



**LİNEER OLMAYAN TİTREŞİM PROBLEMLERİNİN
ÇÖZÜMÜNDE BİRLEŞİM (DİFERANSİYEL QUADRATURE VE
SİMÜLASYON) METODU**

Ersin DEMİR

**Mart 2009
DENİZLİ**

**LİNEER OLMAYAN TİTREŞİM PROBLEMLERİNİN
ÇÖZÜMÜNDE BİRLEŞİM (DİFERANSİYEL QUADRATURE VE
SİMÜLASYON) METODU**

**Pamukkale Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Doktora Tezi
Makine Mühendisliği Anabilim Dalı**

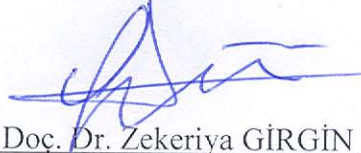
Ersin DEMİR

Danışman: Yrd. Doç. Dr. Zekeriya GİRGIN

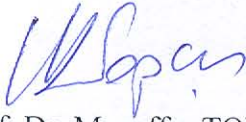
**Mart, 2009
DENİZLİ**

DOKTORA TEZİ ONAY FORMU

Ersin DEMİR tarafından Yrd. Doç. Dr. Zekeriya GİRGIN yönetiminde hazırlanan “**Lineer Olmayan Titreşim Problemlerinin Çözümünde Birleşim (Diferansiyel Quadrature Ve Simülasyon) Metodu**” başlıklı tez tarafımızdan okunmuş, kapsamı ve niteliği açısından bir Doktora Tezi olarak kabul edilmiştir.



Yrd. Doç. Dr. Zekeriya GİRGIN
Jüri Başkanı (Danışman)



Prof. Dr. Muzaffer TOPCU
Jüri Üyesi



Doç. Dr. Hakan BOYACI
Jüri Üyesi



Doç. Dr. Numan Behlül BEKTAŞ
Jüri Üyesi



Yrd. Doç. Dr. Yasin YILMAZ
Jüri Üyesi

Pamukkale Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun
...../...../..... tarih ve sayılı kararıyla onaylanmıştır.

Prof. Dr. Halil KARAHAN

Müdür

Bu tezin tasarımı, hazırlanması, yürütülmesi, araştırılmalarının yapılması ve bulgularının analizlerinde bilimsel etiğe ve akademik kurallara özenle riayet edildiğini; bu çalışmanın doğrudan birincil ürünü olmayan bulguların, verilerin ve materyallerin bilimsel etiğe uygun olarak kaynak gösterildiğini ve alıntı yapılan çalışmalara atfedildiğini beyan ederim.

İmza :

Öğrenci Adı Soyadı : Ersin DEMİR

TEŞEKKÜR

Akademisyenlik hayatımda ve bu doktora tezimde her türlü maddi, manevi yardımını hiçbir şekilde esirgemeyen, çalışmalarımı tavsiye ve yönlendirmeleriyle faydalandığım değerli hocam Sayın Yrd. Doç. Dr. Zekeriya Girgin'e en içten dileklerle teşekkür ederim.

Ayrıca bu çalışmayı finanse eden Pamukkale Üniversitesi Bilimsel Araştırma Projeleri Birimine de (PAÜBAP) (Proje No:2007 FBE 013) teşekkür ederim.

Bunun yanı sıra çalışmalarımı yaparken destek olup sabreden ve manevi yardımını esirgemeyen aileme de teşekkür ederim.

ÖZET

LİNEER OLMAYAN TİTREŞİM PROBLEMLERİNİN ÇÖZÜMÜNDE BİRLEŞİM (DİFERANSİYEL QUADRATURE VE SİMÜLASYON) METODU

Demir, Ersin

Doktora Tezi, Makine Mühendisliği ABD

Tez Yöneticisi: Yrd. Doç. Dr. Zekeriya GİRĞİN

Mart 2009, 151 Sayfa

Son yıllarda birçok adi diferansiyel denklemin (ADD) çözümü için Simülasyon Teknikleri (ST) kullanılmaktadır. Matlab/Simulink, Dymola, Mosilab, SimulationX, LMS Imagine.Lab AMESim, MathModelica System Designer gibi bazı yazılımlar, Modelica'yı esas almaktadırlar. ST, ADD çözümlerinde oldukça iyi bir teknik olmasına rağmen, önemli bir eksikliği mevcuttur. ST'de sınır koşulları sisteme girilemez. Diğer taraftan Diferansiyel Quadrature Metot (DQM), çalışma bölgesinde az sayıda düğüm noktası kullanarak doğru sonuçlar elde eder. Fakat lineer olmayan adi diferansiyel denklemlerin DQM ile çözümü kolay değildir. Ayrıca DQM'de aynı yere birden fazla şartın girilmesi de kolay değildir. Bu çalışmada, bahsedilen bu dezavantajların giderilmesi için, iki metot birleştirilmiştir. Yeni metodun adı Birleşim Metodu (BM)'dur. Bunun yanında bu çalışma da, BM'nin bazı lineer olmayan problemlerin çözümüne kolaylıkla uygulandığı ve diğer metotlardan elde edilen sonuçlarla kıyaslandığında daha doğru sonuçlar verdiği gösterilmiştir.

Bu tez Pamukkale Üniversitesi Bilimsel Araştırma Projeleri Birimi (PAUBAP) (Proje No:2007 FBE 013) tarafından desteklenmiştir.

Anahtar Kelimeler: Birleşim Metodu, Diferansiyel Quadrature Metot, İntegral Quadrature Metot, Linear Olmayan Titreşim Problemleri, Simülasyon Tekniği

Prof. Dr. Muzaffer TOPCU
Doç. Dr. Hakan BOYACI
Doç. Dr. Numan Behlül BEKTAŞ
Yrd. Doç. Dr. Zekeriya GİRĞİN
Yrd. Doç. Dr. Yasin YILMAZ

ABSTRACT**COMBINING METHOD (DIFFERENTIAL QUADRATURE AND SIMULATION) TO SOVE NON-LINEAR VIBRATION PROBLEMS**

Demir, Ersin

Ph. D. Thesis in Mechanical Engineering

Supervisor: Asst. Prof. Dr. Zekeriya GİRGIN

March 2009, 151 Pages

Recent years, Simulation Techniques (STs) have been used for solving most of the ordinary differential equations (ODEs). Some softwares, such as Matlab/Simulink, Dymola, Mosilab, SimulationX, LMS Imagine.Lab AMESim, MathModelica System Designer ect., have been based on Modelica. Although ST is a quite good technique to solve ODEs, that is of a very important deficient. Boundary conditions haven't been imposed into the system by ST. On the other hand, Differential Quadrature Method (DQM), leads to very accurate results using a few grids on the computational domain. But non-linear ODEs haven't been solved easily by DQM. Furthermore, it is not so easy to impose multiple conditions on the same location at DQM. In order to eliminate the mentioned disadvantages, these two methods were combined in this study. This new method is called as Combining Method (CM). Also, this study represents CM has been applied to some non-linear problems simply and gives more accurate results compared with those of other methods.

This thesis was supported by Pamukkale University Scientific Research Projects Council (PAUBAP) (Project No:2007 FBE 013).

Keywords: Combining Method, Differential Quadrature Method, Integral Quadrature Method, Non-linear Vibration Problems, Simulation Technique

Prof. Dr. Muzaffer TOPCU
Assoc. Prof. Dr. Hakan BOYACI
Assoc. Prof. Dr. Numan Behlül BEKTAŞ
Asst. Prof. Dr. Zekeriya GİRGIN
Asst. Prof. Dr. Yasin YILMAZ

İÇİNDEKİLER

	Sayfa
Doktora Tez Onay Formu	i
Bilimsel Etik Sayfası.....	ii
Teşekkür.....	iii
Özet	iv
Abstract	v
İçindekiler	vi
Şekiller Dizini	viii
Tablolar Dizini	x
Simgeler ve Kısaltmalar Dizini.....	xi
1. GİRİŞ	1
2. DİFERANSİYEL QUADRATURE METODUNA GENEL BAKIŞ.....	7
2.1. Birinci Dereceden Türevler İçin Ağırlıklı Katsayıların Hesaplanması.....	7
2.1.1. Bellman'ın yaklaşımı	7
2.1.1.1. Bellman'ın birinci yaklaşımı.....	7
2.1.1.2. Bellman'ın ikinci yaklaşımı	13
2.1.2. Quan ve Chang'ın yaklaşımı.....	14
2.1.3. Shu'nun genel yaklaşımı	15
2.2. İki veya Daha Yüksek Dereceden Türevler İçin Ağırlıklı Katsayıların Hesaplanması	20
2.2.1. İkinci dereceden türevlerin ağırlıklı katsayıları	20
2.2.1.1 Quan ve Chang'ın yaklaşımı	20
2.2.1.2 Shu'nun genel yaklaşımı.....	21
2.2.2. Yüksek dededen türevler için Shu'nun tekrarlamalı formülü	22
2.2.3. Matris çarpımı yaklaşımı	25
2.3 Fourier Açılımını Esas Alan Diferansiyel Quadrature (FDQ) ve Harmonik Diferansiyel Quadrature (HDQ) ile Ağırlıklı Katsayıların Hesabı	28
2.4 Sınır Şartlarının Uygulanması.....	37
2.4.1. δ -yaklaşımı.....	37
2.4.2. Ağırlıklı katsayılar matrisinin düzenlenmesi	38
2.4.3. DQ uygulanmış genel denkleme sınır şartlarının direk uygulanması	43
2.5. Genelleştirilmiş Diferansiyel Quadrature Metodu.....	47
2.5.1. Örnek: Bernoulli-Euler kirisinin GDQM ile enine lineer titreşim analizi ..	50
2.6. Quadrature Eleman Metodu ve Diferansiyel Quadrature Eleman Metodu	54
2.6.1. Quadrature eleman metodu	55
2.6.2. Diferansiyel quadrature eleman metodu	59
2.6.3. Lokal ve global koordinatlar arasında transformasyon işleminin uygulanması	68

2.7. Dügüm Noktaları Dağılımları	72
2.7.1. Eşit aralıklı dügüm noktaları dağılımı	73
2.7.2. Legendre dügüm noktaları dağılımı	74
2.7.3. Radau dügüm noktaları dağılımı	75
2.7.4. Chebyshev dügüm noktaları dağılımı	76
2.7.5. Chebyshev-Gauss-Lobatto dügüm noktaları dağılımı	76
2.8. Lineer Olmayan Diferansiyel Denklemlerin Çözümünde Frechet Türevinin Kullanımı	77
2.9. Genelleştirilmiş İntegral Quadrature Metodu ile İntegral Ağırlıklı Katsayıların Elde Edilmesi.....	83
3. BİRLEŞİM (DİFERANSİYEL QUADRATURE VE SİMÜLASYON) METODU .	87
3.1. Birleşim Metodu'nda Türev ve İntegraller İçin Ağırlıklı Katsayıların Hesaplanması	87
3.1.1. Türevler için ağırlıklı katsayıların hesaplanması	88
3.1.2. İntegraller için ağırlıklı katsayıların hesaplanması	89
3.1.2.1. Yeni geliştirilen yöntemle İQ ağırlıklı katsayıların hesaplanması.....	91
3.1.2.2. Shu'nun metodundan geliştirilen yöntemle İQ ağırlıklı katsayıların hesaplanması	92
3.2. Örnekler	93
3.2.1. Sönümsüz zorlanmış kütle-yay sisteminin titreşim analizi.....	93
3.2.2. Sönümlü zorlanmış kütle-yay sisteminin titreşim analizi	97
3.2.3. İkinci dereceden diferansiyel denklem çözümü	100
4. UYGULAMALAR	104
4.1. Dördüncü Dereceden Lineer Olmayan Diferansiyel Denklem	104
4.2. Duffing Tip Lineer Olmayan Diferansiyel Denklem	109
4.3. Lineer Olmayan Sarkaç Salınımı	115
4.4. İkinci Dereceden Lineer Olmayan Diferansiyel Denklem.....	118
4.5. Lineer Olmayan Sönüm ve Sürtünme Etkisindeki Kütle Yay Sistemi	123
4.6. Periyodik Davranış Gösteren Duffing Denklemi	126
4.7. Quadratik Sönümlü Mathieu Denklemi	130
5. SONUÇLAR VE DEĞERLENDİRME	135
KAYNAKLAR	137
EKLER	143
Ek-1. DQ Ağırlıklı Katsayılar Matrisleri	144
Ek-2. İQ Ağırlıklı Katsayılar Matrisleri.....	149
ÖZGEÇMİŞ	151

ŞEKİLLER DİZİNİ

	Sayfa
Şekil 2.1 Kiriş problemleri için δ düğüm noktasının yeri.....	37
Şekil 2.2 Beş düğüm noktalı QEM kiriş elemanı.....	57
Şekil 2.3 İki elemanlı kiriş için düğüm noktaları dağılımı.....	59
Şekil 2.4 Üç düğüm noktalı DQEM kiriş elemanı	65
Şekil 2.5 Lokal ve global koordinatlar arasındaki transformasyon.....	68
Şekil 2.6 Üniform olarak dağıtılmış düğüm noktaları.....	73
Şekil 2.7 Chebyshev-Gauss-Lobatto düğüm noktaları.....	77
Şekil 2.8 Duffing denkleminin Frechet türevi ile çözümü için akış şeması.....	82
Şekil 3.1 Sönümsüz zorlanmış kütle-yay sistemi.....	93
Şekil 3.2 Denklem (3.23)'de verilen ikinci dereceden diferansiyel denkleme ait simülasyon şeması.....	95
Şekil 3.3 Simülasyon şemasındaki b.ş.1 ile gösterilen bloğun içi.....	95
Şekil 3.4 Simülasyon şemasındaki b.ş.2 ile gösterilen bloğun içi.....	96
Şekil 3.5 Sönümsüz zorlanmış kütle yay sistemine ait yer değiştirme (x) – zaman (t) Grafığı	96
Şekil 3.6 Sönümlü zorlanmış kütle yay sistemi	97
Şekil 3.7 Denklem (3.28)'de verilen ikinci dereceden diferansiyel denkleme ait simülasyon şeması.....	98
Şekil 3.8 Simülasyon şemasındaki b.ş.1 ile gösterilen bloğun içi.....	99
Şekil 3.9 Simülasyon şemasındaki b.ş.2 ile gösterilen bloğun içi.....	99
Şekil 3.10 sönümlü zorlanmış kütle yay sistemine ait yer değiştirme (x) – zaman (t) grafığı	100
Şekil 3.11 Denklem (3.29)'da verilen ikinci dereceden diferansiyel denkleme ait simülasyon şeması.....	101
Şekil 3.12 Simülasyon şemasındaki b.ş.1 ile gösterilen bloğun içi.....	102
Şekil 3.13 Simülasyon şemasındaki b.ş.2 ile gösterilen bloğun içi.....	102
Şekil 4.1 Denklem (4.4)'de verilen dördüncü dereceden lineer olmayan diferansiyel denkleme ait simülasyon şeması	105
Şekil 4.2 Simülasyon şemasındaki b.s.ş. ile gösterilen bloğun içi	106
Şekil 4.3 Simülasyon şemasındaki b.ş.1 ile gösterilen bloğun içi.....	106
Şekil 4.4 Simülasyon şemasındaki b.ş.2 ile gösterilen bloğun içi.....	106
Şekil 4.5 Duffing tip lineer olmayan diferansiyel denkleme ait simülasyon şeması .	110
Şekil 4.6 Simülasyon şemasındaki b.ş.1 ile gösterilen bloğun içi.....	111
Şekil 4.7 Simülasyon şemasındaki b.ş.2 ile gösterilen bloğun içi.....	111
Şekil 4.8 Lineer olmayan davranış gösteren sarkaç salınımı	115
Şekil 4.9 Lineer olmayan sarkaç salınımını ifade eden diferansiyel denkleme ait simülasyon şeması.....	117
Şekil 4.10 Simülasyon şemasındaki b.ş.1 ile gösterilen bloğun içi.....	117
Şekil 4.11 Simülasyon şemasındaki b.ş.2 ile gösterilen bloğun içi.....	118

Şekil 4.12 Denklem (4.24)'de verilen ikinci dereceden lineer olmayan diferansiyel denkleme ait simülasyon şeması	121
Şekil 4.13 Simülasyon şemasındaki b.ş.1 ile gösterilen bloğun içi.....	121
Şekil 4.14 Simülasyon şemasındaki b.ş.2 ile gösterilen bloğun içi.....	122
Şekil 4.15 Lineer olmayan sönüm ve sürtünme etkisindeki kütle yay sistemini ifade eden diferansiyel denkleme ait simülasyon şeması.....	124
Şekil 4.16 Simülasyon şemasındaki b.ş.1 ile gösterilen bloğun içi.....	125
Şekil 4.17 Simülasyon şemasındaki b.ş.2 ile gösterilen bloğun içi.....	125
Şekil 4.18 Lineer olmayan sönüm ve sürtünme etkisindeki kütle yay sistemini ifade eden diferansiyel denkleme ait yer değiştirme (x) – zaman (t) grafiği	126
Şekil 4.19 Periyodik davranış gösteren duffing denklemine ait simülasyon şeması....	128
Şekil 4.20 Simülasyon şemasındaki b.ş.1 ile gösterilen bloğun içi.....	129
Şekil 4.21 Simülasyon şemasındaki b.ş.2 ile gösterilen bloğun içi.....	129
Şekil 4.22 Periyodik davranış gösteren duffing denklemine ait yer değiştirme (x) – zaman (t) grafiği.....	130
Şekil 4.23 Quadratik sönümlü mathieu denklemine ait simülasyon şeması	131
Şekil 4.24 Simülasyon şemasındaki b.ş.1 ile gösterilen bloğun içi.....	132
Şekil 4.25 Simülasyon şemasındaki b.ş.2 ile gösterilen bloğun içi.....	132
Şekil 4.26 Quadratik sönümlü mathieu denklemine ait yer değiştirme (x) – zaman (t) grafiği	133
Şekil 4.27 Quadratik sönümlü mathieu denklemine ait hız $\left(\frac{dx}{dt}\right)$ - yer değiştirme (x) grafiği	134

TABLOLAR DİZİNİ

	Sayfa
Tablo 3.1 Denklem (3.29)'da verilen ikinci dereceden diferansiyel denklemden elde edilen çözüm değerleri	103
Tablo 4.1 Denklem (4.4)'de verilen dördüncü dereceden lineer olmayan diferansiyel denklemden elde edilen fonksiyonun değerleri	107
Tablo 4.2 Denklem (4.4)'de verilen dördüncü dereceden lineer olmayan diferansiyel denklemden elde edilen fonksiyonun 1. dereceden türevinin değerleri.....	108
Tablo 4.3 Duffing tip lineer olmayan diferansiyel denklemden elde edilen yer değiştirme değerleri.....	112
Tablo 4.4 Duffing tip lineer olmayan diferansiyel denklemden elde edilen hız değerleri	113
Tablo 4.5 Duffing tip lineer olmayan diferansiyel denklemden elde edilen ivme değerleri	114
Tablo 4.6 Lineer olmayan sarkaç salınımı için yerdeğiştirme, hız ve ivme değerleri	119
Tablo 4.7 Denklem (4.24)'de verilen ikinci dereceden lineer olmayan diferansiyel denklem için bm kullanılarak elde edilen y değerleri	122
Tablo 4.8 Denklem (4.24)'de verilen ikinci dereceden lineer olmayan diferansiyel denklem için dqm kullanılarak elde edilen y değerleri	123

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

SEM	Sonlu elemanlar metodu
SFM	Sonlu farklar metodu
DQM	Diferansiyel quadrature metodu
DQ	Diferansiyel quadrature
GDQM	Genelleştirilmiş diferansiyel quadrature metot
QEM	Quadrature eleman metodu
DQEM	Diferansiyel quadrature eleman metodu
PDQ	Polinom yaklaşımını esas alan diferansiyel quadrature
HDQ	Harmonik diferansiyel quadrature
FDQ	Fourier açılımını esas alan diferansiyel quadrature
BM	Birleşim metodu
ST	Simülasyon tekniği
İQ	İntegral quadrature
GİQM	Genelleştirilmiş integral quadrature metot
N	Düğüm sayısı
(r)	Türevin derecesi
$a_{ij}^{(r)}$	r. dereceden türevler için ağırlıklı katsayılar
$L_N(x)$	N. dereceden Legendre polinomu
$r_k(x)$	Test fonksiyonu
$\ell(x)$	Lagrange interpolasyon polinomu
δ_{ij}	Kronecker operatörü
i, j	İndis numaraları
$[A^{(r)}]$	r. dereceden türevler için ağırlıklı katsayılar matrisi
$[\tilde{A}^{(r)}]$	r. dereceden türevler için değiştirilmiş ağırlıklı katsayılar matrisi
E	Elastisite modülü

I	Atalet momenti
q	Yayıllı yük
M	Eğilme momenti
F	Kesme kuvveti
δ	Birbirine çok yakın düğümler arası mesafe
x	Boyutlu yatay koordinat
X	Boyutsuz yatay koordinat
y	Boyutlu dikey koordinat
Y	Boyutsuz dikey koordinat
[K]	Rijitlik matrisi
R(x)	Radau polinomu
C(x)	Chebyshev polinomu
CGL(x)	Chebyshev-Gauss-Lobatto polinomu
$b_{ij}^{(r)}$	r. dereceden integraller için ağırlıklı katsayılar
$[B^{(r)}]$	r. dereceden integraller için ağırlıklı katsayılar matrisi
c	İntegral sabiti
[C]	İntegral sabitleri için katsayılar matrisi
e	İç düğüm noktaları
i	Dış düğüm noktaları
b.s.ş.	Başlangıç ve sınır şartları
b.ş.	Başlangıç şartları

1. GİRİŞ

Kısmi diferansiyel denklemlerin çözümü için kullanılan sayısal yaklaşım metotları, mühendislik bilimlerinin pek çok sahasında uygulanmış ve uygulanmaya devam etmektedir. Sonlu Elemanlar Metodu (SEM) ve Sonlu Farklar Metodu (SFM) gibi klasik teknikler son derece gelişmiş ve tanınmışlardır. Hatta mühendislik problemlerinin çözümü için hazırlanan birçok paket program (Ansys, Abacus, ...) bu metotları temel almaktadır. Bu tür metotların en genel özelliği büyük sayıda düğüm noktaları kullanarak güvenilir sonuçlar elde etmeleridir. Bunun yanında birçok durumda, gerçek değere yakın sonuçlar, problemin fiziksel alanının birkaç özel noktasında istenir. Bu noktaların çözümünün elde edilebilmesi için, geleneksel metotlar hala çok fazla sayıda düğüm noktası gerektirmektedir. Bunun sonucu olarak problemin çözümü için gerekli bilgisayar kapasite ihtiyacı daha da büyümektedir.

Hızlı işlem yapabilen bilgisayarların gelişimine paralel olarak, mühendislik problemlerinin çözümünde kullanılan sayısal tekniklerin geliştirilmesinde de bir hareketlilik olmuştur. Kabul edilebilir doğruluğa sahip sonuçları elde etmek için daha az düğüm noktası kullanan alternatif sayısal metotlar araştırılırken ilk defa Bellman ve Casti (1971) tarafından Diferansiyel Quadrature Metot (DQM) ileri sürülmüştür. DQM, kapsamlı bir yaklaşım metodudur ve geleneksel SEM ve SFM gibi metotlara alternatif olarak kabul edilmektedir. Bellman ve Casti (1971), metotlarında küçük düğüm sayıları kullanarak, doğru sayısal çözümler elde etmişlerdir. Metot genel olarak, çözüm bölgesinin herhangi bir noktasında, bir koordinat yönüne göre bir fonksiyonun türevi veya integrali, bu koordinat yönünde seçilen bütün düğüm noktalarındaki fonksiyon değerlerinin ağırlıklı lineer toplamıdır fikrine dayanır. DQM, ayrılmış her düğüm noktasının her derece türevi için ağırlıklı katsayılarının hesaplanması üzerine kuruludur.

DQM, SEM'den iki bakımdan değişiklik gösterir. Birincisi, DQM'de yüksek dereceden polinomlar kullanılarak global bir yaklaşım kurulurken, SEM'de düşük dereceden polinomlar kullanılarak, lokal elemanlar üzerinden fonksiyon yaklaşımı kurulur. İkincisi DQM, bir noktadaki fonksiyonun türevini direk elde ederken, SEM

lokal bir eleman üzerine kurulur ve türev, yaklaşım metodundan elde edilir. Bu bakımdan DQM daha çok SFM'ye benzemektedir. Ancak SFM de düşük dereceden polinomlar kullanan lokal bir yaklaşım metodudur (Civan ve Sliepcevich 1983a, Naadimuthu vd 1984).

Herhangi dereceden bir diferansiyel denklemin çözülebilmesi için öncelikle ağırlıklı katsayıların hesaplanması gereklidir. Bellman vd (1972), ağırlıklı katsayıların hesaplanması için iki metot ileri sürmüşlerdir. Bellman vd (1972), tarafından geliştirilen iki metodun da bazı temel zorlukları mevcuttur. Birinci metotta, cebirsel bir denklem sistemi çözülmüştür ve kullanılan polinomun derecesi, düğüm sayısının bir eksiğine eşit veya daha küçük olmaktadır. Lineer denklem dizisinin bir tek çözümü vardır. Çünkü matris elemanları Vandermonde matrisinden oluşmuştur (Bellman vd 1972). İkinci metotta ise ağırlıklı katsayıların hesabında basit bir cebirsel formülasyon kullanılmıştır. Fakat hesaplama, N. Dereceden ötelenmiş Legendre polinomunun kökleri olarak seçilen düğüm noktalarının koordinatlarına göre yapılır (Bellman vd 1972). Yani eğer düğüm sayısı (N) belirlenirse, düğüm noktalarının dağılımı değişik fiziksel problemler veya değişik sınır şartları için olsa dahi sabittir. Bazı pratik problemlerin çözümleri için sınıra yakın düğüm noktalarına ihtiyaç olduğundan, sözü edilen durum DQM'yi sınırlar. Bellman'ın ağırlıklı katsayıları birçok yerde uygulanmıştır (Bellman ve Casti 1971, Bellman vd 1972, Bellman vd 1974, Bellman vd 1975a,b, Bellman ve Roth 1986, Kashef ve Bellman 1974, Hu ve Hu 1974, Mingle 1977, Wang 1982, Civan ve Sliepcevich 1983a,b, Civan ve Sliepcevich 1984a,b, Naadimuthu vd 1984, Bert vd 1988, Bert vd 1989, Bert vd 1994, Jang vd 1989). Bellman'ın iki metodundan genellikle birincisi kullanılmıştır. Bu metotta, düğüm noktalarının koordinatları rasgele seçilerek ağırlıklı katsayılar bulunmaktaydı. Fakat cebirsel denklem sisteminin derecesi ki bu düğüm sayısına eşittir, büyük olduğunda elde edilen matris, tekillikten dolayı kullanılamaz hale gelir. Çünkü düğüm sayısı (N) büyük olduğunda, oluşan Vandermonde matrisinin tersinin hesaplanması zordur. Bundan dolayı bu metotta fazla sayıda düğüm noktası kullanıldığı durumlarda, ağırlıklı katsayıların elde edilmesi çok zordur. Daha kötüsü, (NxN) lineer cebirsel denklem dizisinin her dereceden türevinin çözülmesi gerekir. Civan (1989), Bellman'ın ilk yaklaşımındaki yüksek düğüm noktalarında ağırlıklı katsayıların hesaplanmasındaki zorluğun Vandermonde matrisinin karakteristiğinden kaynaklandığını öne sürdü. Vandermonde matrisi mühendislik problemlerinin birçok alanında kullanılmıştır. Denklemlerin, Vandermonde

matrislerinin çözülebilmesi için bazı özel algoritmalar kullanılmıştır. En etkili algoritmalarından biri, Björck ve Pereyra (1970) tarafından öne sürülmüştür. Björck Pereyra (1970), BP (Björck-Pereyra) algoritmasını kullanarak 31 düğüm noktalı ağırlıklı katsayıları doğru olarak hesaplamayı başarmışlardır. Bellman'ın yaklaşımlarındaki bu zorlukları gidermek için birçok çalışma yapılmıştır. Quan ve Chang (1989a,b), Lagrange interpolasyon polinomunu test fonksiyonu olarak kullanarak birinci ve ikinci dereceden türevlere ait ağırlıklı katsayıları hesaplamışlardır. Ağırlıklı katsayıların hesaplanmasında en büyük yeniliği Shu ve Richards (1990) ve Shu (1991) yapmışlardır. Shu'nun yaklaşımı ile birinci dereceden türevlerin ağırlıklı katsayıları, düğüm noktalarının koordinatlarının seçiminde hiçbir zorlukla karşılaşılmadan basit bir cebirsel formülle belirlenmiştir (Shu ve Richards 1990). Ayrıca iki veya daha üst dereceden türevler için tekrarlamalı çarpım ilişkisini geliştirmişlerdir. Bunun yanında Bellman vd'nin (1972) ikinci yaklaşımında görülen düğüm noktalarındaki kısıtlamalar kaldırılmış ve keyfi düğüm noktası seçimi getirilmiştir. Bu metot Genelleştirilmiş Diferansiyel Quadrature Metodu (GDQM) olarak da bilinmektedir.

GDQM'de, SEM ve SFM'ye benzer olarak verilen diferansiyel denklemler, çözüm bölgesinde, düğüm noktalarındaki fonksiyonun değerleri cinsinden cebirsel denklemlere dönüştürülür. Ayrıca sınır şartlarını ifade eden denklemler, GDQ formunda yazılmış denklemlerle değiştirilir ve metot uygulanır. Buna karşılık yüksek dereceden diferansiyel denklem çözümlerinde, tek düğüm noktasına birden fazla sınır şartının uygulandığı durumlar ortaya çıkmaktadır. Diferansiyel Quadrature çözümlerinde, aynı noktaya uygulanan birden fazla sınır şartının ele alınması kolay değildir. Bu sorunu aşmak için değişik metotlar geliştirilmiştir. Jang vd (1989), DQM'nin kiriş ve plakların statik analizine uygulanması ile ilgili çalışmalarında, δ -yaklaşımı adlı bir metot ileri sürmüşlerdir. Bu metotta, sınırdaki düğüm noktalarının çok yakınında ($\delta \cong 10^{-5}$) noktalar seçilir. Daha sonra, bir sınıra ait iki sınır şartından ilki, sınır düğüm noktasına ve diğeri bu sınır noktasından δ kadar uzaktaki diğer düğüm noktasına uygulanır.

δ -yaklaşımı, değişik sınır koşullarındaki kirişlere ve plaklara başarılı bir şekilde uygulanmıştır (Bert vd 1988, Jang vd 1989). δ değeri, kabul edilebilir çözüm doğruluğu açısından 0,001'den büyük olmazken, çok küçük δ değerleri için de sonuç dalgalanmaya başlar. Sınır şartlarının uygulanmasının böyle bir yaklaşımla yapılmasında meydana gelen doğruya yaklaşamama, sınır ve yükleme bakımından

simetrik problemlerde, çözümdeki (düğüm noktalarındaki çökme değerleri gibi) simetrinin kaybolması şeklinde kendini gösterir.

Çoklu sınır şartlarının tek noktaya uygulanması problemine Wang ve Bert (1993), ağırlıklı katsayılar matrisini yeniden düzenleyerek yeni bir yaklaşım getirmişlerdir. Ayrıca Shu ve Du (1997), DQM uygulanmış genel denkleme sınır şartlarını doğrudan uygulayarak ayrı bir yaklaşım getirmişlerdir.

GDQM, mühendisliğin birçok yapısal problemine başarıyla uygulanabilmiştir (Du vd 1994, Du vd 1996). Shu ve Richards (1992), GDQ ile, enerji problemlerini çözmüşlerdir. Ayrıca Liu ve Wu (2000), GDQM ile Frechet türevi kullanarak Duffing tip lineer olmayan diferansiyel denklemi çözmüşlerdir. Wu ve Liu (2000) ise, GDQM'yi başlangıç değer problemlerinin çözümünde kullanmışlardır. Sonra tekrar Liu ve Wu (2001), GDQM kullanarak kirişlerin titreşim analizlerini yapmışlardır. Bundan başka Tomasiello (2003), Liu ve Wu'nun (2000) çalışmasına benzer biçimde, Duffing tip lineer olmayan özelliğe sahip dinamik sistemleri Diferansiyel Quadrature'u esas alan iteratif bir metotla çözmüştür.

Striz vd (1994) ve Striz vd (1997), DQM'nin, mekaniğin gerçek problemlerinin çözümünde eksikliği olduğunu söylemişlerdir. Özellikle düzgün olmayan geometriler ve süreksiz yüklerin çözümü için Quadrature Element Metodu'nu (QEM) geliştirdiler. Bununla beraber QEM'de δ -yaklaşımı kullanıldığından dolayı yeteri kadar elverişli ve doğru değildi. Bu yüzden bu yaklaşım yerine QEM'nin geliştirilmiş versiyonu olan Diferansiyel Quadrature Eleman Metodu (DQEM) önerildi (Wang ve Gu 1997). DQEM, çökme, serbest titreşim ve burkulma gibi yapısal mühendislik problemlerine başarıyla uygulanmıştır (Liu ve Liew 1999a,b, Gu ve Wang 1997, Chen 1999, Chen 2000). Ayrıca süreksiz yüklemeli ve değişik kalınlıktaki kiriş ve kirişsel yapılar da DQEM ile çözülebilmektedir. Düğüm noktalarının isteğe bağlı olarak seçilebilmesi ve hesaplama yapılan alanı birden fazla elemana ayırabilme özelliği metodun avantajlarından biridir.

Yukarıda anlatılan ağırlıklı katsayıların elde edilmesinde kullanılan yöntemlerin tamamında polinom yaklaşımını esas alan Diferansiyel Quadrature (PDQ) kullanılmıştır. Polinom yaklaşımı birçok mühendislik probleminin çözümü için oldukça uygundur. Ancak özellikle periyodik davranış gösteren bazı problemlerin çözümünde,

polinom yaklaşımı en iyi sonucu vermez. Fourier açılımı yaklaşımı bu tür problemler de daha iyi sonuçlar verebilmektedir. İlk defa Striz vd (1995), DQ uygulamasında test fonksiyonu olarak Harmonik fonksiyon kullanmışlar ve Bellman vd'nin (1972) birinci yaklaşımında da kullanılan cebirsel denklem takımını çözerek ağırlıklı katsayıları elde etmişlerdir. Bununla beraber standart Diferansiyel Quadrature'dakine benzer biçimde bazı zorluklarla karşılaşmışlardır. Bunun üzerine Shu ve Xue (1997), Fourier seri açılımını, GDQM kullanarak, Harmonik Diferansiyel Quadrature (HDQ) adı altında, plakların serbest titreşim analizlerine başarıyla uygulamışlardır. Ayrıca Shu ve Chew (1997), aynı metodu Fourier açılımını esas alan Diferansiyel Quadrature (FDQ) başlığı altında Helmholtz problemlerine uygulamıştır. HDQ ve FDQ arasındaki tek fark test fonksiyonunda π 'nin alınıp alınmamasıdır.

Birleşim Metodu (BM) ilk olarak Girgin (2008a) tarafından ve bu tezde önerilmiştir. Metot, DQM ile Simülasyon Tekniğini (ST) birleştirmiştir. Son yıllarda ST, birçok yazılıma başarılı biçimde uygulanmıştır. Modelica tabanlı; Matlab/Simulink, Dymola, Mosilab, SimulationX, LMS Imagine.Lab AMESim, MathModelica System Designer gibi paket programlar ST'yi kullanmaktadırlar. ST, diferansiyel denklemleri çözerken, otomatik kontrol problemlerinde kullanılan blok diyagramlarını kullanmaktadır. Bu nedenle lineer olmayan denklem veya diferansiyel denklemlerin çözümü, bu metot ile kolaylıkla elde edilebilmektedir. Birçok durumda bu metot, lineer olmayan diferansiyel denklemlere kolaylıkla uygulanabilmektedir.

ST'de, sistemin modeli oluşturulup çözümlene yapılabildiği gibi, sistemin genel denkleminin simülasyonu oluşturularak da çözümleneler yapılabilmektedir. Model oluşturularak yapılan yöntemde, model kurulurken programların paket kütüphaneleri kullanılmaktadır ve model oluşturulduktan sonra tek yapmak gereken modeli çalıştırmaktır. Programlar, modele herhangi bir müdahale hakkı vermemektedir. Hâlbuki tezin amacı, ST'nin eksikliklerini DQM kullanarak veya tersi olarak DQM'nin eksiklerini ST kullanarak gidermektir. Bu nedenle bu tezde sistemin genel denklemleri kullanılarak çözümleneler yapılmıştır.

ST ile lineer veya lineer olmayan diferansiyel denklem çözümleri yapılırken, programlar sadece başlangıç şartlarını girmeye müsade etmektedir. Yani sınır değerlerin sisteme girişi yoktur. Özellikle sınır değer problemlerindeki integraller alınırken bu

problem kendini göstermektedir. ST'nin bu eksikliği, türev ve integraller alınırken DQM kullanılarak aşılmıştır. ST ile türev veya integral alınırken s uzayı kullanılır.

BM sadece ST'ye değil DQM'ye de büyük kolaylıklar getirmektedir. DQM ile çözümlene yaparken özellikle aynı düğüm noktasına iki ayrı şartı girmenin zorluğu yukarıda anlatılmıştı. ST mantığı ile aynı noktaya önce ilk şart sonra ikinci şart kolaylıkla uygulanabilmektedir. Ayrıca DQM'de, lineer olmayan diferansiyel denklemlerin çözümü için zorunlu olarak kullanılan Frechet türevine de, BM'de ihtiyaç duyulmamaktadır.

Sonuç olarak hem ST'deki eksiklikler hem de DQM'deki eksiklikler, her iki metodun birleştirilmesiyle giderilmiştir.

Buna ilave olarak DQ ağırlıklı katsayılar, farklı yeni bir yöntemle elde edilmiştir. Bu yeni yöntem, DQM'de kullanılan daha kolaydır ve köşegen elemanların elde edilmesi için ilave işleme gerek duymamaktadır. Ayrıca yeni yöntem ile aynı mantık kullanılarak İntegral Quadrature (İQ) ağırlıklı katsayıların da elde edilmesi sağlanmıştır. Bundan başka, Shu vd'nin (1995) önerdiği İntegral Quadrature Metodu'da (İQM) geliştirilmiştir. Her iki yöntemle elde edilen integral ağırlıklı katsayılar matrisi, fonksiyonun integralini, c integral sabitlerini de hesaba katarak bulmaktadır. Quadrature çözümlerinde, c integral sabitlerini de hesaplayarak, fonksiyonun integralinin alınması daha önce literatürde bulunmamaktadır. Böylece içerisinde diferansiyel veya integral işlemleri içeren lineer olmayan başlangıç veya sınır değer problemleri kolaylıkla çözülebilmektedir. Yeni önerilen yöntemle ağırlıklı katsayıların elde edilmesi ilk olarak bu tezde ve Shu vd'nin (1995) metodundan geliştirilen yöntemle İQ ağırlıklı katsayıların elde edilmesi ilk olarak Girgin (2008b) tarafından ve yine bu tezde önerilmiştir.

Bu çalışmada ilk önce DQM'ye genel bir hatırlatma yapılarak, DQ'nun Bellman ve Casti'den (1971) günümüze, önemli biçimde gelişimini sağlayan metotlar tanıtılmıştır. Üçüncü bölümde Birleşim Metodu anlatılmıştır. Aynı bölümde, yeni önerilen yöntemle, diferansiyel ve integral ağırlıklı katsayılar matrislerinin ve Shu vd'nin (1995) metodundan geliştirilen integral ağırlıklı katsayılar matrislerinin elde edilmesi de gösterilmiştir. Dördüncü bölümde lineer olmayan diferansiyel denklemlerin çözümleri verilmiştir. Ekler bölümünde ise yeni önerilen yöntemle, 5 ve 13 düğüm için elde edilen diferansiyel ve integral ağırlıklı katsayılar matrisleri verilmiştir.

2. DİFERANSİYEL QUADRATURE METODUNA GENEL BAKIŞ

2.1. Birinci Dereceden Türevler İçin Ağırlıklı Katsayıların Hesaplanması

$x \in [a, b]$ aralığında bir boyutlu bir problem ele alınsın. Koordinatları $a = x_1, x_2, \dots, x_N = b$ olan N adet düğüm sayısı varsayalım. Bellman vd (1972), $f(x)$ fonksiyonunun birinci dereceden türevini, $f^{(1)}(x) = \frac{df(x)}{dx}$ olmak üzere her düğüm noktası için aşağıdaki formülle vermişlerdir.

$$f^{(1)}(x_i) = \sum_{j=1}^N a_{ij}^{(1)} f(x_j), \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (2.1)$$

$f(x_j)$, x_j düğüm noktasındaki fonksiyonun değerini ifade eder. $f^{(1)}(x_i)$, x_i düğümündeki $f(x)$ fonksiyonunun birinci dereceden türevidir. $a_{ij}^{(1)}$, birinci dereceden türevler için ağırlıklı katsayılarıdır.

Öncelikle ağırlıklı katsayılar matrisi belirlenir. Bu sayede fonksiyonun değerleri kullanılarak türevleri elde edilebilir.

2.1.1. Bellman'ın yaklaşımı

Bellman vd (1972), $a_{ij}^{(r)}$ ağırlıklı katsayılarının hesaplanabilmesi için iki yaklaşım önermişlerdir. Bu iki yaklaşım aşağıda verilmiştir.

2.1.1.1. Bellman'ın birinci yaklaşımı

Bu yaklaşımda test fonksiyonu aşağıdaki gibi alınmıştır.

$$r_k(x) = x^k, \quad k = 0, 1, \dots, N-1 \quad (2.2)$$

Denklem (2.2)'den, düğüm noktası sayısı (N) kadar test fonksiyonu olduğu görülmektedir. Ayrıca düğüm noktalarının sayısı, diferansiyel denklemdaki en yüksek dereceli türevin bir fazlasına eşit olmalıdır. Denklem (2.1)'de geçen i ve j , 1'den N'e kadar gitmektedir. Bu yüzden ağırlıklı katsayılar matrisinin boyutu $(N \times N)$ 'dir. Ağırlıklı katsayılar matrisinin elde edilebilmesi için N adet test fonksiyonu, N adet düğüm noktasına (x_1, x_2, \dots, x_N) uygulanır. Sonuçta $a_{ij}^{(1)}$ ağırlıklı katsayılar;

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{j=1}^N a_{ij}^{(1)} = 0 \\ \sum_{j=1}^N a_{ij}^{(1)} x_j = 1 \\ \sum_{j=1}^N a_{ij}^{(1)} x_j^k = k x_i^{k-1}, k = 2, 3, \dots, N-1 \end{array} \right. \quad i=1, 2, \dots, N \quad (2.3)$$

olarak veya daha farklı bir ifadeyle;

$$\sum_{k=1}^N a_{ik}^{(r)} (x_k^{v-1}) = \frac{d}{dx^r} (x^{v-1}) \Big|_{x=x_i}, \quad i, v = 1, 2, \dots, N \quad (2.4)$$

şeklinde elde edilir.

Denklem (2.3)'ün son eşitliğinden görülmektedir ki, kabul edilen test fonksiyonu için (Denklem (2.2)), düğüm noktalarının sayısına eşit veya daha büyük dereceli türevlere ait ağırlıklı katsayılar sıfırdır. Çünkü ağırlıklı katsayılar, Denklem (2.3)'de verilen son eşitliğin sağ tarafının türevinin alınmasıyla bulunur. x_i düğüm noktaları belirlendiğinde, bu bağıntılar ile ağırlıklı katsayılar matrisi için $(N \times N)$ 'lik lineer cebirsel denklem dizileri elde edilir. Bu denklem dizilerinin matrisleri Vandermonde formunda olduğu için tek bir çözümü vardır. Bu yüzden N düğüm sayısı çok büyük olursa, matris tekilleşecek yani tersinin alınması güçleşecektir. Bu da çözümleri zorlaştıracaktır.

Tekilliliğin boyutlarını ölçmek için, ağırlıklı katsayılar, değişik sayıda düğüm noktaları için eşit aralıklı düğüm noktaları kullanılarak hesaplanmıştır. Bu

hesaplamalardan, alınabilecek maksimum düğüm nokta sayısının 22 olduğu ortaya çıkmıştır. Bu sayı aşıldığında, lineer cebirsel denklem takımları tekil hale gelir ve çözülemez. Genel olarak bu yaklaşımda düğüm sayısı 13'ü geçmemelidir.

Aşağıda 3 düğümlü elemanın birinci dereceden türevleri için ağırlıklı katsayılar matrisinin nasıl elde edildiği gösterilmiştir (Jang 1987). Denklem (2.4) göz önüne alınarak;

$v = 1$ için;

$$\sum_{j=1}^3 a_{ij}^{(1)} x_j^0 = 0 \quad (2.5)$$

veya daha açık ifade ile;

$$a_{11}^{(1)} + a_{12}^{(1)} + a_{13}^{(1)} = 0, \quad i = 1 \quad (2.6)$$

$$a_{21}^{(1)} + a_{22}^{(1)} + a_{23}^{(1)} = 0, \quad i = 2 \quad (2.7)$$

$$a_{31}^{(1)} + a_{32}^{(1)} + a_{33}^{(1)} = 0, \quad i = 3 \quad (2.8)$$

olarak elde edilir. $v = 2$ için;

$$\sum_{j=1}^3 a_{ij}^{(1)} x_j = x_i^0 \quad (2.9)$$

veya daha açık ifade ile;

$$a_{11}^{(1)} x_1 + a_{12}^{(1)} x_2 + a_{13}^{(1)} x_3 = 1, \quad i = 1 \quad (2.10)$$

$$a_{21}^{(1)} x_1 + a_{22}^{(1)} x_2 + a_{23}^{(1)} x_3 = 1, \quad i = 2 \quad (2.11)$$

$$a_{31}^{(1)}x_1 + a_{32}^{(1)}x_2 + a_{33}^{(1)}x_3 = 1, \quad i = 3 \quad (2.12)$$

olarak elde edilir. $v = 3$ için;

$$\sum_{j=1}^3 a_{ij}^{(1)}x_j^2 = 2x_i \quad (2.13)$$

veya daha açık ifade ile;

$$a_{11}^{(1)}x_1^2 + a_{12}^{(1)}x_2^2 + a_{13}^{(1)}x_3^2 = 2x_1, \quad i = 1 \quad (2.14)$$

$$a_{21}^{(1)}x_1^2 + a_{22}^{(1)}x_2^2 + a_{23}^{(1)}x_3^2 = 2x_2, \quad i = 2 \quad (2.15)$$

$$a_{31}^{(1)}x_1^2 + a_{32}^{(1)}x_2^2 + a_{33}^{(1)}x_3^2 = 2x_3, \quad i = 3 \quad (2.16)$$

olarak elde edilir. Denklem (2.6), (2.7), (2.8); (2.10), (2.11), (2.12) ve (2.14), (2.15), (2.16) matris formunda aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_{11}^{(1)} \\ a_{12}^{(1)} \\ a_{13}^{(1)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2x_1 \end{Bmatrix} \quad (2.17)$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_{21}^{(1)} \\ a_{22}^{(1)} \\ a_{23}^{(1)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2x_2 \end{Bmatrix} \quad (2.18)$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_{31}^{(1)} \\ a_{32}^{(1)} \\ a_{33}^{(1)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2x_3 \end{Bmatrix} \quad (2.19)$$

Denklem (2.17), (2.18) ve (2.19) kısa şekilde aşağıdaki şekilde yazılabilir.

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 \end{bmatrix}}_{\underline{X}} \begin{Bmatrix} a_{i1}^{(1)} \\ a_{i2}^{(1)} \\ a_{i3}^{(1)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2x_i \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix} a_{i1}^{(1)} \\ a_{i2}^{(1)} \\ a_{i3}^{(1)} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2x_i \end{Bmatrix} \quad (2.20)$$

Düğüm noktalarının koordinatları, $x_1 = 0$; $x_2 = 1/2$; $x_3 = 1$ olarak kabul edildiğinde;

$$[x] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0,5 & 1 \\ 0^2 & 0,5^2 & 1^2 \end{bmatrix} \Rightarrow [x]^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 0 & 4 & -4 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \quad (2.21)$$

olarak bulunur. Buna göre Denklem (2.20);

$$\begin{Bmatrix} a_{i1}^{(1)} \\ a_{i2}^{(1)} \\ a_{i3}^{(1)} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 0 & 4 & -4 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2x_i \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} a_{i1}^{(1)} & a_{21}^{(1)} & a_{31}^{(1)} \\ a_{i2}^{(1)} & a_{22}^{(1)} & a_{32}^{(1)} \\ a_{i2}^{(1)} & a_{23}^{(1)} & a_{33}^{(1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 0 & 4 & -4 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad (2.22)$$

olarak elde edilir. Sonuç olarak;

$$\begin{bmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{21}^{(1)} & a_{31}^{(1)} \\ a_{12}^{(1)} & a_{22}^{(1)} & a_{32}^{(1)} \\ a_{13}^{(1)} & a_{23}^{(1)} & a_{33}^{(1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & -1 & 1 \\ 4 & 0 & -4 \\ -1 & 1 & 3 \end{bmatrix} \quad (2.23)$$

bulunur. Görüldüğü üzere ağırlıklı katsayılar, indislerine göre doğru yerde değildir. Matrisin transpozesi alındığında istenilen ağırlıklı katsayılar elde edilebilir (Jang 1987).

$$\begin{bmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & a_{13}^{(1)} \\ a_{21}^{(1)} & a_{22}^{(1)} & a_{23}^{(1)} \\ a_{31}^{(1)} & a_{32}^{(1)} & a_{33}^{(1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{21}^{(1)} & a_{31}^{(1)} \\ a_{12}^{(1)} & a_{22}^{(1)} & a_{32}^{(1)} \\ a_{13}^{(1)} & a_{23}^{(1)} & a_{33}^{(1)} \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} -3 & 4 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -4 & 3 \end{bmatrix} \quad (2.24)$$

Denklem (2.24), Bellman'ın birinci yaklaşımına göre üç düğümlü elemanın birinci derece türevleri için ağırlıklı katsayılar matrisidir.

İkinci derece türevlerin ağırlıklı katsayıları, Denklem (2.20)'deki ilk eşitliğin sağ tarafının bir kez daha türevinin alınmasıyla elde edilebilir. Denklem (2.20)'de, $[x]$ matrisi değiştirilmemelidir. Bunun sebebi, Denklem (2.3)'de verilen son eşitliğin sağ tarafının türevinin alınmasıyla bozulan eşitlik, sol taraftaki katsayılar matrisinin değiştirilmesiyle sağlanır. Yani $a_{ij}^{(2)}$, ikinci derece türevler için ağırlıklı katsayılar olmak üzere, Denklem (2.22);

$$\begin{cases} a_{11}^{(2)} \\ a_{12}^{(2)} \\ a_{13}^{(2)} \end{cases} = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 0 & 4 & -4 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{cases} 0 \\ 0 \\ 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} a_{11}^{(2)} & a_{21}^{(2)} & a_{31}^{(2)} \\ a_{12}^{(2)} & a_{22}^{(2)} & a_{32}^{(2)} \\ a_{13}^{(2)} & a_{23}^{(2)} & a_{33}^{(2)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 0 & 4 & -4 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix} \quad (2.25)$$

biçiminde değişir ve bunun sonucu olarak da;

$$\begin{bmatrix} a_{11}^{(2)} & a_{21}^{(2)} & a_{31}^{(2)} \\ a_{12}^{(2)} & a_{22}^{(2)} & a_{32}^{(2)} \\ a_{13}^{(2)} & a_{23}^{(2)} & a_{33}^{(2)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 4 & 4 \\ -8 & -8 & -8 \\ 4 & 4 & 4 \end{bmatrix} \quad (2.26)$$

bulunur.

Yine görüldüğü üzere ağırlıklı katsayılar, indislerine göre doğru yerde değildir. Matrisin transpozesi alındığında istenilen ağırlıklı katsayılar elde edilebilir.

$$\begin{bmatrix} a_{11}^{(2)} & a_{12}^{(2)} & a_{13}^{(2)} \\ a_{21}^{(2)} & a_{22}^{(2)} & a_{23}^{(2)} \\ a_{31}^{(2)} & a_{32}^{(2)} & a_{33}^{(2)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}^{(2)} & a_{21}^{(2)} & a_{31}^{(2)} \\ a_{12}^{(2)} & a_{22}^{(2)} & a_{32}^{(2)} \\ a_{13}^{(2)} & a_{23}^{(2)} & a_{33}^{(2)} \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 4 & -8 & 4 \\ 4 & -8 & 4 \\ 4 & -8 & 4 \end{bmatrix} \quad (2.27)$$

Denklem (2.27), Bellman'ın birinci yaklaşımına göre üç düğümlü elemanın ikinci derece türevleri için ağırlıklı katsayılar matrisidir.

2.1.1.2. Bellman'ın ikinci yaklaşımı

Bu yaklaşım birinci yaklaşımın aynısıdır. Fakat kullanılan test fonksiyonu farklıdır. Bu yaklaşımda kullanılan test fonksiyonu;

$$r_k(x) = \frac{L_N(x)}{(x - x_k)L_N^{(1)}(x_k)}, \quad k = 1, 2, \dots, N \quad (2.28)$$

şeklindedir. Burada $L_N(x)$, N . Dereceden Legendre polinomu ve $L_N^{(1)}$; $L_N(x)$ 'in birinci dereceden türevidir. x_k düğüm noktalarının seçimi, ötelenmiş Legendre polinomunun köklerine göre yapılır ve her düğüm noktası Denklem (2.28)'e uygulanır. Bellman vd (1972), $a_{ij}^{(1)}$ 'i hesaplamak için aşağıdaki basit cebirsel formülü bulmuşlardır.

$$a_{ij}^{(1)} = \frac{L_N^{(1)}(x_i)}{(x_i - x_j)L_N^{(1)}(x_j)}, \quad j \neq i \quad (2.29)$$

$$a_{ii}^{(1)} = \frac{1 - 2x_i}{2x_i(x_i - 1)} \quad (2.30)$$

Bilindiği üzere Legendre polinomu aşağıdaki biçimde ifade edilmektedir (WEB_1 2008).

$$L_N(x) = \frac{1}{2^N N!} \frac{d^N}{dx^N} \left[(x^2 - 1)^N \right], \quad x \in [-1, 1] \quad (2.31)$$

Ötelenmiş Legendre polimonu ise;

$$\tilde{L}_N(x) = ((N-1)!)^{-1} \frac{d^{N-1}}{dx^{N-1}} \left[(x^2 - x)^{N-1} \right], \quad x \in [0, 1] \quad (2.32)$$

şeklinde ifade edilmektedir (WEB_1 2008).

Düğüm noktaları bulunurken, ötelenmiş Legendre polinomu sıfıra eşitlenir. Elde edilen denklemin kökleri, düğüm noktalarının koordinatlarını verir. Düğüm noktaları dağılımlarına, Bölüm 2.7’de ayrıntılı olarak değinilmiştir.

Denklem (2.29) ve (2.30) kullanılarak ağırlıklı katsayılar hesaplanabilir. Bununla birlikte bu metot, birinci metot kadar kullanışlı değildir. Çünkü bu yaklaşımda düğüm noktalarının koordinatları rasgele seçilememektedir. N. dereceden ötelenmiş Legendre polinomunun köklerine göre seçilmektedir. Bu yüzden pratik kullanımda genellikle birinci yaklaşım kullanılmıştır. Ayrıca bu yaklaşımda N düğüm sayısı belirlendiğinde, ötelenmiş Legendre polinomunun kökleri de belirlenmiş olur. Böylece hangi tür fiziksel problemin ele alındığına bakılmaksızın düğüm noktalarının dağılımı sabit hale gelmiş olur. Bu durum, pratikte karşılaşılan değişik yapısal geometrik şekiller ve değişik sınır şartları için ihtiyaç duyulan farklı koordinatlı düğüm noktaları kullanılmadığından, metodun mekaniğin bazı problemlerine uygulanmasında engel teşkil eder.

Yukarıdaki anlatılanlardan anlaşılacağı üzere, ilk DQ metodunun her iki yaklaşımında da bazı eksiklikler mevcuttur. Bu eksiklikler, metodun mekanik sistemlerin analizine uygulanmasında bazı sınırlamalar oluşturur.

2.1.2. Quan ve Chang’ın yaklaşımı

Bellman’ın yaklaşımını geliştirebilmek için birçok çalışma yapılmıştır. Bunlardan birisi de Quan ve Chang’ın (1989a,b) yaklaşımıdır. Quan ve Chang (1989a,b), test fonksiyonu olarak aşağıdaki Lagrange interpolasyon polinomunu kullanmışlardır.

$$r_k(x) = \frac{M(x)}{(x - x_k)M^{(1)}(x_k)}, \quad k = 1, 2, \dots, N \quad (2.33)$$

Burada;

$$M(x) = (x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_N) \quad (2.34)$$

ve,

$$M^{(1)}(x_i) = \prod_{k=1, k \neq i}^N (x_i - x_k) \quad (2.35)$$

dir.

Denklem (2.33), N düğüm noktasına uygulandığında, $a_{ij}^{(1)}$ ağırlıklı katsayılarının hesaplanabilmesi için aşağıdaki formüller elde edilir.

$$a_{ij}^{(1)} = \frac{1}{x_j - x_i} \prod_{k=1, k \neq i, j}^N \frac{x_i - x_k}{x_j - x_k}, \quad j \neq i \quad (2.36)$$

$$a_{ii}^{(1)} = \sum_{k=1, k \neq i}^N \frac{1}{x_i - x_k} \quad (2.37)$$

Denklem (2.36) ve (2.37)'de düğüm noktalarının seçimi için herhangi bir kısıtlama yoktur.

2.1.3. Shu'nun genel yaklaşımı

Shu, yaklaşımında Bellman vd'den (1972) esinlenmiş ancak Quan ve Chang'ın (1989a,b) yaklaşımını da içine alan genel bir yaklaşım üretmiştir (Shu 1991, Shu ve Richards 1990). Shu, iki soru ile yola çıkmıştır. Birincisi, ağırlıklı katsayıları hesaplamak için neden iki yaklaşım kullanıyoruz? İkincisi, bu iki yaklaşım aynı ağırlıklı katsayıları mı veriyor? Eğer öyleyse, ağırlıklı katsayıları hesaplamak için başka yöntemler de olabilir. Bu soruların cevabını, polinom yaklaşımlarını ve lineer vektör uzayını kullanarak vermiştir.

Diferansiyel denklemlerin (DD) çözümlerine doğru olarak yaklaşabilmek için yüksek mertebeli bir polinom kullanılmalıdır. Burada polinomun derecesi N-1 olarak alınmıştır.

Eğer $f(x)$, bir diferansiyel denklemin çözümü ise, genel olarak çözüm fonksiyonu aşağıdaki gibi verilir.

$$f(x) \approx P_N(x) \approx \sum_{k=0}^{N-1} c_k x^k \quad (2.38)$$

burada c_k sabittir. $P_N(x)$, N boyutlu V_N lineer vektör uzayının skaler çarpım ve vektörel toplamından oluşur. Lineer vektör uzayı V_N , lineer bağımsız $1, x, x^2, \dots, x^{N-1}$ olarak verilmiştir. Yani;

$$s_k(x) = x^{k-1}, \quad k = 1, 2, \dots, N \quad (2.39)$$

olarak da ifade edilebilir.

DD'nin çözümü için düğüm noktalarındaki fonksiyonun değerlerini bilmek gerekir. $[a, b]$ kapalı aralığında, N düğüm sayısına ait koordinatlar $a = x_1, x_2, \dots, x_N = b$ olmak üzere x_i düğüm noktasındaki fonksiyonun değeri, $f(x_i)$ 'dir. Denklem (2.38)'deki sabitler aşağıdaki denklem sistemi ile belirlenir.

$$\begin{cases} c_0 + c_1 x_1 + c_2 x_1^2 + \dots + c_{N-1} x_1^{N-1} = f(x_1) \\ c_0 + c_1 x_2 + c_2 x_2^2 + \dots + c_{N-1} x_2^{N-1} = f(x_2) \\ \dots \\ c_0 + c_1 x_N + c_2 x_N^2 + \dots + c_{N-1} x_N^{N-1} = f(x_N) \end{cases} \quad (2.40)$$

Denklem (2.40) Vandermonde formundadır ve tekil değildir. Denklem (2.38)'in c_0, c_1, \dots, c_{N-1} katsayıları için tek bir çözüm vardır. Sabitler hesaplandığında polinom elde edilmiş olur. Diğer taraftan eğer N sayısı büyük olursa, matris tekilleşeceğinden tersini almak zor olur. Bu durumda, c_0, c_1, \dots, c_{N-1} katsayılarını bulmak da zorlaşır.

Denklem (2.38)'deki vektör bir anlamda polinomdur ve aşağıdaki polinomlar alınabilir.

$$r_k(x) = x^{k-1}, \quad k = 1, 2, \dots, N \quad (2.41)$$

$$r_k(x) = \frac{L_N(x)}{(x - x_k) L_N^{(1)}(x_k)}, \quad k = 1, 2, \dots, N \quad (2.42)$$

$$r_k(x) = \frac{M(x)}{(x - x_k) M^{(1)}(x_k)}, \quad k = 1, 2, \dots, N \quad (2.43)$$

$$r_1(x) = 1, \quad r_k(x) = (x - x_{k-1}) r_{k-1}(x), \quad k = 2, 3, \dots, N \quad (2.44)$$

Burada $L_N(x)$, N . dereceden Legendre polinomudur. $M(x)$, Denklem (2.34)'de verilmişti. Denklem (2.42) ve Denklem (2.43)'de Legendre ve Lagrange polinomları kullanılmıştır. Denklem (2.44) Newton interpolasyon polinomudur. Denklem (2.42) ile Denklem (2.43) arasında, kullanım bakımından tek fark, düğüm noktalarının dağılımıdır. Denklem (2.42), Denklem (2.43)'ün özel bir halidir ve Legendre düğüm noktaları için geçerlidir.

Denklem (2.41), Bellman'ın birinci yaklaşımıdır. Denklem (2.42), Bellman'ın ikinci yaklaşımıdır. Yani Bellman'ın iki yaklaşımında kullandığı test fonksiyonları aslında, V_N lineer vektör uzayındaki iki polinomdur. Denklem (2.1)'deki a_{ij} bir lineer operatördür. Lineer vektör uzayının özelliği olarak bilinmektedir ki, Denklem (2.1)'deki gibi bir lineer operatörü, bir polinomu sağlıyorsa, diğer polinomlar da sağlar. Bundan dolayı ağırlıklı katsayılar, test fonksiyonunun seçimine bağlı değildir. Diğer taraftan Bellman'ın iki yaklaşımındaki tek farkın, test fonksiyonu olduğu bilinmektedir. Test fonksiyonları polinomlarla eşdeğerdir. Bundan dolayı iki ayrı polinom kullanmak demek, iki ayrı ağırlıklı katsayılar hesap etme yöntemi kullanmak demektir. Lineer vektör uzayından birçok polinom elde edilebilir, yani ağırlıklı katsayıların hesaplanmasında birçok yaklaşım yapılabilir.

Eğer temel polinom olarak Denklem (2.41) alınır, Denklem (2.3)'de verilen Bellman'ın birinci yaklaşımı elde edilir. Eğer temel polinom olarak Denklem (2.42) alınır, Denklem (2.29) ve Denklem (2.30)'da verilen Bellman'ın ikinci yaklaşımı elde edilir. O yüzden burada genelleştirme için iki temel polinom alınmıştır (Shu 2000). Lagrange interpolasyon polinomu (Denklem (2.43)) birinci temel polinom olarak alınmıştır. Basitleştirmek için;

$$M(x) = N(x, x_k)(x - x_k), \quad k = 1, 2, \dots, N \quad (2.45)$$

dönüşümü yapılır. Burada,

$$N(x_i, x_j) = M^{(1)}(x_i) \delta_{ij} \quad (2.46)$$

dir. Burada δ_{ij} , Kronecker operatörüdür ve her $i = j$ değerinde 1 ve her $i \neq j$ değerinde 0 değeri alır. Denklem (2.45), Denklem (2.43)'de yerine konulduğunda;

$$r_k(x) = \frac{N(x, x_k)}{M^{(1)}(x_k)}, \quad k = 1, 2, \dots, N \quad (2.47)$$

elde edilir.

Denklem (2.47), Denklem (2.1)'den faydalanılarak,

$$a_{ij}^{(1)} = \frac{N^{(1)}(x_i, x_j)}{M^{(1)}(x_j)} \quad (2.48)$$

şeklinde yazılabilir (Shu 2000).

Denklem (2.48)'deki $M^{(1)}(x_j)$, Denklem (2.35)'den kolaylıkla bulunabilir. $N^{(1)}(x_i, x_j)$ 'nin hesaplanması için, Denklem (2.45)'in x 'e göre türevi alınarak aşağıdaki genel tekrarlamalı formül elde edilir (Shu 2000).

$$M^{(r)}(x) = N^{(r)}(x, x_k)(x - x_k) + rN^{(r-1)}(x, x_k), \quad r = 1, 2, \dots, N-1; k = 1, 2, \dots, N \quad (2.49)$$

Burada $M^{(r)}(x)$ ve $N^{(r)}(x, x_k)$, $M(x)$ ve $N(x, x_k)$ 'nin r . dereceden türevlerini ifade etmektedir. Denklem (2.49)'da $r = 1$ alındığında, $N^{(r-1)}(x, x_k)$ değeri her $i \neq j$

noktalarında, Denklem (2.46)'dan $M^{(1)}(x_i)\delta_{ij}$ 'ye eşit olacağından ve $i \neq j$ şartında δ_{ij} sıfıra gittiğinden $N^{(1)}(x_i, x_j)$ aşağıdaki biçimde elde edilir.

$$N^{(1)}(x_i, x_j) = \frac{M^{(1)}(x_i)}{x_i - x_j}, \quad i \neq j \quad (2.50)$$

Ayrıca yine Denklem (2.49)'da $x = x_k$ alındığında, $(x - x_k)$ ifadesi sıfıra gittiğinden $N^{(1)}(x_i, x_i)$;

$$N^{(1)}(x_i, x_i) = \frac{M^{(2)}(x_i)}{2} \quad (2.51)$$

olarak elde edilir. Denklem (2.50) ve (2.51), Denklem (2.48)'de yerine yazıldığında;

$$a_{ij}^{(1)} = \frac{M^{(1)}(x_i)}{(x_i - x_j) M^{(1)}(x_j)}, \quad i \neq j \quad (2.52)$$

$$a_{ii}^{(1)} = \frac{M^{(2)}(x_i)}{2M^{(1)}(x_i)} \quad (2.53)$$

denklemleri elde edilir.

Denklem (2.52)'den görüldüğü üzere, x_i verildiğinde $M^{(1)}(x_i)$ Denklem (2.35)'den kolaylıkla bulunabileceğinden, $i \neq j$ için $a_{ij}^{(1)}$ 'de kolaylıkla bulunabilir. Fakat Denklem (2.53)'teki $a_{ii}^{(1)}$ 'in hesaplanması, $M^{(2)}(x_i)$ ikinci dereceden türevin hesabını gerektirdiğinden kolay değildir. Zorluk, ikinci bir temel polinom kullanılarak çözülür. Lineer vektör uzayının özelliğine göre, eğer bir temel polinom Denklem (2.1)'deki gibi bir lineer operatörü sağlarsa, başka bir temel polinom da sağlar. Sonuç olarak, Lagrange interpolasyon polinomu (Denklem (2.43)) $a_{ij}^{(1)}$ lineer operatörünü sağlıyorsa, başka bir temel polinomda (Denklem (2.41)) sağlar. Bu yüzden $a_{ij}^{(1)}$, $k=1$ iken, x^{k-1} temel

polinomundan elde edilen aşağıdaki denklemi sağlar. Yani Denklem (2.3)'ün ilk şartından;

$$\sum_{j=1}^N a_{ij}^{(1)} = 0 \quad \text{veya} \quad a_{ii}^{(1)} = - \sum_{j=1, j \neq i}^N a_{ij}^{(1)} \quad (2.54)$$

elde edilir.

Sonuç olarak Shu'nun (1991) yaklaşımına göre ağırlıklı katsayılar matrisi Denklem (2.52) ve (2.54)'den elde edilir.

2.2. İki veya Daha Yüksek Dereceden Türevler İçin Ağırlıklı Katsayıların Hesaplanması

2.2.1. İkinci dereceden türevlerin ağırlıklı katsayıları

İkinci derece türevlerin ağırlıklı katsayılarının hesabında Denklem (2.1)'e benzer biçimde $f^{(2)}(x) = \frac{d^2 f(x)}{dx^2}$ olmak üzere aşağıdaki yaklaşım verilebilir.

$$f^{(2)}(x_i) = \sum_{j=1}^N a_{ij}^{(2)} f(x_j), \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (2.55)$$

Denklem (2.55)'deki $f^{(2)}(x_i)$, x_i noktasındaki $f(x)$ 'in ikinci dereceden türevidir. $a_{ij}^{(2)}$, ikinci dereceden türevler için ağırlıklı katsayılarıdır. Görüldüğü üzere Denklem (2.55) lineer operatördür ve Denklem (2.1)'in benzeridir. İkisi arasındaki tek fark, farklı ağırlıklı katsayıları kullanmalarıdır. Aşağıda $a_{ij}^{(2)}$ 'nin hesaplanması için iki yaklaşım verilmiştir.

2.2.1.1. Quan ve Chang'ın yaklaşımı

Quan ve Chang (1989a,b) bu yaklaşımlarında, Lagrange interpolasyon polinomunu test fonksiyonu olarak almışlardır. Buna göre ikinci dereceden türevler için ağırlıklı katsayıları, aşağıdaki biçimde vermişlerdir.

$$a_{ij}^{(2)} = \frac{2}{x_j - x_i} \left(\prod_{k=1, k \neq i, j}^N \frac{x_i - x_k}{x_j - x_k} \right) \left(\sum_{l=1, l \neq i, j}^N \frac{1}{x_i - x_l} \right), \quad i \neq j \quad (2.56)$$

$$a_{ii}^{(2)} = 2 \sum_{k=1, k \neq i}^{N-1} \left[\frac{1}{x_i - x_k} \left(\sum_{l=k+1, l \neq i}^N \frac{1}{x_i - x_l} \right) \right] \quad (2.57)$$

2.2.1.2. Shu'nun genel yaklaşımı

Birinci dereceden türevdeki analize benzer olarak Shu'nun (1991) genel yaklaşımı, polinom yaklaşımı ve lineer vektör uzayı analizlerine dayanır. Temel polinom olarak Denklem (2.41) ve Denklem (2.43) kullanılmıştır. Denklem (2.48)'e benzer biçimde;

$$a_{ij}^{(2)} = \frac{N^{(2)}(x_i, x_j)}{M^{(1)}(x_j)} \quad (2.58)$$

yazılabilir.

Diğer taraftan Denklem (2.49)'dan, Denklem (2.50) ve (2.51)'e benzer biçimde;

$$N^{(2)}(x_i, x_j) = \frac{M^{(2)}(x_i) - 2N^{(1)}(x_i, x_j)}{x_i - x_j}, \quad i \neq j \quad (2.59)$$

$$N^{(2)}(x_i, x_i) = \frac{M^{(3)}(x_i)}{3} \quad (2.60)$$

elde edilir.

Yine Denklem (2.59) ve (2.60)'dan, Denklem (2.52) ve (2.53)'e benzer biçimde;

$$a_{ij}^{(2)} = \frac{M^{(2)}(x_i) - 2N^{(1)}(x_i, x_j)}{(x_i - x_j)M^{(1)}(x_j)}, \quad i \neq j \quad (2.61)$$

$$a_{ii}^{(2)} = \frac{M^{(3)}(x_i)}{3M^{(1)}(x_i)} \quad (2.62)$$

denklemleri bulunur.

Denklem (2.52) ve Denklem (2.53), Denklem (2.61)'de yerine yazıldığında;

$$a_{ij}^{(2)} = 2a_{ij}^{(1)} \left(a_{ii}^{(1)} - \frac{1}{x_i - x_j} \right), \quad i \neq j \quad (2.63)$$

elde edilir.

$i \neq j$ iken Denklem (2.63)'den $a_{ij}^{(2)}$ 'yi hesaplamak kolaydır. Fakat Denklem (2.62)'deki $a_{ii}^{(2)}$ 'yi elde etmek için gerekli olan 3. dereceden $M^{(3)}(x_i)$ türevini hesaplamak zordur. Zorluk lineer vektör uzayının özelliğinden faydalanılarak giderilir. Birinci dereceden türevdeki analizine benzer biçimde, $a_{ij}^{(2)}$ lineer operatörünü Lagrange interpolasyon polinomu sağlıyorsa, başka bir temel polinom da $(x^{k-1}, k=1,2,\dots,N)$ sağlar. Bu yüzden $a_{ij}^{(2)}$, $k=1$ 'de x^{k-1} temel polinomu için türetilen aşağıdaki formülü doğrular.

$$\sum_{j=1}^N a_{ij}^{(2)} = 0 \quad \text{veya} \quad a_{ii}^{(2)} = - \sum_{j=1, j \neq i}^N a_{ij}^{(2)} \quad (2.64)$$

Shu'nun genel yaklaşımında, $i \neq j$ için $a_{ij}^{(2)}$, Denklem (2.63)'den ve $a_{ii}^{(2)}$, Denklem (2.64)'den hesaplanır.

2.2.2. Yüksek dededen türevler için Shu'nun tekrarlamalı formülü

Yüksek dereceden türevlerin ağırlıklı katsayılarının hesabında $f^{(r)}(x) = \frac{d^r f(x)}{dx^r}$ olmak üzere aşağıdaki iki lineer operatör uygulanır.

$$f^{(r)}(x_i) = \sum_{j=1}^N a_{ij}^{(r)} f(x_j), \quad i = 1, 2, \dots, N; r = 2, 3, \dots, N-1 \quad (2.65)$$

$$f^{(r-1)}(x_i) = \sum_{j=1}^N a_{ij}^{(r-1)} f(x_j), \quad i = 1, 2, \dots, N; r = 2, 3, \dots, N-1 \quad (2.66)$$

Burada $f^{(r)}(x_i)$ ve $f^{(r-1)}(x_i)$, x_i noktasındaki $f(x)$ 'in x 'e göre r . ve $(r-1)$. dereceden türevleridir. $a_{ij}^{(r)}$ ve $a_{ij}^{(r-1)}$, r . ve $(r-1)$. dereceden türevlere ait ağırlıklı katsayılarıdır. $a_{ij}^{(r)}$ 'yi elde etmek için iki temel polinom kullanılacaktır. Bu temel polinomlar, birinci ve ikinci dereceden türevlerin ağırlıklı katsayılarının elde edilmesinde de kullanılan Denklem (2.41) ve (2.43)'dür. Denklem (2.58)'e benzer biçimde, Denklem (2.65) ve (2.66) için;

$$a_{ij}^{(r)} = \frac{N^{(r)}(x_i, x_j)}{M^{(1)}(x_j)} \quad (2.67)$$

$$a_{ij}^{(r-1)} = \frac{N^{(r-1)}(x_i, x_j)}{M^{(1)}(x_j)} \quad (2.68)$$

denklemleri elde edilir.

Denklem (2.68),

$$N^{(r-1)}(x_i, x_j) = a_{ij}^{(r-1)} M^{(1)}(x_j) \quad (2.69)$$

olarak da ifade edilebilir.

Denklem (2.69), her i ve j düğüm noktaları için geçerlidir. Diğer taraftan birinci ve ikinci dereceden türevler için uygulanan işleme benzer biçimde Denklem (2.49)'dan, Denklem (2.59) ve (2.60)'a benzer biçimde;

$$N^{(r)}(x_i, x_j) = \frac{M^{(r)}(x_i) - rN^{(r-1)}(x_i, x_j)}{x_i - x_j}, \quad i \neq j \quad (2.70)$$

$$N^{(r)}(x_i, x_i) = \frac{M^{(r+1)}(x_i)}{r+1} \quad (2.71)$$

$$N^{(r-1)}(x_i, x_i) = \frac{M^{(r)}(x_i)}{r} \quad (2.72)$$

elde edilir.

Denklem (2.72)'deki $M^{(r)}(x_i)$, Denklem (2.70)'de yerine yazıldığında;

$$N^{(r)}(x_i, x_j) = \frac{r \left[N^{(r-1)}(x_i, x_i) - N^{(r-1)}(x_i, x_j) \right]}{x_i - x_j}, \quad i \neq j \quad (2.73)$$

elde edilir.

Denklem (2.73), Denklem (2.69) kullanılarak basitleştirildiğinde;

$$N^{(r)}(x_i, x_j) = \frac{r \left[a_{ii}^{(r-1)} M^{(1)}(x_i) - a_{ij}^{(r-1)} M^{(1)}(x_j) \right]}{x_i - x_j}, \quad i \neq j \quad (2.74)$$

elde edilir.

Denklem (2.74), Denklem (2.52) kullanılarak Denklem (2.67)'de yerine yazıldığında, Denklem (2.63)'e benzer biçimde;

$$a_{ij}^{(r)} = r \left(a_{ij}^{(1)} a_{ii}^{(r-1)} - \frac{a_{ij}^{(r-1)}}{x_i - x_j} \right), \quad i, j = 1, 2, \dots, N; r = 2, 3, \dots, N-1 \quad (2.75)$$

denklemini elde edilir. Burada $a_{ij}^{(1)}$, birinci dereceden türevlerin ağırlıklı katsayılarıdır. $a_{ii}^{(r)}$ 'yi elde etmek için; Denklem (2.71), Denklem (2.67)'de yerine yazıldığında, Denklem (2.62)'ye benzer biçimde;

$$a_{ii}^{(r)} = \frac{M^{(r+1)}(x_i)}{(r+1)M^{(1)}(x_i)}, \quad i, j = 1, 2, \dots, N; r = 2, 3, \dots, N-1 \quad (2.76)$$

bulunur.

Görüldüğü üzere Denklem (2.75)'den, $i \neq j$ için ağırlıklı katsayılar $(a_{ij}^{(r)})$, kolaylıkla hesap edilebilir. Ancak Denklem (2.76)'daki ağırlıklı katsayıların $(a_{ii}^{(r)})$ hesap edilmesi kolay değildir. Yine bu zorluk lineer vektör uzayının kullanımıyla giderilecektir. N boyutlu lineer vektör uzayı analizinde, $a_{ij}^{(r)}$ lineer operatörünü, Lagrange interpolasyon polinomu sağlıyorsa, başka bir temel polinom da $(x^{k-1}, k = 1, 2, \dots, N)$ sağlar. Bu yüzden $a_{ij}^{(r)}$, $k = 1$ iken x^{k-1} temel polinomundan elde edilen aşağıdaki denklemi sağlar.

$$\sum_{j=1}^N a_{ij}^{(r)} = 0 \quad \text{veya} \quad a_{ii}^{(r)} = - \sum_{j=1, j \neq i}^N a_{ij}^{(r)} \quad (2.77)$$

Buna göre $a_{ii}^{(r)}$, Denklem (2.77)'den ve $i \neq j$ için $a_{ij}^{(r)}$ ise Denklem (2.75)'den hesaplanabilir.

2.2.3. Matris çarpımı yaklaşımı

Diferansiyel operatörün tanımından aşağıdaki eşitlik elde edilebilir (Shu 2000).

$$\frac{d^2 f}{dx^2} = \frac{d}{dx} \left(\frac{df}{dx} \right) \quad (2.78)$$

Basitlik olması bakımından $\frac{d^2f}{dx^2}$, $f^{(2)}(x)$ ve $\frac{df}{dx}$ 'de $f^{(1)}(x)$ ile gösterilsin. DQ formu, Denklem (2.78)'in sol tarafına uygulandığında;

$$f^{(2)}(x_i) = \sum_{j=1}^N a_{ij}^{(2)} f(x_j), \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (2.79)$$

denklemini elde edilir.

DQ formu, Denklem (2.78)'in sağ tarafına uygulandığında ise;

$$f^{(2)}(x_i) = \sum_{k=1}^N a_{ik}^{(1)} f_x^{(1)}(x_k) = \sum_{k=1}^N a_{ik}^{(1)} \sum_{j=1}^N a_{kj}^{(1)} f(x_j), \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (2.80)$$

elde edilir ve sonuç olarak;

$$f^{(2)}(x_i) = \sum_{j=1}^N \left[\sum_{k=1}^N a_{ik}^{(1)} a_{kj}^{(1)} \right] f(x_j), \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (2.81)$$

denklemini bulunur.

Denklem (2.79) ve Denklem (2.81) birleştirildiğinde;

$$a_{ij}^{(2)} = \sum_{k=1}^N a_{ik}^{(1)} a_{kj}^{(1)} \quad (2.82)$$

denklemini elde edilir. Buna göre birinci ve ikinci dereceden türevler için ağırlıklı katsayılar matrisleri;

$$\left[\mathbf{A}^{(1)} \right] = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_{11}^{(1)} & \mathbf{a}_{12}^{(1)} & \dots & \mathbf{a}_{1N}^{(1)} \\ \mathbf{a}_{21}^{(1)} & \mathbf{a}_{22}^{(1)} & \dots & \mathbf{a}_{2N}^{(1)} \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \mathbf{a}_{N1}^{(1)} & \mathbf{a}_{N2}^{(1)} & \dots & \mathbf{a}_{NN}^{(1)} \end{bmatrix}, \quad \left[\mathbf{A}^{(2)} \right] = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_{11}^{(2)} & \mathbf{a}_{12}^{(2)} & \dots & \mathbf{a}_{1N}^{(2)} \\ \mathbf{a}_{21}^{(2)} & \mathbf{a}_{22}^{(2)} & \dots & \mathbf{a}_{2N}^{(2)} \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \mathbf{a}_{N1}^{(2)} & \mathbf{a}_{N2}^{(2)} & \dots & \mathbf{a}_{NN}^{(2)} \end{bmatrix} \quad (2.83)$$

olmak üzere, Denklem (2.82) aşağıdaki şekilde de yazılabilir.

$$\left[\mathbf{A}^{(2)} \right] = \left[\mathbf{A}^{(1)} \right] \left[\mathbf{A}^{(1)} \right] \quad (2.84)$$

Denklem (2.84), ikinci derece türevlere ait ağırlıklı katsayılar matrisinin, birinci derece türevler için elde edilen ağırlıklı katsayılar matrisinin kendisiyle çarpılarak elde edilebileceğini göstermektedir.

Benzer biçimde $f(x)$ 'in r . dereceden türevi için;

$$\frac{d^{(r)}f}{dx^{(r)}} = \frac{d}{dx} \left(\frac{d^{(r-1)}f}{dx^{(r-1)}} \right) = \frac{d^{(r-1)}}{dx^{(r-1)}} \left(\frac{df}{dx} \right) \quad (2.85)$$

yazılabilir. $\left[\mathbf{A}^{(r)} \right]$ ve $\left[\mathbf{A}^{(r-1)} \right]$, r . ve $(r-1)$. dereceden türevler için ağırlıklı katsayılar matrislerini göstermek üzere;

$$\left[\mathbf{A}^{(r)} \right] = \left[\mathbf{A}^{(1)} \right] \left[\mathbf{A}^{(r-1)} \right] = \left[\mathbf{A}^{(r-1)} \right] \left[\mathbf{A}^{(1)} \right], \quad r = 2, 3, \dots, N-1 \quad (2.86)$$

elde edilir.

Denklem (2.86) basit görülebilir ancak Denklem (2.75) ve (2.77) ile kıyaslandığında daha fazla işleme ihtiyaç duymaktadır. Denklem (2.86)'da her bir ağırlıklı katsayı için, N çarpım ve $(N-1)$ toplama işlemi gereklidir. Demek ki toplam $(2N-1)$ adet işleme ihtiyaç vardır. Denklem (2.75) ise, iki çarpma, bir bölme ve bir çıkarma işlemini

gerektirmektedir. Demek ki her bir diyagonal olmayan ağırlıklı katsayının hesaplanabilmesi için dört adet aritmetiksel işlem gereklidir. Denklem (2.77)'deki diyagonal ağırlıklı katsayılarının hesaplanabilmesi için ise $(N-2)$ çıkarma işlemi gereklidir. Bunun anlamı, Denklem (2.75) ve Denklem (2.77) için gerekli aritmetiksel işlem, Denklem (2.86) için gerekli olandan daha azdır.

2.3. Fourier Açılımını Esas Alan Diferansiyel Quadrature (FDQ) ve Harmonik Diferansiyel Quadrature (HDQ) ile Ağırlıklı Katsayıların Hesabı

Yukarıdaki bölümlerde anlatılan ağırlıklı katsayıların elde edilmesinde kullanılan yöntemlerin tamamında, polinom yaklaşımını esas alan Diferansiyel Quadrature (PDQ) kullanılmıştır. Polinom yaklaşımı, birçok mühendislik problemlerinin çözümü için oldukça uygundur. Ancak özellikle periyodik davranış gösteren bazı problemlerin çözümünde polinom yaklaşımı en iyi sonucu vermez. Fourier açılımı yaklaşımı bu tür problemler de daha iyi sonuçlar verebilmektedir. Bu yüzden ilk defa Striz vd (1995), DQ uygulamasında test fonksiyonu olarak Harmonik fonksiyon kullanmışlardır. Striz vd (1995), Bellman vd'nin (1972) birinci yaklaşımında kullandığı cebirsel denklem takımını çözerek ağırlıklı katsayıları elde etmişlerdir. Bununla beraber standart DQ'dakine benzer biçimde bazı zorluklarla karşılaşmışlardır. Bunun üzerine Shu ve Xue (1997), Fourier seri açılımını GDQM kullanarak HDQ adı altında, plakların serbest titreşim analizlerine başarıyla uygulamışlardır. Ayrıca Shu ve Chew (1997), aynı metodu FDQ başlığı altında Helmholtz problemlerine uygulamışlardır. Aralarındaki tek fark, test fonksiyonunda π 'nin alınıp alınmamasıdır.

FDQ ve HDQ metotlarının anlatılmasında, basitlik olması bakımından bir boyutlu problem ele alınacaktır. Ayrıca anlatımda, FDQ ve HDQ birbirine çok benzediğinden, aynı denklem iki metot için arka arkaya verilerek aralarındaki küçük fark gösterilecektir.

$x \in [a, b]$ aralığında bir boyutlu bir $f(x)$ fonksiyonu ele alınsın. Çalışma alanının, x_1, x_2, \dots, x_N düğüm noktaları koordinatlarına sahip, N düğüm sayısına ayrıldığı

varsayalım. Buna göre herhangi bir x_i düğümündeki $f(x)$ fonksiyonunun birinci ve ikinci dereceden türevi $f^{(1)}(x) = \frac{df(x)}{dx}$ ve $f^{(2)}(x) = \frac{d^2f(x)}{dx^2}$ olmak üzere;

$$f^{(1)}(x_i) = \sum_{j=1}^N a_{ij}^{(1)} f(x_j), \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (2.87)$$

$$f^{(2)}(x_i) = \sum_{j=1}^N a_{ij}^{(2)} f(x_j), \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (2.88)$$

olarak verilir. Burada $a_{ij}^{(1)}$ ve $a_{ij}^{(2)}$ sırasıyla birinci ve ikinci dereceden türevlere ait ağırlıklı katsayılarıdır. $f(x)$ fonksiyonu, polinom yaklaşımına göre alındığında, birinci ve ikinci dereceden türevler için ağırlıklı katsayılar, Denklem (2.52), (2.54), (2.63) ve (2.64)'de verildiği şekilde elde edilmekteydi. Bu bölümde $f(x)$ fonksiyonu, $0 \leq x \leq 1$ aralığında Fourier seri açılımı ve Harmonik olarak alınacaktır. Buna göre $f(x)$ fonksiyonu;

$$f(x) = c_0 + \sum_{k=1}^{N/2} (c_k \cos(kx) + d_k \sin(kx)) \quad (\text{FDQ}) \quad (2.89)$$

$$f(x) = c_0 + \sum_{k=1}^{N/2} (c_k \cos(k\pi x) + d_k \sin(k\pi x)) \quad (\text{HDQ}) \quad (2.90)$$

şeklinde verilmektedir (Shu ve Chew 1997, Shu ve Xue 1997). Bölüm 2.1.3.'de anlatılan Shu'nun (1991) genel yaklaşımına benzer biçimde, burada da 2 tane temel polinom alınacaktır. Bunlardan birincisi, Denklem (2.41)'e benzer biçimde;

$$1, \sin(x), \cos(x), \sin(2x), \cos(2x), \dots, \sin(Nx/2), \cos(Nx/2) \quad (\text{FDQ}) \quad (2.91)$$

$$1, \sin(\pi x), \cos(\pi x), \sin(2\pi x), \cos(2\pi x), \dots, \sin(N\pi x/2), \cos(N\pi x/2) \quad (\text{HDQ}) \quad (2.92)$$

şeklindedir. İkinci temel polinom ise Denklem (2.43)'e benzer biçimde Lagrange interpolasyon trigonometrik polinomudur ve aşağıda verilmiştir.

$$r_k(x) = \frac{M(x)}{P(x_k) \sin\left(\frac{x-x_k}{2}\right)}, \quad k = 0, 1, \dots, N \quad (\text{FDQ}) \quad (2.93)$$

$$r_k(x) = \frac{M(x)}{P(x_k) \sin\left(\frac{x-x_k}{2} \pi\right)}, \quad k = 0, 1, \dots, N \quad (\text{HDQ}) \quad (2.94)$$

Daha açık bir ifade ile;

$$r_k(x) = \frac{\sin\left(\frac{x-x_0}{2}\right) \dots \sin\left(\frac{x-x_{k-1}}{2}\right) \sin\left(\frac{x-x_{k+1}}{2}\right) \dots \sin\left(\frac{x-x_N}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x_k-x_0}{2}\right) \dots \sin\left(\frac{x_k-x_{k-1}}{2}\right) \sin\left(\frac{x_k-x_{k+1}}{2}\right) \dots \sin\left(\frac{x_k-x_N}{2}\right)}, \quad k = 0, 1, \dots, N \quad (\text{FDQ}) \quad (2.95)$$

$$r_k(x) = \frac{\sin\left(\frac{x-x_0}{2} \pi\right) \dots \sin\left(\frac{x-x_{k-1}}{2} \pi\right) \sin\left(\frac{x-x_{k+1}}{2} \pi\right) \dots \sin\left(\frac{x-x_N}{2} \pi\right)}{\sin\left(\frac{x_k-x_0}{2} \pi\right) \dots \sin\left(\frac{x_k-x_{k-1}}{2} \pi\right) \sin\left(\frac{x_k-x_{k+1}}{2} \pi\right) \dots \sin\left(\frac{x_k-x_N}{2} \pi\right)}, \quad k = 0, 1, \dots, N \quad (\text{HDQ}) \quad (2.96)$$

olarak elde edilir. Denklem (2.93) ve (2.94)'deki $M(x)$, Denklem (2.34) ve (2.45)'e benzer biçimde;

$$M(x) = \prod_{k=0}^N \sin\left(\frac{x-x_k}{2}\right) = N(x, x_k) \sin\left(\frac{x-x_k}{2}\right) \quad (\text{FDQ}) \quad (2.97)$$

$$M(x) = \prod_{k=0}^N \sin\left(\frac{x-x_k}{2} \pi\right) = N(x, x_k) \sin\left(\frac{x-x_k}{2} \pi\right) \quad (\text{HDQ}) \quad (2.98)$$

olarak yazılabilir. Yine Denklem (2.35)'e benzer olarak;

$$N(x_i, x_i) = \prod_{k=0, k \neq i}^N \sin\left(\frac{x_i - x_k}{2}\right) = P(x_i) \quad (\text{FDQ}) \quad (2.99)$$

$$N(x_i, x_i) = \prod_{k=0, k \neq i}^N \sin\left(\frac{x_i - x_k}{2} \pi\right) = P(x_i) \quad (\text{HDQ}) \quad (2.100)$$

dir. Denklem (2.99) ve (2.100)'deki $P(x_i)$ ifadesi, Denklem (2.35)'deki $M^{(1)}(x_i)$ ifadesine benzemektedir. Ancak burada $P(x_i)$, $M^{(1)}(x_i)$ 'nin iki katı olarak verilmiştir (Shu ve Chew 1997, Shu ve Xue 1997). Bu ilişkinin nasıl elde edildiği Denklem (2.111) ve (2.112), ve üzerindeki tarif ile anlatılmıştır. Denklem (2.46)'ya benzer biçimde;

$$N(x_i, x_j) = N(x_i, x_i) \delta_{ij} \quad (2.101)$$

yazılabilir. Burada δ_{ij} Kronecker operatörüdür ve her $i = j$ değerinde 1 ve her $i \neq j$ değerinde 0 değeri alır. Denklem (2.47)'ye benzer biçimde, Denklem (2.97) ve (2.98)'in Denklem (2.93) ve (2.94)'de yerine yazılmasıyla aşağıdaki biçimde kısaltılabilir.

$$r_k(x) = \frac{N(x, x_k)}{P(x_k)} \quad (2.102)$$

Denklem (2.48) ve (2.58)'e benzer biçimde Denklem (2.102), Denklem (2.87) ve Denklem (2.88)'den faydalanılarak;

$$a_{ij}^{(1)} = \frac{N^{(1)}(x_i, x_j)}{P(x_j)} \quad (2.103)$$

$$a_{ij}^{(2)} = \frac{N^{(2)}(x_i, x_j)}{P(x_j)} \quad (2.104)$$

denklemleri elde edilir. Burada $N^{(1)}(x, x_k)$ ve $N^{(2)}(x, x_k)$ sırasıyla $N(x, x_k)$ 'nin birinci ve ikinci dereceden türevleridir. Denklem (2.103) ve (2.104)'den $a_{ij}^{(1)}$ ve $a_{ij}^{(2)}$ 'nin, $N^{(1)}(x_i, x_j)$ ve $N^{(2)}(x_i, x_j)$ 'in elde edilmesiyle bulunabileceği görülmektedir. $P(x_j)$, Denklem (2.99) ve (2.100)'den kolaylıkla elde edilebilir. $N^{(1)}(x_i, x_j)$ ve $N^{(2)}(x_i, x_j)$, Denklem (2.97) ve (2.98)'in arka arkaya türevi alınmasıyla elde edilebilir. Buna göre $M(x)$ 'in birinci, ikinci ve üçüncü dereceden türevleri;

$$M^{(1)}(x) = N^{(1)}(x, x_k) \sin\left(\frac{x-x_k}{2}\right) + \frac{1}{2} N(x, x_k) \cos\left(\frac{x-x_k}{2}\right) \quad (\text{FDQ}) \quad (2.105)$$

$$M^{(1)}(x) = N^{(1)}(x, x_k) \sin\left(\frac{x-x_k}{2} \pi\right) + \frac{\pi}{2} N(x, x_k) \cos\left(\frac{x-x_k}{2} \pi\right) \quad (\text{HDQ}) \quad (2.106)$$

$$M^{(2)}(x) = N^{(2)}(x, x_k) \sin\left(\frac{x-x_k}{2}\right) + N^{(1)}(x, x_k) \cos\left(\frac{x-x_k}{2}\right) - \frac{1}{4} N(x, x_k) \sin\left(\frac{x-x_k}{2}\right) \quad (\text{FDQ}) \quad (2.107)$$

$$M^{(2)}(x) = N^{(2)}(x, x_k) \sin\left(\frac{x-x_k}{2} \pi\right) + \pi N^{(1)}(x, x_k) \cos\left(\frac{x-x_k}{2} \pi\right) - \frac{\pi^2}{4} N(x, x_k) \sin\left(\frac{x-x_k}{2} \pi\right) \quad (\text{HDQ}) \quad (2.108)$$

$$M^{(3)}(x) = N^{(3)}(x, x_k) \sin\left(\frac{x-x_k}{2}\right) + \frac{3}{2} N^{(2)}(x, x_k) \cos\left(\frac{x-x_k}{2}\right) - \frac{3}{4} N^{(1)}(x, x_k) \sin\left(\frac{x-x_k}{2}\right) - \frac{1}{8} N(x, x_k) \cos\left(\frac{x-x_k}{2}\right) \quad (\text{FDQ}) \quad (2.109)$$

$$M^{(3)}(x) = N^{(3)}(x, x_k) \sin\left(\frac{x-x_k}{2} \pi\right) + \frac{3\pi}{2} N^{(2)}(x, x_k) \cos\left(\frac{x-x_k}{2} \pi\right) - \frac{3\pi^2}{4} N^{(1)}(x, x_k) \sin\left(\frac{x-x_k}{2} \pi\right) - \frac{\pi^3}{8} N(x, x_k) \cos\left(\frac{x-x_k}{2} \pi\right) \quad (\text{HDQ}) \quad (2.110)$$

şeklinde elde edilir.

Denklem (2.105) ve (2.106)'da x yerine x_k yazılmasıyla $\sin\left(\frac{x_k - x_k}{2}\right)$ ifadesi sıfıra gittiğinden, Denklem (2.99) ve (2.100) dikkate alınarak;

$$M^{(1)}(x_i) = \frac{1}{2} N(x_i, x_i) = \frac{1}{2} P(x_i) \quad (\text{FDQ}) \quad (2.111)$$

$$M^{(1)}(x_i) = \frac{\pi}{2} N(x_i, x_i) = \frac{\pi}{2} P(x_i) \quad (\text{HDQ}) \quad (2.112)$$

denklemleri elde edilir. Bunun yanında Denklem (2.105) ve (2.106)'daki $N(x, x_k)$ değeri, her $i \neq j$ noktalarında, Denklem (2.101)'den $N(x_i, x_i) \delta_{ij}$ 'ye eşit olacağından ve $i \neq j$ şartında δ_{ij} sıfıra gittiğinden $N^{(1)}(x_i, x_j)$;

$$N^{(1)}(x_i, x_j) = \frac{M^{(1)}(x_i)}{\sin\left(\frac{x_i - x_j}{2}\right)} \quad (\text{FDQ}) \quad (2.113)$$

$$N^{(1)}(x_i, x_j) = \frac{\pi M^{(1)}(x_i)}{\sin\left(\frac{x_i - x_j}{2} \pi\right)} \quad (\text{HDQ}) \quad (2.114)$$

olarak elde edilir. Denklem (2.111), (2.112) ve (2.113), (2.114)'de yapılan işleme benzer olarak, Denklem (2.107) ve (2.108)'de x yerine x_k yazılmasıyla;

$$N^{(1)}(x_i, x_i) = M^{(2)}(x_i) \quad (\text{FDQ}) \quad (2.115)$$

$$N^{(1)}(x_i, x_i) = \frac{M^{(2)}(x_i)}{\pi} \quad (\text{HDQ}) \quad (2.116)$$

denklemleri elde edilir. Yine (2.107) ve (2.108)'deki, $N(x, x_k)$, her $i \neq j$ noktalarında sıfıra gittiğinden;

$$N^{(2)}(x_i, x_j) = \frac{M^{(2)}(x_i) - N^{(1)}(x_i, x_j) \cos\left(\frac{x_i - x_j}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x_i - x_j}{2}\right)}, \quad j \neq i \quad (\text{FDQ}) \quad (2.117)$$

$$N^{(2)}(x_i, x_j) = \frac{M^{(2)}(x_i) - \pi N^{(1)}(x_i, x_j) \cos\left(\frac{x_i - x_j}{2} \pi\right)}{\sin\left(\frac{x_i - x_j}{2} \pi\right)}, \quad j \neq i \quad (\text{HDQ}) \quad (2.118)$$

elde edilir. Denklem (2.111), (2.112) ve (2.115), (2.116)'nın elde edilmesi için kullanılan işlem üçüncü derece türev için de tekrarlandığında, yani Denklem (2.109) ve (2.110)'da x yerine x_k yazılmasıyla;

$$N^{(2)}(x_i, x_i) = \frac{2}{3} \left[M^{(3)}(x_i) + \frac{1}{8} N(x_i, x_i) \right] \quad (\text{FDQ}) \quad (2.119)$$

$$N^{(2)}(x_i, x_i) = \frac{2}{3\pi} \left[M^{(3)}(x_i) + \frac{\pi^3}{8} N(x_i, x_i) \right] \quad (\text{HDQ}) \quad (2.120)$$

elde edilir.

Denklem (2.111), (2.112); (2.113), (2.114) ve (2.115), (2.116), Denklem (2.103)'de yerine yazıldığında;

$$a_{ij}^{(1)} = \frac{1}{2} \frac{P(x_i)}{\sin\left(\frac{x_i - x_j}{2}\right) P(x_j)}, \quad j \neq i \quad (\text{FDQ}) \quad (2.121)$$

$$a_{ij}^{(1)} = \frac{\pi}{2} \frac{P(x_i)}{P(x_j) \sin\left(\frac{x_i - x_j}{2} \pi\right)}, \quad j \neq i \quad (\text{HDQ}) \quad (2.122)$$

ve,

$$a_{ii}^{(1)} = \frac{M^{(2)}(x_i)}{P(x_i)} \quad (\text{FDQ}) \quad (2.123)$$

$$a_{ii}^{(1)} = \frac{M^{(2)}(x_i)}{\pi P(x_i)} \quad (\text{HDQ}) \quad (2.124)$$

denklemleri bulunur.

Benzer biçimde, Denklem (2.117), (2.118) ve (2.119), (2.120), Denklem (2.104)'de yerine yazıldığında, Denklem (2.103); (2.111), (2.112); (2.121), (2.122) ve (2.123), (2.124)'den de faydalanılarak;

$$a_{ij}^{(2)} = a_{ij}^{(1)} \left[2a_{ii}^{(1)} - \cot\left(\frac{x_i - x_j}{2}\right) \right], \quad j \neq i \quad (\text{FDQ}) \quad (2.125)$$

$$a_{ij}^{(2)} = a_{ij}^{(1)} \left[2a_{ii}^{(1)} - \pi \cot\left(\frac{x_i - x_j}{2} \pi\right) \right], \quad j \neq i \quad (\text{HDQ}) \quad (2.126)$$

ve,

$$a_{ii}^{(2)} = \frac{2}{3} \left[\frac{M^{(3)}(x_i)}{P(x_i)} + \frac{1}{8} \right] \quad (\text{FDQ}) \quad (2.127)$$

$$a_{ii}^{(2)} = \frac{2}{3\pi} \left[\frac{M^{(3)}(x_i)}{P(x_i)} + \frac{\pi^3}{8} \right] \quad (\text{HDQ}) \quad (2.128)$$

denklemleri elde edilir.

Denklem (2.121), (2.122) ve (2.125), (2.126)'daki $a_{ij}^{(1)}$ ve $a_{ij}^{(2)}$, ($i \neq j$) şartı için kolaylıkla hesaplanabilir. Ancak Denklem (2.123), (2.124) ve (2.127), (2.128)'deki $a_{ii}^{(1)}$ ve $a_{ii}^{(2)}$ 'nin hesaplanması $M^{(2)}(x_i)$ ve $M^{(3)}(x_i)$ 'den dolayı zordur. Shu'nun (1991) yaklaşımına benzer biçimde, bir temel polinom Denklem (2.87) ve Denklem (2.88)'deki gibi bir lineer operatörü sağlıyorsa, başka bir temel polinom da sağlar. Buna göre $a_{ij}^{(1)}$ ve $a_{ij}^{(2)}$ lineer operatörleri diğer bir temel polinom olan $1, \sin(x), \cos(x), \sin(2x), \dots, \sin(Nx/2), \cos(Nx/2)$ 'yi sağlar. Bu polinom Bellman'ın ilk yaklaşımında (Bellman vd 1972) kullanılan polinomdan farklı olarak trigonometriktir. Yine de Denklem (2.3)'teki ilk şart geçerlidir. Yani;

$$\sum_{j=1}^N a_{ij}^{(1)} = 0 \quad \text{veya} \quad a_{ii}^{(1)} = - \sum_{j=1, j \neq i}^N a_{ij}^{(1)} \quad (2.129)$$

$$\sum_{j=1}^N a_{ij}^{(2)} = 0 \quad \text{veya} \quad a_{ii}^{(2)} = - \sum_{j=1, j \neq i}^N a_{ij}^{(2)} \quad (2.130)$$

denklemleri yazılabilir.

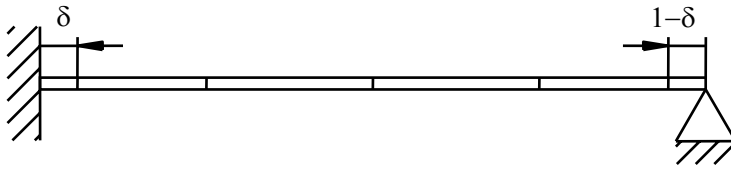
Denklem (2.129) ve (2.130)'dan ağırlıklı katsayılar matrisinin diyagonal elemanları da kolaylıkla hesaplanabilir. Daha yüksek dereceden türevlerin ağırlıklı katsayılarını hesaplayabilmek için Bölüm 2.2.3'de verilen matris çarpımı yaklaşımından faydalanılabilir.

Burada elde edilen denklemler periyodik problemlere uygulanabildiği gibi periyodik olmayan problemlere de uygulanabilir. Periyodik olmayan problemlerde, hesaplama bölgesindeki x aralığı $0 \leq x \leq \pi$ aralığında, periyodik problemlerde ise $0 \leq x < 2\pi$ aralığında alınır.

2.4. Sınır Şartlarının Uygulanması

2.4.1. δ -Yaklaşımı

δ yaklaşımı ilk defa Jang vd (1989) tarafından, DQ ile diferansiyel denklem çözümlerinde, aynı noktaya iki başlangıç veya sınır şartının girilmesindeki zorluğu gidermek amacıyla önerilmiştir. Bu yaklaşımda Dirichlet şartı ($W = 0$), sınır düğüm noktasına uygulanırken, Neumann (türev) şartı, bu noktadan δ kadar küçük bir uzaklıkta olan ayrı bir noktaya uygulanır.



Şekil 2.1 Kiriş problemleri için δ düğüm noktasının yeri

Şekil 2.1'den görüldüğü üzere, δ düğüm noktaları, $X_2 = \delta$ ve $X_{N-1} = 1 - \delta$ koordinatlarında bulunmaktadır.

Örnek olarak bir ucu ankastre diğer ucu basit mesnetle desteklenmiş bir kiriş ele alınsın. Kirişin ankastre mesnetle desteklenmiş uç noktasında, çökme (W) ve dönme (dW/dX) değerleri sıfır iken, basit mesnetle desteklenmiş uç noktasında, çökme (W) ve moment (d^2W/dX^2) değerleri sıfıra eşittir. Kirişteki çökme şartları ($W = 0$), uç düğüm noktalarına uygulanırken, dönme ($dW/dX = 0$) ve moment ($d^2W/dX^2 = 0$) şartları, X_2 ve X_{N-1} düğüm noktalarına uygulanır. Bu iki düğüm noktasına DQ formu;

$$\sum_{k=1}^N a_{2,k}^{(1)} W_k = 0 \quad (2.131)$$

$$\sum_{k=1}^N a_{N-1,k}^{(2)} W_k = 0 \quad (2.132)$$

şeklinde uygulanır.

Açıkça görülmektedir ki δ -yaklaşımında, türev şartının girildiği yer tam doğru değildir. δ -yaklaşımının iki önemli sakıncası vardır. Birincisi, türev şartının δ düğüm noktasına girilmesidir. Çünkü gerçek türev şartı, δ kadar uzakta değildir ve δ 'nın boyutu sayısal sonuçları etkilemektedir. Doğru sonuçların elde edilebilmesi için, δ 'nın küçük bir değer olması gereklidir ($0,0001$ 'den büyük olmamalıdır). Genellikle bu değer $\delta \cong 10^{-5}$ olarak alınır. İkincisi ise, δ düğüm noktalarının diğer düğüm noktalarından çok küçük alınması, elde edilen ağırlıklı katsayılar matrisini tekilliğe götürmektedir. Bu da çözümleri etkilemektedir.

2.4.2. Ağırlıklı katsayılar matrisinin düzenlenmesi

Bu teknik ilk defa Wang ve Bert (1993) tarafından, δ -yaklaşımının eksikliklerini gidermek için önerilmiştir. Bu yaklaşımda sadece bir sınır şartı sisteme sayısal olarak ilave edilir. Diğer sınır şartı (türev şartı) DQ ağırlıklı katsayılar matrisi türetilirken sisteme girilir. Bu yaklaşımı anlatabilmek için aşağıdaki sınır şartları ele alınsın (Ankastre-Basit Mesnet).

$$X = 0 \text{ 'da} \quad W = 0, \quad \frac{dW}{dX} = 0 \quad (2.133)$$

$$X = l \text{ 'de} \quad W = 0, \quad \frac{d^2W}{dX^2} = 0 \quad (2.134)$$

$[A^{(r)}]$ ve $[\tilde{A}^{(r)}]$, sırasıyla n. dereceden türevlerin ağırlıklı katsayılar matrislerinin asıl ve düzenlenmiş durumlarını gösterebilir. Buna göre;

$$\frac{d^r W}{dX^r} = \frac{d}{dX} \left(\frac{d^{r-1} W}{dX^{r-1}} \right) \quad (2.135)$$

ve buradan da aşağıdaki ifade elde edilir.

$$\left[A^{(r)} \right] = \left[A^{(1)} \right] \left[A^{(r-1)} \right] = \left[A^{(2)} \right] \left[A^{(r-2)} \right] = \dots = \left[A^{(r-1)} \right] \left[A^{(1)} \right] \quad (2.136)$$

Aşağıda dW/dX türevinin her düğüm noktası için DQ formunda açılımı verilmiştir.

$$\left\{ \begin{array}{l} (dW/dX)_1 \\ (dW/dX)_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ (dW/dX)_{N-1} \\ (dW/dX)_N \end{array} \right\} = \left[\begin{array}{cccccc} a_{1,1}^{(1)} & a_{1,2}^{(1)} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{1,N-1}^{(1)} & a_{1,N}^{(1)} \\ a_{2,1}^{(1)} & a_{2,2}^{(1)} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{2,N-1}^{(1)} & a_{2,N}^{(1)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{N-1,1}^{(1)} & a_{N-1,2}^{(1)} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{N-1,N-1}^{(1)} & a_{N-1,N}^{(1)} \\ a_{N,1}^{(1)} & a_{N,2}^{(1)} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{N,N-1}^{(1)} & a_{N,N}^{(1)} \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{l} W_1 \\ W_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ W_{N-1} \\ W_N \end{array} \right\} \quad (2.137)$$

Denklem (2.133)'deki türev şartının sisteme girilebilmesi için, Denklem (2.137)'deki matrisin ilk satırının elemanları sıfırlanır.

$$\left\{ \begin{array}{l} (dW/dX)_1 \\ (dW/dX)_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ (dW/dX)_{N-1} \\ (dW/dX)_N \end{array} \right\} = \left[\begin{array}{cccccc} 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 0 \\ a_{2,1}^{(1)} & a_{2,2}^{(1)} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{2,N-1}^{(1)} & a_{2,N}^{(1)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{N-1,1}^{(1)} & a_{N-1,2}^{(1)} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{N-1,N-1}^{(1)} & a_{N-1,N}^{(1)} \\ a_{N,1}^{(1)} & a_{N,2}^{(1)} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{N,N-1}^{(1)} & a_{N,N}^{(1)} \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{l} W_1 \\ W_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ W_{N-1} \\ W_N \end{array} \right\} \quad (2.138)$$

Görüldüğü üzere Denklem (2.137)'deki matris $\left[A^{(1)} \right]$ ve Denklem (2.138)'deki matris ise $\left[\tilde{A}^{(1)} \right]$ 'dir. Denklem (2.134)'deki ikinci sınır şartın sisteme girilebilmesi için ikinci dereceden ağırlıklı katsayılar matrisi $\left[\bar{A}^{(2)} \right]$, Denklem (2.136)'dan faydalanılarak aşağıdaki biçimde elde edilir.

$$\left[\bar{A}^{(2)} \right] = \left[A^{(1)} \right] \left[\tilde{A}^{(1)} \right] \quad (2.139)$$

Denklem (2.134)'de verilen $X = 1$ 'deki ikinci sınır şartının sisteme girilebilmesi için, $[\bar{A}^{(2)}]$ ikinci dereceden ağırlıklı katsayılar matrisinin son satır elemanlarının sıfırlanması gereklidir.

$$[\tilde{A}^{(2)}] = \begin{bmatrix} \tilde{a}_{1,1}^{(2)} & \tilde{a}_{1,2}^{(2)} & \cdot & \cdot & \cdot & \tilde{a}_{1,N-1}^{(2)} & \tilde{a}_{1,N}^{(2)} \\ \tilde{a}_{2,1}^{(2)} & \tilde{a}_{2,2}^{(2)} & \cdot & \cdot & \cdot & \tilde{a}_{2,N-1}^{(2)} & \tilde{a}_{2,N}^{(2)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \tilde{a}_{N-1,1}^{(2)} & \tilde{a}_{N-1,2}^{(2)} & \cdot & \cdot & \cdot & \tilde{a}_{N-1,N-1}^{(2)} & \tilde{a}_{N-1,N}^{(2)} \\ 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.140)$$

Denklem (2.133) ve (2.134)'de verilen türev sınır şartları, $[\tilde{A}^{(2)}]$ matrisi ile tamamen girilmiş olmaktadır. $[\tilde{A}^{(2)}]$ matrisi kullanılarak, $[\tilde{A}^{(3)}]$ ve $[\tilde{A}^{(4)}]$ düzenlenmiş ağırlıklı katsayılar matrisleri aşağıdaki biçimde elde edilir.

$$[\tilde{A}^{(3)}] = [A^{(1)}][\tilde{A}^{(2)}] \quad (2.141)$$

$$[\tilde{A}^{(4)}] = [A^{(1)}][\tilde{A}^{(3)}] \quad (2.142)$$

Yukarıdaki işlemlerden görüldüğü üzere, ağırlıklı katsayılar matrislerindeki düzenlemeler matrisin formlarının değiştirilmesiyle yapılmaktadır. Metot, matristeki bazı elemanların sıfırlanması üzerine kurulu basit bir metottur. Buna rağmen bu metotta homojen olmayan türev şartlarının sisteme girişi kolay değildir. Malik ve Bert (1996), matris elemanlarının belirlenebilmesi için tekil bir denklem sisteminin çözülmesi gerektiğini söylemişlerdir. Yukarıdaki yöntemde karşılaşılan zorluğun giderilmesi için, düzenlenmiş ağırlıklı katsayılar matrisinin elemanlarının belirlenmesinde toplama formu kullanımı öne sürülmüştür (Malik ve Bert 1996).

Genel olarak homojen olmayan sınır şartları ele alınsın;

$$X = 0 \text{ da} \quad W = e, \quad \frac{dW}{dX} = f \quad (2.143)$$

$$X = 1' \text{ de } \quad W = g, \quad \frac{d^2 W}{dX^2} = h \quad (2.144)$$

Burada e, f, g ve h sabitlerdir. Öncelikle X_i düğüm noktasına ikinci dereeden türev için DQ formu uygulansın.

$$W_{XX}(X_i) = \sum_{k1=1}^N a_{i,k1}^{(1)} W_X(X_{k1}) \quad (2.145)$$

Denklem (2.143)'deki türev şartı, Denklem (2.145)'de yerine konulup DQ formu uygulandığında;

$$W_{XX}(X_i) = a_{i,i}^{(1)} f + \sum_{k=1}^N \sum_{k1=2}^N a_{i,k1}^{(1)} a_{k1,k}^{(1)} W_k = a_{i,i}^{(1)} f + \sum_{k=1}^N \tilde{a}_{i,k}^{(2)} W_k \quad (2.146)$$

denklemleri elde edilir. Bu denklem, 5 düğümlü bir eleman için;

$$\begin{Bmatrix} W_{XX}(X_1) \\ W_{XX}(X_2) \\ W_{XX}(X_3) \\ W_{XX}(X_4) \\ W_{XX}(X_5) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} a_{1,1}^{(1)} \\ a_{2,1}^{(1)} \\ a_{3,1}^{(1)} \\ a_{4,1}^{(1)} \\ a_{5,1}^{(1)} \end{Bmatrix} f + \underbrace{\begin{bmatrix} a_{1,2}^{(1)} & a_{1,3}^{(1)} & a_{1,4}^{(1)} & a_{1,5}^{(1)} \\ a_{2,2}^{(1)} & a_{2,3}^{(1)} & a_{2,4}^{(1)} & a_{2,5}^{(1)} \\ a_{3,2}^{(1)} & a_{3,3}^{(1)} & a_{3,4}^{(1)} & a_{3,5}^{(1)} \\ a_{4,2}^{(1)} & a_{4,3}^{(1)} & a_{4,4}^{(1)} & a_{4,5}^{(1)} \\ a_{5,2}^{(1)} & a_{5,3}^{(1)} & a_{5,4}^{(1)} & a_{5,5}^{(1)} \end{bmatrix}}_{\tilde{a}_{i,j}^{(2)}} \begin{Bmatrix} a_{2,1}^{(1)} & a_{2,2}^{(1)} & a_{2,3}^{(1)} & a_{2,4}^{(1)} & a_{2,5}^{(1)} \\ a_{3,1}^{(1)} & a_{3,2}^{(1)} & a_{3,3}^{(1)} & a_{3,4}^{(1)} & a_{3,5}^{(1)} \\ a_{4,1}^{(1)} & a_{4,2}^{(1)} & a_{4,3}^{(1)} & a_{4,4}^{(1)} & a_{4,5}^{(1)} \\ a_{5,1}^{(1)} & a_{5,2}^{(1)} & a_{5,3}^{(1)} & a_{5,4}^{(1)} & a_{5,5}^{(1)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} W_1 \\ W_2 \\ W_3 \\ W_4 \\ W_5 \end{Bmatrix} \quad (2.147)$$

şeklinde açık olarak yazılabilir.

İkinci dereeden türevler için ağırlıklı katsayılar matrisinin elemanları aşağıdaki biçimde hesaplanır.

$$\tilde{a}_{i,k}^{(2)} = \sum_{k1=2}^N a_{i,k1}^{(1)} a_{k1,k}^{(1)} \quad (2.148)$$

Benzer biçimde üçüncü dereeden türevlerin dağılımları da;

$$W_{XXX}(X_i) = a_{i,N}^{(1)} h + f \sum_{k=1}^{N-1} a_{i,k}^{(1)} a_{k,1}^{(1)} + \sum_{k=1}^N \tilde{a}_{i,k}^{(3)} W_k \quad (2.149)$$

şeklinde elde edilir. Yine bu denklem, 5 düğümlü bir eleman için;

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} W_{XXX}(X_1) \\ W_{XXX}(X_2) \\ W_{XXX}(X_3) \\ W_{XXX}(X_4) \\ W_{XXX}(X_5) \end{Bmatrix} &= \begin{Bmatrix} a_{1,5}^{(1)} \\ a_{2,5}^{(1)} \\ a_{3,5}^{(1)} \\ a_{4,5}^{(1)} \\ a_{5,5}^{(1)} \end{Bmatrix} h + f \begin{Bmatrix} a_{1,1}^{(1)} & a_{1,2}^{(1)} & a_{1,3}^{(1)} & a_{1,4}^{(1)} \\ a_{2,1}^{(1)} & a_{2,2}^{(1)} & a_{2,3}^{(1)} & a_{2,4}^{(1)} \\ a_{3,1}^{(1)} & a_{3,2}^{(1)} & a_{3,3}^{(1)} & a_{3,4}^{(1)} \\ a_{4,1}^{(1)} & a_{4,2}^{(1)} & a_{4,3}^{(1)} & a_{4,4}^{(1)} \\ a_{5,1}^{(1)} & a_{5,2}^{(1)} & a_{5,3}^{(1)} & a_{5,4}^{(1)} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} a_{1,1}^{(1)} \\ a_{2,1}^{(1)} \\ a_{3,1}^{(1)} \\ a_{4,1}^{(1)} \end{Bmatrix} + \rightarrow \\ &\rightarrow \begin{Bmatrix} a_{1,1}^{(1)} & a_{1,2}^{(1)} & a_{1,3}^{(1)} & a_{1,4}^{(1)} \\ a_{2,1}^{(1)} & a_{2,2}^{(1)} & a_{2,3}^{(1)} & a_{2,4}^{(1)} \\ a_{3,1}^{(1)} & a_{3,2}^{(1)} & a_{3,3}^{(1)} & a_{3,4}^{(1)} \\ a_{4,1}^{(1)} & a_{4,2}^{(1)} & a_{4,3}^{(1)} & a_{4,4}^{(1)} \\ a_{5,1}^{(1)} & a_{5,2}^{(1)} & a_{5,3}^{(1)} & a_{5,4}^{(1)} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \tilde{a}_{1,1}^{(2)} & \tilde{a}_{1,2}^{(2)} & \tilde{a}_{1,3}^{(2)} & \tilde{a}_{1,4}^{(2)} & \tilde{a}_{1,5}^{(2)} \\ \tilde{a}_{2,1}^{(2)} & \tilde{a}_{2,2}^{(2)} & \tilde{a}_{2,3}^{(2)} & \tilde{a}_{2,4}^{(2)} & \tilde{a}_{2,5}^{(2)} \\ \tilde{a}_{3,1}^{(2)} & \tilde{a}_{3,2}^{(2)} & \tilde{a}_{3,3}^{(2)} & \tilde{a}_{3,4}^{(2)} & \tilde{a}_{3,5}^{(2)} \\ \tilde{a}_{4,1}^{(2)} & \tilde{a}_{4,2}^{(2)} & \tilde{a}_{4,3}^{(2)} & \tilde{a}_{4,4}^{(2)} & \tilde{a}_{4,5}^{(2)} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} W_1 \\ W_2 \\ W_3 \\ W_4 \\ W_5 \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (2.150)$$

şeklinde açık olarak yazılabilir. Dördüncü dereceden türevlerin dağılımları ise;

$$W_{XXXX}(X_i) = a_{i,N}^{(2)} h + f \sum_{k=1}^{N-1} a_{i,k}^{(2)} a_{k,1}^{(1)} + \sum_{k=1}^N \tilde{a}_{i,k}^{(4)} W_k \quad (2.151)$$

şeklinde yazılabilir.

Denklem (2.149) ve (2.151)'deki, $\tilde{a}_{i,k}^{(3)} = \sum_{k=1}^{N-1} a_{i,k}^{(1)} \tilde{a}_{k,k}^{(2)}$, $\tilde{a}_{i,k}^{(4)} = \sum_{k=1}^{N-1} a_{i,k}^{(2)} \tilde{a}_{k,k}^{(2)}$ olmak üzere

$\tilde{a}_{i,k}^{(3)}$ ve $\tilde{a}_{i,k}^{(4)}$, üçüncü ve dördüncü dereceden türevlerin düzenlenmiş ağırlıklı katsayılarıdır. Görüldüğü üzere homojen olmayan şartlar, toplama formu ile sisteme girilebilmiştir.

Bu yaklaşım uygulandığında türev şartı, ağırlık katsayılarının düzenlenmesiyle otomatik olarak girilmektedir. Bu yüzden sınır düğümüne sadece bir şart uygulanmaktadır. Sonuç olarak DQ formu uygulanmış genel denklem sadece iç düğüm noktalarına ($2 \leq i \leq N-1$) uygulanmaktadır. Neticede bu yaklaşımda kullanılan denklem sisteminin

boyutu $(N-2) \times (N-2)$ 'dir. Bu yaklaşım bazı kiriş problemlerinin çözümünde başarılı biçimde uygulanmıştır. Buna karşı Shu ve Du (1997), yaklaşımın uygulamalarında bazı limitler olduğu söylemişlerdir. Limitlerden biri, iki ucu ankastre olarak desteklenmiş kirişteki sınır şartlarında oluşmaktadır. Bu şartlar altında yaklaşım, bazı frekansların hesaplanmasında başarısızlığa uğramıştır (Shu 2000).

2.4.3. DQ uygulanmış genel denkleme sınır şartlarının direk uygulanması

Bu yaklaşım ilk defa Shu ve Du (1997) tarafından, bir ucu ankastre diğer ucu basit mesnet ve bunun kombinasyonu sınır şartlarına sahip kirişlere uygulanmıştır. Yaklaşımın esası, çökme şartlarının (Dirichlet şartı), sınır düğümüne direk olarak uygulanması ve türev şartlarına (Neumann şartı) DQ formu uygulanması üzerine kuruludur. Daha sonra iki uç düğüm noktasındaki DQ formu uygulanmış türev şartları birleştirilerek W_2 ve W_{N-1} çözümleri elde edilir. Bundan sonra W_2 ve W_{N-1} ifadeleri, iç düğüm noktalarına $(3 \leq i \leq N-2)$ uygulanan DQ uygulanmış genel denkleme yerine yazılır. Bu yaklaşıma göre denklem sisteminin boyutu $(N-4) \times (N-4)$ 'dür.

Ankastre ve basit mesnet sınır şartlarının her kombinasyonu için DQ formu uygulanmış sınır şartları aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$W_1 = 0 \quad (2.152)$$

$$\sum_{k=1}^N a_{1,k}^{(n_0)} W_k = 0 \quad (2.153)$$

$$W_N = 0 \quad (2.154)$$

$$\sum_{k=1}^N a_{N,k}^{(n_1)} W_k = 0 \quad (2.155)$$

Burada n_0 ve n_1 , 1 ve 2 değerlerini almak üzere, Denklem (2.153) ve (2.155) aşağıdaki biçimlerde ayarlanabilir.

$n_0 = 1, n_1 = 1$ ----- ankastre-ankastre

$n_0 = 1, n_1 = 2$ ----- ankastre-basit mesnet

$n_0 = 2, n_1 = 1$ ----- basit mesnet-ankastre

$n_0 = 2, n_1 = 2$ ----- basit mesnet-basit mesnet

Örnek olarak, değişken kesitli, L boyunda, Bernoulli-Euler kirişinin titreşim analizi için sistemi ifade eden genel denklem;

$$s(X) \frac{d^4 W}{dX^4} + 2 \frac{ds(X)}{dX} \frac{d^3 W}{dX^3} + \frac{d^2 s(X)}{dX^2} \frac{d^2 W}{dX^2} - \Omega^2 W = 0 \quad (2.156)$$

şeklinde verilmiştir (Shu ve Du 1997). Burada, $s(X) = \frac{I(X)}{I_0}$, $\Omega^2 = \frac{\rho A(X) L^4 \omega^2}{EI_0}$,

$X = \frac{x}{L}$ olmak üzere, EI; kirişin rijitliği, ρA ; kiriş uzunluğu başına düşen kütle, I; kirişin kesit atalet momenti ve ω ; boyutlu frekanstır.

Denklem (2.156)'ya DQ uygulanıp düzenlendiğinde;

$$s^{(2)}(X_i) \sum_{k=1}^N a_{ik}^{(2)} W_k + 2s^{(1)}(X_i) \sum_{k=1}^N a_{ik}^{(3)} W_k + s(X_i) \sum_{k=1}^N a_{ik}^{(4)} W_k = \Omega^2 W_i \quad (2.157)$$

elde edilir.

Denklem (2.152) ve Denklem (2.154), Denklem (2.157)'de kolaylıkla yerine konulabilir. Fakat Denklem (2.153) ve Denklem (2.155) için aynı şey söylenemez. Bu iki denklem kullanılarak aşağıdaki W_2 ve W_{N-1} çözümleri elde edilir (Shu ve Du 1997).

$$W_2 = \frac{1}{AXN} \sum_{k=3}^{N-2} AXK1 W_k \quad (2.158)$$

şeklindedir.

Denklem (2.158) ve (2.159)'a göre W_2 ve W_{N-1} ; W_3, W_4, \dots, W_{N-2} cinsinden yazılabilir ve Denklem (2.157)'ye kolaylıkla yerleştirilebilir. Bu yaklaşım aşağıda gösterilmiştir. Denklem (2.152), (2.153), (2.154) ve (2.155), dört sınır denklemini sağlar. Toplam olarak W_1 'den W_N 'e kadar N bilinmeyen vardır. Sistemin tamamlanması için Denklem (2.157), $(N-4)$ düğüm noktasına uygulanmalıdır. Yani X_3, X_4, \dots, X_{N-2} düğüm noktalarına uygulanacaktır. Denklem (2.152), (2.154), (2.158) ve (2.159), Denklem (2.157)'ye uygulandığında;

$$s^{(2)}(X_i) \sum_{k=3}^{N-2} A_1 W_k + 2s^{(1)}(X_i) \sum_{k=3}^{N-2} A_2 W_k + s(X_i) \sum_{k=3}^{N-2} A_3 W_k = \Omega^2 W_i, \quad i = 3, 4, \dots, N-2 \quad (2.166)$$

denklemini elde edilir. Burada;

$$A_1 = a_{i,k}^{(2)} - \frac{a_{i,2}^{(2)} AXK1 + a_{i,N-1}^{(2)} AXKN}{AXN} \quad (2.167)$$

$$A_2 = a_{i,k}^{(3)} - \frac{a_{i,2}^{(3)} AXK1 + a_{i,N-1}^{(3)} AXKN}{AXN} \quad (2.168)$$

$$A_3 = a_{i,k}^{(4)} - \frac{a_{i,2}^{(4)} AXK1 + a_{i,N-1}^{(4)} AXKN}{AXN} \quad (2.169)$$

olarak verilmektedir (Shu ve Du 1997).

Denklem (2.166), $(N-4)$ bilinmeyenli $(N-4)$ denklemden oluşmaktadır ve matris formunda aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$[A]\{W\} = \Omega^2 \{W\} \quad (2.170)$$

Bu yaklaşım, her iki ucu serbest veya bir ucu serbest ve diğer ucu ankastre veya basit mesnet sınır şartları kombinasyonları için geliştirilebilir. Örnek olarak her iki ucu

serbest sınır şartı uygulanmak istendiğinde, öncelikle dört tane türev şartına DQ formu uygulanır. Sonra bu dört DQ formu uygulanmış şart birleştirilerek, W_3, \dots, W_{N-2} cinsinden olmak üzere dört adet W_1, W_2, W_{N-1} ve W_N çözümü bulunur. Daha sonra bu W_1, W_2, W_{N-1} ve W_N değerleri Denklem (2.157)'de yerine yazılır.

2.5. Genelleştirilmiş Diferansiyel Quadrature Metodu

Genelleştirilmiş Diferansiyel Quadrature Metodu (GDQM) ilk defa Shu ve Richards (1990) ve Shu (1991) tarafından ileri sürülmüştür. GDQM, DQM'nin eksikliklerini gidermek için önerilmiştir. GDQM'nin hassasiyetini etkileyen iki önemli faktörden birisi ağırlıklı katsayıların doğru olarak hesaplanması, diğeri ise düğüm noktaları koordinatlarının tayinidir. GDQM ile ağırlıklı katsayıların hesaplanması Bölüm 2.1.3'de verilmişti. Kısaca özetlenecek olursa;

N düğüm noktasına ayrılmış ve her x_i ($i=1,2,\dots,N$) düğüm noktasında değeri olan bir $f(x)$ fonksiyonu ele alınsın. DQM'ye göre $f(x)$ 'in r . dereceden türevi aşağıdaki biçimde yazılabilir.

$$\frac{d^r f(x_i)}{dx^r} = \sum_{j=1}^N a_{ij}^{(r)} f(x_j), \quad i=1,2,\dots,N, \quad r \geq 1 \quad (2.171)$$

Burada $a_{ij}^{(r)}$, r . dereceden türevler için DQ ağırlıklı katsayıları ifade etmektedir. GDQM'de test fonksiyonu olarak Lagrange interpolasyon polinomu kullanılmıştır ve bu polinom her x_i değerleri için aşağıdaki biçimde yazılabilir.

$$\ell_j(x) = \frac{M(x)}{(x-x_j)M^{(1)}(x_j)}, \quad j=1,2,\dots,N \quad (2.172)$$

Burada;

$$M(x) = \prod_{m=1}^N (x-x_m) \quad \text{ve} \quad M^{(1)}(x_j) = \frac{dM(x_j)}{dx} = \prod_{m=1, m \neq j}^N (x_j-x_m) \quad (2.173)$$

olarak verilmiştir.

Lagrange interpolasyon polinomu kullanılarak ağırlıklı katsayılar aşağıdaki biçimde elde edilebilir (Shu 2000).

$$a_{ij}^{(1)} = \frac{d\ell_j(x_i)}{dx} = \frac{M^{(1)}(x_i)}{(x_i - x_j)M^{(1)}(x_j)}, \quad i, j = 1, 2, \dots, N, \quad i \neq j \quad (2.174)$$

$$a_{ii}^{(1)} = \frac{d\ell_i(x_i)}{dx} = - \sum_{j=1, i \neq j}^N a_{ij}^{(1)}, \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (2.175)$$

r. dereceden ağırlıklı katsayılar ise;

$$a_{ij}^{(r)} = \frac{d^r \ell_j(x_i)}{dx^r} = r \left(a_{ii}^{(r-1)} a_{ij}^{(1)} - \frac{a_{ij}^{(r-1)}}{(x_i - x_j)} \right), \quad i, j = 1, 2, \dots, N, \quad i \neq j, \quad r \geq 2 \quad (2.176)$$

$$a_{ii}^{(r)} = \frac{d^r \ell_i(x_i)}{dx^r} = - \sum_{j=1, i \neq j}^N a_{ij}^{(r)}, \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (2.177)$$

olarak elde edilir (Shu 2000). Yukarıdaki denklemlerden açıkça görülmektedir ki iki ve daha yüksek dereceden türevlere ait ağırlıklı katsayılar, birinci dereceden türevlere ait ağırlıklı katsayılardan kolaylıkla hesaplanabilir. Seçilen düğüm noktalarının koordinatları üzerine herhangi bir sınırlama yoktur. Tekrarlama özelliği dolayısıyla, formülasyonları ve programlanmaları kolaydır.

Denklem (2.171) matris formunda, $f^{(r)} = \frac{d^r f}{dx^r}$ olmak üzere aşağıdaki biçiminde elde edilebilir.

$$\{f^{(r)}\}_j = [A^{(r)}] \{f\}_j \quad (2.178)$$

Burada $\{f\}_j$ ve $\{f^{(r)}\}_j$, N boyutunda sütun vektörler ve $[A^{(r)}]$, $(N \times N)$ boyutunda, r . dereceden türevlerin ağırlıklı katsayılar matrisidir. Diferansiyel operatörlerin tanımı göz önüne alınarak;

$$\frac{d^r f}{dx^r} = \frac{d}{dx} \left(\frac{d^{(r-1)} f}{dx^{(r-1)}} \right) = \frac{d^{(r-1)}}{dx^{(r-1)}} \left(\frac{df}{dx} \right) \quad (2.179)$$

yazılabilir. Denklem (2.179)'a DQ formu aşağıdaki biçimde uygulanır.

$$\left. \frac{d^r f}{dx^r} \right|_{x=x_i} = \sum_{k=1}^N a_{ik}^{(1)} \sum_{m=1}^N a_{km}^{(r-1)} f_{mj} = \sum_{k=1}^N a_{ik}^{(r-1)} \sum_{m=1}^N a_{km}^{(1)} f_{mj} \quad (2.180)$$

Denklem (2.178) ve Denklem (2.180)'den aşağıdaki ilişki çıkarılabilir.

$$[A^{(r)}] = [A^{(1)}][A^{(r-1)}] = [A^{(r-1)}][A^{(1)}] \quad (2.181)$$

Denklem (2.181)'den görüldüğü üzere $[A^{(1)}]$ matrisi elde edildiğinde, yüksek dereceli türevler için ağırlıklı katsayılar matrisleri de kolaylıkla elde edilebilir.

GDQM çözümlerinin hassasiyetini etkileyen diğer bir hususta düğüm noktalarının koordinatlarının belirlenmesidir. Düğüm noktalarının koordinatları için sıkça kullanılan bir yöntem, eşit aralıkla dağıtılmış olan düğüm noktalarıdır. Aşağıda eşit aralıklara bölünmüş ve normalize edilmiş ($[0,1]$ aralığına indirgenmiş) düğüm noktalarının koordinatları verilmiştir.

$$X_i = \frac{i-1}{N-1}, \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (2.182)$$

Düğüm noktalarının diğer bir seçimi ise, uç düğüm noktalarına komşu δ düğüm noktalarına sahip eşit aralıklı düğüm noktalarıdır. Bu δ düğüm noktaları, aynı noktaya ikinci sınır şartı girebilmek için Jang vd (1989) tarafından geliştirilmiştir ve uç düğüm

noktası ile mesafesi genellikle $\delta \cong 10^{-5}$ alınır. Bu şartlarda aralıklara bölünmüş ve normalize edilmiş düğüm noktalarının koordinatları ise;

$$X_1 = 0, \quad X_2 = \delta, \quad X_{N-1} = 1 - \delta, \quad X_N = 1 \quad (2.183)$$

olmak üzere;

$$X_i = \frac{i-2}{N-3}, \quad i = 3, 4, \dots, N-2 \quad (2.184)$$

şeklindedir.

Quadrature çözümlerinde, değişik koordinat yönlerindeki düğüm noktalarının yeri ve adedi, farklı biçimlerde seçilebileceği gibi, değişik test fonksiyonları da kullanılabilir.

2.5.1. Örnek: Bernoulli-Euler kirişinin GDQM ile enine lineer titreşim analizi

Aşağıda Bernoulli-Euler kirişinin enine lineer serbest titreşimi ele alınmıştır. Eğilmede Bernoulli-Euler kirişinin genel denklemi;

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[EI \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right] + \rho A \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0, \quad 0 < x < L \quad (2.185)$$

olarak verilmiştir (Du vd 1995). Burada EI, kirişin rijitliği, ρA , kiriş boyu başına düşen kütle ve L, kirişin boyudur.

Bernoulli-Euler kirişinin serbest titreşimi için, enine yerdeğiştirmesi $w(x, t)$;

$$w(x, t) = W(x) e^{i\omega t} \quad (2.186)$$

olarak verilmiştir (Du vd 1995). Denklem (2.186), Denklem (2.185)'de yerine yazıldığında;

$$\frac{d^4W}{dX^4} - \lambda^2 W = 0 \quad (2.187)$$

elde edilir. Burada $\lambda^2 = \rho A \omega^2 L^4 / EI$, boyutsuz frekans parametresi ve $X = x / L$ olmak üzere, x 'in normalize edilmiş yani boyutsuzlaştırılmış durumudur. Denklem (2.187) 4. dereceden olduğu için 4 adet sınır şartına ihtiyaç vardır.

Bu örnekte, bir ucu ankastre diğer ucu serbest sınır şartlarına sahip Bernoulli-Euler kirişinin enine serbest titreşimi incelenmiştir. Bu yüzden sınır şartları;

$$W = \frac{dW}{dX} = 0, \quad X = 0 \quad (2.188)$$

ve,

$$\frac{d^2W}{dX^2} = \frac{d^3W}{dX^3} = 0, \quad X = 1 \quad (2.189)$$

şeklinde yazılabilir.

Denklem (2.187)'de genel denklemi verilen Bernoulli-Euler kirişinin uç düğüm noktalarında ikişer şarttan toplam 4 adet sınır şartı bulunmaktadır. Bu yüzden çözüm için gerekli N adet denklemden dördü, Denklem (2.188) ve (2.189)'dan, diğer (N-4) denklem ise Denklem (2.187)'den elde edilir. Bu amaçla Denklem (2.187)'nin GDQ formu;

$$\sum_{j=1}^N a_{ij}^{(4)} W_j = \lambda^2 W_i, \quad i = 3, 4, \dots, N-2 \quad (2.190)$$

şeklinde ifade edilebilir. $X = 0$ ve $X = 1$ 'deki sınır şartları GDQ formunda;

$$W_1 = 0, \quad \sum_{j=1}^N a_{1j}^{(1)} W_j = 0, \quad X = 0 \quad (2.191)$$

$$\sum_{j=1}^N a_{Nj}^{(2)} W_j = 0, \quad \sum_{j=1}^N a_{Nj}^{(3)} W_j = 0, \quad X = 1 \quad (2.192)$$

olarak yazılabilir.

Denklem (2.190), (2.191) ve (2.192), kirişin dış düğüm noktaları (bilinenler) “e” ile ve iç düğüm noktaları (bilinmeyenler) “i” ile gösterilmek üzere aşağıdaki biçimde;

$$\begin{bmatrix} K_{ee} & K_{ei} \\ K_{ie} & K_{ii} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} W_e \\ W_i \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ \lambda^2 W_i \end{Bmatrix} \quad (2.193)$$

veya daha açık bir ifade ile 7 düğüm noktalı bir eleman için;

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cc} K_{ee} & K_{ei} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & a_{16}^{(1)} & a_{17}^{(1)} & a_{13}^{(1)} & a_{14}^{(1)} & a_{15}^{(1)} \\ a_{71}^{(2)} & a_{72}^{(2)} & a_{76}^{(2)} & a_{77}^{(2)} & a_{73}^{(2)} & a_{74}^{(2)} & a_{75}^{(2)} \\ a_{71}^{(3)} & a_{72}^{(3)} & a_{76}^{(3)} & a_{77}^{(3)} & a_{73}^{(3)} & a_{74}^{(3)} & a_{75}^{(3)} \\ \hline a_{31}^{(4)} & a_{32}^{(4)} & a_{36}^{(4)} & a_{37}^{(4)} & a_{33}^{(4)} & a_{34}^{(4)} & a_{35}^{(4)} \\ a_{41}^{(4)} & a_{42}^{(4)} & a_{46}^{(4)} & a_{47}^{(4)} & a_{43}^{(4)} & a_{44}^{(4)} & a_{45}^{(4)} \\ a_{51}^{(4)} & a_{52}^{(4)} & a_{56}^{(4)} & a_{57}^{(4)} & a_{53}^{(4)} & a_{54}^{(4)} & a_{55}^{(4)} \end{bmatrix} & \begin{Bmatrix} W_1 \\ W_2 \\ W_6 \\ W_7 \\ \hline W_3 \\ W_4 \\ W_5 \end{Bmatrix} = \lambda^2 \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \hline W_3 \\ W_4 \\ W_5 \end{Bmatrix} \\ K_{ie} & K_{ii} \end{array} \end{array} \quad (2.194)$$

olarak düzenlenmelidir.

Denklem (2.193) açıldığında aşağıdaki iki denklem elde edilir.

$$[K_{ee}] \{W_e\} + [K_{ei}] \{W_i\} = \{0\} \quad (2.195)$$

$$[K_{ie}] \{W_e\} + [K_{ii}] \{W_i\} = \lambda^2 \{W_i\} \quad (2.196)$$

Denklem (2.195)'den $\{W_e\}$ ifadesi yalnız bırakıldığında;

$$\{W_e\} = -[K_{ee}]^{-1} [K_{ei}] \{W_i\} \quad (2.197)$$

elde edilir. Denklem (2.197), Denklem (2.196)'da yerine yazıldığında;

$$[K_{ie}] \left(-[K_{ee}]^{-1} [K_{ei}] \{W_i\} \right) + [K_{ii}] \{W_i\} = \lambda^2 \{W_i\} \quad (2.198)$$

elde edilir. Bu ifade düzenlendiğinde;

$$[K] \{W_i\} - \lambda^2 [I] \{W_i\} = \{0\} \quad (2.199)$$

denklemini yazılabilir. Burada $[K]$, $(N-4) \times (N-4)$ boyutundadır ve;

$$[K] = [K_{ii}] - [K_{ie}] [K_{ee}]^{-1} [K_{ei}] \quad (2.200)$$

şeklindedir.

Denklem (2.199), standart özdeğer problemidir ve çözümü yapıldığında bulunan özdeğerler, temel frekans değerinin karesini vermektedir.

Buna göre, eşit olarak bölünmüş 7 düğüm noktalı Bernoulli-Euler kirişinin enine serbest titreşimi için elde edilen boyutsuz temel frekans değeri GDQM ile;

$$\lambda = 3,4736566$$

olarak bulunur. Buna karşılık, Bernoulli-Euler kirişinin enine serbest titreşimi için boyutsuz gerçek frekansı;

$$\lambda = 3,5160153$$

olarak verilmiştir (Yılmaz 1999).

2.6. Quadrature Eleman Metodu ve Diferansiyel Quadrature Eleman Metodu

Quadrature Eleman Metodu (QEM), ilk defa Striz vd (1994) tarafından önerilmiştir. Bilindiği üzere SEM ve SFM, yüksek doğrulukta sonuçlar elde edebilmek için, hesaplama alanını olabildiğince yüksek sayıda düğüm noktasına ayırırlar. Sözü edilen bu özellik birçok durumda, hesaplama performansı bakımından engelleyici olmuştur. DQM düşük düğüm sayıları kullandığından dolayı bu sebepten kaynaklanan hesaplama performansı düşüşünü ortadan kaldırmıştır. Buna karşılık özellikle süreksiz yüklü kirişler gibi gerçek hayattaki karmaşık yapıların çözümünde, DQM etkinliğini ve kolay kullanım özelliğini kaybetmektedir. Bu sebeple Striz vd (1994), çalışmalarında SEM'ye benzer şekilde hesaplama alanını birkaç alt elemana bölerek yukarıdaki zorlukların üstesinden gelmişlerdir. Metotta, her lokal eleman için elde edilen ağırlıklı katsayılar matrisleri, global eleman ağırlıklı katsayılar matrislerine dönüştürülür ve her elemandan dönüştürülen global ağırlıklı katsayılar matrisleri birleştirilerek bütün yapının ağırlıklı katsayılar matrisi elde edilir.

QEM prensip olarak SEM ve SFM'ye benzer olarak çözüm yapar. Ancak bu metotlardan olan temel farkı düğüm noktaları dağılımıdır. QEM, aynı düğüm noktasına uygulanan birden fazla başlangıç veya sınır şartını, Jang vd (1989) tarafında önerilen δ -yaklaşımını kullanarak çözer. Buna karşılık metot, ağırlıklı katsayıların elde edilmesinde Vandermonde matrisini kullandığı için, yüksek sayıda kullanılan düğüm noktalarında zorluklar meydana gelmektedir. Ayrıca δ -yaklaşımı, metot olarak düğüm noktalarını çok yaklaştırırsa da, özellikle rijitlik matrisinin oluşturulmasında, elemanlar arası düğüm noktalarının sıralanışlarından dolayı hatalar gelebilmektedir.

QEM'nin yukarıdaki eksikliklerinin giderilmesi amacıyla ilk defa Wang ve Gu (1997) tarafından Diferansiyel Quadrature Eleman Metodu (DQEM) ileri sürülmüştür. Yukarıda anlatıldığı üzere QEM'de sınır şartlarının girilebilmesi için Jang vd (1989) tarafında önerilen δ -yaklaşımı kullanılmıştır. δ -yaklaşımında, ikinci sınır şartı tam doğru yerine girilemediğinden dolayı, tam doğru bir yaklaşım değildir. Wang ve Gu (1997), QEM'deki δ -yaklaşımını kaldırarak, dördüncü dereceden diferansiyel denklem için uç noktalara iki serbestlik derecesi atayarak problemi çözmüşlerdir. Wang ve Gu

(1997), çalışmalarında DQEM'nin QEM'den daha kullanışlı ve doğru sonuçlar verdiğini göstermişlerdir.

2.6.1. Quadrature eleman metodu

Bu bölümde öncelikle QEM'de ağırlıklı katsayıların nasıl elde edildiği gösterilecek daha sonra metot tarif edilecektir.

QEM'de global ve lokal düğüm noktaları arasında; $x \in [a, b]$ aralığında global koordinatlarda tanımlı ve $\bar{x} \in [-1, 1]$ aralığında lokal koordinatlarda tanımlı olmak üzere, aşağıdaki ilişki mevcuttur (Chen 1994), (Chen vd 2000).

$$\bar{x} = \frac{2}{(b-a)}(x-a) - 1 \quad (2.201)$$

Global koordinatlardaki $[a, b]$ aralığında bir e elemanı tanımlı olsun. e elemanı için $\phi(\bar{x})$ fonksiyonu aşağıdaki biçimde tanımlıdır (Chen vd 2000).

$$\phi(\bar{x}) \approx \phi_n^e(\bar{x}) = \sum_{k=0}^n N_k(\bar{x}) \phi_k^e = [N] \{ \phi^e \} \quad (2.202)$$

Burada, $N_k(\bar{x})$ temel fonksiyon ve ϕ_k^e katsayılarıdır. İnterpolasyon temel fonksiyonu $N_k(\bar{x})$ aşağıdaki biçimde hesaplanır (Chen vd 2000).

$$[N] = [\bar{x}] [v_0]^{-T} \quad (2.203)$$

Burada,

$$[\bar{x}] = \begin{bmatrix} 1 & \bar{x} & \dots & \bar{x}^{n-1} \end{bmatrix} \quad (2.204)$$

dir ve $[v_0]$ Vandermonde matrisidir. Yani;

$$[v_0] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \bar{x}_1 & \bar{x}_2 & \dots & \bar{x}_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \bar{x}_1^{n-1} & \bar{x}_2^{n-1} & \dots & \bar{x}_n^{n-1} \end{bmatrix} \quad (2.205)$$

şeklinde ifade edilir.

Diğer taraftan $\phi_n^e(\bar{x})$ 'nin türevi aşağıdaki biçimde elde edilir.

$$\phi_n^e(\bar{x}_i) = \frac{d}{d\bar{x}} [N] \{\phi^e\} = [0 \quad 1 \quad 2\bar{x}_i \quad \dots \quad (n-1)\bar{x}_i^{n-2}] [v_0]^{-T} \{\phi^e\} \quad (2.206)$$

Bütün düğüm noktalarının türevleri, Denklem (2.206) kullanılarak hesaplandığında, aşağıda $[A^{(1)}]$ ile gösterilen birinci dereceden türevlere ait ağırlıklı katsayılar matrisi elde edilir.

$$\frac{d}{d\bar{x}} \phi_n^e(\bar{x}) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2\bar{x}_1 & \dots & (n-1)\bar{x}_1^{n-2} \\ 0 & 1 & 2\bar{x}_2 & \dots & (n-1)\bar{x}_2^{n-2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 1 & 2\bar{x}_{n-1} & \dots & (n-1)\bar{x}_{n-1}^{n-2} \\ 0 & 1 & 2\bar{x}_n & \dots & (n-1)\bar{x}_n^{n-2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \bar{x}_1 & \bar{x}_2 & \dots & \bar{x}_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \bar{x}_1^{n-2} & \bar{x}_2^{n-2} & \dots & \bar{x}_n^{n-2} \\ \bar{x}_1^{n-1} & \bar{x}_2^{n-1} & \dots & \bar{x}_n^{n-1} \end{bmatrix}^{-T} \{\phi^e\} = [A^{(1)}] \{\phi^e\} \quad (2.207)$$

İkinci ve r. dereceden türevlere ait ağırlıklı katsayılar ise;

$$\frac{d^2}{d\bar{x}^2} = \left(\frac{d}{d\bar{x}} \right) \left(\frac{d}{d\bar{x}} \right) = [A^{(1)}] [A^{(1)}] \quad (2.208)$$

ve,

$$\frac{d^r}{d\bar{x}^r} = \left(\frac{d}{d\bar{x}} \right) \left(\frac{d^{r-1}}{d\bar{x}^{r-1}} \right) = \underbrace{[A^{(1)}] [A^{(1)}] \dots [A^{(1)}]}_r \quad (2.209)$$

olarak elde edilir.

Aşağıda QEM ile Bernoulli-Euler kirişi incelenmiştir. Bernoulli-Euler kirişinde, küçük deformasyonlar için genel denklemler aşağıdaki biçimde ifade edilebilir (William 1979).

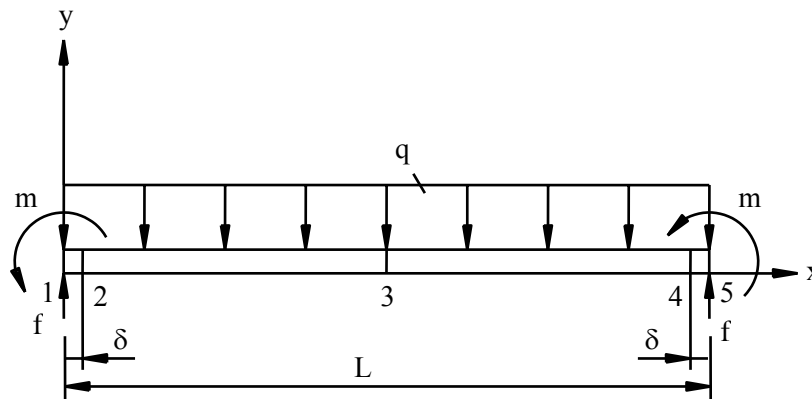
$$EI \frac{d^4 y}{dx^4} = q(x), \quad EI \frac{d^3 y}{dx^3} = f, \quad EI \frac{d^2 y}{dx^2} = m, \quad (x \in [0, L]) \quad (2.210)$$

Denklem (2.210)'da ifade edilen y , E , I , $q(x)$, f , ve m sırasıyla; y -doğrultusundaki düşey yer değiştirme fonksiyonu, elastisite modülü, z eksenine göre atalet momenti, yayılı yük, enine kesme kuvveti ve eğilme momentidir.

Düzgün yayılı yük tesirindeki lokal eleman için beş düğüm noktası yeterlidir. Şekil 2.2'de gösterildiği üzere bu düğüm noktalarından ikisi uç düğüm noktalarında (1 ve 5), diğer ikisi uç düğüm noktalarından δ kadar mesafede (2 ve 4) ve sonuncusu ise kirişin ortasındadır (3). Kesme kuvvetleri ve momentler kirişin uç noktalarına uygulanır. δ 'nın çok küçük olmasından dolayı;

$$m_1 \cong m_2, \quad m_4 \cong m_5, \quad f_1 \cong f_2, \quad f_4 \cong f_5 \quad (2.211)$$

olarak yazılabilir.



Şekil 2.2 Beş düğüm noktalı QEM kiriş elemanı

Şekil 2.2'deki kirişe, Denklem (2.210) dikkate alınarak QEM uygulandığında;

$$F_1 = \sum_{j=1}^5 a_{1j}^{(3)} Y_j, M_2 = \sum_{j=1}^5 a_{2j}^{(2)} Y_j, Q_3 = \sum_{j=1}^5 a_{3j}^{(4)} Y_j, F_4 = \sum_{j=1}^5 a_{4j}^{(3)} Y_j, M_5 = \sum_{j=1}^5 a_{5j}^{(2)} Y_j \quad (2.212)$$

ifadeleri elde edilir (Chen 1994, Striz vd 1994).

Denklem (2.212)'deki $a_{ij}^{(2)}$, $a_{ij}^{(3)}$, ve $a_{ij}^{(4)}$ sırasıyla ikinci, üçüncü ve dördüncü derecelere ait DQ ağırlıklı katsayılarıdır. Bu katsayılar Denklem (2.207), (2.208) ve (2.209)'dan elde edilir. Yer değiştirme vektörü ise;

$$\{Y\} = \{Y_1 \quad Y_2 \quad Y_3 \quad Y_4 \quad Y_5\}^T \quad (2.213)$$

olarak verilir (Chen 1994). Burada $Y = y/\alpha$ olmak üzere normalize edilmiş y-çökmesi, α referans boy, $F = fL^3/EI$ boyutsuz kesme kuvveti, $M = mL^2/EI$ boyutsuz moment ve $Q = qL^4/EI$ boyutsuz yayılı yüküdür. Denklem (2.212)'nin genel hali;

$$[K]\{\delta\} = \{F\} \quad (2.214)$$

şeklindedir. Burada $\{F\}$, kuvvet vektörüdür ve aşağıdaki biçimde ifade edilir.

$$\{F\} = \{F_1 \quad M_2 \quad Q_3 \quad F_4 \quad M_5\}^T \quad (2.215)$$

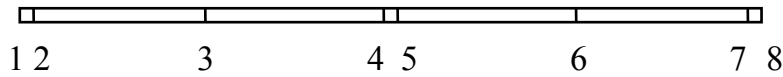
Denklem (2.214)'deki $[K]$, DQ ağırlıklı katsayıların düzenlenmiş halidir. Yani rijitlik matrisidir ve sınır şartlarına göre aşağıdaki biçimde ifade edilir.

$$[K] = \begin{bmatrix} a_{11}^{(3)} & a_{12}^{(3)} & a_{13}^{(3)} & a_{14}^{(3)} & a_{15}^{(3)} \\ a_{21}^{(2)} & a_{22}^{(2)} & a_{23}^{(2)} & a_{24}^{(2)} & a_{25}^{(2)} \\ a_{31}^{(4)} & a_{32}^{(4)} & a_{33}^{(4)} & a_{34}^{(4)} & a_{35}^{(4)} \\ a_{41}^{(3)} & a_{42}^{(3)} & a_{43}^{(3)} & a_{44}^{(3)} & a_{45}^{(3)} \\ a_{51}^{(2)} & a_{52}^{(2)} & a_{53}^{(2)} & a_{54}^{(2)} & a_{55}^{(2)} \end{bmatrix} \quad (2.216)$$

İki elemanlı dördüncü dereceden genel denklemi olan kiriş için düğüm noktaları dağılımı Şekil 2.3’de gösterilmiştir. Birinci elemanın düğüm noktaları, 1 ile 5 numaralı düğüm noktaları arasında verilirken, ikinci elemanın düğüm noktaları, 4 ile 8 numaralı düğüm noktaları arasında verilir. 4 ve 5 numaralı düğüm noktaları ortak düğüm noktalarıdır ve elemanlar bu noktalarda üst üste binmektedir. Bu nedenden dolayı aşağıdaki şart ile eğim uygunluk şartı sağlanır.

$$\left. \frac{dy}{dx} \right|_{e2} = \frac{y_5 - y_4}{\delta} = \left. \frac{dy}{dx} \right|_{e1} \quad (2.217)$$

Bu düzenleme ile hem çökme hemde dönme uygunluk şartları sağlanmış olur.



Şekil 2.3 İki elemanlı kiriş için düğüm noktaları dağılımı

İki elemanlı kiriş için rijitlik matrisi, Denklem (2.216) ve (2.217) dikkate alınarak aşağıdaki biçimde elde edilir.

$$\begin{bmatrix} a_{11}^{(3)} & a_{12}^{(3)} & a_{13}^{(3)} & a_{14}^{(3)} & a_{15}^{(3)} & 0 & 0 & 0 \\ a_{21}^{(2)} & a_{22}^{(2)} & a_{23}^{(2)} & a_{24}^{(2)} & a_{25}^{(2)} & 0 & 0 & 0 \\ a_{31}^{(4)} & a_{32}^{(4)} & a_{33}^{(4)} & a_{34}^{(4)} & a_{35}^{(4)} & 0 & 0 & 0 \\ a_{41}^{(3)} & a_{42}^{(3)} & a_{43}^{(3)} & a_{44}^{(3)} + a_{11}^{(3)} & a_{45}^{(3)} + a_{12}^{(3)} & a_{13}^{(3)} & a_{14}^{(3)} & a_{15}^{(3)} \\ a_{51}^{(2)} & a_{52}^{(2)} & a_{53}^{(2)} & a_{54}^{(2)} + a_{21}^{(2)} & a_{55}^{(2)} + a_{22}^{(2)} & a_{23}^{(2)} & a_{24}^{(2)} & a_{25}^{(2)} \\ 0 & 0 & 0 & a_{31}^{(4)} & a_{32}^{(4)} & a_{33}^{(4)} & a_{34}^{(4)} & a_{35}^{(4)} \\ 0 & 0 & 0 & a_{41}^{(3)} & a_{42}^{(3)} & a_{43}^{(3)} & a_{44}^{(3)} & a_{45}^{(3)} \\ 0 & 0 & 0 & a_{51}^{(2)} & a_{52}^{(2)} & a_{53}^{(2)} & a_{54}^{(2)} & a_{55}^{(2)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ Y_3 \\ Y_4 \\ Y_5 \\ Y_6 \\ Y_7 \\ Y_8 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ M_2 \\ Q_3 \\ F_4 \\ M_5 \\ Q_6 \\ F_7 \\ M_8 \end{Bmatrix} \quad (2.218)$$

2.6.2. Diferansiyel quadrature eleman metodu

Bu bölümde QEM’de olduğu gibi öncelikle DQEM’de ağırlıklı katsayıların nasıl elde edildiği gösterilecek daha sonra metot tarif edilecektir.

Ağırlıklı katsayıların hesaplanabilmesi için u bağımlı değişkeni aşağıdaki biçimde ele alınsın (Chen 1994).

$$u(\bar{x}) = c_1 + c_2\bar{x} + c_3\bar{x}^2 + \dots + c_{n+2}\bar{x}^{n+1} \quad (2.219)$$

Denklem (2.219)'da $\bar{x} \in [-1,1]$ aralığındaki lokal koordinat sistemini temsil etmektedir ve $x \in [a,b]$ aralığındaki global koordinat sistemi ile aralarında aşağıdaki ilişki vardır.

$$\bar{x} = \frac{2}{(b-a)}(x-a) - 1 \quad (2.220)$$

Burada, a ve b global koordinat sisteminin uç düğüm noktalarıdır. Denklem (2.219)'un kısaltılmış hali;

$$u(\bar{x}) = [b]\{c\} \quad (2.221)$$

şeklinde yazılabilir. Denklem (2.221)'deki $[b]$ matrisi ve $\{c\}$ vektörü sırasıyla;

$$[b] = [1 \quad \bar{x} \quad \bar{x}^2 \quad \dots \quad \bar{x}^n \quad \bar{x}^{n+1}] \quad (2.222)$$

$$\{c\} = \{c_1 \quad c_2 \quad c_3 \quad \dots \quad c_n \quad c_{n+1} \quad c_{n+2}\}^T \quad (2.223)$$

şeklinde ifade edilebilir. Denklem (2.221)'den, Denklem (2.222) ve (2.223)'de dikkate alınarak;

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{u}_1 \\ \mathbf{u}'_1 \\ \mathbf{u}_2 \\ \dots \\ \dots \\ \mathbf{u}_{n-1} \\ \mathbf{u}_n \\ \mathbf{u}'_n \end{array} \right\} = \left[\begin{array}{ccccccccc} 1 & \bar{x}_1 & \bar{x}_1^2 & \dots & \dots & \bar{x}_1^{n-1} & \bar{x}_1^n & \bar{x}_1^{n+1} \\ 0 & 1 & 2\bar{x}_1 & \dots & \dots & (n-1)\bar{x}_1^{n-2} & n\bar{x}_1^{n-1} & (n+1)\bar{x}_1^n \\ 1 & \bar{x}_2 & \bar{x}_2^2 & \dots & \dots & \bar{x}_2^{n-1} & \bar{x}_2^n & \bar{x}_2^{n+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & \bar{x}_{n-1} & \bar{x}_{n-1}^2 & \dots & \dots & \bar{x}_{n-1}^{n-1} & \bar{x}_{n-1}^n & \bar{x}_{n-1}^{n+1} \\ 1 & \bar{x}_n & \bar{x}_n^2 & \dots & \dots & \bar{x}_n^{n-1} & \bar{x}_n^n & \bar{x}_n^{n+1} \\ 0 & 1 & 2\bar{x}_n & \dots & \dots & (n-1)\bar{x}_n^{n-2} & n\bar{x}_n^{n-1} & (n+1)\bar{x}_n^n \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{c}_1 \\ \mathbf{c}_2 \\ \mathbf{c}_3 \\ \dots \\ \dots \\ \mathbf{c}_n \\ \mathbf{c}_{n+1} \\ \mathbf{c}_{n+2} \end{array} \right\} \quad (2.224)$$

eşitliği veya kısaca;

$$\{\mathbf{u}\} = [\mathbf{N}_0] \{\mathbf{c}\} \quad (2.225)$$

eşitliği yazılabilir (Chen 1994). Denklem (2.224)'deki ()' ifadesi d/dx türevini ifade etmektedir. Genel olarak, Denklem (2.221) aşağıdaki biçimde elde edilebilir.

$$\{\bar{\mathbf{u}}\} = [\mathbf{N}] \{\mathbf{c}\} \quad (2.226)$$

Burada;

$$\{\bar{\mathbf{u}}\} = \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{u}(\bar{x}) \\ \mathbf{u}'(\bar{x}) \\ \dots \\ \mathbf{u}(\bar{x}) \\ \dots \\ \mathbf{u}(\bar{x}) \\ \mathbf{u}'(\bar{x}) \end{array} \right\} \text{ ve } [\mathbf{N}] = \left[\begin{array}{l} [\mathbf{b}] \\ [\mathbf{b}'] \\ \dots \\ [\mathbf{b}] \\ \dots \\ [\mathbf{b}] \\ [\mathbf{b}'] \end{array} \right] \quad (2.227)$$

şeklindedir. Ayrıca Denklem (2.225)'de $\{\mathbf{c}\}$ yalnız bırakıldığında;

$$\{\mathbf{c}\} = [\mathbf{N}_0]^{-1} \{\mathbf{u}\} \quad (2.228)$$

elde edilir. Denklem (2.228), Denklem (2.226)'da yerine yazılıp, \bar{x} 'e göre türevi alındığında;

$$\frac{d}{d\bar{x}}\{\bar{u}\} = \frac{d}{d\bar{x}}[N][N_0]^{-1}\{u\} \quad (2.229)$$

olarak bulunur. Bu ifadeye DQ uygulandığında;

$$\frac{d}{dx}\{u\} \equiv [A^{(1)}]\{u\} \quad (2.230)$$

elde edilir (Chen 1994). Burada $[A^{(1)}]$, birinci dereceden ağırlıklı katsayılar matrisini ifade etmektedir ve aşağıdaki biçimde elde edilir (Chen 1994).

$$[A^{(1)}] \equiv [N'_0][N_0]^{-1} \quad (2.231)$$

Denklem (2.231)'deki N'_0 , N_0 'ın türevidir ve aşağıdaki biçimde ifade edilir.

$$[N'_0] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2\bar{x}_1 & \dots & (n-1)\bar{x}_1^{n-2} & n\bar{x}_1^{n-1} & (n+1)\bar{x}_1^n \\ 0 & 0 & 2 & \dots & (n-1)(n-2)\bar{x}_1^{n-3} & n(n-1)\bar{x}_1^{n-2} & (n+1)n\bar{x}_1^{n-1} \\ 0 & 1 & 2\bar{x}_2 & \dots & (n-1)\bar{x}_2^{n-2} & n\bar{x}_2^{n-1} & (n+1)\bar{x}_2^n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 1 & 2\bar{x}_n & \dots & (n-1)\bar{x}_n^{n-2} & n\bar{x}_n^{n-1} & (n+1)\bar{x}_n^n \\ 0 & 0 & 2 & \dots & (n-1)(n-2)\bar{x}_n^{n-3} & n(n-1)\bar{x}_n^{n-2} & (n+1)n\bar{x}_n^{n-1} \end{bmatrix} \quad (2.232)$$

Denklem (2.232)'deki alt indisler, i . düğüm noktasını ifade etmektedir ve düğüm noktaları dağılımı aşağıdaki biçimde verilmiştir.

$$\bar{x}_i = \frac{(2i-n)}{n}, \quad i = 0, \dots, n \quad (2.233)$$

Buna göre ağırlıklı katsayılar matrisi aşağıdaki biçimde verilir.

$$\frac{d}{dx} \equiv [A^{(1)}] \quad (2.234)$$

İkinci, üçüncü ve dördüncü dereceden ağırlıklı katsayılar matrisleri ise;

$$\frac{d^2}{dx^2} \equiv \frac{d}{dx} \frac{d}{dx} = [A^{(1)}][A^{(1)}] \equiv [A^{(2)}] \quad (2.235)$$

$$\frac{d^3}{dx^3} \equiv \frac{d^2}{dx^2} \frac{d}{dx} = [A^{(2)}][A^{(1)}] \equiv [A^{(3)}] \quad (2.236)$$

$$\frac{d^4}{dx^4} \equiv \frac{d^3}{dx^3} \frac{d}{dx} = [A^{(3)}][A^{(1)}] \equiv [A^{(4)}] \quad (2.237)$$

çarpımlarıyla bulunabilir (Chen 1994).

Aşağıda 3 düğüm noktalı kiriş eleman için, birinci dereceden türevlerin ağırlıklı katsayıları elde edilmiştir.

Denklem (2.231)'deki $[N_0]$ ve $[N'_0]$, düğüm noktaları koordinatları 0, L/2 ve L alınarak, Denklem (2.224) ve (2.232)'de yerine konulmasıyla, sırasıyla aşağıdaki biçimde elde edilir.

$$N_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \frac{L}{2} & \frac{L^2}{4} & \frac{L^3}{8} & \frac{L^4}{16} \\ 1 & L & L^2 & L^3 & L^4 \\ 0 & 1 & 2L & 3L^2 & 4L^3 \end{bmatrix} \quad (2.238)$$

$$N'_0 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & L & \frac{3L^2}{4} & \frac{L^3}{2} \\ 0 & 1 & 2L & 3L^2 & 4L^3 \\ 0 & 0 & 2 & 6L & 12L^2 \end{bmatrix} \quad (2.239)$$

Elde edilen $[N_0]$ ve $[N'_0]$ değerleri Denklem (2.231)'de yerine yazıldığında, birinci derece türevler için ağırlıklı katsayılar matrisi aşağıdaki gibi elde edilir.

$$A_{ij}^{(1)} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{22}{L^2} & -\frac{8}{L} & \frac{32}{L^2} & -\frac{10}{L^2} & \frac{2}{L} \\ -\frac{3}{2L} & -\frac{1}{4} & 0 & \frac{3}{2L} & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{10}{L^2} & -\frac{2}{L} & \frac{32}{L^2} & -\frac{22}{L^2} & \frac{8}{L} \end{bmatrix} \quad (2.240)$$

DQEM'de, QEM'den farklı olarak Bernoulli-Euler kirişi aşağıdaki biçimde incelenir. Buna göre, küçük deformasyonlar için genel denklemler;

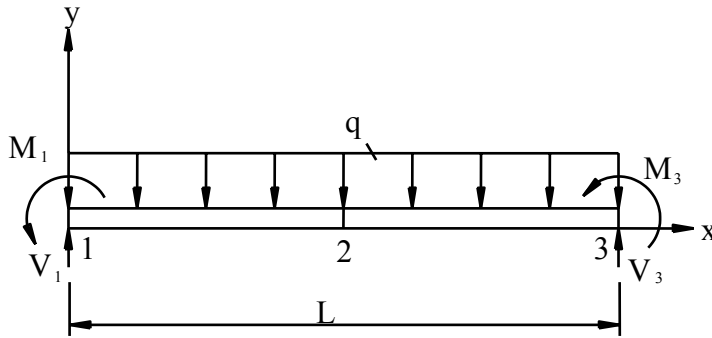
$$EI \frac{d^4 y}{dx^4} = q(x), \quad EI \frac{d^3 y}{dx^3} = V(x), \quad EI \frac{d^2 y}{dx^2} = M(x), \quad (x \in [0, L]) \quad (2.241)$$

olarak verilir (Wang ve Gu 1997). Şekil 2.4'de üç düğüm noktalı bir DQEM kiriş elemanı görülmektedir. Şekil 2.4'deki kirişe, Denklem (2.241) dikkate alınarak DQEM uygulandığında;

$$V_1 = EI \sum_{j=1}^5 a_{1j}^{(3)} \delta_j, \quad M_1 = -EI \sum_{j=1}^5 a_{1j}^{(2)} \delta_j, \quad q_2 = EI \sum_{j=1}^5 a_{3j}^{(4)} \delta_j \quad (2.242)$$

$$V_3 = -EI \sum_{j=1}^5 a_{4j}^{(3)} \delta_j, \quad M_3 = EI \sum_{j=1}^5 a_{4j}^{(2)} \delta_j \quad (2.243)$$

ifadeleri elde edilir (Wang ve Gu 1997).



Şekil 2.4 Üç düğüm noktalı DQEM kiriş elemanı

Denklem (2.242) ve (2.243)'deki $a_{ij}^{(2)}$, $a_{ij}^{(3)}$, ve $a_{ij}^{(4)}$ sırasıyla ikinci, üçüncü ve dördüncü derecelere ait DQ ağırlıklı katsayılarıdır. Yer değiştirme vektörü ise;

$$\{\delta\} = [y_1 \quad y'_1 \quad y_2 \quad y_3 \quad y'_3]^T \quad (2.244)$$

olarak verilir (Wang ve Gu 1997).

Denklem (2.242) ve (2.243)'ün genel hali;

$$[K]\{\delta\} = \{F\} \quad (2.245)$$

şeklindedir. Burada $\{F\}$, kuvvet vektörüdür ve aşağıdaki biçimde ifade edilir (Wang ve Gu 1997).

$$\{F\} = [V_1 \quad M_1 \quad q_2 \quad V_3 \quad M_3]^T \quad (2.246)$$

Denklem (2.245)'deki $[K]$, DQ ağırlıklı katsayıların düzenlenmiş halidir yani rijitlik matrisidir ve Şekil 2.4'de verilen kirişe göre aşağıdaki biçimde düzenlenir.

$$[K] = EI \begin{bmatrix} a_{11}^{(3)} & a_{12}^{(3)} & a_{13}^{(3)} & a_{14}^{(3)} & a_{15}^{(3)} \\ -a_{11}^{(2)} & -a_{12}^{(2)} & -a_{13}^{(2)} & -a_{14}^{(2)} & -a_{15}^{(2)} \\ a_{31}^{(4)} & a_{32}^{(4)} & a_{33}^{(4)} & a_{34}^{(4)} & a_{35}^{(4)} \\ -a_{41}^{(3)} & -a_{42}^{(3)} & -a_{43}^{(3)} & -a_{44}^{(3)} & -a_{45}^{(3)} \\ a_{41}^{(2)} & a_{42}^{(2)} & a_{43}^{(2)} & a_{44}^{(2)} & a_{45}^{(2)} \end{bmatrix} \quad (2.247)$$

Elde edilen rijitlik matrisinin determinantı sıfırdır. Neticede bu matrisin tersi alınamaz. Bu yüzden Denklem (2.247)'de elde edilen matris aşağıdaki işlemden geçirilir.

Öncelikle, kirişin dış düğüm noktaları (bilinenler) “e” ile ve iç düğüm noktaları (bilinmeyenler) “i” ile gösterilmek üzere aşağıdaki düzenleme yapılır.

$$\begin{bmatrix} K_{ee} & K_{ei} \\ K_{ie} & K_{ii} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta_e \\ \delta_i \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_e \\ F_i \end{Bmatrix} \quad (2.248)$$

Denklem (2.248) açıldığında aşağıdaki iki denklem elde edilir.

$$[K_{ee}]\{\delta_e\} + [K_{ei}]\{\delta_i\} = \{F_e\} \quad (2.249)$$

$$[K_{ie}]\{\delta_e\} + [K_{ii}]\{\delta_i\} = \{F_i\} \quad (2.250)$$

Denklem (2.249)'dan $\{\delta_e\}$ ifadesi yalnız bırakıldığında;

$$[K_{ee}]\{\delta_e\} = \{F_e\} - [K_{ei}]\{\delta_i\} \quad (2.251)$$

$$[K_{ee}]^{-1} [K_{ee}]\{\delta_e\} = [K_{ee}]^{-1} (\{F_e\} - [K_{ei}]\{\delta_i\}) \quad (2.252)$$

$$\{\delta_e\} = [K_{ee}]^{-1} (\{F_e\} - [K_{ei}]\{\delta_i\}) \quad (2.253)$$

denklemini elde edilir.

Denklem (2.253), Denklem (2.250)'de yerine yazıldığında;

$$[K_{ie}]\left([K_{ee}]^{-1}(\{F_e\} - [K_{ei}]\{\delta_i\})\right) + [K_{ii}]\{\delta_i\} = \{F_i\} \quad (2.254)$$

bulunur.

Denklem (2.254)'e dağılma özelliği uygulandığında;

$$[K_{ie}][K_{ee}]^{-1}\{F_e\} - [K_{ie}][K_{ee}]^{-1}[K_{ei}]\{\delta_i\} + [K_{ii}]\{\delta_i\} = \{F_i\} \quad (2.255)$$

elde edilir.

Denklem (2.255) tekrar düzenlendiğinde;

$$\underbrace{\left([K_{ii}] - [K_{ie}][K_{ee}]^{-1}[K_{ei}]\right)}_{[K]}\{\delta_i\} = \underbrace{\{F_i\} - [K_{ie}][K_{ee}]^{-1}\{F_e\}}_{\{F\}} \quad (2.256)$$

elde edilir. Bu ifadenin çözülebilmesi için Denklem (2.247)'deki rijitlik matrisinin, Denklem (2.248)'de gösterildiği gibi düzenlenmesi gerekir. Denklem (2.247)'deki rijitlik matrisinin düzenlenmiş hali;

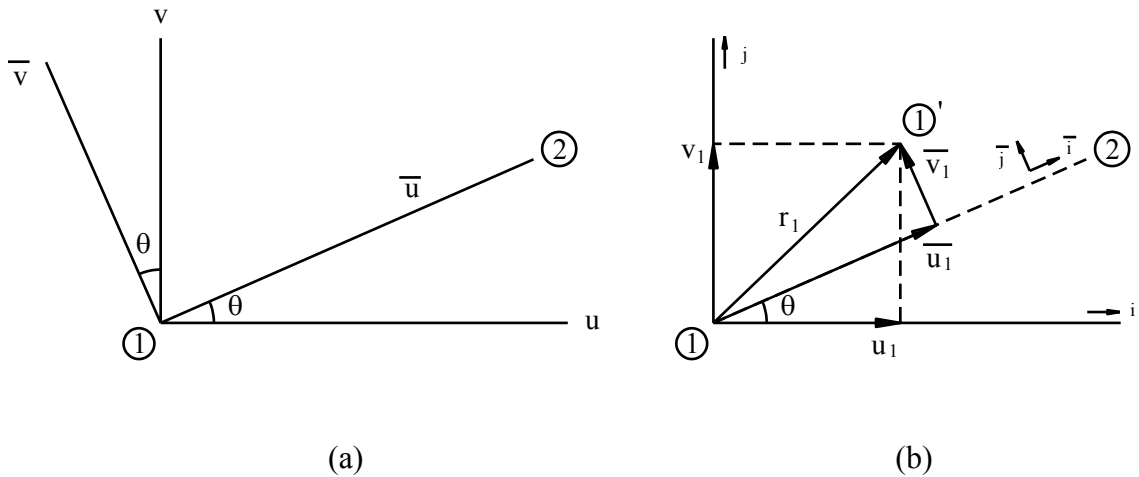
$$[K] = EI \begin{array}{c} \begin{array}{cccc|c} & \mathbf{K}_{ee} & & & \mathbf{K}_{ei} \\ \mathbf{a}_{11}^{(3)} & \mathbf{a}_{12}^{(3)} & \mathbf{a}_{14}^{(3)} & \mathbf{a}_{15}^{(3)} & \mathbf{a}_{13}^{(3)} \\ -\mathbf{a}_{11}^{(2)} & -\mathbf{a}_{12}^{(2)} & -\mathbf{a}_{14}^{(2)} & -\mathbf{a}_{15}^{(2)} & -\mathbf{a}_{13}^{(2)} \\ -\mathbf{a}_{41}^{(3)} & -\mathbf{a}_{42}^{(3)} & -\mathbf{a}_{44}^{(3)} & -\mathbf{a}_{45}^{(3)} & -\mathbf{a}_{43}^{(3)} \\ \mathbf{a}_{41}^{(2)} & \mathbf{a}_{42}^{(2)} & \mathbf{a}_{44}^{(2)} & \mathbf{a}_{45}^{(2)} & \mathbf{a}_{43}^{(2)} \\ \hline \mathbf{a}_{31}^{(4)} & \mathbf{a}_{32}^{(4)} & \mathbf{a}_{34}^{(4)} & \mathbf{a}_{35}^{(4)} & \mathbf{a}_{33}^{(4)} \end{array} \\ \begin{array}{cc} \mathbf{K}_{ie} & \mathbf{K}_{ii} \end{array} \end{array} \quad (2.257)$$

şeklindedir.

İki metotta da, değişik yönlerde yönlenmiş çerçeve elemanlar için transformasyon matrisleri kullanılır. Aşağıda lokal bölgelerden global bölgelere geçmek için kullanılan transformasyon matrislerinin elde edilme yöntemi anlatılmıştır.

2.6.3. Lokal ve global koordinatlar arasında transformasyon işleminin uygulanması

Bölüm 2.6.1 ve 2.6.2'de ele alınan elemanlar yatay ile sıfır derecelik açı yapan elemanlardır. Ancak kafes yapılarda değişik yönelimlere sahip elemanlar bulunmaktadır ve çözüm esnasında bu açı farklılıklarının hesaba katılması gereklidir. Bu açı farklılıkları işleme, lokal ve global koordinatlar arası geçiş için kullanılan transformasyon matrisleri ile katılır.



Şekil 2.5 Lokal ve global koordinatlar arasındaki transformasyon

Yatay ve dikey doğrultularda tanımlı u ve v global koordinatlar ile, yatayla α açısı yapan \bar{u} ve \bar{v} lokal koordinatları, Şekil 2.5a'da görülmektedir. Ayrıca Şekil 2.5b'de, r_1 yer değiştirmesinin değerinin, lokal koordinatlarda ve global koordinatlarda birbirine eşit olduğu görülmektedir. Bu eşitlik aşağıdaki biçimde ifade edilebilir (Thomson 1993).

$$r_1 = \bar{u}_1 \bar{i} + \bar{v}_1 \bar{j} = u_1 i + v_1 j \quad (2.258)$$

\bar{i} , \bar{j} ve i , j sırasıyla lokal koordinatlardaki ve global koordinatlardaki birim vektörlerdir. Denklem (2.258)'in bütün elemanları \bar{i} ile skaler olarak çarpıldığında eşitlik değişmez.

$$\bar{u}_1(\bar{i}\bar{i}) + \bar{v}_1(\bar{j}\bar{i}) = u_1(i\bar{i}) + v_1(j\bar{i}) \quad (2.259)$$

Çarpım işlemleri yapıldığında;

$$\bar{u}_1 + 0 = u_1 \cos \theta + v_1 \sin \theta \quad (2.260)$$

denklemini elde edilir. Benzer şekilde Denklem (2.258)'in bütün elemanları \bar{j} ile skaler olarak çarpıldığında eşitlik değişmez.

$$\bar{u}_1(\bar{i}\bar{j}) + \bar{v}_1(\bar{j}\bar{j}) = \bar{u}_1(i\bar{j}) + v_1(j\bar{j}) \quad (2.261)$$

Çarpım işlemi yapıldığında;

$$0 + \bar{v}_1 = -u_1 \sin \theta + v_1 \cos \theta \quad (2.262)$$

denklemini elde edilir. Denklem (2.260) ve (2.262) matris formunda yazıldığında;

$$\begin{Bmatrix} \bar{u}_1 \\ \bar{v}_1 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \end{Bmatrix} \quad (2.263)$$

eşitliği elde edilir.

İki koordinat arasındaki dönme açısının transformasyonu yapılmaz. Yani $\theta = \bar{\theta}$ değeri transformasyon matrisi içine 1 olarak alınır. Buna göre Denklem (2.263);

$$\begin{Bmatrix} \bar{u} \\ \bar{v} \\ \bar{\theta} \end{Bmatrix}_i = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ v \\ \theta \end{Bmatrix}_i \quad (2.264)$$

olarak yazılabilir.

Yatay eksenden, saat ibreleri tersi yönünde θ açısı yapan herhangi bir eleman için transformasyon matrisi, $c = \cos \theta$ ve $s = \sin \theta$ olmak üzere;

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{u}_1 \\ \bar{v}_1 \\ \theta_1 \\ \bar{u}_2 \\ \bar{v}_2 \\ \theta_2 \end{array} \right\} = \left[\begin{array}{ccc|ccc} c & s & 0 & & & \\ -s & c & 0 & & 0 & \\ 0 & 0 & 1 & & & \\ \hline & & & c & s & 0 \\ & 0 & & -s & c & 0 \\ & & & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{l} u_1 \\ v_1 \\ \theta_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{array} \right\} \quad (2.265)$$

şeklinde yazılabilir. Lokal koordinatlardan global koordinatlara dönüşüm için gerekli olan transformasyon matrisi;

$$\bar{r} = T r \quad (2.266)$$

ve,

$$\bar{F} = T F \quad (2.267)$$

eşitlikleriyle verilebilir (Thomson 1993).

Denklem (2.266) ve (2.267)'deki T , transformasyon matrisi, \bar{r} , \bar{F} ve r , F sırasıyla lokal koordinatlardaki ve global koordinatlardaki şekil değiştirme ve kuvvet vektörleridir. \bar{r} ve \bar{F} arasındaki bağıntıya rijitlik matrisi de ilave edilebilir (Thomson 1993). Yani;

$$\bar{F} = \bar{k} \bar{r} \quad (2.268)$$

şeklinde yazılabilir. Benzer biçimde global koordinat sisteminde de aynı eşitlik yazılabilir.

şeklinde yazılabilir (Chen 1994).

Görüldüğü üzere transformasyon matrisinin boyutu, (8x8)'dir. Kiriş elemanın orta düğümünün uzama ve çökme değişimlerinin transformasyonu yapılmaz. Ayrıca açılal değişimlerinde transformasyonu yapılmaz. Şekil değiştirmeler için transformasyon işlemi aşağıdaki biçimde gerçekleşir (Chen 1994).

$$\{\bar{u}_1 \quad \bar{v}_1 \quad \theta_1 \quad u_2 \quad v_2 \quad \bar{u}_3 \quad \bar{v}_3 \quad \theta_3\}^T = [T] \{u_1 \quad v_1 \quad \theta_1 \quad u_2 \quad v_2 \quad u_3 \quad v_3 \quad \theta_3\}^T \quad (2.274)$$

Benzer şekilde kuvvet vektörünün ve şekil değiştirme vektörünün de transformasyonu aşağıdaki biçimde yapılabilir.

$$[T] \{F\} = \{\bar{F}\} \quad (2.275)$$

$$[T] \{q\} = \{\bar{q}\} \quad (2.276)$$

Ayrıca DQEM denklem sistemi global kordinatlarda;

$$[K] \{q\} = \{F\} \quad (2.277)$$

olarak yazılabilir. Burada rijitlik matrisi;

$$[K] = [T]^{-1} [\bar{K}] [T] \quad (2.278)$$

dir. Bu işlemler bütün elemanlar için tekrarlanıp, genel sistem matrisinde çözülür.

2.7. Düğüm Noktaları Dağılımları

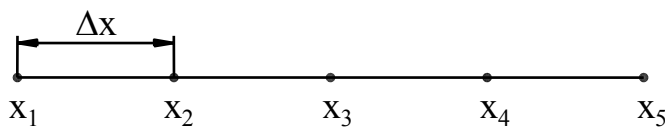
DQ metotlarında, düğüm noktalarının adedi ve bu noktaların yerlerinin seçimi, sayısal çözümün doğruya yaklaşmasında oldukça etkilidir. DQM ile hesaplama yaparken, doğruya yaklaşabilmek için çeşitli düğüm noktaları dağılımları kullanılmıştır. Bellman vd (1972), DQM'nin birinci yaklaşımında rasgele yerleştirilmiş düğüm

noktaları kullanılırken, ikinci yaklaşımında ötelenmiş Legendre polinomunun köklerini kullanmışlardır. Quan ve Chang (1989a,b) çalışmalarında, Chebyshev polinomu ile elde edilen düğüm noktaları dağılımlarının, diğer polinomlar ile elde edilenlerden daha iyi olduğunu söylemişlerdir. Diğer taraftan Bert ve Malik (1996), plaklarda olduğu gibi düğüm noktalarının birbirini etkilediği problemlerde Legendre polinomunun, Chebyshev polinomundan daha doğru sonuçlar verdiğini öne sürmüşlerdir. Buna karşılık, hem Legendre hem de Chebyshev polinomları ile elde edilen düğüm noktalarında, hesaplama alanının son noktası göz önüne alınmamaktadır. Bu nedenle başlangıç ve sınır şartlarının sisteme girilmesi de zorlaşmaktadır. Bundan dolayı Chebyshev-Gauss-Lobatto düğüm noktaları sıklıkla kullanılmıştır. Quan ve Chang (1989a,b), çeşitli problemler için yaptıkları çalışmalarda, Chebyshev-Gauss-Lobatto düğüm noktalarının; eşit dağılımlı, Legendre ve Chebyshev düğüm noktalarından daha tutarlı olduğunu söylemişlerdir. Ayrıca Quan ve Chang (1989a) ve Bert vd (1994), bu düğüm noktalarının, quadrature çözümlerinde doğruluğu nasıl artırdığını da göstermişlerdir. Bunun yanı sıra Chebyshev-Gauss-Lobatto düğüm noktaları dinamik problemlerin çözümünde de kullanılmıştır (Wu ve Liu 1999, 2000). Bu düğüm noktalarından farklı olarak Fung (2001), Radau düğüm noktalarını kullanmıştır.

Yukarıda adı geçen, beş tip düğüm noktaları dağılımı aşağıda anlatılmıştır. Ayrıca 5 düğüm noktalı bir eleman, referans olarak alınarak, bu elemanın her tip dağılım için düğüm noktalarının koordinatları da verilmiştir (Fung 2002). Ek bilgi olarak Birleşim Metodunda eşit olarak dağıtılmış düğüm noktaları kullanılmıştır.

2.7.1. Eşit aralıklı düğüm noktaları dağılımı

Düğüm noktalarının seçiminde sıkça kullanılan ve önerilen metot, Şekil 2.6'da gösterildiği gibi, koordinat doğrultusu boyunca eşit aralıklı seçilen düğüm noktalarıdır. Δx düğüm aralığı olmak üzere;



Şekil 2.6 Üniiform olarak dağıtılmış düğüm noktaları

$$\Delta x = x_2 - x_1 = x_i - x_{i-1} = x_N - x_{N-1} \quad (2.279)$$

veya daha farklı bir ifade ile;

$$x_j - x_i = (j-i)\Delta x \quad (2.280)$$

yazılabilir.

Düğüm noktalarının koordinatları ise N, düğüm sayısı olmak üzere;

$$x_i = \frac{i-1}{N-1}, \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (2.281)$$

olarak yazılabilir. Buna göre beş düğüm noktalı eleman için, eşit dağıtılmış düğüm noktalarının koordinatları;

$$[0 \quad 0,25 \quad 0,5 \quad 0,75 \quad 1] \quad (2.282)$$

biçiminde elde edilir.

2.7.2. Legendre düğüm noktaları dağılımı

Legendre polinomu aşağıdaki biçimde ifade edilmektedir (WEB_1 2008).

$$L_N(x) = \frac{1}{2^N N!} \frac{d^N}{dx^N} \left[(x^2 - 1)^N \right], \quad x \in [-1, 1] \quad (2.283)$$

Denklem (2.283)'de N, düğüm noktalarının sayısıdır. Ötelenmiş Legendre polinomu ise;

$$\tilde{L}_N(x) = ((N-1)!)^{-1} \frac{d^{N-1}}{dx^{N-1}} \left[(x^2 - x)^{N-1} \right], \quad x \in [0, 1] \quad (2.284)$$

şeklinde ifade edilmektedir (WEB_1 2008). Ayrıca başka bir kaynağa göre (Fung 2002) ötelenmiş Legendre polinomu;

$$L(x) = \frac{d^{N-1}}{dx^{N-1}} \left(x^{N-1} (x-1)^{N-1} \right) \quad (2.285)$$

olarak verilmiştir. Netice olarak iki denklemle elde edilen koordinatlar aynıdır. İlk düğüm noktası hariç diğer düğüm noktalarının koordinatları, ötelenmiş Legendre polinomunun sıfıra eşitlenmesiyle elde edilen denklemin kökleridir. İlk nokta sıfır olarak alınır.

5 adet düğüm noktası için aşağıdaki düğüm noktaları dağılımı elde edilir.

$$[0 \quad 0,06943 \quad 0,33001 \quad 0,66999 \quad 0,93057] \quad (2.286)$$

2.7.3. Radau düğüm noktaları dağılımı

Radau polinomu aşağıdaki biçimde ifade edilmektedir (Fung 2002).

$$R(x) = \frac{d^{N-2}}{dx^{N-2}} \left(x^{N-2} (x-1)^{N-1} \right) \quad (2.287)$$

Denklem (2.287)'de N, düğüm noktalarının sayısıdır. Radau polinomuyla düğüm noktalarının koordinatları, ötelenmiş Legendre polinomu gibi polinomun sıfıra eşitlenmesiyle elde edilen denklemin kökleridir. İlk nokta yine sıfır olarak alınır.

5 adet düğüm noktası için aşağıdaki düğüm noktaları dağılımı elde edilir.

$$[0 \quad 0,08859 \quad 0,40947 \quad 0,78766 \quad 1] \quad (2.288)$$

2.7.4. Chebyshev düğüm noktaları dağılımı

Chebyshev polinomu aşağıdaki biçimde ifade edilmektedir (Fung 2002).

$$C(x) = \frac{1}{2} \left(1 - \cos \left(\frac{2k-1}{2(N-1)} \pi \right) \right), \quad k = 1, 2, \dots, N-1 \quad (2.289)$$

Chebyshev polinomuyla düğüm noktalarının koordinatları ilk nokta hariç Denklem (2.289)'dan bulunur. İlk nokta yine sıfır olarak alınır. Denklem (2.289)'da N, düğüm noktalarının sayısıdır.

5 adet düğüm noktası için aşağıdaki düğüm noktaları dağılımı elde edilir.

$$[0 \quad 0,03806 \quad 0,30866 \quad 0,69134 \quad 0,96194] \quad (2.290)$$

2.7.5. Chebyshev-Gauss-Lobatto düğüm noktaları dağılımı

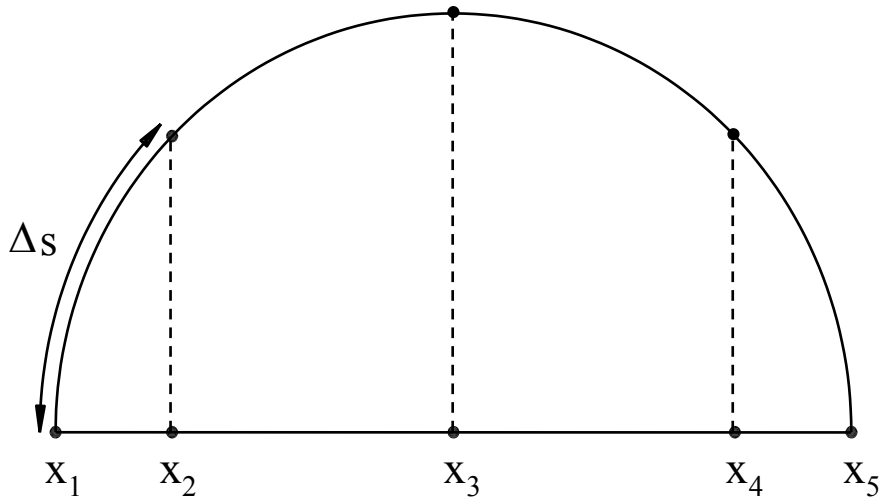
Chebyshev-Gauss-Lobatto polinomu aşağıdaki biçimde ifade edilmektedir (Fung 2002).

$$CGL(x) = \frac{1}{2} \left(1 - \cos \left(\frac{k}{N-1} \pi \right) \right), \quad k = 0, 1, \dots, N-1 \quad (2.291)$$

Denklem (2.291)'de N, düğüm noktalarının sayısıdır. Chebyshev-Gauss-Lobatto polinomuyla elde edilen düğüm noktalarının koordinatları, ilk nokta da dâhil olmak üzere Denklem (2.291)'den bulunur. Bu koordinatlar, Şekil 2.7'den de görüldüğü gibi hesaplama alanı etrafına çizilecek yarım dairenin eşit olarak bölünmesiyle elde edilen noktaların hesaplama alanına iz düşürülmesiyle de elde edilebilir.

Yine 5 adet düğüm noktası için aşağıdaki düğüm noktaları dağılımı elde edilir.

$$[0 \quad 0,14644 \quad 0,5 \quad 0,85355 \quad 1] \quad (2.292)$$



Şekil 2.7 Chebyshev-Gauss-Lobatto düğüm noktaları

2.8. Lineer Olmayan Diferansiyel Denklemlerin Çözümünde Frechet Türevinin Kullanımı

Bilindiği üzere GDQM, başlangıç veya sınır değere sahip lineer diferansiyel denklemlerin çözülebilmesi için Shu ve Richards (1990) tarafından ileri sürülmüştü. GDQM, Bölüm 2.5’de anlatılmıştı. Bu bölümde, başlangıç değere sahip lineer olmayan diferansiyel denklemlerin GDQM ile Frechet türevi kullanılarak çözümü verilmiştir. Lineer olmayan diferansiyel denklemler, DQ yöntemleriyle, ancak Frechet türevi kullanılarak çözülebilmişlerdir (Liu ve Wu 2000, Liu ve Wu 2002).

Dinamik problemlerinden, bilinen bir lineer olmayan diferansiyel denklem olan Duffing denklemini ele alınsın (Liu ve Wu 2000).

$$y^{(2)} + y + Ry^3 = F \sin(\omega t) \quad (2.293)$$

Denklem (2.293)’de $y^{(2)} = d^2y/dt^2$, ω frekans, F ve R sabit değerlerdir. Bu denklemde $F = 2$, $\omega = 1$ ve $R = -1/6$ ve başlangıç şartları da, $t = 0$ iken;

$$y(0) = 0, \quad y^{(1)}(0) = -2,7676 \quad (2.294)$$

olarak alındığında, Denklem (2.293)'ün yaklaşık trigonometrik analitik çözümü;

$$y = -2,5425 \sin(t) - 0,07139 \sin(3t) - 0,00219 \sin(5t) \quad (2.295)$$

olarak verilmiştir (Liu ve Wu 2000).

Denklem (2.293), ikinci dereceden diferansiyel denklem olduğu için, en az iki adet başlangıç şartının olması gereklidir. Ayrıca diğer düğüm noktaları da genel denklemi sağlamalıdır. Buna göre GDQM formu genel olarak aşağıdaki biçimde yazılabilir (Liu ve Wu 2000).

$$y^{(i)}(t_i) = \sum_{j=1}^{N+k-1} A_{ij}^{(i)} G_j, \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (2.296)$$

Denklem (2.296)'da, k denklemin derecesi, N ise düğüm sayısıdır. Ayrıca $\{G_1, G_2, \dots, G_N, G_{N+1}, \dots, G_{N+k-1}\} = \{y_1, y_2, \dots, y_N, y_N^{(1)}, \dots, y_N^{(k-1)}\}$ 'dir. Ele alınan örnek 2. dereceden olduğu için $k = 2$ 'dir.

GDQM'de Frechet türevi kullanılırken, düğüm noktaları dağılımları alışıldandan biraz farklı olarak alınır. Çözüm bölgesi $[0, T]$ aralığında ve toplam düğüm sayısı N olarak alındığında, başlangıç noktası t_N olarak gösterilir ve başlangıç şartları $y_N, y_N^{(1)}, \dots, y_N^{(k-1)}$ olarak yazılır. Görüldüğü üzere başlangıç değer problemlerinde düğüm noktaları tersten yazılmaktadır.

Denklem (2.293)'deki lineer olmayan diferansiyel denklem, Frechet türevi kullanılarak lineer diferansiyel denklem haline dönüştürülebilir. Daha sonra sisteme, Denklem (2.296)'da da verilen DQ uygulanır. Bundan sonra çözüm fonksiyonunun Frechet türevi uygulanmış hali ile gerçek çözüm fonksiyonu arasında aşağıdaki iterasyon yapılabilir.

$$y^{[m+1]} = y^{[m]} + \theta^{[m]} \quad (2.297)$$

Burada y ; fonksiyonun gerçek değeri, θ ; verilen denkleme Frechet türevi uygulandığında kullanılan fonksiyon değeri (yardımcı fonksiyon değeri) ve $[m]$ iterasyon sayısıdır.

Yardımcı fonksiyon değeri, aşağıdaki denklemin çözümüyle elde edilir (Liu ve Wu 2000).

$$L^{(1)}(\theta) + L(y) = 0 \quad (2.298)$$

Denklem (2.298)'deki $L(y)$ operatörü, Denklem (2.293) göz önüne alınarak aşağıdaki biçimde elde edilir.

$$L(y) = \frac{d^2 y}{dt^2} + y + Ry^3 - F \sin(\omega t) \quad (2.299)$$

Denklem (2.298)'deki $L^{(1)}(\theta)$ ise Frechet türevidir ve aşağıdaki biçimde tanımlıdır (Liu ve Wu 2000).

$$L^{(1)}(\theta) = \left. \frac{\partial}{\partial \varepsilon} L(y + \varepsilon \theta) \right|_{\varepsilon=0} \quad (2.300)$$

Denklem (2.300)'de gösterildiği üzere $L^{(1)}(\theta)$ 'nın elde edilebilmesi için, Denklem (2.299)'da y yerine $y + \varepsilon \theta$ konulur,

$$L(y + \varepsilon \theta) = \frac{d^2 (y + \varepsilon \theta)}{dt^2} + (y + \varepsilon \theta) + R(y + \varepsilon \theta)^3 - F \sin(\omega t) \quad (2.301)$$

ve elde edilen denklemin ε 'a göre türevi alınıp, bu türevde ε sıfırlandığında Frechet türevi elde edilmiş olur. Elde edilen Frechet türevi ve Denklem (2.299)'daki $L(y)$ operatörü, Denklem (2.298)'de yerine yazıldığında;

$$\frac{d^2 \theta}{dt^2} + (1 + 3Ry^2) \theta = -\frac{d^2 y}{dt^2} - y - Ry^3 + F \sin(\omega t) \quad (2.302)$$

elde edilir.

θ yardımcı fonksiyon olduğundan, Denklem (2.294)'de verilen başlangıç şartları aşağıdaki biçimde değiştirilir.

$$\theta(t_N) = \theta^{(1)}(t_N) = \dots = \theta^{(k-1)}(t_N) = 0 \rightarrow \text{Bu örnek için } \rightarrow \theta(t_N) = \theta^{(1)}(t_N) = 0 \quad (2.303)$$

Düğüm noktaları dağılımı olarak Chebyshev-Gauss-Lobatto düğüm noktaları dağılımı kullanılmıştır. Buna göre düğüm noktaları için;

$$t_i = \frac{1}{2} \left[1 - \cos \left(\frac{N-i}{N-1} \pi \right) \right] T \quad (2.304)$$

yazılabilir. Denklem (2.304)'den t_N 'nin başlangıç düğümü olduğu açıkça görülmektedir. Denklem (2.302), Denklem (2.303)'de verilen başlangıç şartlara sahip, ikinci dereceden lineer bir diferansiyel denklemdir. GDQM'nin tanımına göre, t_N düğüm noktasında bu örnek için 2 tane olmak üzere, $\theta_N, \theta_N^{(1)}, \dots, \theta_N^{(k-1)}$ adet bağımsız değişken vardır. Diğer t_i ($i = 1, 2, \dots, N-1$) düğüm noktalarında ise sadece θ_i bağımsız değişkeni vardır. Buna göre GDQM ifadesi, θ yardımcı fonksiyonuna göre Denklem (2.296)'ya benzer biçimde;

$$\theta^{(r)}(t_i) = \sum_{j=1}^{N+k-1} A_{ij}^{(r)} U_j, \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (2.305)$$

şeklinde yazılabilir. Yine Denklem (2.296)'da benzer şekilde, $\{U_1, U_2, \dots, U_N, U_{N+1}, \dots, U_{N+k-1}\} = \{\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_N, \theta_N^{(1)}, \dots, \theta_N^{(k-1)}\}$ 'dir. Bu örnek 2. dereceden olduğu için $k = 2$ olarak alınır.

Denklem (2.297)'ye benzer biçimde, iterasyon aşağıdaki biçimde gerçekleşir.

$$\{G\}^{[m+1]} = \{G\}^{[m]} + \{U\}^{[m]} \quad (2.306)$$

Denklem (2.306)'daki $\{G\}$, Denklem (2.296)'nın altındaki açıklamada, $\{U\}$ ise Denklem (2.305)'in altındaki açıklamada verilmiştir. $[m]$, iterasyon sayısıdır.

Denklem (2.302)'nin sol tarafına, DQ uygulandığında,

$$\sum_{j=1}^{N-1} A_{ij}^{(2)} \theta_j + (1 + 3Ry_i^2) \theta_i = b_i, \quad i = 1, 2, \dots, N-1 \quad (2.307)$$

elde edilir. Dikkat edilirse j , $N-1$ 'e kadar gitmektedir. Bunun sebebi, θ_N 'inci düğüm, Denklem (2.303)'den de görüldüğü üzere başlangıç şartıdır. Denklem (2.307)'deki b_i ise, yine Denklem (2.302)'nin sağ tarafına DQ uygulanmasıyla,

$$b_i = -\sum_{j=1}^{N+1} A_{ij}^{(2)} G_j - y_i - Ry_i^3 + F \sin(\omega t_i) \quad (2.308)$$

biçiminde verilir (Liu ve Wu 2000).

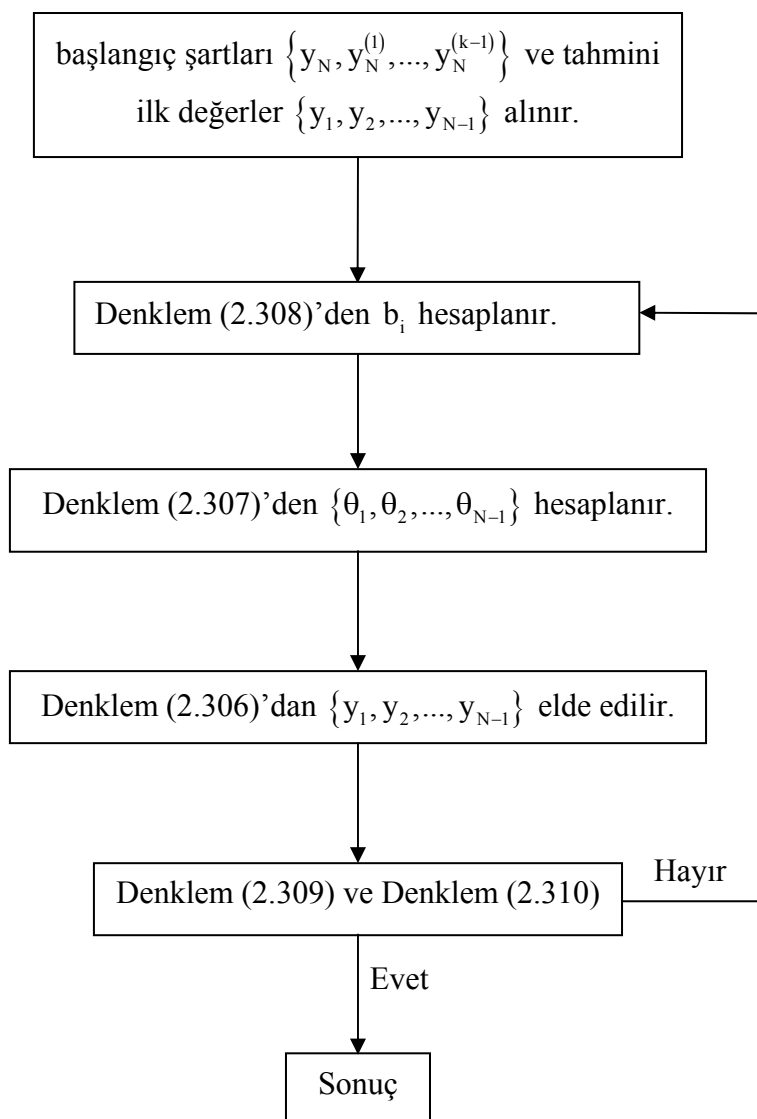
Denklem (2.308)'de ise j , $N+1$ 'e kadar gitmektedir. Bunun sebebi ilk iterasyonda y başlangıç şartları hesaba katılmaktadır. İterasyon işlemi aşağıdaki biçimde gerçekleşir.

Öncelikle, başlangıç şartları da göz önüne alınarak bağımsız değişkenlerin $\{G\}^T = \{y_1, y_2, \dots, y_N, y_N^{(1)}, \dots, y_N^{(k-1)}\}$ ilk değerleri varsayılır. Yapılan bu varsayım ile Denklem (2.308)'deki b_i değerleri elde edilir. Daha sonra Denklem (2.307)'deki $N-1$ değişken $\{\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_{N-1}\}$ hesaplanır. Elde edilen sonuçlardan Denklem (2.306)'daki iterasyondan faydalanılarak $\{G\}$ 'nin yeni değeri bulunur. Elde edilen yeni $\{G\}$ değeri yeniden Denklem (2.308)'de yerine yazılır ve yukarıdaki işlemler tekrarlanarak yeni $\{U\}$ değeri bulunur. Bu işleme aşağıdaki yaklaşım kıstası sağlanana kadar devam edilir.

$$\frac{\left(\sum_{j=1}^{N+k-1} (U_j)^2 \right)^{[m+1]}}{\left(\sum_{j=1}^{N+k-1} (U_j)^2 \right)^{[m]}} \leq 10^{-6} \quad (2.309)$$

$$|U_j| \leq 10^{-6}, \quad j=1,2,\dots,N-1 \quad (2.310)$$

Şekil 2.8’de verilen akış şemasında, yukarıda anlatılan iterasyon işlemi özetlenmiştir.



Şekil 2.8 Duffing denkleminin Frechet türevi ile çözümü için akış şeması

2.9. Genelleştirilmiş İntegral Quadrature Metodu ile İntegral Ağırlıklı Katsayıların Elde Edilmesi

Genelleştirilmiş İntegral Quadrature Metodu (GİQM), GDQM'ye benzer olarak ilk defa Shu vd (1995) tarafından ileri sürülmüştür. Daha sonra Shu vd (1996a,b), GİQM'yi 1995'deki çalışmanın devamı olarak değişik problemlere uygulamışlardır. Ayrıca Shu (2000), GİQM'den kitabında bahsetmiştir. Metot aşağıdaki biçimde tarif edilmiştir (Shu 2000).

GİQM, GDQM'ye benzer şekilde, yüksek dereceli polinom yaklaşım analizleri ve lineer vektör uzayı analizlerine dayanır. Varsayılan bir fonksiyona, $[a,b]$ çalışma aralığında $(N-1)$. dereceden polinom ile yaklaşılabılır. Çalışma bölgesi, $N-1$ tane aralığı olan, $a = x_1, x_2, \dots, x_N = b$ düğüm noktalarına ayrılır. Düğüm noktalarında fonksiyonun değeri belli ise, $f(x)$ fonksiyonuna Lagrange intepolasyon polinomu ile yaklaşılabılır. Sonuç olarak $[x_i, x_j]$ 'ye göre yaklaşım polinomunun integrali, bütün çalışma aralığındaki fonksiyon değerlerini gerektirir.

Genel olarak, çalışma alanının bir bölgesindeki $f(x)$ 'in integrali, bütün çalışma bölgesindeki fonksiyon değerlerinin lineer birleşimiyle elde edilir ve aşağıda gösterilmiştir (Shu 2000).

$$\int_{x_i}^{x_j} f(x) dx = \sum_{k=1}^N c_k^{ij} f(x_k) \quad (2.311)$$

Burada N , $[a,b]$ aralığındaki düğüm noktaları sayısıdır. $x_i = a$ ve $x_j = b$ olduğunda, Denklem (2.311) bilinen sayısal integral haline gelir. Bu integralin aralığı, çalışma bölgesindeki bütün fonksiyon değerlerini içermektedir. Açıkça görülmektedir ki yöntemin asıl amacı ağırlıklı katsayıları bulmaktır. Bu bölümde, GİQM ağırlıklı katsayılarının, GDQM'de birinci derece türevler için bulunan ağırlıklı katsayılardan nasıl elde edildiği gösterilecektir.

GDQM'deki işlemlere benzer biçimde, $f(x)$ fonksiyonuna (N-1). dereceden polinom ile yaklaşılabılır. Bu da N boyutlu lineer vektör uzayının toplamıdır. Temel polinom olarak $r_k(x)$, $k = 1, 2, \dots, N$ Lagrange interpolasyon polinomu alındığında c_k^{ij} ;

$$c_k^{ij} = \int_{x_i}^{x_j} r_k(x) dx \quad (2.312)$$

olarak belirlenebilir (Shu 2000). Burada c_k^{ij} çok karmaşıktır. Bu yüzden c_k^{ij} 'nin belirlenmesi için farklı bir yaklaşım yapılacaktır.

$$f(x) = \frac{du(x)}{dx} \quad (2.313)$$

olmak üzere, $f(x)$, (N-1). dereceden polinom ise, $u(x)$ 'in N. dereceden polinom olduğu açıkça görülmektedir. $f(x)$, (N-1). dereceden bir polinom olarak aşağıdaki biçimde varsayılın.

$$f(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_{N-1}x^{N-1} \quad (2.314)$$

Burada a_0, a_1, \dots, a_{N-1} sabitlerdir. Denklem (2.313)'ün, Denklem (2.314) kullanılarak, c sabitinden x değişkenine integrali alındığında;

$$u(x) = \int_c^x f(t) dt + u(c) = F(x, c) + u(c) \quad (2.315)$$

elde edilir (Shu 2000). Burada;

$$F(x, c) = x \left(a_0 + \frac{a_1}{2}x + \dots + \frac{a_{N-1}}{N}x^{N-1} \right) - c \left(a_0 + \frac{a_1}{2}c + \dots + \frac{a_{N-1}}{N}c^{N-1} \right) \quad (2.316)$$

olarak verilmiştir (Shu 2000).

Denklem (2.316)'dan $F(x, c)$ 'nin N boyutlu lineer vektör uzayının birleşimi olduğu görülmektedir. Temel polinom $r_k(x)$, Lagrange interpolasyon polinomu olmak üzere aşağıdaki polinom alınır.

$$p_k(x) = (x - c)r_k(x), \quad k = 1, 2, \dots, N \quad (2.317)$$

GDQM'ye benzer şekilde aşağıdaki eşitlik yazılabilir.

$$F_x(x_i, c) = \sum_{j=1}^N \underline{a}_{ij}^{(1)} F(x_j, c), \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (2.318)$$

Burada $F_x(x_i, c)$, f fonksiyonunun kendisi, $F(x, c)$ ise f fonksiyonunun tek katlı integralidir. $\underline{a}_{ij}^{(1)}$, ağırlıklı katsayılarıdır ve GDQM'de elde edilene benzer biçimde elde edilir. Denklem (2.317), Denklem (2.318)'de yerine yazıldığında;

$$\underline{a}_{ij}^{(1)} = \frac{x_i - c}{x_j - c} a_{ij}^{(1)}, \quad j \neq i \quad (2.319)$$

$$\underline{a}_{ii}^{(1)} = a_{ii}^{(1)} + \frac{1}{x_i - c}, \quad j = i \quad (2.320)$$

elde edilir (Shu 2000).

Burada $a_{ij}^{(1)}$, GDQM'den elde edilen birinci dereceden türevlere ait ağırlıklı katsayılarıdır. Denklem (2.319) ve (2.320)'den c 'nin, x_i düğüm noktası koordinatına eşit olarak seçilemeyeceği görülmektedir. Shu vd (1995,1996a) çalışmalarında c sabitinin, en doğru integral değerini $|c| \leq 0,1$ değerlerinde verdiğini söylemişlerdir.

Diğer taraftan Denklem (2.318) vektörel olarak;

$$\{F_x\} = [\underline{A}] \{F\} \quad (2.321)$$

şeklinde yazılabilir. Burada;

$$\{F\} = \{F(x_1, c), F(x_2, c), \dots, F(x_N, c)\}^T \quad (2.322)$$

$$\{F_x\} = \{f\} = \{F_x(x_1, c), F_x(x_2, c), \dots, F_x(x_N, c)\}^T \quad (2.323)$$

dir. Denklem (2.313) ve (2.315)'den $\{F\}$ tekrar yazıldığında;

$$\{F\} = \{f^1\} = \left[\int_c^{x_1} f(x) dx, \int_c^{x_2} f(x) dx, \dots, \int_c^{x_N} f(x) dx \right]^T \quad (2.324)$$

elde edilir. Denklem (2.324)'deki $\{f^1\}$, $\{f\}$ fonksiyonunun tek katlı integralini ifade etmektedir. Buna göre Denklem (2.321) tekrar yazıldığında;

$$\{f\} = [\underline{A}]\{f^1\} \rightarrow [\underline{A}]^{-1}\{f\} = \{f^1\} \quad (2.325)$$

olarak elde edilir. Yani Denklem (2.325)'ya göre, integral ağırlıklı katsayılar matrisi $[B] = [\underline{A}]^{-1}$ olarak elde edilir (Shu 2000).

3. BİRLEŞİM (DİFERANSİYEL QUADRATURE VE SİMÜLASYON) METODU

Yukarıdaki bölümlerde anlatıldığı üzere, DQM'nin lineer olmayan adi diferansiyel denklemlere uygulanmasındaki zorluk ve özellikle aynı düğüm noktasına iki şartın uygulanmasındaki zorluklar, ayrıca ST'nin diferansiyel denklem çözümlerinde sadece başlangıç şartlarını kullanabilmesi, Birleşim Metodu (BM) fikrinin doğmasına sebep olmuştur. Amaç, DQM'nin sınır değer problemlerine uygulanabilme kolaylığı ile ST'nin özellikle lineer olmayan diferansiyel denklem çözümlerindeki gücünü birleştirebilmektir. Modeller elde edilirken, türev ve integral alma işlemleri yeni önerilen DQ ağırlıklı katsayılar ile yapılacaktır.

Öncelikle, ilk defa bu tez de önerilen, diferansiyel ve integral ağırlıklı katsayılar matrislerinin elde edilmesi için geliştirilen yeni yöntem tanıtılacaktır.

3.1. Birleşim Metodu'nda Türev ve İntegraller İçin Ağırlıklı Katsayıların Hesaplanması

DQM ile ağırlıklı katsayılar ilk defa Bellman (1971) ve Bellman vd (1972) tarafından hesaplanmıştı. Birinci dereceden ağırlıklı katsayıların hesaplanmasında iki metot önerilmişti. Birinci metot basit bir cebirsel denklem çözüümüydü. İkinci metotta ise yine basit bir cebirsel formülasyon kullanılmaktaydı fakat düğüm noktalarının koordinatlarının ötelenmiş Legendre polinomunun kökleri olarak seçilme zorunluluğu vardı. Bellman'ın birinci yaklaşımında düğüm noktaları rasgele seçilerek ağırlıklı katsayılar bulunuyordu. Fakat cebirsel denklem sisteminin derecesi ki bu düğüm noktası sayısının bir eksiğine eşittir, çok büyük olduğunda elde edilen matris tekilliğe gidiyordu. İkinci yaklaşımda test fonksiyonu olarak N. dereceden Legendre polinomu kullanılmaktaydı. Bununla birlikte düğüm noktalarının yerinin, ötelenmiş Legendre polinomunun köklerine göre seçilme zorunluluğu yöntemi kısıtlıyordu.

Bundan sonra ağırlıklı katsayılarının hesaplanmasında en köklü değişikliği Shu (1991) yapmıştır. Shu (1991), birinci dereceden ağırlıklı katsayıları, düğüm noktalarının

koordinatlarında herhangi bir kısıtlama olmadan hesaplamıştır. Ayrıca tekrarlama bağıntısıyla ikinci ve daha yüksek dereceden türevler için ağırlıklı katsayıları da kolaylıkla hesaplayabilmiştir.

Ancak Shu'nun (1991) yaklaşımında, Bölüm 2.1.3'de de anlatıldığı gibi, ağırlıklı katsayılar matrisinin köşegen elemanlarının hesaplanabilmesi için ayrı bir işleme ihtiyaç vardır (İkinci temel polinom kullanımı).

Aşağıda yeni geliştirilen bir yöntem ile ağırlıklı katsayıların elde edilmesi anlatılacaktır. Bu yeni geliştirilen yöntem ile, türevler için ağırlıklı katsayıların tamamı tek seferde elde edilecektir. Köşegen elemanların hesaplanması için, Shu'nun (1991) yaptığı gibi ayrı bir temel polinom kullanılmasına ihtiyaç kalmamıştır. Ayrıca elde edilen yeni yöntem, integral ağırlıklı katsayılarının yine tek seferde (köşegen elemanlar dâhil) hesaplanabilmesine imkân tanımıştır. Yeni metotla elde edilen ağırlıklı katsayılardan bazıları Ek-1 ve Ek-2'de verilmiştir.

Bunun yanında, Shu vd'nin (1995) İQ ağırlıklı katsayıları elde etmek için kullandıkları metot da geliştirilmiştir.

Yeni geliştirilen ve Shu vd'nin (1995) metodundan geliştirilen her iki yöntemde de daha önce literatürde hesaba katılmayan integral sabitleri hesaba katılarak daha doğru yaklaşım elde edilmiştir.

3.1.1. Türevler için ağırlıklı katsayıların hesaplanması

Ele alınan bir $f(x)$ fonksiyonunun birinci dereceden türevi DQ formuna;

$$\frac{df(x_i)}{dx} = \sum_{j=1}^N a_{ij}^{(1)} f(x_j), \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (3.1)$$

şeklinde çevrilmekteydi (Denklem (2.1)). Burada $a_{ij}^{(1)}$, birinci dereceden türevler için DQ ağırlıklı katsayıları ifade etmektedir. Test fonksiyonu olarak GDQM'deki gibi Lagrange interpolasyon polinomu alınmıştır ve her x_i değerleri için ℓ_i polinomu aşağıdaki biçimde yazılabilir.

$$\ell_i(x) = \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^N \frac{x - x_k}{x_i - x_k}, \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (3.2)$$

Buna göre fonksiyonun birinci dereceden türevi için ağırlıklı katsayılar aşağıdaki biçimde elde edilir.

$$a_{ij}^{(1)} = \frac{d\ell_j(x_i)}{dx}, \quad i, j = 1, 2, \dots, N \quad (3.3)$$

Ayrıca birden büyük dereceli türevler için ağırlıklı katsayılar aşağıdaki biçimde elde edilir.

$$a_{ij}^{(r)} = \frac{d^{(r)}\ell_j(x_i)}{dx^{(r)}} = \sum_{k=1}^N a_{ik}^{(r-1)} a_{kj}^{(1)}, \quad i, j = 1, 2, \dots, N, \quad r \geq 1 \quad (3.4)$$

Denklem (3.4), Bölüm 2.2.3’de anlatılan matris çarpımı yaklaşımıdır. Ayrıca Denklem (3.2)’den açıkça görülmektedir ki ağırlıklı katsayılar, düğüm noktalarının koordinatlarının fonksiyonudur ve düğüm noktalarının yeri ağırlıklı katsayıları değiştirmektedir. Burada, yaygın olarak kullanılan ve hesaplaması kolay olan eşit olarak dağıtılmış düğüm noktaları kullanılmıştır. Aşağıda N düğüm noktasına ayrılmış bir hesaplama bölgesinin, her i. düğüm noktasının koordinatları verilmiştir.

$$x_i = \frac{i-1}{N-1}, \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (3.5)$$

3.1.2. İntegraller için ağırlıklı katsayıların hesaplanması

Diferansiyel denklem çözümlerinde, fonksiyonun değerini hesaplayabilmek için diferansiyel denklemdeki türevlerin, integrallerinin alınmasına ihtiyaç duyulmuştur. Bu integrallerin hesaplanabilmesi için integral ağırlıklı katsayıların elde edilmesi gereklidir. Tek katlı integraller için ağırlıklı katsayılar Denklem (3.1)’e benzer biçimde elde edilir. Hesaplanacak fonksiyonun türevinin integrali aşağıdaki biçimde ifade edilir.

$$\int \frac{df(x_i)}{dx} dx = \sum_{j=1}^N b_{ij}^{(1)} \frac{df(x_i)}{dx} + \sum_{j=1}^N c_{ij}^{(0)} f(x_i), \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (3.6)$$

Burada $b_{ij}^{(1)}$, tek katlı integraller için İntegral Quadrature (İQ) ağırlıklı katsayıları, $c_{ij}^{(0)}$ ise tek katlı integraller alınırken, integral sabitinin hesaba katılabilmesi için gerekli katsayıları ifade etmektedir. Test fonksiyonu olarak yine Lagrange interpolasyon polinomu alınmış ve her x_i değerleri için Denklem (3.2)'de verilmiştir. İntegral sabitinin katsayıları aşağıda, İQ ağırlıklı katsayılar ise iki yöntemle bir sonraki alt başlıkta verilmiştir.

İntegral sabitinin katsayıları, tek katlı integraller için $c_{ij}^{(0)}$ alınırken iki katlı integrallerde $c_{ij}^{(1)}$ alınır. Benzer biçimde r katlı integraller alınırken ise integral sabiti katsayıları $c_{ij}^{(r-1)}$ olarak alınır. İntegral sabiti katsayıları genel olarak;

$$c_{ij}^{(1)} = a_{ij}^{(1)}, \text{ ve } c_{ij}^{(r)} = a_{ij}^{(r)}, \quad i, j = 1, 2, \dots, N \quad (3.7)$$

ve,

$$c_{ij}^{(0)} = \begin{cases} 1 & j=1 \text{ için,} \\ 0 & j \neq 1 \text{ için,} \end{cases} \quad i, j = 1, 2, \dots, N \quad (3.8)$$

şeklinde veya daha açık olarak ilk üç derece için;

$$[C^{(0)}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \dots & \dots \\ \cdot & \cdot & \dots & \dots \\ 1 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \quad (3.9)$$

$$[C^{(1)}] = \begin{bmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & \dots & a_{1N}^{(1)} \\ a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & \dots & a_{1N}^{(1)} \\ \cdot & \cdot & \dots & \dots \\ \cdot & \cdot & \dots & \dots \\ a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & \dots & a_{1N}^{(1)} \end{bmatrix} \quad (3.10)$$

$$[C^{(2)}] = \begin{bmatrix} a_{11}^{(2)} & a_{12}^{(2)} & \dots & a_{1N}^{(2)} \\ a_{11}^{(2)} & a_{12}^{(2)} & \dots & a_{1N}^{(2)} \\ \cdot & \cdot & \dots & \dots \\ \cdot & \cdot & \dots & \dots \\ a_{11}^{(2)} & a_{12}^{(2)} & \dots & a_{1N}^{(2)} \end{bmatrix} \quad (3.11)$$

şeklinde yazılabilir.

Aşağıda yeni geliştirilen yöntemle elde edilen İQ ağırlıklı katsayılar ve Shu vd'nin (1995) yöntemi geliştirilerek elde edilen İQ ağırlıklı katsayılar verilmiştir.

3.1.2.1. Yeni geliştirilen yöntemle İQ ağırlıklı katsayıların hesaplanması

Fonksiyonun tek katlı integralleri için ağırlıklı katsayılar Denklem (3.3)'e benzer biçimde aşağıdaki gibi elde edilir.

$$b_{ij}^{(1)} = \int \ell_j(x_i) dx, \quad i, j = 1, 2, \dots, N \quad (3.12)$$

Burada $\ell_i(x)$ Lagrange interpolasyon polinomudur ve Denklem (3.2)'de verilmiştir. Ayrıca iki veya daha büyük katlı integraller için ağırlıklı katsayılar aşağıdaki biçimde elde edilir.

$$b_{ij}^{(r)} = \iint \dots \int \ell_j(x_i) dx^r = \sum_{k=1}^N b_{ik}^{(r-1)} b_{kj}^{(1)}, \quad i, j = 1, 2, \dots, N, \quad r \geq 1 \quad (3.13)$$

Elde edilen İQ ağırlıklı katsayılar Bölüm 3.1.2'de anlatıldığı gibi, integral sabiti katsayıları da hesaba katılarak işleme alınır.

3.1.2.2. Shu'nun metodundan geliştirilen yöntemle İQ ağırlıklı katsayıların hesaplanması

Bölüm (2.9)'da, Shu vd'nin (1995) İQ ağırlıklı katsayıları elde etmek için kullandıkları metot anlatılmıştır. Buna göre;

$$\underline{a}_{ij}^{(1)} = \frac{x_i - c}{x_j - c} a_{ij}^{(1)}, \quad j \neq i \quad (3.14)$$

$$\underline{a}_{ii}^{(1)} = a_{ii}^{(1)} + \frac{1}{x_i - c}, \quad j = i \quad (3.15)$$

olarak verilmiştir. Denklem (3.14) ve (3.15)'de geçen c sabiti ise;

$$c \neq x_i, \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (3.16)$$

olarak verilmiştir. Yani c sabiti, alınan düğüm noktalarına eşit seçilememektedir. Shu vd (1995,1996a) çalışmalarında c sabitinin, en doğru integral değerini $|c| \leq 0,1$ değerlerinde verdiğini söylemişler ve problem çözümlerinde 0,01 değerini kullanmışlardır. Ancak Shu'nun metodundan geliştirilen bu yöntemde, c'nin x_i değerine eşit olmadıktan sonra istenilen herhangi bir değerde de doğru sonuçlar verdiği görülmüştür. Örnek olarak c, -1, 1.5, 2 gibi değerler alabilir.

Denklem (3.14) ve (3.15)'den elde edilen $[\underline{A}]$ matrisinin tersi alındığında;

$$[H] = [\underline{A}]^{-1} \quad (3.17)$$

elde edilir. Burada İQ ağırlıklı katsayılar, yine Shu vd'nin (1995) çalışmasından farklı olarak aşağıdaki işlemde geçirildikten sonra elde edilir.

$$b_{ij} = h_{ij} - h_{1j}, \quad i, j = 1, 2, \dots, N \quad (3.18)$$

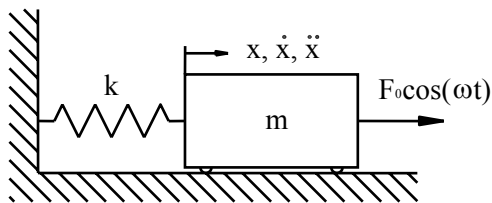
Elde edilen İQ ağırlıklı katsayılar, Shu vd'nin (1995) çalışmasından farklı olarak Bölüm 3.1.2'de anlatıldığı gibi, integral sabiti katsayıları da hesaba katılarak işleme alınır.

Birleşim metodu uygulamalarının daha iyi anlaşılabilmesi için aşağıda BM kullanılarak, iki adet türevler ve bir adet integraller için ağırlıklı katsayıların kullanıldığı toplam üç adet basit örnek çözülmüştür.

3.2. Örnekler

3.2.1. Sönümsüz zorlanmış kütle-yay sisteminin titreşim analizi

Kütlesi $m = 1\text{kg}$ olan bir cisim Şekil 3.1'de görüldüğü gibi $F = F_0 \cos(\omega t)$ kuvveti ile tahrik edilmektedir. Sistemdeki yayın yay sabiti; $k = 0,5\text{N/m}$ 'dir. Ayrıca sistemin başlangıç şartları; $x(0) = 0,5$ ve $\dot{x}(0) = 0$ 'dir. Kuvvet genliği; $F_0 = 1\text{N}$ ve açısal frekans; $\omega = 4\text{rad/s}$ olmak üzere sistemin genel denklemi aşağıdaki biçimde elde edilir.



Şekil 3.1 Sönümsüz zorlanmış kütle-yay sistemi

Cismin ivmesi $a = \ddot{x} = \frac{d^2x}{dt^2}$ olmak üzere;

$$\sum F = m\ddot{x} \quad (3.19)$$

ve Denklem (3.19)'dan;

$$m\ddot{x} + kx = F_0 \cos(\omega t) \quad (3.20)$$

yazılabilir. Denklem (3.20)'den, sistemin genel denklemi;

$$\ddot{x} + \frac{k}{m}x = \frac{F_0}{m}\cos(\omega t) \quad (3.21)$$

olarak elde edilir. Aşağıda bu diferansiyel denklemin çözümü için gerekli olan Maple kodu verilmiştir.

```
dsolve({diff(x(t),t$2)+k/m*x(t)=Fo/m*cos(w*t),x(0)=0.5,
(D)(x)(0) = 0},x(t));
```

BM ile çözüm yapabilmek için Denklem (3.21)'deki x'in yalnız bırakılması gereklidir. Buna göre Denklem (3.21);

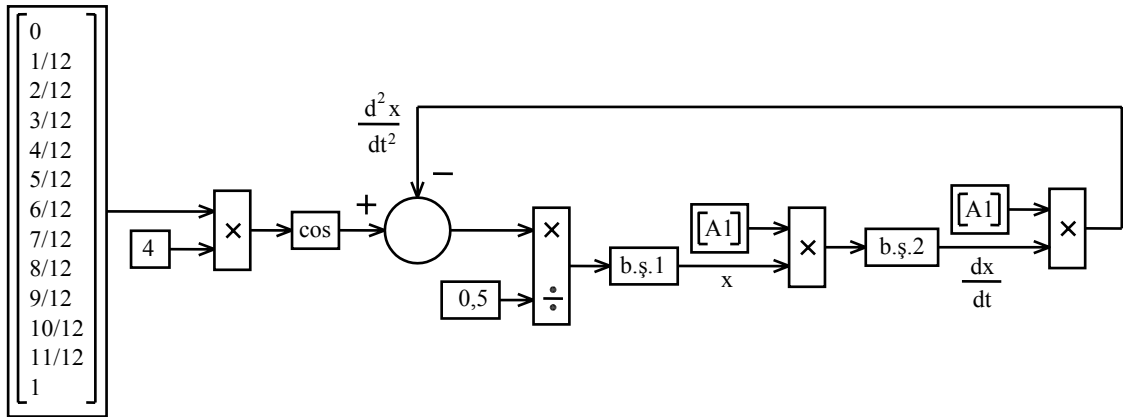
$$x = \left(\frac{F_0}{m} \cos(\omega t) - \ddot{x} \right) \frac{m}{k} \quad (3.22)$$

şeklinde yazılır. Verilen sabit değerler yerine yazıldığında;

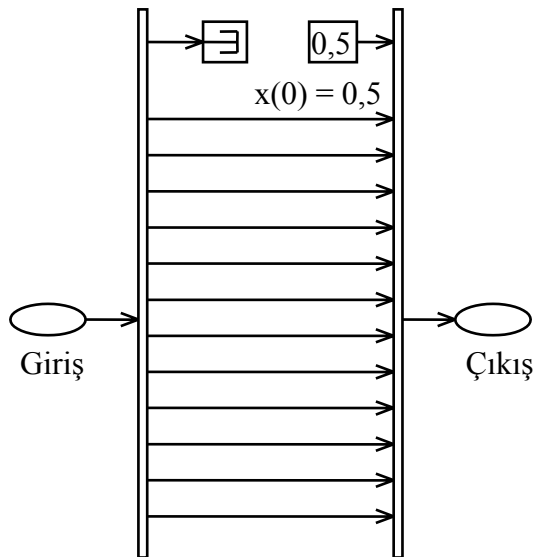
$$x = \left(\cos(4t) - \ddot{x} \right) \frac{1}{0,5} \quad (3.23)$$

elde edilir. Denklem (3.23)'e göre sistemin simülasyon şeması Şekil 3.2'de verilmiştir.

Şekil 3.2'de verilen [A1] bloğunda, birinci dereceden DQ ağırlıklı katsayılar matrisi sisteme girilmektedir ve Bölüm 3.1.1.'de nasıl elde edildiği anlatılmıştır. Başlangıç şartı-1 (b.ş.1) bloğu $x(0) = 0,5$, b.ş.2 bloğu $\dot{x}(0) = 0$ başlangıç şartlarının uygulandığı yerlerdir. Şekil 3.3 ve 3.4'de sırasıyla bu blokların içerikleri verilmiştir.



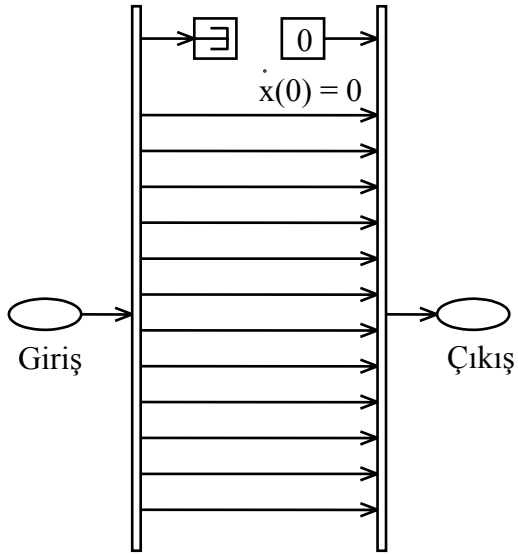
Şekil 3.2 Denklem (3.23)'de verilen ikinci dereceden diferansiyel denkleme ait simülasyon şeması



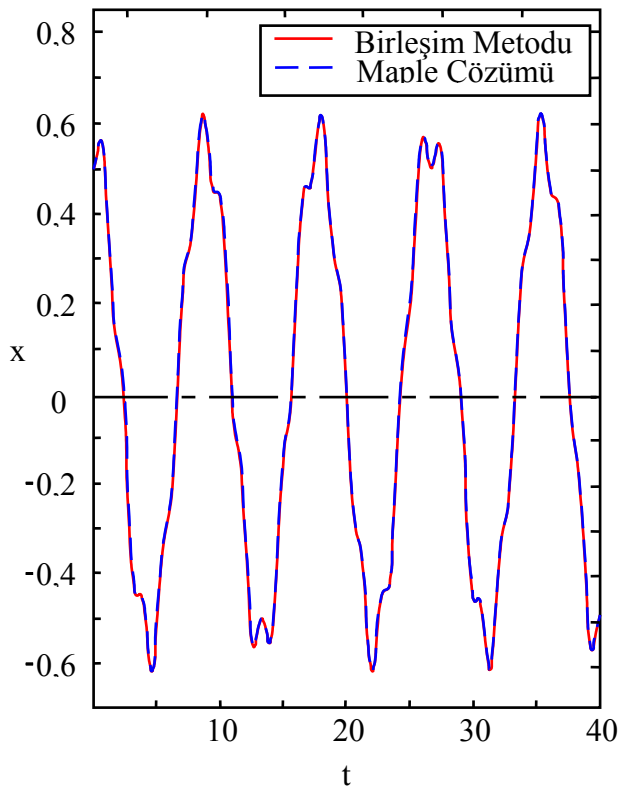
Şekil 3.3 Simülasyon şemasındaki b.ş.1 ile gösterilen bloğun içi

Şekil 3.5'de, Denklem (3.23)'de verilen diferansiyel denklemin BM kullanılarak elde x-t grafiği, Maple programı kullanılarak elde edilen x-t grafiği ile kıyaslanmıştır.

Şekil 3.5'den de görüldüğü üzere yeni yöntemle elde edilen ağırlıklı katsayılar, Birleşim Metoduyla başarı ile uygulanmıştır. Elde edilen grafikler tam uyum sağlamaktadır.



Şekil 3.4 Simülasyon şemasındaki b.ş.2 ile gösterilen bloğun içi



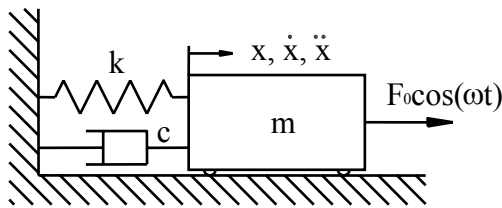
Şekil 3.5 Sönümsüz zorlanmış kütle-yay sistemine ait yer değişirne (x) – zaman (t) grafiği

3.2.2. Sönümlü zorlanmış kütle-yay sisteminin titreşim analizi

Kütlesi $m = 1\text{kg}$ olan bir cisim Şekil 3.6'da görüldüğü gibi $F = F_0 \cos(\omega t)$ kuvveti ile tahrik edilmektedir. Sistemdeki yayın yay sabiti; $k = 9\text{N/m}$, amortisörün sönüm oranı ise; $c = 1\text{Ns/m}$ 'dir. Ayrıca sistemin başlangıç şartları; $x(0) = 1$ ve $\dot{x}(0) = 3$ 'tür. Kuvvet genliği; $F_0 = 2\text{N}$ ve açısal frekans; $\omega = 1\text{rad/s}$ olmak üzere sistemin genel denklemi aşağıdaki biçimde elde edilir.

Cismin ivmesi $a = \ddot{x} = \frac{d^2x}{dt^2}$ ve hızı $v = \dot{x} = \frac{dx}{dt}$ olmak üzere;

$$\sum F = m\ddot{x} \quad (3.24)$$



Şekil 3.6 Sönümlü zorlanmış kütle-yay sistemi

ve Denklem (3.24)'den;

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F_0 \cos(\omega t) \quad (3.25)$$

yazılabilir. Denklem (3.25)'den, sistemin genel denklemi;

$$\ddot{x} + \frac{c}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = \frac{F_0}{m}\cos(\omega t) \quad (3.26)$$

olarak elde edilir. Aşağıda bu diferansiyel denklemin çözümü için gerekli olan Maple kodu verilmiştir.

`dsolve({diff(x(t),t$2)+c/m*diff(x(t),t)+k/m*x(t)=Fo/m*cos(w*t),x(0)=1,(D)(x)(0) = 3},x(t));`

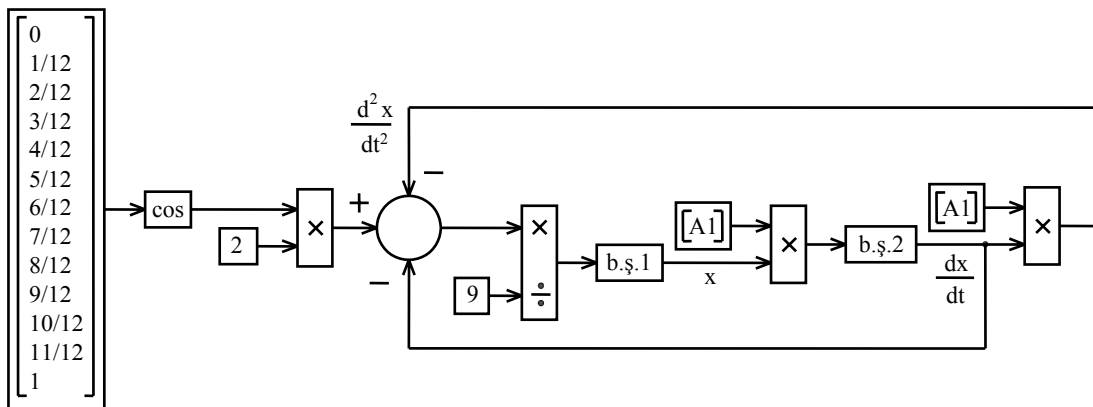
BM ile çözüm yapabilmek için Denklem (3.26)'daki x 'in yalnız bırakılması gereklidir. Buna göre Denklem (3.26);

$$x = \left(\frac{F_0}{m} \cos(\omega t) - \ddot{x} - \frac{c}{m} \dot{x} \right) \frac{m}{k} \quad (3.27)$$

şeklinde yazılır. Verilen sabit değerler yerine yazıldığında;

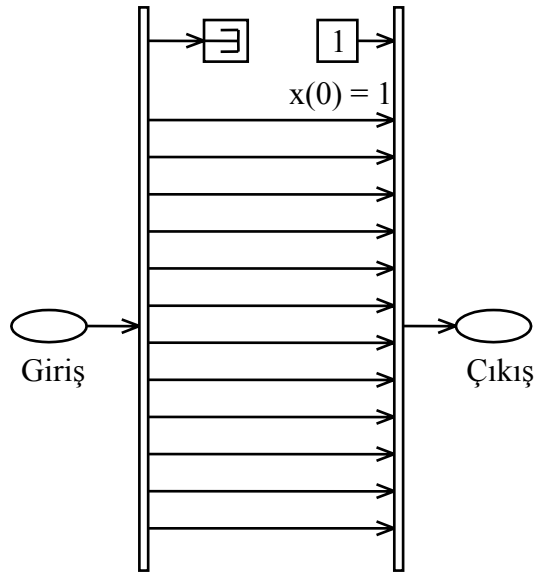
$$x = \left(2 \cos(t) - \ddot{x} - \dot{x} \right) \frac{1}{9} \quad (3.28)$$

elde edilir. Denklem (3.28)'e göre sistemin simülasyon şeması Şekil 3.7'de verilmiştir.

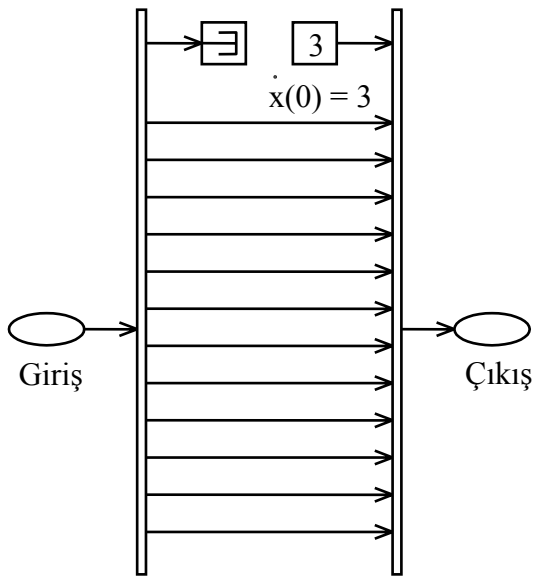


Şekil 3.7 Denklem (3.28)'de verilen ikinci dereceden diferansiyel denkleme ait simülasyon şeması

Şekil 3.7'de verilen [A1] bloğunda, birinci dereceden DQ ağırlıklı katsayılar matrisi sisteme girilmektedir ve Bölüm 3.1.1.'de nasıl elde edildiği anlatılmıştır. b.ş.1 bloğu $x(0) = 1$, b.ş.2 bloğu $\dot{x}(0) = 3$ başlangıç şartlarının uygulandığı yerlerdir. Şekil 3.8 ve 3.9'da sırasıyla bu blokların içerikleri verilmiştir.

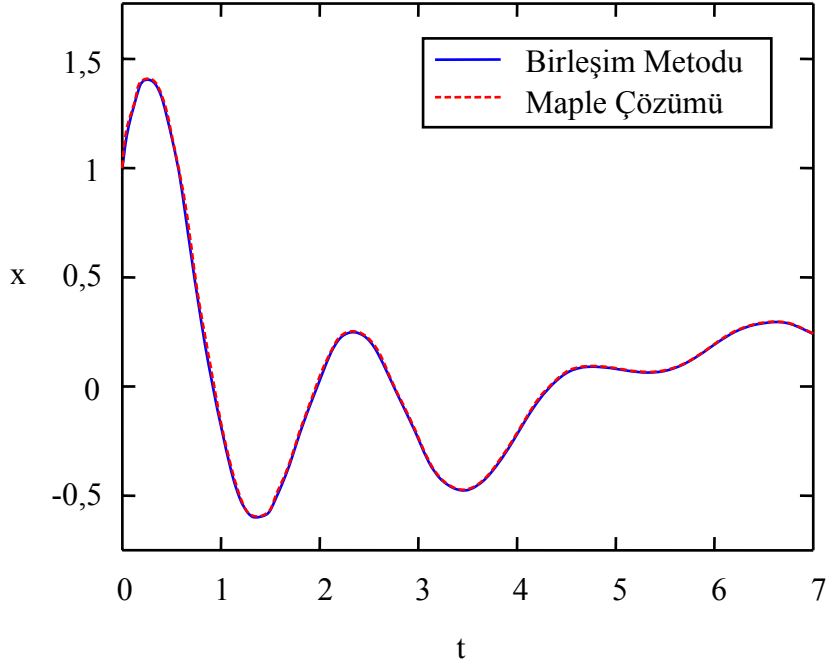


Şekil 3.8 Simülasyon şemasındaki b.ş.1 ile gösterilen bloğun içi



Şekil 3.9 Simülasyon şemasındaki b.ş.2 ile gösterilen bloğun içi

Şekil 3.10'da, Denklem (3.28)'de verilen diferansiyel denklemin BM kullanılarak elde edilen $(x-t)$ grafiği, Maple programı kullanılarak elde edilen $(x-t)$ grafiği ile kıyaslanmıştır.



Şekil 3.10 Sönümlü zorlanmış kütle-yay sistemine ait yer değiştirme (x) – zaman (t) grafiği

Şekil 3.10'dan da görüldüğü üzere yeni yöntemle elde edilen ağırlıklı katsayılar, Birleşim Metoduyla başarı ile uygulanmıştır. Elde edilen grafikler tam uyum sağlamaktadır.

3.2.3. İkinci dereceden diferansiyel denklem çözümü

Aşağıdaki ikinci dereceden diferansiyel denklem ele alınsın.

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -2 \frac{dy}{dx} + 10 + 8x \quad (3.29)$$

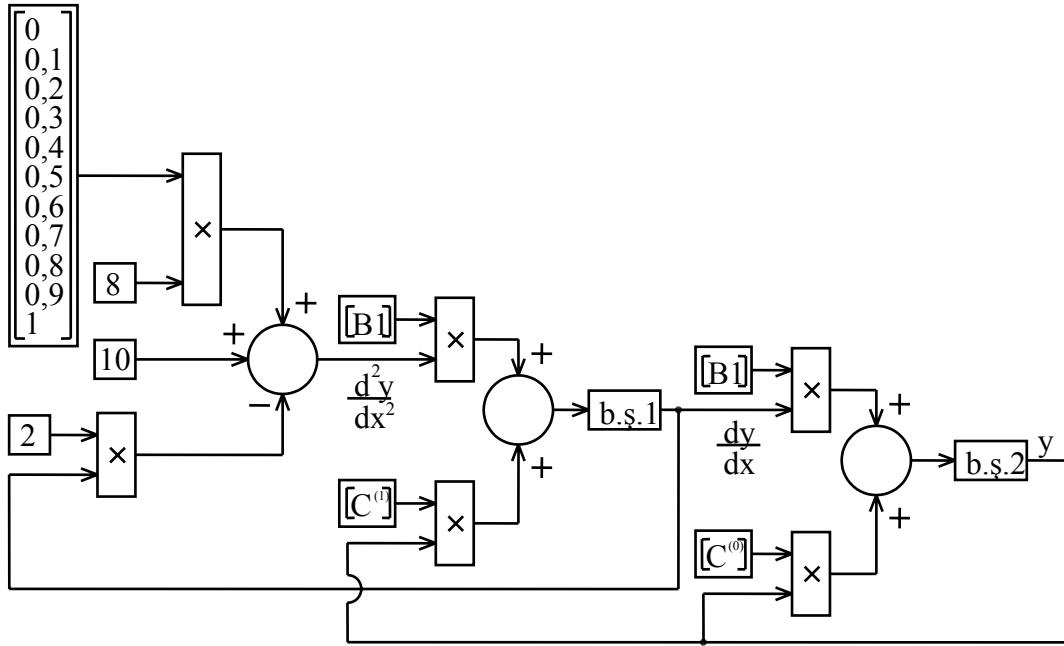
Bu diferansiyel denkleme ait başlangıç şartları;

$$y(0) = 5 \text{ ve } \dot{y}(0) = 3 \quad (3.30)$$

olsun. Aşağıda bu diferansiyel denklemin çözümü için gerekli olan Maple kodu ve cevabı verilmiştir.

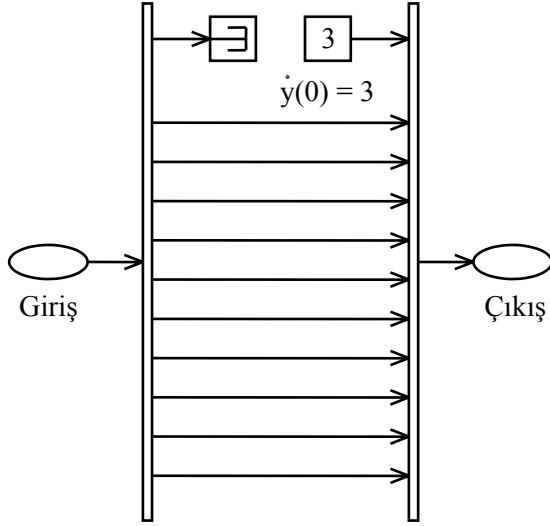
```
dsolve({diff(y(x),x$2)=-2*diff(y(x),x)+10+8*x,y(0)=5,
(D)(y)(0) = 3},y(x));
y(x)=2x^2+5+3x
```

Denklem (3.29)'daki diferansiyel denkleme ait simülasyon şeması Şekil 3.11'de verilmiştir.

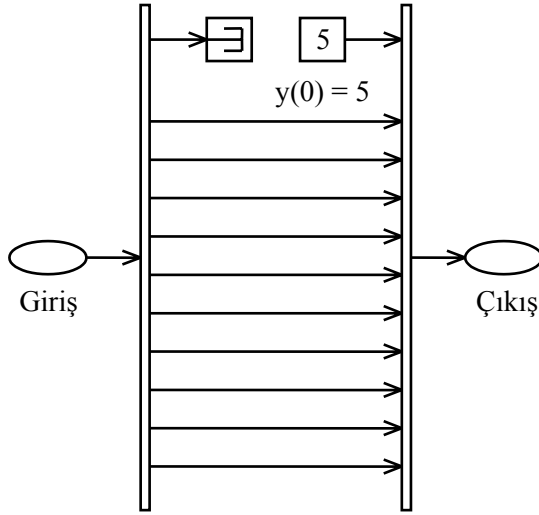


Şekil 3.11 Denklem (3.29)'da verilen ikinci dereceden diferansiyel denkleme ait simülasyon şeması

Şekil 3.11'de verilen $[B1]$ bloğunda, tek katlı integraller için İQ ağırlıklı katsayılar matrisi sisteme girilmektedir ve Bölüm 3.1.2.1.'de nasıl elde edildiği anlatılmıştır. Ayrıca $[C^{(1)}]$ bloğunda iki katlı, $[C^{(0)}]$ bloğunda ise tek katlı integralin alınması için gerekli olan integral sabiti katsayılar matrisleri bulunmaktadır. Bu matrislerin nasıl elde edildiği ise Bölüm 3.1.2.'de anlatılmıştır. Ayrıca, b.ş.1 bloğu $\dot{y}(0) = 3$ ve b.ş.2 bloğu $y(0) = 5$ başlangıç şartlarının uygulandığı yerlerdir. Şekil 3.12 ve Şekil 3.13'de bu blokların içerikleri verilmiştir.



Şekil 3.12 Simülasyon şemasındaki b.ş.1 ile gösterilen bloğun içi



Şekil 3.13 Simülasyon şemasındaki b.ş.2 ile gösterilen bloğun içi

Tablo 3.1’de, Denklem (3.29)’daki diferansiyel denklemin BM kullanılarak elde edilen sonuçları, Maple programından elde edilen sonuçlar ile kıyaslanmıştır.

Tablo 3.1’de verilen % bağıl hata oranları;

$$\% \text{ Hata} = \frac{f_{\text{gerçek}} - f_{\text{hesaplanan}}}{f_{\text{gerçek}}} \quad (3.31)$$

formülüyle bulunmuştur.

Tablo 3.1 Denklem (3.29)'da verilen ikinci dereceden diferansiyel denklemden elde edilen çözüm değerleri

Düğüm noktalarının koordinatları	Birleşim Metodu	Maple Çözümü	Bağlı Hata %
0	5	5	0
0,1	5,3200000012875	5,32	$-2.4201 \cdot 10^{-10}$
0,2	5,6800000027569	5,68	$-4.8537 \cdot 10^{-10}$
0,3	6,0800000038119	6,08	$-6.2696 \cdot 10^{-10}$
0,4	6,5200000044869	6,52	$-6.8817 \cdot 10^{-10}$
0,5	7,0000000048213	7	$-6.8876 \cdot 10^{-10}$
0,6	7,5200000048858	7,52	$-6.4971 \cdot 10^{-10}$
0,7	8,0800000047589	8,08	$-5.8897 \cdot 10^{-10}$
0,8	8,6800000043924	8,68	$-5.0604 \cdot 10^{-10}$
0,9	9,3200000045367	9,32	$-4.8677 \cdot 10^{-10}$
1	10,000000003686	10	$-3.6860 \cdot 10^{-10}$

% Bağlı hata oranlarından da görüldüğü üzere yeni integral ağırlıklı katsayılar, Birleşim Metodu ile başarıyla uygulanmıştır.

4. UYGULAMALAR

4.1. Dördüncü Dereceden Lineer Olmayan Diferansiyel Denklem

Aşağıdaki gibi bir diferansiyel denklem ele alınsın.

$$\frac{d^4f(x)}{dx^4} + f(x)\frac{df(x)}{dx} - 4x^7 - 24 = 0 \quad (4.1)$$

Denklem (4.1)'e ait başlangıç ve sınır şartları aşağıdaki gibi olsun.

$$f(0) = 0, \quad f(1) = 1, \quad \frac{d^2f(0)}{dx^2} = 0, \quad \frac{d^3f(0)}{dx^3} = 0 \quad (4.2)$$

Denklem (4.1)'e ait gerçek çözüm $f(x) = x^4$ 'dür. Görüldüğü üzere sistemi çözmek için hem başlangıç hem de sınır şartları kullanılmıştır. Ayrıca aynı noktaya üç adet şart uygulanmıştır. Aynı düğüm noktasına birden fazla şartın DQM'lerde uygulanması zordur. Ayrıca yukarıdaki ikinci şart olan sınır şartı ST'lerde uygulanamamaktadır. ST'lerin bu denklemi çözebilmesi için aşağıdaki şartların verilmesi gereklidir.

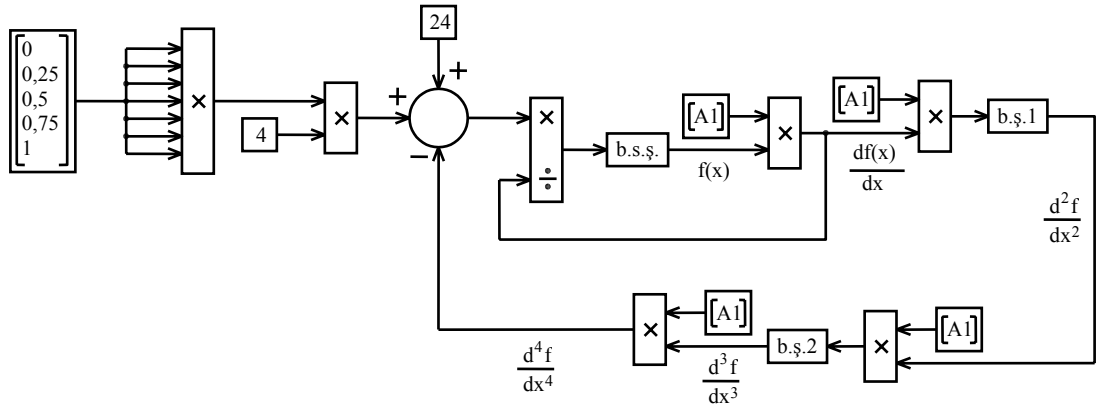
$$f(0) = 0, \quad \frac{df(0)}{dx} = 0, \quad \frac{d^2f(0)}{dx^2} = 0, \quad \frac{d^3f(0)}{dx^3} = 0 \quad (4.3)$$

Bu durum BM'nin farkını ortaya koymaktadır.

Simülasyon şeması oluşturulurken, Denklem (4.1)'de geçen $f(x)$ değeri yalnız bırakılmış ve simülasyon şeması aşağıda verilen denkleme göre oluşturulmuştur.

$$f(x) = \frac{-\frac{d^4f(x)}{dx^4} + 4x^7 + 24}{\frac{df(x)}{dx}} \quad (4.4)$$

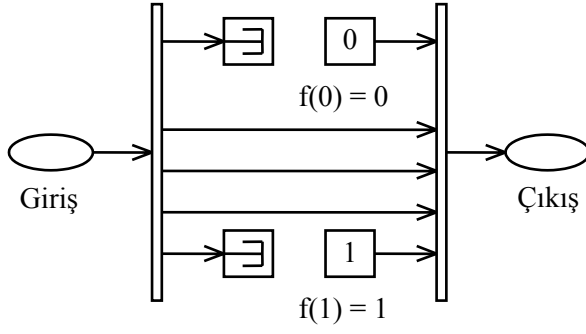
Şekil 4.1’de, Denklem (4.4)’de verilen dördüncü dereceden lineer olmayan diferansiyel denklemin simülasyon şeması verilmiştir.



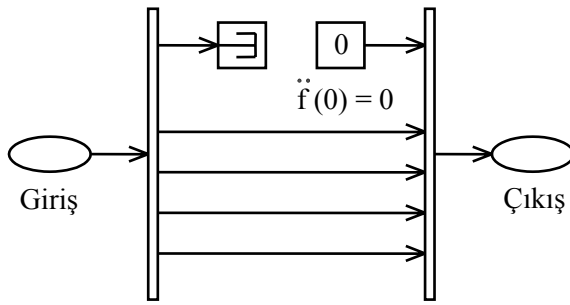
Şekil 4.1 Denklem (4.4)’de verilen dördüncü dereceden lineer olmayan diferansiyel denkleme ait simülasyon şeması

Şekil 4.1’de [A1] bloğu, birinci dereceden türevlerin ağırlıklı katsayılar matrisini içermektedir. Ayrıca b.s.ş, başlangıç ve sınır şartı, b.ş.1, birinci başlangıç şartı ve b.ş.2, ikinci başlangıç şartı olmak üzere bu bloklarda sırasıyla $f(0) = 0$, $f(1) = 1$, $\frac{d^2f(0)}{dx^2} = 0$, $\frac{d^3f(0)}{dx^3} = 0$ şartları uygulanmaktadır. Bu blokların içerikleri, Şekil 4.2, 4.3 ve 4.4’de sırasıyla gösterilmiştir.

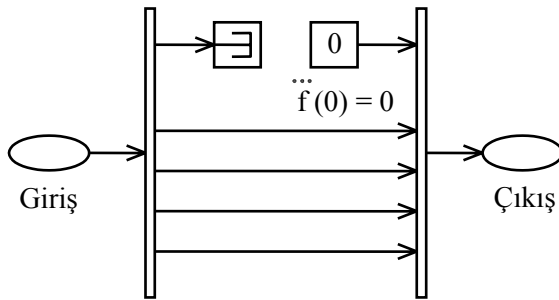
Tablo 4.1 ve 4.2’de BM ile elde edilen sonuçlar, Liu ve Wu’nun (2002) çalışmalarından elde ettikleri sonuçlar ile ve $f(x) = x^4$ gerçek çözümüyle kıyaslanmıştır.



Şekil 4.2 Simülasyon şemasındaki b.s.ş. ile gösterilen bloğun içi



Şekil 4.3 Simülasyon şemasındaki b.ş.1 ile gösterilen bloğun içi



Şekil 4.4 Simülasyon şemasındaki b.ş.2 ile gösterilen bloğun içi

Tablo 4.1 ve özellikle Tablo 4.2'den de anlaşılacağı üzere, Birleşim Metodu; kesin sonuca, Liu ve Wu'nun (2002) çalışmasından daha hassas olarak yaklaşmıştır.

Tablo 4.1 Denklem (4.4)'de verilen dördüncü dereceden lineer olmayan diferansiyel denklemden elde edilen fonksiyonun değerleri

N	x_i	f(x) fonksiyonunun değerleri		
		Birleşim Metodu	(Liu ve Wu 2002)	Kesin sonuç
5	0	0	0	0
	0,25	0,00390625	0,00390625	0,00390625
	0,5	0,0625	0,0625	0,0625
	0,75	0,31640625	0,31640625	0,31640625
	1	1	1	1
9	0	0	0	0
	0,125	0,000244140625	0,0002441	0,000244140625
	0,25	0,00390625	0,00390625	0,00390625
	0,375	0,019775390625	0,0197753	0,019775390625
	0,5	0,0625	0,0625	0,0625
	0,625	0,152587890625	0,15258789	0,152587890625
	0,75	0,31640625	0,31640625	0,31640625
	0,875	0,586181640625	0,5861816	0,586181640625
	1	1	1	1
13	0	0	0	0
	0,08333	0,00004822530869	0,00004823	0,00004822530864
	0,16667	0,00077160493834	0,0007716	0,00077160493827
	0,25	0,00390625000007	0,0039062	0,00390625
	0,33333	0,011234567901241	0,0123456	0,01234567901235
	0,41667	0,03014081790129	0,0301408	0,03014081790123
	0,5	0,0625	0,0625000	0,0625
	0,58333	0,11578896604942	0,11578897	0,11578896604938
	0,66667	0,19753086419756	0,1975308	0,19753086419753
	0,75	0,316406250	0,3164062	0,31640625
	0,83333	0,48225308641977	0,4822530	0,48225308641975
	0,91667	0,70606674382717	0,70606674	0,70606674382716
	1	1	1	1

Tablo 4.2 Denklem (4.4)'de verilen dördüncü dereceden lineer olmayan diferansiyel denklemden elde edilen fonksiyonun 1. dereceden türevinin değerleri

N	x_i	Fonksiyonun 1. dereceden türevinin ($df(x)/dx$) değerleri		
		Birleşim Metodu	(Liu ve Wu 2002)	Kesin sonuç
5	0	0	0	0
	0,25	0,0625	0,0625	0,0625
	0,5	0,5	0,5	0,5
	0,75	1,6875	1,6875	1,6875
	1	4	4	4
9	0	0	0,00000024	0
	0,125	0,0078125	0,00781246	0,0078125
	0,25	0,0625	0,06250002	0,0625
	0,375	0,2109375	0,21093749	0,2109375
	0,5	0,5	0,5	0,5
	0,625	0,9765625	0,97656251	0,9765625
	0,75	1,6875	1,68749999	1,6875
	0,875	2,6796875	2,67968753	2,6796875
	1	4	3,99999980	4
13	0	0	0,00000260	0
	0,08333	0,00231481481519	0,00231457	0,00231481481481
	0,16667	0,01851851851868	0,01851856	0,01851851851852
	0,25	0,06249999999995	0,06249998	0,0625
	0,33333	0,14814814814805	0,14814817	0,14814814814815
	0,41667	0,28935185185175	0,28935183	0,28935185185185
	0,5	0,5	0,5000000	0,5
	0,58333	0,79398148148136	0,79398151	0,79398148148148
	0,66667	1,18518518518508	1,18518517	1,18518518518518
	0,75	1,68749999999991	1,68750003	1,6875
	0,83333	2,31481481481476	2,3148147	2,31481481481481
	0,91667	3,08101851851848	3,0810188	3,08101851851852
	1	4	3,99999698	4

4.2. Duffing Tip Lineer Olmayan Diferansiyel Denklem

Duffing tip lineer olmayan diferansiyel denklem aşağıdaki biçimde verilmiştir (Liu ve Wu 2000).

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + y(t) + R y(t)^3 = F \sin(\omega t) \quad (4.5)$$

Burada $F = 2$, $\omega = 1$ ve $R = -1/6$ ve başlangıç şartları da;

$$y(0) = 0, \quad \dot{y}(0) = -2,7676 \quad (4.6)$$

olarak verilmiştir. Groves (1983), Denklem (4.5)'e bu başlangıç şartları uygulandığında aşağıdaki yaklaşık çözümün bulunacağını söylemiştir.

$$y(t) = -2,5425 \sin(\omega t) - 0,07139 \sin(3\omega t) - 0,00219 \sin(5\omega t) + \dots \quad (4.7)$$

Denklem (4.7)'den de görüldüğü üzere denkleme terimler ilave edilebilir. Daha yüksek hassasiyette çözüm bulabilmek için Denklem (4.7) genişletilmiştir. Denklem (4.7)'nin genişletilmiş hali genel olarak;

$$y(t) = a_0 + a_1 \sin(\omega t) + a_2 \sin(3\omega t) + a_3 \sin(5\omega t) + a_4 \sin(7\omega t) + a_5 \sin(9\omega t) \quad (4.8)$$

şeklinde yazılabilir.

Denklem (4.8)'deki a_0 'dan a_5 'e kadar olan katsayılar hesaplanmalıdır. Altı adet katsayı olduğu için altı adet denkleme ihtiyaç vardır. Bu altı denklemden iki tanesi verilen başlangıç şartlarından elde edilir. $y(0) = 0$ şartından a_0 katsayısı elde edilir. $\dot{y}(0) = -2,7676$ şartından, denklemin biri elde edilir. Diğer dört denklem Denklem (4.5)'e uygun t değerleri verilerek elde edilir.

Buna göre aşağıdaki çözüm fonksiyonu elde edilmiştir.

$$y(t) = -2,54186884222437 \sin(\omega t) - 0,07148431791519 \sin(3\omega t) \\ - 0,00215333311556 \sin(5\omega t) - (7,639713674264284 \cdot 10^{-5}) \sin(7\omega t) \quad (4.9) \\ - (1,033700864883016 \cdot 10^7) \sin(9\omega t) + \dots$$

BM ile çözüm yapabilmek için öncelikle Denklem (4.5)'deki $y(t)$ yalnız bırakılır.

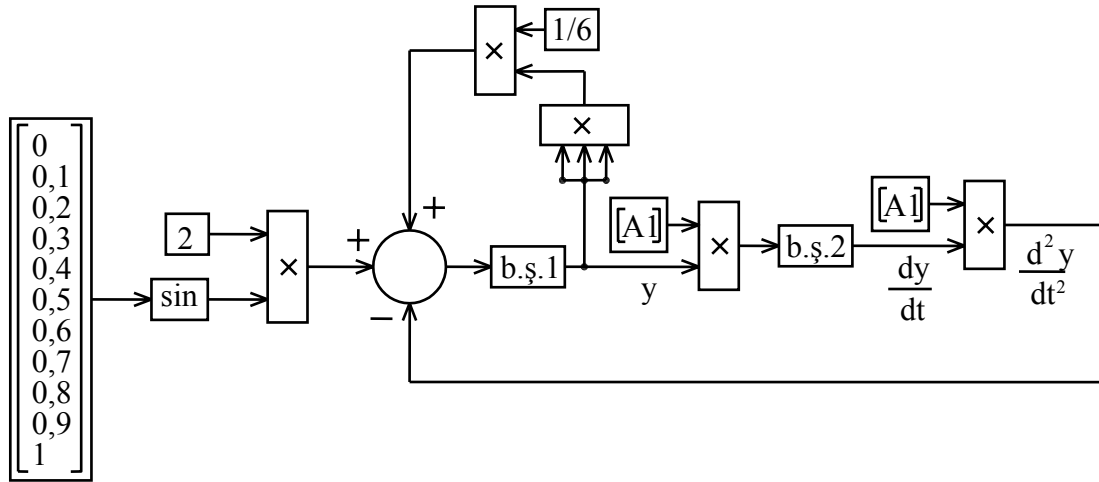
Buna göre;

$$y(t) = F \sin(\omega t) - R y(t)^3 - \frac{d^2 y(t)}{dt^2} \quad (4.10)$$

elde edilir. Verilen sabit değerler Denklem (4.10)'da, yerine yazıldığında;

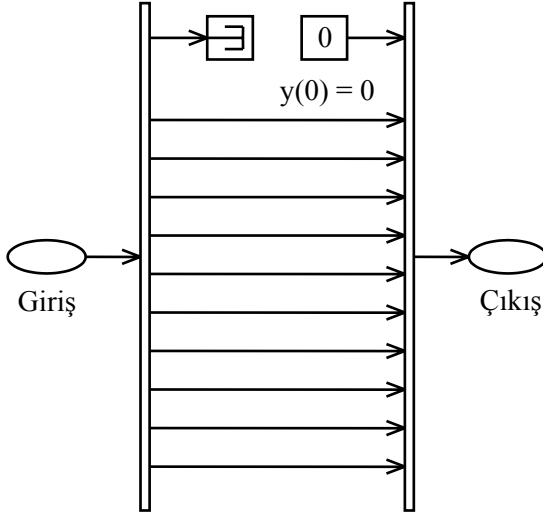
$$y = 2 \sin(t) + \frac{1}{6} y^3 - \frac{d^2 y}{dt^2} \quad (4.11)$$

elde edilir. Denklem (4.11)'de verilen Duffing tip lineer olmayan diferansiyel denklemin simülasyon şeması Şekil 4.5'de verilmiştir.

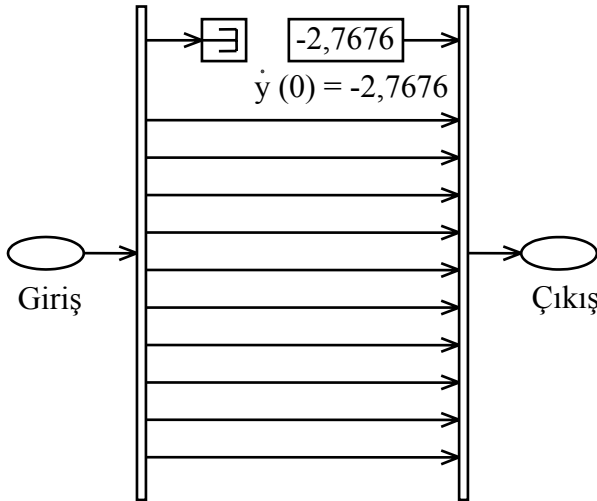


Şekil 4.5 Duffing tip lineer olmayan diferansiyel denkleme ait simülasyon şeması

Şekil 4.5’de $[A1]$ bloğu, birinci dereceden türevler için ağırlıklı katsayılar matrisini içermektedir. Ayrıca b.ş.1 ve b.ş.2 bloklarında sırasıyla $y(0)=0$, $\dot{y}(0)=-2.7676$ şartları uygulanmaktadır. Bu blokların içerikleri, Şekil 4.6 ve 4.7’de sırasıyla gösterilmiştir.



Şekil 4.6 Simülasyon şemasındaki b.ş.1 ile gösterilen bloğun içi



Şekil 4.7 Simülasyon şemasındaki b.ş.2 ile gösterilen bloğun içi

Tablo 4.3, 4.4 ve 4.5’de, BM ile elde edilen sonuçlar, Liu ve Wu’nun (2000) DQ çözümleri ve Denklem (4.9) kıyaslanmıştır.

Tablo 4.3 Duffing tip lineer olmayan diferansiyel denklemden elde edilen yer değiştirme değerleri

t	Yer değiştirme (rad)		
	BM	(Liu ve Wu 2000)	Denklem (4.9)
0	0	0	0
0,1	-0,27596	-	-0,27596
0,2	-0,54723	-0,5472	-0,54723
0,3	-0,80937	-	-0,80937
0,4	-1,05845	-1,0584	-1,05845
0,5	-1,29119	-	-1,29119
0,6	-1,50508	-1,505	-1,50508
0,7	-1,69837	-	-1,69838
0,8	-1,87001	-1,8699	-1,87001
0,9	-2,01954	-	-2,01954
1,0	-2,14696	-2,1468	-2,14696
1,2	-2,33693	-2,3368	-2,33695
1,4	-2,44388	-2,4437	-2,44400
1,6	-2,47132	-2,4711	-2,47167
1,8	-2,42031	-2,4199	-2,42106
2,0	-2,28891	-2,2885	-2,29024
2,2	-2,07317	-2,0726	-2,07521
2,4	-1,76958	-1,7688	-1,77243
2,6	-1,37883	-1,3779	-1,38256
2,8	-0,91016	-0,9090	-0,91476
3,0	-0,38426	-0,3830	-0,38962
3,2	0,16741	0,1688	0,16149
3,4	0,70798	0,7094	0,70172
3,6	1,20298	1,2044	1,19655
3,8	1,62708	1,6285	1,62057
4,0	1,96673	1,9682	1,96004

Tablo 4.4 Duffing tip lineer olmayan diferansiyel denklemden elde edilen hız değerleri

t	Hız (rad/s)		
	BM	(Liu ve Wu 2000)	Denklem (4.9)
0	-2,7676	-2,7676	-2,76760
0,1	-2,74387	-	-2,74388
0,2	-2,67407	-2,6741	-2,67408
0,3	-2,56211	-	-2,56211
0,4	-2,41391	-2,4137	-2,41392
0,5	-2,23672	-	-2,23672
0,6	-2,03823	-2,0381	-2,03823
0,7	-1,82585	-	-1,82586
0,8	-1,60615	-1,6061	-1,60616
0,9	-1,38442	-	-1,38443
1,0	-1,16453	-1,1643	-1,16456
1,2	-0,738709	-0,7384	-0,73895
1,4	-0,33388	-0,3337	-0,33465
1,6	0,05851	0,0588	0,05694
1,8	0,45330	0,4538	0,45083
2,0	0,86419	0,8648	0,86095
2,2	1,29643	1,2972	1,29258
2,4	1,73931	1,7402	1,73503
2,6	2,16075	2,1617	2,15631
2,8	2,50864	2,5094	2,50448
3,0	2,72365	2,7242	2,72027
3,2	2,76174	2,7622	2,75948
3,4	2,61463	2,6148	2,61346
3,6	2,31395	2,3139	2,31345
3,8	1,91595	1,9160	1,91543
4,0	1,47796	1,4781	1,47662

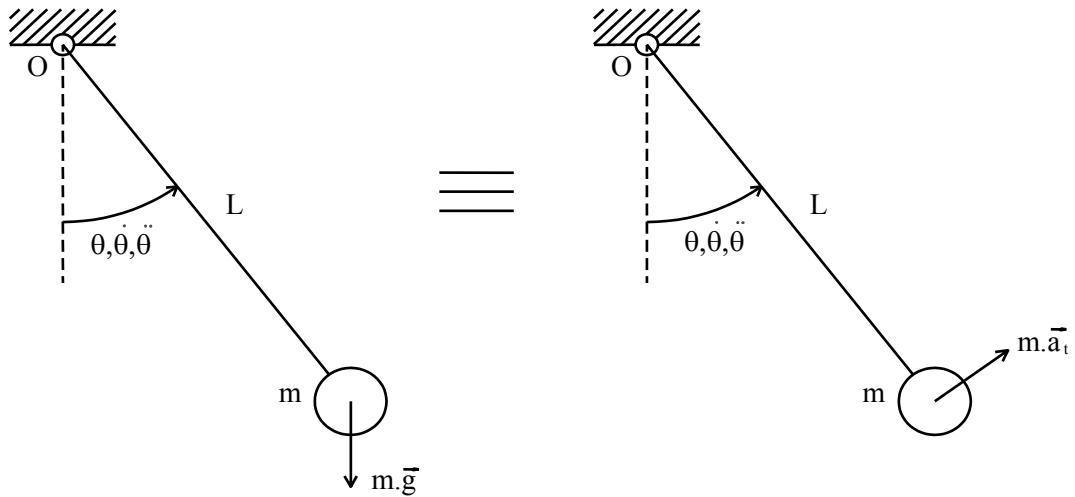
Tablo 4.5 Duffing tip lineer olmayan diferansiyel denklemden elde edilen ivme değerleri

t	İvme (rad/s ²)		
	BM	(Liu ve Wu 2000)	Denklem (4.9)
0	-0,00004	0,0121	0
0,1	0,47213	-	0,47213
0,2	0,91726	0,9173	0,91726
0,3	1,31204	-	1,31205
0,4	1,63965	1,6402	1,63965
0,5	1,89126	-	1,89127
0,6	2,06612	2,065	2,06613
0,7	2,17032	-	2,17033
0,8	2,21483	2,2153	2,21481
0,9	2,21339	-	2,21324
1,0	2,18052	2,1814	2,18006
1,2	2,07393	2,0739	2,07218
1,4	1,98209	1,982	1,97864
1,6	1,95490	1,9556	1,95043
1,8	2,00502	2,0059	2,00074
2,0	2,10887	2,1096	2,10544
2,2	2,20507	2,2059	2,20247
2,4	2,19696	2,1975	2,19534
2,6	1,97293	1,9724	1,97311
2,8	1,45448	1,4535	1,45716
3,0	0,65705	0,6566	066201
3,2	-0,28228	-0,2844	-0,27753
3,4	-1,15992	-1,1618	-1,15521
3,6	-1,79787	-1,798	-1,89607
3,8	-2,13288	-2,1324	-2,13496
4,0	-2,21244	-2,2111	-2,21856

Tablo 4.3, 4.4 ve 4.5'den de anlaşılacağı üzere, Birleşim Metodu, Denklem (4.9) ile verilen çözüme, Liu ve Wu'nun (2000) çalışmasından daha hassas olarak yaklaşmıştır. Ayrıca Liu ve Wu'nun (2000) çalışması, Bölüm 2.8'de lineer olmayan diferansiyel denklem çözümlerinde Frechet türevinin kullanımı başlığı altında ayrıntısıyla anlatılmıştır. BM ile Liu ve Wu'nun (2000) Frechet türevi kullanarak yaptığı bu çalışması kıyaslandığında, BM'nin uygulama kolaylığı açıkça görülmektedir.

4.3. Lineer Olmayan Sarkaç Salınımı

Sarkacın hareketini ifade eden denklem, büyük açısal yer değiştirmeler dikkate alındığında lineer olmayan bir diferansiyel denklem halini alır. Şekil 4.8'deki sarkaca Newton prensibi uygulandığında;



Şekil 4.8 Lineer olmayan davranış gösteren sarkaç salınımı

$$\sum M_o = 0 \quad (4.12)$$

$$mg \sin(\theta(t))L = -m a_t L \quad (4.13)$$

Denklem (4.13)'de $a_t = \frac{d^2\theta(t)}{dt^2}r$ eşitliğinden;

$$mg \sin(\theta(t))L = -m \frac{d^2\theta(t)}{dt^2} L L \quad (4.14)$$

elde edilir. Denklem (4.14) sadeleştirildiğinde;

$$\frac{d^2\theta(t)}{dt^2} + \frac{g}{L} \sin(\theta(t)) = 0 \quad (4.15)$$

eşitliği elde edilir. Burada $\omega^2 = g/L$ sarkacın doğal frekansı olmak üzere Denklem (4.15) tekrar yazıldığında;

$$\frac{d^2\theta(t)}{dt^2} + \omega^2 \sin(\theta(t)) = 0 \quad (4.16)$$

eşitliği bulunur.

Sistemin ait başlangıç şartları;

$$\theta(0) = \frac{\pi}{4} \text{ ve } \dot{\theta}(0) = 0 \quad (4.17)$$

olarak verilmiştir. Burada θ , açısal yer değiştirmeyi ve $\dot{\theta}$, açısal hızı temsil etmektedir.

Başlangıç yer değiştirme, θ_0 ve başlangıç açısal hız, $\dot{\theta}_0$ ile gösterilmek üzere Nayfeh ve Mook (1979) ve Fung (2001) aşağıdaki analitik çözümü vermişlerdir.

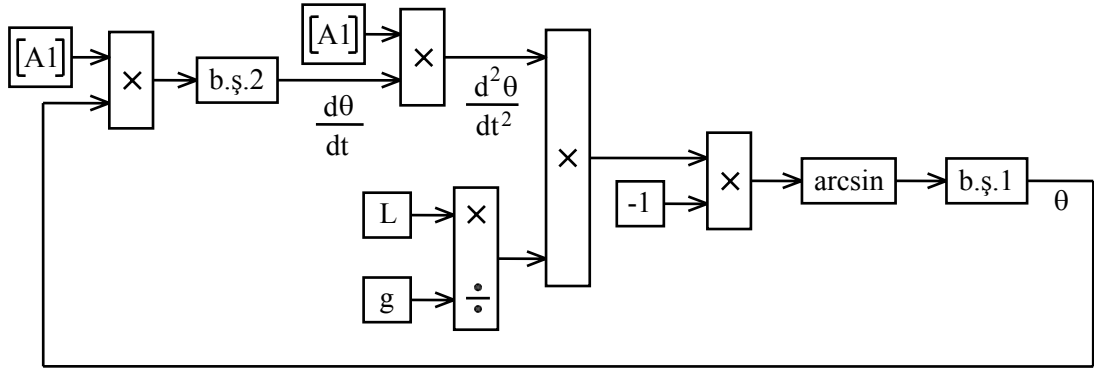
$$t = \mp \int_{\theta_0}^{\theta} \frac{1}{\sqrt{\omega_0^2 + 2\omega^2 (\cos(\theta) - \cos(\theta_0))}} d\theta \quad (4.18)$$

Sistemi BM ile çözmek için Denklem (4.15)'de $\theta(t)$ 'nin yalnız bırakılması gerekir.

Buna göre $\theta(t)$;

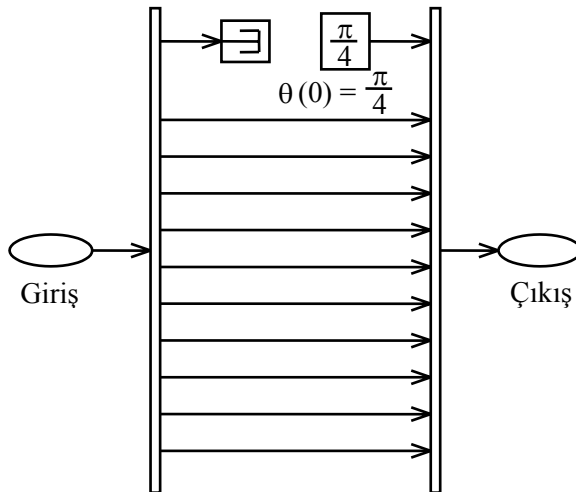
$$\theta(t) = \arcsin\left(-\frac{d^2\theta(t)}{dt^2} \frac{L}{g}\right) \quad (4.19)$$

biçiminde elde edilir. Denklem (4.19)'da verilen lineer olmayan sarkaç salınımını ifade eden diferansiyel denklemin simülasyon şeması aşağıdaki biçimde elde edilir.

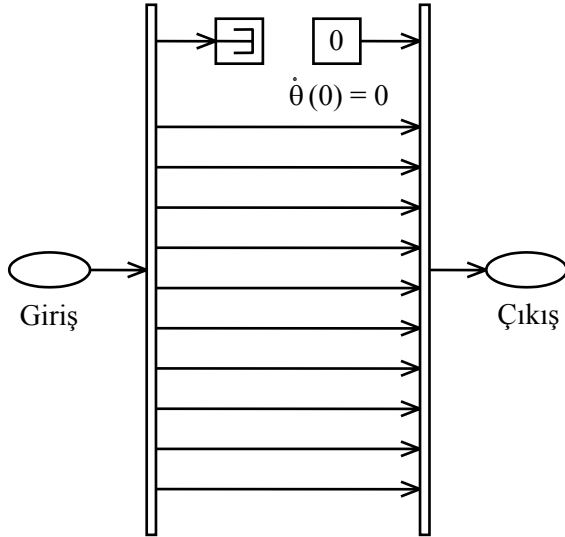


Şekil 4.9 Lineer olmayan sarkaç salınımını ifade eden diferansiyel denkleme ait simülasyon şeması

Şekil 4.9'da $[A1]$ bloğu, birinci dereceden türevler için ağırlıklı katsayılar matrisini içermektedir. Ayrıca b.ş.1 ve b.ş.2 bloklarında sırasıyla $\theta(0) = \frac{\pi}{4}$ ve $\dot{\theta}(0) = 0$ şartları uygulanmaktadır. Bu blokların içerikleri, Şekil 4.10 ve 4.11'de sırasıyla gösterilmiştir.



Şekil 4.10 Simülasyon şemasındaki b.ş.1 ile gösterilen bloğun içi



Şekil 4.11 Simülasyon şemasındaki b.ş.2 ile gösterilen bloğun içi

Tablo 4.6’da $\omega^2 = 2$ için, BM ile elde edilen, açısai yer değıştirme, açısai hız ve açısai ivme değeri verilmiş, ayrıca açısai yer değıştirme değeri Denklem (4.18)’de verilen analitik çözüm ile kıyaslanmıştır.

Tablo 4.6’dan anlaşılacağı üzere, Birleşim Metodu ile Denklem (4.18)’de verilen çözüm değeri, sıfır hata ile birbirini doğrulamaktadır.

4.4. İkinci Dereceden Lineer Olmayan Diferansiyel Denklem

Aşağıdaki gibi bir diferansiyel denklem ele alınsın.

$$\frac{d^2y}{dt^2} + y \frac{dy}{dt} + y + \frac{25}{4} \sin(t) \cos(t) = 0 \quad (4.20)$$

Denklem (4.20)’ye ait başlangıç şartları aşağıdaki gibi olsun.

$$y(0) = \frac{5}{2} \quad \text{ve} \quad \frac{dy(0)}{dt} = 0 \quad (4.21)$$

Tablo 4.6 Lineer olmayan sarkaç salınımı için yerdeğiştirme, hız ve ivme değerleri

Zaman	Açısal yer değiştirme (rad)			Açısal hız (rad/s) (BM)	Açısal ivme (rad / s ²) (BM)
	BM	Denklemler (4.18)	Hata (%)		
0,0	0,785398	0,785398	0,0000	0,000000	1,414204
0,1	0,778336	0,778335	0,0000	-0,141087	-1,404190
0,2	0,757248	0,757248	0,0000	-0,280161	-1,373848
0,3	0,722439	0,722439	0,0000	-0,415155	-1,322433
0,4	0,674425	0,674424	0,0000	-0,543910	-1,248896
0,5	0,613941	0,613940	0,0000	-0,664161	-1,152186
0,6	0,541954	0,541954	0,0000	-0,773551	-1,031623
0,7	0,459672	0,459672	0,0000	-0,869693	-0,887308
0,8	0,368535	0,368535	0,0000	-0,950262	-0,720499
0,9	0,270210	0,270210	0,0000	-1,013130	-0,533868
1,0	0,166559	0,166559	0,0000	-1,056512	-0,331580
1,2	-0,048545	-0,048545	0,0000	-1,080213	0,097052
1,4	-0,259807	-0,259807	0,0000	-1,018494	0,513789
1,6	-0,450720	-0,450720	0,0000	-0,878697	0,871227
1,8	-0,607079	-0,607079	0,0000	-0,675902	1,140941
2,0	-0,718118	-0,718118	0,0000	-0,428661	1,315938
3,0	-0,468528	-0,468530	0,0000	0,860526	0,903148
4,0	0,525898	0,525898	0,0000	0,794395	-1,003980
5,0	0,685299	0,685300	0,0000	-0,518216	-1,265808

Denklemler (4.20)'ye ait gerçel çözüm;

$$y(t) = \frac{5}{2} \cos(t) \quad (4.22)$$

dir. BM ile kıyaslama yapmak için, problemin DQM kullanılarak elde edilen sonuçları da verilecektir. Denklem (4.20) gibi lineer olmayan bir diferansiyel denklemin DQM ile çözümünün yapılabilmesi için, Frechet türevi kullanılarak lineerleştirilmesi gereklidir.

Denklem (4.20)'nin Frechet türevi kullanılarak lineerleştirilmiş formu aşağıda verilmiştir.

$$\frac{d^2\theta(t)}{dt^2} + y(t)\frac{d\theta(t)}{dt} + \left[\frac{dy}{dt} + 1\right]\theta(t) = -\frac{d^2y}{dt^2} - y\frac{dy}{dt} - y - \frac{25}{4}\sin(t)\cos(t) \quad (4.23)$$

Bölüm (2.8)'de Frechet türevi kullanılarak DQM ile çözüm yöntemi ayrıntılarıyla anlatıldığından bu bölümde sadece sonuçları verilir, BM ile kıyaslanacaktır.

Simülasyon şeması oluşturulurken, Denklem (4.20)'de geçen y değeri yalnız bırakılmış ve simülasyon şeması aşağıda verilen denkleme göre oluşturulmuştur.

$$y = -\frac{d^2y}{dt^2} - y\frac{dy}{dt} - \frac{25}{4}\sin(t)\cos(t) \quad (4.24)$$

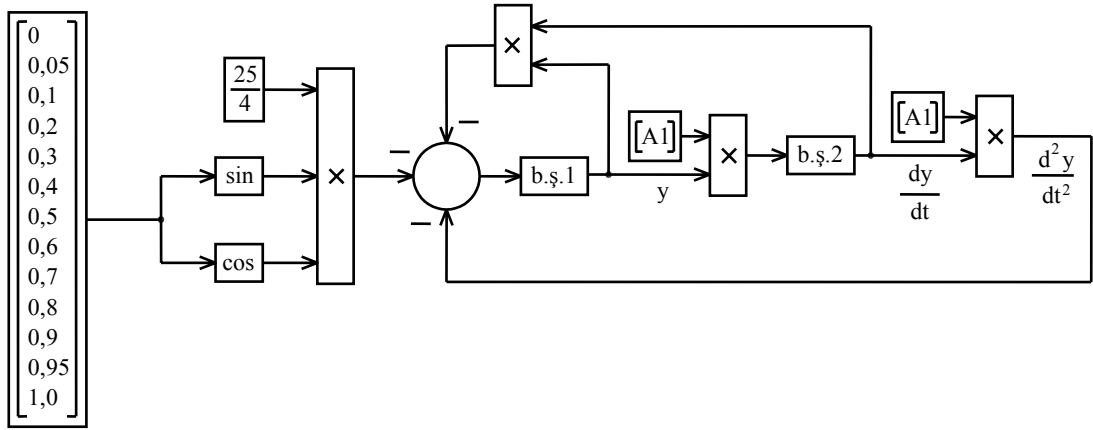
Denklem (4.24) çözülürken, daha doğru sonuçlar elde etmek için tecrübe ile, diğer örneklerden farklı olarak bu örnekte düğüm noktaları dağılımı, eşit dağıtılmış olarak değil aşağıdaki düzene göre alınacaktır.

$$x_i = 0 - 0,05 - 0,1 - 0,2 - 0,3 - 0,4 - 0,5 - 0,6 - 0,7 - 0,8 - 0,9 - 0,95 - 1,0 \quad (4.25)$$

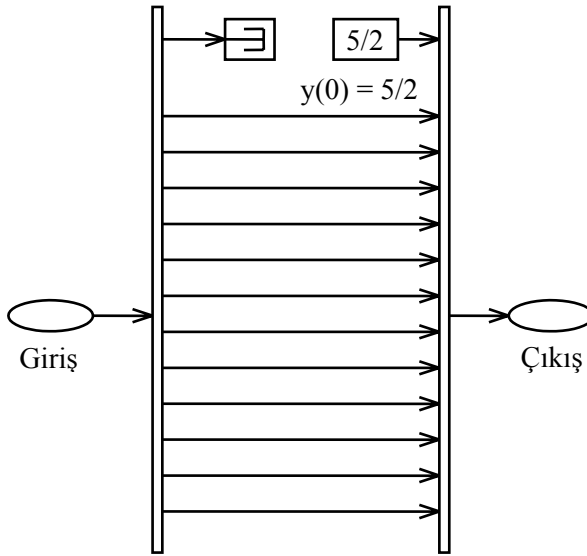
Şekil 4.12'de, Denklem (4.24)'de verilen ikinci dereceden lineer olmayan diferansiyel denklemin simülasyon şeması gösterilmiştir.

Şekil 4.12'deki [A1] bloğu, birinci dereceden türevler için ağırlıklı katsayılar matrisini içermektedir. Ayrıca b.ş.1 ve b.ş.2 bloklarında sırasıyla $y(0) = \frac{5}{2}$ ve $\frac{dy(0)}{dt} = 0$ şartları uygulanmaktadır. Bu blokların içerikleri, Şekil 4.13 ve 4.14'de sırasıyla gösterilmiştir.

Ayrıca Tablo 4.7'de BM ile elde edilen sonuçlar, Denklem (4.22) ile ve Tablo 4.8'de DQM ile elde edilen sonuçlar, yine Denklem (4.22) ile kıyaslanmıştır.

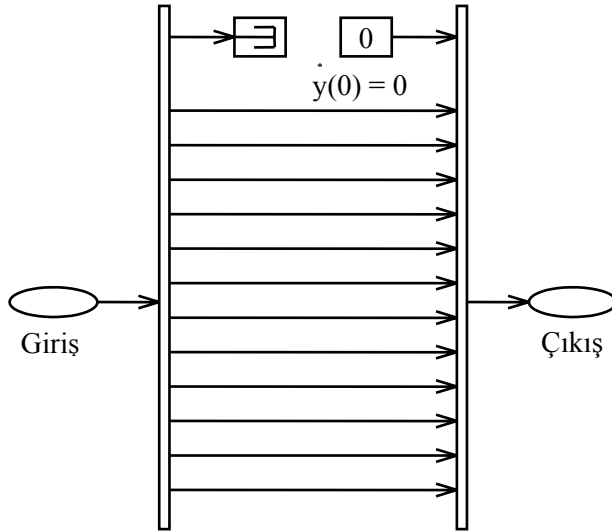


Şekil 4.12 Denklem (4.24)'de verilen ikinci dereceden lineer olmayan diferansiyel denkleme ait simülasyon şeması



Şekil 4.13 Simülasyon şemasındaki b.ş.1 ile gösterilen bloğun içi

Tablo 4.7 ve Tablo 4.8'deki % Hata oranlarından da anlaşılacağı üzere, Birleşim Metodu, kesin sonuca, DQM'den çok daha hassas olarak yaklaşmıştır.



Şekil 4.14 Simülasyon şemasındaki b.ş.2 ile gösterilen bloğun içi

Tablo 4.7 Denklem (4.24)'de verilen ikinci dereceden lineer olmayan diferansiyel denklem için BM kullanılarak elde edilen y değerleri

Zaman	$y(t)$ değerleri		Hata (%)
	BM	Denklem (4.22)	
0,00	2,5	2,5	0,0
0,05	2,496875650987412	2,496875650987416	$1,6007 \cdot 10^{-15}$
0,10	2,487510413195064	2,487510413195064	$1,7853 \cdot 10^{-16}$
0,20	2,450166444603103	2,450166444603104	$3,6250 \cdot 10^{-16}$
0,30	2,388341222814017	2,388341222814015	$-7,4376 \cdot 10^{-16}$
0,40	2,302652485007217	2,302652485007213	$-1,9286 \cdot 10^{-15}$
0,50	2,193956404725934	2,193956404725932	$-1,0121 \cdot 10^{-15}$
0,60	2,063339037274200	2,063339037274196	$-2,1523 \cdot 10^{-15}$
0,70	1,912105468211233	1,912105468211221	$-6,3869 \cdot 10^{-15}$
0,80	1,741766773367915	1,741766773367913	$-7,6489 \cdot 10^{-16}$
0,90	1,554024920676669	1,554024920676661	$-5,2867 \cdot 10^{-15}$
0,95	1,454207723659714	1,454207723659709	$-3,1519 \cdot 10^{-15}$
1,00	1,350755764670379	1,350755764670349	$-2,1534 \cdot 10^{-14}$

Tablo 4.8 Denklem (4.24)'de verilen ikinci dereceden lineer olmayan diferansiyel denklem için DQM kullanılarak elde edilen y değerleri

Zaman	y(t) değerleri		Hata (%)
	DQM	Denklem (4.22)	
0,00	2,5	2,5	0,0
0,05	2,496875650971941	2,496875650987416	0,0062.10 ⁻⁹
0,10	2,487510413161805	2,487510413195064	0,0134.10 ⁻⁹
0,20	2,450166444537046	2,450166444603104	0,0270.10 ⁻⁹
0,30	2,388341222723405	2,388341222814015	0,0379.10 ⁻⁹
0,40	2,302652484903306	2,302652485007213	0,0451.10 ⁻⁹
0,50	2,193956404613121	2,193956404725932	0,0514.10 ⁻⁹
0,60	2,063339037149050	2,063339037274196	0,0607.10 ⁻⁹
0,70	1,912105468070178	1,912105468211221	0,0738.10 ⁻⁹
0,80	1,741766773216020	1,741766773367913	0,0872.10 ⁻⁹
0,90	1,554024920519212	1,554024920676661	0,1013.10 ⁻⁹
0,95	1,454207723503699	1,454207723659709	0,1073.10 ⁻⁹
1,00	1,350755764517282	1,350755764670349	0,1133.10 ⁻⁹

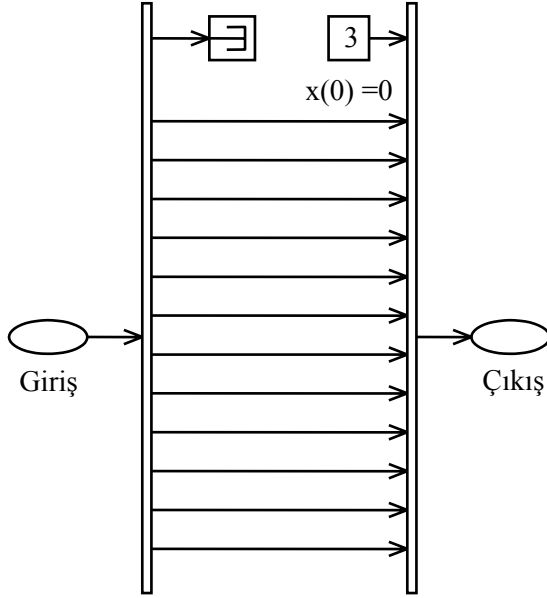
4.5. Lineer Olmayan Sönüm ve Sürtünme Etkisindeki Kütle-Yay Sistemi

Lineer olmayan sönüm ve sürtünme etkisine maruz, yay ve sönümleyiciye bağlanmış bir cismin salınımının hareket denklemi;

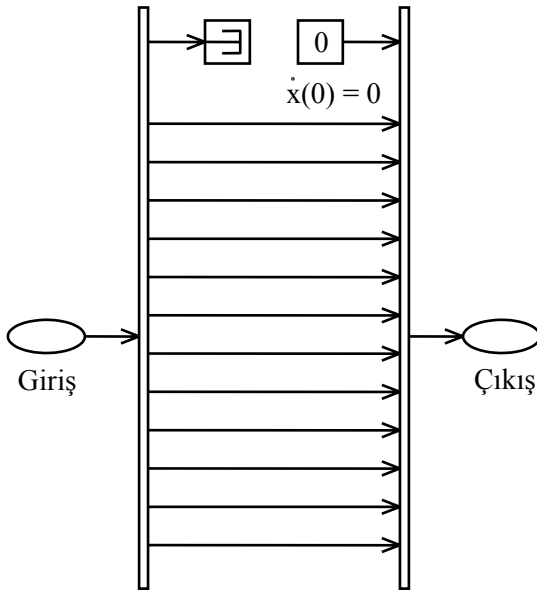
$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 \frac{d^2x}{dt^2} + \mu_1 x + \mu_2 \frac{dx}{dt} \left| \frac{dx}{dt} \right| + \mu_3 \left(\frac{dx}{dt} \right)^3 = 0 \quad (4.26)$$

olarak verilmiştir (Dai ve Singh 1997). Burada doğal frekansın karekökü $\omega = 0,5$ ve sabitler $\mu_1 = 4$, $\mu_2 = 0,2$ ve $\mu_3 = 0$ 'dir. Ayrıca Denklem (4.26)'nın başlangıç şartları aşağıdaki gibidir.

Şekil 4.15’de $[A1]$ bloğu, birinci dereceden türevler için ağırlıklı katsayılar matrisini, abs, mutlak değer alma işlemini göstermektedir. Ayrıca b.ş.1 ve b.ş.2 bloklarında sırasıyla $x(0)=3$, $\frac{dx(0)}{dt}=0$ şartları uygulanmaktadır. Bu blokların içerikleri Şekil 4.16 ve 4.17’de sırasıyla gösterilmiştir.

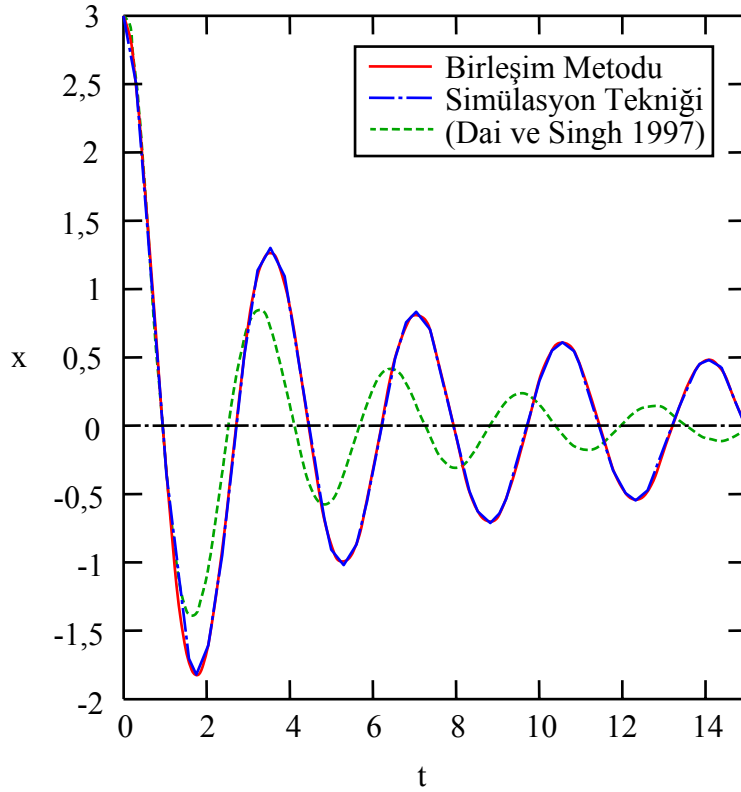


Şekil 4.16 Simülasyon şemasındaki b.ş.1 ile gösterilen bloğun içi



Şekil 4.17 Simülasyon şemasındaki b.ş.2 ile gösterilen bloğun içi

Şekil 4.18’de, Denklem (4.29)’un BM kullanılarak elde edilen sonuçları, ST’den elde edilen sonuçlar ve Dai ve Singh’in (1997) sonuçları kıyaslanmıştır.



Şekil 4.18 Lineer olmayan sönüm ve sürtünme etkisindeki kütle-yay sistemini ifade eden diferansiyel denkleme ait yer değiştirme (x) – zaman (t) grafiği

Şekil 4.18’den de görüldüğü üzere BM kullanılarak bulunan sonuç, ST kullanarak bulunan sonuç ile tam uyum sağlamıştır. Hatta BM kullanılarak elde edilen eğrinin dönüş bölgelerindeki geçişlerin, ST ile elde edilenden daha yumuşak olduğu görülmektedir. Bulunan sonuçlar, Dai ve Singh’in (1997) elde ettiği sonuçlardan tamamen farklıdır.

4.6. Periyodik Davranış Gösteren Duffing Denklemi

Periyodik davranış gösteren Duffing denklemi;

$$\frac{d^2x}{dt^2} + c_1 \frac{dx}{dt} + c_2 x^3 = c_3 \cos(c_4 t) \quad (4.30)$$

olarak verilmiştir (Dai ve Singh 1997). Burada sabitler, $c_1 = 0,05$, $c_2 = 1$, $c_3 = 7,5$ ve $c_4 = 1$ 'dir. Ayrıca Denklem (4.30)'un başlangıç şartları aşağıdaki gibidir.

$$x(0) = 3 \quad \text{ve} \quad \frac{dx(0)}{dt} = 4 \quad (4.31)$$

Simülasyon şeması oluşturulurken, Denklem (4.30)'da geçen x değeri yalnız bırakılmalıdır. Ancak bu örnekte integral katsayılarının da kullanılabildiğini gösterebilmek için $\frac{dx}{dt}$ yalnız bırakılacak, daha sonra BM uygulanırken x 'e integrale geçilecektir. Denklem (4.32)'de, Denklem (4.30)'daki $\frac{dx}{dt}$ 'in yalnız bırakılmış hali ve Denklem (4.33)'de de x 'in yalnız bırakılmış hali görülmektedir.

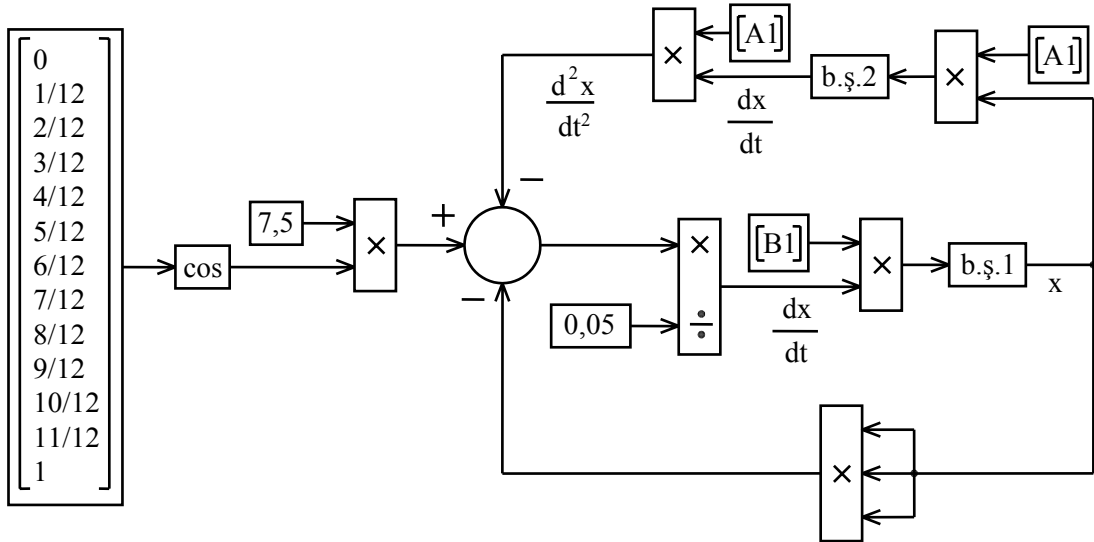
$$\frac{dx}{dt} = \frac{c_3 \cos(c_4 t) - \frac{d^2x}{dt^2} - c_2 x^3}{c_1} \quad (4.32)$$

$$x = \int \frac{dx}{dt} dt = \int \frac{c_3 \cos(c_4 t) - \frac{d^2x}{dt^2} - c_2 x^3}{c_1} dt \quad (4.33)$$

Verilen sabit değerler yerine yazıldığında Denklem (4.33) aşağıdaki hali alır.

$$x = \int \frac{dx}{dt} dt = \int \frac{7,5 \cos(t) - \frac{d^2x}{dt^2} - x^3}{0,05} dt \quad (4.34)$$

Şekil 4.19'da, Denklem (4.34)'de verilen periyodik davranış gösteren Duffing denkleminin ait simülasyon şeması gösterilmiştir.

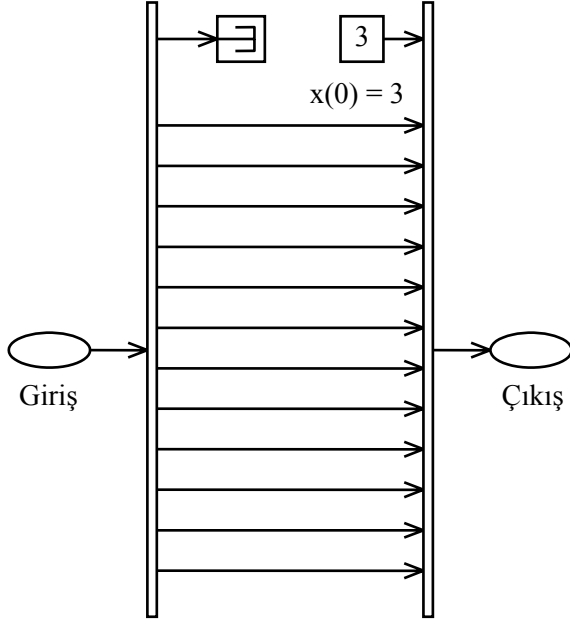


Şekil 4.19 Periyodik davranış gösteren Duffing denkleminin simülasyon şeması

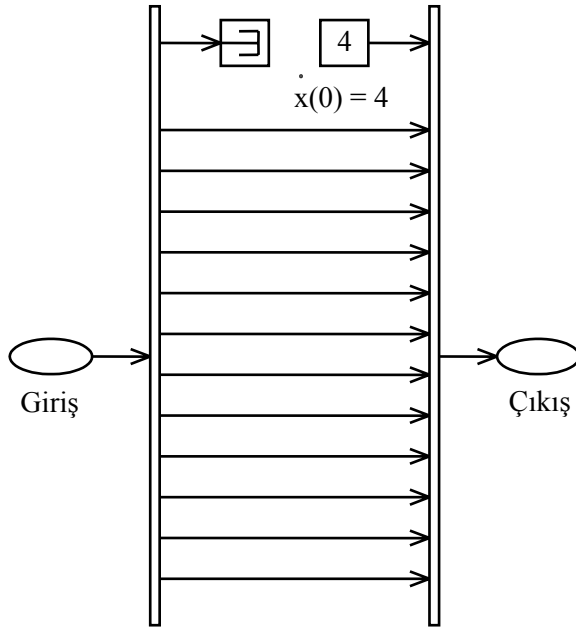
Şekil 4.19’da $[A1]$ bloğu, birinci dereceden türevler için ağırlıklı katsayılar matrisini, $[B1]$ bloğu ise, tek katlı integraller için ağırlıklı katsayılar matrisini içermektedir. Ayrıca b.ş.1 ve b.ş.2 bloklarında sırasıyla $x(0) = 3$, $\frac{dx(0)}{dt} = 4$ şartları uygulanmaktadır. Bu blokların içerikleri Şekil 4.20 ve 4.21’de sırasıyla gösterilmiştir.

Şekil 4.22’de, Denklem (4.34)’ün BM kullanılarak elde edilen sonuçları, ST’den elde edilen sonuçlar ve Dai ve Singh’in (1997) sonuçları kıyaslanmıştır.

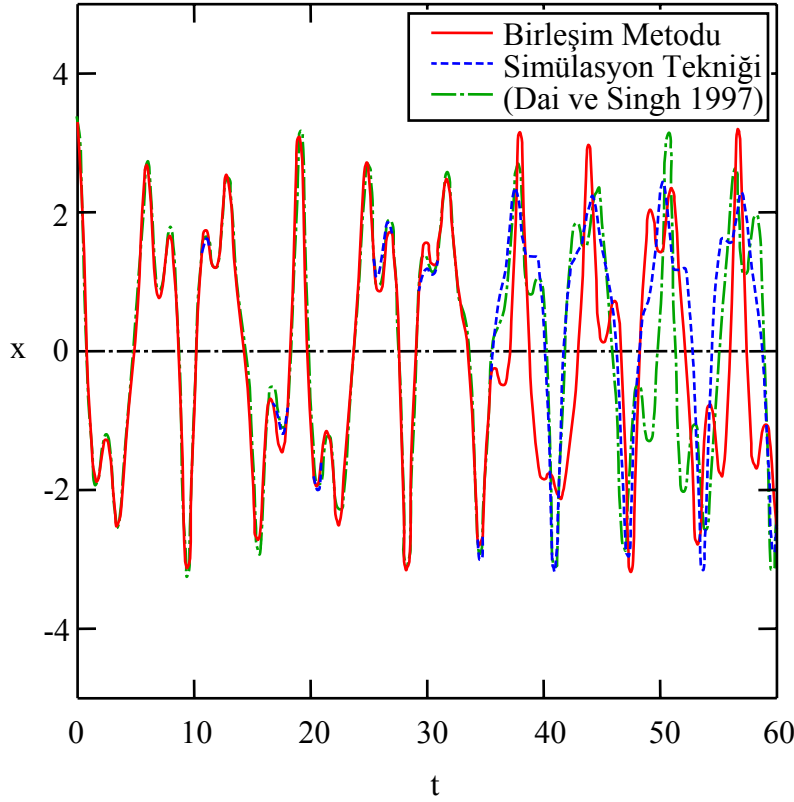
Şekil 4.22’den de görüldüğü üzere BM ve ST kullanarak bulunan sonuçlar ile Dai ve Singh’in (1997) elde ettiği sonuçlar yaklaşık olarak 35s.’ye kadar çok yakındır. Ancak 35. saniyeden sonra üç metotta farklılıklar göstermiştir. Bunun nedeni bu örnekte kullanılan denklem çok hassastır ve küçük değişiklikler büyük tepkilere sebep olmaktadır.



Şekil 4.20 Simülasyon şemasındaki b.ş.1 ile gösterilen bloğun içi



Şekil 4.21 Simülasyon şemasındaki b.ş.2 ile gösterilen bloğun içi



Şekil 4.22 Periyodik davranış gösteren Duffing denklemine ait yer değiştirme (x) – zaman (t) grafiği

4.7. Quadratik Sönümlü Mathieu Denklemi

Quadratik sönümlü Mathieu denklemini;

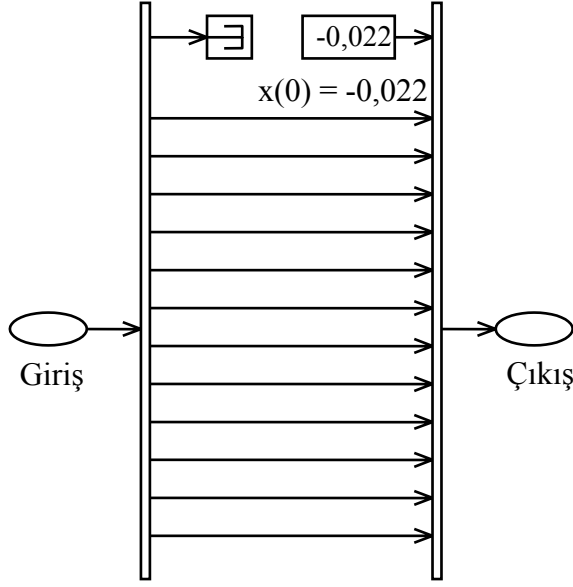
$$\frac{d^2x}{dt^2} + (\delta + \varepsilon \cos(t))x + \mu \frac{dx}{dt} \left| \frac{dx}{dt} \right| = 0 \quad (4.35)$$

olarak verilmiştir (Ramani vd 2004).

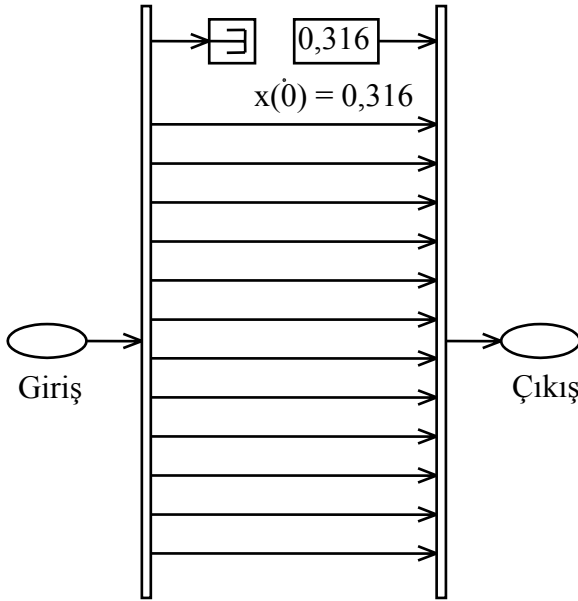
Denklem (4.35)'deki sabitler, $\mu = 1$, $\varepsilon = 1,47$ ve $\delta = 0,6308$ 'dir. Ayrıca Denklem (4.35)'in başlangıç şartları aşağıdaki gibidir.

$$x(0) = -0,022 \quad \text{ve} \quad \frac{dx(0)}{dt} = 0,316 \quad (4.36)$$

Şekil 4.23’de $[A1]$ bloğu, birinci dereceden türevler için ağırlıklı katsayılar matrisini içermektedir. Ayrıca b.ş.1 ve b.ş.2 bloklarında sırasıyla $x(0) = -0,022$, $\frac{dx(0)}{dt} = 0,316$ şartları uygulanmaktadır. Bu blokların içerikleri Şekil 4.24 ve 4.25’de sırasıyla gösterilmiştir.

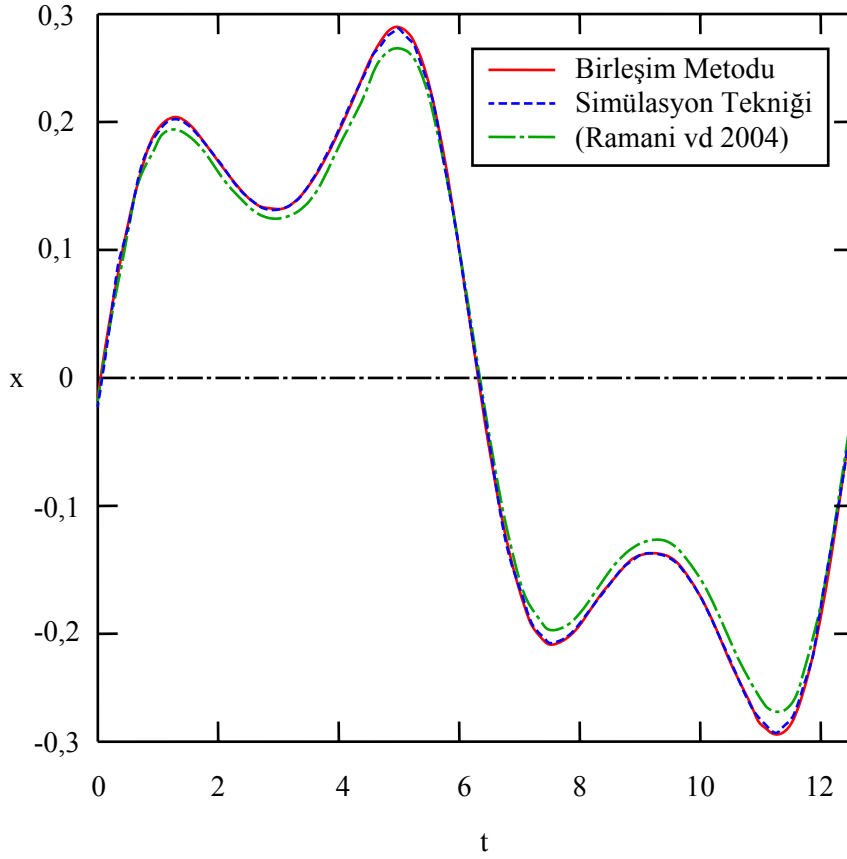


Şekil 4.24 Simülasyon şemasındaki b.ş.1 ile gösterilen bloğun içi



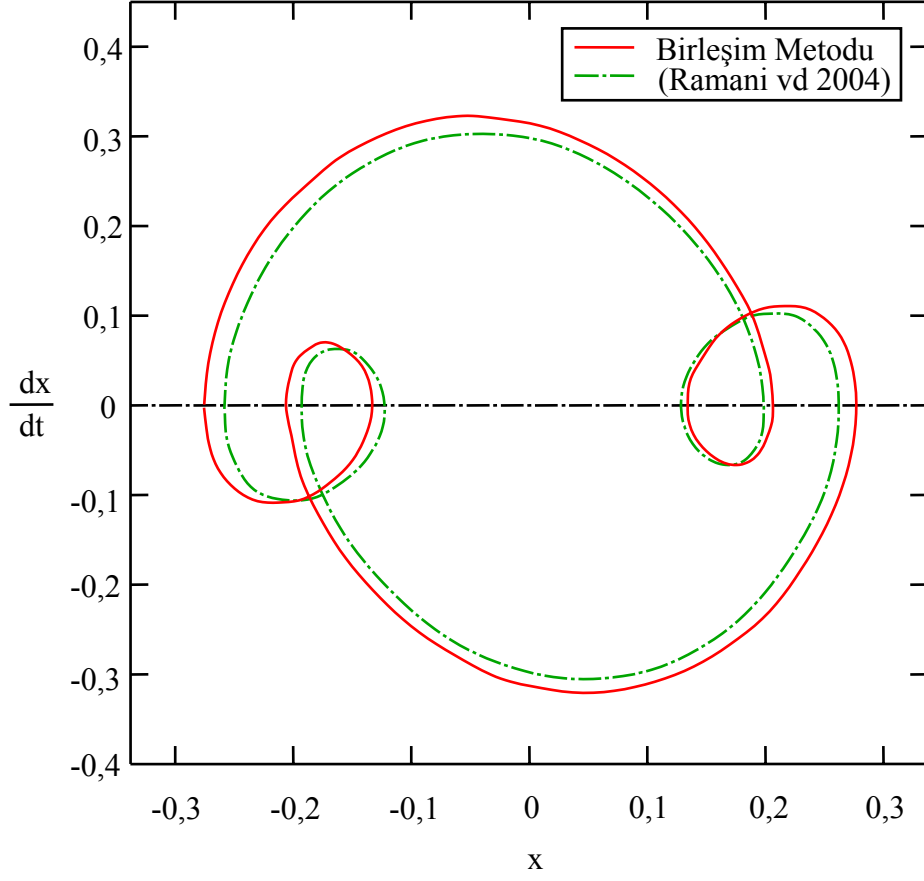
Şekil 4.25 Simülasyon şemasındaki b.ş.2 ile gösterilen bloğun içi

Şekil 4.26'da, Denklem (4.38)'in BM kullanılarak elde edilen sonuçları, ST kullanılarak elde edilen sonuçlar ve Ramani vd'nin (2004) sonuçları kıyaslanmıştır.



Şekil 4.26 Quadratik sönümlü Mathieu denkleminin ait yer değiştirme (x) – zaman (t) grafiği

Şekil 4.26'dan görüldüğü üzere BM kullanılarak bulunan sonuç, ST kullanarak bulunan sonuçla tam uyumlu çıkmış, Ramadi vd'nin (2004) bulduğu sonuçla ise oldukça yakın olarak elde edilmiştir. Yine Şekil 4.27'de görüldüğü üzere BM ile elde edilen sonuç, Ramadi vd'nin (2004) bulduğu sonuca yakındır.



Şekil 4.27 Quadratik sönümlü Mathieu denkleminin hız $\left(\frac{dx}{dt}\right)$ - yer değiştirme (x) grafiği

5. SONUÇLAR VE DEĞERLENDİRME

Yapılan bu çalışma ile, Bellman ve Casti'nin (1971) yaptığı ilk DQ çalışmasından günümüze kadar, DQ'daki önemli gelişmeler anlatılmıştır. Bu sayede DQ uygulamalarında karşılaşılan zorluklar ve akademisyenlerin bu zorlukları gidermek için yaptığı çalışmalar gösterilmiştir.

DQ'da 1971'den günümüze birçok gelişme olmasına rağmen, maalesef halen bazı eksikliklerini tamamlayamamıştır. Giriş bölümünde de anlatıldığı üzere özellikle aynı düğüm noktasına birden fazla başlangıç veya sınır koşulunun girilmesi sıkıntı doğurmuş ve bu sıkıntının giderilmesi için pek çok çalışmalar yapılmıştır (örn: δ -yaklaşımı). Ayrıca yine bu çalışmada gösterildiği üzere, lineer olmayan diferansiyel denklemlerin çözümünde DQ, özel metotlara ihtiyaç duymaktadır. Bu metotlar ile çözüm yapmak hem zahmetlidir hem de sonuca BM kadar yaklaşamaz.

Son yıllarda kullanılan Simülasyon Teknikleri'nin, problem çözme kabiliyeti dikkat çekici olmuştur. Ancak diferansiyel denklem çözümlerinde, özellikle sınır koşullarının sisteme girişinde, ST'ler problem yaşamaktadır.

Bu çalışma ile BM adı altında, iki metodun gücü birleştirilerek eksiklikleri giderilmeye çalışılmıştır. Bu sayede çözülmesi zor problemlerin, hem kolay hem de doğru olarak çözülmesi hedeflenmiştir. Neticede bu hedef başarılmıştır. BM, lineer olmayan diferansiyel denklemlerin çözümündeki gücünü bu çalışma ile göstermiştir.

Yine bu çalışma ile DQ ağırlıklı katsayıların elde edilmesinde yaşanan sıkıntılar giderilmiş ve DQ ağırlıklı katsayıların elde edilmesi için yeni bir yöntem de elde edilmiştir. Bu yeni yöntem kullanılarak, integral işlemleri için gerekli olan İntegral Quadrature (İQ) ağırlıklı katsayıları da kolaylıkla elde edilmiştir. Ayrıca Shu vd'nin (1995) İQ ağırlıklı katsayıları elde etmek için kullandığı metot geliştirilmiştir.

Bunun yanı sıra, diferansiyel denklem çözümlerinde, uygulanması diğer yöntemlere göre basit olan eşit olarak dağıtılmış düğüm noktaları kullanılabilmiştir. Bu sayede metodun uygulanması daha da kolaylaştırılmıştır.

Ayrıca BM ile, Frechet türevi kullanılmadan lineer olmayan diferansiyel denklemler çözülebilmektedir.

Sonuç olarak, DQ metotları ile diferansiyel denklem çözümlerinde karşılaşılan aynı düğüm noktasına birden fazla başlangıç veya sınır şartı girilmesindeki zorluk ve ayrıca lineer olmayan problemlerin çözümündeki zorluklar BM ile giderilmiştir. Ayrıca bulunan yeni metot ile DQ ve İQ ağırlıklı katsayılar kolaylıkla elde edilebilmiştir. Ağırlıklı katsayılar matrisinin köşegen elemanlarının elde edilmesi için ayrı bir işleme ihtiyaç duyulmamıştır (İkinci temel polinom kullanımı). Bunun yanı sıra Shu vd'nin (1995), İQ ağırlıklı katsayıları elde etmek için kullandığı metot geliştirilmiştir. Yeni geliştirilen ve Shu vd'nin (1995) metodundan geliştirilen her iki yöntemde de daha önce literatürde hesaba katılmayan integral sabitleri hesaba katılarak daha doğru yaklaşım elde edilmiştir. Son olarak ST'de karşılaşılan sınır koşulunun sisteme uygulanamaması problemi de BM ile aşılmıştır.

BM'nin yukarıda anlatılan birçok olumlu yönlerine rağmen olumsuz yönleri de mevcuttur. Örneğin BM, DQ tabanlı bir yöntem olduğundan, ağırlıklı katsayılar elde edilirken kullanılan düğüm noktalarının sayısı belirli bir limiti aşmamaktadır (Yaklaşık 13 düğüm). Bu nedenle metot SEM gibi kullanılamamaktadır. Özellikle metodun doğruya yakınsayamadığı durumlarda, düğüm sayısını artırma ihtiyacı karşılanamamıştır.

Bu çalışma, gelecekte yapılabilecek olan iki boyutlu veya iki bilinmeyenli lineer olmayan diferansiyel denklem çözümlerine de bir açılım yapacaktır.

KAYNAKLAR

- Bellman, R. E., and Casti, J. (1971) Differential Quadrature and Long Term Integration. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 34: 235-238.
- Bellman, R. E., Kashef, B. G., and Casti, J. (1972) Differential Quadrature: A Technique for the Rapid Solution of Nonlinear Partial Differential Equations. *Journal of Computational Physics*, 10: 40-52.
- Bellman, R. E., Kashef, B. G., Lee, E. S., and Vasudevan, R. (1975a) Solving Hard Problems by Easy Methods: Differential and Integral Quadrature. *Computers & Mathematics with Application*, 1: 133-143.
- Bellman, R. E., Kashef, B. G., Lee, E. S., and Vasudevan, R. (1975b) Differential Quadrature and Splines. *Computers & Mathematics with Application*, 1: 371-376.
- Bellman, R. E., Kashef, B. G., and Vasudevan, R. (1974) The Inverse Problem of Estimating Heart Parameters From Cardiograms. *Mathematical Biosciences*, 19: 221-230.
- Bellman, R. E., and Roth, R. S. (1986) Methods in Approximations Technique for Mathematical Modeling. *D Reiden Publishing Company*, Dardrecht, Holland, 224s.
- Bert, C. W., Jang, S. K., and Striz, A. G. (1988) The New Approximate Methods for Analyzing Free Vibration of Structural Components. *AIAA Journal*, 26: 612-618.
- Bert, C. W., Jang, S. K., and Striz, A. G. (1989) Nonlinear Bending Analysis of Orthotropic Rectangular Plates by the Method of Differential Quadrature. *Computational Mechanics*, 5: 217-226.
- Bert, C. W., and Malik, M. (1996) Differential Quadrature Method in Computational Mechanics., A Review. *Applied Mechanics Review*, 49 (1): 1-28.
- Bert, C. W., Wang, Z., and Striz, A. G. (1994) Static and Free Vibrational Analysis of Beams and Plates by Differential Quadrature Method. *Acta Mechanica*, 102: 11-24.
- Björck, A. A., and Pereyra, V. (1970) Solution of Vandermonde System of Equations. *Mathematics of Computation*, 24: 893-903.
- Chen, C. N. (1999) The Timoshenko Beam Model of the Differential Quadrature Element Method. *Computational Mechanics*, 24: 65-69.
- Chen, C. N. (2000) Differential Quadrature Element Analysis Using Extended Differential Quadrature. *Computer and Mathematic with Application*, 39: 65-79.
- Chen, W. L. (1994) A New Approach for Structural Analysis: The Quadrature Element Method., Ph. D. Dissertation. *The University of Oklahoma*, Norman, OK, 151s.

- Chen, W. L., Striz, A. G., and Bert, C. W. (2000) High-accuracy Plane Stress and Plate Elements in the Quadrature Element Method. *International Journal of Solids and Structures*, 37: 627-647.
- Civan, F., and Sliepcevich, C. M. (1983a) Application of Differential Quadrature to Transport Processes. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 93: 206-221.
- Civan, F., and Sliepcevich, C. M. (1983b) Solution of the Poisson equation by Differential Quadrature. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 19: 711-724.
- Civan, F., and Sliepcevich, C. M. (1984a) On The Solution of The Thomas-Fermi Equation by Differential Quadrature. *Journal of Computational Physics*, 56: 343-348.
- Civan, F., and Sliepcevich, C. M. (1984b) Differential Quadrature for Multi-Dimensional Problems. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 101: 423-443.
- Civan, F. (1989) Differential Quadrature for Multidimensional Problems”, *Proc. of the 20th Annual Pittsburg Conference on Modeling and Simulation, Vogt W. G. and Mickle M. H. (eds), Instrument Society of American, North Carolina*, s.1843-1847.
- Dai, L., and Singh, M. C. (1997) An Analytical and Numerical Method for Solving Linear and Nonlinear Vibration Problems. *International Journal of Solids and Structures*, 34: (21) 2709-2731.
- Du, H., Liew, K. M., and Lim, M. K. (1996) Generalized Differential Quadrature Method for Buckling Analysis. *Journal of Engineering Mechanics, ASCE*, 122: (2) 95-100.
- Du, H., Lim, M. K., and Lin, R. M. (1994) Application of Generalized Differential Quadrature Method to Structural Problems. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 37: 1881-1896.
- Du, H., Lim, M. K., and Lin, R. M. (1995) Application of Generalized Differential Quadrature to Vibration Analysis. *Journal of Sound and Vibration*, 181 (2): 279-293.
- Fung, T. C. (2001) Solving Initial Value Problems by Differential Quadrature Method - Part 2: Second- and Higher-Order Equations. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 50: 1429 – 1454.
- Fung, T. C. (2002) Stability and Accuracy of Differential Quadrature Method in Solving Dynamic Problems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 191: 1311 – 1331.

- Girgin, Z. (2008a) Combining Differential Quadrature Method with Simulation Technique to Solve Non-Linear Differential Equations. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 75 (6): 722-734.
- Girgin, Z. (2008b) Combining Modified Integral Quadrature Method with Simulation Technique to Solve Non-Linear Initial and Boundary Value Problems. *International Journal of Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 10 (4): 475-482.
- Groves, F. R., (1983) Numerical Solution of Nonlinear Differential Equations Using Computer Algebra. *International Journal of Computer Mathematics*, 13: 301-309.
- Gu, H. Z., and Wang, X. W. (1997) On The Free Vibration Analysis of Circular Plates with Stepped Thickness Over a Concertric Region by The Differential Quadrature Element Method. *Journal of Sound and Vibration*, 203 (3): 452-459.
- Hu, L. C., and Hu, C. R. (1974) Identification of Rate Constans by Differential Quadrature in Partly Measurable Compartmental Models. *Mathematical Biosciences*, 21: 71-76.
- Jang, S. K. (1987) Application of Differential Quadrature to the Analysis of Strucutral Components., Ph. D. Dissertation. *The University of Oklahoma*, Norman, OK, 120s.
- Jang, S. K., Bert, C. W., and Striz, A.G. (1989) Application of Differential Quadrature to Static Analysis of Structural Components. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 28: 561-577.
- Kashef, B. G., and Bellman, R. E. (1974) Solution of the Partial Differential Equation of the Hodgkin – Huxley Model Using Differential Quadrature. *Mathematical Biosciences*, 19: 1-8.
- Liu, F. L., and Liew, K. M. (1999a) Analysis of Vibrating Thick Rectangular Plates with Mixed Boundary Constrants Using Differential Quadrature Element Method. *Journal of Sound and Vibration*, 225 (5): 915 - 934.
- Liu, F. L., and Liew, K. M. (1999b) Differential Quadarture Element Method: A New Approach for Free Vibration Analysis of Polar Midlin Plates Having Discontinuities. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 179: 407 - 423.
- Liu, G. R., and Wu, T. Y. (2000) Numerical Solution for Differential Equations of Duffing-Type Non-Linearity Using The Generalized Differential Quadrature Rule. *Journal of Sound and Vibration*, 237: (5) 805 - 817.
- Liu, G. R., and Wu, T. Y. (2001) Vibration Analysis of Beams Using The Generalized Differential Quadrature Rule and Domain Decomposition. *Journal of Sound and Vibration*, 246: (3) 461-481.
- Liu, G. R., and Wu, T. Y. (2002) Multipoint Boundary Value Problems by Differential Quadrature Method. *Mathematical and Computer Modeling*, 35: 215-227.

- Malik, M., and Bert, C. W. (1996) Implementing Multiple Boundary Conditions in The DQ Solution of Higher Order PDE's: Application to Free Vibration of Plates. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 39: 1237-1258.
- Mingle, J. O. (1977) The Method of Differential Quadrature for Transient Nonlinear Diffusion. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 60: 559-569.
- Naadimuthu, G., Bellman, R. E., Wang, K. M., and Lee, E. S. (1984) Differential Quadrature and Partial Differential Equations: Some Numerical Results. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 98: 220-233.
- Nayfeh, A. H., and Mook, D. T. (1979) Nonlinear Oscillations. *John Wiley & Sons, Inc.*, New York, 697s.
- Quan, J. R., and Chang, C. T. (1989a) New Insights in Solving Distributed System Equations by The Quadrature Methods. *I. Computational Chemical Engineering*, 13: 779-788.
- Quan, J. R., and Chang, C. T. (1989b) New Insights in Solving Distributed System Equations by The Quadrature Methods. *II. Computational Chemical Engineering*, 13: 1017-1024.
- Ramani, D. V., Keith, W. L., and Rand, R. H. (2004) Perturbation Solution for Secondary Bifurcation in The Quadratically Damped Mathieu Equation. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 39: 491-502.
- Shu, C. (1991) Generalized Differential-Integral Quadrature and Application to The Simulation of Incompressible Viscous Flows Including Paralel Computation. PhD Dissertation. *University of Glosgow*, UK.
- Shu, C. (2000) Differential Quadrature and Its Application in Engineering. *Springer-Verlag*, UK, 340s.
- Shu, C., and Chew, Y. T. (1997) Fourier Expension-Based Differential Quadrature and Its Application to Helmholtz Eigenvalue Problems. *Communications in Numerical Methods in Engineering*, 13: 643-653.
- Shu, C., Chew, Y. T., Khoo, B. C., and Yeo, K. S., (1996a) Solution of Three Dimensional Boundary Layer Equations by Global Methods of Generalized Differential-Integral Quadrature. *International Journal for Numerical Methods for Heat & Fluid Flow*, 6 (2): 61-75.
- Shu, C., Chew, Y. T., and Richards, B. E., (1995) Generalized Differential and Integral Quadrature and Their Application to Solve Boundary Layer Equations. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 21 (9): 723-733.
- Shu, C., and Du, H. (1997) Implementation of Clamped and Simply Supported Boundary Conditions in The GDQ Free Vibration Analysis of Beams and Plates. *International Journal of Solids and Structures*, 34: 819-835.

- Shu, C., Khoo, B. C., Chew, Y. T., and Yeo, K. S., (1996b) Numerical Studies of Unsteady Boundary Layer Flows Past an Impulsively Started Circular Cylinder by GDQ and GIQ Approaches. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 135: 229-241.
- Shu, C., and Richards, B. E. (1990) High Resolution of Natural Convection in A Square Cavity by Generalized Differential Quadrature. *Proceeding of 3rd Conference on Advanced in Numerical Methods in Engineering: Theory and Application*, Swansea, UK, 2: s.978-985.
- Shu, C., and Richards, B. E. (1992) Application of Generalized Differential Quadrature to Solve Two-Dimensional Incompressible Navier-Stokes Equations. *International Journal of Numerical Methods in Fluids*, 15: 791-798.
- Shu, C., and Xue, H. (1997) Explicit Computational of Weighting Coefficients in The Harmonic Differential Quadrature. *Journal of Sound and Vibration*, 204: 549-555.
- Striz, A. G., Chen, W. L., and Bert, C. W. (1994) Static Analysis of Structures by The Quadrature Element Method (QEM). *International Journal of Solids and Structures*, 31 (20): 2807-2818.
- Striz, A. G., Chen, W. L., and Bert, C. W. (1997) Free Vibration of Plates by The High Accuracy Quadrature Element Method. *Journal of Sound and Vibration*, 200 (5): 689-702.
- Striz, A. G., Wang, X., and Bert, C. W. (1995) Harmonic Differential Quadrature Method and Applications to Analysis of Structural Components. *Acta Mechanica*, 111: 85-94.
- Thomson, W. T. (1988) Theory of Vibration with Application. *Prentice Hall*, New Jersey, 467s.
- Tomasiello, S. (2003) Simulating Non-Linear Coupled Oscillators by An Iterative Differential Quadrature Method. *Journal of Sound and Vibration*, 265: 507-525.
- Wang, K. M. (1982) Solving The Model of Isothermal Reactors with Axial Mixing by The Differential Quadrature Methods. *International Journal for Numerical Method in Engineering*, 18: 111-118.
- Wang, X., and Bert, C. W. (1993) A New Approach in Applying Differential Quadrature to Static and Free Vibrational Analyses of Beams and Plates. *Journal of Sound and Vibration*, 162: 566-572.
- Wang, X. W., and Gu, H. Z. (1997) Static Analysis of Frame Structures by The Differential Quadrature Element Method. *International Journal for Numerical Method in Engineering*, 40: 759-772.
- WEB_1. (2008). Wikipedia The Free Encyclopedia. http://en.wikipedia.org/wiki/Legendre_polynomials (16.06.2008).

- William, A. N. (1979) Strength of Material (Çev.:Sacit Sümer). *McGraw-Hill Book Company, Güven Kitabevi Yayınları*, Ankara, 390s.
- Wu, T. Y., and Liu, G. R. (1999) A Differential Quadrature as a Numerical Method to Solve Differential Equations. *Computational Mechanics*, 24: 197-205.
- Wu, T. Y., and Liu, G. R. (2000) The Generalized Differential Quadrature Rule for Initial-Value Differential Equations. *Journal of Sound and Vibration*, 233: (2) 195-213.
- Yılmaz, Y. (1999) Genelleştirilmiş Diferansiyel Quadrature Metodunun İki Boyutlu Mekanik Sistemlere Uygulanması., Yüksek Lisans Tezi. *Pamukkale Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü*, Denizli, 95s.

EKLER

Ek-1. DQ Ağırlıklı Katsayılar Matrisleri

N = 5 için birinci dereceden türevin DQ ağırlıklı katsayıları;

$$[A^{(1)}] = \begin{bmatrix} -25/3 & 16 & -12 & 16/3 & -1 \\ -1 & -10/3 & 6 & -2 & 1/3 \\ 1/3 & -8/3 & 0 & 8/3 & -1/3 \\ -1/3 & 2 & -6 & 10/3 & 1 \\ 1 & -16/3 & 12 & -16 & 25/3 \end{bmatrix}$$

N = 5 için ikinci dereceden türevin DQ ağırlıklı katsayıları;

$$[A^{(2)}] = \begin{bmatrix} 140/3 & -416/3 & 152 & -224/3 & 44/3 \\ 44/3 & -80/3 & 8 & 16/3 & -4/3 \\ -4/3 & 64/3 & -40 & 64/3 & -4/3 \\ -4/3 & 16/3 & 8 & -80/3 & 44/3 \\ 44/3 & -224/3 & 152 & -416/3 & 140/3 \end{bmatrix}$$

N = 5 için üçüncü dereceden türevin DQ ağırlıklı katsayıları;

$$[A^{(3)}] = \begin{bmatrix} -160 & 576 & -768 & 448 & -96 \\ -96 & 320 & -384 & 192 & -32 \\ -32 & 64 & 0 & -64 & 32 \\ 32 & -192 & 384 & -320 & 96 \\ 96 & -448 & 768 & -576 & 160 \end{bmatrix}$$

N = 5 için dördüncü dereceden türevin DQ ağırlıklı katsayıları;

$$[A^{(4)}] = \begin{bmatrix} 256 & -1024 & 1536 & -1024 & 256 \\ 256 & -1024 & 1536 & -1024 & 256 \\ 256 & -1024 & 1536 & -1024 & 256 \\ 256 & -1024 & 1536 & -1024 & 256 \\ 256 & -1024 & 1536 & -1024 & 256 \end{bmatrix}$$

N = 13 için birinci dereceden türevin DQ ağırlıklı katsayıları;

1. satır: -4059/109; 144; -396; 880; -1485; 9504/5; -1848; 9504/7; -1485/2; 880/3;
-396/5; 144/11; -1
2. satır: -1; -2642/109; 66; -110; 165; -198; 924/5; -132; 495/7; -55/2; 22/3; -6/5; 1/11
3. satır: 1/11; -24/11; -3601/210; 40; -45; 48; -42; 144/5; -15; 40/7; -3/2; 8/33; -1/55
4. satır: -1/55; 18/55; -18/5; -2509/210; 27; -108/5; 84/5; -54/5; 27/5; -2; 18/35; -9/110;
1/165
5. satır: 1/165; -16/165; 4/5; -16/3; -533/70; 96/5; -56/5; 32/5; -3; 16/15; -4/15; 16/385;
-1/330
6. satır: -1/330; 1/22; -1/3; 5/3; -15/2; -26/7; 14; -6; 5/2; -5/6; 1/5; -1/33; 1/462
7. satır: 1/462; -12/385; 3/14; -20/21; 45/14; -72/7; 0; 72/7; -45/14; 20/21; -3/14;
12/385; -1/462
8. satır: -1/462; 1/33; -1/5; 5/6; -5/2; 6; -14; 26/7; 15/2; -5/3; 1/3; -1/22; 1/330
9. satır: 1/330; -16/385; 4/15; -16/15; 3; -32/5; 56/5; -96/5; 533/70; 16/3; -4/5; 16/165;
-1/165
10. satır: -1/165; 9/110; -18/35; 2; -27/5; 54/5; -84/5; 108/5; -27; 2509/210; 18/5;
-18/55; 1/55
11. satır: 1/55; -8/33; 3/2; -40/7; 15; -144/5; 42; -48; 45; -40; 3601/210; 24/11; -1/11
12. satır: -1/11; 6/5; -22/3; 55/2; -495/7; 132; -924/5; 198; -165; 110; -66; 2642/109; 1
13. satır: 1; -144/11; 396/5; -880/3; 1485/2; -9504/7; 1848; -9504/5; 1485; -880; 396;
-144; 4059/109

N = 13 için ikinci dereceden türevin DQ ağırlıklı katsayıları;

1. satır: 42970/37; -72687/10; 296891/12; -292499/5; 203377/2; -927095/7; 260483/2;
-192927/2; 212287/4; -168515/8; 11417/2; -36910/39; 7900/109
2. satır: 7900/109; 27832/127; -56542/35; 84262/21; -46751/7; 92515/11; -201788/25;
205484/35; -22299/7; 26263/21; -11758/35; 5861/106; -1069/254
3. satır: -1069/254; 7377/58; -19097/175; -8648/21; 7023/7; -44176/35; 5942/5;
-45871/54; 3181/7; -3704/21; 1643/35; -2952/385; 537/926
4. satır: 537/926; -2373/202; 30174/175; -14574/53; 99/35; 44964/175; -6676/25;
12949/67; -3609/35; 4178/105; -1842/175; 836/489; -255/1982
5. satır: -255/1982; 1597/709; -3812/175; 21968/105; -12844/35; 29472/175; 904/25;

- 8096/175; 969/35; -1168/105; 524/175; -944/1925; 214/5775
6. satır: 214/5775; -47/77; 36/7; -680/21; 1650/7; -35661/86; 232; -192/7; 10/7; 25/21;
-92/175; 8/77; -2/231
7. satır: -2/231; 288/1925; -9/7; 160/21; -270/7; 1728/7; -10738/25; 1728/7; -270/7;
160/21; -9/7; 288/1925; -2/231
8. satır: -2/231; 8/77; -92/175; 25/21; 10/7; -192/7; 232; -36905/89; 1650/7; -680/21;
36/7; -47/77; 214/5775
9. satır: 214/5775; -944/1925; 524/175; -1168/105; 969/35; -8096/175; 904/25;
29472/175; -12844/35; 21968/105; -3812/175; 1597/709; -255/1982
10. satır: -255/1982; 836/489; -1842/175; 4178/105; -3609/35; 20873/108; -6676/25;
44964/175; 99/35; -14299/52; 30174/175; -2373/202; 537/926
11. satır: 537/926; -2952/385; 1643/35; -3704/21; 3181/7; -45871/54; 5942/5;
-44176/35; 7023/7; -8648/21; -19097/175; 7377/58; -1069/254
12. satır: -1069/254; 5861/106; -11758/35; 26263/21; -22299/7; 205484/35;
-201788/25; 92515/11; -46751/7; 84262/21; -56542/35; 27832/127; 7900/109
13. satır: 7900/109; -36910/39; 11417/2; -168515/8; 159215/3; -192927/2; 260483/2;
-927095/7; 203377/2; -292499/5; 296891/12; -72687/10; 42970/37

N = 13 için üçüncü dereceden türevin DQ ağırlıklı katsayıları;

1. satır: -244851/8; 960123/4; -934349; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 937732; -510773/2; 467633/11;
-26133/8
2. satır: -26133/8; 83018/7; -103361/7; -474/5; 56669/2; -217923/4; 316908/5;
-360902/7; 361297/12; -211685/17; 86938/25; -20646/35; 8049/175
3. satır: 8049/175; -42510/11; 231709/15; -111681/4; 295120/9; -185161/6; 220009/9;
-77723/5; 99284/13; -97224/35; 56887/81; -19256/175; 201/25
4. satır: 201/25; -10242/175; -22662/7; 78887/6; -177373/8; 246880/11; -426588/25;
53244/5; -46774/9; 66102/35; -8611/18; 13158/175; -193/35
5. satır: -193/35; 13952/175; -12216/25; -58112/35; 82846/9; -60299/4; 103849/8;
-7601; 42623/12; -6272/5; 10904/35; -8448/175; 613/175
6. satır: 613/175; -8934/175; 13765/39; -52166/35; 4221/5; 75151/16; -54383/6;
97583/14; -108249/35; 36658/35; -44202/175; 958/25; -479/175
7. satır: -479/175; 1368/35; -8201/31; 39752/35; -120663/35; 43669/10; 0; -43669/10;
120663/35; -39752/35; 8201/31; -1368/35; 479/175

8. satır: 479/175; -958/25; 44202/175; -36658/35; 108249/35; -97583/14; 54383/6;
-75151/16; -4221/5; 52166/35; -13765/39; 8934/175; -613/175
9. satır: -613/175; 8448/175; -10904/35; 6272/5; -42623/12; 7601; -103849/8; 60299/4;
-82846/9; 58112/35; 12216/25; -13952/175; 193/35
10. satır: 193/35; -13158/175; 8611/18; -66102/35; 46774/9; -53244/5; 426588/25;
-246880/11; 177373/8; -78887/6; 22662/7; 10242/175; -201/25
11. satır: -201/25; 19256/175; -56887/81; 97224/35; -99284/13; 77723/5; -220009/9
185161/6; -295120/9; 111681/4; -231709/15; 42510/11; -8049/175
12. satır: -8049/175; 20646/35; -86938/25; 211685/17; -361297/12; 360902/7;
-316908/5; 217923/4; -56669/2; 474/5; 103361/7; -83018/7; 26133/8
13. satır: 26133/8; -467633/11; 510773/2; -937732; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 934349; -960123/4;
244851/8

N = 13 için dördüncü dereceden türevin DQ ağırlıklı katsayıları;

1. satır: 682812; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 109359
2. satır: 109359; -738855; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 366432; -717097/12; 194073/43
3. satır: 194073/43; 253429/5; -386816; 0; 0; 0; 0; 0; -865738; 668065/2; -353879/4;
43177/3; -14103/13
4. satır: -14103/13; 55849/3; -203593/6; -76550; 355727; -597325; 610518; -440201;
234101; -450368/5; 166366/7; -130961/34; 12441/43
5. satır: 12441/43; -58153/12; 164735/4; -350038/3; 130318; -133079/8; -403369/4;
684209/6; -339192/5; 326795/12; -65938/9; 20386/17; -2264/25
6. satır: -2264/25; 48398/33; -47639/4; 603755/9; -544289/3; 740606/3; -172036;
218235/4; -88056/35; -3088; 75967/57; -16817/64; 3832/175
7. satır: 3832/175; -65664/175; 38095/12; -54517/3; 248221/3; -628834/3; 284444;
-628834/3; 248221/3; -54517/3; 38095/12; -65664/175; 3832/175
8. satır: 3832/175; -16817/64; 75967/57; -3088; -88056/35; 218235/4; -172036;
740606/3; -725719/4; 603755/9; -47639/4; 48398/33; -2264/25
9. satır: -2264/25; 20386/17; -65938/9; 326795/12; -339192/5; 684209/6; -403369/4;
-133079/8; 130318; -350038/3; 164735/4; -58153/12; 12441/43
10. satır: 12441/43; -130961/34; 166366/7; -450368/5; 234101; -440201; 610518;
-597325; 355727; -76550; -203593/6; 55849/3; -14103/13
11. satır: -14103/13; 43177/3; -353879/4; 668065/2; -865738; 0; 0; 0; 0; 0; -386816;

253429/5; 194073/43

12. satır: 194073/43; -776855/13; 366432; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; -738855; 109359

13. satır: 109359; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 682812

Ek-2. İQ Ağırlıklı Katsayılar Matrisleri

N = 5 için tek katlı integralin İQ ağırlıklı katsayıları;

$$[B^{(1)}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 251/2880 & 323/1440 & -11/120 & 53/1440 & -19/2880 \\ 29/360 & 31/90 & 1/15 & 1/90 & -1/360 \\ 27/320 & 51/160 & 9/40 & 21/160 & -3/320 \\ 7/90 & 16/45 & 2/15 & 16/45 & 7/90 \end{bmatrix}$$

N = 13 için tek katlı integralin İQ ağırlıklı katsayıları;

1. satır: 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0
2. satır: 205/9144; 179/1434; -604/2865; 499/1163; -126/181; 1097/1259; -3435/4114;
586/965; -857/2600; 181/1398; -301/8650; 55/9598; -23/52705
3. satır: 104/4731; 1001/6546; -145/1208; 1118/3259; -1933/3338; 3133/4252;
-1742/2445; 345/662; -307/1081; 293/2619; -125/4148; 44/8851; -4/10551
4. satır: 43/1951; 83/547; -81/926; 397/951; -274/439; 511/655; -1841/2459;
824/1511; -631/2129; 303/2600; -149/4753; 145/28068; -20/50807
5. satır: 97/4404; 502/3303; -182/2027; 332/731; -666/1189; 545/723; -1075/1472;
721/1350; -1177/4046; 278/2427; -787/25517; 18/3539; -23/59313
6. satır: 100/4539; 293/1929; -244/2739; 253/562; -770/1483; 158/195; -816/1093;
4787/8826; -71/241; 1592/13745; -135/4333; 46/8959; -11/28114
7. satır: 141/6401; 43/283; -506/5657; 817/1808; -501/953; 1903/2224; -733/1053;
315/592; -237/815; 374/3263; -327/10591; 53/10407; -5/12876
8. satır: 202/9169; 667/4391; -637/7144; 434/963; -989/1895; 1099/1300; -993/1538
421/729; -855/2876; 578/4969; -253/8099; 102/19829; -27/68911
9. satır: 118/5357; 413/2718; -387/4325; 555/1228; -503/957; 776/909; -325/491;
407/642; -674/2629; 421/3748; -809/26495; 79/15634; -10/25911
10. satır: 145/6581; 402/2647; -117/1315; 571/1269; -1021/1963; 4015/4766;
-1085/1686; 655/1078; -287/1492; 265/1778; -165/5023; 37/6982; -19/47444
11. satır: 161/7312; 637/4189; -193/2140; 526/1157; -991/1861; 1059/1222; -104/153;
455/699; -283/1192; 587/2627; -26/90003; 369/89600; -28/81587
12. satır: 295/13363; 197/1302; -270/3157; 753/1723; -1597/3280; 1081/1385;

-545/978; 1917/3712; -348/2891; 460/3347; 781/8630; 131/4067; -19/24372

13. satr: 203/9381; 231/1471; -299/2485; 788/1391; -930/1139; 6213/4477;

-1931/1387; 6213/4477; -930/1139; 788/1391; -299/2485; 231/1471; 203/9381

ÖZGEÇMİŞ

- Adı, Soyadı:** Ersin Demir
- Doğum yeri ve tarihi:** İzmir, 30.09.1977
- Lisans eğitimi:** Pamukkale Üniversitesi, Mühendislik Fakültesi, Makine Mühendisliği Bölümü, (1994-1998).
- Y.Lisans eğitimi:** Pamukkale Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Makine Mühendisliği Anabilim Dalı, (1998-2001).
- Çalıştığı yer:** 1998 yılında lisans eğitimini tamamladıktan sonra ISISAN Mühendislik Limited Şirketinde Makine Mühendisi olarak iki yıl çalışmıştır. 2000 yılında, Pamukkale Üniversitesi'nin, Mühendislik Fakültesi'nde görevlendirmek üzere açtığı Araştırma Görevliliği sınavını kazanarak göreve başlamıştır. 2003 yılında Pamukkale Üniversitesinin Fen Bilimleri Enstitüsü doktora programına başlayan Ersin Demir, halen aynı üniversitede Araştırma Görevlisi olarak çalışmaktadır.