyonunun birinci mertebeden türevi
$h$	Konumsal adım uzunluğu
$m$	Kütle
$M$	$y$ yönündeki düğüm noktası sayısı
$N$	$x$ yönündeki düğüm noktası sayısı
$p$	Basınç
$Re$	Reynolds sayısı
$u$	$x$ yönündeki hız bileşeni
$v$	$y$ yönündeki hız bileşeni
$t$	Zaman değişkeni
$\mathbf{V}$	Akışkan parçacıklarının hızı
$w$	$z$ yönündeki hız bileşeni
$O(h)$	$h$ 'inci mertebeden kesme hatası
$\rho$	Yoğunluk
$\sigma$	Normal gerilme
$\tau$	Teğetsel gerilme
$\nu$	Kinematik viskozite katsayısıdır
$\omega$	Burğaç
$\psi$	Akım fonksiyonu
$e_{ij}$	Deformasyon tensörü
$\epsilon_{ij}$	Birim zamandaki deformasyonlar tensörü
$V_x$	$x$ yönündeki sabit hız bileşenleri
$V_y$	$y$ yönündeki sabit hız bileşenleri
$D_x$	$x$ yönündeki difüzyon sabiti
$D_y$	$y$ yönündeki difüzyon sabiti

## ÖZET

### AKIŞKANLAR MEKANIĞININ TEMEL MODEL PROBLEMLERİNİN SONLU FARK ÇÖZÜMLERİ

Bu çalışma akışkanlar mekaniğinde karşılaşılan ve pek çok fiziksel olguyu temsil eden kimi diferansiyel denklemlere hassas çözümler üretmeyi amaç edinir. Bunu gerçekleştirebilmek için yüksek mertebeden sonlu farklar yaklaşımları kullanıldı. Dinamik problemlerde zaman integrasyonu için üçüncü mertebeden toplam değişim azaltan Runge-Kutta yöntemi kullanıldı.

Laplace, Poisson, bir-iki boyutlu konveksiyon-difüzyon, Burgers ve Navier-Stokes denklemlerinin temsil ettiği problemler incelenmiştir. Söz konusu problemlerin çözümü için MATLAB program kodları üretilmiştir ve hesaplanan sonuçların literatürle çok iyi bir uyum içinde olduğu görülmüştür.

## **SUMMARY**

### **FINITE DIFFERENCE SOLUTIONS OF FUNDAMENTAL MODEL PROBLEMS IN FLUID MECHANICS**

This work aims to produce accurate solutions for some differential equations encountered in fluid mechanics and that represent many physical phenomena. To achieve this, high-order finite difference schemes have been used. Time integration of dynamical problems has been carried out by using total variation diminishing third-order Runge-Kutta method.

The model problems governed by Laplace, Poisson, one- and two-dimensional convection diffusion, Burgers and Navier-Stokes equations have been dealt with. In order to solve the corresponding problems, program codes have been produced in MATLAB. The obtained results have been seen to be in very good agreement with the literature.

## 1. GİRİŞ

Uygulamalı bilimlerde ortaya çıkan çoğu problemler, kısmi diferansiyel denklemler ile temsil edilir. Örneğin; viskoz akışkanların hareket problemleri Navier-Stokes denklemleriyle modellenir. Kısmi diferansiyel denklemlere çözüm bulmak, modelleme açısından son derece önemlidir. Kısmi diferansiyel denklemlere çözüm üretmenin temelde iki yöntemi vardır. Birincisi; kısmi diferansiyel denklem için bir analitik (gerçek) çözüm ortaya koymaktır. Analitik çözüm, çözüm uzayının bütün noktalarındaki çözümü temsil eder ve gerçektir. Ancak; çoğu durumda bu denklemlerin analitik çözümlerini elde etmek mümkün değildir ya da zahmetlidir. İşte bu durumlar için geliştirilen ikinci yöntem olan sayısal yöntemler, kısmi diferansiyel denklemlerin çözümünde fonksiyonun ayrık noktalardaki değerleri ile türevleri arasında bir bağıntı kurarak çözüm uzayının istenen noktalarında çözüm elde etmemize olanak sunar ve büyük kolaylık sağlarlar. Sayısal yöntemler ile elde edilen çözümler, yaklaşık çözümlerdir ve çözüm uzayının belli noktalarında geçerlidir. Teknolojinin gelişmesiyle sayısal yöntemler yaygın olarak başvuru alan haline gelmiş, sonlu farklar, sonlu elemanlar, kübik spline fonksiyonu, pseudo-spektral, diferansiyel kare yapma ve sınır elemanları gibi sayısal yöntemler geliştirilmiştir.

Akışkanlar mekaniği, akışkan maddelerin hareketlerini analiz eden uygulamalı bilimlerin en önemli dallarından birisidir. Akışkan maddeler doğada çokça rastlanan ve insanların hayatında sıkça karşılaştığı maddelerdir. Bu nedenle akışkan maddelerin davranışı hakkındaki bilgiler birçok uygulamalı bilim dalı için önemlidir. Çoğu akışkan maddenin hareket problemleri kısmi diferansiyel denklemlerle temsil edilir ve bu denklemlerin noktasal davranışlarını gözlemek oldukça zahmetli bir iştir. Öte yandan pek çok akışkanın hareketini modelize eden denklemlerin analitik çözümü mevcut değildir. Bu nedenle son yıllarda hesaplamalı (sayısal) akışkanlar mekaniği popülerlik kazanmıştır. Gelişmiş bilgisayarlar aracılığıyla bu denklemlerin sayısal yöntemlerle yaklaşık çözümler bulunmasına olanak tanınmıştır.

Akışkan maddeler, sıkıştırılabilen ve sıkıştırılmayan akışkanlar olmak üzere ikiye ayrılırlar. Sıkıştırılabilen akışkanların hareketleri sırasında zamanla yoğunlukları değişir, sıkıştırılmayan akışkanların yoğunluğunda ise bir değişim olmaz.

Navier-Stokes denklemleri, hareket eden bir akışkanın hızı, basıncı ve yoğunluğu arasındaki bağıntıyı ifade eder. Bu denklemler 1800'lerin başında Stokes ve Navier tarafından birbirinden bağımsız olarak çıkarılmıştır. Bu denklemler Euler denklemlerinin bir genel halidir ve viskozitenin akışkan üzerindeki etkilerini içerirler. Navier-Stokes denklemleri, momentum korunum kanununun bir akışkan elemanına uygulanmasıyla türetilirler. Bu denklemlerin türetilmesi ve ifade ettikleri fiziksel anlam konusunda detaylı bilgi için Currie (2003), ve Muralidhar ve Biswas (2005) çalışmalarına başvurulabilir.

Navier-Stokes denklemleri, genellikle iki formda ifade edilirler. Birincisi sıkıştırılmayan akışkan denklemleridir, ikincisi ise sıkıştırılabilen akışkanların denklemleridir. Sıkıştırılmayan akışkan denklemleri, yoğunluğu zamanla değişmeyen akışkanların modellenmesinde kullanılırken; sıkıştırılabilen akışkan denklemleri, yoğunluğu zamanla değişebilen akışkanların modellenmesinde kullanılır. Biz, bu çalışmada sıkıştırılmayan akışkanların hareketini ifade eden denklemleri göz önüne alacağız.

Sıkıştırılmayan akışkanların problemleri; hidrolik, endüstriyel kanal akışları ve hava dinamiği gibi uygulamalı bilimlerin pek çok alanında karşımıza çıkar ve bu problemler matematiksel olarak Navier-Stokes denklemleri ile ifade edilirler.

Bu çalışmada ilk olarak akışkanların hareket denklemlerini ortaya koymak için temel bilgiler ile birlikte süreklilik ve momentum korunum denklemleri çıkarılışları ortaya konmuştur. Daha sonra bu korunum kanunlarından yola çıkılarak Newton tipi akışkanlar için Navier-Stokes denklemleri ortaya konulmuştur. Akışkanlar mekaniğindeki çoğu temel problemlerin modellenmesinde karşılaşılan pek çok fiziksel sistemin davranışını temsil eden Laplace, Poisson, konveksiyon-difüzyon ve Burgers gibi Navier-Stokes denklemlerine temel teşkil eden denklemlerin yanı sıra kararlı Navier-Stokes denklemlerinin çözümleri ele alınacaktır.



## 1.1 Akışkanlarla İlgili Bazı Temel Kavramlar

### 1.1.1 Hareket

Bir cismin, bir referans sisteminde durağan bir noktaya göre yer değiştirmesine hareket denir. Akışkanların hareketleri, kütle korunum kanunu, momentum korunum kanunu ve enerji korunum kanunu göz önünde bulundurularak matematiksel olarak modellenir.

### 1.1.2 Gerilme

Akışkan parçacıklarının hareketi, üzerine etkiyen kuvvetler ile gerçekleşir. Bu kuvvetler etki konumuna göre, iki ayrı grupta toplanırlar. Bunlardan birincisi yüzey kuvvetleridir (isminden de anlaşılacağı üzere parçacığın yüzeyine etkiyen kuvvetlerdir), bu kuvvetler basınç ve kayma gerilmelerini içerirler. İkincisi ise bünyesel kuvvetlerdir ve hacim içindeki her bir parçacığa direkt etki eden yerçekimi ve manyetik kuvvetler gibi kuvvetleri barındırırlar.

Gerilme, birim alana uygulanan kuvvet olarak ifade edilir. Bir başka ifadeyle, cisme bir dış kuvvet uygulandığında, kuvvetin uygulanan alana oranı gerilmeyi verir. Gerilme matematiksel olarak

$$\sigma = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta F}{\Delta A} \quad (1.1)$$

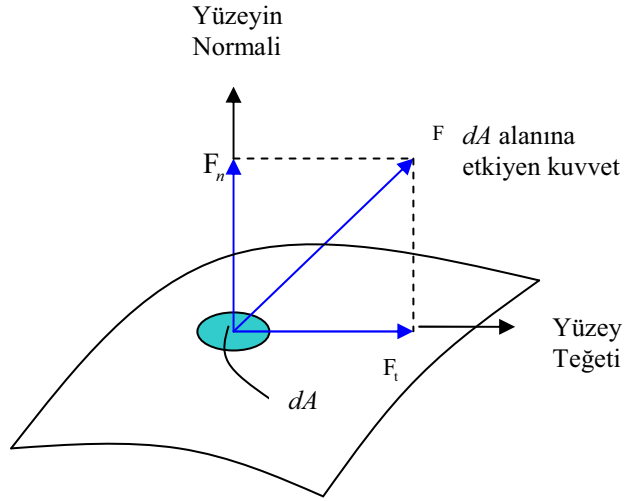
şeklinde ifade edilir. Burada  $\Delta F$  birim kuvvet,  $\Delta A$  birim yüzeydir.

Fiziksel anlamda gerilme, bir kuvvetin meydana getireceği deformasyona karşı cismin içinde meydana gelen birim yüzeye düşen iç kuvettir (Koparan, 2005).

Bir akışkan elemanın yüzeylerinde, etki doğrultusuna göre iki tür gerilme meydana gelir. Yüzey normali doğrultusunda meydana gelen gerilmeye, normal gerilme denir ve  $\sigma$  ile gösterilir; yüzey üzerinde teğetsel doğrultuda meydana gelen gerilmeye ise teğetsel gerilme veya kayma gerilmesi denir ve  $\tau$  ile gösterilir. Bir akışkan elemanına, biri normal ikisi teğetsel gerilme olmak üzere her bir yüzeye üç; toplamda dokuz adet gerilme bileşeni etki eder. Gerilmeyi belirtmek için çift indis kullanılır. Birinci indis gerilmenin doğrultusunu; ikinci indis ise gerilmenin etkidiği yüzeyi belirtir. Örneğin  $\tau_{xy}$ , yüzey normali  $x$  doğrultusundaki  $yz$  düzlemine etkiyen ve kendi yönü  $y$  doğrultusunda olan gerilmeyi belirtmektedir. Gerilme tensörü

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_{yy} & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_{zz} \end{bmatrix}$$

olarak yazılır. Gerilme tensörü köşegene göre simetriktir; yani  $\tau_{ij} = \tau_{ji}$ .



Şekil 1.1: Bir akışkana etkiyen yüzey kuvvetleri

### 1.1.3 İdeal akışkan ve Newtonian akışkan kavramı

Sonsuz küçük bir zorlama etkisinde dahi direnç göstermeden akış eylemine geçen akışkanlara, ideal akışkan denir. Bu tür akışkanlarda, akışa karşı direnci temsil eden viskozite yok kabul edilir ve bunlara viskozitesiz akışkan da denir. Doğada ideal akışkan yoktur ancak; matematiksel uygulamalarda kolaylık sağladığı için bu tür kabuller yapıp örnek modeller kurularak gerçek akışkan modellerine geçiş modelleri oluşturulur.

Doğada karşılaşılan akışkanların çoğunda az veya çok viskozite vardır. Bu tür akışkanlara gerçek akışkanlar denir.

Deformasyon hızı ile kayma gerilmesi arasında doğrusal bir orantı bulunduran akışkanlara Newton tipi akışkanlar denir. Bu orantı 1687 yılında Newton tarafından ortaya konulmuştur ve bu nedenle bu tip akışkanlara Newton tipi (Newtonian) akışkanlar denilmektedir.

Newton'un öne sürdüğü; laminer (düzgün akış çizgileri) ve paralel bir akışta, tabakalar arasındaki yüzey gerilimi ( $\tau$ ) tabakalara dik yöndeki hız gradyeni ( $du/dy$ ) ile orantılıdır. Bu orantı;

$$\tau = \mu \frac{du}{dy} \quad (1.2)$$

şeklindedir. Burada  $\mu$  sabiti, viskozite sabiti, viskozite veya dinamik viskozite değerini ifade etmektedir. Su ve gazların çoğu Newton'un ortaya koymuş olduğu bu kurala uyar ve Newton tipi akışkanlar olarak adlandırılırlar.

Deformasyon hızı ile kayma gerilmesi arasında doğrusal bir orantı bulundurmeyen akışkanlara Newton tipi olmayan (non-Newtonian) akışkanlar denir. Newton tipi olmayan akışkanlardaki yüzey gerilimi ile hız gradyeni arasındaki ilişki, Newton tipi akışkanlar için ifade edilen yüzey geriliminden çok daha karmaşık bir hal alır. Yoğurt, boya, hamur kıvamı, jel, jöle gibi maddeler Newton tipi olmayan akışkanlara örneklerdir.

#### 1.1.4 Akışkan viskozitesi

Bir akışkanın viskozitesi, akışkanın molekülleri arasındaki etkileşimden kaynaklanan; kayma kuvvetine karşı akışkanın göstermiş olduğu direncin büyüklüğünü ifade eden bir özelliktir. Bir akışkanın akmaya karşı gösterdiği iç direnç olarak da tanımlanabilir. Eğer sıvı aşırı akıcı ise, viskozitesi düşük ya da sıvı koyu kıvamlı ve akışı zorsa viskozitesi yüksek demektir. Örneğin hava çok düşük viskoziteye sahip iken buzun viskozitesi çok yüksektir. Bir akışkanın viskozitesi ne kadar yüksekse, kayma gerilmesi o kadar yüksek olurken; şekil değiştirme hızı da o kadar yavaş olur.  $\tau$  kayma gerilmesi,  $\theta$  deformasyon açısı ve  $\mu$  dinamik viskozite sabiti olmak üzere; kayma gerilmesi, deformasyon ve viskozite arasındaki bağıntı

$$\tau = \mu \frac{d\theta}{dt} \quad (1.3)$$

şeklinde ifade edilir.

#### 1.1.5 Reynolds sayısı ve kinematik viskozite

Akışkanlar mekaniğinde Reynolds sayısı, bir akışkanın, atalet kuvvetlerinin ( $v_s \rho$ 'nin) viskozite kuvvetlerine ( $\mu/d$ ) olan oranıdır ve Re ile gösterilir. Bu değer, atalet

kuvvetleri ile viskozite kuvvetlerinin belli bir akış şartı altında birbirine olan göreceli önemini verir. Bu sonuç, Reynolds tarafından 1883 yılında klasik boru deneyi geliştirilirken ortaya konulmuştur.  $v_s$  akışkanın hızı,  $d$  borunun çapı,  $\mu$  akışkanın dinamik viskozitesi,  $\nu$  akışkanın kinematik viskozitesi (dinamik viskozitenin yoğunluğa oranını ifade eden sabit,  $\nu = \mu/\rho$ ) ve  $\rho$  akışkanın yoğunluğu olmak üzere Reynolds sayısı aşağıdaki şekilde tanımlanır:

$$Re = \frac{\rho v_s d}{\mu} = \frac{v_s L}{\nu} = \frac{\text{Atalet kuvvetleri}}{\text{viskozite kuvvetleri}}$$

Akış alanının yüzeye yakın kısımlarında sürtünme kuvvetleri egemendir ve yüzeyden uzak kısımlarında ise, serbest akış alanında atalet kuvvetleri baskındır. Bu nedenle akış, hız ya da kuvvetler arasındaki orana göre sınıflandırılır. Bundan ötürü, Reynolds sayısı, düzgün akış ve türbülanslı akış gibi değişik akış rejimlerini nitelemek için kullanılan en yaygın boyutsuz sayıdır.

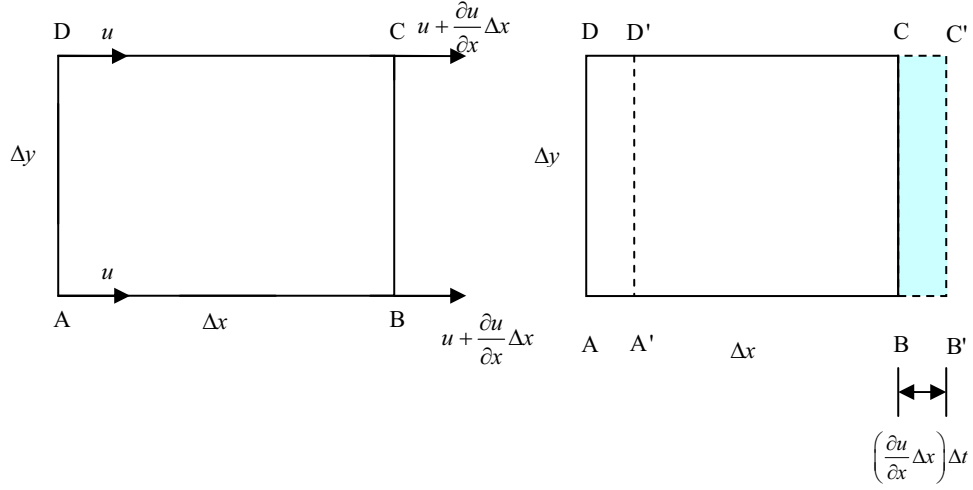
Bir boru içerisindeki akışta; hızın kademeli olarak artırılması halinde, laminer akıştan türbülanslı akışa geçiş, boru çapıyla ( $d$ ) tanımlanan Reynolds sayısının yaklaşık 2300 değerine varmasıyla gerçekleşir ki, ( $Re_{kritik} = \frac{ud}{\nu}$ ) buna kritik Reynolds sayısı denir. Burada  $u$  ortalama akış hızını,  $d$  karakteristik boru uzunluğunu ve  $\nu$  kinematik viskozite katsayısını göstermektedir.

### 1.1.6 Deformasyon

Sürekli bir akışkan, akım eylemi sırasında veya bir kuvvetin (veya gerilmenin) etkisi altında, içerisindeki her eleman belli bir süre sonrasında yeni bir yere ve konuma geçer. Buna yer ve şekil değiştirme (deformasyon) denir. Bir akışkan elemanı akım eylemi sırasında doğrusal (uzama) ve açısal olmak üzere iki türlü şekil değiştirmeye (deformasyon) uğrar.

Doğrusal deformasyonu ortaya koymak için Şekil 1.2'de gösterilen hız alanı etkisindeki elemanı göz önüne alıp,  $x$  yönündeki doğrusal şekil değiştirmeyi saptayalım. Bir akışkan elemanı üzerindeki hız alanı  $v=0, u \neq 0$  ve  $\partial u/\partial x \neq 0$  ise akışkan elemanı  $x$  doğrultusunda hareket ederken deformasyona uğrar.  $\Delta t$  zaman sonra A noktası  $u\Delta t$  kadar ilerleyerek A' noktasına hareket ederken, B noktası

$\left[ u + \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right) \Delta x \right] \Delta t$  kadar ilerleyerek B' noktasına gelecektir. Böylece  $\Delta t$  zaman aralığında  $x$  doğrultusunda doğrusal deformasyon:



Şekil 1.2: Bir akışkan elemanında meydana gelen doğrusal deformasyon

$$A'B' - AB = \frac{\partial u}{\partial x} \Delta x \Delta t \quad (1.4)$$

olur. Birim boydaki deformasyon

$$\frac{A'B' - AB}{AB} = \frac{\frac{\partial u}{\partial x} \Delta x \Delta t}{\Delta x} = \frac{\partial u}{\partial x} \Delta t \quad (1.5)$$

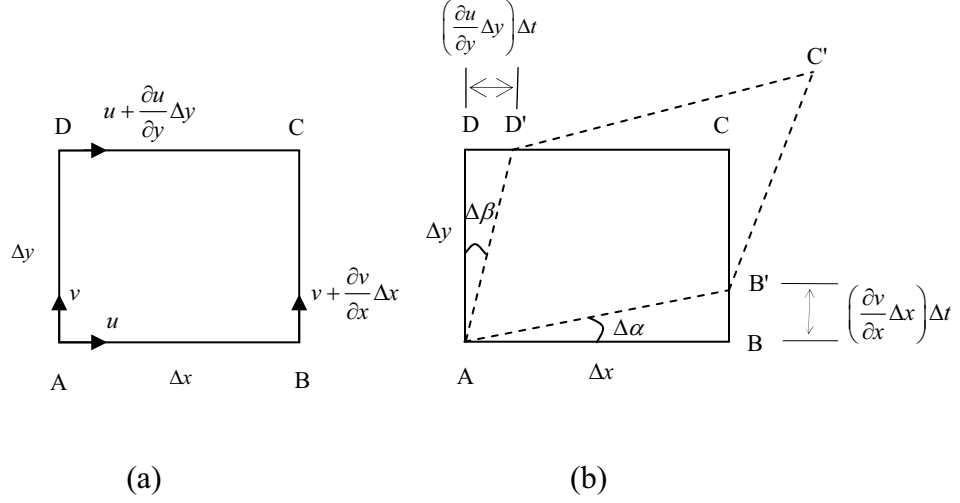
şeklinde bulunur.  $\Delta t$  zamanındaki  $x$  doğrultusundaki doğrusal şekil değiştirmeyi  $e_{xx}$  ile temsil edersek;

$$e_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} \Delta t \quad (1.6)$$

olur. Benzer işlemler  $y$  ve  $z$  doğrultuları için de yapılırsa  $y$  ve  $z$  doğrultularındaki doğrusal deformasyonlar sırasıyla

$$e_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y} \Delta t, \quad e_{zz} = \frac{\partial w}{\partial z} \Delta t \quad (1.7)$$

şeklinde ifade edilir.



Şekil 1.3: Bir akışkan elemanın açısal deformasyonu

Açısal deformasyonu ortaya koymak için  $xy$  – düzleminde akışkan elemanını göz önüne alalım ve daha sonra elde edilen sonuçları tüm durumlar için genelleleyelim.  $xy$  – düzleminde rotasyonel ve açısal deformasyona neden olan hız alanının değişimi Şekil 1.3’de gösterilmiştir. Şekil 1.3(a)’da gösterilen eleman üzerindeki hız alanında  $u$  ve  $v$  sıfırdan farklı,  $\partial u/\partial x = 0$ ,  $\partial v/\partial y = 0$  olup  $\partial u/\partial y$  ve  $\partial v/\partial x$  sıfırdan farklı ve pozitif iseler, bu hız alanının etkisinde akışkan parçacığı, kenar uzunlukları değişmeksizin açısal deformasyona maruz kalır ve Şekil 1.3(b)’deki gibi paralelkenar dörtgen şeklini alır. Buna göre,  $\Delta t$  zaman sonra

$$\tan \Delta\alpha \approx \Delta\alpha = \frac{(\partial v/\partial x)\Delta x\Delta t}{\Delta x} = \frac{\partial v}{\partial x}\Delta t \quad (1.8)$$

$$\tan \Delta\beta \approx \Delta\beta = \frac{(\partial u/\partial y)\Delta y\Delta t}{\Delta y} = \frac{\partial u}{\partial y}\Delta t \quad (1.9)$$

olur. Burada  $\Delta\alpha$  ve  $\Delta\beta$  çok küçük değerler olduğu için tanjant değerleri yerine kendi değerleri alınmıştır. Böylece  $\Delta t$  zaman aralığında  $xy$  – düzleminde oluşan toplam açısal deformasyon

$$\Delta\alpha + \Delta\beta = \left( \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) \Delta t \quad (1.10)$$

bulunur. Diğer düzlemler için benzer işlemler yapılırsa, sırasıyla  $xz$  – ve  $yz$  – düzlemlerindeki toplam açısal deformasyonlar, sırasıyla,

$$\Delta\alpha + \Delta\gamma = \left( \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) \Delta t \quad (1.11)$$

$$\Delta\beta + \Delta\gamma = \left( \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right) \Delta t \quad (1.12)$$

olarak bulunur.  $xy$  – düzlemindeki ortalama açısız deformasyon  $e_{xy}$  ile ifade edilirse, bu düzlemdeki ortalama açısız deformasyon

$$e_{xy} = \left( \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) \frac{\Delta t}{2} \quad (1.13)$$

olarak ifade edilir. Aynı şekilde  $xz$  – ve  $yz$  – düzlemlerindeki ortalama açısız deformasyonlar, sırasıyla,

$$e_{xz} = \left( \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) \frac{\Delta t}{2} \quad (1.14)$$

$$e_{yz} = \left( \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right) \frac{\Delta t}{2} \quad (1.15)$$

olur.

Doğrusal ve açısız deformasyonlar birleştirilerek bir tensör ile ifade edilecek olursa 9 bileşenli

$$\begin{bmatrix} e_{xx} & e_{yx} & e_{zx} \\ e_{xy} & e_{yy} & e_{zy} \\ e_{xz} & e_{yz} & e_{zz} \end{bmatrix}$$

deformasyon tensörü bulunur. Bu tensör  $\Delta t$  zamanındaki şekil değiştirmeyi ifade eden deformasyon tensörüdür. Birim zamandaki şekil değiştirmeyi bulmak için, elde edilen değerleri  $\Delta t$  ile bölersek birim zamandaki doğrusal ve açısız deformasyonlar

$$\varepsilon_{xx} = \frac{e_{xx}}{\Delta t} = \frac{\partial u}{\partial x} \quad (1.16)$$

$$\varepsilon_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \varepsilon_{zz} = \frac{\partial w}{\partial z} \quad (1.17)$$

$$\varepsilon_{xy} = \varepsilon_{yx} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) \quad (1.18)$$

$$\varepsilon_{xz} = \varepsilon_{zx} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) \quad (1.19)$$

$$\varepsilon_{yz} = \varepsilon_{zy} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right) \quad (1.20)$$

şeklinde bulunur. Buradan birim zamandaki deformasyon tensörü

$$\varepsilon_{ik} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{yx} & \varepsilon_{zx} \\ \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{yy} & \varepsilon_{zy} \\ \varepsilon_{xz} & \varepsilon_{yz} & \varepsilon_{zz} \end{bmatrix}$$

olur (Soğukoğlu, 2000).

### 1.1.7 Gerilme ile deformasyon arasındaki bağıntı

Akım ortamı içerisinde yer alan bir akışkan içerisinde, iki konum arasındaki hız farkının büyük olması, bu iki konum arasında olabilecek gerilmelerin de büyük olacağını gösterir. Bu durum bir akışkan elemanına etkiyen gerilmeler ile akışkan elemanın şekil değiştirmesi arasında bir bağıntının varlığının göstergesidir. Bu bağıntı bünye denklemi (gerilme ile şekil değiştirme arasındaki bağıntıyı veren denklem) ile verilir. Yani bünye denklemi, bir akışkanın bir kuvvet altında davranışını ifade eder. Newtonian akışkanların bünye denklemi (soğukoğlu, 2000)

$$\sigma_{jk} = -p\delta_{jk} + 2\mu \left( \varepsilon_{jk} - \frac{1}{3} \varepsilon_v \delta_{jk} \right) \quad (1.21)$$

şeklinindedir. Burada  $\varepsilon_v = \text{div } \mathbf{V}$  şeklinde tanımlanır ve  $\mathbf{V} = \mathbf{V}(x, y, z, t)$  akışkan parçacıklarının hızını ifade eden vektör alanıdır. Buradan gerilme ile deformasyon arasındaki bağıntılar aşağıdaki şekilde yazılır:

$$\sigma_{xx} = -p + 2\mu \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{2}{3} \mu \text{div } \mathbf{V}, \quad (1.22)$$

$$\tau_{yx} = \tau_{xy} = \mu \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right), \quad (1.23)$$

$$\sigma_{yy} = -p + 2\mu \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{2}{3} \mu \text{div } \mathbf{V}, \quad (1.24)$$

$$\tau_{zx} = \tau_{xz} = \mu \left( \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right), \quad (1.25)$$



$$\sigma_{zz} = -p + 2\mu \frac{\partial w}{\partial z} - \frac{2}{3}\mu \operatorname{div} \mathbf{V}, \quad (1.26)$$

$$\tau_{yz} = \tau_{zy} = \mu \left( \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right). \quad (1.27)$$

Sıkıştırılmayan Newtonian akışkanlar için  $\varepsilon_v = \operatorname{div} \mathbf{V} = 0$ . Buradan sıkıştırılmayan Newtonian akışkanlar için bünye denklemi

$$\sigma_{jk} = -p\delta_{jk} + 2\mu\varepsilon_{jk} \quad (1.28)$$

şeklinde olur. Burada  $\delta_{ik}$ , Kronecker deltasıdır. Dolayısıyla sıkıştırılmayan Newtonian akışkanlar için gerilme ile deformasyon arasındaki bağıntılar

$$\sigma_{xx} = -p + 2\mu \frac{\partial u}{\partial x}, \quad (1.29)$$

$$\tau_{yx} = \tau_{xy} = \mu \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right), \quad (1.30)$$

$$\sigma_{yy} = -p + 2\mu \frac{\partial v}{\partial y}, \quad (1.31)$$

$$\tau_{zx} = \tau_{xz} = \mu \left( \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right), \quad (1.32)$$

$$\sigma_{zz} = -p + 2\mu \frac{\partial w}{\partial z}, \quad (1.33)$$

$$\tau_{yz} = \tau_{zy} = \mu \left( \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \quad (1.34)$$

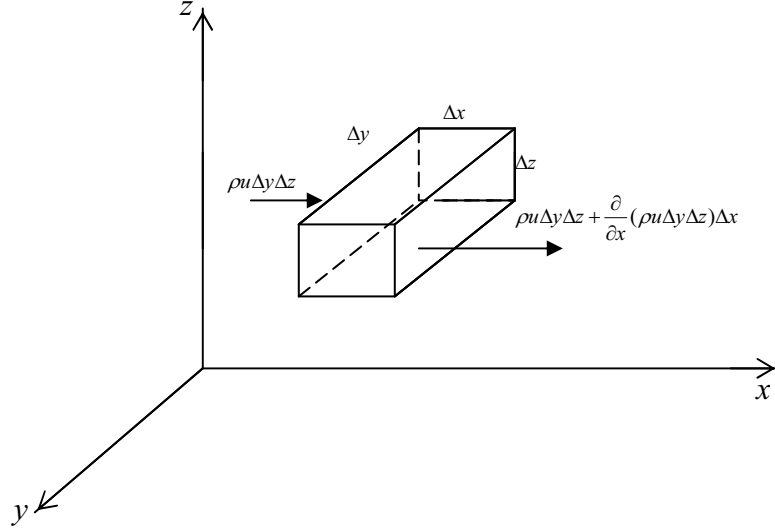
şeklinde ifade edilir.

### 1.1.8 Süreklilik (kütle korunum) denkleminin çıkarılışı

Süreklilik denklemi, kütle korunum yasasının akışkana uygulanmasıyla bulunur.

Akış alanı içerisinde akış hızının  $x, y$  ve  $z$  doğrultusundaki bileşenleri sırasıyla  $u, v, w$  olan; boyutları  $\Delta x, \Delta y$  ve  $\Delta z$  olan (Şekil 1.4'da görüldüğü gibi) dikdörtgenler prizması şeklindeki akış elemanını göz önüne alalım. Bu elemanın herhangi bir yüzünde, birim zamanda geçen akışkan kütlesi; akışkanın yoğunluğunun, yüzey

alanının ve hızının yüzey normal bileşeninin çarpımına eşittir. Şu halde elemana giren toplam kütle  $\rho u \Delta y \Delta z + \rho v \Delta x \Delta z + \rho w \Delta x \Delta y$ , elemandan çıkan toplam kütle



Şekil 1.4: Bir akışkan elemanına giren ve çıkan kütle miktarı

$\rho u \Delta y \Delta z + \rho v \Delta x \Delta z + \rho w \Delta x \Delta y + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u \Delta y \Delta z) \Delta x + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v \Delta x \Delta z) \Delta y + \frac{\partial}{\partial z}(\rho w \Delta x \Delta y) \Delta z$  şeklinde olacaktır. Birim zamanda elemana giren ve çıkan miktarlar arasındaki fark eleman içerisinde birikmiş toplam kütle (kütle değişimi) olacaktır. Eleman içerisindeki kütle değişimi  $\frac{\partial \rho}{\partial t} \Delta x \Delta y \Delta z$ . Burada  $\partial \rho / \partial t$ , hacim içindeki, yoğunluğun zamanla değişimidir. Kütle korunum prensibi gereğince, net akışkan girişi, hacim içindeki kütle değişimine eşit olacağından,

$$\text{Kütle değişim miktarı} = \text{Elemana giren kütle miktarı} - \text{Elemandan çıkan kütle miktarı}$$

olur. Buradan,

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} \Delta x \Delta y \Delta z = - \left( \frac{\partial}{\partial x}(\rho u) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho w) \right) \Delta x \Delta y \Delta z. \quad (1.35)$$

Böylece, üç boyutlu sıkıştırılabilir ve kararsız (unsteady) bir akış için süreklilik denklemi (kütle korunum denklemi)

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \left( \frac{\partial}{\partial x}(\rho u) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho w) \right) = 0 \quad (1.36)$$

olarak verilir.

Akışkanın kararlı (steady) olduğu akışlarda akışkan özellikleri zamanla değişmez. Bu durumda, yani kararlı ve sıkıştırılabilen akışkan için süreklilik denklemi

$$\frac{\partial}{\partial x}(\rho u) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho w) = 0 \quad (1.37)$$

şeklini alır.

Kararlı ve sıkıştırılmayan akışlarda akışın yoğunluğu sabittir ( $\rho = \text{sabit}$ ).

Yoğunluk zaman ve konuma göre değişmez. Bu durum için süreklilik denklemi

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (1.38)$$

şeklinde olur.

Göz önünde bulundurulan akışın iki boyutlu olması durumunda ( $\partial w / \partial z = 0$ ) süreklilik denklemi

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (1.39)$$

olur.

Eğer akış bir boyutlu ve kararlı ise  $y$  ve  $z$  yönlerindeki hız bileşenleri sıfır olacağından bu yönlerdeki hız bileşenlerinin tüm türevleri sıfır olur ( $\partial v / \partial y = 0$  ve  $\partial w / \partial z = 0$ ). Bu durumda süreklilik denklemi

$$\frac{du}{dx} = 0 \quad (1.40)$$

şeklinde olacaktır.

Süreklilik denkleminin çıkarılışı konusunda daha detaylı bilgi için Soğukoğlu (2000), Currie (2003), Muralidhar ve Biswas (2005) çalışmalarına başvurulabilir.

### 1.1.9 Momentum korunum denklemi

Momentum korunum prensibi, Newton'un ikinci hareket kanununun bir akışkan elemanına uygulanmasıdır. Newton'un ikinci hareket kanunu, herhangi bir  $t$  anında bir elemana etkiyen toplam kuvvet; o elemanın kütlesi ile elemanın aynı andaki ivmesinin çarpımına eşittir. Yani

$$\sum \mathbf{F} = m \cdot \mathbf{a} \quad (1.41)$$

şeklinde ifade edilir. Bir elemana etkiyen kuvvetler konumuna göre ikiye ayrılır. Bunlar, yüzey (basınç, viskoz gerilmeler gibi) kuvvetleri ve kütle (yerçekimi, elektromanyetik gibi) kuvvetleridir.

Eğer tanımlamaları birim kütle için yaparsak, (1.41) denklemi

$$\mathbf{a} = \frac{\sum \mathbf{F}}{m} \quad (1.42)$$

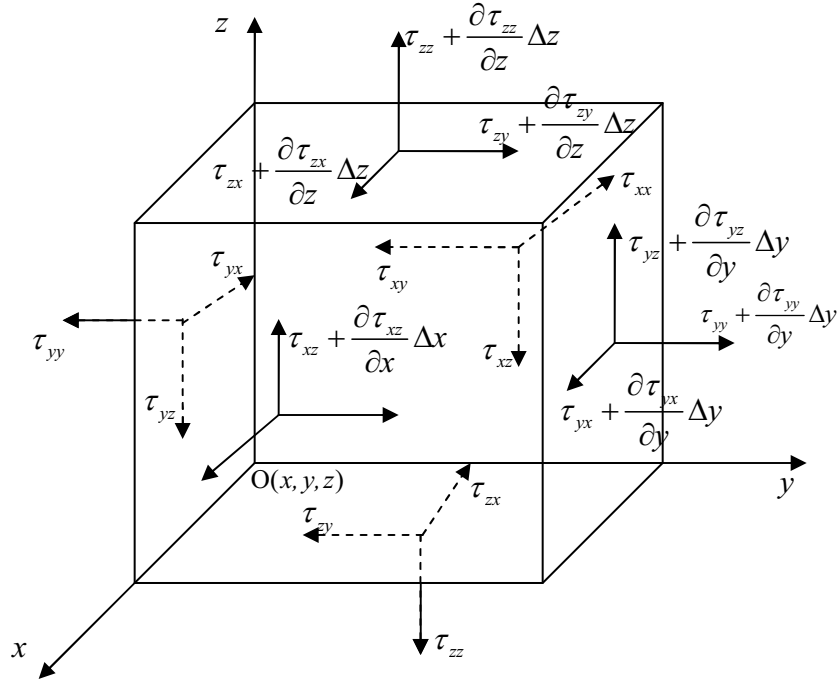
şeklinde olacaktır.  $\mathbf{a}$  ivmeyi;  $\mathbf{F}$ , birim kütleyle etkiyen kütle kuvvetlerini;  $\mathbf{R}$  ise, birim kütleyle etkiyen yüzey kuvvetlerini göstermek üzere (1.42) denklemi vektörel formda

$$\mathbf{a} = \frac{D\mathbf{V}}{Dt} = \mathbf{F} + \mathbf{R} \quad (1.43)$$

şeklinde olur. Burada  $\frac{D\mathbf{V}}{Dt}$ , ivme vektörünü gösterir ve

$$\frac{D\mathbf{V}}{Dt} = \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial x} u + \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial y} v + \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial z} w + \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t}$$

şeklinde tanımlanır.



Şekil 1.5: Akışkan elemanına etki eden yüzey kuvvetlerinin oluşturduğu gerilmeler

Şimdi bir akışkan elemanına etkiyen  $\mathbf{R}$  yüzey kuvvetini bulalım. Bunun için Şekil 1.5'de görülen akış alanı içerisinde  $O(x, y, z)$  noktasından geçen akışkan elemanını göz önüne alalım. Bu akışkan elemanına etkiyen yüzey kuvvetleri Şekil 1.5'de gösterilmiştir. Bu akışkan elemanına etkiyen yüzey kuvvetlerinin bileşkesinin  $x$ ,  $y$  ve  $z$  doğrultusundaki bileşenleri sırasıyla aşağıdaki şekilde yazabiliriz:

$\tau_{xy}$ , yüzey normali  $x$  doğrultusundaki  $yz$  – düzlemine etkiyen ve kendi yönü  $y$  doğrultusunda olan kayma gerilmesini temsil eden tensör olmak üzere  $x$  doğrultusundaki yüzey kuvveti

$$-\tau_{xx}\Delta y\Delta z + \left(\tau_{xx} + \frac{\partial\tau_{xx}}{\partial x}\Delta x\right)\Delta y\Delta z - \tau_{yx}\Delta x\Delta z + \left(\tau_{yx} + \frac{\partial\tau_{yx}}{\partial y}\Delta y\right)\Delta x\Delta z - \tau_{zx}\Delta x\Delta y + \left(\tau_{zx} + \frac{\partial\tau_{zx}}{\partial z}\Delta z\right)\Delta x\Delta y \quad (1.44)$$

şeklinde yazılır. (1.44) denkleminde gerekli sadeleştirmeleri yaparsak,  $x$  doğrultusundaki yüzey kuvveti

$$\left(\frac{\partial\tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial\tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial\tau_{zx}}{\partial z}\right)\Delta x\Delta y\Delta z \quad (1.45)$$

olur.  $y$  doğrultusundaki bileşen için benzer işlemler yapıldığında,  $y$  doğrultusundaki yüzey kuvveti

$$\left(\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial\tau_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial\tau_{zy}}{\partial z}\right)\Delta x\Delta y\Delta z \quad (1.46)$$

olur. Aynı şekilde benzer işlemler  $z$  doğrultusu için de yapılırsa,  $z$  doğrultusundaki yüzey kuvveti

$$\left(\frac{\partial\tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial\tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial\tau_{zz}}{\partial z}\right)\Delta x\Delta y\Delta z \quad (1.47)$$

şeklinde elde edilir. Göz önüne alınan akışkan elemanının kütlesi  $\rho\Delta x\Delta y\Delta z$  olduğundan birim kütleye isabet eden yüzey kuvvetlerinin bileşkesi olan  $\mathbf{R}$ 'nin  $x$ ,  $y$  ve  $z$  bileşenleri sırasıyla

$$R_x = \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial\tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial\tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial\tau_{zx}}{\partial z}\right), \quad (1.48)$$

$$R_y = \frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} \right), \quad (1.49)$$

$$R_z = \frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z} \right) \quad (1.50)$$

olarak elde edilir. Elde edilen bu değerler (1.43) denkleminde yerine konulursa, X, Y ve Z akışkanın birim kütesine etkiyen hacimsel kuvvetlerin bileşkesinin (**F**) x, y ve z bileşenleri olmak üzere momentum korunum denklemi izdüşümler olarak

$$\frac{Du}{Dt} = X + \frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \right), \quad (1.51)$$

$$\frac{Dv}{Dt} = Y + \frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} \right), \quad (1.52)$$

$$\frac{Dw}{Dt} = Z + \frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z} \right) \quad (1.53)$$

şeklini alır. Burada ivme vektörü izdüşümleri, maddesel türev gereğince

$$\frac{Du}{Dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z}, \quad (1.54)$$

$$\frac{Dv}{Dt} = \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z}, \quad (1.55)$$

$$\frac{Dw}{Dt} = \frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} \quad (1.56)$$

şeklindedir. Momentum korunum denklemi vektörel formda, gerilme tensörüyle

$$\frac{D\mathbf{V}}{Dt} = \mathbf{F} + \frac{1}{\rho} \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} \quad (1.57)$$

şeklindedir. Burada yapılan çalışmalar için çoğunlukla Soğukoğlu (2000) takip edilmiştir.

#### 1.1.10 Hareket denklemleri

Önceki bölümde elde edilen gerilme değerlerinin diferansiyel momentum hareket denkleminde yerine yazılmasıyla

x momentum;

$$\begin{aligned} \frac{Du}{Dt} = X - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} - \frac{2}{3\rho} \frac{\partial}{\partial x} (\mu \operatorname{div} \mathbf{V}) + \frac{2}{\rho} \frac{\partial}{\partial x} \left( \mu \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial y} \left[ \mu \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right] \\ + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial z} \left[ \mu \left( \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \right] \end{aligned} \quad (1.58)$$

y momentum;

$$\begin{aligned} \frac{Dv}{Dt} = Y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} - \frac{2}{3\rho} \frac{\partial}{\partial y} (\mu \operatorname{div} \mathbf{V}) + \frac{2}{\rho} \frac{\partial}{\partial y} \left( \mu \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial z} \left[ \mu \left( \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \right] \\ + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x} \left[ \mu \left( \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) \right] \end{aligned} \quad (1.59)$$

z momentum;

$$\begin{aligned} \frac{Dw}{Dt} = Z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} - \frac{2}{3\rho} \frac{\partial}{\partial z} (\mu \operatorname{div} \mathbf{V}) + \frac{2}{\rho} \frac{\partial}{\partial z} \left( \mu \frac{\partial w}{\partial z} \right) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x} \left[ \mu \left( \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) \right] \\ + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial y} \left[ \mu \left( \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right) \right] \end{aligned} \quad (1.60)$$

şeklinde Navier-Stokes denklemleri elde edilir. Bu denklemler vektörel formda

$$\frac{D\mathbf{V}}{Dt} = \mathbf{F} - \frac{1}{\rho} \mathbf{grad} p + \nu \nabla^2 \mathbf{V} + \frac{\nu}{3} \mathbf{grad} \operatorname{div} \mathbf{V} \quad (1.61)$$

şeklinde ifade edilir.

Eğer bu denklemler sıkıştırılmayan akışkanlar ( $\operatorname{div} \mathbf{V} = 0$ ) için ifade edilirse Navier- Stokes denklemleri

x momentum;

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} = X - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) \quad (1.62)$$

y momentum;

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} = Y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right) \quad (1.63)$$

z momentum;

$$\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} = Z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) \quad (1.64)$$

şeklinde olur ve vektörel formda

$$\frac{D\mathbf{V}}{Dt} = -\frac{1}{\rho} \mathbf{grad} p + \nu \nabla^2 \mathbf{V} + \mathbf{F} \quad (1.65)$$

olur. Bu diferansiyel denklemler sıkıştırılmayan Newtonian akışkanların hareketini ifade eden Navier-Stokes denklemleridir. Fransız matematikçi Navier ve İngiliz mekanikçi Stokes tarafından ortaya konan bu hareket denklemleri, süreklilik denklemiyle birlikte ele alındığında sıkıştırılmayan Newtonian akışkanların akışı için tam bir matematiksel model oluştururlar. Bu üç denklem, süreklilik denklemi ile birlikte ifade edildiğinde dört denklem ve dört bilinmeyenli ( $u, v, w$  ve  $p$ ) bir sistem oluşturur.

### 1.1.11 Navier-Stokes ve diğer model denklemler

Üç boyutlu sıkıştırılmaz viskoz bir akışkanın hareketi, üç momentum denkleminde oluşan Navier Stokes denklemleri

$$\frac{\partial u'}{\partial t'} + u' \frac{\partial u'}{\partial x'} + v' \frac{\partial u'}{\partial y'} + w' \frac{\partial u'}{\partial z'} = -\frac{1}{\rho'} \frac{\partial p'}{\partial x'} + \nu \left( \frac{\partial^2 u'}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 u'}{\partial y'^2} + \frac{\partial^2 u'}{\partial z'^2} \right) \quad (1.66)$$

$$\frac{\partial v'}{\partial t'} + u' \frac{\partial v'}{\partial x'} + v' \frac{\partial v'}{\partial y'} + w' \frac{\partial v'}{\partial z'} = -\frac{1}{\rho'} \frac{\partial p'}{\partial y'} + \nu \left( \frac{\partial^2 v'}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 v'}{\partial y'^2} + \frac{\partial^2 v'}{\partial z'^2} \right) \quad (1.67)$$

$$\frac{\partial w'}{\partial t'} + u' \frac{\partial w'}{\partial x'} + v' \frac{\partial w'}{\partial y'} + w' \frac{\partial w'}{\partial z'} = -\frac{1}{\rho'} \frac{\partial p'}{\partial z'} + \nu \left( \frac{\partial^2 w'}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 w'}{\partial y'^2} + \frac{\partial^2 w'}{\partial z'^2} \right) \quad (1.68)$$

ve süreklilik denklemi

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (1.69)$$

ile verilir. Akışın iki boyutlu olması durumunda iki momentum denkleminde oluşan Navier-Stokes denklemleri ve süreklilik (kütle korunum) denklemi ile akışkanın hareketi modellenir. Bunlar sırasıyla

$$\frac{\partial u'}{\partial t'} + u' \frac{\partial u'}{\partial x'} + v' \frac{\partial u'}{\partial y'} = -\frac{1}{\rho'} \frac{\partial p'}{\partial x'} + \nu \left( \frac{\partial^2 u'}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 u'}{\partial y'^2} \right) \quad (1.70)$$



$$\frac{\partial v'}{\partial t'} + u' \frac{\partial v'}{\partial x'} + v' \frac{\partial v'}{\partial y'} = -\frac{1}{\rho'} \frac{\partial p'}{\partial y'} + \nu \left( \frac{\partial^2 v'}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 v'}{\partial y'^2} \right) \quad (1.71)$$

$$\frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial v'}{\partial y} = 0 \quad (1.72)$$

şeklinindedir. Burada  $u'$ ,  $v'$ ;  $x'$ ,  $y'$  ve  $t'$  bağımsız değişkenlerine bağlı hız bileşenlerini,  $p'$  basıncı,  $\rho'$  ile  $\nu$  sırasıyla yoğunluk ve kinematik viskozite sabitlerini ifade etmektedir.

(1.70)-(1.72) denklemleri;  $L'$  karakteristik uzunluğu,  $U'$  karakteristik hızı ifade eden değişkenleri tanımlayarak boyutsuz formda ifade edilebilir (Benzer işlemler üç boyutlu (1.66)-(1.69) Navier-Stokes denklemleri için de yapılabilir). Bu durumda boyutsuz değişkenler

$$u = \frac{u'}{U'}, \quad v = \frac{v'}{U'}, \quad x = \frac{x'}{L'}, \quad y = \frac{y'}{L'} \\ t = \frac{t'}{(L'/U')}, \quad p = \frac{p'}{U'^2 \rho'} \quad (1.73)$$

şeklinde olur. Bu değişkenler, (1.70)-(1.72) denklemlerinde yerine konulursa

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{\text{Re}} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right), \quad (1.74)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{1}{\text{Re}} \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right), \quad (1.75)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0. \quad (1.76)$$

Burada ifade edilen

$$\text{Re} = \frac{U' L'}{\rho'} \quad (1.77)$$

sabiti akımın Reynolds sayısı olarak tanımlanır.

(1.74)-(1.76) denklemleri Navier-Stokes denklemlerinin esas değişkenler  $u, v$  ve  $p$  ile formülasyonudur ( $u, v - p$  formülasyonu) ve iki boyuttaki katmerli sıkıştırılmayan viskoz akışkanların hareketini ifade eden denklemlerdir.

Akım fonksiyonu ve burgaç formüle edilerek Navier- Stokes denklemlerinin başka formlarda ifadesi elde edilebilir. Burgaç ve akım fonksiyonu,  $\omega$ ,  $\psi$ , sırasıyla,

$$\omega = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \quad (1.78)$$

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (1.79)$$

şeklinde tanımlanır. (1.79) denklemleri ile süreklilik denklemleri otomatik olarak sağlanır. (1.79) denklemindeki terimleri (1.78) denkleminde yerine yazarsak,

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = -\omega \quad (1.80)$$

şeklinde akım fonksiyonu için denklem elde edilir. (1.74) denkleminin her iki tarafının  $y$  'ye göre ve (1.75) denkleminin her iki tarafının  $x$  'e göre türevleri alınarak farklarının alınması ile burgaç denklemleri

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial \omega}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \omega}{\partial y} = \frac{1}{\text{Re}} \left( \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} \right) \quad (1.81)$$

şeklinde bulunur. (1.80) ve (1.81) denklemleri iki boyutlu kararsız (unsteady) Navier-Stokes denklemlerinin burgaç-akım fonksiyonu ile ifadesidir. (1.81) denklemleri akımın kararlı (steady) olması durumunda aşağıdaki formda ifade edilir:

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial \omega}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \omega}{\partial y} = \frac{1}{\text{Re}} \left( \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} \right). \quad (1.82)$$

(1.80) ve (1.82) denklemleri iki boyutlu kararlı (stasyonel(steady)) sıkıştırılmayan akışkan için Navier-Stokes denklemlerinin burgaç  $\omega(x, y)$  ve akış  $\psi(x, y)$  fonksiyonu ile belirtilmesidir. Bu denklemlerin üç boyutlu çıkarılışı için Fletcher'in (1991) çalışmasına başvurulabilir.

Navier-Stokes denklemlerinin alternatif bir formu (1.81) denkleminde  $\omega$  'nin (1.80) denkleminde bulunan ifadesinin yerine yazılmasıyla

$$\frac{\partial}{\partial t} (\nabla^2 \psi) + \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial}{\partial x} (\nabla^2 \psi) - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} (\nabla^2 \psi) = \frac{1}{\text{Re}} \nabla^4 \psi \quad (1.83)$$

şeklinde lineer olmayan dördüncü mertebeden eliptik bir denklem bulunur.

Bir boyutlu Navier-Stokes denklemi

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{\text{Re}} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (1.84)$$

şeklinde ifade edilir. Basıncın gradient etkileri, momentum denkleminde ihmal edilmesi durumunda (1.84) denklemi

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (1.85)$$

olur. Burada  $\nu = \mu/\rho$  kinematik viskozite katsayısıdır. (1.85) denklemi bir boyutlu Burgers denklemi olarak bilinir. Bu denklem, lineer olmayan bir boyutlu akış denkleminin bütün davranışını barındırır (Cebeci vd., 2005). Burgers denklemi, ısı iletimi, esneklik, gaz dinamiği, türbülans ve viskoz akışkan içerisindeki şok dalga hareketinin yaklaşık teorisi gibi çeşitli fiziksel olayların modellenmesinde kullanılır.

(1.62) denkleminde kütle kuvvetleri ihmal edilir;  $Du/Dt = 0$  olduğu kabul edildiği ve akışın dikdörtgenel bir kanalda tam gelişmiş katmerli (laminar) bir akış gerçekleştiği düşünülürse aşağıdaki model denklem bulunur (Cebeci vd., 2005):

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}. \quad (1.86)$$

(1.80) denklemi  $\psi(x, y)$  akım fonksiyonu ve (1.86) denklemi  $u$  hız bileşenine göre iki boyutlu Poisson denklemleridir. (1.80) denkleminin çözümüyle akımı; (1.86) denkleminin çözümüyle de akımın herhangi bir noktadaki hız değeri bulunur. Ayrıca, yük yoğunluğu ve nokta yük içeren elektrik alan problemlerinin potansiyel dağılımı Poisson denkleminin çözümüyle elde edilir.

Bir harekette hız vektörünün bir potansiyelden türemesi halinde, hareketin girdap vektörünün sıfır olması gerekmektedir. Bu ise, hareketin girdapsız olduğu anlamına gelir. Bir hareketin girdapsız olabilmesi için, akışkan ortamın ideal, yani viskositesiz ( $\mu = 0$ ), başka bir ifadeyle, iç sürtünmesiz olması lazımdır. Bunun karşıtı olarak; ideal bir akışkanın ( $\mu = 0$ ) akımında hareket girdapsız olur. Hareketin girdapsız olması halinde ise, hız vektörü daima skaler bir  $\phi(x, y, z, t)$  fonksiyonunun gradyenti olacaktır. Sıkıştırılmayan akışkan ortamların, kararlı düzlemsel hareketinde girdap

vektörünün  $z$  bileşeni de sıfır, yani hareket girdapsız olduğunda hız vektörü  $\mathbf{V} = \mathbf{grad} \phi$  bir potansiyelden türemekte ve hız alanı

$$u = \frac{\partial \phi}{\partial x}, v = \frac{\partial \phi}{\partial y} \text{ ve } w = 0 \quad (1.87)$$

şeklinde olmaktadır. Bu durumda aynı zamanda sıkışmazlık şartını ( $\text{div} \mathbf{V} = 0$ ) yazacak olursak

$$\text{div} \mathbf{V} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = 0 \quad (1.88)$$

yani

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = 0 \quad (1.89)$$

olur (Soğukoğlu, 2000). (1.89) denklemi iki boyutlu Laplace denklemidir. (1.89) denkleminin çözümü, ideal bir akışkanın hız potansiyelini verir. Ayrıca, Laplace denkleminin çözümleri, herhangi bir yük etkisi bulunmayan elektrik alan problemlerinin çözümünde, elektromanyetizma, yerçekimi potansiyelinin davranışını da açıklar.

Bu çalışmada, Navier-Stokes denklemlerine benzer özelliklerinden dolayı konveksiyon-difüzyon denklemlerinde yer verilecektir.  $V_x$  ve  $V_y$ , sırasıyla  $x$  ve  $y$  yönündeki sabit hız bileşenleri;  $D_x$ ,  $D_y$  sırasıyla  $x$  ve  $y$  yönlerindeki difüzyon sabitleri olmak üzere lineer iki boyutlu konveksiyon-difüzyon denklemi

$$\frac{\partial u}{\partial t} + V_x \frac{\partial u}{\partial x} + V_y \frac{\partial u}{\partial y} = D_x \frac{\partial u}{\partial x^2} + D_y \frac{\partial u}{\partial y^2} \quad (1.90)$$

şeklindedir. (1.90) denklemi matematiksel olarak iki boyutlu Navier-Stokes denklemlerinin  $x$ -momentum denklemiyle benzer özellikler taşır. Bu nedenle bir model denklem olarak göz önüne alınmıştır. (1.90) denkleminin bir boyutlu ifadesi

$$\frac{\partial u}{\partial t} + V_x \frac{\partial u}{\partial x} = D_x \frac{\partial u}{\partial x^2} \quad (1.91)$$

şeklindedir. (1.91) denklemi bir boyutlu konveksiyon-difüzyon denklemidir. Konveksiyon-difüzyon denklemi hesaplamalı hidrolik ve akışkanlar dinamiğinde

kütle, ısı, enerji, hız, vortisite gibi niceliklerin konveksiyon ve difüzyonunun modellenmesinde görülür (Dehghan ve Mohebbi, 2008).

Navier-Stokes denklemleri doğrusal olmayan denklemlerdir. Bu nedenle çözümlerini bulmak zordur. Genel olarak bu denklemlerin bilinen bir analitik çözümü yoktur. Hesaplamalı akışkanlar dinamiği, genellikle Navier-Stokes denklemlerinin bazı formları ile çalışmayı gerektirir. Bu formlar, genellikle bazı kabullerin yapılması ile Navier-Stokes denklemlerin indirgenmesiyle elde edilir. Daha sonra sayısal bir algoritmanın geliştirilmesiyle bu denklemlerin çözümü bulunur.

Bu çalışmada amacımız yukarıda ifade edilen model denklemlerin yüksek mertebeden sonlu fark çözümlerini ortaya koymaktır.

### **1.1.12 Literatür taraması**

Hareket eden bir akışkanın hızı, basıncı ve yoğunluğu arasındaki bağıntıyı ifade eden Navier-Stokes denklemleri 1800'lerin başında G. G. Stokes ve L. M. Navier tarafından birbirinden bağımsız olarak türetilmiştir ve günümüzde de önemlerini korumaya devam etmektedirler. Ortaya konuldukları zamandan günümüze değin bu denklemler üzerinde pek çok çalışma yapılmıştır. Bu çalışmalardan bazıları denklemlerin tam (analitik) çözümlerini, bazıları da sayısal çözümlerini elde etmek için yapılmıştır. Ancak günümüze kadar bu denklemlerin tam çözümlerini ifade eden bir çözüm ortaya konamamıştır. Bu nedenle bu denklemlerin sayısal çözümleri son derece önemlidir. Bu denklemlerin sayısal çözümleri üzerinde yapılan bazı çalışmalar kronolojik sıraya göre aşağıda verilmeye çalışılmıştır:

Harlow ve Welch (1965) zamana bağlı sıkıştırılmayan akışkanların akışı üzerine sayısal araştırmalar için yeni bir teknik tanımlamışlardır. Navier-Stokes denklemlerinin tam ifadesi sonlu fark formunda yazılmış ve çözümler sonlu zaman adımının artımı ile yapılmıştır. Denklemlerdeki bağımlı değişkenler hız ve basınçtır. Ayrıca akışkanı hareket ettiren işaretleyici parçacıklar kümesi kullanılmıştır. Kullanmış oldukları teknik, işaretleyici ve hücre yöntemi (marker and cell method) olarak adlandırılır.

Burggraf (1966) üst sınırı sabit bir hızla hareket eden bir kare oyuktaki akış için Navier-Stokes denklemlerinin burgaç-akım fonksiyonu formülasyonunun sonlu fark çözümlerini ortaya koymuştur. Bu çalışmada çözümler, Reynolds sayısının 0, 100 ve 400 değerleri için verilmiştir.

İki boyutlu, kararlı (steady), viskoz, sıkıştırılmayan sıvıların bir kanal içerisindeki akışı, Greenspan (1969) tarafından detaylı bir şekilde incelenmiştir. Kullanılan yöntem, bir sonlu fark yaklaşımıdır. Yöntem, o zamana kadar kullanılan zamana bağlı yöntemlere göre daha ekonomik ve daha iyi sonuçlar vermiştir.

Marshall ve Spiegel (1973) bir kare oyuktaki kararlı akış probleminin sonlu fark çözümlerini vermişlerdir. Ortogonal koordinat sisteminin bir yönü üzerinde tam gelişmişlik kabul edilerek üç boyutlu Navier-Stokes denklemleri yarı-iki boyutlu kararlı, sıkıştırılmaz viskoz akış için oluşturulmuştur. Meric ve Macken (1974) bir kanal içerisindeki dikdörtgenel oyuktaki akış problemi için yarı-iki boyutlu Navier-Stokes denklemlerinin sayısal çözümlerini bulmuşlardır. Üzerinde çalışılan bütün Reynolds sayıları için sonlu fark yöntemi kullanarak yakınsamış çözümler vermişlerdir.

Hughes vd. (1979) penaltı fonksiyonu formülasyonunu kullanarak kararlı ve kararlı olmayan (unsteady) Navier-Stokes denklemlerine çözüm üretmişlerdir. Çalışmalarında sonlu eleman matrislerini elde etmek için Galerkin tipi yaklaşımı kullanarak denklemleri ayrıştırmışlardır. Newton-Raphson yöntemini kullanarak iteratif olarak ortaya çıkan sistemi çözmüşlerdir. Kararlı olmayan (unsteady) durum için zamansal türeve bir kapalı tahmin etme-düzeltilme yöntemi (implicit predictor-corrector method) kullanarak çözüm bulmuşlardır.

Goda (1979) iki ve üç boyutlu oyuk akış probleminin çözümlerini hesaplamak için Reynolds sayısının 1000'e kadar olan değerleri için kapalı fark şemaları kullanarak çok adımlı bir teknik vermiştir. Takemitsu (1980), Reynolds sayısının 100, 1000 arasındaki değerlerde; kararlı oyuk akış probleminin çözümlerini elde etmek için kapalı (implicit) ardışık yaklaşım yöntemini vermiştir. Bu çalışmalarda, Navier-Stokes denklemlerinin  $u, v - p$  formülasyonu göz önüne alınmıştır.

Sani vd. (1981) zamana bağlı Navier-Stokes denklemlerini penaltı Galerkin sonlu eleman yöntemini kullanarak göz önüne almışlardır. Hız için bilineer yaklaşımı ve hızın türevleri için sabit yaklaşımı kullanarak Poiseuille akışını çözmüşlerdir.

Donea vd. (1982) sonlu eleman yöntemini kullanarak, zamana bağlı sıkıştırılmayan viskoz akışları göz önüne almışlardır. Zamanın integrasyonunda kesirli adım yaklaşımıyla Navier-Stokes denklemlerinin esas değişkenler  $u, v$  ve  $p$  ile formülasyonu için çözüm ortaya koymuşlardır. Yöntemi test etmek amacıyla birkaç

problem göz önüne alınmış kararlı olmayan oyuk akış problemine,  $Re = 1000$  için  $t = 5, 10$  ve  $15$  zaman değerlerinde çözüm vermişlerdir.

Ghia vd. (1982) iki boyutlu Navier-Stokes denklemlerinin burgaç-akım fonksiyonu formülasyonunu kullanarak sonlu fark çözümlerini Reynolds sayısının büyük değerleri için vermişlerdir. Model problem olarak kare oyuk içerisindeki akışı kullanmışlardır.

Hudson ve Dennis (1985) düz bir plaka üzerindeki kararlı akışı göz önüne alarak  $[0.1, 20]$  aralığındaki Reynolds değerleri için Navier-Stokes denklemlerinin sayısal çözümlerini vermişlerdir. Girdap boyutları ve vorteks merkezleri gösterilmiş ve diğer değerlendirmeler ile karşılaştırma yapılmıştır. Akım çizgileri ile eş vortisite (equivorticity) çizgileri verilmiştir. Kullanılan aralıktaki Reynolds sayıları için bulunan kararlı akış sonuçlarının, deneysel sonuçlar ile iyi bir uyum içinde olduğu görülmüştür.

Abdallah (1987a) Navier-Stokes denklemlerinin  $u, v - p$  formülasyonu ile bir kare oyuktaki akış probleminin sonlu fark çözümlerini vermiştir. Aşamalı olmayan (non-staggered) ızgara noktalarını kullanarak basınç için Neumann sınır koşullu Poisson denklemi çözülmüştür. Yazarın önerdiği yöntemle hız alanları verilmiş bir oyuktaki basınç katsayıları hesaplanmıştır.

Abdallah (1987b) sıkıştırılamaz Navier-Stokes denklemlerinin  $u, v - p$  formülasyonu ile sayısal çözümlerini aşamalı olmayan ızgara noktaları kullanılarak vermiştir. Bu çalışmada basınç denklemi aşamalı olmayan ızgara noktalarında momentum denklemi ile iteratif olarak çözülmüştür. Bu durumda basınç denkleminin çözümü sadece basıncı sağlamaz; ayrıca dolaylı olarak süreklilik denklemini de sağlar. Navier-Stokes denklemlerinin  $u, v - p$  formülasyonu, burgaç-akım fonksiyonu ile formülasyonuna göre üç boyutta uygulanabilirlik avantajına sahip olduğu görülmüştür.

Soulaimani vd. (1987) iki boyutta sıkıştırılamaz akışlar için çeşitli üçgensel elemanlar üzerinde bir simetrik sayısal deney (symmetric numerical experiment) uygulamışlardır. Çözüm, penaltı fonksiyon yaklaşımı üzerinden yapılmıştır. Kübik oyuk problemi göz önüne alınarak çözüm üç boyuta genişletilmiş ve  $Re = 100, 400$  değerleri için çözüm verilmiştir.

Soh ve Goodrich (1988)  $u, v - p$  bağımlı değişkenleriyle sıkıştırılmaz Navier-Stokes denklemlerini, zamanda hassas olan bir sonlu fark yaklaşımı ile vermişlerdir.

Casulli (1988) adveksiyon ve difüzyon terimleri için bir açık (explicit) Lagrangian yaklaşımı vermiştir. Konveksiyon-difüzyon denklemlerinde sonlu fark şemalarının oluşturmuş olduğu yapay difüzyonu indirgemek ve stabiliteyi geliştirmek için bu yaklaşım türetilmiştir. Bu konseptler Navier-Stokes denklemlerindeki konvektif ve viskoz terimleri ayırıştırmada kullanılmıştır. Basınç gradiyenti ve hız diverjansı kapalı sonlu fark yaklaşımı ile ayırıştırılmıştır. Yöntemin stabilitesi Reynolds sayısının artması durumunda daha az kısıtlayıcı olacağı gösterilmiştir. Büyük zaman adımlarında hassas neticeler bulunmuştur. Ortaya konan sayısal yöntemin hassasiyeti, oyuk akış problemi ile verilmiştir.

Anderson (1989) çalışmasında iki boyutlu sıkıştırılmaz, viskoz Navier-Stokes denklemlerinin burgaç formulasyonu için farklı sınır koşullarını önermiştir. Sınır koşulları sonlu fark şeması ile birleştirilmiş ve sınırlarda teğetsel hız koşullarını sağlayan vortisiti değerleri oluşturulmuştur. Bu sonlu fark yöntemi ile bir dairesel silindiri geçen akış probleminin çözümlerini vermiştir. Ayrıca, bir yarı sonsuz düz plaka üzerindeki akışı ifade eden Prandtl sınır tabaka denklemi için bir fark şeması ve hesaplama sonuçları verilmiştir.

Nishida ve Satofuka (1992) Navier-Stokes denklemlerinde yer alan uzaysal değişkenleri değiştirilmiş diferansiyel kare yapma yöntemi (modified differential quadrature-MDQ) ile; zamansal değişkeni dört adımlı Runge-Kutta yöntemi ile; eliptik Poisson denklemini değişken-mertebeli çok-ızgara noktalı yöntemini (variable-order multi-grid method) kullanarak çözmüşlerdir. Kare oyuk problemini Reynolds sayısının 100, 1000 ve 3200 değerleri için çözümleridir.

Li vd. (1995) dördüncü mertebeden kompakt sonlu fark şemalarını kullanarak Navier-Stokes denklemlerinin burgaç-akım fonksiyonu formülasyonu ile çözmüşlerdir. Verilen yöntemin avantajı, dördüncü mertebeden şemanın küçük Reynolds sayıları için doğrudan iteratif bir yöntem ile çözme imkanı sunmasıdır.  $Re \leq 7500$  Reynolds sayısının değerleri için AAG (SOR) yöntemi kullanılarak oyuk problemi çözülmüştür.

Erturk vd. (2005) iki boyutlu kararlı sıkıştırılmayan bir akışkanın üst sınırı hareketli oyuktaki akış problemini, Navier-Stokes denklemlerinin akım fonksiyonu ve burgaç



formulasyonu ile ifadesini göz önüne alarak sayısal çözümlerini vermişlerdir. Reynolds sayısının 21000 değerine kadar olan çözümleri gösterilmiştir. Akım fonksiyonu ve burgaç denklemleri ayrı ayrı çözülmüştür. Yapılan sayısal ayrıştırma her denklem için üçgensel iki sistemin çözümü gerekmiştir.

Bruneau ve Saad (2006) iki boyutlu üst sınırı hareketli oyuk akış probleminin kritik Reynolds sayılarında kararlı hal için sonlu fark yöntemini kullanarak eşit aralıklı aşamalı ızgara noktaları ile çözümlerini vermişlerdir.

Erturk ve Gokcol (2006) dördüncü mertebeden kompakt bir şema ile iki boyutlu sıkıştırılmayan Navier-Stokes denklemlerinin akım fonksiyonu ve burgaç ile ifadesini bir kare oyuktaki akış problemi için çözmüştür. Reynolds sayısının 20000 değerine kadar çözümler verilmiştir.

Erturk ve Gokcol (2007) üçgensel bir oyuktaki iki boyutlu, kararlı, sıkıştırılmayan akış problemini göz önüne alarak Navier-Stokes denklemlerinin akım fonksiyonu ve burgaç ile ifadesinin eğrisel (curvilinear) koordinatlarda sayısal çözümlerini vermişlerdir.

Erturk (2009) iki boyutlu üst sınır hareketli oyuk problemini fiziksel ve matematiksel detaylarını tartışmıştır ve bu problemi düzgün ızgara noktaları ile kararlı durum için AAG (SOR) iteratif yöntemi ile Reynolds sayısının yüksek değerlerinde çözümler vermiştir.

Fadel vd. (2010) sıkıştırılmayan akışkanlar için Stokes ve Navier –Stokes denklemleri için yeni bir yüksek mertebeden sonlu fark yaklaşımı önermişlerdir. Geliştirilen şemalar hız-basınç-basınç gradyenti formulasyonu üzerinedir. Yüksek mertebeden sonlu fark yaklaşımında aşamalı olmayan ızgara noktaları kullanılmıştır. Yüksek mertebeden basınç gradiyent yaklaşımı, standart Padé şeması ile yapılmıştır.

Akışkanlar dinamiğinde önemli yer tutan ve model denklemlerden biri olan Burgers denklemi de Navier-Stokes denklemleri gibi araştırmacıların ilgi odağı olagelmiştir. Burgers denklemi, ısı iletimi, esneklik, gaz dinamiği, türbülans ve viskoz akışkan içerisindeki şok dalga hareketinin yaklaşık teorisi gibi çeşitli fiziksel olayların modellenmesinde kullanılır. Burgers denklemi ilk olarak Bateman (1915) tarafından ortaya konulmuştur. Daha sonra Burgers'ın 1939-1965 yılları arasında türbülans üzerine yapmış olduğu çalışmalarda model denklem olarak kullanılmıştır; bu nedenle kendisinin ismiyle anılmaktadır. Hopf (1950) ve Cole (1951) birbirlerinden bağımsız

olarak yaptıkları çalışmalarda bir boyutlu Burgers denkleminin herhangi bir başlangıç koşulu için analitik olarak çözülebilen bir lineer homojen ısı denklemine indirgenebileceğini göstermişlerdir. Böylece, Burgers denkleminin analitik çözümü Fourier serileri formunda verilebilir. Benton ve Platzman 1972’de yapmış oldukları çalışmada Burgers denkleminin 35 civarında farklı çözümünü vermişlerdir.

Burgers denklemi için verilen başlangıç koşullarının düzgün (smooth) olmaması veya sadece ayırık konumlarda geçerli olması durumunda etkili bir sayısal yöntem gereklidir. Diğer bir sorun da, bulunan Fourier serisi çözümlerinin yavaş yakınsamasıdır. Bu nedenle, iyi neticeler elde etmek için oldukça uzun seriler gereklidir (Liao, 2009). Bu amaçla, Burgers denkleminin sayısal çözümleri önemlidir ve bilim adamlarının ilgisini çekmiş ve son yıllarda Burgers denklemi üzerinde sonlu fark, sonlu eleman, sınır elemanı yöntemleri kullanılarak oldukça hassas çözümler bulunmuştur. Yapılan bu çalışmalardan bazıları hakkında aşağıda özet bilgiler verilmiştir:

Öziş vd. (2003) sonlu eleman yöntemini kullanarak bir boyutlu Burgers denkleminin sayısal çözümlerini, çeşitli viskozite değerleri için vermişlerdir.

Dogan (2004) yapmış olduğu çalışmada Galerkin sonlu eleman yöntemini kullanarak bir boyutlu Burgers denkleminin çözümünü çeşitli viskozite değerleri için vermiştir. Sonlu eleman yönteminin kullanılması sonucu oluşan adi diferansiyel denklem sistemi Crank-Nicolson yaklaşımı kullanılarak çözülmüştür.

Kutluay ve Esen (2004) yapmış oldukları çalışmada, lineerleştirilmiş kapalı (implicit) sonlu fark yöntemini kullanarak bir boyutlu Burgers denkleminin sayısal çözümlerini ortaya koymuşlardır.

Dağ vd. (2005) sıralama (collocation) kübik B-spline yöntemini kullanarak bir boyutlu Burgers denkleminin çözümlerini üç adet test problemi için vermişlerdir. Önerilen yöntemin koşulsuz stabil olduğu da gösterilmiştir.

Hassanien vd. (2005) dördüncü mertebeden sonlu fark yöntemini kullanarak bir boyutlu Burgers denkleminin çözümünü vermişlerdir. Kullanmış oldukları yöntem koşulsuz stabildir.

Gülsu (2006) kısıtlayıcı (restrictive) Padé yaklaşımı ile kapalı sonlu fark yöntemini kullanarak bir boyutlu Burgers denkleminin sayısal çözümlerini vermiştir. Yapılan çalışmada kullanılan yöntemin stabilitesi ve kesme hatası tartışılmıştır.

Liao (2009) dördüncü mertebeden bir kompakt sonlu fark yöntemi kullanarak iki boyutlu Burgers denklem sisteminin çözümünü vermiştir. İki boyutlu Burgers denklem sistemi iki boyutlu Hopf–Cole dönüşümü ile bir lineer ısı denklemine dönüştürülmüş; elde edilen lineer ısı denklemi kapalı (implicit) dördüncü mertebeden sonlu fark şeması ile çözülmüştür.

Sari ve Gürarslan (2009) yapmış oldukları çalışmada bir boyutlu Burgers denkleminin sayısal çözümlerini, denklemde yer alan uzaysal değişkenleri altıncı mertebeden kompakt sonlu fark yöntemini, zamansal değişkeni ise TDA-RK3 yöntemini kullanarak vermişlerdir.

Konveksiyon etkisi, akışkan hareketinin önemli rol oynadığı problemlerde dikkate alınır. Konveksiyonun olduğu yerde difüzyon olayı gerçekleşir. Bu nedenle, konveksiyon ve difüzyonu beraber ele alan yöntemlere ihtiyaç vardır. Navier-Stokes denklemleri ile benzer özellikler taşıyan konveksiyon-difüzyon denklemi; hesaplamalı hidrolik ve akışkanlar dinamiğinde kütle, ısı, enerji, hız, vortisite gibi niceliklerin konveksiyon ve difüzyonunun modellenmesinde görülür. Konveksiyon-difüzyon denkleminin sayısal çözümleri, akış problemlerinin simülasyonunda önemli bir rol oynamaktadır. Bu nedenle konveksiyon difüzyon denklemine hassas sayısal çözümler bulmak önemlidir. Aşağıda konveksiyon-difüzyon denklemi üzerinde yapılan bazı çalışmalar özetlenmiştir.

Ismail vd. (2004) kısıtlı Taylor yaklaşımını (Restrictive Taylor's Approximation) kullanarak bir boyutlu konveksiyon-difüzyon denkleminin sayısal çözümlerini vermişlerdir. Kullanılan yöntem için stabilite aralığı üzerinde durulmuştur. Üç test problemi ele alınarak yöntemin konveksiyon–difüzyon denklemine uygulanabilirliği ortaya konmuştur.

Inc vd. (2005) lineer ve lineer olmayan difüzyon ve konveksiyon-difüzyon denklemlerinin çözümü için Adomian ayrışım yöntemini (Adomian decomposition method (ADM)) kullanmış olup yaklaşık çözümleri seri formunda vermişlerdir.

Dağ vd. (2006) en küçük kareler sonlu eleman yöntemini kullanarak adveksiyon-difüzyon denkleminin çözümünü vermişlerdir. Lineer ve karesel B-spline şekil fonksiyonlarını kullanmışlardır.

Dehghan ve Mohebbi (2008) bir ve iki boyutlu konveksiyon difüzyon denkleminin çözümünü vermişlerdir. Denklemlerde yer alan uzaysal değişkenlere bağlı türevleri

dördüncü mertebeden bir kompakt sonlu fark yaklaşımını; oluşan zaman değişkenine bağlı adi diferansiyel denklemlerdeki türevleri, dördüncü mertebeden hassasiyete sahip bir sınır değer yöntemini kullanarak ayırtmışlardır.

Laplace denklemi, matematiksel olarak Poisson denkleminin bir özel halidir. Poisson ve Laplace denklemlerine, genellikle denge ve kararlı hal (steady-state) problemlerinin matematiksel modellenmesinde; yerçekimi, elektrostatik, ideal sıvı hareketleri, sıvılarda yüzey dalgaları, kararlı ısı akımı ve burulma problemlerinde karşılaşılır.

Poisson ve Laplace denklemlerine analitik çözüm bulmak mümkündür. Ancak, Poisson ve Laplace denklemlerinin çözümlerinde Fourier seri çözümleri çıkmaktadır ve çözümler yine uzun süreli çalışma gerektirerek yaklaşık olarak hesaplanmaktadır. Bu gibi uzun süreli işlem gerektiren problemler günümüzde hızla gelişmekte olan bilgisayar teknolojisi ve hassas sonuçlar elde etme imkanı sunan sayısal yöntemler sayesinde kısa süre içerisinde gerçekleştirebilmek mümkündür. Bu nedenle Poisson ve Laplace denklemlerinin sayısal çözümlerini bulmak önemlidir. Aşağıda Poisson ve Laplace denklemlerini konu alan kimi literatür çalışmalarına yer verilmiştir.

Wang vd. (2009) yüksek mertebeden bir kompakt sonlu fark şemasını kullanarak düzgün olmayan ızgara noktaları ile iki boyutlu Laplace ve Poisson denklemlerinin çözümlerini vermişlerdir.

Laknera ve Plazl (2008) düzgün olmayan bölgeler üzerinde tanımlanan problemleri, sonlu fark yöntemi ile sembolik ve sayısal bir prosedür kullanarak Laplace ve kararlı olmayan hal için ısı iletim denklemini çözmüşlerdir. Düzgün olmayan gerçek bölgedeki sistem spline fonksiyonları kullanılarak dikdörtgensel bölgeye dönüşüm yapılmış ve sonlu fark yöntemi ile dönüştürülmüş sistemin çözümü yapılmıştır. Daha sonra bulunan sayısal sonuçlar tekrar düzgün olmayan bölgeye transforme edilmiştir.

Wazwaz (2007) yarı analitik olan varyasyonel iteratif yöntemini kullanarak Dirichlet ve Neumann sınır koşullu problemler için Laplace denkleminin çözümünü vermiştir. Verilen çözümler, seri formunda analitik çözüme yakınsayan çözümlerdir.

Erişti ve Yıldırım (2008), yük yoğunluğuna sahip elektrik alan problemlerini tanımlayan Poisson denklemini sınır elemanları yöntemini kullanarak çözmüşlerdir. Problem bölgesinin sınırları, lineer sınır elemanlarıyla ayrıştırılmış; yük yoğunluğunun uygulandığı problem bölgesi ise üçgen elemanlarla bölmelendirilerek

çözüm verilmiştir. Bulunan çözümler, ELECTRO ve MATLAB PDE toolbox sonuçları ile karşılaştırılmıştır.

Bu çalışmada ise kararlı Navier-Stokes denklemlerinin burgaç-akım fonksiyonu ile ifadesinin çözümü üzerinde duracağız. Denklemlerde yer alan türevler, ikinci mertebeden sonlu fark (SF2), dördüncü mertebeden sonlu fark (SF4) ve altıncı mertebeden sonlu fark (SF6) ile ayrıştırılmış; ardarda aşırı gevşeme (AAG) (Successive Over Relaxation- SOR) yöntemi kullanılarak iteratif olarak çözülmüştür.

Navier-Stokes denklemlerinin özel bir durumu olan Burgers denkleminin sayısal çözümleri, (SF2), (SF4) ve (SF6) yaklaşımları kullanılarak uzaysal değişkene bağlı türevler ayrıştırılmış; zamansal türeve bağlı türevler üç adımlı toplam değişim azaltan Runge-Kutta (TDA-RK3) yöntemi kullanılarak elde edilmiştir.

Akışkanlar dinamiğinde önemli bir yere sahip bir ve iki boyutlu konveksiyon-difüzyon denkleminin sayısal çözümleri Burgers denklemine benzer şekilde SF2, SF4 ve SF6 yaklaşımları kullanılarak uzaysal değişkene bağlı türevler ayrıştırılmış; zamansal türeve bağlı türevler TDA-RK3 yöntemi kullanılarak elde edilmiştir. Bir ve iki boyutlu denklemlerin her biri için birer test problemi alınmıştır.

Laplace ve Poisson denklemlerinin sayısal çözümlerini elde etmek için denklemlerdeki türevler SF2, SF4 ve SF6 yaklaşımları kullanılarak ayrıştırılmış ve AAG yöntemi kullanılarak iteratif olarak çözümler elde edilmiştir. Laplace ve Poisson denklemlerinin çözümleri her bir denklem için bir problem göz önüne alınarak sunulmuştur.

### **1.1.13 Tez planı**

Bölüm 1’de bu çalışmada ele alınan model denklemler ve bu model denklemlerin için gerekli temel kavramlar hakkında bilgi verilmiştir.

Bölüm 2’de sonlu fark yaklaşımları ve bu yaklaşımların Taylor serisinden yararlanarak çıkarılışları sunulmuştur.

Ele alınan model denklemlerin sonlu fark formülasyonlarına Bölüm 3’te yer verilmiştir.

Sonlu fark yaklaşımlarının model denklemlere uygulamaları ile sonuçların sunulması ve literatürde yer alan çalışmalar ile karşılaştırmaları Bölüm 4’te yapılmıştır.

Bu alıřma ile ilgili sonuçlar ve neriler Bölüm 5'te ortaya konmuştur.

Son olarak Ek A.1'de bu çalışmada kullanılan bir boyutta beş ve yedi nokta kullanarak elde edilen sonlu fark formülasyonları verilmiştir.

## 2. SONLU FARK YÖNTEMLERİ

Bir fonksiyonun analitik ifadesinin var olması durumunda, bu fonksiyonun istenen noktalardaki değerlerini hesaplamak; fonksiyonun belirli noktalardaki türevini saptamak ya da belirli aralıklarda integralini saptamak mümkündür. Ancak, bir fonksiyonun analitik ifadesinin bilinmediği durumlarda, sadece belli ayırık noktalarda fonksiyon değerlerinin bilindiği durumlarda bu tür hesaplamaları doğrudan yapmak mümkün değildir. Bu amaçla bu tür hesaplamaları yapabilmek için sayısal yaklaşımlar geliştirilmiştir. Sonlu farklar yöntemi, bu amaçla, sayısal türev almak için geliştirilmiş olup günümüzde en çok kullanılan yöntemlerden biridir.

Sonlu fark uygulamalarının temeli Daniel ve Jacob Bernoulli, Leonard Euler, Jacobo Stirling gibi ünlü bilim adamları ile iki yüz yıldan daha gerilere gider. Türev ve integral alma, iç ve dış değer bulma, sayısal veriye polinom uydurma gibi uygulama alanlarında sıkça karşılaşılan problemler sonlu farklar yaklaşımı ile çözülebilirler (Canitez, 1997).

Sonlu fark metotları hassasiyetlerine göre iki gruba ayrılırlar. Bunlar birinci ve ikinci mertebeden ile yüksek mertebeden (üç ve daha fazla mertebeden) sonlu farklardır. Geleneksel olarak, birinci ve ikinci merteben (iki nokta yaklaşımı) sonlu farklar basit olmaları nedeniyle pratik uygulamalarda daha çok tercih edilirler. Karmaşık ve zor (daha çok hassasiyet gerektiren) problemler için yüksek mertebeden sonlu fark yaklaşımları kullanılır. Son yıllardaki teknolojik gelişmeler yüksek mertebeden sonlu fark formülasyonlarının kullanılmasına olanak tanımıştır.

Sonlu fark yöntemleri, çeşitli diferansiyel denklemlerin tam çözümleri elde edilemediğinde, kullanılan sayısal ve yaklaşık yöntemlerdendir (Berktaş, 1992).

$[a, b]$  aralığında tanımlanan  $f(x)$  fonksiyonun bir  $x$  noktasındaki türevi

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \quad (2.1)$$

ile tanımlanır.  $f(x)$  fonksiyonunun analitik ifadesi biliniyorsa, (2.1) türev değerini hesaplamak mümkündür. Ancak bazı durumlarda (2.1) türev değerini, verilen  $f(x)$  analitik ifadesinden hesaplamak karmaşık bir durum olabilir ya da  $f(x)$  fonksiyonunun analitik ifadesi mevcut olmayabilir. Bu durumlarda fonksiyonun ayırık noktalardaki değerlerinden yararlanılarak sayısal türev ile fonksiyonun türevi yaklaşık olarak hesaplanır. Bunun için çeşitli sayısal yöntemler geliştirilmiş olup sonlu fark yaklaşımları bu metotlar içerisinde en yaygın olanlarındandır.

Sonlu fark metotları; ileri farklar yaklaşımı, geri farklar yaklaşımı ve merkezi farklar yaklaşımı olarak üç farklı şekilde uygulanmaktadır. Göz önüne alınan  $y = f(x)$  fonksiyonun bir  $x_i$  noktasındaki türevi;  $x_{i+1}, x_{i+2}, \dots$  gibi noktalardaki fonksiyon değerleri yardımıyla ifade edilen ileri farklar yaklaşımıyla,  $x_{i-1}, x_{i-2}, \dots$  gibi noktalardaki fonksiyon değerleri yardımıyla ifade edilen geri farklar yaklaşımıyla,  $\dots, x_{i-2}, x_{i-1}, x_{i+1}, x_{i+2}, \dots$  gibi noktalardaki fonksiyon değerleri yardımıyla ifade edilen merkezi farklar yaklaşımıyla hesaplanır. Şimdi bu yaklaşımları Taylor seri açılımından faydalanarak ortaya koyalım.

## 2.1 Birinci Mertebeden Türevler için Sonlu Fark Yaklaşımları

Sonlu fark yöntemlerinde, ileri, geri ve merkezi fark yaklaşımlarında sayısal türevi hesaplamak için kullanılan nokta sayısının artırılması, daha hassas neticelerin elde edilmesini sağlar. Bu çalışmada göz önüne alınan model problemleri çözmek için iki, beş ve yedi nokta kullanılarak elde edilen yaklaşımlar kullanılmıştır. Aşağıda, birinci ve ikinci mertebeden türev değerlerinin hesaplanmasında kullanılan bazı sonlu fark yaklaşımların çıkarılışları ortaya konulmuştur

### 2.1.1 İleri fark yaklaşımı

Analitik bir  $f(x)$  fonksiyonu verilmiş olsun.  $f(x+h)$ 'in  $x$  etrafındaki Taylor seri açılımı

$$\begin{aligned} f(x+h) &= f(x) + h \frac{df}{dx} + \frac{h^2}{2!} \frac{d^2 f}{dx^2} + \frac{h^3}{3!} \frac{d^3 f}{dx^3} + \dots \\ &= f(x) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{h^n}{n!} \frac{d^n f}{dx^n} \end{aligned} \quad (2.2)$$

şeklinde dir.  $\partial f / \partial x$  için (2.2) denklemi çözüldürse,



$$\frac{df}{dx} = \frac{f(x+h) - f(x)}{h} - h \left[ \frac{1}{2!} \frac{d^2 f}{dx^2} + \frac{h}{3!} \frac{d^3 f}{dx^3} + \dots \right] \quad (2.3)$$

ifadesi bulunur. Sağ tarafta birinci terimden sonraki terimler kesilerek,

$$\frac{df}{dx} = \frac{f(x+h) - f(x)}{h} + O(h) \quad (2.4)$$

şeklinde ileri fark yaklaşımı elde edilir. (2.4) formülünde  $O(h)$  kesme hatası olup (2.3) denkleminin sağ tarafındaki kesilen terimler  $h$  ile orantılı olarak değişmesi nedeniyle  $h$  mertebesindedir.

### 2.1.2 Geri fark yaklaşımı

Geri fark yaklaşımı, ileri fark yaklaşımına benzer şekilde elde edilir.  $f(x-h)$ 'in  $x$  etrafındaki Taylor seri açılımı;

$$\begin{aligned} f(x-h) &= f(x) - h \frac{df}{dx} + \frac{h^2}{2!} \frac{d^2 f}{dx^2} - \frac{h^3}{3!} \frac{d^3 f}{dx^3} + \dots \\ &= f(x) + \sum_{n=1}^{\infty} \left[ (-1)^n \frac{h^n}{n!} \right] \frac{d^n f}{dx^n} \end{aligned} \quad (2.5)$$

şeklindedir.  $df/dx$  için (2.5) denklemini çözümlerse,

$$\frac{df}{dx} = \frac{f(x) - f(x-h)}{h} + h \left[ \frac{1}{2!} \frac{d^2 f}{dx^2} - \frac{h}{3!} \frac{d^3 f}{dx^3} + \dots \right] \quad (2.6)$$

olur. Yine, sağ taraftaki birinci terimden sonraki terimler kesilirse,

$$\frac{df}{dx} = \frac{f(x) - f(x-h)}{h} + O(h) \quad (2.7)$$

şeklinde geri fark yaklaşımı bulunur. Kesilen terimler  $h$  ile orantılı olarak değişmesinden kesme hatası  $h$  mertebesindedir.

### 2.1.3 Merkezi fark yaklaşımı

(2.2) ifadesindeki Taylor açılımından (2.5) ifadesindeki Taylor açılımını çıkarırsak

$$f(x+h) - f(x-h) = 2h \frac{df}{dx} + \frac{2h^3}{3!} \frac{d^3 f}{dx^3} + \dots \quad (2.8)$$

eşitliği bulunur. (2.8) eşitliğini  $2h$  ile böler  $f'(x)$  için düzenlersek,

$$f'(x) = \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} - h^2 \left[ \frac{1}{6} \frac{d^3 f}{dx^3} + \dots \right] \quad (2.9)$$

olur. (2.9) eşitliğinden birinci mertebeden türev için merkezi fark yaklaşımı  $h^2$  mertebesi bir hatayla,

$$f'(x) = \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} + O(h^2) \quad (2.10)$$

şeklinde elde edilir.

Merkezi fark yaklaşımında  $h$  adım uzunluğu küçüldükçe hata, adım uzunluğunun karesiyle ( $h^2$ ) orantılı olduğu için daha hızlı bir şekilde küçülecektir. Bu nedenle merkezi fark, ileri fark ve geri fark yaklaşımlarına göre çok daha tutarlı neticeler verecektir.

Birinci mertebeden türevlerin sayısal hesabında ikiden fazla noktanın kullanılması durumunda hata miktarı azalır. Bu nedenle daha iyi neticeler veren sonlu fark yaklaşımları elde edilir.

#### 2.1.4 Birinci mertebeden türevler için beş nokta sonlu fark formülleri

Sayısal türevlerin hesabında ikiden fazla nokta kullanılması durumunda hata miktarı azalır. Böylece daha hassas neticeler bulunmasına imkân sağlayan sonlu fark formülleri elde edilir. Elde edilen bu yaklaşımlardan hata mertebesi ikiden fazla olan yaklaşımlar yüksek mertebeden sonlu farklar olarak nitelendirilir. Beş noktanın kullanılmasıyla ortaya çıkan ve üç nokta kullanılarak elde edilen sonlu fark formülasyonlarına göre daha hassas sonuçlar veren dördüncü mertebeden sonlu fark formülasyonunu ortaya koyalım. Bunun için yukarıda üç nokta kullanılarak elde edilen formülasyonlarda olduğu gibi Taylor seri açılımlarından yararlanacağız.

Şimdi birinci mertebeden türevler için beş noktanın kullanılmasıyla dördüncü mertebeden ileri fark formülasyonunu bulalım. Bunun için,

$$f(x+h) = f(x) + h \frac{df}{dx} + \frac{h^2}{2} \frac{d^2 f}{dx^2} + \frac{h^3}{6} \frac{d^3 f}{dx^3} + \frac{h^4}{24} \frac{d^4 f}{dx^4} + \frac{h^5}{120} \frac{d^5 f}{dx^5} + \dots \quad (2.11)$$

$$f(x+2h) = f(x) + 2h \frac{df}{dx} + \frac{4h^2}{2} \frac{d^2 f}{dx^2} + \frac{8h^3}{6} \frac{d^3 f}{dx^3} + \frac{16h^4}{24} \frac{d^4 f}{dx^4} + \frac{32h^5}{120} \frac{d^5 f}{dx^5} + \dots \quad (2.12)$$

$$f(x+3h) = f(x) + 3h \frac{df}{dx} + \frac{9h^2}{2!} \frac{d^2f}{dx^2} + \frac{27h^3}{6} \frac{d^3f}{dx^3} + \frac{81h^4}{24} \frac{d^4f}{dx^4} + \frac{243h^5}{120} \frac{d^5f}{dx^5} + \dots \quad (2.13)$$

$$f(x+4h) = f(x) + 4h \frac{df}{dx} + \frac{16h^2}{2} \frac{d^2f}{dx^2} + \frac{64h^3}{6} \frac{d^3f}{dx^3} + \frac{256h^4}{24} \frac{d^4f}{dx^4} + \frac{1024h^5}{120} \frac{d^5f}{dx^5} + \dots \quad (2.14)$$

Taylor seri açılımlarını göz önüne alalım. Yukarıdaki eşitliklerden birincisi 48 ile ikincisi -36 ile üçüncüsü 16 ile ve sonuncusu -3 ile çarpılıp taraf tarafa toplanırsa,

$$48f(x+h) - 36f(x+2h) + 16f(x+3h) - 3f(x+4h) = 25f(x) + 12hf'(x) + O(h^5) \quad (2.15)$$

elde edilir. (2.15) eşitliğinden birinci mertebeden türev için dördüncü mertebeden ileri sonlu fark formülasyonu,

$$f'(x) = \frac{-25f(x) + 48f(x+h) - 36f(x+2h) + 16f(x+3h) - 3f(x+4h)}{12h} + O(h^4) \quad (2.16)$$

şeklinde bulunur.

Birinci mertebeden türevler için beş noktalı dördüncü mertebeden geri fark formülasyonunu bulmak için aşağıdaki denklemleri göz önüne alalım:

$$f(x-h) = f(x) - h \frac{df}{dx} + \frac{h^2}{2!} \frac{d^2f}{dx^2} - \frac{h^3}{3!} \frac{d^3f}{dx^3} + \frac{h^4}{4!} \frac{d^4f}{dx^4} - \frac{h^5}{5!} \frac{d^5f}{dx^5} + \dots, \quad (2.17)$$

$$f(x-2h) = f(x) - 2h \frac{df}{dx} + \frac{4h^2}{2!} \frac{d^2f}{dx^2} - \frac{8h^3}{3!} \frac{d^3f}{dx^3} + \frac{16h^4}{4!} \frac{d^4f}{dx^4} - \frac{32h^5}{5!} \frac{d^5f}{dx^5} + \dots, \quad (2.18)$$

$$f(x-3h) = f(x) - 3h \frac{df}{dx} + \frac{9h^2}{2!} \frac{d^2f}{dx^2} - \frac{27h^3}{6} \frac{d^3f}{dx^3} + \frac{81h^4}{24} \frac{d^4f}{dx^4} - \frac{243h^5}{120} \frac{d^5f}{dx^5} + \dots, \quad (2.19)$$

$$f(x-4h) = f(x) - 4h \frac{df}{dx} + \frac{16h^2}{2} \frac{d^2f}{dx^2} - \frac{64h^3}{6} \frac{d^3f}{dx^3} + \frac{256h^4}{24} \frac{d^4f}{dx^4} - \frac{1024h^5}{120} \frac{d^5f}{dx^5} + \dots. \quad (2.20)$$

(2.17) denklemini -48, (2.18) denklemini 36, (2.19) denklemini -16 ve (2.20) denklemini 3 ile çarptıktan sonra taraf tarafa toplarsak

$$\begin{aligned}
& -48f(x-h) + 36f(x-2h) - 16f(x-3h) + 3f(x-4h) = \\
& -25f(x) + 12hf'(x) + O(h^5)
\end{aligned} \tag{2.21}$$

ifadesi bulunur. Bu eşitlik birinci mertebeden türev terimi için çözülürse dördüncü mertebeden geri fark formülasyonu,

$$\begin{aligned}
f'(x) = & \frac{25f(x) - 48f(x-h) + 36f(x-2h) - 16f(x-3h) + 3f(x-4h)}{12h} \\
& + O(h^4)
\end{aligned} \tag{2.22}$$

şeklinde bulunur.

Birinci mertebeden türevler için, bir boyutta, beş noktanın kullanılmasıyla elde edilen dördüncü mertebeden merkezi fark formülasyonunu bulmak için

$$f(x+h) = f(x) + h \frac{df}{dx} + \frac{h^2}{2!} \frac{d^2f}{dx^2} + \frac{h^3}{3!} \frac{d^3f}{dx^3} + \frac{h^4}{4!} \frac{d^4f}{dx^4} + \frac{h^5}{5!} \frac{d^5f}{dx^5} \dots \tag{2.23}$$

$$f(x-h) = f(x) - h \frac{df}{dx} + \frac{h^2}{2!} \frac{d^2f}{dx^2} - \frac{h^3}{3!} \frac{d^3f}{dx^3} + \frac{h^4}{4!} \frac{d^4f}{dx^4} - \frac{h^5}{5!} \frac{d^5f}{dx^5} \dots \tag{2.24}$$

$$f(x-2h) = f(x) - 2h \frac{df}{dx} + \frac{4h^2}{2!} \frac{d^2f}{dx^2} - \frac{8h^3}{3!} \frac{d^3f}{dx^3} + \frac{16h^4}{4!} \frac{d^4f}{dx^4} - \frac{32h^5}{5!} \frac{d^5f}{dx^5} \dots \tag{2.25}$$

$$f(x+2h) = f(x) + 2h \frac{df}{dx} + \frac{4h^2}{2} \frac{d^2f}{dx^2} + \frac{8h^3}{6} \frac{d^3f}{dx^3} + \frac{16h^4}{24} \frac{d^4f}{dx^4} + \frac{32h^5}{120} \frac{d^5f}{dx^5} + \dots \tag{2.26}$$

denklemlerini göz önüne alalım. (2.23) denkleminin 8, (2.24) denkleminin -8, (2.26) denkleminin -1 ile çarpılıp (2.25) denklemi ile taraf tarafa toplanmasıyla

$$f(x-2h) - 8f(x-h) + 8f(x+h) - f(x+2h) = 12hf'(x) - \frac{6}{15}h^5 \frac{d^5f}{dx^5} + \dots \tag{2.27}$$

denklemini bulunur. (2.27) denklemini birinci mertebeden türev terimi için çözülürse

$$f'(x) = \frac{f(x-2h) - 8f(x-h) + 8f(x+h) - f(x+2h)}{12h} + O(h^4)$$

şeklinde birinci mertebeden türev için beş noktalı merkezi fark formülasyonu bulunur.

## 2.2 İkinci Mertebeden Türevler için Sonlu Fark Yaklaşımları

Verilen bir  $f(x)$  fonksiyonunun  $n$ . mertebeden türevi için en az  $n+1$  noktanın verilmesi gerekir. Bu nedenle ikinci mertebeden türevin sonlu fark formülleri için en az üç noktaya ihtiyaç vardır. Fazla sayıda noktanın kullanılması hatanın mertebesini düşürecektir.

### 2.2.1 İleri fark yaklaşımı

İkinci mertebeden türevler için ileri fark yaklaşımını elde etmek için;

$$f(x+h) = f(x) + h \frac{df}{dx} + \frac{h^2}{2!} \frac{d^2 f}{dx^2} + \frac{h^3}{3!} \frac{d^3 f}{dx^3} + \dots \quad (2.28)$$

$$f(x+2h) = f(x) + 2h \frac{df}{dx} + \frac{(2h)^2}{2!} \frac{d^2 f}{dx^2} + \frac{(2h)^3}{3!} \frac{d^3 f}{dx^3} + \dots \quad (2.29)$$

Taylor açılımları kullanılır. (2.28) eşitliğini 2 ile çarpar (2.29) eşitliğinden çıkarırsak,

$$f(x+2h) - 2f(x+h) = -f(x) + h^2 \frac{d^2 f}{dx^2} + h^3 \frac{d^3 f}{dx^3} + \dots \quad (2.30)$$

elde edilir. (2.30) eşitliğinden,

$$f''(x) = \frac{f(x+2h) - 2f(x+h) + f(x)}{h^2} + O(h)$$

şeklinde  $h$  mertebesinde bir hatayla ikinci mertebeden türev için ileri fark yaklaşımı bulunur.

### 2.2.2 Geri fark yaklaşımı

Geri fark yaklaşımı için

$$f(x-h) = f(x) - h \frac{df}{dx} + \frac{h^2}{2!} \frac{d^2 f}{dx^2} - \frac{h^3}{3!} \frac{d^3 f}{dx^3} + \dots \quad (2.31)$$

$$f(x-2h) = f(x) - 2h \frac{df}{dx} + \frac{(2h)^2}{2!} \frac{d^2 f}{dx^2} - \frac{(2h)^3}{3!} \frac{d^3 f}{dx^3} + \dots \quad (2.32)$$

Taylor açılımları göz önüne alınırsa (2.31) eşitliğinin 2 katını (2.32) eşitliğinden çıkarılmasıyla

$$f(x-2h) - 2f(x-h) = -f(x) + h^2 \frac{d^2 f}{dx^2} - h^3 \frac{d^3 f}{dx^3} + \frac{7h^4}{12} \frac{d^4 f}{dx^4} - \dots \quad (2.33)$$

bulunur. (2.33) eşitliğinden,

$$f''(x) = \frac{f(x-2h) - 2f(x-h) + f(x)}{h^2} + O(h) \quad (2.34)$$

şeklinde  $h$  mertebesinde bir hatayla ikinci mertebeden türev için geri fark yaklaşımı bulunur.

### 2.2.3 Merkezi fark yaklaşımı

Yukarıdaki yaklaşımlara benzer şekilde merkezi fark yaklaşımını elde etmek için aşağıdaki Taylor açılımları göz önüne alınır:

$$f(x-h) = f(x) - h \frac{df}{dx} + \frac{h^2}{2!} \frac{d^2 f}{dx^2} - \frac{h^3}{3!} \frac{d^3 f}{dx^3} + \dots, \quad (2.35)$$

$$f(x+h) = f(x) + h \frac{df}{dx} + \frac{h^2}{2!} \frac{d^2 f}{dx^2} + \frac{h^3}{3!} \frac{d^3 f}{dx^3} + \dots. \quad (2.36)$$

Bu iki eşitlik taraf tarafa toplanırsa,

$$f(x+h) + f(x-h) = 2f(x) + h^2 \frac{d^2 f}{dx^2} + \frac{1h^4}{12} \frac{d^4 f}{dx^4} + \dots \quad (2.37)$$

olur. (2.37) eşitliğinden ikinci mertebeden türev için merkezi fark yaklaşımı  $h^2$  mertebesiyle,

$$f''(x) = \frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h^2} + O(h^2) \quad (2.38)$$

şeklinde bulunur.

### 2.2.4 İkinci mertebeden türevler için beş nokta sonlu fark formülleri

#### 2.2.4.1 İleri fark yaklaşımı

$$f(x+h) = f(x) + h \frac{df}{dx} + \frac{h^2}{2} \frac{d^2 f}{dx^2} + \frac{h^3}{6} \frac{d^3 f}{dx^3} + \frac{h^4}{24} \frac{d^4 f}{dx^4} + \frac{h^5}{120} \frac{d^5 f}{dx^5} + \dots, \quad (2.28)$$

$$f(x+2h) = f(x) + 2h \frac{df}{dx} + \frac{4h^2}{2} \frac{d^2 f}{dx^2} + \frac{8h^3}{6} \frac{d^3 f}{dx^3} + \frac{16h^4}{24} \frac{d^4 f}{dx^4} + \frac{32h^5}{120} \frac{d^5 f}{dx^5} + \dots, \quad (2.29)$$

$$f(x+3h) = f(x) + 3h \frac{df}{dx} + \frac{9h^2}{2!} \frac{d^2f}{dx^2} + \frac{27h^3}{6} \frac{d^3f}{dx^3} + \frac{81h^4}{24} \frac{d^4f}{dx^4} + \frac{243h^5}{120} \frac{d^5f}{dx^5} + \dots, \quad (2.41)$$

$$f(x+4h) = f(x) + 4h \frac{df}{dx} + \frac{16h^2}{2} \frac{d^2f}{dx^2} + \frac{64h^3}{6} \frac{d^3f}{dx^3} + \frac{256h^4}{24} \frac{d^4f}{dx^4} + \frac{1024h^5}{120} \frac{d^5f}{dx^5} + \dots \quad (2.42)$$

Taylor seri açılımlarından birincisi -104, ikincisi 114, üçüncüsü -56 ve dördüncüsü de 11 ile çarpılıp taraf tarafa toplanırsa

$$-104f(x+h) + 114f(x+2h) - 56f(x+3h) + 11f(x+4h) = -35f(x) + 12h^2 f''(x) + O(h^5) \quad (2.43)$$

denklemini bulunur. (2.43) denkleminde  $f''(x)$  çekilirse

$$f''(x) = \frac{35f(x) - 104f(x+h) + 114f(x+2h) - 56f(x+3h) + 11f(x+4h)}{12h^2} + O(h^3) \quad (2.44)$$

şeklinde ikinci mertebeden türevler için üçüncü mertebeden beş noktalı ileri fark formülü bulunur.

#### 2.2.4.2 Geri fark yaklaşımı

$$f(x-4h) = f(x) - 4h \frac{df}{dx} + \frac{16h^2}{2} \frac{d^2f}{dx^2} - \frac{64h^3}{6} \frac{d^3f}{dx^3} + \frac{256h^4}{24} \frac{d^4f}{dx^4} - \frac{1024h^5}{120} \frac{d^5f}{dx^5} + \dots, \quad (2.45)$$

$$f(x-3h) = f(x) - 3h \frac{df}{dx} + \frac{9h^2}{2!} \frac{d^2f}{dx^2} - \frac{27h^3}{6} \frac{d^3f}{dx^3} + \frac{81h^4}{24} \frac{d^4f}{dx^4} - \frac{243h^5}{120} \frac{d^5f}{dx^5} + \dots, \quad (2.46)$$

$$f(x-2h) = f(x) - 2h \frac{df}{dx} + \frac{4h^2}{2!} \frac{d^2f}{dx^2} - \frac{8h^3}{3!} \frac{d^3f}{dx^3} + \frac{16h^4}{4!} \frac{d^4f}{dx^4} - \frac{32h^5}{5!} \frac{d^5f}{dx^5} + \dots, \quad (2.47)$$

$$f(x-h) = f(x) - h \frac{df}{dx} + \frac{h^2}{2!} \frac{d^2f}{dx^2} - \frac{h^3}{3!} \frac{d^3f}{dx^3} + \frac{h^4}{4!} \frac{d^4f}{dx^4} - \frac{h^5}{5!} \frac{d^5f}{dx^5} + \dots \quad (2.48)$$

açılımlarından birincisini 11, ikincisini -56, üçüncüsünü 114 ve dördüncüsünü de 104 ile çarpıp taraf tarafa toplarsak

$$11f(x-4h) - 56f(x-3h) + 114f(x-2h) - 104f(x-h) = -35f(x) + 12h^2 f''(x) + O(h^5) \quad (2.49)$$

denklemini bulunur. (2.49) denkleminde  $f''(x)$  çekilirse

$$f''(x) = \frac{35f(x) + 11f(x-4h) - 56f(x-3h) + 114f(x-2h) - 104f(x-h)}{12h^2} + O(h^3) \quad (2.50)$$

bulunur. (2.50) denklemini ikinci mertebeden türevler için üçüncü mertebeden beş noktalı geri fark yaklaşımını ifade eder.

#### 2.2.4.3 Merkezi fark yaklaşımı

$$f(x-2h) = f(x) - 2h \frac{df}{dx} + \frac{4h^2}{2!} \frac{d^2 f}{dx^2} - \frac{8h^3}{3!} \frac{d^3 f}{dx^3} + \frac{16h^4}{4!} \frac{d^4 f}{dx^4} - \frac{32h^5}{5!} \frac{d^5 f}{dx^5} \dots \quad (2.51)$$

$$f(x-h) = f(x) - h \frac{df}{dx} + \frac{h^2}{2!} \frac{d^2 f}{dx^2} - \frac{h^3}{3!} \frac{d^3 f}{dx^3} + \frac{h^4}{4!} \frac{d^4 f}{dx^4} - \frac{h^5}{5!} \frac{d^5 f}{dx^5} \dots \quad (2.52)$$

$$f(x+h) = f(x) + h \frac{df}{dx} + \frac{h^2}{2!} \frac{d^2 f}{dx^2} + \frac{h^3}{3!} \frac{d^3 f}{dx^3} + \frac{h^4}{4!} \frac{d^4 f}{dx^4} + \frac{h^5}{5!} \frac{d^5 f}{dx^5} \dots \quad (2.53)$$

$$f(x+2h) = f(x) + 2h \frac{df}{dx} + \frac{4h^2}{2} \frac{d^2 f}{dx^2} + \frac{8h^3}{6} \frac{d^3 f}{dx^3} + \frac{16h^4}{24} \frac{d^4 f}{dx^4} + \frac{32h^5}{120} \frac{d^5 f}{dx^5} + \dots \quad (2.54)$$

açılımlarından ikincinin 16 katı ile üçüncünün 16 katını toplayıp, birinci ve dördüncüyü bu toplamdan çıkartırsak

$$-f(x-2h) + 16f(x-h) + 16f(x+h) - f(x+2h) = 30f(x) + 12h^2 f''(x) - \frac{2}{15} h^6 f^{(6)}(x) + \dots \quad (2.30)$$

elde edilir. Buradan

$$f''(x) = \frac{-f(x-2h) + 16f(x-h) - 30f(x) + 16f(x+h) - f(x+2h)}{12h^2} + O(h^4) \quad (2.56)$$

şeklinde ikinci mertebeden türev için beş noktalı merkezi fark yaklaşımı bulunur.



### 2.3 Sonuç

Bu bölümde, model denklemlerin sayısal çözümlerinin elde edilmesinde kullanılacak olan bir boyutta üç ve beş noktanın kullanılmasıyla elde edilen sonlu fark yaklaşımları çıkarılmıştır. Bu çalışmada, yukarıda, çıkarılışları ortaya konulan sonlu fark yaklaşımları dışında; model denklemlerin çözümleri, yedi nokta kullanılarak elde edilen sonlu fark yaklaşımları ile de elde edilmiştir. Yedi nokta kullanılarak elde edilen (altıncı mertebeden sonlu farklar) yaklaşımlarının çıkarılışları da yukarıdaki çıkarılışlar ile benzer olduğu için burada verilmemiştir. Bunun yerine, model denklemlerin sayısal çözümleri elde edilirken iç ve sınır noktalarında kullanılan yedi noktanın kullanılmasıyla elde edilen sonlu fark yaklaşımları EK A.1 da verilmiştir. Ayrıca, EK A.1’de beş noktanın kullanılmasıyla elde edilen iç ve sınır noktalarında kullandığımız sonlu fark yaklaşımları da verilmiştir.

### 3. MODEL DENKLEMLERİN SONLU FARK FORMÜLASYONLARI

#### 3.1 Laplace ve Poisson Denklemlerinin Sonlu Fark Formülasyonları

$u(x, y)$  fonksiyonunun Laplace operatörü

$$\nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad (3.1)$$

olmak üzere sırasıyla Poisson ve Laplace denklemleri aşağıdaki şekildedirler:

$$\nabla^2 u = g(x, y), \quad (3.2)$$

$$\nabla^2 u = 0. \quad (3.3)$$

Laplace denklemi, Poisson denkleminin bir özel hali olarak göz önüne alınabilir. Poisson ve Laplace denklemlerinin sayısal çözümlerini elde etmek için bu denklemlerde yer alan ikinci mertebeden türev terimlerini ayrık formda ifade etmek gerekir. Laplace ve Poisson denklemlerinin sayısal çözümlerini elde etmek için

$R = \{(x, y) : a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$  şeklinde dikdörtgensel bölgeyi göz önüne alalım.

Sayısal hesaplamaları yapmak için  $[a, b]$  aralığı  $\Delta x$  uzunluklarla  $N-1$ ;  $[c, d]$  aralığı

$\Delta y$  uzunluklarla  $M-1$  parçaya bölünmüş olsun. Bu durumda Laplace operatöründe

yer alan ikinci mertebeden türevlerin merkezi sonlu fark formülleri aşağıdaki gibi olur:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \approx \frac{u(x + \Delta x, y) - 2u(x, y) + u(x - \Delta x, y)}{(\Delta x)^2},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \approx \frac{u(x, y + \Delta y) - 2u(x, y) + u(x, y - \Delta y)}{(\Delta y)^2}.$$

Bu yaklaşımların (3.2) ve (3.3) denklemlerinde yazılmasıyla

$$\frac{u(x + \Delta x, y) - 2u(x, y) + u(x - \Delta x, y)}{(\Delta x)^2} + \frac{u(x, y + \Delta y) - 2u(x, y) + u(x, y - \Delta y)}{(\Delta y)^2} = g, \quad (3.4)$$

$$\frac{u(x + \Delta x, y) - 2u(x, y) + u(x - \Delta x, y)}{(\Delta x)^2} + \frac{u(x, y + \Delta y) - 2u(x, y) + u(x, y - \Delta y)}{(\Delta y)^2} = 0 \quad (3.5)$$

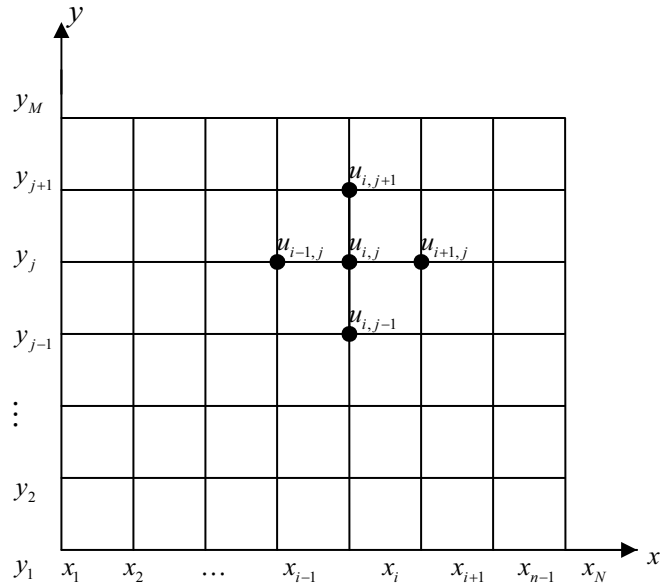
elde edilir.  $x$  ve  $y$  yönündeki adım uzunluklarının  $\Delta x = \Delta y = h$  şeklinde eşit alınmasıyla (3.4) ve (3.5) denklemleri

$$\nabla^2 u \approx u_{i+1,j} + u_{i-1,j} + u_{i,j+1} + u_{i,j-1} - 4u_{i,j} - h^2 g_{i,j} = 0 \quad (3.6)$$

$$\nabla^2 u \approx u_{i+1,j} + u_{i-1,j} + u_{i,j+1} + u_{i,j-1} - 4u_{i,j} = 0 \quad (3.7)$$

şeklinde sırasıyla Poisson ve Laplace denklemleri için sonlu fark formülleri elde edilir.

Burada  $u_{i,j}$  yaklaşımı  $u(x_i, y_j)$  için kullanılmış olup dikdörtgensel bölge  $x_{i+1} = x_i + h, y_{j+1} = y_j + h$  ( $i = 2, \dots, N-1, j = 2, \dots, M-1$ ) şeklinde eşit aralıklara bölünerek ızgara noktaları Şekil 3.1'deki gibi oluşturulmuştur. (3.6) ve (3.7) yaklaşımları sırasıyla Poisson ve Laplace denklemleri için beş nokta formülleri olarak ifade edilir.



Şekil 3.1: Poisson ve Laplace denkleminin çözümünde kullanılan SF2 şeması

(3.6) ve (3.7) denklemleri, sırasıyla Poisson ve Laplace denklemlerine, ikinci mertebeden merkezi fark yaklaşımının uygulanmasıyla elde edilmişlerdir ve Poisson

ile Laplace denklemlerinin ikinci mertebeden sonlu fark çözümleri bu denklemlerden bulunur.

Beş nokta kullanılarak elde edilen dördüncü mertebeden merkezi sonlu fark yaklaşımları kullanılarak Laplace denkleminde yer alan kısmi türevlerin ayrıştırılması

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \approx \frac{-u(x-2\Delta x, y) + 16u(x-\Delta x, y) - 30u(x, y) + 16u(x+\Delta x, y) - u(x+2\Delta x, y)}{12(\Delta x)^2}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \approx \frac{-u(x, y-2\Delta y) + 16u(x, y-\Delta y) - 30u(x, y) + 16u(x, y+\Delta y) - u(x, y+2\Delta y)}{12(\Delta y)^2}$$

şeklindedir. Bu değerler (3.2) ve (3.3) denklemlerinde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} \nabla^2 u_{i,j} &\approx \frac{-u_{i-2,j} + 16u_{i-1,j} - 30u_{i,j} + 16u_{i+1,j} - u_{i+2,j}}{12(\Delta x)^2} \\ &+ \frac{-u_{i,j-2} + 16u_{i,j-1} - 30u_{i,j} + 16u_{i,j+1} - u_{i,j+2}}{12(\Delta y)^2} = g_{i,j}, \end{aligned} \quad (3.8)$$

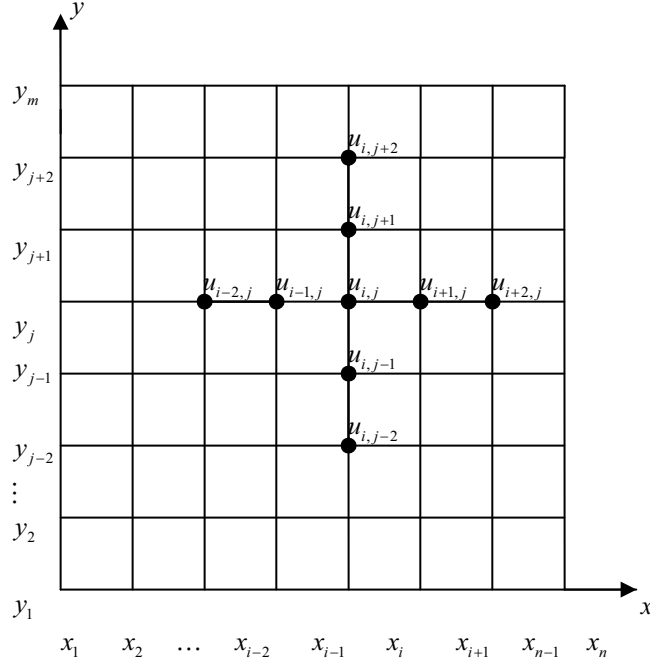
$$\begin{aligned} \nabla^2 u_{i,j} &\approx \frac{-u_{i-2,j} + 16u_{i-1,j} - 30u_{i,j} + 16u_{i+1,j} - u_{i+2,j}}{12(\Delta x)^2} \\ &+ \frac{-u_{i,j-2} + 16u_{i,j-1} - 30u_{i,j} + 16u_{i,j+1} - u_{i,j+2}}{12(\Delta y)^2} = 0 \end{aligned} \quad (3.9)$$

şeklinde olur.  $x$  ve  $y$  yönündeki adım uzunlukları  $\Delta x = \Delta y = h$  şeklinde eşit alınır (3.8) ve (3.9) denklemleri

$$\begin{aligned} -u_{i+2,j} + 16u_{i+1,j} + 16u_{i-1,j} - u_{i-2,j} - u_{i,j+2} + 16u_{i,j+1} + 16u_{i,j-1} - u_{i,j-2} \\ -60u_{i,j} - 12h^2 g_{i,j} = 0, \end{aligned} \quad (3.10)$$

$$-u_{i+2,j} + 16u_{i+1,j} + 16u_{i-1,j} - u_{i-2,j} - u_{i,j+2} + 16u_{i,j+1} + 16u_{i,j-1} - u_{i,j-2} - 60u_{i,j} = 0 \quad (3.11)$$

halini alır. (3.10) ve (3.11) denklemleri sırasıyla Poisson ve Laplace denklemlerinin dördüncü mertebeden sonlu fark çözümleridir. Bu denklemler sırasıyla Poisson ve Laplace denklemleri için dokuz nokta formülleri olarak tanımlanır.



Şekil 3.2: Poisson ve Laplace denkleminin çözümünde kullanılan SF4 şeması

Bir boyutta yedi noktanın kullanılmasıyla elde edilen merkezi sonlu fark yaklaşımları kullanılarak Laplace denkleminde yer alan kısmi türevlerin ayrıştırılması aşağıdaki şekildedir:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \approx [2u(x-3\Delta x, y) - 27u(x-2\Delta x, y) + 270u(x-\Delta x, y) - 490u(x, y) + 270u(x+\Delta x, y) - 27u(x+2\Delta x, y) + 2u(x+3\Delta x, y)] / (180(\Delta x)^2)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \approx [2u(x, y-3\Delta y) - 27u(x, y-2\Delta y) + 270u(x, y-\Delta y) - 490u(x, y) + 270u(x, y+\Delta y) - 27u(x, y+2\Delta y) + 2u(x, y+3\Delta y)] / (180(\Delta y)^2).$$

Bu yaklaşımların (3.2) ve (3.3) denklemlerinde yazılmasıyla

$$\begin{aligned} \nabla^2 u \approx & [2u(x-3\Delta x, y) - 27u(x-2\Delta x, y) + 270u(x-\Delta x, y) - 490u(x, y) \\ & + 270u(x+\Delta x, y) - 27u(x+2\Delta x, y) + 2u(x+3\Delta x, y)] / (180(\Delta x)^2) \\ & + [2u(x, y-3\Delta y) - 27u(x, y-2\Delta y) + 270u(x, y-\Delta y) - 490u(x, y) \\ & + 270u(x, y+\Delta y) - 27u(x, y+2\Delta y) + 2u(x, y+3\Delta y)] / (180(\Delta y)^2) = g_{i,j}, \end{aligned} \quad (3.12)$$

$$\begin{aligned}
\nabla^2 u \approx & \left[ 2u(x-3\Delta x, y) - 27u(x-2\Delta x, y) + 270u(x-\Delta x, y) - 490u(x, y) \right. \\
& \left. + 270u(x+\Delta x, y) - 27u(x+2\Delta x, y) + 2u(x+3\Delta x, y) \right] / \left( 180(\Delta x)^2 \right) \\
& + \left[ 2u(x, y-3\Delta y) - 27u(x, y-2\Delta y) + 270u(x, y-\Delta y) - 490u(x, y) \right. \\
& \left. + 270u(x, y+\Delta y) - 27u(x, y+2\Delta y) + 2u(x, y+3\Delta y) \right] / \left( 180(\Delta y)^2 \right) = 0
\end{aligned} \tag{3.13}$$

sonuçlarını verir.  $x$  ve  $y$  yönündeki adım uzunluklarının  $\Delta x = \Delta y = h$  şeklinde eşit alınmasıyla

$$\begin{aligned}
2u_{i+3,j} - 27u_{i+2,j} + 270u_{i+1,j} + 270u_{i-1,j} - 27u_{i-2,j} + 2u_{i-3,j} + 2u_{i,j+3} - 27u_{i,j+2} \\
+ 270u_{i,j+1} + 270u_{i,j-1} - 27u_{i,j-2} + 2u_{i,j-3} - 980u_{i,j} - 180h^2 g_{i,j} = 0
\end{aligned} \tag{3.14}$$

$$\begin{aligned}
2u_{i+3,j} - 27u_{i+2,j} + 270u_{i+1,j} + 270u_{i-1,j} - 27u_{i-2,j} + 2u_{i-3,j} + 2u_{i,j+3} - 27u_{i,j+2} \\
+ 270u_{i,j+1} + 270u_{i,j-1} - 27u_{i,j-2} + 2u_{i,j-3} - 980u_{i,j} = 0
\end{aligned} \tag{3.15}$$

şeklinde sırasıyla Poisson ve Laplace denklemleri için altıncı mertebeden sonlu fark yaklaşımları bulunur.

Poisson ve Laplace denklemleri eliptik denklemlerdir. Eliptik denklemlere sonlu fark yöntemlerinin uygulanmasıyla fazla sayıda sıfır katsayılı çözülmesi gereken çok fazla sayıda cebirsel denklem sistemi oluşur. Bu tip denklem içeren sistemlerin çözümünde, iteratif yöntemlerin doğrudan (direct) yöntemlere göre daha çok etkili olması nedeniyle tercih edilirler. Bu nedenle bu çalışmada sonlu fark yöntemlerinin uygulanmasıyla elde edilen yukarıdaki denklem sistemlerini çözmek için ardarda aşırı gevşeme (AAG) yöntemi kullanılmıştır. AAG yönteminin Laplace denklemine uygulanması ikinci mertebeden sonlu farklar için

$$Kal = \left( u_{i+1,j} + u_{i-1,j} + u_{i,j+1} + u_{i,j-1} - 4u_{i,j} \right) / 4 \tag{3.16}$$

kalanı (residual) belirtmek üzere,

$$u_{i,j}^{n+1} = u_{i,j}^n + \alpha Kal, \quad n = 1, 2, \dots \tag{3.17}$$

ile ardışık olarak hesaplanır. Burada  $\alpha$ , AAG yönteminde kullanılan gevşeme katsayısını belirtmektedir. Dördüncü ve altıncı mertebeden sonlu farklar için uygulaması benzer şekildedir.

### 3.2 Bir Boyutlu Lineer Konveksiyon-Difüzyon Denkleminin Sonlu Fark Formülasyonları

$V_x$ ,  $x$  yönündeki sabit hız bileşeni ve  $D_x$ , difüzyon sabiti olmak üzere, bir boyutlu lineer konveksiyon-difüzyon denklemi

$$u_t + V_x u_x = D_x u_{xx}, \quad a \leq x \leq b, \quad t \geq 0 \quad (3.18)$$

şeklinde ifade edilir. Burada  $t$  zaman,  $x$  uzaysal değişkeni ve  $[a, b]$ ,  $x$  uzaysal değişkeninin tanım aralığını ifade etmektedir.

$x$  uzaysal değişkeninin tanım aralığı,  $\Delta x$  aralıklarla  $N-1$  tane parçaya bölünmüş olsun. Böylece sayısal hesaplamaların yapılacağı  $N$  tane uzaysal düğüm (mesh) noktası elde edilir. Bu noktalarda (3.18) denklemine yer alan uzaysal değişkenlerin birinci ve ikinci mertebeden kısmi türevlerin yerine,

$$\frac{\partial u}{\partial x} \approx \frac{u(x + \Delta x, t) - u(x - \Delta x, t)}{2\Delta x}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \approx \frac{u(x + \Delta x, t) - 2u(x, t) + u(x - \Delta x, t)}{(\Delta x)^2}$$

ikinci mertebeden sonlu fark yaklaşımlarının yazılmasıyla uzaysal türevler ayrıştırılarak bir boyutlu (3.18) konveksiyon-difüzyon denklemi

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} = -V_x \frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2\Delta x} + D_x \frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{(\Delta x)^2} \quad (3.19)$$

adi diferansiyel denklemine indirgenir.

Bir boyutlu konveksiyon-difüzyon denkleminde yer alan uzaysal değişkenlerin birinci ve ikinci mertebeden kısmi türevleri yerine sırasıyla,

$$\frac{\partial u}{\partial x} \approx \frac{u(x - 2\Delta x, t) - 8u(x - \Delta x, t) + 8u(x + \Delta x, t) - u(x + 2\Delta x, t)}{12\Delta x},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \approx \frac{-u(x - 2\Delta x, t) + 16u(x - \Delta x, t) - 30u(x, t) + 16u(x + \Delta x, t) - u(x + 2\Delta x, t)}{12(\Delta x)^2}$$

dördüncü mertebeden sonlu fark yaklaşımlarının yazılmasıyla (3.18) denklemi

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} = -V_x \frac{u_{i-2} - 8u_{i-1} + 8u_{i+1} - u_{i+2}}{12\Delta x} + D_x \frac{-u_{i-2} + 16u_{i-1} - 30u_i + 16u_{i+1} - u_{i+2}}{12(\Delta x)^2} \quad (3.20)$$

adi diferansiyel denklemine dönüşür.

(3.18) denkleminde yer alan uzaysal değişkenlerin türevleri aşağıdaki altıncı mertebeden sonlu fark formülasyonlarının

$$\frac{\partial u}{\partial x} \approx \left[ -u(x-3\Delta x, t) + 9u(x-2\Delta x, t) - 45u(x-\Delta x, t) + 45u(x+\Delta x, t) - 9u(x+2\Delta x, t) + u(x+3\Delta x, t) \right] / (60\Delta x)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \approx \left[ 2u(x-3\Delta x, t) - 27u(x-2\Delta x, t) + 270u(x-\Delta x, t) - 490u(x, t) + 270u(x+\Delta x, t) - 27u(x+2\Delta x, t) + 2u(x+3\Delta x, t) \right] / (180(\Delta x)^2)$$

kullanılmasıyla

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_i}{\partial t} = & -V_x \left[ (-u_{i-3} + 9u_{i-2} - 45u_{i-1} + 45u_{i+1} - 9u_{i+2} + u_{i+3}) / (60\Delta x) \right] \\ & + D_x \left[ (2u_{i-3} - 27u_{i-2} + 270u_{i-1} - 490u_i + 270u_{i+1} - 27u_{i+2} + 2u_{i+3}) / (180(\Delta x)^2) \right] \end{aligned} \quad (3.21)$$

bulunur.

Burada  $u_i$  yaklaşımı  $u(x_i, t)$  'i sembolize etmek için kullanılmış olup tanım aralığı  $x_{i+1} = x_i + \Delta x$  ( $i = 1, 2, \dots, N-1$ ) şeklinde eşit aralıklara bölünerek düğüm noktaları oluşturulmuştur. (3.19) denklemi, (3.18) bir boyutlu konveksiyon-difüzyon denkleminde yer alan uzaysal değişkenlerin türevleri ikinci mertebeden sonlu fark; (3.20) denklemi, (3.18) denkleminde yer alan uzaysal değişkenlerin türevleri dördüncü mertebeden sonlu fark ve (3.21) denklemi altıncı mertebeden sonlu fark formüllerinin uygulanmasıyla elde edilmiş zamana bağlı adi türevli denklemlerdir. Elde edilen bu adi diferansiyel denklemlere açık (explicit) veya kapalı (implicit) bir yaklaşımın uygulanmasıyla bir boyutlu konveksiyon-difüzyon denkleminin sayısal çözümü bulunur. Bu çalışmada üçüncü mertebeden toplam değişim azaltan Runge-Kutta (TDA-RK3) açık (explicit) yöntemini uygulayarak bir boyutlu konveksiyon-difüzyon denkleminin sayısal çözümü elde edilecektir.

TDA-RK3 yöntemi

$$u_i = L(u) \quad (3.22)$$



şeklinde verilmiş uygun başlangıç koşullarına sahip adi diferansiyel denklemlerden oluşan bir sisteminin çözümünde kullanılır. (3.22) sistemi,

$$u_t = -f(u)_x \quad (3.23)$$

şeklinde verilmiş bir denklemin sağ tarafında yer alan  $-f(u)_x$  teriminin, sonlu fark yaklaşımı kullanılarak ayrıştırılmasıyla elde edilir (Gottlieb ve Shu, 1998). TDA-RK3 yöntemi aşağıdaki işlemlerle  $t_0$  ( $k$ . adım)'dan  $t_0 + \Delta t$  ( $(k+1)$ . adım)'ye (3.22) denklemini integre eder:

$$\begin{aligned} u^{(1)} &= u^k + \Delta t L(u), \\ u^{(2)} &= \frac{3}{4}u^k + \frac{1}{4}u^{(1)} + \frac{1}{4}\Delta t L(u^{(1)}), \\ u^{k+1} &= \frac{1}{3}u^k + \frac{2}{3}u^{(2)} + \frac{2}{3}\Delta t L(u^{(2)}). \end{aligned}$$

### 3.3 İki Boyutlu Lineer Konveksiyon-Difüzyon Denkleminin Sonlu Fark Formülasyonları

$V_x$  ve  $V_y$ , sırasıyla  $x$  ve  $y$  yönündeki sabit hız bileşenleri;  $D_x, D_y$  sırasıyla  $x$  ve  $y$  yönlerindeki difüzyon sabitleri olmak üzere, iki boyutlu lineer konveksiyon-difüzyon denklemi

$$u_t + V_x u_x + V_y u_y = D_x u_{xx} + D_y u_{yy}, \quad a \leq x \leq b, \quad c \leq y \leq d, \quad t \geq 0, \quad (3.24)$$

şeklinde tanımlanır. Burada  $t$  zaman  $x$  ve  $y$  uzaysal değişkenleri;  $[a, b]$  ve  $[c, d]$  sırasıyla  $x$  ve  $y$  uzaysal değişkenlerinin tanım aralıklarını ifade etmektedir.

Kabul edelim ki  $x$  uzaysal değişkeninin tanım aralığı,  $\Delta x$  uzunluklarla  $N-1$  tane parçaya;  $y$  uzaysal değişkeninin tanım aralığı,  $\Delta y$  uzunluklarla  $M-1$  tane parçaya bölünmüş olsun. Böylece sayısal hesaplamaların yapılacağı  $N \times M$  tane ızgara noktası elde edilmiş olur. (3.24) denkleminde yer alan uzaysal değişkenlerin birinci ve ikinci mertebeden kısmi türevleri yerine,

$$\frac{\partial u}{\partial x} \approx \frac{u(x + \Delta x, y, t) - u(x - \Delta x, y, t)}{2\Delta x},$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} \approx \frac{u(x, y + \Delta y, t) - u(x, y - \Delta y, t)}{2\Delta y},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \approx \frac{u(x + \Delta x, y, t) - 2u(x, y, t) + u(x - \Delta x, y, t)}{(\Delta x)^2},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \approx \frac{u(x, y + \Delta y, t) - 2u(x, y, t) + u(x, y - \Delta y, t)}{(\Delta y)^2}$$

sonlu fark yaklaşımlarını yazarak uzaysal türevler ayrıştırılıp iki boyutlu konveksiyon-difüzyon denklemi

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_{i,j}}{\partial t} = & -U_x \frac{u_{i+1,j} - u_{i-1,j}}{2\Delta x} + U_y \frac{u_{i,j+1} - u_{i,j-1}}{2\Delta y} + D_x \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{(\Delta x)^2} \\ & + D_y \frac{u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}}{(\Delta y)^2} \end{aligned} \quad (3.25)$$

şeklinde zamana bağlı bir adi diferansiyel denkleme indirgenir.

(3.24) iki boyutlu lineer konveksiyon-difüzyon denkleminde yer alan uzaysal değişkenlerin birinci ve ikinci mertebeden kısmi türevlerinin yerine

$$\frac{\partial u}{\partial x} \approx \frac{u(x - 2\Delta x, y, t) - 8u(x - \Delta x, y, t) + 8u(x + \Delta x, y, t) - u(x + 2\Delta x, y, t)}{12\Delta x},$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} \approx \frac{u(x, y - 2\Delta y, t) - 8u(x, y - \Delta y, t) + 8u(x, y + \Delta y, t) - u(x, y + 2\Delta y, t)}{12\Delta y},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \approx \frac{-u(x - 2\Delta x, y, t) + 16u(x - \Delta x, y, t) - 30u(x, y, t) + 16u(x + \Delta x, y, t) - u(x + 2\Delta x, y, t)}{12(\Delta x)^2},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \approx \frac{-u(x, y - 2\Delta y, t) + 16u(x, y - \Delta y, t) - 30u(x, y, t) + 16u(x, y + \Delta y, t) - u(x, y + 2\Delta y, t)}{12(\Delta y)^2}$$

şeklindeki dördüncü mertebeden sonlu fark yaklaşımlarının yazılmasıyla (3.24) denklemi

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_i}{\partial t} = & -V_x \frac{u_{i-2,j} - 8u_{i-1,j} + 8u_{i+1,j} - u_{i+2,j}}{12\Delta x} - V_y \frac{u_{i,j-2} - 8u_{i,j-1} + 8u_{i,j+1} - u_{i,j+2}}{12\Delta y} \\ & + D_x \frac{-u_{i-2,j} + 16u_{i-1,j} - 30u_{i,j} + 16u_{i+1,j} - u_{i+2,j}}{12(\Delta x)^2} \\ & + D_y \frac{-u_{i,j-2} + 16u_{i,j-1} - 30u_{i,j} + 16u_{i,j+1} - u_{i,j+2}}{12(\Delta y)^2} \end{aligned} \quad (3.26)$$

olur.

(3.24) denkleminde yer alan uzaysal değişkenlerin birinci ve ikinci mertebeden türevler için

$$\frac{\partial u}{\partial x} \approx \left[ -u(x-3\Delta x, y, t) + 9u(x-2\Delta x, y, t) - 45u(x-\Delta x, y, t) + 45u(x+\Delta x, y, t) - 9u(x+2\Delta x, y, t) + u(x+3\Delta x, y, t) \right] / (60\Delta x),$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} \approx \left[ -u(x, y-3\Delta y, t) + 9u(x, y-2\Delta y, t) - 45u(x, y-\Delta y, t) + 45u(x, y+\Delta y, t) - 9u(x, y+2\Delta y, t) + u(x, y+3\Delta y, t) \right] / (60\Delta y),$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \approx \left[ 2u(x-3\Delta x, y, t) - 27u(x-2\Delta x, y, t) + 270u(x-\Delta x, y, t) - 490u(x, y, t) + 270u(x+\Delta x, y, t) - 27u(x+2\Delta x, y, t) + 2u(x+3\Delta x, y, t) \right] / \left( 180(\Delta x)^2 \right),$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \approx \left[ 2u(x, y-3\Delta y, t) - 27u(x, y-2\Delta y, t) + 270u(x, y-\Delta y, t) - 490u(x, y, t) + 270u(x, y+\Delta y, t) - 27u(x, y+2\Delta y, t) + 2u(x, y+3\Delta y, t) \right] / \left( 180(\Delta y)^2 \right)$$

altıncı mertebeden sonlu fark formüllerinin kullanılmasıyla

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_{i,j}}{\partial t} = & -V_x \left[ \left( -u_{i-3,j} + 9u_{i-2,j} - 45u_{i-1,j} + 45u_{i+1,j} - 9u_{i+2,j} + u_{i+3,j} \right) / (60\Delta x) \right] \\ & -V_y \left[ \left( -u_{i,j-3} + 9u_{i,j-2} - 45u_{i,j-1} + 45u_{i,j+1} - 9u_{i,j+2} + u_{i,j+3} \right) / (60\Delta y) \right] \\ & +D_x \left[ \left( 2u_{i-3,j} - 27u_{i-2,j} + 270u_{i-1,j} - 490u_{i,j} + 270u_{i+1,j} - 27u_{i+2,j} + 2u_{i+3,j} \right) \right. \\ & \left. / \left( 180(\Delta x)^2 \right) \right] + D_y \left[ \left( 2u_{i,j-3} - 27u_{i,j-2} + 270u_{i,j-1} - 490u_{i,j} + 270u_{i,j+1} \right. \right. \\ & \left. \left. - 27u_{i,j+2} + 2u_{i,j+3} \right) / \left( 180(\Delta y)^2 \right) \right] \end{aligned} \quad (3.27)$$

sonucunu verir.

Burada  $u_{i,j}$ ,  $u(x_i, y_j, t)$  'i göstermek için kullanılmış olup  $x$  'in tanım aralığı  $x_{i+1} = x_i + \Delta x$  ( $i = 1, 2, \dots, N-1$ ) ve  $y$  'nin tanım aralığı  $y_{j+1} = y_j + \Delta y$  ( $j = 1, 2, \dots, M-1$ ) şeklinde her eksen kendi içinde eşit aralıklara bölünerek  $N \times M$  adet ızgara noktası oluşturulmuştur.

(3.25) denklemi, (3.24) iki boyutlu konveksiyon-difüzyon denkleminde yer alan uzaysal değişkenlere bağlı birinci ve ikinci mertebeden türevler için ikinci mertebeden merkezi fark yaklaşımının uygulanmasıyla elde edilmiştir. (3.26) denklemi, (3.24) denkleminde dördüncü mertebeden sonlu fark yaklaşımının uygulanmasıyla elde edilmiş ve (3.27) denklemi yine (3.24) denkleminde altıncı mertebeden sonlu fark yaklaşımının uygulanmasıyla elde edilmiştir. TDA-RK3 açık (explicit) yöntemi kullanılarak (3.25), (3.26) ve (3.27) denklemlerinin çözümü bulunur.

### 3.4 Burgers Denkleminin Sonlu Fark Formülasyonları

$\nu$  kinematik viskozite sabiti olmak üzere, bir boyutlu Burgers denklemi

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad x \in [a, b], \quad t \geq 0 \quad (3.28)$$

şeklinde verilir.

$[a, b]$  aralığı,  $\Delta x$  aralıklarla  $N-1$  tane parçaya bölünmüş olsun. Böylece sayısal hesaplamaların yapılacağı  $N$  tane uzaysal düğüm noktası elde edilmiş olur. Bu noktalarda (3.28) denkleminde yer alan uzaysal değişkenlerin birinci ve ikinci mertebeden kısmi türevleri yerine,

$$\frac{\partial u}{\partial x} \approx \frac{u(x + \Delta x, t) - u(x - \Delta x, t)}{2\Delta x}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \approx \frac{u(x + \Delta x, t) - 2u(x, t) + u(x - \Delta x, t)}{(\Delta x)^2},$$

şeklinde ikinci mertebeden sonlu fark yaklaşımlarının yazılmasıyla uzaysal türevler ayrıştırılarak bir boyutlu (3.28) Burgers denklemi

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} = -u_i \frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2\Delta x} + \nu \frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{(\Delta x)^2} \quad (3.29)$$

şeklinde adi türevli bir denkleme indirgenir.

(3.28) denkleminde yer alan uzaysal değişkenlerin birinci ve ikinci mertebeden kısmi türevler yerine, sırasıyla,

$$\frac{\partial u}{\partial x} \approx \frac{u(x-2\Delta x, t) - 8u(x-\Delta x, t) + 8u(x+\Delta x, t) - u(x+2\Delta x, t)}{12\Delta x}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \approx \frac{-u(x-2\Delta x, t) + 16u(x-\Delta x, t) - 30u(x, t) + 16u(x+\Delta x, t) - u(x+2\Delta x, t)}{12(\Delta x)^2}$$

dördüncü mertebeden sonlu fark yaklaşımlarının yazılmasıyla uzaysal türevler ayrıştırılarak (3.28) denklemi

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} = -u_i \frac{u_{i-2} - 8u_{i-1} + 8u_{i+1} - u_{i+2}}{12\Delta x} + v \frac{-u_{i-2} + 16u_{i-1} - 30u_i + 16u_{i+1} - u_{i+2}}{12(\Delta x)^2} \quad (3.30)$$

adi diferansiyel denklem halini alır.

(3.28) denklemde yer alan uzaysal değişkenlerin türevleri altıncı mertebeden

$$\frac{\partial u}{\partial x} \approx \left[ -u(x-3\Delta x, t) + 9u(x-2\Delta x, t) - 45u(x-\Delta x, t) + 45u(x+\Delta x, t) - 9u(x+2\Delta x, t) + u(x+3\Delta x, t) \right] / (60\Delta x)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \approx \left[ 2u(x-3\Delta x, t) - 27u(x-2\Delta x, t) + 270u(x-\Delta x, t) - 490u(x, t) + 270u(x+\Delta x, t) - 27u(x+2\Delta x, t) + 2u(x+3\Delta x, t) \right] / (180(\Delta x)^2)$$

yaklaşımları kullanılarak ayrıştırılırsa

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} = -u_i \left[ \frac{(-u_{i-3} + 9u_{i-2} - 45u_{i-1} + 45u_{i+1} - 9u_{i+2} + u_{i+3})}{(60\Delta x)} \right] + v \left[ \frac{(2u_{i-3} - 27u_{i-2} + 270u_{i-1} - 490u_i + 270u_{i+1} - 27u_{i+2} + 2u_{i+3})}{(180(\Delta x)^2)} \right] \quad (3.31)$$

elde edilir.

Burada  $u_i$  yaklaşımı  $u(x_i, t)$  'i simgelemek için kullanılmış olup tanım aralığı  $x_{i+1} = x_i + h$  ( $i = 0, 1, \dots, N-1$ ) şeklinde eşit aralıklara bölünerek çözüm noktaları oluşturulmuştur. (3.28) Burgers denklemindeki uzaysal  $x$  değişkenine bağlı birinci ve ikinci mertebeden türevler, ikinci mertebeden sonlu fark yaklaşımının uygulanmasıyla (3.29) denklemi; dördüncü mertebeden sonlu fark yaklaşımının uygulanmasıyla (3.30) denklemi ve altıncı mertebeden sonlu fark yaklaşımının uygulanmasıyla (3.31) denklemi elde edilmiştir. (3.29), (3.30) ve (3.31) denklemleri

zamana bağılı adi diferansiyel denklemlerdir. (3.29), (3.30) ve (3.31) denklemleri her bir iç nokta için çözülmesi gereken bir denklem oluşturur. (3.29), (3.30) ve (3.31) denklemleri sınır koşullarına iç noktalarda uygulanması gereken sonlu fark formülleridir. Problemden verilen sınır koşullarına bağılı olarak farklı sonlu fark formülleri uygulamak gerekecektir. Bu çalışmada Burgers denkleminin iç noktalardaki sayısal çözümünü (3.29), (3.30) ve (3.31) denklemlerinden elde etmek için açık (explicit) bir yöntem olan, fazla bilgisayar belleği gerektirmeyen, diğer yöntemlere göre avantajlara sahip olan TDA-RK3 yöntemi kullanılacaktır.

### 3.5 Navier-Stokes Denklemlerinin Sonlu Fark Formülasyonları

İki boyutlu, kararlı, sıkıştırılamaz akışkanlar için Navier-Stokes denklemlerinin akım fonksiyonu ve burgaç (girdap) (stream-vorticity) ile ifadesi

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = -\omega \quad (3.32)$$

$$\frac{1}{Re} \left( \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} \right) = \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial \omega}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \omega}{\partial y} \quad (3.33)$$

şeklinindedir. Burada  $Re$  Reynolds sayısını,  $\psi$  akım fonksiyonunu ve  $\omega$  burgaç (girdap) ifade etmektedir. (3.32) ve (3.33) denklemlerini ayrıştırmak için

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} \approx \frac{\psi(x + \Delta x, y) - \psi(x - \Delta x, y)}{2\Delta x},$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} \approx \frac{\psi(x, y + \Delta y) - \psi(x, y - \Delta y)}{2\Delta y},$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \approx \frac{\psi(x + \Delta x, y) - 2\psi(x, y) + \psi(x - \Delta x, y)}{(\Delta x)^2},$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \approx \frac{\psi(x, y + \Delta y) - 2\psi(x, y) + \psi(x, y - \Delta y)}{(\Delta y)^2},$$

$$\frac{\partial \omega}{\partial x} \approx \frac{\omega(x + \Delta x, y) - \omega(x - \Delta x, y)}{2\Delta x},$$

$$\frac{\partial \omega}{\partial y} \approx \frac{\omega(x, y + \Delta y) - \omega(x, y - \Delta y)}{2\Delta y},$$

$$\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} \approx \frac{\omega(x + \Delta x, y) - 2\omega(x, y) + \omega(x - \Delta x, y)}{(\Delta x)^2},$$

$$\frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} \approx \frac{\omega(x, y + \Delta y) - 2\omega(x, y) + \omega(x, y - \Delta y)}{(\Delta y)^2},$$

ikinci mertebeden sonlu fark formülleri kullanılırsa (3.32) ve (3.33) denklemleri sırasıyla

$$\begin{aligned} & \frac{\psi(x + \Delta x, y) - 2\psi(x, y) + \psi(x - \Delta x, y)}{(\Delta x)^2} \\ & + \frac{\psi(x, y + \Delta y) - 2\psi(x, y) + \psi(x, y - \Delta y)}{(\Delta y)^2} = -\omega, \end{aligned} \quad (3.34)$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\text{Re}} \left[ \frac{\omega(x + \Delta x, y) - 2\omega(x, y) + \omega(x - \Delta x, y)}{(\Delta x)^2} \right. \\ & \left. + \frac{\omega(x, y + \Delta y) - 2\omega(x, y) + \omega(x, y - \Delta y)}{(\Delta y)^2} \right] = \end{aligned} \quad (3.35)$$

$$\begin{aligned} & \left( \frac{\psi(x, y + \Delta y) - \psi(x, y - \Delta y)}{2\Delta y} \right) \left( \frac{\omega(x + \Delta x, y) - \omega(x - \Delta x, y)}{2\Delta x} \right) \\ & - \left( \frac{\psi(x + \Delta x, y) - \psi(x - \Delta x, y)}{2\Delta x} \right) \left( \frac{\omega(x, y + \Delta y) - \omega(x, y - \Delta y)}{2\Delta y} \right) \end{aligned}$$

şeklinde olur.  $x$  ve  $y$  yönündeki adım uzunluklarının  $\Delta x = \Delta y = h$  şeklinde eşit alınmasıyla (3.34) ve (3.35) denklemleri

$$\psi_{i+1,j} + \psi_{i-1,j} + \psi_{i,j+1} + \psi_{i,j-1} - 4\psi_{i,j} + h^2 \omega_{i,j} = 0, \quad (3.36)$$

$$\begin{aligned} & \omega_{i+1,j} + \omega_{i-1,j} + \omega_{i,j+1} + \omega_{i,j-1} - 4\omega_{i,j} \\ & - \frac{\text{Re}}{4} \left[ (\psi_{i,j+1} - \psi_{i,j-1})(\omega_{i+1,j} - \omega_{i-1,j}) - (\psi_{i+1,j} - \psi_{i-1,j})(\omega_{i,j+1} - \omega_{i,j-1}) \right] = 0 \end{aligned} \quad (3.37)$$

şeklinde sırasıyla Navier-Stokes denklemleri için ikinci mertebeden sonlu fark formülleri elde edilir.

(3.32) ve (3.33) denklemlerindeki türevler dördüncü mertebeden sonlu farklar cinsinden

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} \approx \frac{\psi(x - 2\Delta x, y) - 8\psi(x - \Delta x, y) + 8\psi(x + \Delta x, y) - \psi(x + 2\Delta x, y)}{12\Delta x},$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} \approx \frac{\psi(x, y - 2\Delta y) - 8\psi(x, y - \Delta y) + 8\psi(x, y + \Delta y) - \psi(x, y + 2\Delta y)}{12\Delta y},$$

$$\frac{\partial \omega}{\partial x} \approx \frac{\omega(x - 2\Delta x, y) - 8\omega(x - \Delta x, y) + 8\omega(x + \Delta x, y) - \omega(x + 2\Delta x, y)}{12\Delta x},$$

$$\frac{\partial \omega}{\partial y} \approx \frac{\omega(x, y - 2\Delta y) - 8\omega(x, y - \Delta y) + 8\omega(x, y + \Delta y) - \omega(x, y + 2\Delta y)}{12\Delta y},$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \approx \frac{-\psi(x - 2\Delta x, y) + 16\psi(x - \Delta x, y) - 30\psi(x, y) + 16\psi(x + \Delta x, y) - \psi(x + 2\Delta x, y)}{12(\Delta x)^2},$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \approx \frac{-\psi(x, y - 2\Delta y) + 16\psi(x, y - \Delta y) - 30\psi(x, y) + 16\psi(x, y + \Delta y) - \psi(x, y + 2\Delta y)}{12(\Delta y)^2},$$

$$\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} \approx \frac{-\omega(x - 2\Delta x, y) + 16\omega(x - \Delta x, y) - 30\omega(x, y) + 16\omega(x + \Delta x, y) - \omega(x + 2\Delta x, y)}{12(\Delta x)^2},$$

$$\frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} \approx \frac{-\omega(x, y - 2\Delta y) + 16\omega(x, y - \Delta y) - 30\omega(x, y) + 16\omega(x, y + \Delta y) - \omega(x, y + 2\Delta y)}{12(\Delta y)^2}$$

şeklinde yazılır. Bu eşitlikler (3.32) ve (3.33) denklemlerinde yerine konulursa

$$\begin{aligned} & [-\psi(x - 2\Delta x, y) + 16\psi(x - \Delta x, y) - 30\psi(x, y) + 16\psi(x + \Delta x, y) \\ & -\psi(x + 2\Delta x, y)] / (12(\Delta x)^2) + [-\psi(x, y - 2\Delta y) + 16\psi(x, y - \Delta y) \\ & -30\psi(x, y) + 16\psi(x, y + \Delta y) - \psi(x, y + 2\Delta y)] / (12(\Delta y)^2) = -\omega, \end{aligned} \quad (3.38)$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{Re} \left[ [-\omega(x - 2\Delta x, y) + 16\omega(x - \Delta x, y) - 30\omega(x, y) + 16\omega(x + \Delta x, y) \right. \\ & \left. -\omega(x + 2\Delta x, y)] / (12(\Delta x)^2) + [-\omega(x, y - 2\Delta y) + 16\omega(x, y - \Delta y) \right. \\ & \left. -30\omega(x, y) + 16\omega(x, y + \Delta y) - \omega(x, y + 2\Delta y)] / (12(\Delta y)^2) \right] = \\ & \left[ (\psi(x, y - 2\Delta y) - 8\psi(x, y - \Delta y) + 8\psi(x, y + \Delta y) - \psi(x, y + 2\Delta y)) / (12\Delta y) \right] \quad (3.39) \\ & \left[ (\omega(x - 2\Delta x, y) - 8\omega(x - \Delta x, y) + 8\omega(x + \Delta x, y) - \omega(x + 2\Delta x, y)) / (12\Delta x) \right] \\ & - \left[ (\psi(x - 2\Delta x, y) - 8\psi(x - \Delta x, y) + 8\psi(x + \Delta x, y) - \psi(x + 2\Delta x, y)) / (12\Delta x) \right] \\ & \left[ (\omega(x, y - 2\Delta y) - 8\omega(x, y - \Delta y) + 8\omega(x, y + \Delta y) - \omega(x, y + 2\Delta y)) / (12\Delta y) \right] \end{aligned}$$

şeklinde bulunur.  $x$  ve  $y$  yönündeki adım uzunluklarının  $\Delta x = \Delta y = h$  şeklinde eşit alınmasıyla (3.38) ve (3.39) denklemleri



$$\begin{aligned} & \left[ -\psi_{i-2,j} + 16\psi_{i-1,j} - 30\psi_{i,j} + 16\psi_{i+1,j} - \psi_{i+2,j} \right] \\ & + \left[ -\psi_{i,j-2} + 16\psi_{i,j-1} - 30\psi_{i,j} + 16\psi_{i,j+1} - \psi_{i,j+2} \right] - 12h^2\omega_{i,j} = 0, \end{aligned} \quad (3.40)$$

$$\begin{aligned} & -\omega_{i-2,j} + 16\omega_{i-1,j} + 16\omega_{i+1,j} - \omega_{i+2,j} - \omega_{i,j-2} + 16\omega_{i,j-1} + 16\omega_{i,j+1} - \omega_{i,j+2} - 60\omega_{i,j} = \\ & \frac{\text{Re}}{12} \left[ \left( \psi_{i,j-2} - 8\psi_{i,j-1} + 8\psi_{i,j+1} - \psi_{i,j+2} \right) \left( \omega_{i-2,j} - 8\omega_{i-1,j} + 8\omega_{i+1,j} - \omega_{i+2,j} \right) \right. \\ & \left. - \left( \psi_{i-2,j} - 8\psi_{i-1,j} + 8\psi_{i+1,j} - \psi_{i+2,j} \right) \left( \omega_{i,j-2} - 8\omega_{i,j-1} + 8\omega_{i,j+1} - \omega_{i,j+2} \right) \right] \end{aligned} \quad (3.41)$$

olur. (3.40) ve (3.41) denklemleri, Navier-Stokes denklemlerinin akım fonksiyonu ve burgaç ile ifadesinin dördüncü mertebeden sonlu fark formülleridir.

(3.32) ve (3.33) denklemlerindeki türevler altıncı mertebeden sonlu farklar cinsinden

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi}{\partial x} & \approx \left[ -\psi(x-3\Delta x, y) + 9\psi(x-2\Delta x, y) - 45\psi(x-\Delta x, y) + 45\psi(x+\Delta x, y) \right. \\ & \left. - 9\psi(x+2\Delta x, y) + \psi(x+3\Delta x, y) \right] / (60\Delta x), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi}{\partial y} & \approx \left[ -\psi(x, y-3\Delta y) + 9\psi(x, y-2\Delta y) - 45\psi(x, y-\Delta y) + 45\psi(x, y+\Delta y) \right. \\ & \left. - 9\psi(x, y+2\Delta y) + \psi(x, y+3\Delta y) \right] / (60\Delta y), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \omega}{\partial x} & \approx \left[ -\omega(x-3\Delta x, y) + 9\omega(x-2\Delta x, y) - 45\omega(x-\Delta x, y) + 45\omega(x+\Delta x, y) \right. \\ & \left. - 9\omega(x+2\Delta x, y) + \omega(x+3\Delta x, y) \right] / (60\Delta x), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \omega}{\partial y} & \approx \left[ -\omega(x, y-3\Delta y) + 9\omega(x, y-2\Delta y) - 45\omega(x, y-\Delta y) + 45\omega(x, y+\Delta y) \right. \\ & \left. - 9\omega(x, y+2\Delta y) + \omega(x, y+3\Delta y) \right] / (60\Delta y), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} & \approx \left[ 2\psi(x-3\Delta x, y) - 27\psi(x-2\Delta x, y) + 270\psi(x-\Delta x, y) - 490\psi(x, y) \right. \\ & \left. + 270\psi(x+\Delta x, y) - 27\psi(x+2\Delta x, y) + 2\psi(x+3\Delta x, y) \right] / \left( 180(\Delta x)^2 \right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} & \approx \left[ 2\psi(x, y-3\Delta y) - 27\psi(x, y-2\Delta y) + 270\psi(x, y-\Delta y) - 490\psi(x, y) \right. \\ & \left. + 270\psi(x, y+\Delta y) - 27\psi(x, y+2\Delta y) + 2\psi(x, y+3\Delta y) \right] / \left( 180(\Delta y)^2 \right), \end{aligned}$$

$$\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} \approx [2\omega(x-3\Delta x, y) - 27\omega(x-2\Delta x, y) + 270\omega(x-\Delta x, y) - 490\omega(x, y) + 270\omega(x+\Delta x, y) - 27\omega(x+2\Delta x, y) + 2\omega(x+3\Delta x, y)] / (180(\Delta x)^2),$$

$$\frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} \approx [2\omega(x, y-3\Delta y) - 27\omega(x, y-2\Delta y) + 270\omega(x, y-\Delta y) - 490\omega(x, y) + 270\omega(x, y+\Delta y) - 27\omega(x, y+2\Delta y) + 2\omega(x, y+3\Delta y)] / (180(\Delta y)^2)$$

şeklinde yazılır. Bu ifadeler (3.32) ve (3.33) denklemlerinde yerine konulursa

$$\begin{aligned} & [2\psi(x-3\Delta x, y) - 27\psi(x-2\Delta x, y) + 270\psi(x-\Delta x, y) - 490\psi(x, y) \\ & + 270\psi(x+\Delta x, y) - 27\psi(x+2\Delta x, y) + 2\psi(x+3\Delta x, y)] / (180(\Delta x)^2) \\ & + [2\psi(x, y-3\Delta y) - 27\psi(x, y-2\Delta y) + 270\psi(x, y-\Delta y) - 490\psi(x, y) \\ & + 270\psi(x, y+\Delta y) - 27\psi(x, y+2\Delta y) + 2\psi(x, y+3\Delta y)] / (180(\Delta y)^2) = -\omega, \end{aligned} \quad (3.42)$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{Re} \left[ [2\omega(x-3\Delta x, y) - 27\omega(x-2\Delta x, y) + 270\omega(x-\Delta x, y) - 490\omega(x, y) \right. \\ & + 270\omega(x+\Delta x, y) - 27\omega(x+2\Delta x, y) + 2\omega(x+3\Delta x, y)] / (180(\Delta x)^2) \\ & + [2\omega(x, y-3\Delta y) - 27\omega(x, y-2\Delta y) + 270\omega(x, y-\Delta y) - 490\omega(x, y) \\ & + 270\omega(x, y+\Delta y) - 27\omega(x, y+2\Delta y) + 2\omega(x, y+3\Delta y)] / (180(\Delta y)^2) \left. \right] \\ & = \left( \left[ -\psi(x, y-3\Delta y) + 9\psi(x, y-2\Delta y) - 45\psi(x, y-\Delta y) + 45\psi(x, y+\Delta y) \right. \right. \\ & \quad \left. \left. - 9\psi(x, y+2\Delta y) + \psi(x, y+3\Delta y) \right] / (60\Delta y) \right) \quad (3.43) \\ & \left( \left[ -\omega(x-3\Delta x, y) + 9\omega(x-2\Delta x, y) - 45\omega(x-\Delta x, y) + 45\omega(x+\Delta x, y) \right. \right. \\ & \quad \left. \left. - 9\omega(x+2\Delta x, y) + \omega(x+3\Delta x, y) \right] / (60\Delta x) \right) \\ & - \left( \left[ -\psi(x-3\Delta x, y) + 9\psi(x-2\Delta x, y) - 45\psi(x-\Delta x, y) + 45\psi(x+\Delta x, y) \right. \right. \\ & \quad \left. \left. - 9\psi(x+2\Delta x, y) + \psi(x+3\Delta x, y) \right] / (60\Delta x) \right) \\ & \left( \left[ -\omega(x, y-3\Delta y) + 9\omega(x, y-2\Delta y) - 45\omega(x, y-\Delta y) + 45\omega(x, y+\Delta y) \right. \right. \\ & \quad \left. \left. - 9\omega(x, y+2\Delta y) + \omega(x, y+3\Delta y) \right] / (60\Delta y) \right) \end{aligned}$$

şeklinde olur.  $x$  ve  $y$  yönündeki adım uzunluklarının  $\Delta x = \Delta y = h$  şeklinde eşit alınmasıyla (3.42) ve (3.43) denklemleri

$$\begin{aligned} & 2\psi_{i-3,j} - 27\psi_{i-2,j} + 270\psi_{i-1,j} + 270\psi_{i+1,j} - 27\psi_{i+2,j} + 2\psi_{i+3,j} + 2\psi_{i,j-3} \\ & - 27\psi_{i,j-2} + 270\psi_{i,j-1} + 270\psi_{i,j+1} - 27\psi_{i,j+2} + 2\psi_{i,j+3} - 980\psi_{i,j} + 180h^2\omega_{i,j} = 0, \end{aligned} \quad (3.44)$$

$$\begin{aligned}
& 2\omega_{i-3,j} - 27\omega_{i-2,j} + 270\omega_{i-1,j} + 270\omega_{i+1,j} - 27\omega_{i+2,j} + 2\omega_{i+3,j} + 2\omega_{i,j-3} - 27\omega_{i,j-2} \\
& + 270\omega_{i,j-1} + 270\omega_{i,j+1} - 27\omega_{i,j+2} + 2\omega_{i,j+3} - 980\omega_{i,j} \\
& = \frac{\text{Re}}{20} \left[ \left( -\psi_{i,j-3} + 9\psi_{i,j-2} - 45\psi_{i,j-1} + 45\psi_{i,j+1} - 9\psi_{i,j+2} + \psi_{i,j+3} \right) \right. \\
& \quad \left( -\omega_{i-3,j} + 9\omega_{i-2,j} - 45\omega_{i-1,j} + 45\omega_{i+1,j} - 9\omega_{i+2,j} + \omega_{i+3,j} \right) \\
& \quad - \left( -\psi_{i-3,j} + 9\psi_{i-2,j} - 45\psi_{i-1,j} + 45\psi_{i+1,j} - 9\psi_{i+2,j} + \psi_{i+3,j} \right) \\
& \quad \left. \left( -\omega_{i,j-3} + 9\omega_{i,j-2} - 45\omega_{i,j-1} + 45\omega_{i,j+1} - 9\omega_{i,j+2} + \omega_{i,j+3} \right) \right]
\end{aligned} \tag{3.45}$$

şekline dönüşür. (3.44) ve (3.45) denklemleri, Navier-Stokes denklemlerinin akım fonksiyonu ve burgaç ile ifadesinin altıncı mertebeden sonlu fark formülleridir.

### 3.6 Sonuç

Bu bölümde göz önüne alınan model denklemlerin, Laplace, Poisson, bir-iki boyutlu konveksiyon-difüzyon denklemleri, bir boyutlu viskoz Burgers denklemi ve iki boyutlu Navier-Stokes denklemlerinin akım fonksiyonu-burğaç ile ifadesinin sonlu fark formülasyonları çıkarılmıştır. Denklemler, merkezi fark yaklaşımları kullanılarak sonlu fark formülasyonları verilmiştir. Sınır noktalarında denklemlerin sonlu fark formülasyonları merkezi fark yaklaşımı ile yapılamayacağından sınır noktasına bağlı olarak ileri veya geri sonlu fark formülasyonları çıkarılmıştır. Her bir denklem için sınır noktalarındaki formülasyonların çıkarılışlarının uzun olması nedeniyle EK A.1’de genel olarak kullanılması gereken yaklaşımlar verilmiştir.

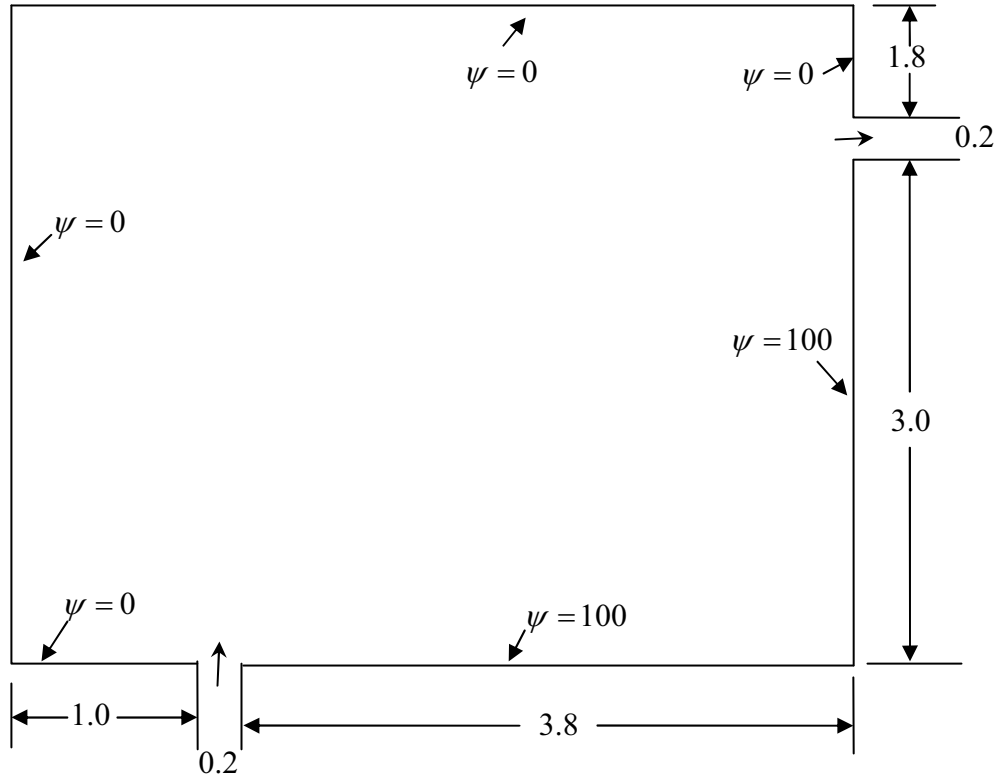
#### 4. PROBLEMLER VE SONUÇLAR

Bu bölümde incelemeye alınan modellerin sonlu fark çözümleri sunulmuştur. Elde edilen sonuçlar analitik sonuçlar ve literatürdeki mevcut diğer çalışmalarla karşılaştırılmıştır.

##### 4.1 Laplace Denkleminin Sonlu Fark Çözümleri

###### Problem 4.1.1 (Hoffman ve Chiang, 2000)

İki boyutlu ideal, sıkıştırılamayan bir akışkan Şekil 4.1’de gösterilen bölme, akış girişi ve çıkışı gerçekleşmektedir. Bu bölme içerisindeki akış çizgilerini saptayalım.



Şekil 4.1: Problem 4.1.1 de ifade edilen bölmenin taslağı ve problemin sınır koşulları

İki boyutlu sıkıştırılmayan akış için süreklilik denklemi

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (4.1)$$

şeklinde ifade edilir.  $\psi$  akım fonksiyonu

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y} \quad (4.2)$$

$$v = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (4.3)$$

şeklinde tanımlanabilir. Bir akış çizgisi sabit bir akım fonksiyonunun çizgisidir. Ayrıca burgaç (vorticity)

$$\vec{\omega} = \nabla \times \vec{V} \quad (4.4)$$

olarak tanımlanır. Buradan

$$\omega_z = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \quad (4.5)$$

Rotasyonel olmayan bir akışta girdap sıfırdır. Dolayısıyla

$$\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \quad (4.6)$$

olur. (4.2) ve (4.3) denklemlerini (4.6) denkleminde yerine yazarsak

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( -\frac{\partial \psi}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial \psi}{\partial y} \right) = 0$$

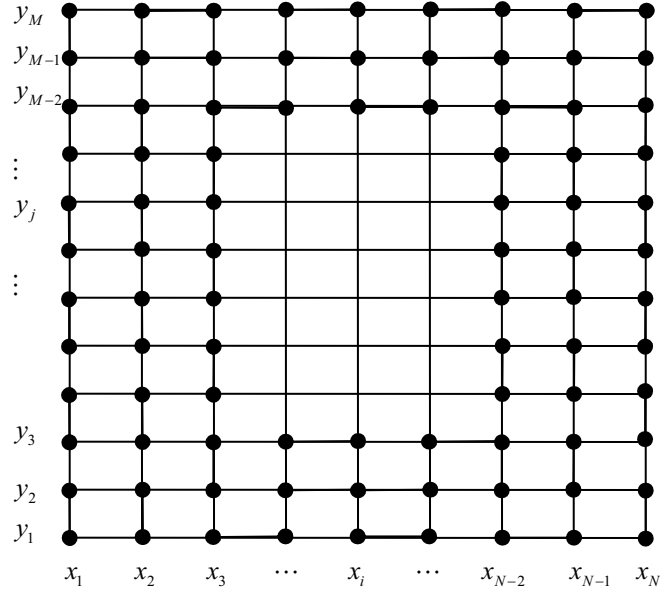
veya

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = 0 \quad (4.7)$$

olur. Bu problemde amacımız, (4.7) kısmi diferansiyel denkleminin sonlu fark çözümlerini elde etmektir. Çözüm Şekil 4.1’de gösterilen bölmedeki akış çizgilerini,  $\psi$  akım fonksiyonunun çizgilerini, belirlemektir. Bu problem için sınır koşulları, fonksiyonun sınır noktalarında değerleri verildiği için Dirichlet tipi sınır koşullarına sahiptir. Bölmede akışın gerçekleştiği giriş ve çıkış 0.2 ft; bölmenin boyutlar 5’er ft. Akışın gerçekleştiği giriş ve çıkış yerleri Şekil 4.1’de gösterilmiştir.

Bu problemde sayısal hesaplamayı yapmak için problemin tanımlandığı bölge  $x$  ve  $y$  yönünde  $h = 0.2$  olacak şekilde eşit aralıklara bölünerek (4.7) denkleminin ayrıştırılması ikinci, dördüncü ve altıncı mertebeden sırasıyla (3.7), (3.11), (3.15) denklemlerinde olduğu gibi yapılmıştır. Daha sonra elde edilen (3.7), (3.11), (3.15) denklemlerine  $1E-10$  tolerans değeriyle AAG yöntemi uygulanarak sonlu fark çözümleri bulunmuştur. AAG yönteminde gevşeme katsayısının en uygun seçimi, lineer sistemlerde iterasyon matrisinin özdeğerlerine bağlıdır ve

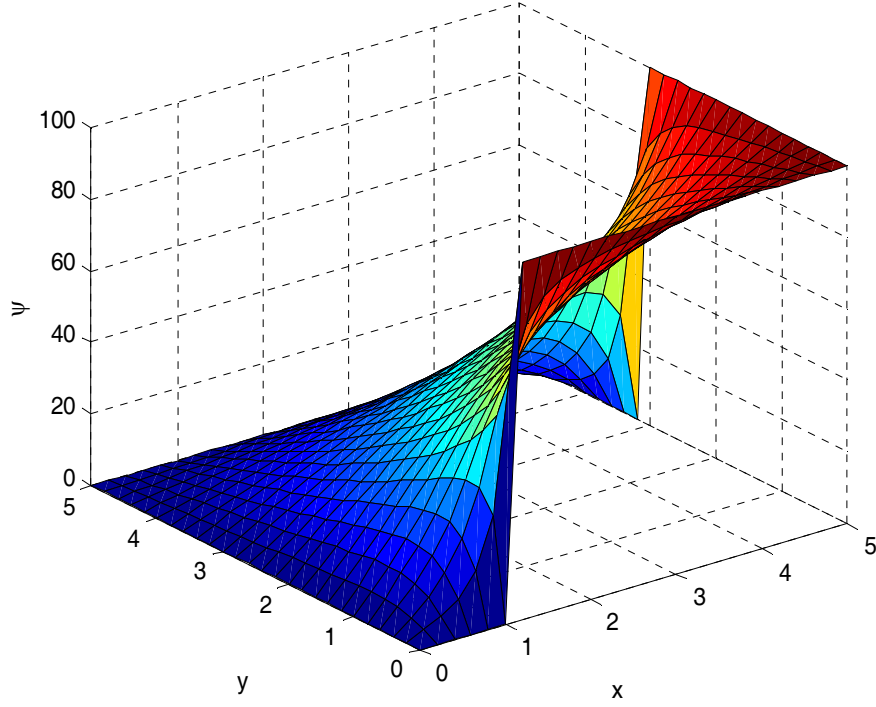
$$\alpha = \frac{4}{2 + \sqrt{4 - \left( \cos\left(\frac{\pi}{N-1}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{M-1}\right) \right)^2}} \quad (4.8)$$



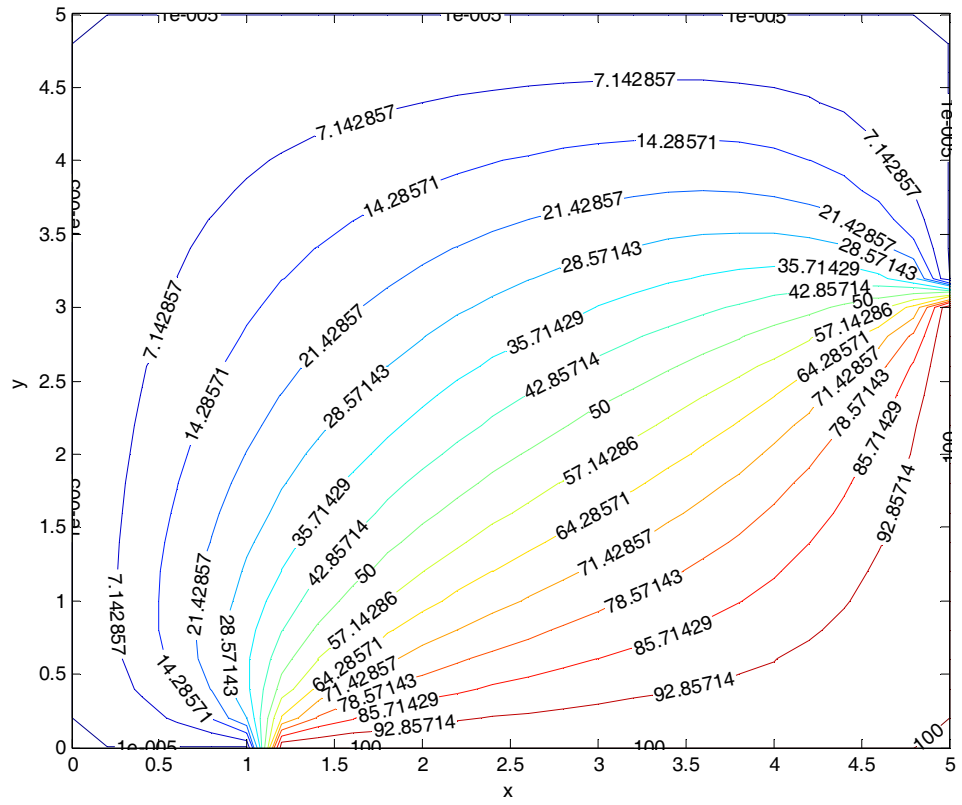
Şekil 4.2: Laplace denkleminin SF6 ile çözümünde farklı bir yaklaşım gerektiren sınır noktaları şeması

ile hesaplanır. Bu problem çözülürken AAG yönteminin uygulanması sırasında gevşeme katsayısı, (4.8) bağıntısı ile hesaplanmıştır. SF2, SF4 ve SF6 yöntemlerinin Laplace denkleminin uygulanmasıyla elde edilen, sırasıyla, (3.7), (3.11), (3.15) denklemlerine AAG yönteminin uygulanmasıyla çözüme yakınsama, sırasıyla, 122, 180, 201 iterasyonda gerçekleşmiştir. Elde edilen çözümlerin üç boyutlu grafikleri SF2 için Şekil 4.3'de; SF4 için Şekil 4.5'de, SF6 için Şekil 4.7'de verilmiş olup izdüşümü grafikleri SF2 için Şekil 4.4'te, SF4 için Şekil 4.6'da, SF6 için Şekil 4.8'de verilmiştir. Bulunan çözümlerden  $x = 1$ ,  $x = 2$ ,  $x = 3$ ,  $x = 4$  değerlerine karşılık gelen her  $y$  noktasındaki çözümler Tablo 4.1'de verilmiştir. Bu problemin (Laplace

denkleminin) SF6 çözümünde Şekil 4.2’de görülen sınır noktalarında EK A.1’de verilen SF6 yaklaşımlarının uygulanması durumunda çözüme yakınsama gerçekleşmemiştir. Bu nedenle söz konusu sınır noktalarında SF4 yaklaşımları için EK A.1’de verilen yaklaşımlar kullanılmıştır.

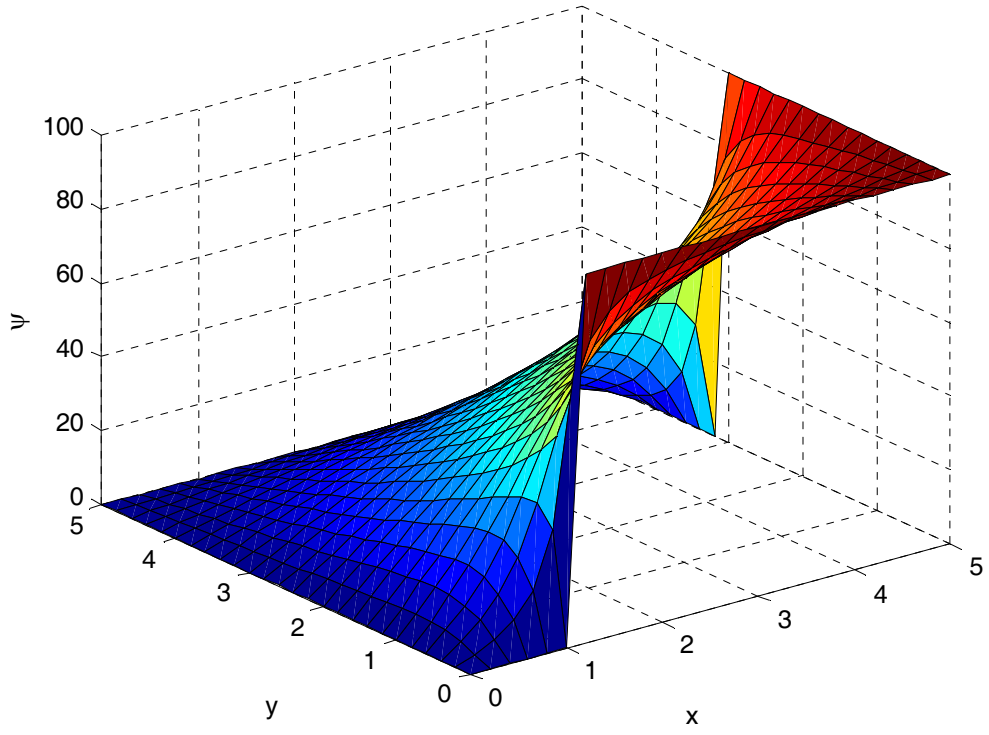


Şekil 4.3: Problem 4.1.1 in SF2 yöntemi ile çözümü

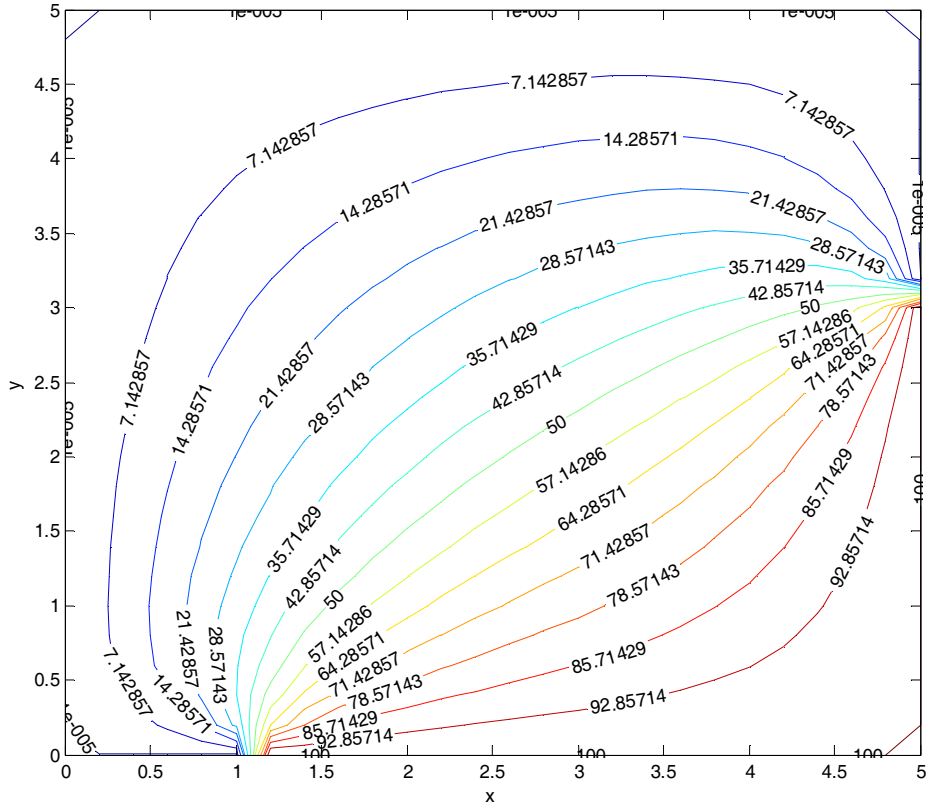


Şekil 4.4: Problem 4.1.1' in SF2 yöntemi ile çözümünün kontur grafiği

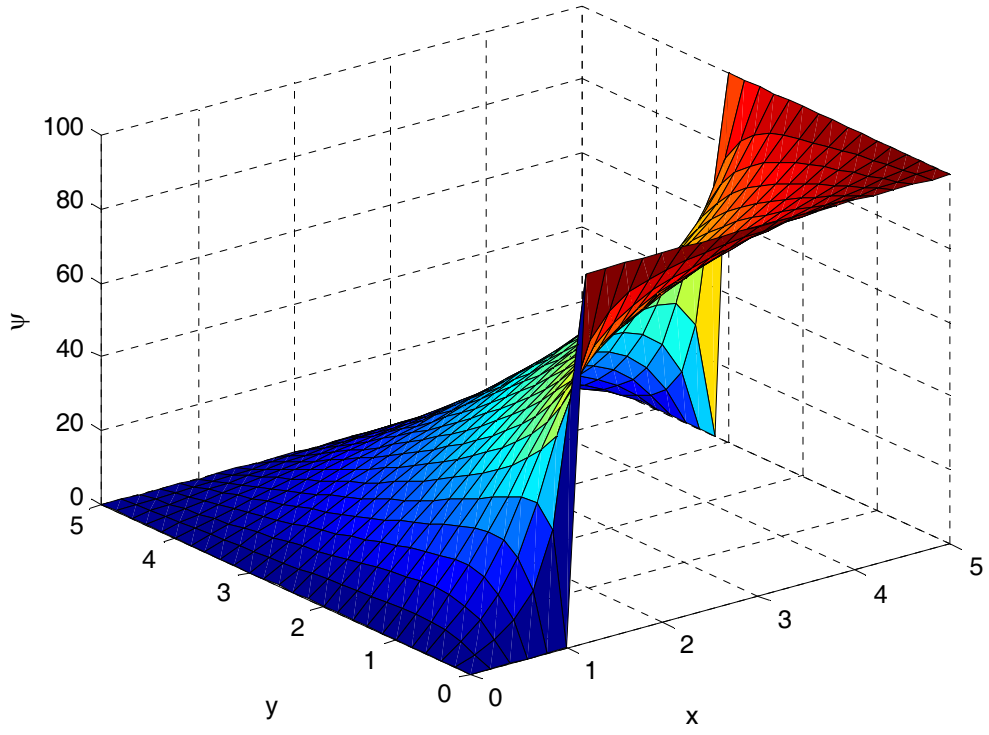




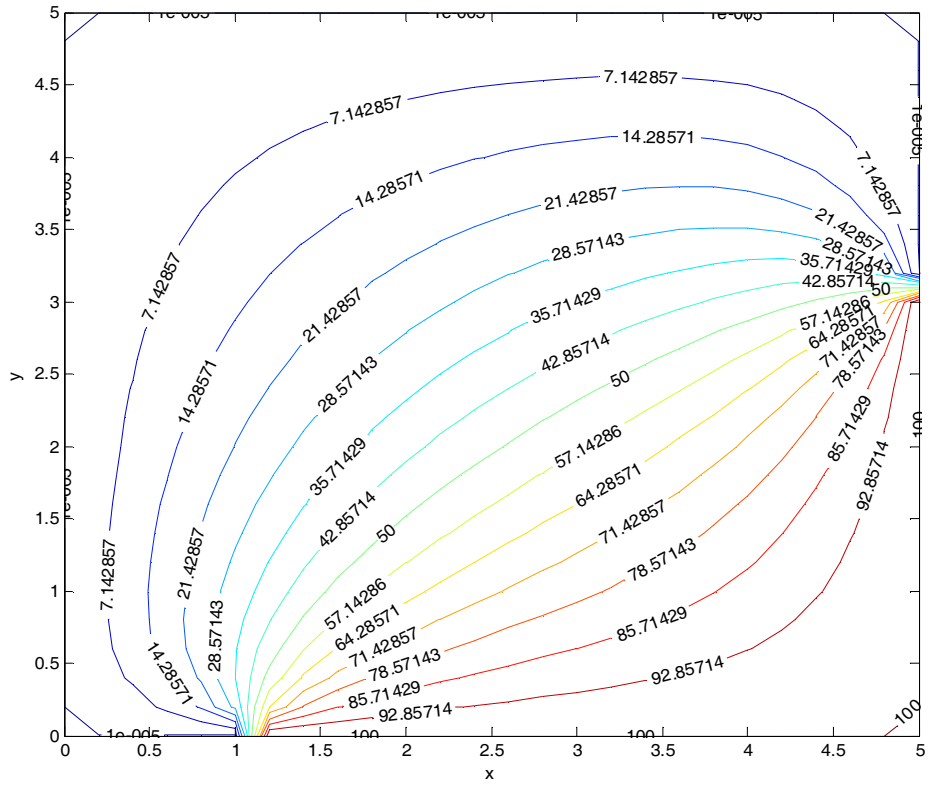
Şekil 4.5: Problem 4.1.1 'in SF4 yöntemi ile çözümü



Şekil 4.6: Problem 4.1.1' in SF4 yöntemi ile çözümünün kontur grafiği



Şekil 4.7: Problem 4.1.1 in SF6 yöntemi ile çözümü



Şekil 4.8: Problem 4.1.1'in SF6 yöntemi ile çözümünün kontur grafiği

Tablo 4.1: Problem 4.1.1' in sonlu fark çözümleri

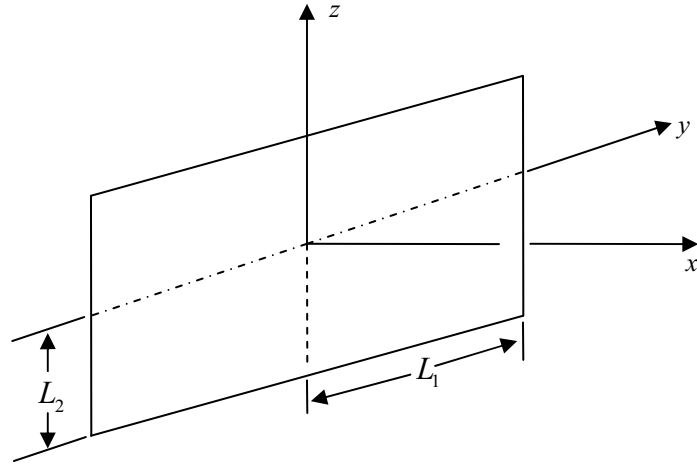
$x \backslash y$	1.0			2.0			3.0			4.0		
	SF2	SF4	SF6	SF2	SF4	SF6	SF2	SF4	SF6	SF2	SF4	SF6
0.0	0	0	0	100	100	100	100	100	100	100	100	100
0.2	28.627695	29.913960	29.913170	90.754474	90.783730	90.783717	95.196290	95.201249	95.201256	97.582821	97.585468	97.585469
0.4	34.628671	35.409889	35.407479	82.169297	82.179546	82.179543	90.448210	90.455118	90.455131	95.159237	95.163969	95.163971
0.6	34.900842	35.235774	35.224557	74.551489	74.522117	74.522270	85.801066	85.806286	85.806301	92.720302	92.726467	92.726470
0.8	33.515268	33.660272	33.654646	67.915517	67.855480	67.855398	81.283024	81.283136	81.283156	90.252048	90.258755	90.258763
1.0	31.602502	31.671258	31.669488	62.136105	62.061645	62.061453	76.903024	76.895605	76.895625	87.733044	87.739161	87.739174
1.2	29.535527	29.569362	29.568850	57.051680	56.974732	56.974582	72.652527	72.636300	72.636313	85.131943	85.135986	85.136006
1.4	27.458155	27.473088	27.472919	52.511758	52.438496	52.438417	68.509453	68.484067	68.484071	82.404841	82.404704	82.404733
1.6	25.430792	25.434239	25.434169	48.391846	48.324617	48.324587	64.442958	64.408726	64.408721	79.492344	79.484799	79.484834
1.8	23.478050	23.474193	23.474159	44.594243	44.533539	44.533534	60.418283	60.376097	60.376086	76.316432	76.296398	76.296423
2.0	21.607432	21.599020	21.599001	41.044258	40.989957	40.989962	56.401457	56.352937	56.352926	72.777800	72.737607	72.737570
2.2	19.817953	19.806956	19.806944	37.685791	37.637745	37.637754	52.363856	52.311651	52.311649	68.755830	68.685359	68.685155
2.4	18.104577	18.092455	18.092448	34.477500	34.435741	34.435751	48.286590	48.234633	48.234648	64.116198	64.006297	64.005857
2.6	16.460625	16.448463	16.448458	31.389748	31.354459	31.354468	44.164361	44.117763	44.117795	58.736031	58.589448	58.589149
2.8	14.879082	14.867657	14.867654	28.402108	28.373493	28.373500	40.007991	39.972258	39.972293	52.561719	52.413209	52.414176
3.0	13.353247	13.343080	13.343078	25.501225	25.479338	25.479343	35.844372	35.823929	35.823945	45.709299	45.636338	45.638172
3.2	11.877001	11.868387	11.868385	22.678845	22.663454	22.663456	31.712754	31.709331	31.709319	38.570121	38.637810	38.635982
3.4	10.444822	10.437870	10.437869	19.929968	19.920487	19.920487	27.657384	27.669293	27.669262	31.754481	31.898079	31.897118
3.6	9.051684	9.046351	9.046350	17.251158	17.246666	17.246664	23.718488	23.741374	23.741345	25.651943	25.794323	25.794629
3.8	7.692882	7.689009	7.689008	14.639103	14.638438	14.638436	19.924838	19.953308	19.953296	20.374755	20.481492	20.481942
4.0	6.363855	6.361209	6.361208	12.089511	12.091405	12.091403	16.289857	16.318986	16.318991	15.863088	15.931722	15.931938
4.2	5.060029	5.058345	5.058344	9.596391	9.599606	9.599605	12.811259	12.837391	12.837404	11.984730	12.024617	12.024670
4.4	3.776706	3.775720	3.775719	7.151725	7.155172	7.155171	9.473059	9.493913	9.493927	8.591910	8.613235	8.613233
4.6	2.509002	2.508487	2.508487	4.745484	4.748299	4.748299	6.248625	6.263007	6.263017	5.545128	5.555399	5.555393
4.8	1.251843	1.251633	1.251633	2.365911	2.367497	2.367497	3.103850	3.111236	3.111241	2.719003	2.722813	2.722808
5.0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

## 4.2 Poisson Denkleminin Sonlu Fark Çözümleri

### Problem 4.2.1 (Hoffman ve Chiang, 2000)

Dikdörtgensel bir kanalda, kararlı, kaygan olmayan sınır koşullu (no-slip boundary condition), sabit basınç gradientli, tam gelişmiş laminar bir akışı göz önüne alalım. Kanalın karşılıklı bölümleri, boyutları boyunca ve kullanılan koordinat sistemi Şekil 4.8'de gösterildiği gibidir. Bu akış için Navier-Stokes denklemlerinin  $x$  - momentum denklemini aşağıdaki gibi olur:

$$\mu \left( \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) - \frac{\partial p}{\partial x} = 0. \quad (4.9)$$



Şekil 4.9: Problem 4.2.1 için kullanılan koordinat ve boyutlar

Bu denklemi sayısal olarak çözmeden önce aşağıdaki boyutsuz değişkenleri tanımlayalım:

$$y' = \frac{y}{L_1},$$

$$z' = \frac{z}{L_2}, \quad (4.10)$$

$$u' = \frac{\mu u}{L^2 \left( -\frac{dp}{dx} \right)}.$$

(4.9) denklemini (4.10) boyutsuz değişkenleri cinsinden

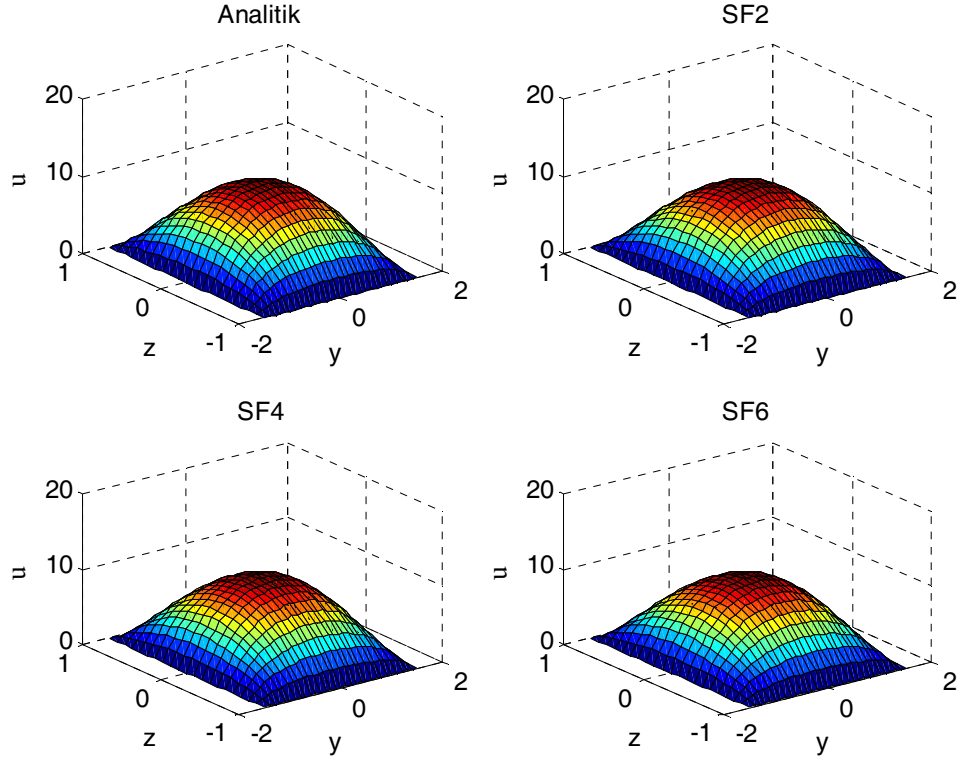
$$\frac{\partial^2 u'}{\partial y'^2} + \frac{\partial^2 u'}{\partial z'^2} + 1 = 0 \quad (4.11)$$

şekline dönüşür. Burada gösterilen “'” işareti, üzerinde bulunduğu değişkenin boyutsuz değişken olduğunu ifade etmektedir. Göz önüne alınan akışkan  $\mu = 0.4 \text{ Newton.s/m}^2$  viskoziteye sahip yağdır. Bu problem  $\frac{dp}{dx} = -10 \text{ Newton/m}^2/\text{m}$  basınç gradyenti için çözülmüştür. Bu problemin analitik çözümü

$$u(y, z) = \frac{16L_1^2}{\mu\pi^3} \left( -\frac{dp}{dx} \right) \sum_{n=1,3,5}^{\infty} (-1)^{(n-1)/2} \left[ 1 - \frac{\cosh(n\pi z/2L_1)}{\cosh(n\pi L_2/2L_1)} \right] \frac{\cos(n\pi y/2L_1)}{n^3} \quad (4.12)$$

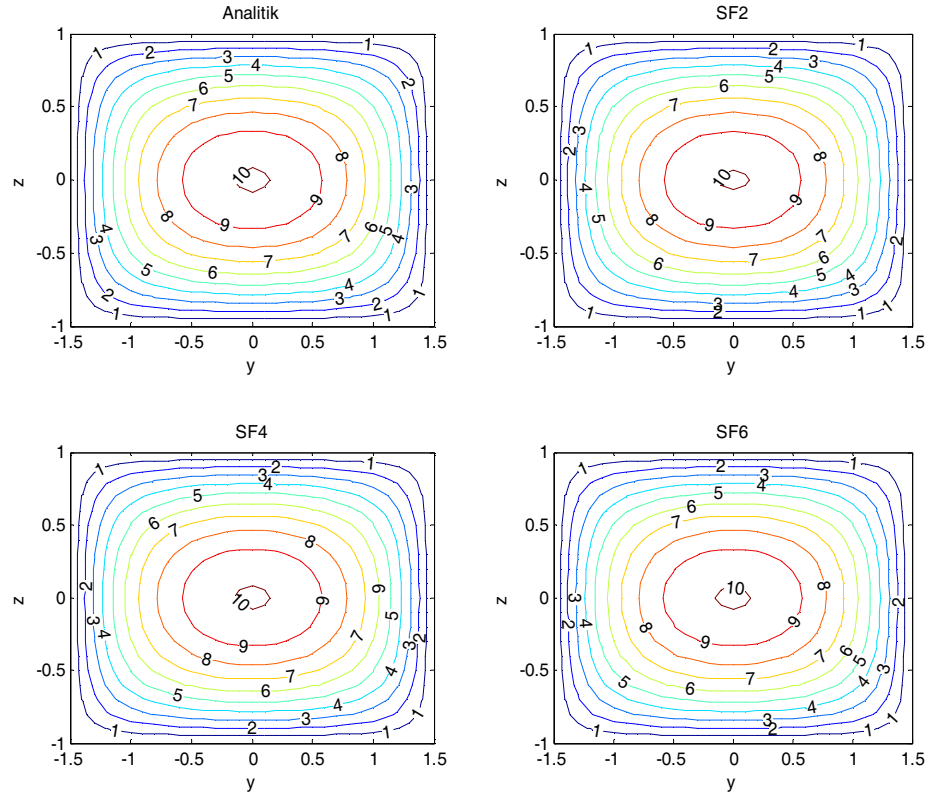
şeklindedir.

(4.11) denkleminin ikinci, dördüncü ve altıncı mertebeden sonlu fark formülasyonu  $g = -1$  olmak üzere, sırasıyla, (3.6), (3.10) ve (3.14) denklemlerinde olduğu gibidir.  $L_1 = 1.5$  ve  $L_2 = 1$  alınarak problem çözülmüştür. (3.6), (3.10) ve (3.14) denklemlerine AAG yönteminin uygulanması sırasında  $1E-6$  yakınsama kriteri altında; gevşeme katsayısı (4.8) bağıntısı ile hesaplanarak;  $h = 0.1$  için,  $y$  yönünde  $N = 31$ ,  $z$  yönünde  $M = 21$ , çözüm uzayında  $N \times M = 31 \times 21$  tane ızgara noktası oluşturularak sonlu fark çözümleri bulunmuştur. Elde edilen çözümlerin davranışları kalitatif olarak Şekil 4.10'da; çözümlerin kontur grafikleri Şekil 4.11 da analitik çözümler ile birlikte verilmiş olup mutlak hataların kontur grafikleri Şekil 4.12'de verilmiştir. Bu problemin SF6 çözümünde Şekil 4.2'de görülen sınır noktalarında SF6 yaklaşımlarının uygulanması sırasında çözüme yakınsamayışı nedeniyle söz konusu sınır noktalarında Laplace denkleminin çözümünde olduğu gibi EK A.1'de verilen SF4 yaklaşımları kullanılmıştır.

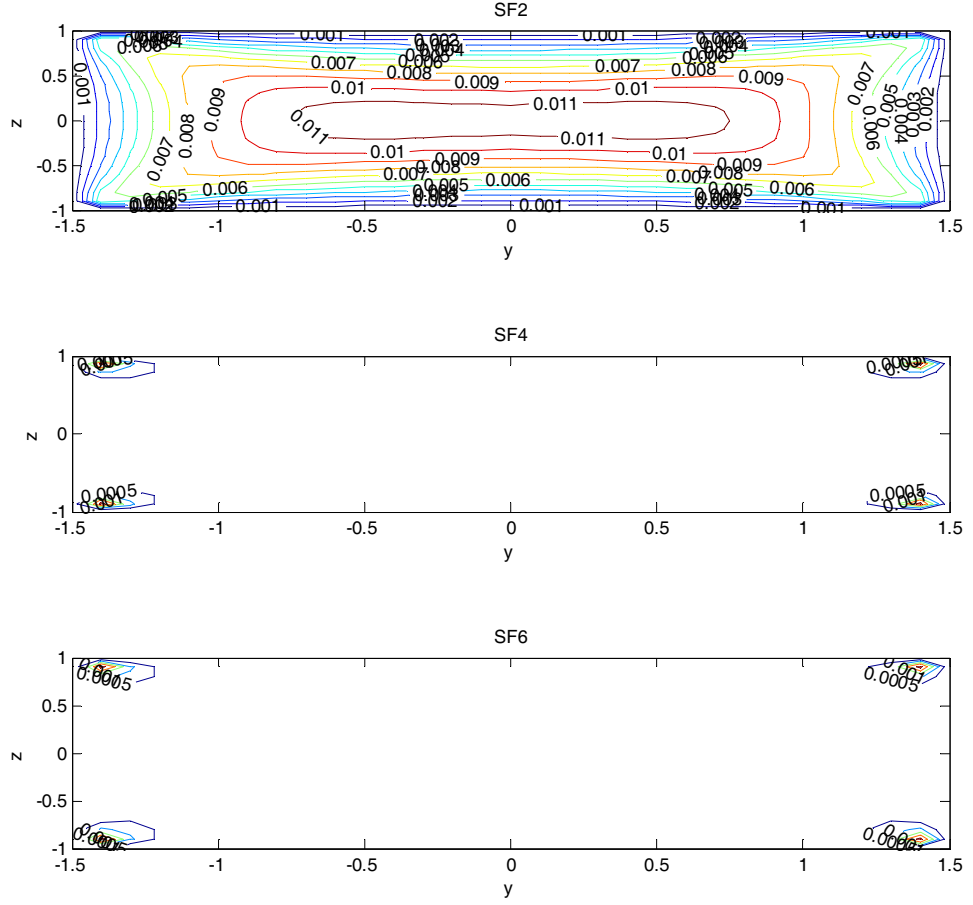


Şekil 4.10: Poisson denkleminin analitik ve sonlu fark çözümleri





Şekil 4.11: Poisson denkleminin analitik ve sonlu fark çözümlerinin kontur grafikleri



Şekil 4.12: Poisson denkleminin sonlu fark çözümlerinde oluşan mutlak hataların kontur grafikleri

### 4.3 Bir Boyutlu Konveksiyon Difüzyon Denklemine Sonlu Fark Çözümleri

**Problem 4.3.1** (Ismail vd, 2004; Salkuyeh, 2006)

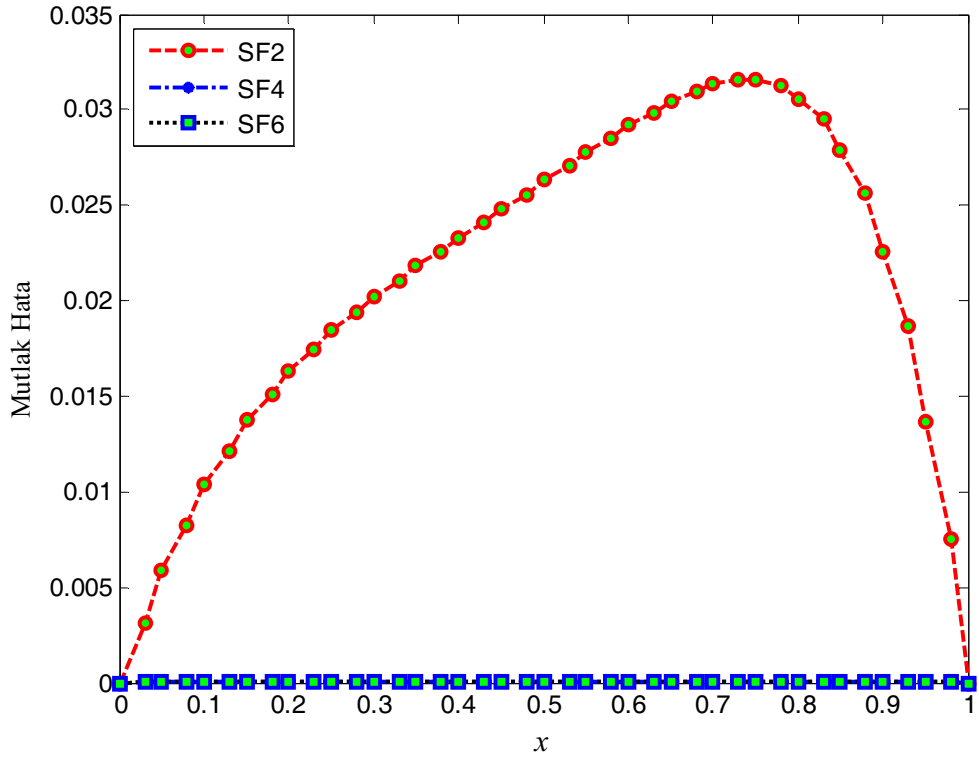
Bu problemde konveksiyon-difüzyon denklemi

$$\frac{\partial u}{\partial t} + 0.1 \frac{\partial u}{\partial x} = 0.02 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad 0 \leq x \leq 1 \quad t \geq 0 \quad (4.13)$$

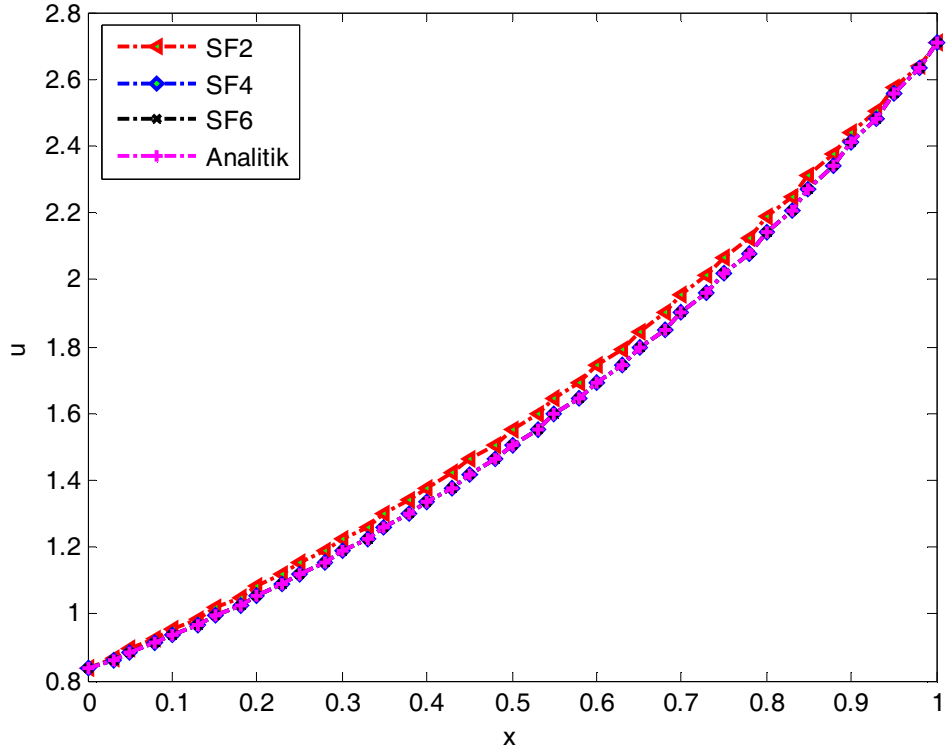
şeklinde alınırsa analitik çözümü

$$u(x, t) = e^{1.1771243446770x - 0.09t} \quad (4.14)$$

şeklinde olur Bu problemde başlangıç ve sınır koşullarını (4.14) gerçek çözümünden alınarak  $\Delta x = 0.025$  ve  $\Delta t = 0.001$  için  $t = 0.1$  anında elde edilen yaklaşık çözümler, analitik çözümler, mutlak hatalar ve bağıl hatalar Tablo 4.2’de verilmiştir. Tablo 4.2’de verilen çözümlerden görüleceği üzere sonlu fark yöntemlerinin bu tip problemleri çözmede oldukça etkili yöntemler oldukları ifade edilebilir. Şekil 4.13’de  $t = 1$  anındaki sonlu fark çözümlerinin mutlak hataları verilmiştir. Şekil 4.14’de  $t = 2$  anındaki (4.13) denkleminin analitik çözümleri ve sonlu fark çözümleri verilmiştir.



Şekil 4.13: Bir boyutlu konveksiyon difüzyon denkleminin  $\Delta t = 0.001$ ,  $\Delta x = 0.025$  için  $t = 1$  anındaki sonlu fark çözümlerinin mutlak hataları



Şekil 4.14: Bir boyutlu konveksiyon difüzyon denkleminin  $\Delta t = 0.001$ ,  $\Delta x = 0.025$  için  $t = 2$  anındaki analitik ve sonlu fark çözümleri

Tablo 4.2: Bir boyutlu lineer konveksiyon difüzyon denkleminin sonlu fark çözümlerinin analitik çözümler ile karşılaştırılması:  $V_x = 0.1$ ,  $D_x = 0.02$ ,  $\Delta t = 0.001$ ,  $\Delta x = 0.025$ ,  $t = 0.1$ .

$x$	SF2		SF4		SF6		SF2		SF4		SF6		
	Analitik Çözüm	Yakalaşık Çözümler	Mutlak Hata	Bağlı Hatalar	SF2	SF4	SF6	SF2	SF4	SF6	SF2	SF4	SF6
0.10	1.114842	1.114842	1.114842	1.114842	1.71E-03	4.66E-11	2.00E-13	1.54E-03	4.18E-11	1.79E-13	1.54E-03	4.18E-11	1.79E-13
0.20	1.254108	1.254108	1.254108	1.254108	2.00E-03	3.33E-10	7.31E-14	1.59E-03	2.66E-10	5.83E-14	1.59E-03	2.66E-10	5.83E-14
0.30	1.410772	1.410772	1.410772	1.410772	2.25E-03	3.83E-10	7.97E-14	1.60E-03	2.71E-10	5.65E-14	1.60E-03	2.71E-10	5.65E-14
0.40	1.587007	1.587007	1.587007	1.587007	2.53E-03	4.30E-10	9.26E-14	1.60E-03	2.71E-10	5.83E-14	1.60E-03	2.71E-10	5.83E-14
0.50	1.785257	1.785257	1.785257	1.785257	2.85E-03	4.84E-10	1.03E-13	1.60E-03	2.71E-10	5.77E-14	1.60E-03	2.71E-10	5.77E-14
0.60	2.008272	2.008272	2.008272	2.008272	3.20E-03	5.45E-10	1.15E-13	1.60E-03	2.71E-10	5.73E-14	1.60E-03	2.71E-10	5.73E-14
0.70	2.259146	2.259146	2.259146	2.259146	3.60E-03	6.13E-10	1.29E-13	1.60E-03	2.71E-10	5.72E-14	1.60E-03	2.71E-10	5.72E-14
0.80	2.541360	2.541360	2.541360	2.541360	4.05E-03	6.96E-10	1.43E-13	1.59E-03	2.74E-10	5.61E-14	1.59E-03	2.74E-10	5.61E-14
0.90	2.858828	2.858828	2.858828	2.858828	4.35E-03	1.25E-09	9.73E-14	1.52E-03	4.38E-10	3.40E-14	1.52E-03	4.38E-10	3.40E-14

#### 4.4 İki Boyutlu Konveksiyon Difüzyon Denkleminin Çözümleri

**Problem 4.4.1** (Dehghan ve Mohebbi, 2008)

$$\frac{\partial u}{\partial t} + V_x \frac{\partial u}{\partial x} + V_y \frac{\partial u}{\partial y} = D_x \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + D_y \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \quad 0 \leq x, y \leq 2 \quad (4.15)$$

iki boyutlu konveksiyon-difüzyon denklemini

$$u(x, y, 0) = \exp \left\{ -\frac{(x-0.5)^2}{D_x} - \frac{(y-0.5)^2}{D_y} \right\} \quad (4.16)$$

başlangıç koşulu altında ele alalım. Bu problemin analitik çözümü

$$u(x, y, t) = \frac{1}{1+4t} \exp \left\{ -\frac{(x-V_x t-0.5)^2}{D_x(1+4t)} - \frac{(y-V_y t-0.5)^2}{D_y(1+4t)} \right\} \quad (4.17)$$

şeklindedir. Bu problem, sirkülasyonlu akışlar için standart bir test problemidir. Rotasyonlu akış içerisindeki bir Gaussian etkinin adveksiyon-difüzyonunu belirtmektedir.

Tablo 4.3: Problem 4.4.1'in sonlu fark çözümlerinde oluşan ortalama kare hatalar ve bulunan Gaussian etkinin pik değeri

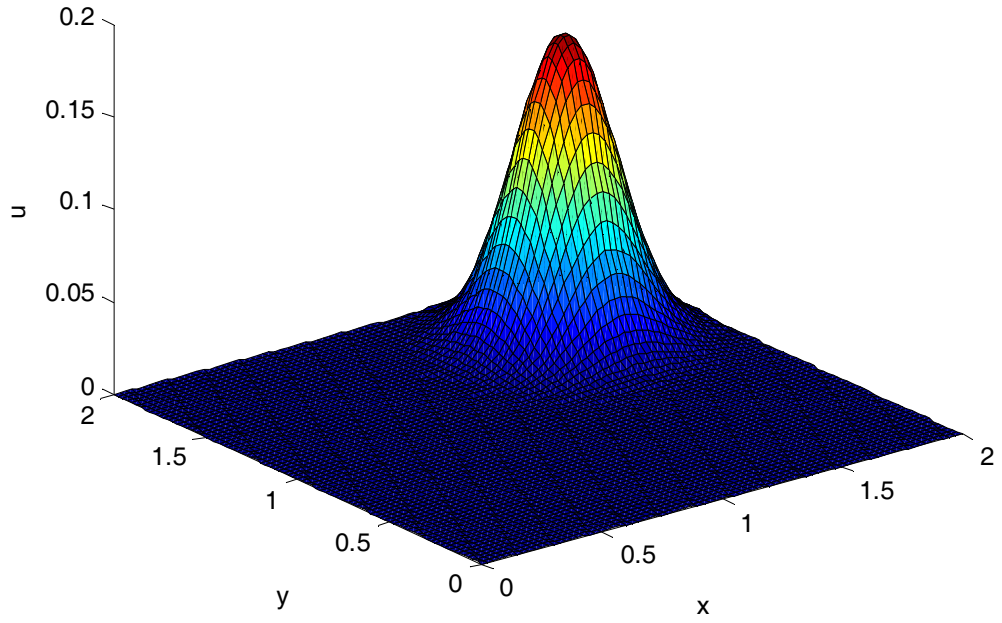
	$D_x = 0.05$			$D_x = 0.005$		
	SF2	SF4	SF6	SF2	SF4	SF6
OKH	8.31E-03	6.27E-07	4.06E-09	1.95E-03	6.32E-05	3.27E-06
Pik değeri	0.166309	0.166667	0.166667	0.164884	0.166674	0.166668

Bu problemde, sınır koşulları (4.17) analitik çözümünden elde edilmiş olup  $V_x = V_y = 0.8$  iken  $D_x = D_y = 0.05$  ve  $D_x = D_y = 0.005$  şeklinde alınarak  $\Delta x = \Delta y = 0.025$ ,  $\Delta t = 0.00125$  için elde edilen çözümlerin ortalama kare hata (OKH) değerleri ve Gaussian etkinin pik noktası değerleri Tablo 4.3'de verilmiştir. Tablo 4.3'te verilen sonuçlar sonlu fark yönteminde kullanılan yaklaşımların iki boyutlu konveksiyon difüzyon denkleminin çözümündeki hassasiyetlerini ortaya koymuştur. Şekil 4.15'de SF2 çözümlerinin ve SF2 çözümünde oluşan mutlak hataların kontur grafikleri verilmiştir. Şekil 4.16'de SF2 çözümlerinin üç boyutlu grafiği verilmiştir. Şekil 4.17'da SF4 çözümlerinin ve SF4 çözümünde oluşan mutlak hataların kontur grafikleri verilmiştir. Şekil 4.18'de SF4 çözümlerinin üç boyutlu

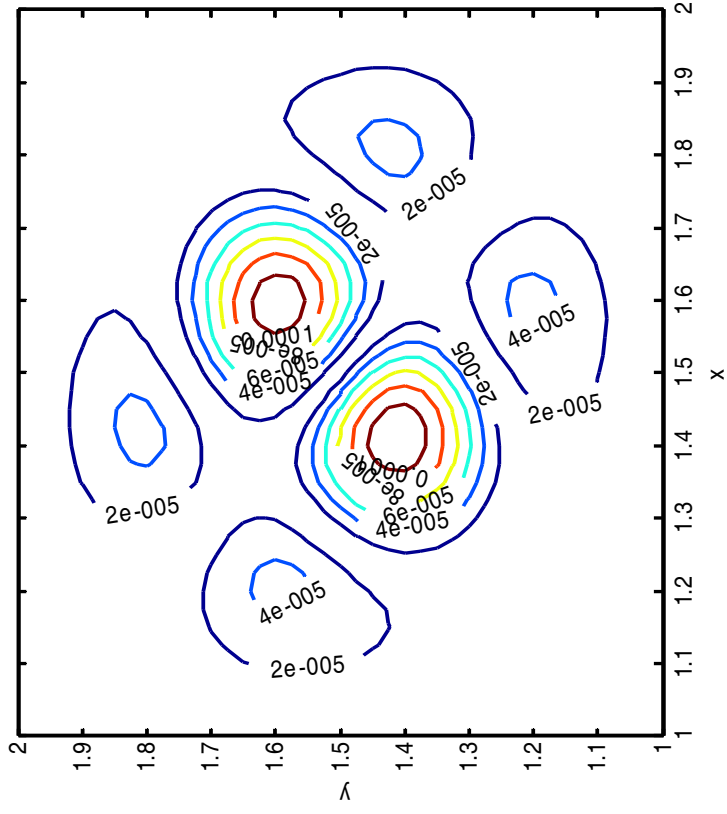
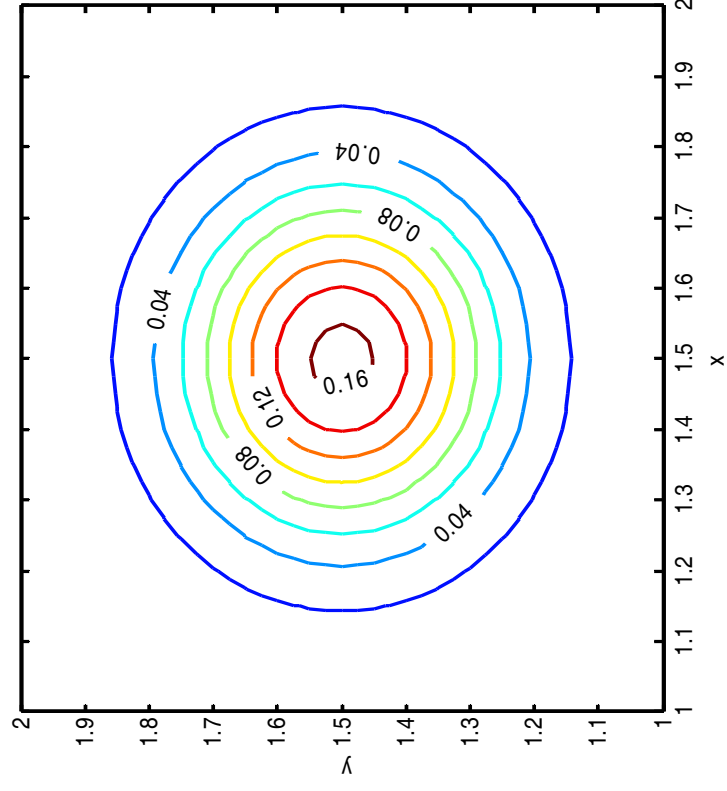
grafđi verilmiştir. Şekil 4.19'de SF6 özömlerinin ve SF6 özöümünde oluşan mutlak hataların kontur grafikleri; Şekil 4.20'de SF6 özömlerinin ü boyutlu grafđi verilmiştir.



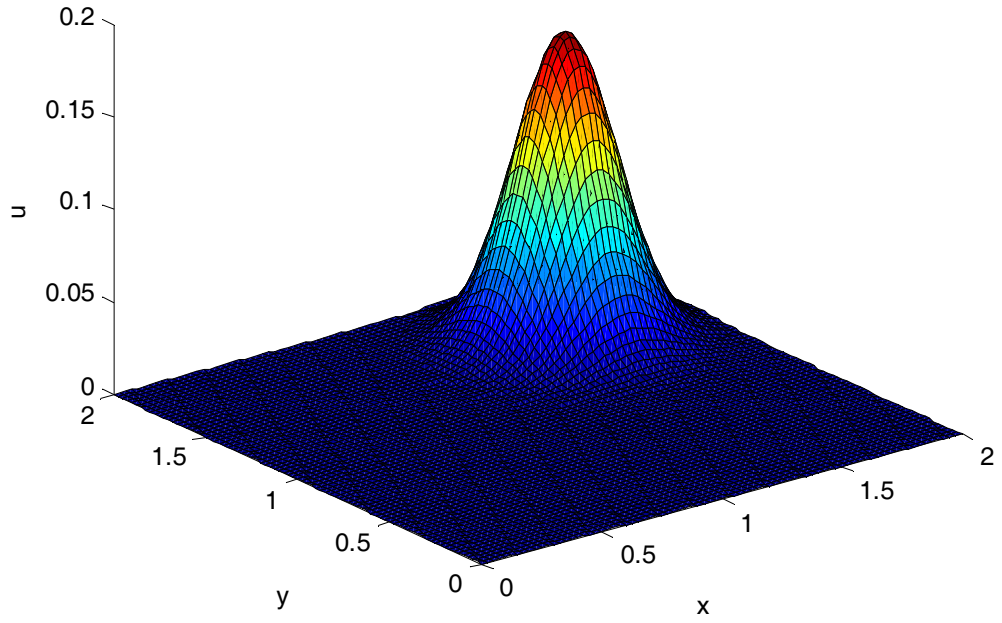




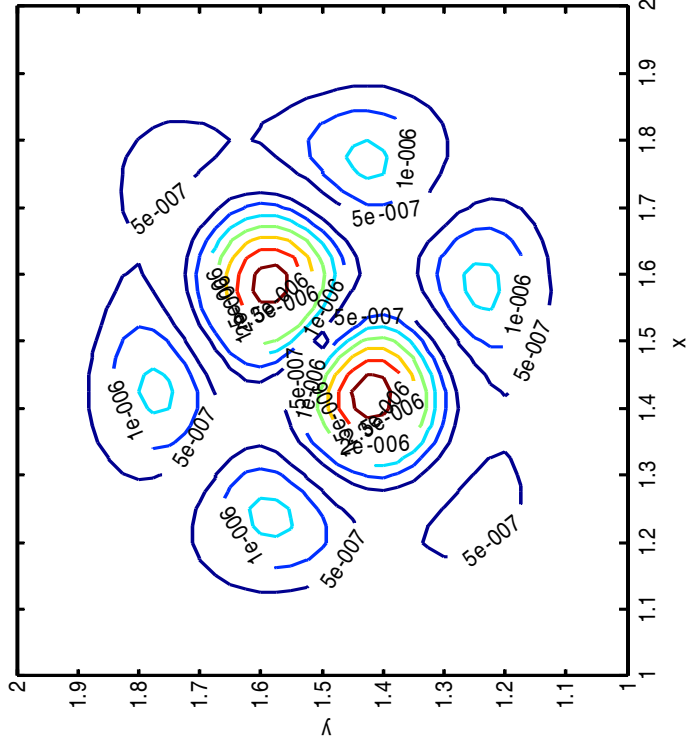
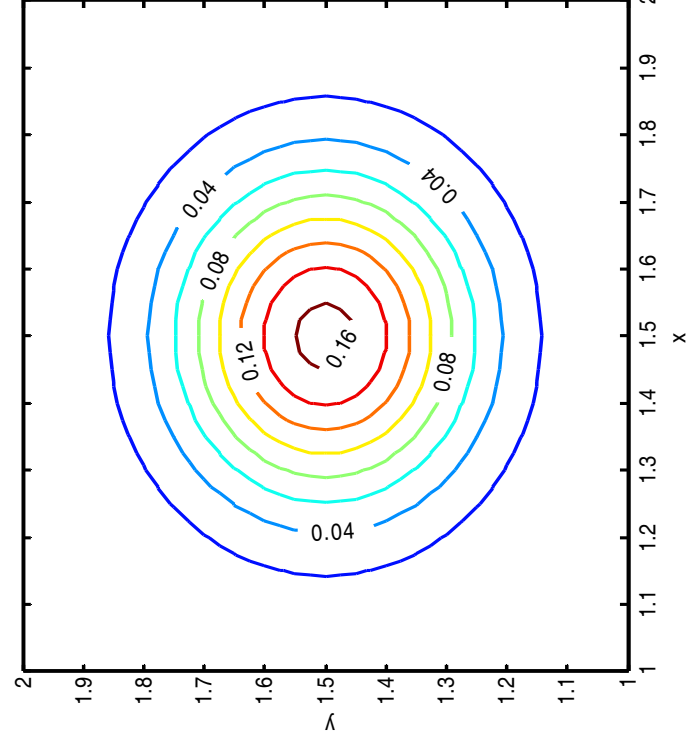
Şekil 4.16:  $\Delta x = \Delta y = 0.025$ ,  $\Delta t = 0.025$ ,  $D_x = 0.01$ ,  $D_y = 0.01$ ,  $V_x = 0.8$ ,  $V_y = 0.8$  için  $t = 1.25$  anındaki  $[0,2] \times [0,2]$  bölgesindeki SF2 yaklaşık çözümünün grafiği



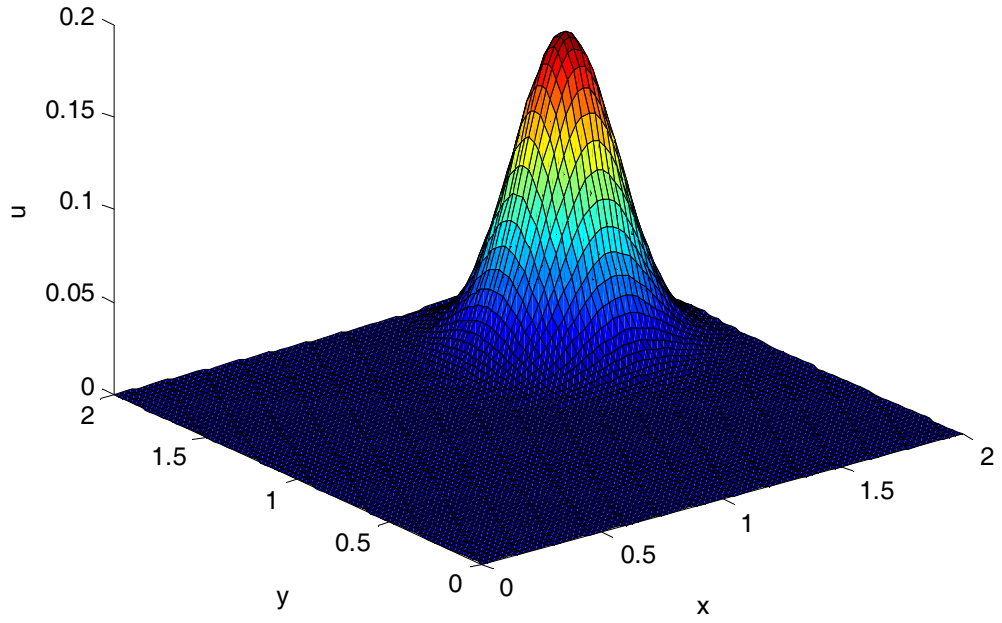
Şekil 4.17:  $\Delta x = \Delta y = 0.025$ ,  $\Delta t = 0.00125$ ,  $D_x = 0.01$ ,  $D_y = 0.01$ ,  $V_x = 0.8$ ,  $V_y = 0.8$  için  $t = 1.25$  anındaki  $[1, 2] \times [1, 2]$  bölgesindeki SF4 yaklaşık çözümlerinin (sağdaki) ve mutlak hataların (soldaki) kontur grafikleri



Şekil 4.18:  $\Delta x = \Delta y = 0.025$ ,  $\Delta t = 0.00125$ ,  $D_x = 0.01$ ,  $D_y = 0.01$ ,  $V_x = 0.8$ ,  $V_y = 0.8$  için  $t = 1.25$  anındaki  $[0,2] \times [0,2]$  bölgesindeki SF4 yaklaşık çözümlerinin grafikleri



Şekil 4.19:  $\Delta x = \Delta y = 0.025$ ,  $\Delta t = 0.00125$ ,  $D_x = 0.01$ ,  $D_y = 0.01$ ,  $V_x = 0.8$ ,  $V_y = 0.8$  için  $t = 1.25$  anındaki  $[1,2] \times [1,2]$  bölgesindeki SF6 yaklaşık çözümlerinin (sağdaki) ve mutlak hataların (soldaki) kontur grafikleri



Şekil 4.20:  $\Delta x = \Delta y = 0.025, \Delta t = 0.00125, D_x = 0.01, D_y = 0.01, V_x = 0.8, V_y = 0.8$  için  $t = 1.25$  anındaki  $[0, 2] \times [0, 2]$  bölgesindeki SF6 yaklaşık çözümlerinin grafikleri

#### 4.5 Burgers Denkleminin Sonlu Fark Çözümleri

**Problemi 4.5.1:** (Gülsu ve Öziş, 2005; Sari ve Gürarlan, 2009)

Bir boyutlu Burgers denklemi

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} - \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, 0 < x < 1, 0 \leq t \leq T \quad (4.18)$$

başlangıç koşulu

$$u(x, 0) = \sin(\pi x) \quad 0 < x < 1 \quad (4.19)$$

ve sınır koşulları

$$u(0, t) = u(1, t) = 0 \quad 0 \leq t \leq T \quad (4.20)$$

olan problemin analitik çözümü;

$$u(x, t) = 2\pi\nu \frac{\sum_{n=1}^{\infty} a_n \exp(-n^2 \pi^2 \nu t) n \sin(n\pi x)}{a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \exp(-n^2 \pi^2 \nu t) \cos(n\pi x)} \quad (4.21)$$

şeklindedir. Burada

$$a_0 = \int_0^1 \exp\left(- (2\pi\nu)^{-1} (1 - \cos(\pi x))\right) dx$$

$$a_n = 2 \int_0^1 \exp\left(- (2\pi\nu)^{-1} (1 - \cos(\pi x))\right) \cos(n\pi x) dx.$$

Bu problem  $\nu$  kinematik viskozite katsayısının  $\nu = 1$ ,  $\nu = 0.1$  değerleri için çözümü elde edilmiş ve elde edilen değerler analitik ve literatürde bulunan diğer nümerik sonuçlarla karşılaştırılarak Tablo 4.4-4.6'da verilmiştir. Çözüm elde edilirken TDA-RK3 yönteminde kullanılan zaman adımı stabilite koşulunu sağlayacak şekilde seçilmiştir. Tablo 4.4-4.6'dan görüleceği gibi SF6, SF2 ve SF4 sonuçlarına göre; SF4, SF2'ye göre daha hassas neticeler vermiştir. Sonlu fark yönteminde kullanılan nokta sayısının artırılması durumunda daha hassas neticeler elde edilmiştir.

Tablo 4.4: Bir boyutlu viskoz Burgers denkleminin sonlu fark çözümlerinin analitik çözümler ve literatürde bulunan diğer bazı sonuçlarla karşılaştırılması,  $\nu = 1$ ,  $\Delta t = 0.0001$ ,  $\Delta x = 0.0125$ .

$x$	$t$	HC (Gülsu ve Öziş, 2005)	KHC(Gülsu ve Öziş, 2005)	KPY(Gülsu, 2006)	KSF6 (Sarı ve Gürarslan, 2009)	SF2-TDA-RK3	SF4-TDA-RK3	SF6-TDA-RK3	Analitik Çözüm
0.25	0.10	0.252942	0.264126	0.252875	0.253638	0.250278	0.253638	0.253638	0.253637
	0.15	0.156059	0.165683	0.155447	0.156601	0.151015	0.156616	0.156616	0.156601
	0.20	0.095889	0.101617	0.094289	0.096442	0.091532	0.096442	0.096442	0.09644
	0.25	0.056174	0.059113	0.055674	0.059218	0.055647	0.059224	0.059224	0.059217
0.50	0.10	0.376474	0.393354	0.373085	0.371577	0.353514	0.371577	0.371577	0.371579
	0.15	0.235875	0.251788	0.22894	0.226824	0.213415	0.226846	0.226846	0.226825
	0.20	0.153645	0.163931	0.142127	0.138473	0.129391	0.138473	0.138473	0.138473
	0.25	0.11281	0.120967	0.091944	0.084538	0.078677	0.084546	0.084546	0.084537
0.75	0.10	0.271517	0.285579	0.272368	0.272582	0.250494	0.272582	0.272582	0.27258
	0.15	0.162739	0.176957	0.163628	0.164369	0.151101	0.164386	0.164386	0.164369
	0.20	0.098431	0.111102	0.098656	0.099435	0.091565	0.099435	0.099435	0.099434
	0.25	0.057394	0.068569	0.059343	0.060347	0.055659	0.060353	0.060353	0.060346



Tablo 4.5: Bir boyutlu viskoz Burgers denkleminin sonlu fark çözümlerinin analitik çözüm ve literatürde bulunan diğer sonuçlarla karşılaştırılması;  $\nu = 0.1$ ,  $\Delta t = 0.0001$ ,  $\Delta x = 0.0125$

$x$	$t$	HC (Gülsu ve Öziş, 2005)	KHC ((Gülsu ve Öziş, 2005))	KPY (Gülsu, 2006)	KSF6 (Sarı ve Gürarslan, 2009)	SF2-TDA-RK3	SF4-TDA-RK3	SF6-TDA-RK3	Analitik Çözüm
0.25	0.4	0.308860	0.317062	0.308776	0.308894	0.375842	0.308894	0.308894	0.308893
	0.6	0.240703	0.248472	0.240654	0.240739	0.284985	0.240766	0.240766	0.240739
	0.8	0.195693	0.202953	0.195579	0.195676	0.220089	0.195676	0.195676	0.195676
	1.0	0.162561	0.169527	0.162513	0.162565	0.172326	0.162565	0.162565	0.162564
0.50	0.4	0.569602	0.583408	0.569527	0.569632	0.521285	0.569632	0.569632	0.569632
	0.6	0.447123	0.461714	0.447117	0.447206	0.397096	0.447257	0.447257	0.447205
	0.8	0.359152	0.373800	0.359161	0.359236	0.307802	0.359236	0.359236	0.359236
	1.0	0.291961	0.306184	0.292843	0.291916	0.241646	0.291916	0.291916	0.291916
0.75	0.4	0.625460	0.638847	0.625341	0.625438	0.378920	0.625438	0.625438	0.625437
	0.6	0.487337	0.506429	0.487089	0.487215	0.287260	0.487279	0.487279	0.487211
	0.8	0.374067	0.393565	0.373827	0.373922	0.221651	0.373922	0.373922	0.373923
	1.0	0.287525	0.305862	0.287396	0.287474	0.173369	0.287475	0.287474	0.287473
	3.0	0.029532	0.034484	0.029726	0.029772	0.020284	0.029772	0.029772	0.029771

Tablo 4.6: Bir boyutlu viskoz Burgers denkleminin sonlu fark çözümlerinin analitik çözüm ve literatürde bulunan diğer sonuçlarla karşılaştırılması:  $\nu = 1, t = 0.1$

$x$	Kutluay vd. (1999)		Aksan ve Özdeş (2004)		Hassanien vd. (2005)		Sarı ve Gümranslan (2009)		Bu çalışma			Bu çalışma				
	Açık		Tam açık		Galerkin SEM		SF4		KSF6		SF4-TDA-RK3			SF4-TDA-RK3		
	$\Delta t = 0.00001$	$\Delta x = 0.1$	$\Delta t = 0.0001$	$\Delta x = 0.1$	$\Delta t = 0.0001$	$\Delta x = 0.1$	$\Delta t = 0.0001$	$\Delta x = 0.1$	$\Delta t = 0.0001$	$\Delta x = 0.1$	$\Delta t = 0.0001$	$\Delta x = 0.0001$	$\Delta t = 0.0001$	$\Delta x = 0.0001$	$\Delta t = 0.0001$	$\Delta x = 0.0001$
0.10	0.10954	0.10952	0.11048	0.10955	0.10958	0.10954	0.10954	0.10954	0.10954	0.110351	0.109490	0.109538	0.109532	0.109538	0.109538	0.109538
0.20	0.20979	0.20975	0.21159	0.20981	0.20989	0.20980	0.20979	0.20979	0.20979	0.209890	0.209741	0.209792	0.208149	0.209792	0.209792	0.209792
0.30	0.29190	0.29184	0.29435	0.29192	0.29199	0.29190	0.29190	0.29190	0.29190	0.288928	0.291847	0.291895	0.286216	0.291895	0.291896	0.291896
0.40	0.34792	0.34786	0.35080	0.34795	0.34709	0.34794	0.34792	0.34792	0.34792	0.339888	0.347877	0.347922	0.336249	0.347922	0.347924	0.347924
0.50	0.37158	0.37151	0.37458	0.37161	0.37173	0.37159	0.37158	0.37158	0.37158	0.357859	0.371531	0.371575	0.353514	0.371575	0.371577	0.371577
0.60	0.35905	0.35898	0.36189	0.35907	0.35920	0.35906	0.35905	0.35905	0.35905	0.341000	0.358992	0.359042	0.336376	0.359042	0.359046	0.359046
0.70	0.30991	0.30985	0.31231	0.30993	0.31003	0.30992	0.30991	0.30991	0.30991	0.290730	0.309836	0.309900	0.286422	0.309900	0.309905	0.309905
0.80	0.22782	0.22778	0.22955	0.22783	0.22792	0.22783	0.22782	0.22782	0.22782	0.211695	0.227724	0.227811	0.208355	0.227811	0.227817	0.227817
0.90	0.12069	0.12067	0.12160	0.12070	0.12071	0.12069	0.12069	0.12069	0.12069	0.111467	0.120574	0.120679	0.109659	0.120679	0.120687	0.120687

**Problemi 4.5.2:** (Christie vd., 1981; Hassanien vd., 2005)

Bu problemde Burgers denklemi  $[a, b]$  tanım aralığında  $\eta = \frac{\alpha(x - \mu t - \gamma)}{\nu}$  olmak üzere

$$u(x, t) = \frac{[\alpha + \mu + (\alpha - \mu)\exp(\eta)]}{1 + \exp(\eta)}, \quad a \leq x \leq b, t \geq 0 \quad (4.22)$$

analitik çözümü ve başlangıç koşulu (4.22) denkleminde  $t = 0$  alarak  $\eta = \frac{\alpha(x - \gamma)}{\nu}$  iken

$$u(x, 0) = \frac{[\alpha + \mu + (\alpha - \mu)\exp(\eta)]}{1 + \exp(\eta)} \quad (4.23)$$

başlangıç şartıyla birlikte  $\alpha = 0.4$   $\mu = 0.6$  ve  $\gamma = 0.125$  alınarak

$$u(a, t) = 1, \quad u(b, t) = 0.2, \quad t \geq 0 \quad (4.24)$$

sınır koşulları altında  $a = 0$ ,  $b = 1$  için incelenecektir.

Bu problem, bir önceki probleme benzer bir örnektir. Sınır koşulları Dirichlet sınır koşullarıdır ve tanım bölgesi  $0 \leq x \leq 1$  şeklinde göz önüne alınarak çözümler üretilmiştir. Elde edilen sonuçlar, analitik çözümlerle birlikte literatürdeki kimi çalışmaların sonuçlarıyla karşılaştırmak amacıyla Tablo 4.7’de verilmiştir.

Tablo 4.7: Bir boyutlu viskoz Burgers denkleminin sonlu fark çözümlerinin analitik çözüm ve literatürde bulunan diğer sonuçlarla karşılaştırılması:  $\nu = 0.01$ ,  $t = 0.5$ ,  $\Delta x = 1/36$

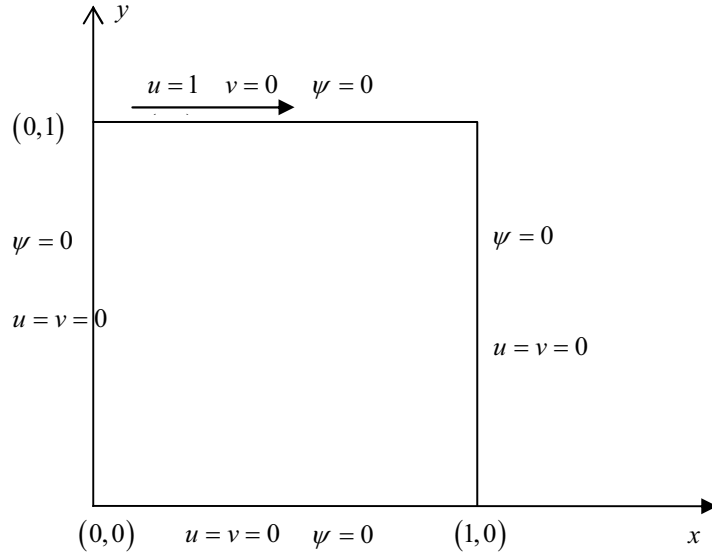
$x$	Ali vd. (1992)	Dogan (2004)	Dağ vd. (2005)	Hassanien vd. (2005)	SF2- TDA-RK3	SF4- TDA-RK3	SF6- TDA-RK3	Analitik
	$\Delta t = 0.025$	$\Delta t = 0.05$	$\Delta t = 0.025$	$\Delta t = 0.01$	$\Delta t = 0.01$			
0.000	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0
0.056	1.0	1.0	1.0	1.0	0.726	1.000	1.0	1.0
0.111	1.0	1.0	1.0	1.0	0.539	1.000	1.0	1.0
0.167	1.0	1.0	1.0	1.0	0.402	1.000	1.0	1.0
0.222	1.0	1.0	1.0	1.0	0.300	1.000	1.0	1.0
0.278	0.999	0.999	0.999	0.998	0.235	0.998	0.998	0.998
0.333	0.985	0.994	0.986	0.982	0.201	0.981	0.980	0.980
0.389	0.847	0.848	0.850	0.849	0.188	0.855	0.851	0.847
0.444	0.452	0.407	0.448	0.455	0.184	0.450	0.453	0.452
0.500	0.238	0.232	0.236	0.239	0.182	0.239	0.238	0.238
0.556	0.204	0.204	0.204	0.204	0.182	0.204	0.204	0.204
0.611	0.2	0.2	0.2	0.2	0.182	0.200	0.2	0.2
0.667	0.2	0.2	0.2	0.2	0.182	0.200	0.2	0.2
0.722	0.2	0.2	0.2	0.2	0.182	0.200	0.2	0.2
0.778	0.2	0.2	0.2	0.2	0.182	0.200	0.2	0.2
0.833	0.2	0.2	0.2	0.2	0.183	0.200	0.2	0.2
0.889	0.2	0.2	0.2	0.2	0.184	0.200	0.2	0.2
0.944	0.2	0.2	0.2	0.2	0.189	0.200	0.2	0.2
1.000	0.2	0.2	0.2	0.2	0.2	0.2	0.2	0.2

#### 4.6 Navier-Stokes Denklemlerinin Sonlu Fark Çözümleri

Burada, Şekil 4.20’de tanımlanan üst sınırı hareketli olan bir kare oyukta sıkıştırılamaz çalkantısız viskoz bir sıvı akımının sonlu fark çözümü ortaya konulmaktadır. Problem zamandan bağımsız Navier-Stokes denklemlerinin akım fonksiyonu ve burgaç(girdap) formülasyonu göz önünde bulundurularak tanımlanmıştır.

Bir kare oyuktaki akış problemi, hesaplamalı akışkanlar mekaniğinde üzerinde en çok çalışılan problemlerden biridir. Problemin, basit bir geometriye sahip olması problemi kodlamayı ve sınır koşullarının uygulanmasını kolay kılar (Ertürk, 2009).

Üst sınırı hareketli kare oyuktaki akış problemi, bir test problemi olarak sayısal metotların etkinliğini ve hassasiyetlerini belirlemek için kullanılır. Literatürde bu problem üzerinde yapılan birçok çalışma bulmak mümkündür.



Şekil 4.21: Üst sınırı hareketli kare oyukun şeması ve kaygan olmayan sınır koşulları  
İki boyutlu, kararlı sıkıştırılamayan bir akışkanın kare oyuktaki hareketi Navier-Stokes denklemlerinin akım fonksiyonu ve burgaç(girdap) (stream-vorticity) ile ifadesi

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = -\omega, \quad (4.25)$$

$$\frac{1}{Re} \left( \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} \right) = \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial \omega}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \omega}{\partial y} \quad (4.26)$$

şeklindedir. Burada  $Re$ ,  $\psi$ ,  $\omega$ , sırasıyla, Reynolds sayısını, akım fonksiyonunu ve burgacı göstermektedir.

Kaygan olmayan sınır koşullu, hızların teğetsel bileşenlerinin kare oyuğun; alt, sağ ve sol sınırlarında sıfır; üst sınırında ise üst sınırın hız değerine eşit olmasını gerektirir. Bu, akım fonksiyonu ile

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi}{\partial y} = 0 \text{ alt sınırda,} \quad \frac{\partial \psi}{\partial x} = 0 \text{ yan sınırlarda,} \\ \frac{\partial \psi}{\partial y} = 1 \text{ üst sınırda} \end{aligned} \quad (4.27)$$

şeklinde ifade edilir.

Burgaç için sınır koşulları  $\omega = -\partial u / \partial y + \partial v / \partial x$  eşitliği göz önünde bulundurularak akım fonksiyonu ile ortaya konulabilir. Kare oyuğun alt sınırında  $v = 0$  olduğundan  $\partial v / \partial x = 0$  olur. Buradan burgaç için alt sınır koşulu  $\omega = -\partial u / \partial y = -\partial^2 \psi / \partial y^2$  şeklinde bulunur. Benzer şekilde diğer sınır koşulları elde edilir ve burgaç için sınır koşulları

$$\begin{aligned} \omega = -\frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \quad \text{alt ve üst sınırda,} \\ \omega = -\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \quad \text{yan sınırlarda,} \end{aligned} \quad (4.28)$$

şeklinde bulunur.

(4.25) denklemi bir Poisson denklemidir. Bu nedenle bu denklemin çözümünde bölüm 4.2'de Poisson denklemi için ifade edilen çözüm prosedürü göz önüne alınarak akım fonksiyonu için çözüm bulunur. Burgacın çözümünü elde etmek için (4.26) denklemi de Poisson denklemi olarak ele alınır ve yukarıda ifade edilen sınır koşulları altında sonlu fark çözümü bulunur. (4.25) denkleminin SF2, SF4 ve SF6 ile formülasyonu, sırasıyla, (3.36), (3.40), (3.44) denklemlerinde olduğu gibidir. (4.26) denkleminin de SF2, SF4 ve SF6 ile formülasyonu, sırasıyla, (3.37), (3.41), (3.45) denklemlerinde ifade edildiği gibidir.

Üst kenarı hareketli kare oyuğun sonlu fark çözümünü elde etmek için aşağıdaki adımlar sırasıyla uygulanır;

- ilk olarak, akım fonksiyonu ve burgaç için iç ve sınır noktalarında tahmini bir değer atanır. Bu değer genellikle sıfır olarak seçilir.
- İkinci adımda, akım fonksiyonu için (4.25) denkleminin (3.36), (3.40) ve (3.44) denklemlerinde verilen SF2, SF4, SF6 denklemleri bir iteratif yöntemle  $\psi = 0$  sınır koşulu altında çözülür. Yöntem, (4.25) denkleminin SF2 ifadesi olan (3.36) denklemi göz önünde bulundurularak

$$Kal = (\psi_{i+1,j} + \psi_{i-1,j} + \psi_{i,j+1} + \psi_{i,j-1} - 4\psi_{i,j} + h^2\omega_{i,j})/4 \quad (4.29)$$

ifadesi hesaplanır.  $Kal$ , kalan olarak tanımlanır. İteratif yöntemler adım adım ilerlerler. Her bir adımda önceki değer kullanılarak yakınsama gerçekleşene kadar devam eder. Bu çalışmada AAG yöntemi kullanılmıştır. AAG yönteminin (3.36) denkleminde uygulanması;  $n$  bulunan adım olmak üzere, bir sonraki adım ( $n+1$ ), aşağıdaki gibi hesaplanır:

$$\psi_{i,j}^{n+1} = \psi_{i,j}^n + \alpha Kal., \quad n = 1, 2, \dots, \quad (4.30)$$

Burada  $\alpha$ , AAG yönteminde kullanılan gevşeme katsayısını belirtmektedir ve burada  $\alpha = 0.6$  olarak alınmıştır.

- Bu adımda, sınırlardaki ızgara noktalarında, sınırlardaki hız değerleri göz önünde bulundurularak burgaç değerleri hesaplanır. Hareketli olan üst kenardaki ızgara noktaları göz önüne alınarak akım fonksiyonunu  $y$  değişkenine göre Taylor seri açılımı

$$\psi_{i,M} \approx \psi_{i,M+1} - \Delta y \left( \frac{\partial \psi}{\partial y} \right)_{i,M+1} + \frac{\Delta y^2}{2} \left( \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \right)_{i,M+1} \quad (4.31)$$

şeklinde olur.  $(\partial \psi / \partial y)_{i,M+1} = 1$  ve  $\omega_{i,M+1} = -(\partial^2 \psi / \partial^2 y)_{i,M+1}$  olduğu dikkate alınıp (4.31) denklemi  $\omega_{i,M+1}$  için çözülürse

$$\omega_{i,M+1} = 2 \frac{\psi_{i,M+1} - \psi_{i,M}}{(\Delta y)^2} - 2 \frac{1}{\Delta y}$$

olarak bulunur. Benzer şekilde işlemler yapılarak, burgaç için diğer sınırlardaki değerler

$$\omega_{i,1} = 2 \frac{\psi_{i,1} - \psi_{i,2}}{(\Delta y)^2} \quad \omega_{1,j} = 2 \frac{\psi_{1,j} - \psi_{2,j}}{(\Delta y)^2}, \quad (4.32)$$

$$\omega_{N+1,j} = 2 \frac{\psi_{N+1,j} - \psi_{N,j}}{(\Delta y)^2}$$

şeklinde bulunur. Benzer işlemler yapılarak daha fazla sayıda terimin kullanılmasıyla yüksek mertebeden hassasiyete sahip ifadeler bulunabilir.

- Bu adımda, (4.26) denkleminin sağ tarafındaki türevlerin sonlu fark değerleri hesaplanır.
- Bu adımda, (4.26) denklemi burgaç için iteratif olarak çözülür (Bu çalışmada AAG yöntemi kullanılmıştır). AAG iteratif yönteminde SF2 için aşağıdaki formül kullanılır;

$$Kal = \left( \omega_{i+1,j} + \omega_{i-1,j} + \omega_{i,j+1} + \omega_{i,j-1} - 4\omega_{i,j} + h^2 g_{i,j} \right) / 4, \quad (4.33)$$

$$\omega_{i,j}^{n+1} = \omega_{i,j}^n + \alpha Kal., \quad n = 1, 2, \dots \quad (4.34)$$

(4.33) denkleminde bulunan  $g_{i,j}$  terimi (4.26) denkleminin sağ tarafını ve bir önceki adımda hesaplanan terimdir.  $\alpha$ , AAG yönteminde kullanılan gevşeme katsayısını;  $Kal$ , (4.26) denklemi için kalanı belirtmektedir.

- Son olarak akım ve burgaç fonksiyonu için yakınsama kriteri kontrol edilir. Yakınsama kriterinin sağlanması durumunda işlem sonlandırılır. Yakınsama koşulu sağlanmıyorsa ikinci adımdan itibaren işlemler tekrarlanır. Bu çalışmada çözümün yakınsama ölçütü olarak  $\max \left( \left| \omega_{i,j}^{n+1} - \omega_{i,j}^n \right| \right) \leq 1E-6$  ve  $\max \left( \left| \psi_{i,j}^{n+1} - \psi_{i,j}^n \right| \right) \leq 1E-6$  koşulları kullanılmıştır.

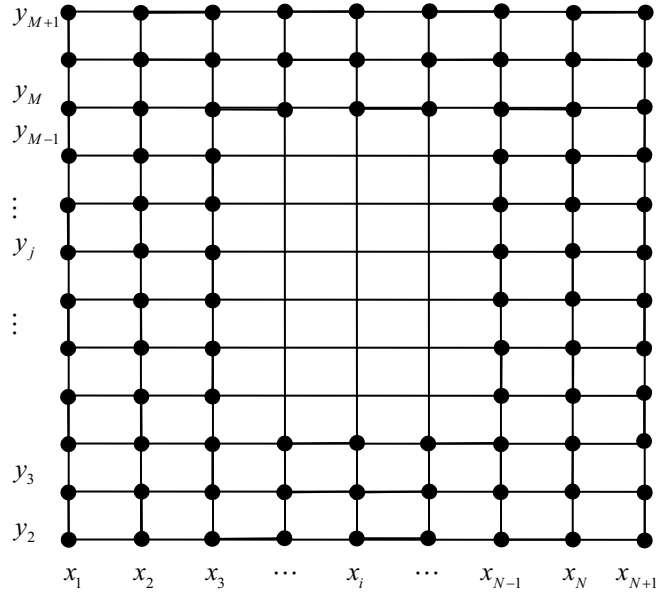
Yukarıda ifade edilen algoritma ile MATLAB ortamında SF2, SF4 ve SF6 için ayrı ayrı programlar yazılarak üst sınırı hareketli olan bir kare oyukta sıkıştırılamaz çalkantısız viskoz bir sıvı akımın sonlu fark çözümleri bulunmuştur. Reynolds sayısının 100, 400, 500 ve 1000 değerleri için çözümler bulunmuş olup bulunan sonuçlardan birincil vorteksteki minimum akım fonksiyonu değerleri Tablo 4.8’de ve bu minimum akım fonksiyonu değerlerinin koordinatları Tablo 4.9’da verilmiştir.



Tablo.4.8: Birincil vorteksteki akım fonksiyonu değerlerinin karşılaştırılması

Re	Barragy ve Carey (1997)	Ghia vd. (1982)	Schreiber ve Keller (1983)	SF2	SF4	SF6
100	0.10330	-0.103423	-0.10330	-0.102821	-0.103506	-0.103513
400	-0.11389	-0.113909	-0.11297	-0.112140	-0.113934	-0.113987
500	-	-	-	-0.113035	-0.115303	-0.115386
1000	-0.11861	-0.117929	-0.11603	-0.118171	-0.118927	-0.118939

Re = 1000 değeri için elde edilen birincil vorteksin özellikleri; akım fonksiyonun maksimum değeri, burgaç değeri ve merkez noktanın koordinatları Tablo 4.10'da verilmiştir. Tablo 4.8-4.10'dan görüleceği üzere elde edilen sonlu fark çözümleri literatürde var olan çalışmaların sonuçlarıyla uyumludur. (4.25), (4.26) denklemlerinin 100, 400, 500 ve 1000 Reynolds sayı değerleri için akım fonksiyonunun; Şekil 4.23'de SF2 ile çözümlerinin; Şekil 4.24'de SF4 ile çözümlerinin ve Şekil 4.25'de SF6 ile çözümlerinin kontur grafikleri verilmiştir. (4.25), (4.26) denklemlerinin 100, 400, 500 ve 1000 Reynolds sayıları için SF6 çözümünden elde edilen burgaçın kontur grafikleri Şekil 4.26'de verilmiştir.



Şekil 4.22: Üst sınırı hareketli kare oyuğun SF6 ile çözümünde kullanılan sınır noktaları şeması

Yukarıda ifade edilen algoritmanın SF6 için uygulanması sırasında; Şekil 4.22'de verilen  $i=1, N+1$  veya  $j=1, M+1$  sınır noktalarında (4.32) yaklaşımları,  $i=2, 3, N-1, N$  veya  $j=2, 3, M-1, M$  sınır noktalarında ise EK A.1'de verilen SF4

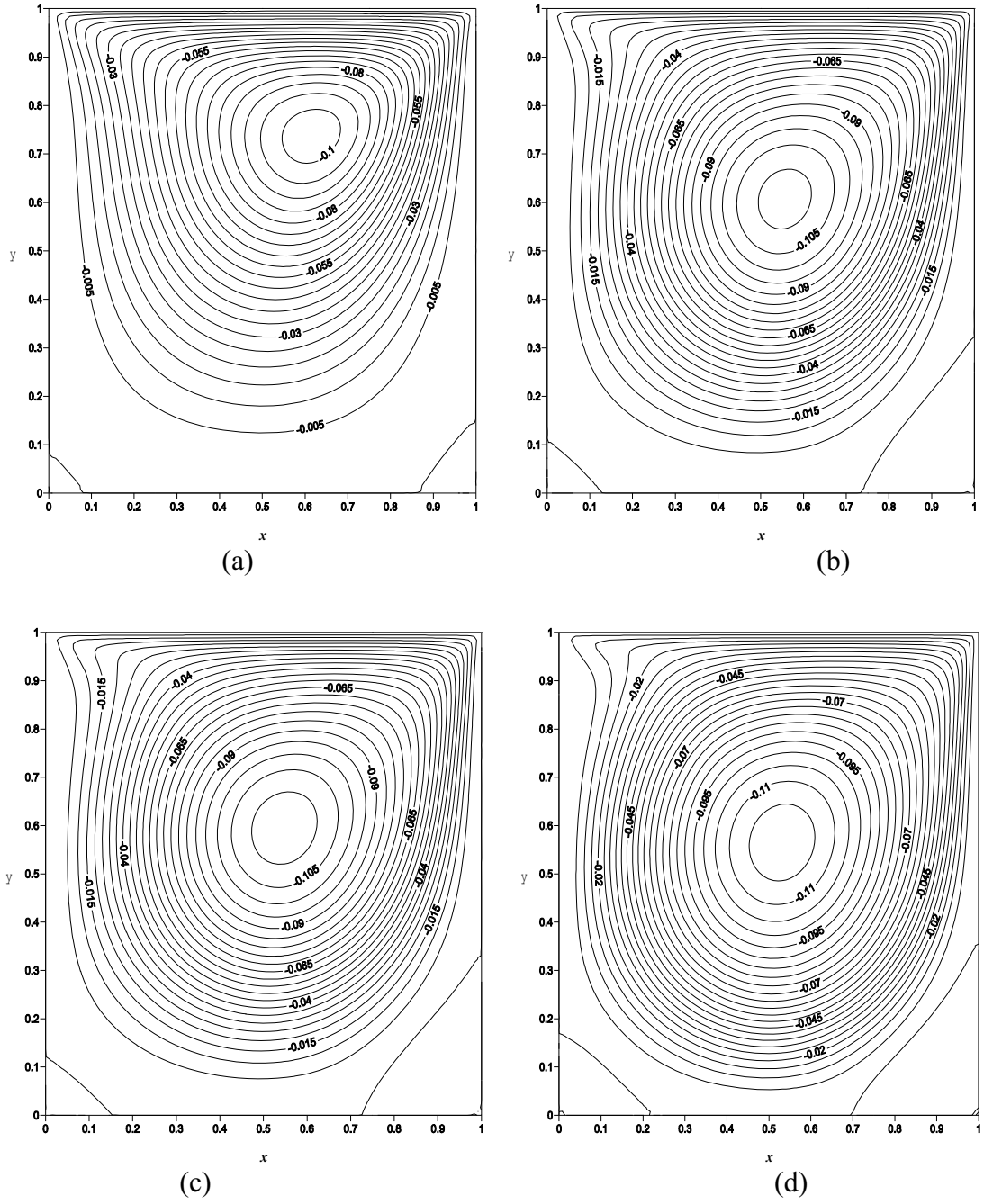
yaklaşımları ve diğer (iç) noktalarda EK A.1’de verilen SF6 yaklaşımlarıyla çözümler üretilmiştir.

Tablo 4.9: Birincil vorteksteki akım fonksiyonunun koordinat değerlerinin karşılaştırılması

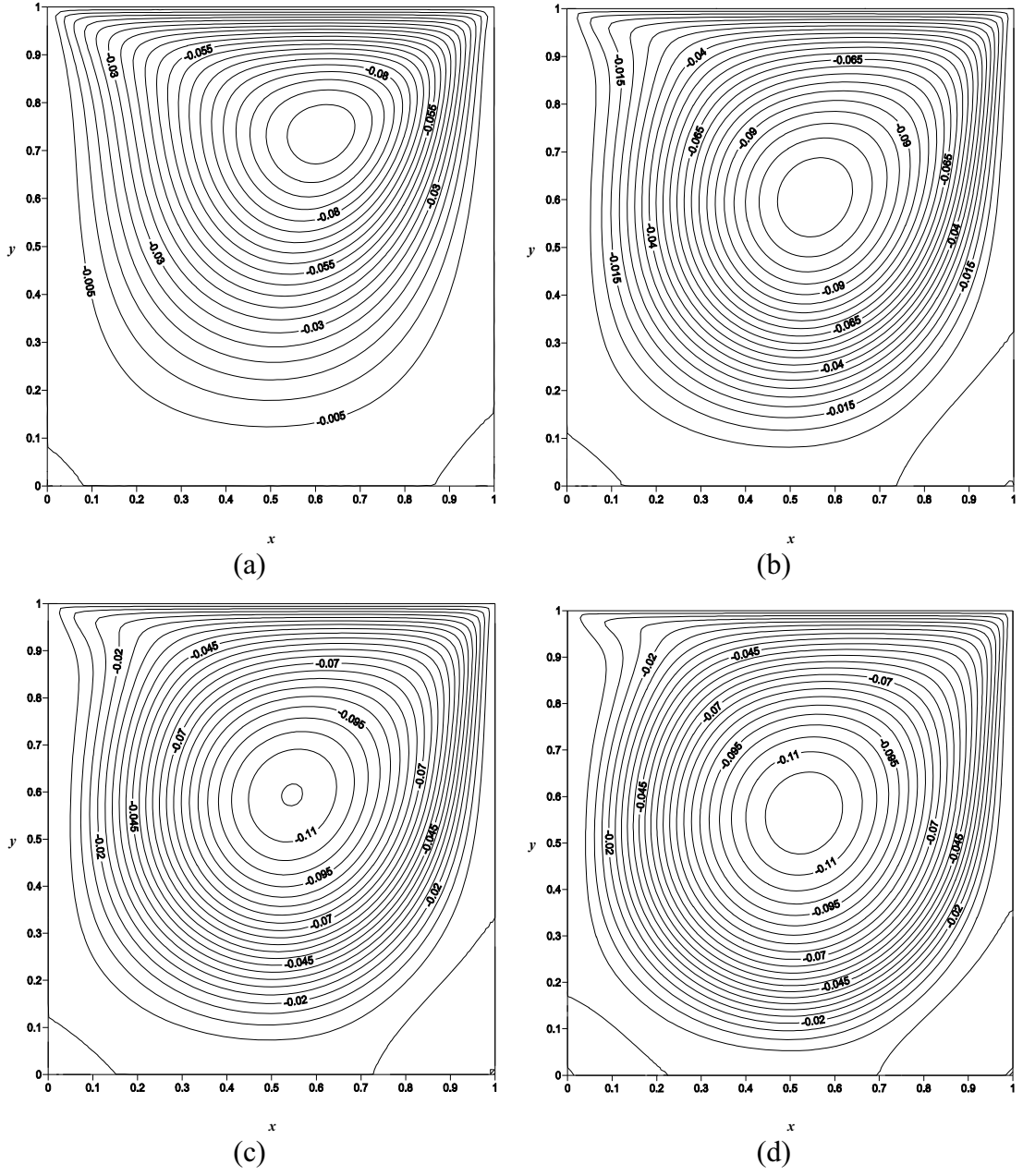
Re	Ghia vd. (1982)	Schreiber ve Keller (1983)	SF2	SF4	SF6
100	(0.6172,0.7344)	(0.61667,0.74167)	129×129 (0.60156,0.72656) 65×65 (0.60938, 0.73438)	129×129 (0.61719,0.734375) 65×65 (0.60938,0.73438)	129×129 (0.61719,0.73438) 65×65 (0.60938,0.73438)
400	(0.5547,0.6055)	(0.55714,0.60714)	97×97 (0.55208,0.60417)	97×97 (0.55208,0.60417)	97×97 (0.55208,0.60417)
500	-	-	97×97 (0.55208,0.59375)	97×97 (0.54167,0.59375)	97×97 (0.54167,0.59375)
1000	129×129 (0.5313,0.5625)	141×141 (0.52857,0.56429)	257×257 (0,53125,0,56641)	257×257 (0.53125,0.56641)	257×257 (0.52734,0.56641)

Tablo 4.10:  $Re=1000$  için birincil vorteksteki akım fonksiyonu değerlerinin karşılaştırılması: akım fonksiyonun maksimum değerleri ve koordinatları ile bu noktalarda yer alan burgaç değerlerinin literatürde var olan bazı çalışmalar ile karşılaştırılması

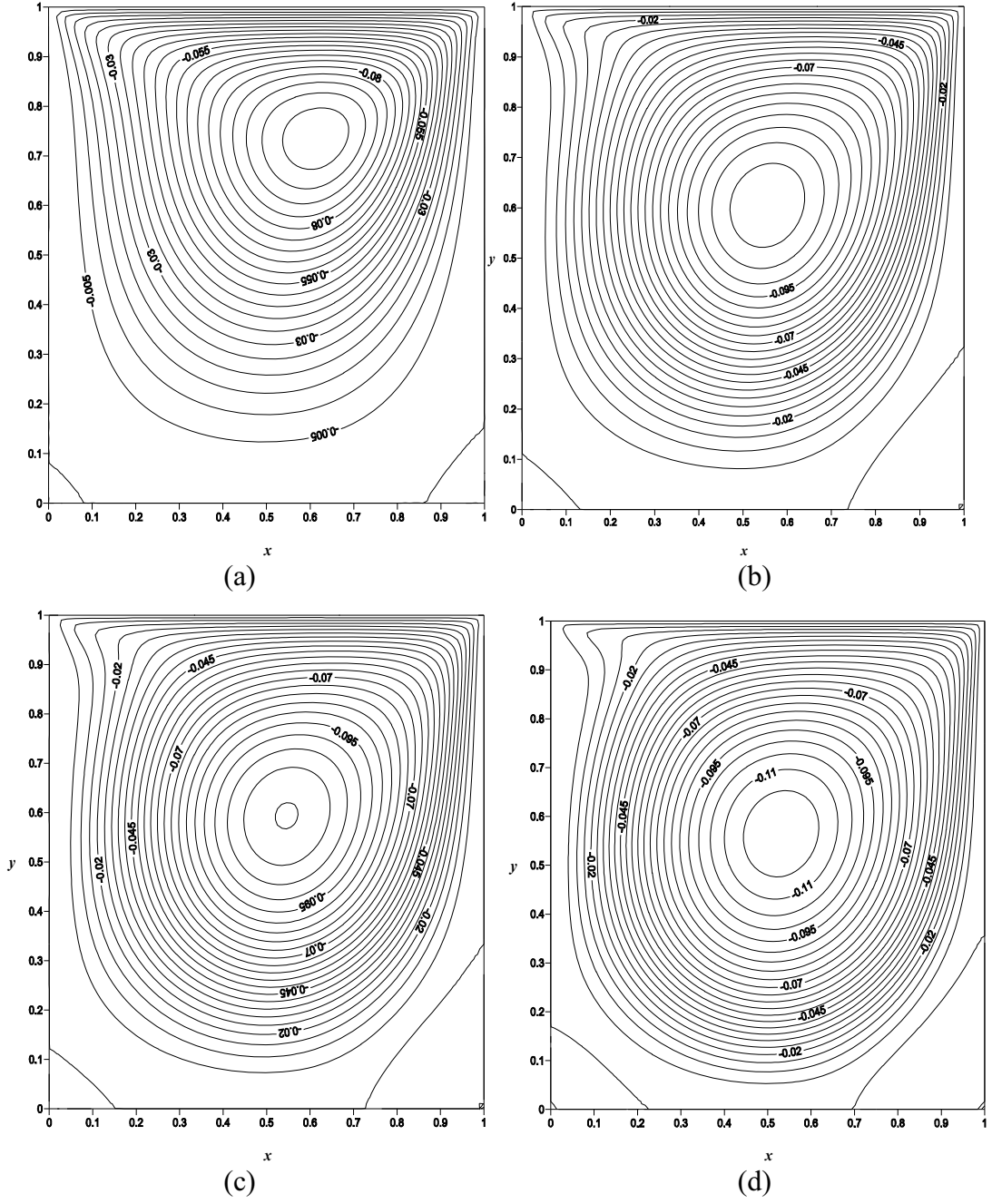
Referans	Izgara nokta sayısı	$\psi$	$\omega$	$x$	$y$
SF2	$257 \times 257$	0.118171	2.056858	0.53125	0.56641
SF4	$257 \times 257$	0.118927	2.067777	0.53125	0.56641
SF6	$257 \times 257$	0.1189388	2.068001	0.52734	0.56641
Barragy ve Carey(1997)	$257 \times 257$	0.118930	-	-	-
Botella ve Peyret (1998)	$N = 128$	0.1189366	2.067750	0.5308	0.5652
Botella ve Peyret (1998)	$N = 160$	0.1189366	2.067753	0.5308	0.5652
Nishida ve Satofuka (1992)	$129 \times 129$	0.119004	2.068546	0.5313	0.5625
Schreiber ve Keller (1983)	$100 \times 100$	0.11315	1.9863	-	-
Schreiber ve Keller (1983)	$121 \times 121$	0.11492	2.0112	-	-
Schreiber ve Keller (1983)	$141 \times 141$	0.11603	2.0268	0.52857	0.56429
Schreiber ve Keller (1983)	Ekstrapolasyon	0.11894	2.0677	-	-
Li vd. (1995)	$129 \times 129$	0.118448	2.05876	0.5313	0.5625
Ghia vd. (1982)	$129 \times 129$	0.117929	2.04968	0.5313	0.5625
Gupta vd. (1979)	$41 \times 41$	0.111492	2.02763	0.525	0.575
Hou vd. (1995)	$256 \times 256$	0.1178	2.0760	0.5333	0.5647
Liao ve Zhu (1996)	$129 \times 129$	0.1160	2.0234	0.5313	0.5625



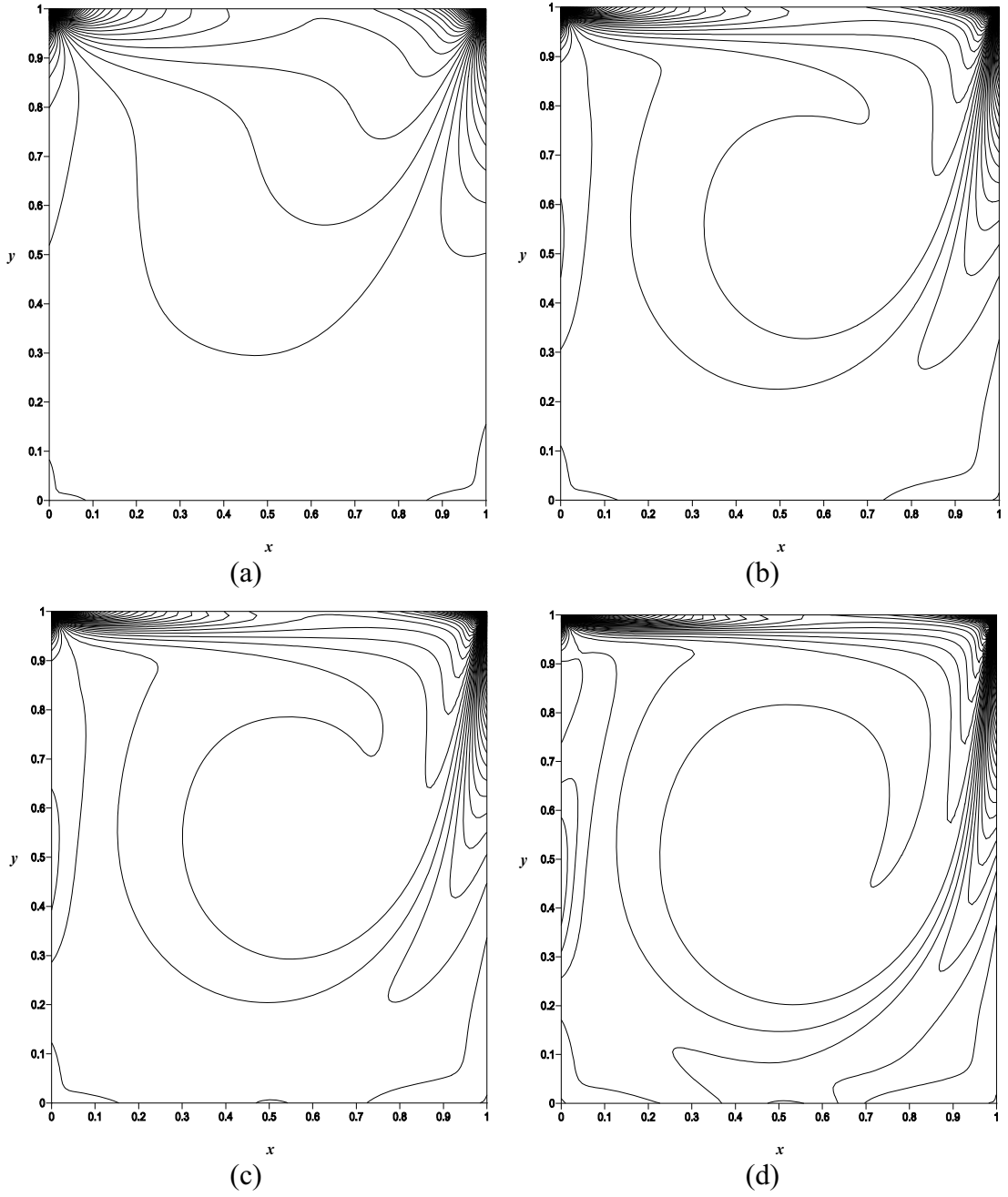
Şekil 4.23: Bazı Reynolds sayılarında SF2 ile elde edilen akım fonksiyonu çözümlerinin kontur grafikleri: (a)  $Re = 100$ ; (b)  $Re = 400$ ; (c)  $Re = 500$  ve (d)  $Re = 1000$



Şekil 4.24: Bazı Reynolds sayılarında SF4 ile elde edilen akım fonksiyonu çözümlerinin kontur grafikleri: (a)  $Re = 100$ ; (b)  $Re = 400$ ; (c)  $Re = 500$  ve (d)  $Re = 1000$



Şekil 4.25: Bazı Reynolds sayılarında SF6 ile elde edilen akım fonksiyonu çözümlerinin kontur grafikleri: (a)  $Re = 100$ ; (b)  $Re = 400$ ; (c)  $Re = 500$  ve (d)  $Re = 1000$



Şekil 4.26: Bazı Reynolds sayılarında SF6 ile elde edilen burgaç çözümlerinin kontur grafikleri: (a)  $Re = 100$ ; (b)  $Re = 400$ ; (c)  $Re = 500$  ve (d)  $Re = 1000$

## 5. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu çalışmada, akışkanlar mekaniğinde akışkanın hızı, basıncı ve yoğunluğu arasındaki bağıntıyı matematiksel olarak ifade eden Navier-Stokes denklemleri, Navier-Stokes denklemlerinin indirgenmiş modelleri; Laplace, Poisson, Burgers ve Navier-Stokes denklemlerine model denklem oluşturan, bir ve iki boyutlu lineer konveksiyon-difüzyon denklemlerinin ikinci, dördüncü ve altıncı mertebeden sonlu fark çözümleri sunulmuştur. Elde edilen sonuçlar, analitik çözümler ve literatürde var olan çalışmalar ile karşılaştırılarak sonlu fark çözümlerinin hassasiyeti incelenmiştir. Yedi nokta kullanılarak elde edilen sonlu fark yaklaşımının üç ve beş nokta kullanılarak elde edilen yaklaşımlara göre hatanın mertebesi nedeniyle daha hassas neticeler elde edildiği görülmüştür. Ancak mertebesi büyük olan yaklaşımların daha fazla zaman ve işlem gerektirdiği saptanmıştır.

Göz önüne alınan model denklemlerinin sayısal çözümlerini elde etmede MATLAB ortamında her bir model denklem için, kullanılan her bir yaklaşımda ayrı bir program yazılmıştır.

Navier-Stokes denklemlerinin iki boyutlu burgaç(girdap)-akım fonksiyonu formülasyonu ile ifadesi göz önünde bulundurularak; literatürde bir test problemi olarak kullanılan, bir kare oyuktaki akışkanın hareket problemi çözülmüştür. Elde edilen çözümler grafikler ile verilmiştir.

Poisson ve Laplace denkleminin sonlu fark çözümlerini ortaya koymak için birer Dirichlet problemi göz önüne alınmış; elde edilen çözümler analitik çözümlerle kalitatif ve kantitatif olarak karşılaştırılmıştır.

Burgers denkleminin sonlu fark çözümleri iki Dirichlet problemi göz önüne alınarak ortaya konulmuştur. Bulunan sonuçlar analitik çözümler ve literatürde mevcut diğer çalışmalarla karşılaştırılmıştır.

Bir ve iki boyutlu konveksiyon-difüzyon denklemlerinin sonlu fark çözümleri birer tane Dirichlet problemi göz önüne alınarak ortaya konulmuştur. Elde edilen



sonlu fark çözümleri analitik ve literatürdeki mevcut kimi çalışmalarla karşılaştırılmıştır.

Bundan sonra, akışkanların hareketini ifade eden kısmi türevli denklemlerin sonlu fark çözümlerini istenen mertebeden hassas neticeler veren ve problemler için bir simülasyon oluşturan bir bilgisayar ortamı (toolbox) oluşturulabilir. Ayrıca sonlu farklar ile belli avantajlara sahip diğer nümerik yöntemlerle hibrit yöntemler oluşturarak ele alınan problemler için daha hassas çözümler elde edilebilir.

## KAYNAKLAR

- Abdallah, S.** (1987a) Numerical Solutions for the Pressure Poisson Equation with Neumann Boundary Conditions Using a Non-Staggered grid I, *Journal of Computational Physics*, 70: 182-192.
- Abdallah, S.** (1987b) Numerical Solutions for the Incompressible Navier-Stokes Equations in Primitive Variables Using a Non-Staggered Grid II, *Journal of Computational Physics*, 70:193–202.
- Aksan, E.N., Özdes, A.** (2004) A numerical solution of Burgers equation, *Applied Mathematics and Computation*, 156: 395–402.
- Anderson, Ch. R.** (1989) Vorticity Boundary Conditions and Boundary Vorticity Generation for Two-Dimensional Viscous Incompressible Flows, *Journal of Computational Physics*, 80: 72-97.
- Barragy, E., Carey, G.** (1997) Stream function-vorticity driven cavity solution using  $p$  finite elements , *Computers & Fluids*, 26(5), 453-68.
- Bateman H.** (1915) Some recent researches on the motion of fluids. *Monthly Weather Review*, 43:163–170.
- Benton, E.R., Platzman, G.W.** (1972) A table of solution of the one-dimensional Burgers equation, *Quarterly of Applied Mathematics*, 30: 195–212.
- Berktaş, İ.** (1992). Plak Teorisi ve Uygulamaları, *Yıldız Teknik Üniversitesi Mühendislik Fakültesi İnşaat Mühendislik Bölümü*, 237, İstanbul.
- Botella O, Peyret R.** (1998) Benchmark spectral results on the lid-driven cavity flow, *Computers & Fluids*, 27: 421–433.
- Bruneau, C.-H., Saad, M.** (2006) The 2D Lid-Driven Cavity Problem Revisited, *Computers & Fluids*, 35: 326–348.
- Burggraf, O. R.,** (1966) Analytic and Numerical Studies of the structure of Stokes Flow, *Journal of Fluid Mechanics*, 24(1): 113–151.
- Burgers, J. M.** (1939) Mathematical examples illustrating relations occurring in the theory of turbulent fluid motion, *Trans. Roy. Neth. Acad. Sci. Amsterdam*, 17: 1–53.
- Burgers J. M.** (1948) A mathematical model illustrating the theory of turbulence. *Advances in Applied Mechanics*, 1:171–199.
- Canitez, N.** (1997) Jeofizikte Modelleme, *Literatür Yayıncılık*. Sayfa 314-334.
- Casulli, V.** (1988) Eulerian-Lagrangian methods for the Navier-Stokes equations at high Reynolds number, *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 8(10): 1349-1360.

- Cebeci, T., Shao, J. P., Kafyeke, F., Laurendeau, E.** (2005), Computational Fluid Dynamics for Engineers, Horizons Publishing, Long Beach, California, Heidelberg, Germany.
- Cole, J. D.** (1951) On a quasi-linear parabolic equations occurring in aerodynamics, *Quarterly of Applied Mathematics*, 9: 225–236.
- Christie, I., Griffiths, D.F., Mitchell, A.R. and Sanz-Serna, J.M.** (1981) Product approximation for nonlinear problems in the finite element method, *IMA Journal of Numerical Analysis*, 1: 253-66.
- Currie, I. G.** (2003) Fundamental Mechanics of Fluids, Third Edition, Canada.
- Dağ, I., Irk, D., Saka, B.** (2005) A numerical Solution of the Burgers Equation Using Cubic B-splines, *Applied Mathematics and Computation*. 163: 199–211.
- Dağ, İ., Irk, D., Tombul, M.** (2006) Least-squares finite element method for the advection–diffusion equation, *Applied Mathematics and Computation*, 173: 554–565.
- Dehghan M., Mohebbi A.** (2008) High-order compact boundary value method for the solution of unsteady convection-diffusion problems, *Mathematics and Computers in Simulation*, 79(3): 683-699.
- Dogan, A.** (2004) A Galerkin finite element approach to Burgers’ equation, *Applied Mathematics and Computation*, 157: 331–346.
- Donea, J., Giuliani, S., Laval, H.** (1982) Finite element Solution of the Unsteady Navier-Stokes Equations by a Fractional Step Method, *Computational Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 30: 53-73.
- Erişti, H., Yıldırım, S.** (2008)Yük Yoğunluğu ve Nokta Yük İçeren Elektrik Alan Problemlerinin Sınır Elemanları Yöntemiyle İncelenmesi, *Fırat Üniversitesi Fen ve Mühendislik Bilimleri Dergisi*, 20 (1): 99-108.
- Erturk, E., Corke, T. C., C. Gökcöl** (2005) Numerical solutions of 2-D steady incompressible driven cavity flow at high Reynolds numbers, *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 48: 747–774.
- Erturk, E., Gökcöl, C.** (2006) Fourth-order compact formulation of Navier–Stokes equations and driven cavity flow at high Reynolds numbers, *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 50: 421–436.
- Erturk, E. Gokcol, O.** (2007) Fine grid numerical solutions of triangular cavity flow, *The European Physical Journal Applied Physics*, 38: 97–105.
- Erturk, E.** (2009) Discussions on driven cavity flow, *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 60: 275–294.
- Fadel, H., Agouzoul, M., Jimack, P. K.** (2010) High-Order Finite difference Schemes for Incompressible Flows, *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, DOI: 10.1002/fld.2228.
- Fletcher, C.** (1991)., Computational Techniques for Fluid Dynamics I & II, Berlin: Springer-Verlag, 2nd edition.

- Ghia, U., Ghia, K. N., Shin, C. T.** (1982), High-Re Solutions for Incompressible Flow Using the Navier-Stokes Equations and a Multigrid Method, *Journal of Computational Physics*, 48: 387-411.
- Goda, K.** (1979) A Multistep Technique with Implicit Scheme for Calculating Two- or Three-Dimensional Cavity Flows, *Journal of Computational Physics*, 30: 76-95.
- Gottlieb, S., Shu, C.-W.** (1998) Total Variation Diminishing Runge-Kutta Schemes, *Mathematics of Computation*, 67: 73-85.
- Greenspan, D.** (1969) Numerical Studies of Steady, Viscous, Incompressible Flow in a Channel with a Step, *Journal of Engineering Mathematics.*, 3(1): 21-28.
- Gülsu, M.** (2006) A finite difference approach for solution of Burgers equation, *Applied Mathematics and Computation*, 175:1245–1255.
- Gülsu, M., Özis, T.** (2005) Numerical solution of Burgers' equation with restrictive Taylor approximation, *Applied Mathematics and Computation*, 171:1192–1200
- Gupta, MM, Manohar, RP.** (1979) Boundary approximations and accuracy in viscous flow computations, *Journal of Computational Physics*, 31: 265–288.
- Hassanien, I. A., Salama, A. A., Hosham, H.A.** (2005) Fourth-order finite difference method for solving Burgers' equation, *Applied Mathematics and Computation*, 170: 781–800.
- Hopf, E.** (1950) The partial differential equation  $u_t + uu_x = \mu u_{xx}$ , *Communications on Pure and Applied Mathematics*, 3:201–230.
- Hou, S., Zou, Q., Chen, S., Doolen, G., Cogley, AC.** (1995) Simulation of cavity flow by the lattice Boltzmann method, *Journal of Computational Physics*, 118: 329–347.
- Hudson, J. D., Dennis, S. C. R.,** (1985) The Flow of a viscous Incompressible Fluid Past Anormal Flat at Low and Intermediate Reynolds Numbers: The Wake, *Journal of Fluid Mechanics*, 150: 369-383.
- Hughes, T. J. R., Liu, W. K., Brooks A.** (1979) Finite Element Analysis of Incompressible Viscous Flow by the penalty Functions Formulation, *Journal of Computational Physics*, 30:1-60.
- Inc, M., Ergüt, M., Bulut, H.** (2005) On Approximate Solutions of The Diffusion and Convection-Diffusion Equations, *Fırat Üniversitesi Fen ve Mühendislik Bilimleri Dergisi*, 17 (1), 78-86.
- Ismail, H. N. A. Elbarbary, E. M. E., Salem, G. S. E.** (2004) Restrictive Taylor's Approximation for Solving Convection-Diffusion Equation, *Applied Mathematics and Computation*, 147: 355–363.
- Koparan, T.** (2005) Nümerik Metotlarla Skaler Dalga Modellemesi, *Yüksek Lisans Tezi Pamukkale Üniversitesi*, Denizli, Denizli, 87s.

- Kutluay, S., Bahadir, A.R., A., Ozdes,** (1999) Numerical solution of one-dimensional Burgers' equation: explicit and exact-explicit finite difference methods, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 103: 251–261.
- Kutluay, S., Esen, A.** (2004) A linearized numerical scheme for Burgers-like equations, *Applied Mathematics and Computation*, 156: 295–305.
- Laknera, M., Plazl, I.** (2008) The finite differences method for solving systems on irregular shapes, *Computers and Chemical Engineering*, 32: 2891–2896.
- Li, M., Tang, T., Fornberg, B.** (1995) A Compact Fourth-Order Finite Difference Scheme for The Steady Incompressible Navier-Stokes, *Internatinal Journal for Numerical Methods in Fluids*, 20: 1137–1151.
- Liao, W.** (2009) A fourth-order finite-difference method for solving the system of two-dimensional Burgers' equations, *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, DOI: 10.1002/fld.2163.
- Liao SJ., Zhu JM.,** (1996) A short note on higher-order streamfunction-vorticity formulation of 2-D steady state Navier–Stokes equations, *International Journal for Numerical Methods in Fluids*; 22: 1–9.
- Meric, R. A., Macken, N. A.** (1974) Numerical Studies of Steady, Viscous Incompressible Flow in a Quasi Two-Dimensional Problem, *Journal of Engineering Mathematics*, 8(4): 273-280.
- Muralidhar, K., Biswas, G.** (2005) Advanced Engineering Fluid Mechanics, *Alpha Science International LTD*, Harrow, U. K.
- Nishida , H., Satofuka , N.** (1992) Higher-Order Solutions Of Square Driven Cavity Flow Using a Variable-Order Multi-Grid Method, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 34, 637–653.
- Öziş, T., Aksan, E.N., Özdes, A.** (2003) A finite element approach for solution of Burgers' equation, *Applied Mathematics and Computation*, 139: 417–428.
- Sani, R.L., Eaton, B.E., Gresho, P.M., Le, R.L., Chan, S.T.** (1981) On the solution of the Time-dependent Incompressible Navier-Stokes Equations via a Penalty Galerkin Finite Element Method, *Proc. Second Int. Conf. Num. Meth. Lam. Turb.Flow*, Venice, pp. 41-51.
- Sari, M., Gürarlan, G.** (2009) A sixth-order compact finite difference scheme to the numerical solutions of Burgers' equation, *Applied Mathematics and Computation*, 208: 475–483.
- Schreiber, R., Keller, H.** (1983) Driven cavity flows by efficient numerical techniques, *Journal of Computational Physics*, 49: 310-333.
- Soh, W.H., Goodrich , J.W.** (1988) Unsteady Solution of Incompressible Navier–Stokes Equations, *Journal of Computational Physics*, 79: 113–134.
- Soğukoğlu, M.** (2000) Akışkanlar Mekaniği, *Birsen Yayınevi*, İstanbul.

- Soulaimani, A., Fortin, M., Ouellet, Y., Dhatt, G., Bertrand, F.** (1987) Simple Continuous Pressure Elements for Two- and Three-dimensional Incompressible Flows, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 62: 47-69.
- Takemitsu, N** (1980) On a Finite Difference Approximation for the Steady-State Navier-Stokes Equations, *Journal of Computational Physics*, 36: 236-248.
- Wang, X., Yang, Z., Huang, G., Chen, B.** (2009) A high-order compact difference scheme for 2D Laplace and Poisson equations in non-uniform grid systems, *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 14: 379–398.
- Wazwaz, A-M.** (2007) The variational iteration method for exact solutions of Laplace equation, *Physics Letters A*, 363: 260–262.

## EKLER

### EK A.1 : Bir Boyutta Beş ve Yedi Noktanın Kullanılması ile Elde Edilen İç ve Sınır Noktalarında Kullanılan Sonlu Fark Yaklaşımları

Burada birinci ve ikinci mertebeden türevler için, tanımlanan problemlerin iç ve sınır noktalarında kullanılan; bir boyutta, beş ve yedi nokta kullanılarak elde edilen sonlu fark yaklaşımları verilmiştir. Göz önüne alınan bir problemin tanım aralığında  $i = 1, 2, \dots, N$  için  $x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_N$  şeklinde  $N$  tane düğüm noktasının oluşturulması;  $f(x)$  fonksiyonunun  $x_i$  noktasındaki değerini  $f_i$  ifade etmek üzere kullanılan sonlu fark yaklaşımları aşağıdaki gibidir:

#### Birinci ve İkinci Mertebeden Türevler İçin Beş Noktanın kullanılmasıyla Elde Edilen Sonlu Fark Yaklaşımları:

Sınır noktası,  $i = 1$  için

$$\left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_i = \frac{1}{12h} (-25f_i + 48f_{i+1} - 36f_{i+2} + 16f_{i+3} - 3f_{i+4}),$$

$$\left. \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right|_i = \frac{1}{12h^2} (35f_i - 104f_{i+1} + 114f_{i+2} - 56f_{i+3} + 11f_{i+4}).$$

Sınır noktası  $i = 2$  için;

$$\left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_i = \frac{1}{12h} (-3f_{i-1} - 10f_i + 18f_{i+1} - 6f_{i+2} + f_{i+3}),$$

$$\left. \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right|_i = \frac{1}{12h^2} (11f_{i-1} - 20f_i + 6f_{i+1} + 4f_{i+2} - f_{i+3}).$$

İç noktaları  $i = 3, 4, \dots, N - 2$  :

$$\left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_i = \frac{1}{12h} (f_{i-2} - 8f_{i-1} + 8f_{i+1} - f_{i+2}),$$

$$\left. \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right|_i = \frac{1}{12h^2} (-f_{i-2} + 16f_{i-1} - 30f_i + 16f_{i+1} - f_{i+2}).$$

Sınır noktası  $i = N - 1$ ;

$$\left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_i = \frac{1}{12h} (-f_{i-3} + 6f_{i-2} - 18f_{i-1} + 10f_i + 3f_{i+1}),$$

$$\left. \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right|_i = \frac{1}{12h^2} (-f_{i-3} + 4f_{i-2} + 6f_{i-1} - 20f_i + 11f_{i+1}).$$

Sınır noktası  $i = N$ ;

$$\left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_i = \frac{1}{12h} (3f_{i-4} - 16f_{i-3} + 36f_{i-2} - 48f_{i-1} + 25f_i),$$

$$\left. \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right|_i = \frac{1}{12h^2} (11f_{i-4} - 56f_{i-3} + 114f_{i-2} - 104f_{i-1} + 35f_i).$$

### **Birinci ve İkinci Mertebeden Türevler İçin Yedi Noktanın kullanılmasıyla Elde Edilen Sonlu Fark Yaklaşımları**

Sınır noktası  $i = 1$  için;

$$\left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_i = \frac{1}{60h} (-147f_i + 360f_{i+h} - 450f_{i+2} + 400f_{i+3} - 225f_{i+4} + 72f_{i+5} - 10f_{i+6}),$$

$$\left. \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right|_i = \frac{1}{180h^2} (812f_i - 3132f_{i+1} + 5265f_{i+2} - 5080f_{i+3} + 2970f_{i+4} - 972f_{i+5} + 137f_{i+6}).$$

Sınır noktası  $i = 2$  için;

$$\left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_i = \frac{1}{60h} (-10f_{i-1} - 77f_i + 150f_{i+1} - 100f_{i+2} + 50f_{i+3} - 15f_{i+4} + 2f_{i+5}),$$

$$\left. \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right|_i = \frac{1}{180h^2} (137f_{i-1} - 147f_i - 255f_{i+1} + 470f_{i+2} - 285f_{i+3} + 93f_{i+4} - 13f_{i+5}).$$

Sınır noktası  $i = 3$  için;

$$\left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_i = \frac{1}{60h} (2f_{i-2} - 24f_{i-1} - 35f_i + 80f_{i+1} - 30f_{i+2} + 8f_{i+3} - f_{i+4}),$$

$$\left. \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right|_i = \frac{1}{180h^2} (-13f_{i-2} + 228f_{i-1} - 420f_i + 200f_{i+1} + 15f_{i+2} - 12f_{i+3} + 2f_{i+4}).$$

İç noktaları  $i = 4, 5, \dots, N - 3$  için;



$$\left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_i = \frac{1}{60h} (-f_{i-3} + 9f_{i-2} - 45f_{i-1} + 45f_{i+1} - 9f_{i+2} + f_{i+3}),$$

$$\left. \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right|_i = \frac{1}{180h^2} (2f_{i-3} - 27f_{i-2} + 270f_{i-1} - 490f_i + 270f_{i+1} - 27f_{i+2} + 2f_{i+3}).$$

Sınır noktası  $i = N - 2$  için

$$\left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_i = \frac{1}{60h} (f_{i-4} - 8f_{i-3} + 30f_{i-2} - 80f_{i-1} + 35f_i + 24f_{i+1} - 2f_{i+2}),$$

$$\left. \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right|_i = \frac{1}{180h^2} (2f_{i-4} - 12f_{i-3} + 15f_{i-2} + 200f_{i-1} - 420f_i + 228f_{i+1} - 13f_{i+2}).$$

Sınır noktası  $i = N - 1$  için

$$\left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_i = \frac{1}{60h} (-2f_{i-5} + 15f_{i-4} - 50f_{i-3} + 100f_{i-2} - 150f_{i-1} + 77f_i + 10f_{i+1}),$$

$$\left. \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right|_i = \frac{1}{180h^2} (-13f_{i-5} + 93f_{i-4} - 285f_{i-3} + 470f_{i-2} - 255f_{i-1} - 147f_i + 137f_{i+1}).$$

Sınır noktası  $i = N$  için

$$\left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_i = \frac{1}{60h} (10f_{i-6} - 72f_{i-5} + 225f_{i-4} - 400f_{i-3} + 450f_{i-2} - 360f_{i-1} + 147f_i),$$

$$\left. \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right|_i = \frac{1}{180h^2} (137f_{i-6} - 972f_{i-5} + 297f_{i-4} - 5080f_{i-3} + 5265f_{i-2} - 3132f_{i-1} + 812f_i).$$

## ÖZGEÇMİŞ

1987 yılında Mardin'in Dargeçit ilçesinde doğdu. İlk, orta ve lise öğrenimini Ankara'da tamamladı. 2007 yılında Pamukkale Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü'nde lisans eğitimini tamamladı. 2007–2008'de özel bir dershanede Matematik öğretmenliği yaptı. 2008 yılında Pamukkale Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalında yüksek lisans öğrenimine başladı.