



**MINKOWSKI 4-UZAYINDA  
EĞRİLER  
ve  
HAREKETLERİN GEOMETRİSİ**

**Hatice TOZAK**

**Temmuz 2010  
DENİZLİ**

**MINKOWSKI 4-UZAYINDA  
EĞRİLER  
ve  
HAREKETLERİN GEOMETRİSİ**

**Hatice TOZAK**

**Temmuz 2010  
DENİZLİ**

**MINKOWSKI 4-UZAYINDA  
EĞRİLER  
ve  
HAREKETLERİN GEOMETRİSİ**

**Pamukkale Üniversitesi  
Fen Bilimleri Enstitüsü  
Yüksek Lisans Tezi  
Matematik Anabilim Dalı**

**Hatice TOZAK  
081441006**

**Yrd. Doç. Dr. CANSEL AYCAN**

**Temmuz 2010  
DENİZLİ**

**YÜKSEK LİSANS TEZİ ONAY FORMU**

Hatice TOZAK tarafından Y.Doç. Dr. Cansel AYCAN yönetiminde hazırlanan "Minkowski 4-Uzayında Eğriler ve Hareketlerin Geometrisi" başlıklı tez tarafımızdan okunmuş, kapsamı ve niteliği açısından bir Yüksek Lisans Tezi olarak kabul edilmiştir.

Doç. Dr. Nevin GÜRBÜZ  
Jüri Başkanı



İMZA

Y.Doç. Dr. Cansel AYCAN  
Jüri Üyesi (Danışman)



İMZA

Y.Doç. Dr. Şevket CİVELEK  
Jüri Üyesi




İMZA

Pamukkale Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun  
11./08/2010 tarih ve 21120 sayılı kararıyla onaylanmıştır.



**Prof. Dr. Halil KARAHAN**  
Müdür

Bu tezin tasarımı,hazırlanması ve yürütülmesi,araştırmalarının yapılması ve bulgularının analizlerinde bilimsel etiğe ve akademik kurallara özenle riayet edildiğini; bu çalışmanın doğrudan birincil ürünü olmayan bulguların,verilerin ve materyallerin bilimsel etiğe uygun olarak kaynak gösterildiğini ve alıntı yapılan çalışmalara atfedildiğini beyan ederim.

İmza :   
Öğrenci Adı Soyadı : Hatice TOZAK

## TEŞEKKÜR

Yükseklisans danışmanlığımı üstlenip, bilgi ve tecrübesiyle destek veren, çalışmamın her safhasında yardımını esirgemeyen sayın hocam Yrd. Doç. Dr. Cansel AYCAN'a şükran ve saygılarımı sunarım.

Tez çalışmam sırasında bana yardımcı olan sayın hocam Yrd. Doç. Dr. Şevket CİVELEK'e de teşekkürü borç bilirim.

Desteđini her zaman yanımda hissettiğim sevgili ailem Ayşe TOZAK ve Süleyman TOZAK'a çok teşekkür ederim.

Hatice TOZAK

## ÖZET

### MINKOWSKI 4-UZAYINDA EĞRİLER ve HAREKETLERİN GEOMETRİSİ

**TOZAK Hatice**

**Yüksek Lisans Tezi, Matematik Anabilim Dalı  
Tez yöneticisi: Yrd. Doç. Dr. CANSEL AYCAN**

Bu çalışma beş bölümden oluşmaktadır.

1. Bölümde Yarı Riemann uzayı, Lorentz Uzayı,  $E_1^4$  Minkowski uzayında iç çarpım ve özellikleri, vektörel çarpım, vektör yapıları, vektörler arasındaki açı kavramı ve hiperdüzlemler gibi Minkowski uzay zaman eğrileri ve hareketlerin geometrisi için temel tanım ve teoremlere yer verilmiştir.

2. Bölümde ise eğrisel yapılardaki Riemann manifoldları üzerindeki uzunluk ve uzaklık, jeodezikler ve bunları da admissible aileler, minimize eğrilerin durumu ve lokal minimize durumları incelendi.

3. Bölümde konneksiyonlar, Üstel dönüşümler ve Normal komşuluklar ve normal koordinatlardan bahsedildi.

4. Bölümde  $E_1^4$  Minkowski uzayında eğriler için Serret-Frenet formüllerinden yararlanarak yapı denklemleri oluşturuldu. İnvolüt ve Bertrand eğrileri incelendi.

En son bölümde ise; yaptığımız çalışmalar için uygulamalara yer verildi. Çalışmalarımızın bazı geometrik uygulamalarına da değinildi.

Anahtar Kelimeler: metrik fonksiyonu, Lorentz-Minkowski uzayı, Hiperbolik uzay, koordinat ve konneksiyonlar, jeodezik, üstel dönüşüm, Frenet çatısı

## **ABSTRACT**

### **CURVES ON THE MINKOWSKI 4-SPACE and GEOMETRY OF MOTIONS**

**TOZAK Hatice**

**M. Sc. Thesis in Mathematic**

**Supervisor: Yrd. Doç. Dr. CANSEL AYCAN**

This work consist of five chapters.

The first chapter is about the basic definitions and theorems related to Semi-Riemann space, inner product and properties, metric function, angle between two given vectors, vector product, hyperplanes curves on the 4-dimensional Minkowski space and geometry of motion.

The second chapter includes length and distance on the Riemann manifolds, Riemann geodesics, admissible families, case of minimizing curves and locally minimizing.

In the third chapter, exponential map definition and basic properties, Normal Neighbourhoods and Normal Coordinates are introduced.

The fourth chapter is composed of the involute curves in the  $E_1^4$  Minkowski space, the geodesics of the Model space, the formulas of Serret-Frenet, Bertrand curve couple in the  $E_1^4$  Minkowski space.

In the final chapter, the applications for the study we have done were given, besides, some geometric applications of the study are mentioned.

Key words: metric function, Lorentz-Minkowski space, Hyperbolic space, neighbourhoods and connections ,geodesics , exponential map, Frenet frame



**İÇİNDEKİLER**

Sayfa

ONAY SAYFASI .....	i
TEŞEKKÜR.....	ii
BİLİMSEL ETİK SAYFASI .....	iii
ÖZET .....	iv
ABSTRACT .....	v
İÇİNDEKİLER.....	vi
SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ.....	viii
ŞEKİLLER DİZİNİ .....	ix
GİRİŞ.....	x

**-BÖLÜM 1 -****LORENTZ-MINKOWSKI UZAYI**

1.1 Temel Yapılar.....	1
1.2 $E_1^4$ Minkowski Uzayında Açık ve Hareket Kavramı .....	7
1.3 $E_1^4$ Minkowski Uzayında Yay Uzunluğu .....	29

**-BÖLÜM 2 -****EĞRİSEL YAPILAR**

2.1 Riemann Manifoldları Üzerinde Uzunluklar ve Uzaklıklar.....	34
2.2 Jeodezik .....	39
2.2.1 Admissible Aileler.....	39
2.2.2 Minimalize Eğriler .....	41
2.2.3 Lokal Minimalize Eğriler .....	46

**-BÖLÜM 3-****KONNEKSİYON ve KOORDİNATLAR**

3.1 Riemann Konneksiyonu .....	52
3.2 Üstel Dönüşüm .....	58
3.3 Normal Komşuluklar ve Normal Koordinatlar .....	62

**-BÖLÜM 4-****EĞRİSEL YAPI FORMÜLLERİ**

4.1 Model Uzayların Jeodeziği .....	67
4.2 Serret-Frenet Formüller .....	70
4.3 $E_1^4$ Minkowski Uzayındaki Eğrinin İvolüt .....	72
4.4 $E_1^4$ Minkowski Uzayında Bertrand Eğri Çifti.....	78

**-BÖLÜM 5-****BAZI EĞRİSEL UYGULAMALAR**

5.1 Problem 1 .....	82
5.1 Problem 2 .....	86

<b>KAYNAKLAR</b> .....	88
<b>ÖZGEÇMİŞ</b> .....	89

## SİMGELER ve KISALTMALAR DİZİNİ

$E_1^n$	:	n-boyutlu Minkowski uzayı
$E_1^4$	:	4-boyutlu Minkowski uzayı
$IR^n$	:	n-boyutlu Öklid uzayı
$H^n$	:	Hiperbolik uzay
$S_1^2(m, r)$	:	Yarı-Riemann küresi
$H_0^2(m, r)$	:	Yarı-Riemann hiperbolik uzayı
$C(u)$	:	Yarı-Riemann timelike konisi
$\alpha$	:	Diferansiyellenebilir eğri
$\lambda$	:	Diferansiyellenebilir fonksiyon
$\mu$	:	Diferansiyellenebilir fonksiyon
$T$	:	Eğrinin teğet vektör alanı
$N$	:	Eğrinin normal vektör alanı
$B$	:	Eğrinin binormal vektör alanı
$E$	:	Eğrinin trinormal vektör alanı
$g$	:	Lorentz metriği
$d_H$	:	Hiperbolik metrik
$\ u\ $	:	u nun normu
$k_1$	:	Eğrinin birinci eğriliği
$k_2$	:	Eğrinin ikinci eğriliği
$k_3$	:	Eğrinin üçüncü eğriliği

## ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil 2.1 Admissible aileler

Şekil 2.2 İvme vektörünün  $\gamma$  deforme edilmesi

Şekil 2.3. Köşenin yuvarlanması

Şekil 2.4. Gauss Lemmanın ispatı

Şekil 3.1. Riemann normal koordinatları

Şekil 3.2. Düzgün normal komşuluğu

Şekil 4.1. Simetrik  $S^2$  üzerinde jeodeziklerin özdeşleşmesi

Şekil 4.2 Yuvarın jeodeziği

Şekil 4.3 Yarı uzayın jeodeziği

Şekil 5.1.a Yarım küre

Şekil 5.1.b İki meridyenin şekli

## GİRİŞ

Çalıştığım konu olan Lorentz uzayını inceleyerek, Minkowski 4-uzayındaki temel yapılar kuruldu. Öklid uzayı ve hiperbolik uzayla karşılaştırmalarda bulunuldu. Öncelikle, kurulmasında önemli olan metrik yapıları irdelendi. Daha sonra vektör yapılarını kurarak açı kavramı belirtildi. Yay uzunluklarının hiperbolik uzayı ile Lorentz arasındaki yay uzunluklarını ele aldım. Uzunluk ve uzaklık kavramlarını belirleyerek jeodeziklerimi kurmuş oldum. Dönüşümlerle minimize ve lokalliğini gördüm. Koordinat yapılarını hem cebirsel ifade olarak hem de topolojik boyutunu inceledim.

### Kaynak taraması

Lorentz geometrisi, 1873 'Über die sogenannte Nicht-Euklidische Geometrie' makalesinde ortaya çıkmıştır. 1885 'Nicht-Euklidischen Raumformen' teziyle Killing tarafından geliştirildi. Lorentz 4-boyutlu uzayını Poincaré 1906 da 'Sur la Dynamique de l'électron' makalesinde spacetime için bir model olarak tanımlandı. Lorentz 4- uzayına Minkowski' nin 1907 deki 'Das Relativitätsprinzip' konusunda Özel Rölativite teorisindeki spacetime için model olarak alındı. Yorumunu 1977 de yayınlanan Hermann Minkowski ve Einstein' ın Özel Rölativite teorisinde görülür. 1908 yılında Minkowski tarafından çıkarılan makalelerle geliştirildi. Lorentz 4-uzayına, Minkowski uzay-zaman da denir. Lorentz dönüşümlerini ilk olarak Killing tarafından değerlendirilip ortaya kondu. Fakat dönüşümler, Lorentz tarafından 1904 yılında 'Electromagnetic phenomena in a system moving with any velocity less than that of light' makalesinde tanımlandı. Rölativite teorisinde Lorentz geometrisinin yer almasıyla ilgili tartışmalar sonucunda 1978 yılında Penrose' nin 'The geometry of universe' konusunda ve G. Naber' in 'The geometry of Minkowski spacetime' tek konulu çalışmasında ele alındı.

Hiperbolik uzayda hiperboloid model 1878 de Killing' in 'Ueber zwei Raumformen mit constanter positiver Krümmung' adlı makalesinde ortaya çıkmıştır. Timelike ve spacelike

açıları Klein' in 1871 yılındaki 'Über die sogenante Nicht-Eucklidische geometrie' makalesinde tanımlandı. Hiperbolik yay uzunluğu elemanları Killing' in 1880 yılındaki 'Die rechnung in den Nicht-Eucklidische Raumformen' makalesinde görüldü. Hiperbolik doğru parçasının Lorentz uzunluğu, Yağlom tarafından 'A simple Non-Euclidean geometry and physical basis' çalışmasıyla tanımlandı.

2- boyutlu hiperbolik koordinatlar Labachevski' nin 'On the principles of geometry' makalesinde ortaya çıktı. Cox ise koordinatları, 'Homogeneous coordinates in imaginary geometry' makalesinde tanımladı.

Saccheri 1733 yılında hiperbolik üçgenin açılarının toplamının iki dik açıdan daha fazla olduğunu ispatladı. Kosinüs ve sinüs ile ilgili kurallarına benzer formüller, Lobachevski tarafından çıkarıldı. Hiperbolik ve Küresel trigonometrilere arasındaki duallığı olarak Lambert tarafından geliştirildi. Daha sonraki yıllarda iki komşu açılı dörtgenler, küresel trigonometrik formüller, dik açılı hiperbolik altıgenler için formüller çalışılmıştır.

## 1.2. Materyal Yöntem

RATCLIFFE, J. G., 'Foundations of Hyperbolic Manifolds', Department Of Mathematics, Vanderbilt University, 1994 ve LEE, J. M. , 'Riemann Manifolds An Introduction to Curvature', Department of Mathematics, University of Washington Seattle, 1991 kitaplarını temel alarak diğer makale ve tezlerden yararlanarak oluşturuldu.

## BÖLÜM 1

### LORENTZ-MINKOWSKI UZAYI

#### 1.1. Temel Yapılar

Bu bölümde, öncelikle Lorentz-Minkowski uzayının metrik yapısı tanımlanarak, üzerindeki vektörel yapılardan bahsedilecektir.

##### Tanım 1.1.1. (simetrik bi-linear form)

$V$  sonlu boyutlu reel vektör uzayı olsun.

$$\langle , \rangle : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$$

bi-linear fonksiyonu  $\forall v, w \in V$  için  $\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle = \langle \vec{w}, \vec{v} \rangle$  özelliğini sağlayan  $\langle , \rangle$  ye  $V$  üzerinde bir *simetrik bi-linear form* denir.[17]

**Tanım 1.1.2.**  $V$ , vektör uzayı üzerinde bir simetrik bi-linear form  $\langle , \rangle$  olsun. Bu takdirde

- i)  $\forall \vec{v} \in V, \vec{v} \neq 0$  için  $\langle \vec{v}, \vec{v} \rangle > 0$  ise  $\langle , \rangle$  bi-linear formu *pozitif tanımlı*,
- ii)  $\forall \vec{v} \in V, \vec{v} \neq 0$  için  $\langle \vec{v}, \vec{v} \rangle < 0$  ise  $\langle , \rangle$  bi-linear formu *negatif tanımlı*,
- iii)  $\forall \vec{v} \in V, \vec{v} \neq 0$  için  $\langle \vec{v}, \vec{v} \rangle \geq 0$  ise  $\langle , \rangle$  bi-linear formu *yarı-pozitif tanımlı*,
- iv)  $\forall \vec{v} \in V, \vec{v} \neq 0$  için  $\langle \vec{v}, \vec{v} \rangle \leq 0$  ise  $\langle , \rangle$  bi-linear formu *yarı-negatif tanımlı*,
- v)  $\forall \vec{v} \in V, \langle \vec{v}, \vec{v} \rangle = 0$  için  $\vec{v} = \vec{0}$  oluyorsa  $\langle , \rangle$  bi-linear formuna *non-dejenere*, aksi

halde *dejenere* denir. [17]

**Tanım 1.1.3. (bi-linear formun indeksi)**

$\langle , \rangle$ ,  $V$  üzerinde simetrik bi-linear form ve  $W$  da  $V$  nin bir altuzayı olsun.  $\langle , \rangle$  nin  $W$  üzerinde kısıtlanması  $\langle , \rangle_W$  olmak üzere

$$\langle , \rangle_W : W \times W \rightarrow \mathbb{R}$$

negatif tanımlı olacak şekilde en büyük boyutlu  $W$  altuzayının boyutuna  $\langle , \rangle$  simetrik *bi-linear formun indeksi* denir. Eger  $\langle , \rangle$  nin indeksi  $\nu$  ise  $0 \leq \nu \leq \text{boy } V$  dir. [17]

**Tanım 1.1.4.(metrik tensör)**

$M$ , türevlenebilir ( $C^\infty$  sınıfından) manifold ve

$$\begin{aligned} \langle , \rangle : \chi(M) \times \chi(M) &\rightarrow C^\infty(M, \mathbb{R}) \\ (\vec{x}, \vec{y}) &\mapsto \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanan simetrik, bi-linear ve non-dejenere metrik fonksiyonuna  $M$  üzerinde bir *metrik tensör* denir. Bu metrik tensörün indeksi  $M$  manifoldunun *indeksi* olarak ifade edilir.

$M$  bir  $C^\infty$  sınıfından manifold olmak üzere,  $\chi(M)$  de tanımlı  $\langle , \rangle$  iç çarpım fonksiyonu,  $M$  nin her bir tanjant uzayına bir iç çarpım indirger, öyleki  $\vec{X}, \vec{Y} \in \chi(M)$  ve  $p \in M$  için  $\vec{X}_p, \vec{Y}_p \in T_M(p)$  dir. Böylece

$$\langle , \rangle_p : T_M(p) \times T_M(p) \rightarrow \mathbb{R}$$

simetrik bi-linear, non-dejenere dönüşüm tanımlayan  $\langle , \rangle_p$  fonksiyonuna  $T_M(p)$  üzerinde bir metrik tensör denir.

**Tanım 1.1.5.**  $M$  bir  $C^\infty$  sınıfından manifold ve  $\langle , \rangle$  de  $M$  üzerinde sabit indeksli bir metrik tensör olmak üzere  $(M, \langle , \rangle)$  ikilisine bir *yarı-Riemann manifoldu* denir.

$M$  nin indeksi  $\nu$  olmak üzere  $0 \leq \nu \leq n = \text{boy } M$  için,  $\nu=0$  ise  $M$  ye bir Riemann manifoldu,  $\nu=1$  ve  $n \geq 2$  durumunda ise  $M$  ye *Lorentz manifoldu* denir.



**Tanım 1.1.6.**  $IR^4$ , 4 boyutlu standart reel vektör uzayı üzerinde  $\forall p \in IR^4$  ve  $V_p, W_p \in T_p(IR^4)$  olmak üzere

$$\langle V_p, W_p \rangle = -v_1w_1 + v_2w_2 + v_3w_3 + v_4w_4$$

eşitliğiyle verilen  $v$ -indeksli metrik tensörle elde edilen uzaya yarı-Öklidyen uzay denir ve  $IR^4$  ile gösterilir. Burada sırasıyla  $v_i$  ve  $w_i$  ler  $V_p$  ve  $W_p$  tanjant vektörlerinin bileşenleridir.

Özel olarak  $v=1$  ve  $n=4$  durumunda ise  $E_1^4$  4-boyutlu Minkowski uzayı adını alır. Metrik tensör ise Lorentz metriği olarak adlandırılır.

Minkowski 4-uzayında iç çarpım özelliklerini sağlatalım:

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : E_1^4 \times E_1^4 \rightarrow IR$$

$$(u, v) \mapsto \left\langle \begin{matrix} \rightarrow \\ u \end{matrix}, \begin{matrix} \rightarrow \\ v \end{matrix} \right\rangle = -u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3 + u_4v_4$$

$$i) \left\langle \begin{matrix} \rightarrow \\ u \end{matrix}, \begin{matrix} \rightarrow \\ v \end{matrix} \right\rangle = \left\langle \begin{matrix} \rightarrow \\ v \end{matrix}, \begin{matrix} \rightarrow \\ u \end{matrix} \right\rangle = u \cdot v \text{ (simetrik özelliği)}$$

$$\left\langle \begin{matrix} \rightarrow \\ u \end{matrix}, \begin{matrix} \rightarrow \\ v \end{matrix} \right\rangle = -u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3 + u_4v_4 \stackrel{\text{çarpımayagöre değişme}}{=} -v_1u_1 + v_2u_2 + v_3u_3 + v_4u_4$$

$$\stackrel{\text{iççarpım tanımından}}{=} \left\langle \begin{matrix} \rightarrow \\ v \end{matrix}, \begin{matrix} \rightarrow \\ u \end{matrix} \right\rangle$$

$$ii) a, b \in IR \text{ ve } \begin{matrix} \rightarrow \\ u \end{matrix}, \begin{matrix} \rightarrow \\ v \end{matrix}, \begin{matrix} \rightarrow \\ w \end{matrix} \in E_1^4$$

$$\left\langle a \begin{matrix} \rightarrow \\ u \end{matrix} + b \begin{matrix} \rightarrow \\ v \end{matrix}, \begin{matrix} \rightarrow \\ w \end{matrix} \right\rangle = a \left\langle \begin{matrix} \rightarrow \\ u \end{matrix}, \begin{matrix} \rightarrow \\ w \end{matrix} \right\rangle + b \left\langle \begin{matrix} \rightarrow \\ v \end{matrix}, \begin{matrix} \rightarrow \\ w \end{matrix} \right\rangle$$

$$\left\langle a \begin{matrix} \rightarrow \\ u \end{matrix} + b \begin{matrix} \rightarrow \\ v \end{matrix}, \begin{matrix} \rightarrow \\ w \end{matrix} \right\rangle = -(au_1 + bv_1)w_1 + (au_2 + bv_2)w_2 + (au_3 + bv_3)w_3 + (au_4 + bv_4)w_4$$

$$= a(-u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3 + u_4v_4) + b(-v_1u_1 + v_2u_2 + v_3u_3 + v_4u_4)$$

$$= a \left\langle \begin{matrix} \rightarrow \\ u \end{matrix}, \begin{matrix} \rightarrow \\ w \end{matrix} \right\rangle + b \left\langle \begin{matrix} \rightarrow \\ v \end{matrix}, \begin{matrix} \rightarrow \\ w \end{matrix} \right\rangle$$

**Tanım 1.1.7.**  $\vec{X} = (x_1, \dots, x_4) \in E_1^4$  olsun. Eğer

i)  $\langle \vec{X}, \vec{X} \rangle < 0$  ise  $\vec{X}$  timelike vektör,

ii)  $\langle \vec{X}, \vec{X} \rangle > 0$  veya  $\vec{X} = \vec{0}$  ise  $\vec{X}$  spacelike vektör,

iii)  $\langle \vec{X}, \vec{X} \rangle = 0$  ve  $\vec{X} \neq \vec{0}$  ise  $\vec{X}$  null vektör

olarak ifade edilir. [17]

**Tanım 1.1.8.**  $E_1^4$  Minkowski 4-uzayında  $\forall \vec{X}, \vec{Y} \in E_1^4$  için

$$\langle \vec{X}, \vec{Y} \rangle = 0$$

ise  $\vec{X}$  ve  $\vec{Y}$  vektörleri Lorentz anlamında diktir (ortogonaldır) denir.

**TEOREM 1.1.1.**  $x, y \in E_1^4$  sıfır olmayan Lorentz ortogonal vektörler olsun.  $x$  timelike vektör ise  $y$  spacelikedir.

**İSPAT:**  $x$  timelike  $\Rightarrow \|x\|^2 = -\langle x, x \rangle$

$x, y \in E_1^4$  Lorentz ortogonal  $\Leftrightarrow \langle x, y \rangle = 0$

$$\langle x, y \rangle^2 = \|x\|^2 + 2\langle x, y \rangle + \|y\|^2 = 0$$

$$-\langle x, x \rangle + 0 + \|y\|^2 = 0$$

$$\|y\|^2 = \langle x, x \rangle$$

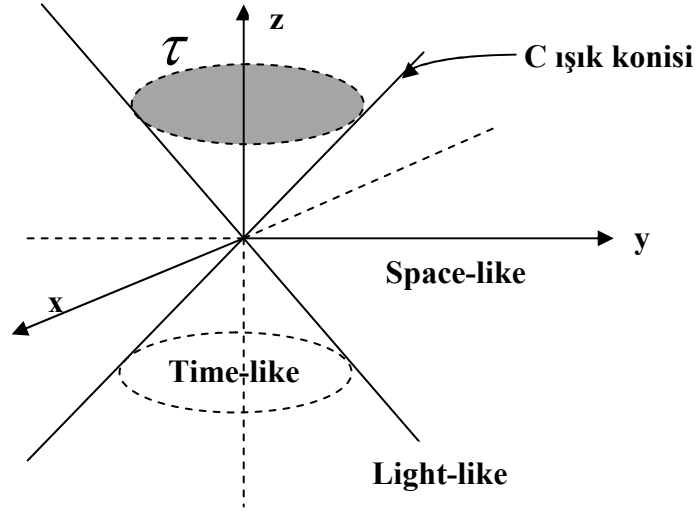
dir. Bu durumda  $y$  spacelike vektördür.

**Tanım 1.1.9.**  $E_1^4$  Minkowski 4-uzayının bütün timelike vektörlerin kümesi  $\tau$  olsun.

Böylece  $\forall u \in \tau$  için

$$C(\vec{u}) = \left\{ \vec{x} \in \tau : \langle \vec{u}, \vec{x} \rangle < 0 \right\} = \left\{ \vec{x} \in E_1^4 : g(x-u, x-u) < 0 \right\}$$

biçiminde tanımlanan  $C(\vec{u})$  kümesine  $u$  yu içeren  $E_1^4$  ün time-konisi denir. [17]



Şekil 1.1: Minkowski uzayının tanımlanış özelliği

**Tanım 1.1.10.**  $\vec{X} = (x_1, \dots, x_4) \in E_1^4$  için  $\vec{X}$  vektörünün normu

$$\|\vec{X}\| = \sqrt{|\langle \vec{X}, \vec{X} \rangle|}$$

ile tanımlanır. [17]

**TEOREM 1.1.2.**  $\vec{X} = (x_1, \dots, x_4) \neq 0$  ve  $\vec{X} \in E_1^4$  olsun. Bu takdirde

i)  $\|\vec{X}\| > 0$  dir.

ii)  $\|\vec{X}\| = 0 \Leftrightarrow \vec{X}$  bir null vektördür.

iii)  $\vec{X}$  bir timelike vektör  $\Rightarrow \|\vec{X}\|^2 = -\langle \vec{X}, \vec{X} \rangle$  dir.

iv)  $\vec{X}$  bir spacelike vektör  $\Rightarrow \|\vec{X}\|^2 = \langle \vec{X}, \vec{X} \rangle$  dir.

**İSPAT:** i)  $\|\vec{X}\| = \sqrt{|\langle \vec{X}, \vec{X} \rangle|} \Rightarrow \langle \vec{X}, \vec{X} \rangle \geq 0$  ve  $\vec{X} \neq 0$  olduğundan  $\|\vec{X}\| > 0$  dir.

ii)  $\|\vec{X}\| = 0 \Leftrightarrow \sqrt{|\langle \vec{X}, \vec{X} \rangle|} = 0 \Leftrightarrow |\langle \vec{X}, \vec{X} \rangle| = 0 \Leftrightarrow \langle \vec{X}, \vec{X} \rangle = 0$

$$\Leftrightarrow \langle \vec{X}, \vec{X} \rangle = 0 \wedge \vec{X} \neq 0$$

tanım 1.1.7

$$\Leftrightarrow \vec{X} \text{ null vektördür.}$$

$$\text{iii) } \left\| \vec{X} \right\|^2 = \left| \left\langle \vec{X}, \vec{X} \right\rangle \right|^{\vec{X} \text{ timelike}} = - \left\langle \vec{X}, \vec{X} \right\rangle$$

$$\text{iv) } \left\| \vec{X} \right\|^2 = \left| \left\langle \vec{X}, \vec{X} \right\rangle \right|^{\vec{X} \text{ spacelike}} = \left\langle \vec{X}, \vec{X} \right\rangle \text{ dir.}$$

**Tanım 1.1.11.**  $(V, \langle, \rangle)$  Minkowski uzayı olsun.  $W \subset V$  altuzayı göz önüne alınırsa

i)  $\langle, \rangle_W : W \times W \rightarrow \mathbb{R}$  pozitif ise  $W$  ya spacelike altuzayı

ii)  $\langle, \rangle_W : W \times W \rightarrow \mathbb{R}$  negatif ise  $W$  ya timelike alt uzayı

iii)  $\langle, \rangle_W : W \times W \rightarrow \mathbb{R}$  dejenere ise  $W$  ya lightlike altuzayı

denir. [17]

**TEOREM 1.1.3.**  $E_1^4$  Minkowski 4-uzayında  $\vec{X}$  ve  $\vec{Y}$  iki timelike vektörü olsun. Bu durumda

$$\left| \left\langle \vec{X}, \vec{Y} \right\rangle \right| \geq \left\| \vec{X} \right\| \left\| \vec{Y} \right\|$$

eşitsizliği vardır. Bu eşitsizlikte eşitlik durumunun sağlanması için gerek ve yeter şart

$\vec{X}$  ve  $\vec{Y}$  vektörlerinin lineer bağımlı olmasıdır. [10]

**İSPAT:**  $Y = aX + \vec{Y}$ ,  $\vec{Y} \in X^\perp$ ,  $Y$  timelike vektör

$$\langle Y, Y \rangle = a^2 \langle \vec{X}, \vec{X} \rangle + \langle \vec{Y}, \vec{Y} \rangle < 0$$

dır. Bu durumda

$$\begin{aligned} \langle X, Y \rangle^2 &= a^2 \langle \vec{X}, \vec{X} \rangle^2 = \left( \langle Y, Y \rangle - \langle \vec{Y}, \vec{Y} \rangle \right) \langle \vec{X}, \vec{X} \rangle \\ &\geq \langle Y, Y \rangle \langle X, X \rangle \\ &= \left\| \vec{X} \right\|^2 \left\| \vec{Y} \right\|^2 \end{aligned}$$

Böylece

$$\left| \left\langle \vec{X}, \vec{Y} \right\rangle \right| \geq \left\| \vec{X} \right\| \left\| \vec{Y} \right\|$$

olur.

$\langle \vec{Y}, \vec{Y} \rangle \geq 0$  ve  $\langle \vec{X}, \vec{X} \rangle < 0$  olduğundan bu teoremin eşitliği sadece ve sadece  $\langle \vec{Y}, \vec{Y} \rangle = 0 \Rightarrow \vec{Y} = 0$  yani  $Y = aX$  olur. Bu durumda  $X$  ve  $Y$  vektörleri lineer bağımlıdır.

## 1.2. $E_1^4$ Minkowski 4-uzayında Açı ve Hareket Kavramı

Şimdi, vektörler arasındaki açı kavramını ele alacağız. Önceki bölümde bahsedilen timelike, spacelik ve lightlike vektörler için ayrı ayrı açılal durumu inceleyeceğiz. Bununla ilişkili olarak Lorentz dönüşümünü inceleyip açılal uzayın baz yapısını oluşturacağız. Bunun için öncelikle aşağıdaki teoremi verelim.

**TEOREM 1.2.1.**  $E_1^4$  Minkowski 4-uzayında  $\vec{x}$  ve  $\vec{y}$  timelike vektörleri aynı timekonisinin elemanı ise

$$\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = -\|\vec{x}\| \|\vec{y}\| \cosh \theta$$

olacak şekilde bir tek  $\theta \geq 0$  reel sayısı vardır. [10]

**İSPAT:**  $x$  ve  $y$  lineer bağımsız time-like vektörleri düşünülürse,  $X = \langle x, y \rangle$  time-like bir düzlem olur.  $x$  ve  $y$  iki lineer bağımsız light-like vektörlerse,  $x + y$  veya  $x - y$  time-like vektördür çünkü;

$\langle x \pm y, x \pm y \rangle = \mp 2 \langle x, y \rangle$  dir ve her iki vektörün time-like olmasına bağlı olarak  $\langle x, y \rangle \neq 0$  olduğuna göre  $a$  ve  $b$  üzerindeki eşitlik şu şekildedir:

$$\langle ax + by, ax + by \rangle = a^2 \langle x, x \rangle + b^2 \langle y, y \rangle + 2ab \langle x, y \rangle = 0$$

$a \neq 0$  olur.  $b/a = \lambda$  denirse

$$\langle x, x \rangle + 2\lambda \langle x, y \rangle + \lambda^2 \langle y, y \rangle = 0$$

elde edilir

Bu  $\lambda$  değişkenine göre bir denklemdir ve çözümü vardır. Dolayısıyla denklemin diskriminantı pozitif olmalıdır. O halde,

$$\langle x, y \rangle^2 > \langle x, x \rangle \langle y, y \rangle$$

dir. Bu,  $x$  ve  $y$  lineer bağımsız olduğu durumda eşitsizliği gösterir. Bunun yanı sıra; eğer orantılılarsa, o zaman eşitlik yakalanmış olur. Böylece,

$$\frac{\langle x, y \rangle^2}{(-\langle x, x \rangle)(-\langle y, y \rangle)} \geq 1 \quad (1.1)$$

elde edilir.  $x$  ve  $y$  aynı time-like koni içindelerse,  $\langle x, y \rangle < 0$  olur ve (1.1) ifadesi şunu gösterir:

$$\frac{-\langle x, y \rangle}{\sqrt{-\langle x, x \rangle} \sqrt{-\langle y, y \rangle}} \geq 1$$

Hiperbolik kosinüs fonksiyonu  $\cosh : [0, \infty) \rightarrow [1, \infty)$  birebir olduğundan burada unik bir sayı oluşur ki

$$\cosh \theta = \frac{-\langle x, y \rangle}{\sqrt{-\langle x, x \rangle} \sqrt{-\langle y, y \rangle}}$$

olur.

**TANIM 1.2.1.** Yukarıdaki verilen  $\theta$  reel sayısına  $\vec{x}$  ve  $\vec{y}$  timelike vektörleri arasındaki *Lorentz timelike açı* denir. [10]

**TEOREM 1.2.2.**  $x$  ve  $y$ ,  $E_1^4$  aynı uzayda sıfır ve spacelike olmayan vektörler olsun. Bu durumda  $\langle x, y \rangle \leq 0$  olur ve eşitlik durumu ancak ve ancak  $x$  ve  $y$  lineer bağımlı lightlike vektörleri için sağlanır

**İSPAT:**  $x$  ve  $y$  orantılıysa, bu ortogonal olduklarını gösterir. Farzedelim ki  $x$ ,  $y$  ortogonal olsun.  $E_1^4 = \langle E_4 \rangle^\perp \oplus \langle E_4 \rangle$  ayrışımında;  $x = w + u$ ,  $y = w + v$  yazılabilir.  $\langle x, y \rangle = 0$  olduğundan ve her iki vektör de light-like olduğundan dolayı,

$$\langle u, v \rangle + \langle w, w \rangle + \langle u, w \rangle + \langle v, w \rangle = 0$$

$$\langle u, u \rangle + \langle w, w \rangle + 2\langle u, w \rangle = 0$$

$$\langle v, v \rangle + \langle w, w \rangle + 2\langle v, w \rangle = 0$$

olur. Bu üç eşitlik birleştirilirse;  $|u|^2 + |v|^2 - 2\langle u, v \rangle = 0$  eşitliği elde edilir, yani,  $|u - v|^2 = 0$ . Böylece;  $u = v$  olur, çünkü  $u - v$  bir space-like vektördür ( $u - v \in \langle w \rangle^\perp$ ).

Buradan  $x = y$  sonucu çıkar.

Eğer iki vektörde time-like ise,  $\langle x, y \rangle \neq 0$  olup;  $\langle y \rangle^\perp$  space-like bir altuzay olduğundan  $E_1^4 = \langle y \rangle^\perp \oplus \langle y \rangle$  eşitliğini kullanarak,  $y = u + \lambda y$  yazılır. Bundan dolayı;  $\langle x, y \rangle = \langle y, u \rangle + \lambda \langle y, y \rangle = \lambda \langle y, y \rangle$  dir.  $\langle u, v \rangle = 0$  olursa,  $\lambda = 0$  ve  $x = u$  vektörü space-like olurdu. Bu bir çelişkidir. Bundan dolayı; her iki vektör de light-like olmalıdır.

$x, y \in X \cap X^\perp$  ise;  $\langle x, y \rangle = 0$  olur. Buradan  $x$  ve  $y$  lineer bağımlıdır. Bu da;  $\dim(X \cap X^\perp) \leq 1$  olduğunu kanıtlar. Boyut tam olarak, 0 ise;  $E_1^4 = X^\perp \oplus X$  ve bundan dolayı  $E_1^4$  ün herhangi bir vektörü light-like olacaktır.

**TEOREM 1.2.3.**  $x, y \in E_1^4$  sıfır ve spacelike olmayan vektörler ve  $t > 0$  ise, bu durumda

- i)  $tx$  vektörleri  $x$  gibi aynı boyut ve benzerliğe sahiptir.
- ii)  $x+y$ ,  $x$  ve  $y$  ye aynı boyutta spacelike olmayan vektörlerdir, ayrıca  $x+y$  lightlike vektörlerdir  $\Leftrightarrow x$  ve  $y$  lineer bağımlı lightlike vektörlerdir.

**İSPAT:** (i)  $\|tx\| = t\|x\|$  ve  $(tx)_i = t x_i$  dikkate aldığımızda  $tx$  ve  $x$  aynı benzerlik ve boyuta sahiptir.

$$(ii) \|x+y\|^2 = \|x\|^2 + 2\langle x, y \rangle + \|y\|^2 \leq 0$$

Bunun eşitlik durumu ancak ve ancak  $\|x\|=0$ ,  $\|y\|=0$  ve  $\langle x, y \rangle=0$  olduğunda sağlanır.

Böylece  $x+y$  lightlike  $\Leftrightarrow x$  ve  $y$  lineer bağımlı lightlike vektörlerdir.

**SONUÇ 1.2.1.** Bütün pozitif (negatif) timelike vektörlerin kümesi  $IR^n$  in konveks altkümesidir.

**İSPAT:**  $x, y \in IR^n$  pozitif (negatif) timelike vektörler ve  $0 \leq t \leq 1$  ise bu durumda  $(1-t)x+ty$  pozitif (negatif) timelike olduğu görülür. Bu durumda  $IR^n$  de konveks altkümedir.

**TANIM 1.2.2.**  $\forall x, y \in IR^n$  için

$$\phi: IR^n \rightarrow IR^n \text{ fonksiyonu Lorentz dönüşümdür} \Leftrightarrow \langle \phi(x), \phi(y) \rangle = \langle x, y \rangle \text{ dir.}$$

$IR^n$  in  $\{V_1, V_2, \dots, V_n\}$  bazına Lorentz ortonormal denir  $\Leftrightarrow \langle V_1, V_1 \rangle = -1 \wedge \langle V_i, V_j \rangle = \delta_{ij}$  dir.

$IR^n$  in  $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$  standart bazı, Lorentz ortonormaldir.

**TEOREM 1.2.4.**  $\phi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  fonksiyonu lorentz dönüşümdür  $\Leftrightarrow \phi$  fonksiyonu lineer ve  $\{\phi(e_1), \phi(e_2), \dots, \phi(e_n)\}$ ,  $\mathbb{R}^n$  in Lorentz ortonormal bazıdır. [10]

**İSPAT:**  $\phi$ ,  $\mathbb{R}^n$  in Lorentz dönüşümü olsun. Bu durumda

$$\langle \phi(e_1), \phi(e_1) \rangle = \langle e_1, e_1 \rangle = -1$$

ve

$$\langle \phi(e_i), \phi(e_j) \rangle = \delta_{ij}$$

dir. Bu açıkça  $\phi(e_1), \phi(e_2), \dots, \phi(e_n)$  in lineer bağımsız olduğunu gösterir. Dolayısıyla,  $\{\phi(e_1), \phi(e_2), \dots, \phi(e_n)\}$   $\mathbb{R}^n$  in Lorentz dönüşümüdür.

$x \in \mathbb{R}^n$  olsun. Bu durumda  $c_1, c_2, \dots, c_n \in \mathbb{R}$  katsayılarıdır. Öyleki

$$\phi(x) = \sum_{i=1}^n c_i \phi(e_i)$$

olur.  $\{\phi(e_1), \phi(e_2), \dots, \phi(e_n)\}$  bir Lorentz ortonormal baz olduğunda

$$-c_1 = \langle \phi(x), \phi(e_1) \rangle = \langle x, e_1 \rangle = -x_1$$

ve  $\forall j > 1$  için

$$c_j = \langle \phi(x), \phi(e_j) \rangle = \langle x, e_j \rangle = -x_j$$

olur. Bu durumda

$$\phi\left(\sum_{i=1}^n x_i e_i\right) = \sum_{i=1}^n x_i \phi(e_i)$$

olduğundan dolayı  $\phi$  lineerdir.

Diğer taraftan  $\phi$  lineer ve  $\{\phi(e_1), \phi(e_2), \dots, \phi(e_n)\}$ ,  $\mathbb{R}^n$  in Lorentz ortonormal bazı olduğunu kabul edelim. O halde,

$$\begin{aligned} \langle \phi(x), \phi(y) \rangle &= \left\langle \phi\left(\sum_{i=1}^n x_i e_i\right), \phi\left(\sum_{j=1}^n y_j e_j\right) \right\rangle \\ &= \left\langle \sum_{i=1}^n x_i \phi(e_i), \sum_{j=1}^n y_j \phi(e_j) \right\rangle \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \langle x_i \phi(e_i), y_j \phi(e_j) \rangle \\ &= -x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3 + \dots + x_n y_n \\ &= \langle x, y \rangle \end{aligned}$$



olduğundan dolayı  $\phi$ , Lorentz dönüşümdür.

**TANIM 1.2.3 .**  $A$ ,  $n \times n$  tipinde reel matris Lorentz denir  $\Leftrightarrow$

$A: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  birleşmeli, lineer dönüşüm Lorentzdir.

$$x \mapsto A(x) = Ax$$

Bütün  $n \times n$  tipindeki Lorentz matrislerin çarpımlarıyla oluşan küme,  $O(1, n-1)$  grubunu oluşturur ve buna  $n \times n$  matrisinin *Lorentz grubu* denir. [10]

**TEOREM 1.2.5.**  $A$ ,  $n \times n$  tipinde reel matris ve  $J = \text{diag}(-1, 1, 1, \dots, 1)$  şeklinde tanımlanan  $n \times n$  tipinde köşegen matris olsun. Bu durumda aşağıdakiler denktir:

- (1)  $A$  matrisi Lorentzdir.
- (2)  $A$  formunun sütunları  $\mathbb{R}^n$  in Lorentz ortonormal bazıdır.
- (3)  $A$  matrisi  $A^t J A = J$  eşitliğini sağlar.
- (4)  $A$  matrisi  $A J A^t = J$  eşitliğini sağlar.
- (5)  $A$  formunun satırları  $\mathbb{R}^n$  in Lorentz ortonormal bazıdır. [10]

$A$ , Lorentz matrisi olsun.  $A^t J A = J$  iken  $(\det A)^2 = 1$  olur. Böylece  $\det A = \pm 1$  dir.  $SO(1, n-1)$ ,  $O(1, n-1)$  deki iki indeksin altgrubudur.  $SO(1, n-1)$  grubuna *özel Lorentz grubu* denir.  $\mathbb{R}^n$  deki bütün timelike vektörler kümesi, pozitif ve negatif timelike vektörler olarak iki bağlantılı bileşene sahiptir.  $A$  Lorentz matrisi pozitif(negatif) olarak ifade edilir  $\Leftrightarrow A$ , pozitif(negatif) timelike vektörleri pozitif(negatif) timelike vektörlere dönüştürür. Mesela  $J$  matrisi negatiftir. Lorentz matrisi ya pozitif ya da negatiftir.

$PO(1, n-1)$ ,  $O(1, n-1)$  de bütün pozitif matrislerin kümesi olsun. Bu durumda  $PO(1, n-1)$ ,  $O(1, n-1)$  deki iki indeksin altgrubudur.  $PO(1, n-1)$ , pozitif matrisin grubuna, *Lorentz pozitif grup* denir. Aynı şekilde  $PSO(1, n-1)$ ,  $SO(1, n-1)$  deki pozitif matrislerin kümesi olsun. Bu durumda  $PSO(1, n-1)$ ,  $SO(1, n-1)$  deki iki indeksin altgrubudur.  $PSO(1, n-1)$  grubuna *pozitif özel Lorentz grup* denir. [10]

**TEOREM 1.2.6.**  $M$  nin her boyutu için,  $\mathbb{R}^n$  in  $m$  boyutlu timelike altvektör uzayının kümesinde  $PO(1, n-1)$  in doğal hareketi geçişlidir. [10]

**İSPAT:**  $V$ ;  $\mathbb{R}^n$  in  $m$  boyutlu timelike altvektör uzayı olsun.  $\{e_1, e_2, \dots, e_m\}$  vektörleri tarafından gerilen  $\mathbb{R}^n$  in altuzayı  $\mathbb{R}^m$  i belirleyelim. Bu,  $PO(1, n-1)$  deki  $A$  yı yani  $A(\mathbb{R}^m) = V$  olduğunu göstermek, ispat için yeterlidir.  $\mathbb{R}^n$  in  $\{u_1, u_2, \dots, u_n\}$  bazı var öyleki  $u_1$ ,  $V$  deki pozitif timelike vektörü ve  $\{u_1, u_2, \dots, u_m\}$ ,  $V$  için bir baz seçelim.

$w_1 = \frac{u_1}{\|u_1\|}$  olsun. bu durumda  $\langle w_1, w_1 \rangle = -1$  dir.  $v_2 = u_2 + \langle u_2, w_1 \rangle w_1$  dir. Bu durumda  $u_1, u_2$  lineer bağımsız olduğundan  $u_2$  sıfır değildir. Dahası,

$$\langle w, v_2 \rangle = \langle w, u_2 \rangle + \langle u_2, w_1 \rangle \langle w_1, w_1 \rangle = 0$$

olur. Bu yüzden lorentz ortogonal vektörler ve  $u$  timelike vektör olduğundan  $v_2$  spacelikedir (teorem 1.1.1.). Bu şekilde devam edersek;

$$w_2 = \frac{v_2}{\|v_2\|}$$

$$v_3 = u_3 + \langle u_3, w_1 \rangle w_1 - \langle u_3, w_2 \rangle w_2$$

⋮

$$v_n = u_n + \langle u_3, w_1 \rangle w_1 - \langle u_3, w_2 \rangle w_2 - \dots - \langle u_n, w_{n-1} \rangle w_{n-1}$$

$$w_n = \frac{v_n}{\|v_n\|}$$

olsun. Bu durumda  $\{w_1, w_2, \dots, w_n\}$ ,  $\mathbb{R}^n$  uzayının Lorentz ortonormal bazını ve  $\{w_1, w_2, \dots, w_n\}$ ,  $V$  nin bazını elde ederiz.  $A$ ;  $w_1, w_2, \dots, w_n$  sütunları olan  $n \times n$  tipinde matris olsun. Bu durumda  $A$  matrisi, Teorem 1.2.5 kullanarak Lorentz'dir ve  $A(\mathbb{R}^m) = V$ ; dahası  $A$  pozitifdir çünkü  $A e_1 = w_1$  pozitif timelikedir.

**TEOREM 1.2.7.**  $x, y \in E_1^4$  pozitif(negatif) timelike vektörler olsun. bu durumda  $\langle x, y \rangle \leq \|x\| \|y\|$  eşitliğiyle  $\Leftrightarrow x$  ve  $y$  lineer bağımlıdır. [10]

**İSPAT:**  $PO(1, n-1)$  de bir  $A$  alalım yani  $Ax = t e_1$  olur.  $A$ , Lorentz iç çarpımını korumasıyla  $x$  ve  $y$  yi  $Ax$  ve  $Ay$  yerine koyabiliriz. Bu durumda

$$\|x\|^2 \|y\|^2 = -x_1^2 (-y_1^2 + |\bar{y}|^2) = x_1^2 y_1^2 - x_1^2 |\bar{y}|^2 \leq x_1^2 y_1^2 = \langle x, y \rangle^2$$

eşitliğiyle  $\Leftrightarrow \bar{y} = 0$ , yani  $y = y_1 e_1$  dir.  $\langle x, y \rangle \leq -x_1 y_1 < 0$  iken  $\langle x, y \rangle \leq \|x\| \|y\|$  eşitliğiyle

$\Leftrightarrow x$  ve  $y$  lineer bağımlıdır.

**TEOREM 1.2.8.**  $x, y \in E_1^4$  pozitif(negatif) timelike vektörler olsun. Bu durumda

$$\langle x, y \rangle = \|x\| \|y\| \cosh \theta$$

olan tek bir  $\theta > 0$  reel sayısı vardır. [10]

**TANIM 1.2.4.** Yukarıdaki teoremden verilen  $\theta$  reel sayısına  $x, y$  timelike vektörleri arasındaki *Lorentz timelike* açısı denir. [10]

**TANIM 1.2.5.**  $x, y \in E_1^4$  vektörleri ve  $x, y$  arasındaki Lorentz timelike açısı  $\theta$  olsun. Bu durumda

$$d_{E_1^4}(x, y) = \theta(x, y)$$

reel sayısına  $x$  ve  $y$  arasındaki *uzaklık* denir. [10]

**TANIM 1.2.6.**  $x, y, z \in E_1^4$  vektörleri ve  $J = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$  olsun. Bu durumda

$$x \wedge y \wedge z = J(x, y, z)$$

olarak ifade edilen çarpıma Lorentz vektörel çarpım denir.

$$\langle x, x \wedge y \wedge z \rangle = \langle x, J(x \wedge y \wedge z) \rangle = x \cdot (x \wedge y \wedge z) = 0$$

$$\langle y, x \wedge y \wedge z \rangle = \langle y, J(x \wedge y \wedge z) \rangle = y \cdot (x \wedge y \wedge z) = 0$$

$$\langle z, x \wedge y \wedge z \rangle = \langle z, J(x \wedge y \wedge z) \rangle = z \cdot (x \wedge y \wedge z) = 0$$

olur. Böylece  $x \wedge y \wedge z$ , hem  $x$  hem  $y$  hem de  $z$  ye Lorentz ortogondur.

**TEOREM 1.2.9.**  $x, y, z, w \in E_1^4$  vektörleri ise bu durumda

$$\text{i) } (x \wedge y) \wedge z = -z \wedge (x \wedge y)$$

$$\text{ii) } \langle (x \wedge y \wedge z), w \rangle = -\det(x, y, z, w)$$

$$\begin{aligned} \text{İSPAT: i) } (x \wedge y) \wedge z &= - \begin{vmatrix} -e_1 & e_2 & e_3 & e_4 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ z_1 & z_2 & z_3 & z_4 \end{vmatrix} \\ &= e_1 \begin{vmatrix} x_2 & x_3 & x_4 \\ y_2 & y_3 & y_4 \\ z_2 & z_3 & z_4 \end{vmatrix} + e_2 \begin{vmatrix} x_1 & x_3 & x_4 \\ y_1 & y_3 & y_4 \\ z_1 & z_3 & z_4 \end{vmatrix} \\ &\quad - e_3 \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_4 \\ y_1 & y_2 & y_4 \\ z_1 & z_2 & z_4 \end{vmatrix} + e_4 \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix} \\ &= (z_2(x_4y_3 - x_3y_4) - z_3(x_2y_4 - x_4y_2) + z_4(x_2y_3 - x_3y_2))e_1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + (z_1(x_3y_4 - x_4y_3) - z_3(x_1y_4 - x_4y_1) + z_4(x_1y_3 - x_3y_1))e_2 \\
& - (z_1(x_2y_4 - x_4y_2) - z_2(x_1y_4 - x_4y_1) + z_4(x_1y_2 - x_2y_1))e_3 \\
& + (z_1(x_2y_3 - x_3y_2) - z_2(x_1y_3 - x_3y_1) + z_3(x_1y_2 - x_2y_1))e_4 \\
& = -e_1 \begin{vmatrix} z_2 & z_3 & z_4 \\ x_2 & x_3 & x_4 \\ y_2 & y_3 & y_4 \end{vmatrix} - e_2 \begin{vmatrix} z_1 & z_3 & z_4 \\ x_1 & x_3 & x_4 \\ y_1 & y_3 & y_4 \end{vmatrix} \\
& + e_3 \begin{vmatrix} z_1 & z_2 & z_4 \\ x_1 & x_2 & x_4 \\ y_1 & y_2 & y_4 \end{vmatrix} - e_4 \begin{vmatrix} z_1 & z_2 & z_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix} \\
& = \begin{vmatrix} -e_1 & e_2 & e_3 & e_4 \\ z_1 & z_2 & z_3 & z_4 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \end{vmatrix} \\
& = -z \wedge (x \wedge y)
\end{aligned}$$

$$\text{ii) } \langle x \wedge y \wedge z, w \rangle \stackrel{?}{=} -\det(x, y, z, w)$$

$$\begin{aligned}
\langle x \wedge y \wedge z, w \rangle & = \begin{pmatrix} -w_1[x_2(y_3z_4 - z_3y_4) - x_3(y_2z_4 - z_2y_4) + x_4(y_2z_3 - z_2y_3)] \\ + w_2[x_1(y_3z_4 - z_3y_4) - x_3(y_1z_4 - z_2y_1) + x_4(y_1z_3 - z_1y_3)] \\ - w_3[x_1(y_2z_4 - z_2y_4) - x_2(y_1z_4 - z_1y_4) + x_4(y_1z_2 - z_1y_2)] \\ + w_4[x_1(y_2z_3 - z_2y_3) - x_2(y_1z_3 - z_1y_3) + x_3(y_1z_2 - z_1y_2)] \end{pmatrix} \\
& = -w_1 \begin{vmatrix} x_2 & x_3 & x_4 \\ y_2 & y_3 & y_4 \\ z_2 & z_3 & z_4 \end{vmatrix} + w_2 \begin{vmatrix} x_1 & x_3 & x_4 \\ y_1 & y_3 & y_4 \\ z_1 & z_3 & z_4 \end{vmatrix} \\
& - w_3 \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_4 \\ y_1 & y_2 & y_4 \\ z_1 & z_2 & z_4 \end{vmatrix} + w_4 \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix} \\
& = -\det(x, y, z, w)
\end{aligned}$$

**SONUÇ 1.2.2.**  $x, y \in E_1^4$  lineer bağımsız, pozitif (negatif) timelike vektörleri ise bu durumda  $x \wedge y$  spacelike vektördür ve

$$\|x \wedge y\| = -\|x\|\|y\| \sinh \theta$$

dır.

$$\begin{aligned}
\text{İSPAT: } \|x \wedge y\|^2 &= \langle x, y \rangle^2 - \|x\|^2 \|y\|^2 \\
&= \|x\|^2 \|y\|^2 \cosh^2 \theta - \|x\|^2 \|y\|^2 \\
&= \|x\|^2 \|y\|^2 (\cosh^2 \theta - 1) \\
&= \|x\|^2 \|y\|^2 \sinh^2 \theta
\end{aligned}$$

$\cosh \theta(x, y) = -\langle x, y \rangle$  olduğundan  $\|x \wedge y\| = -\|x\| \|y\| \sinh \theta$  olur.

**SONUÇ 1.2.3.**  $x, y \in E_1^4$  spacelike vektörler ise bu durumda

- i)  $|\langle x, y \rangle| < \|x\| \|y\| \Leftrightarrow x \wedge y$  timelike
- ii)  $|\langle x, y \rangle| = \|x\| \|y\| \Leftrightarrow x \wedge y$  lightlike
- iii)  $|\langle x, y \rangle| > \|x\| \|y\| \Leftrightarrow x \wedge y$  spacelike

olur.

**İSPAT:**  $\|x \wedge y\|^2 = \langle x, y \rangle^2 - \|x\|^2 \|y\|^2$  ifadesinden açık olarak görülür.

**TEOREM 1.2.10.**  $d_{E_1^4}$  uzaklık fonksiyonu,  $E_1^4$  üzerinde metriktir. [10]

**İSPAT:**  $d_{E_1^4}$  fonksiyonu negatif olmayan, simetrik ve nondejenere dir.

$\mathbb{R}^{n+1}$  in pozitif Lorentz dönüşümü  $H^n$  hiperbolik uzayı üzerinde uzaklığı korur.  $x, y, z$  vektörleri en çok 3 boyuttaki  $\mathbb{R}^{n+1}$  altvektör uzayını gerer.  $x, y, z$  yi  $e_1, e_2, e_3$  tarafından gerilen  $\mathbb{R}^{n+1}$  in altuzayı içindedir. Diğer bir deyişle  $n=2$  olarak kabul edelim.

$$\|x \wedge y\| = \sinh \theta(x, y) \text{ ve } \|y \wedge z\| = \sinh \theta(y, z)$$

olduğunda  $y$ , hem  $x \wedge y$  hem de  $y \wedge z$  ye Lorentz ortogonalken  $y$  ve  $(x \wedge y) \wedge (y \wedge z)$  vektörleri lineer bağımlıdır. Böylece ya sıfır ya da timelikedir. Bu durumda

$$|\langle (x \wedge y), (y \wedge z) \rangle| \leq \|x \wedge y\| \|y \wedge z\|$$

eşitsizliğini elde ederiz. Elde edilenleri düzenlediğimizde

$$\begin{aligned}
\cosh(\theta(x, y) + \theta(y, z)) &= \cosh \theta(x, y) \cosh \theta(y, z) + \sinh \theta(x, y) \sinh \theta(y, z) \\
&= \langle x, y \rangle \langle y, z \rangle + \|x \wedge y\| \|y \wedge z\| \\
&\geq \langle x, y \rangle \langle y, z \rangle + \langle x \wedge y, y \wedge z \rangle \\
&= \langle x, y \rangle \langle y, z \rangle + (\langle x, z \rangle \langle y, y \rangle - \langle x, y \rangle \langle y, z \rangle)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -\langle x, z \rangle \\
&= \cosh \theta(x, z)
\end{aligned}$$

elde ederiz. Bu yüzden

$$\theta(x, z) \leq \theta(x, y) + \theta(y, z)$$

olur.

$H^n$  üzerinde  $d_H$  metriğine *hiperbolik metrik* denir.  $d_H$  tarafından belirlenen  $H^n$  in metrik topolojisi,  $d_E(x, y) = |x - y|$  Öklid metriğiyle tanımlanan metrik topolojisiyle  $H^n$  üzerinde tanımlanan metrik topolojisi aynıdır. Bu uzaya *hiperbolik n-uzay* denir.  $H^n$  den kendisine olan izometriye hiperbolik izometri denir.

**TEOREM 1.2.11.**  $IR^{n+1}$  uzayının her pozitif Lorentz dönüşümü,  $H^n$  uzayının bir izometrisine kısıtlanır ve  $H^n$  uzayının her izometrisi,  $IR^{n+1}$  uzayının bir tek pozitif Lorentz transformasyonuna genişler. [10]

**İSPAT:**  $\phi: H^n \rightarrow H^n$  dönüşümü izometriktir  $\Leftrightarrow$  Dönüşüm,  $H^n$  üzerinde Lorentz iç çarpımını korur.

Böylece  $IR^{n+1}$  uzayının pozitif bir Lorentz dönüşümünü,  $H^n$  uzayının izometrisine kısıtlar.

Diğer taraftan  $\phi: H^n \rightarrow H^n$  izometri olduğunu varsayalım.  $\phi$ ,  $e_1$  i sabitlediğini düşünelim.  $\phi$  nin bileşenleri  $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_{n+1}$  olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned}
\phi_1(x) &= -\phi(x) \cdot e_1 \\
&= -\langle \phi(x), \phi(e_1) \rangle \\
&= -\langle x, e_1 \rangle \\
&= x_1
\end{aligned}$$

olur. Bu yüzden

$$\phi(x) = (x_1, \phi_2(x), \dots, \phi_{n+1}(x))$$

dir.

$p: H^n \rightarrow IR^n$ ,  $\bar{x} = (x_2, \dots, x_{n+1})$  olan  $p(x) = \bar{x}$  ile tanımlansın. Bu durumda  $p$ , bijeksiyondur.

$\bar{\phi}: IR^n \rightarrow IR^n$ ,  $\bar{\phi}(u) = (\phi_2(p^{-1}(u)), \dots, \phi_n(p^{-1}(u)))$  şeklinde tanımlasın. Bu durumda  $\forall x \in H^n$  için  $\bar{\phi}(\bar{x}) = \overline{\phi(x)}$  dir.  $\langle \phi(x), \phi(y) \rangle = \langle x, y \rangle$  olduğunda

$$-x_1 y_1 + \bar{\phi}(\bar{x}) \bar{\phi}(\bar{y}) = -x_1 y_1 + \bar{x} \bar{y}$$

olur.

Böylece  $\bar{\phi}(\bar{x}) \bar{\phi}(\bar{y}) = \bar{x} \bar{y}$  dir. Bundan dolayı  $\bar{\phi}$ , bir ortoğonal dönüşümdür.  $n \times n$  tipinde ortoğonal A matrisi vardır yani  $\forall u \in \mathbb{R}^n$  için  $Au = \bar{\phi}(\bar{u})$  olur.

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & A & \\ 0 & & & 1 \end{bmatrix} \text{ matris olsun. Bu durumda } \hat{A}, \text{ pozitif Lorentzdir ve } \forall x \in H^n \text{ için}$$

$$\hat{A} = \phi(x) \text{ dir.}$$

$\phi$ ,  $H^n$  uzayının keyfi bir izometrisi olduğunu farzedelim.  $B \in PO(1,n)$  yani  $B\phi(e_1) = e_1$  olduğundan  $B\phi$ ,  $\mathbb{R}^{n+1}$  uzayının pozitif dönüşümüne genişletirken bu durum  $\phi$  için de doğrudur.  $C, D \in PO(1,n)$  ve  $\phi$  yi genişleteceğimizi farz edelim. Bu durumda  $D^{-1}C$ ,  $H^n$  uzayının her noktasını sabitler.  $H^n$  uzayı,  $\mathbb{R}^{n+1}$  uzayının herhangi bir altvektör uzayını içermezken  $D^{-1}C$ ,  $\mathbb{R}^{n+1}$  uzayının hepsini sabitlediğinden içerir. Böylece  $D=C$  olur. Bu da  $\phi$  yi  $\mathbb{R}^{n+1}$  uzayının pozitif Lorentz dönüşümüne genişletir.

**SONUÇ 1.2.4.**  $I(H^n)$  hiperbolik izometrilere grubu,  $PO(1,n)$  pozitif Lorentz grubuna izomorfiktir. [10]

**TANIM 1.2.7.**  $H^n$  uzayının hiperbolik doğrusu,  $\mathbb{R}^{n+1}$  uzayının 2-boyutlu timelike altvektör uzayıyla  $H^n$  uzayının kesişimidir.

$x$  ve  $y$ ,  $H^n$  uzayının ayrık noktaları olsun. Bu durumda  $x$  ve  $y$ ,  $\mathbb{R}^{n+1}$  uzayının 2-boyutlu timelike altuzayını gerer ve böylece

$$L(x,y) = H^n \cap V(x,y)$$

hem  $x$  hem de  $y$  yi içeren  $H^n$  uzayının tek hiperbolik doğrusudur. [10]

**TANIM 1.2.8.**  $x, y \in \mathbb{R}^{n+1}$  vektörleri Lorentz ortonormaldir  $\Leftrightarrow$

$$\|x\|^2 = -1, \langle x, y \rangle = 0 \text{ ve } \|y\|^2 = 1 \text{ dir. [10]}$$

**TEOREM 1.2.12**  $\alpha : [a,b] \rightarrow H^n$  eğrisi olsun. Bu durumda aşağıdakiler denktir:

i)  $\alpha$  eğrisi jeodezik yaydır.

ii)  $x, y \in \mathbb{R}^{n+1}$  Lorentz ortonormal vektörleridir. Bu yüzden

$$\alpha(t) = (\cosh(t-a)x + \sinh(t-a)y)$$

dir.

iii)  $\alpha$  eğrisi,  $\alpha'' - \alpha = 0$  diferansiyel denklemini gösterir. [10]

**İSPAT:**  $A, IR^{n+1}$  uzayının bir Lorentz dönüşümü olsun. O halde  $(A\alpha)' = A\alpha'$  dür.

Bu durumda  $\alpha$ , (iii) denklemini ancak  $A\alpha$  olduğunda gösterir. Dolayısıyla Lorentz dönüşümünü kullanarak gösteririz.  $\alpha$  nın jeodezik yay olduğunu farz edelim.  $t, [a, b]$  aralığında olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned} \theta(\alpha(a), \alpha(b)) &= b - a \\ &= (t - a) + (b - t) \\ &= \theta(\alpha(a), \alpha(t)) + \theta(\alpha(t), \alpha(b)) \end{aligned}$$

olur. Böylece  $\alpha(a), \alpha(b), \alpha(t)$  hiperbolik kolineerdir. Dolayısıyla  $\alpha$  nın görüntüsü  $H^n$  uzayının  $L$  hiperbolik doğrusundadır.

Bu yüzden  $n=1$  olduğunu kabul edebiliriz. O halde,

$$\begin{pmatrix} \cosh s & \sinh s \\ \sinh s & \cosh s \end{pmatrix}$$

formunu Lorentz dönüşümüne uygulayarak  $\alpha(a)$  yı  $e_1$  bazına dönüştürebiliriz.

O halde,

$$\begin{aligned} e_1 \cdot \alpha(t) &= -\alpha(a) \alpha(t) \\ &= \cosh \theta(\alpha(a), \alpha(t)) \\ &= \cosh(t-a) \end{aligned}$$

olur. Böylece  $e_2 \alpha(t) = \pm \sinh(t-a)$  dır.  $\alpha$  sürekliyken  $\forall t$  için “+” veya “-” işareti elde edilir. Bundan dolayı

$$\alpha(t) = (\cosh(t-a)) e_1 + (\sinh(t-a)) (\mp e_2)$$

olur. O halde (i)  $\Rightarrow$  (ii) olduğunu göstermiş oluruz.

$x, y \in IR^{n+1}$  Lorentz ortonormal vektörler olsun. Bu durumda

$$\alpha(t) = (\cosh(t-a))x + (\sinh(t-a))y$$

dir.  $a \leq s \leq t \leq b$  olacak şekilde

$$\begin{aligned} \cosh \theta(\alpha(s), \alpha(t)) &= -\langle \alpha(s), \alpha(t) \rangle \\ &= \cosh(s-a)\cosh(t-a) - \sinh(s-a)\sinh(t-a) \\ &= \cosh(t-s) \end{aligned}$$



elde ederiz.

Böylece  $\theta(\alpha(s), \alpha(t)) = t-s$  dir. O halde  $\alpha$ , jeodezik yaydır. Dolayısıyla (ii)  $\Rightarrow$  (i) olduğunu ifade etmiş oluruz.

$x, y \in \mathbb{R}^{n+1}$  Lorentz ortonormal vektörler olsun . Bu durumda

$$\alpha(t) = (\cosh(t-a)) x + (\sinh(t-a)) y$$

dir.  $\alpha''(t) = (\cosh(t-a)) x + (\sinh(t-a)) y$  olduğundan  $\alpha'' - \alpha = 0$  olur. Dolayısıyla (ii)  $\Rightarrow$  (iii) olur.

(iii) nin varlığını kabul edelim. Bu durumda

$$\alpha(t) = (\cosh(t-a)) \alpha(a) + (\sinh(t-a)) \alpha'(a)$$

dır.  $\langle \alpha(t), \alpha(t) \rangle = -1$  denkleminin diferansiyellenmesinde

$$\begin{aligned} \langle \alpha'(t), \alpha(t) \rangle + \langle \alpha(t), \alpha'(t) \rangle &= 0 \Rightarrow 2 \langle \alpha(t), \alpha'(t) \rangle = 0 \\ &\Rightarrow \langle \alpha(t), \alpha'(t) \rangle = 0 \end{aligned}$$

olduğu görülür. Böylece  $\langle \alpha(a), \alpha'(a) \rangle = 0$  olur.

$$\|\alpha(t)\|^2 = (-\cosh^2(t-a) + \sinh^2(t-a)) \|\alpha'(a)\|^2$$

olduğundan  $\|\alpha(t)\|^2 = 1$  ise  $\|\alpha'(a)\|^2 = 1$  elde ederiz. Böylece  $\alpha(a)$ ,  $\alpha'(a)$  Lorentz ortonormaldir. Dolayısıyla (iii)  $\Rightarrow$  (ii) olur.

**TEOREM 1.2.13.**  $\lambda: \mathbb{R} \rightarrow H^n$  fonksiyonu bir jeodezik doğrudur  $\Leftrightarrow x, y \in \mathbb{R}^{n+1}$

Lorentz ortonormal vektörleri vardır yani

$$\lambda(t) = (\cosh t) x + (\sinh t) y$$

dir. [10]

**İSPAT:**  $x, y \in \mathbb{R}^{n+1}$  Lorentz ortonormal vektörleri var olduğunu yani

$\lambda(t) = (\cosh t) x + (\sinh t) y$  olduğunu kabul edelim. Bu durumda  $\lambda'' - \lambda = 0$  diferansiyel denklemini belirtir. O halde  $a < b$  şeklindeki herhangi  $[a, b]$  aralığına  $\lambda$  nin kısıtlanması, jeodezik yaydır. O halde  $\lambda$ , jeodezik doğrudur.

Diğer taraftan  $\lambda$ , jeodezik doğru olduğunu kabul edelim.  $\lambda$  fonksiyonu  $\lambda'' - \lambda = 0$  diferansiyel denklemini gösterir. Sonuç olarak

$$\lambda(t) = (\cosh t) \lambda(0) + (\sinh t) \lambda'(0)$$

dır. Dolayısıyla  $\lambda(0)$ ,  $\lambda'(0)$  Lorentz ortonormal olduğunu göstermiş oluruz.

**SONUÇ 1.2.5.**  $H^n$  uzayında  $\alpha$  eğrileri jeodeziktir  $\Leftrightarrow$  uzayın hiperbolik doğrularıdır[10]

**İSPAT:**  $H^n$  uzayının her jeodeziğinin hiperbolik doğru olduğunu yukarıda ifade etmiştik. Diğer tarafını ise;  $L$ ,  $H^n$  uzayının hiperbolik doğrusu olsun.  $n=1$  olduğunu kabul edebiliriz. Bu durumda  $L = H^1$  dir.

$$\lambda : \mathbb{R} \rightarrow H^n$$

$$t \mapsto \lambda(t) = (\cosh t) e_1 + (\sinh t) e_2$$

olarak tanımlanır. Bu durumda  $\lambda$ ,  $H^1$  uzayı üzerinde jeodezik doğru dönüşümüdür. Bu yüzden  $L$ , bir jeodeziktir.

**TANIM 1.2.9.**  $H^n$  uzayının  $m$ -hiperbolik düzlemi,  $\mathbb{R}^{n+1}$  uzayının  $(m+1)$  boyutlu timelike altvektör uzayıyla  $H^n$  uzayının kesişimidir.

$H^n$  uzayının 1-hiperbolik düzlemi,  $H^n$  uzayının hiperbolik doğrusudur.  $H^n$  uzayının  $(n-1)$  hiperbolik düzlemine  $H^n$  uzayının *hiperdüzlemi* denir. [10]

$x, y \in \mathbb{R}^{n+1}$  spacelike vektör olsun. Bu durumda  $x$  tarafından gerilen  $\langle x \rangle$  altvektör uzayının Lorentz tümleyeni,  $\mathbb{R}^{n+1}$  uzayının  $n$ -boyutlu timelike altvektör uzayıdır. Böylece  $P = \langle x \rangle^\perp \cap H^n$ ,  $H^n$  uzayının hiperdüzlemidir.  $P$  hiperdüzlemine,  $x$  e Lorentz ortogonal  $H^n$  uzayının hiperdüzlemidir.

**TEOREM 1.2.14.**  $x, y \in \mathbb{R}^{n+1}$  lineer bağımsız spacelike vektörleri olsun. Aşağıdakiler birbirine denktir:

- (1)  $x$  ve  $y$  vektörleri  $|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \|y\|$  denklemini belirtir.
- (2)  $x$  ve  $y$  tarafından gerilen  $V$  altvektör uzayı spacelikettir.
- (3) Sırasıyla  $x$  ve  $y$  vektörlerine Lorentz ortogonal olan  $H^n$  uzayının  $P$  ve  $Q$  hiperdüzlemleriyle kesişir.[10]

**İSPAT:** (1) denliğini sağladığını kabul edelim. Bu durumda  $s$  ve  $t$  sıfır olmayan reel sayılar için,

$$\begin{aligned} \|sx + ty\|^2 &= \|sx\|^2 + 2st\langle x, y \rangle + \|ty\|^2 \\ &> \|sx\|^2 - 2st\langle x, y \rangle + \|ty\|^2 \\ &= (\|sx\| - \|ty\|)^2 \geq 0 \end{aligned}$$

elde ederiz. Böylece  $V$  spacelike olur.

Diğer yandan (2) denkleğini ele alırsak bu durumda  $V$  üzerinde Lorentz iç çarpımı pozitif tanımlıdır. Dolayısıyla  $V$  deki Cauchy eşitsizliğini sağlar ve bu yüzden (1) denkliği elde edilir. Böylece (1) ve (2) denktir.

olduğundan (2) ve (3) denktir.

**TANIM 1.2.15. (Space-like Vektörler Arasındaki Space-like Açığı)**

$x, y \in IR^{n+1}$  space-like altvektör uzayını geren space-like vektörler olsun.

Bu durumda

$$|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \|y\|$$

eşitliğini elde ederiz  $\Leftrightarrow x$  ve  $y$  lineer bağımlıdır. Dolayısıyla  $0$  ve  $\pi$  arasında bir tek  $(x, y)$  reel sayısı vardır yani

$$\langle x, y \rangle = \|x\| \|y\| \cos \theta(x, y)$$

dir.  $x$  ve  $y$  arasındaki Lorentz space-like açığı  $\theta(x, y)$  olarak tanımlanır.  $\theta(x, y) = 0 \Leftrightarrow x$  ve  $y$  birbirinin pozitif skalar katı olduğu önemlidir.  $\theta(x, y) = \pi/2 \Leftrightarrow x$  ve  $y$  Lorentz ortogonaldir ve  $\theta(x, y) = \pi \Leftrightarrow x$  ve  $y$  birbirlerinin negatif skalar katıdır.

$\lambda, \mu : IR \rightarrow H^n$ ,  $\lambda(0) = \mu(0)$  olan jeodezik doğrular olsun. Bu durumda  $\lambda'(0)$  ve  $\mu'(0)$ ,  $IR^{n+1}$  uzayının bir space-like altvektör uzayını gerer.  $\lambda$  ve  $\mu$  arasındaki hiperbolik açığı,  $\lambda'(0)$  ve  $\mu'(0)$  arasındaki Lorentz space-like açığı olarak tanımlanır.

$P$ ,  $H^n$  uzayının hiperdüzlemi olsun ve  $\lambda : IR \rightarrow H^n$  bir jeodezik doğru olsun yani  $\lambda(0) \in P$  olsun. Bu durumda  $L = \lambda(IR)$  hiperbolik doğrusu  $P$  ile Lorentz ortogonaldir denir  $\Leftrightarrow P$ ,  $\lambda'(0)$  e Lorentz ortogonal  $H^n$  uzayının hiper düzlemidir.

**TEOREM 1.2.16.**  $x, y \in IR^{n+1}$  lineer bağımsız spacelike vektörleri olsun.

Bu durumda aşağıdakiler denktir:

- (1)  $x$  ve  $y$  vektörleri  $|\langle x, y \rangle| \geq \|x\| \|y\|$  eşitsizliğini sağlar.
- (2)  $V$  altvektör uzayı,  $x$  ve  $y$  time-like vektörleriyle gerilir.
- (3) Sırasıyla  $x$  ve  $y$  vektörlerine Lorentz ortogonal  $H^n$  uzayının  $P$  ve  $Q$  hiperdüzlemleri ayrıktır ve ortak bir Lorentz ortogonal hiperbolik doğrusuna sahiptir. [10]

**İSPAT:**  $x$ 'in skalar katları için ayrı tutulursa  $V$  nin her elemanı, bazı  $t$  reel sayıları için  $tx+y$  formunun elemanlarının skalar katıdır.

$$\|tx + y\|^2 = t^2\|x\|^2 + 2t\langle x, y \rangle + \|y\|^2$$

ifadesini,  $t$  deki bir quadratik polinom olduğuna dikkat edelim. Bu polinom, negatif değerler alır  $\Leftrightarrow 4(\langle x, y \rangle)^2 - 4\|x\|^2\|y\|^2$  diskriminantı pozitifdir. Böylece (1) ve (2) denktir.

$V$  nin time-like olduğunu farz edelim. Bu durumda  $V^L$  space-likettir. Bu durumda

$$V^L = \langle x \rangle^L \cap \langle y \rangle^L$$

olduğundan  $P$  ve  $Q$  ayrık olduğunu elde ederiz.  $N = V \cap H^n$  bir hiperbolik doğrusudur ve  $V \cap \langle x \rangle^L$ ,  $\mathbb{R}^{n+1}$  uzayının 1-boyutlu altuzayı olduğuna dikkat edelim. Ayrıca

$$\langle (tx + y), x \rangle = 0$$

denklemini

$$t = -\langle x, y \rangle / \|x\|^2$$

tek çözümüne sahiptir. Üstelik,

$$\|tx + y\|^2 = -\frac{\langle x, y \rangle^2}{\|x\|^2} + \|y\|^2 < 0$$

olur. Dolayısıyla  $V \cap \langle x \rangle^L$  time-likettir. Böylece  $N \cap P$

$$u = \frac{-\langle x, y \rangle(x/\|x\|) + \|x\|y}{\mp \sqrt{(\langle x, y \rangle)^2 - \|x\|^2\|y\|^2}}$$

$u$  pozitif time-like olarak seçilen artı ya da eksi işareti olan tekil noktasıdır. Aynı şekilde  $N \cap Q$ ,  $V$  tekil bir noktasıdır.  $\lambda : \mathbb{R} \rightarrow H^n$  jeodezik doğrusu yani  $\lambda(0) = u$  ve  $\lambda(\mathbb{R}) = N$  olsun.  $\lambda'(0)$  ve  $x$ ,  $u \in V$  ye ikisi de Lorentz ortogonal olduğunda  $\lambda'(0)$ ,  $x$  in bir skalar katı olduğunu elde edilir. Böylece  $N$ ,  $P$  ye Lorentz ortogonaldir. Aynı şekilde  $N$ ,  $Q$  ya ortogonaldir.

Diğer yandan (3) denklemini sağladığını kabul edelim.  $N$ ;  $P$  ve  $Q$  ya ortak Lorentz ortogonal hiperbolik doğrusu olsun. Bu durumda  $N = W \cap H^n$  olan  $\mathbb{R}^{n+1}$  uzayının 2-boyutlu bir  $W$  time-like altvektör uzayı vardır.  $N$ ,  $P$  ye Lorentz ortogonalken  $x \in W$  olduğunu elde ederiz. Aynı şekilde  $y \in W$  dir. Dolayısıyla  $V = W$  ve bu yüzden  $V$  time-likettir.

**Uyarı:** Teorem 1.2.16. nin ispatı,  $N$  ortak bir Lorentz ortogonal hiperbolik doğrusu ile  $P$  ve  $Q$ ,  $H^n$  uzayının ayrik düzlemleri ise bu durumda  $N$  tektir; ayrıca  $x, y \in IR^{n+1}$   $P$ ,  $Q$  ya sırasıyla Lorentz ortogonal space-like vektörleri ise bu durumda  $x$  ve  $y$ ,  $N$  nin tanjant vektörleri olduğunu gösterir.

**TANIM 1.2.16. (Space-like Vektörler Arasındaki Time-like Açısı)**

$x, y \in IR^{n+1}$  timelike altuzayını geren spacelike vektörler olsun.

Teorem 1.2.16. ile  $|\langle x, y \rangle| \geq \|x\| \|y\|$  olduğunu biliyoruz. Dolayısıyla,

$$|\langle x, y \rangle| = \|x\| \|y\| \cosh \theta(x, y)$$

olan bir tek pozitif  $\theta(x, y)$  reel sayısı vardır.  $x$  ve  $y$  arasındaki Lorentz time-like açısı,  $\theta(x, y)$  olarak tanımlanır. Aşağıdaki teoremde  $\theta(x, y)$  nin geometrik yorumunu verilir.

**TEOREM 1.2.17.**  $x, y \in IR^{n+1}$  timelike altvektör uzayını geren spacelike vektörler olsun.  $P, Q$  sırasıyla  $x, y$  ye Lorentz ortogonal  $H^n$  uzayının hiperdüzlemleri olsun. Bu durumda  $\theta(x, y)$ ,  $P$  ve  $Q$  ya Lorentz ortogonal  $N$  hiperbolik doğru boyunca  $P$  den  $Q$  ya hiperbolik uzaklığıdır. Ayrıca  $\langle x, y \rangle < 0 \Leftrightarrow x$  ve  $y$ ,  $N$  nin tersi yönünde yönlendirilmiş tanjant vektörleridir. [10]

**İSPAT:**  $P \cap N$  noktası

$$u = \frac{-\langle x, y \rangle(x/\|x\|) + \|x\|y}{\mp \sqrt{(\langle x, y \rangle)^2 - \|x\|^2 \|y\|^2}}$$

ve  $Q \cap N$  noktası

$$v = \frac{\|y\|x - \langle x, y \rangle(y/\|y\|)}{\mp \sqrt{(\langle x, y \rangle)^2 - \|x\|^2 \|y\|^2}}$$

dır.

$$\begin{aligned} \cosh d_H(u, v) &= -\langle u, v \rangle \\ &= \frac{-((\langle x, y \rangle)^3 / \|x\| \|y\| + \langle x, y \rangle)(\|x\| \|y\|)}{\mp \sqrt{(\langle x, y \rangle)^2 - \|x\|^2 \|y\|^2}} \\ &= \frac{-((\langle x, y \rangle)^3 - \langle x, y \rangle \|x\|^2 \|y\|^2) / (\|x\| \|y\|)}{\mp \sqrt{(\langle x, y \rangle)^2 - \|x\|^2 \|y\|^2}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{-\langle x, y \rangle}{\mp \|x\| \|y\|} \\
&= \frac{|\langle x, y \rangle|}{\mp \|x\| \|y\|} \\
&= \cosh \theta(x, y)
\end{aligned}$$

Ayrıca  $\langle u, v \rangle$  nin hesaplaması,  $u$  ve  $v$  aynı işarete sahiptir  $\Leftrightarrow \langle x, y \rangle < 0$  olduğunu gösterir.  $u$  ve  $v$ ,  $x$  ve  $y$  ya da  $-x$  ve  $-y$  arasında  $V$  nin kuadrantıdır  $\Leftrightarrow u$  ve  $v$  nin  $-\langle x, y \rangle$  katsayısı pozitiftir. Böylece  $x$  ve  $y$ ,  $N$  nin ters yönlü yönlendirilmiş tanjant vektörleridir  $\Leftrightarrow \langle x, y \rangle < 0$  dır.

$x, y \in \mathbb{R}^{n+1}$  spacelike vektörler olsun.  $P, Q$  sırasıyla  $x, y$  ye Lorentz ortogonal  $H^n$  uzayının düzlemleri olsun. Bu durumda  $P$  ve  $Q$  sonsuzda karşılaşır  $\Leftrightarrow \langle x \rangle^L \cap \langle y \rangle^L$  lightlike'tir.  $P$  ve  $Q$  sonsuzda karşılaşır ise  $P$  ve  $Q$  ayrıktır, fakat orijinde bakıldığında bunlar  $\langle x \rangle^L \cap \langle y \rangle^L$  nin 1-boyutlu lightlike altuzayının pozitif ideal son noktasında karşılaştığı görülür.

**TEOREM 1.2.18.**  $x, y \in \mathbb{R}^{n+1}$  lineer bağımsız spacelike vektörleri olsun. Bu durumda aşağıdakiler denktir:

- (1)  $x$  ve  $y$  vektörleri  $|\langle x, y \rangle| = \|x\| \|y\|$  eşitliğini sağlar.
- (2)  $V$  altvektör uzayı,  $x$  ve  $y$  lightlike tarafından gerilir.
- (3)  $x$  ve  $y$  ye Lorentz ortogonal  $H^n$  uzayının  $P$  ve  $Q$  hiperdüzlemleri sırasıyla sonsuzda karşılaşır. [10]

**TEOREM 1.2.20.**  $x, y \in \mathbb{R}^{n+1}$  lineer bağımsız spacelike vektör yani  $x, y$  lightlike tarafından gerilen  $V$  altvektör uzayı olsun. Bu durumda  $\langle x, y \rangle < 0 \Leftrightarrow x, y ; V$  nin 1-boyutlu lightlike altuzayının ters tarafındadır. [10]

**İSPAT:**  $\|tx + y\| = 0$  denklemi  $t = -\langle x, y \rangle / \|x\|^2$  tek çözüme sahip

$$t^2 \|x\|^2 + 2\langle x, y \rangle t + \|y\|^2 = 0$$

kuadrik denklemine denktir.

$$-\langle x, y \rangle (x / \|x\|^2) + y$$

lightlike vektörü,  $x$  ve  $y$  arasında  $V$  nin kuadrantıdır  $\Leftrightarrow \langle x, y \rangle < 0$  dir. Dolayısıyla,  $x$  ve  $y$ ,  $V$  nin 1-boyutlu lightlike altuzayının ters tarafındadır  $\Leftrightarrow \langle x, y \rangle < 0$  dir.

**TEOREM 1.2.21.**  $y$ ,  $H^n$  uzayının bir noktası ve  $P$ ,  $H^n$  uzayının bir hiperdüzlemi olsun. Bu durumda  $P$  ye Lorentz ortogonal  $y$  boyunca geçen  $H^n$  uzayının tek  $N$  hiperbolik doğrusudur. [10]

**İSPAT:**  $x$ ,  $P$  ye Lorentz ortogonal birim spacelike vektör olsun ve  $V$ ,  $x$  ve  $y$  tarafından gerilen altuzay olsun. Bu durumda  $N = V \cap H^n$ ,  $y$  boyunca geçen bir hiperbolik doğrusudur.

$$\langle (tx + y), x \rangle = 0$$

denklemini,  $t = -\langle x, y \rangle$  çözümdür. Dolayısıyla,

$$w = \frac{-\langle x, y \rangle x + y}{\mp \sqrt{(\langle x, y \rangle)^2 + 1}},$$

$P \cap N$  nin bir noktasıdır.  $\lambda : \mathbb{R} \rightarrow H^n$ ,  $\lambda(\mathbb{R}) = N$  ve  $\lambda(0) = w$  olan bir jeodezik doğru olsun.  $w$  ve  $x$  ortonormal vektörler iken

$$\lambda(t) = (\cosh t) w \mp (\sinh t) x$$

elde ederiz. Dolayısıyla  $\lambda'(0) = \mp x$  dir. Bu yüzden  $N, P$  ye Lorentz ortogonaldir.

$N, P$  ye ortogonal ve  $y$  boyunca geçen bir hiperbolik doğru olduğunu kabul edelim.  $\lambda : \mathbb{R} \rightarrow H^n$ ,  $\lambda(\mathbb{R}) = N$  ve  $\lambda(0) \in P$  olacak şekilde bir jeodezik doğru olsun. Bu durumda  $\lambda'(0)$ ,  $P$  ye Lorentz ortogonaldir. Dolayısıyla  $\lambda'(0) = \mp x$  olur.  $W$ ,  $N = W \cap H^n$  olan 2-boyutlu timelike altuzay olsun.  $x, y \in W$  iken  $W = V$  olarak elde ederiz. Böylece  $N$ , tektir.

**TANIM 1.2.16.**  $\mathbb{R}^{n+1}$  uzayında  $x$ , spacelike vektör ve  $y$  bir pozitif timelike vektör olsun. Bu durumda

$$|\langle x, y \rangle| = \|x\| \|y\| \sinh \theta(x, y)$$

olan bir tek  $\theta(x, y)$  negatif olmayan reel sayı vardır.  $\theta(x, y)$  açısına,  $x$  ve  $y$  arasındaki *Lorentz timelike açısı* denir. [10]

**TEOREM 1.2.22.**  $x, y \in \mathbb{R}^{n+1}$ ,  $x$  bir spacelike vektör ve  $y$  bir pozitif timelike vektör olsun.  $P$ ,  $x$  e Lorentz ortogonal  $H^n$  uzayının hiperdüzlemi olsun. Bu durumda  $\theta(x, y)$ ,

$y/\|y\|$  boyunca geçen  $N$  hiperbolik doğrusu boyunca ölçülen  $y/\|y\|$  den  $P$  ye hiperbolik uzaklıktır. Ayrıca  $\langle x, y \rangle < 0 \Leftrightarrow x$  ve  $y$ ,  $P$  ile gerilen  $\mathbb{R}^{n+1}$  uzayının hiperdüzleminin ters tarafındadır. [10]

**İSPAT:**  $v = y/\|y\|$  olsun.  $P \cap N$  noktası

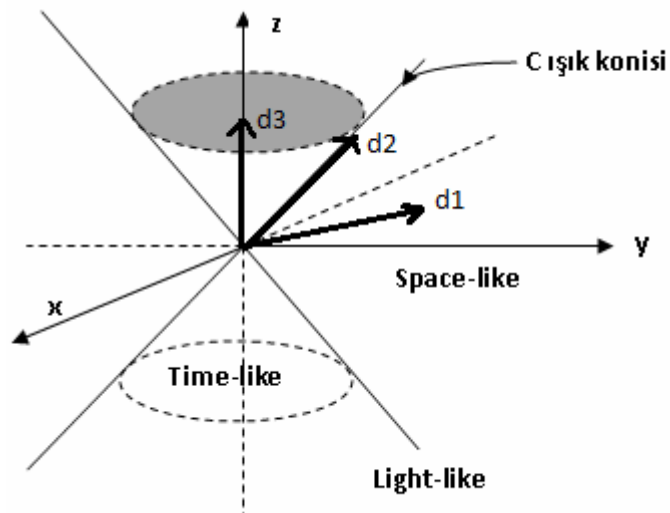
$$u = \frac{-\langle x, y \rangle(x/\|x\|) + \|x\|y}{\mp \sqrt{\langle x, y \rangle^2 - \|x\|^2 \|y\|^2}}$$

olduğundan

$$\begin{aligned} \cosh d_H(u, v) &= -\langle u, v \rangle \\ &= \frac{\sqrt{\langle x, y \rangle^2 - \|x\|^2 \|y\|^2}}{\|x\| \|y\|} \\ &= \cosh \theta(x, y) \end{aligned}$$

elde edilir. Ayrıca  $-\langle u, v \rangle$  hesaplamasında  $u$  nun  $+$  işaretli olduğunu gösterir.  $u$ ,  $x$  ve  $y$  tarafından gerilen 2-boyutlu  $V$  timelike altuzayıdır.  $U$ ,  $x$  ve  $y$  arasındaki  $V$  nin kuadrantıdır  $\Leftrightarrow u$  nun  $-\langle x, y \rangle$  katsayısı pozitifdir. Böylece  $x$  ve  $y$ ,  $P$  tarafından gerilen  $\mathbb{R}^{n+1}$  uzayının hiperdüzleminin ters tarafları üzerindedir  $\Leftrightarrow \langle x, y \rangle < 0$  dir.

**ÖRNEK 1.2.1.**  $K \left\{ x^2 + y^2 = \frac{z^2}{4} \right\}$  konisini alalım.



$P_1(1,1,1)$  doğrultmanı orijinden geçen doğru

$$d_1 : \frac{x}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z}{1}$$



olur. Bu da  $d_1$  doğrusunun doğrultmanı olan  $\vec{d}_1(1,1,1)$  vektörü bir spacelike vektör olarak alınır.

$P_2(0,2,4)$  koni üzerinde bir nokta alıp,

$$d_2 : \left\{ x = 0, \frac{y}{2} = \frac{z}{4} \right\}$$

alınarak  $\vec{d}_2(0,2,4)$  doğrultman vektörü bir lightlike vektör olur.

Diğer yandan  $P_3(0,0,1)$  noktası için koninin doğrultmanı olan  $e_3(0,0,1)$  vektör doğrultmanı olacak şekilde

$$d_3 : \{x = y = 0, z = 1\}$$

doğrusu ele alınırsa burada da  $(0,0,1)$  vektörü timelike vektör olur.

Şimdi  $\vec{S} = (1,1,1)$ ,  $\vec{T} = (0,0,1)$ ,  $\vec{L} = (0,2,4)$  olmak üzere

a) S-T açısını bulalım;

$$\begin{aligned} \frac{\langle (1,1,1), (0,0,1) \rangle}{\|(1,1,1)\| \|(0,0,1)\|} &= \sinh \theta \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{-1+1+1}\sqrt{1}} = \sinh \theta \\ &\Rightarrow 1 = \sinh \theta \\ &\Rightarrow \theta = \ln(1 + \sqrt{2}) \end{aligned}$$

olur.

b) Diğer yandan bir d doğrusu

$$d : \left\{ \frac{x-5}{3} = \frac{y-5}{4} = z \right\}$$

verilsin. Doğrultmanı olan  $\vec{d}(3,4,1)$  vektörü spacelike bir vektör olur. bu

vektörle,  $\vec{S}$  arasındaki açıyı bulalım.

$$\begin{aligned} \text{S-S için } \frac{\langle (3,4,1), (1,1,1) \rangle}{\|(3,4,1)\| \|(1,1,1)\|} &= \cos \theta \Rightarrow \frac{-3+4+1}{\sqrt{-9+16+1}\sqrt{-1+1+1}} = \cos \theta \\ &\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} = \cos \theta \\ &\Rightarrow \theta = \pi/4 \end{aligned}$$

olur.

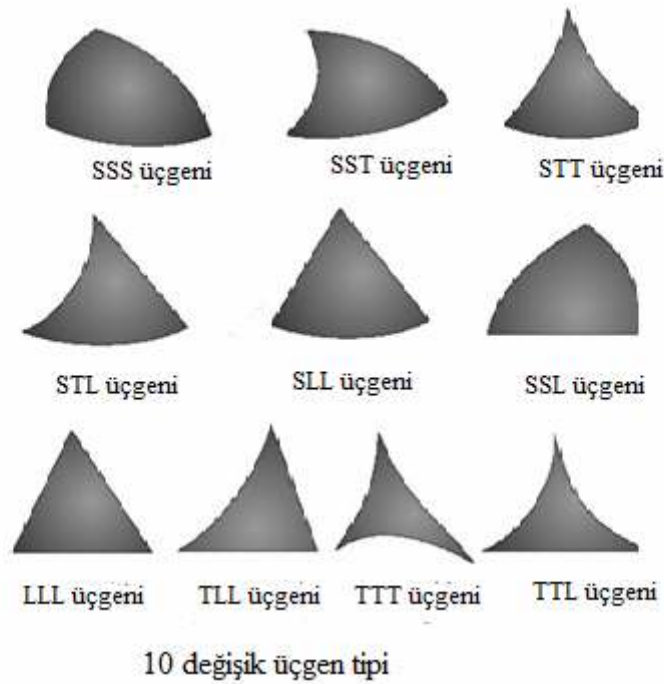
c)  $d : \left\{ x = 4y = \frac{z}{4} \right\}$  doğrusunu ele alalım. Bu doğrunun doğrultmanı  $\vec{d}(1, \frac{1}{4}, 4)$

vektörü olur. Bu bir timelike vektör belirtir.  $\vec{d}$  ile T arasındaki açı ise;

$$\begin{aligned} \text{T-T için } \frac{\left| \left\langle \left(1, \frac{1}{4}, 4\right), (0,0,1) \right\rangle \right|}{\left\| \left(1, \frac{1}{4}, 4\right) \right\| \left\| (0,0,1) \right\|} &= -\cosh \theta \Rightarrow \frac{4}{\sqrt{-1 + \frac{1}{16} + 16\sqrt{1}}} = -\cosh \theta \\ &\Rightarrow -\frac{16}{\sqrt{241}} = \cosh \theta \\ &\Rightarrow \theta = \frac{16 \pm \sqrt{15}}{\sqrt{241}} \end{aligned}$$

olur.

### ÖRNEK 1.2.2.



ÖRNEK 1.2.3. Yukarıdaki şekilleri örneklerle ifade edelim.

$$\left. \begin{aligned} y &= -x^2 + 4x + 16 \\ y &= (x-2)^4 \end{aligned} \right\} \text{SSS}$$

$$\left. \begin{aligned} y &= x^2 - 4x + 16 \\ y &= (x-2)^4 \end{aligned} \right\} \text{SST}$$

$$\left. \begin{array}{l} y = 16 \\ y = (x-2)^4 \end{array} \right\} SSL$$

$$\left. \begin{array}{l} x \in [0,2] \text{ için } y = (x-2)^4 \\ x \in [2,4] \text{ için } y = 8x-16 \\ x \in [0,4] \text{ için } y = x^2 - 4x + 16 \end{array} \right\} STL$$

$$\left. \begin{array}{l} y = -16 \\ y = -(x-2)^4 \end{array} \right\} TTL$$

$$\left. \begin{array}{l} y = 4x^2 - 16x - 16 \\ y = -(x-2)^4 \end{array} \right\} STT$$

$$\left. \begin{array}{l} y = -4x^2 + 16x - 16 \\ y = -(x-2)^4 \end{array} \right\} TTT$$

$$\left. \begin{array}{l} y = -4x^2 + 16x - 16 \\ y = 8x - 16 \\ y = -8x + 16 \end{array} \right\} TLL$$

$$\left. \begin{array}{l} y = -16 \\ y = 8x - 16 \\ y = -8x + 16 \end{array} \right\} LLL$$

### 1.3. $E_1^4$ Minkowski 4-uzayında Yay Uzunluğu

Bu bölümde, öncelikle  $\alpha$  eğrisinin timelike, spacelike ve lightlike olması durumlarını tanımlayacağız. Daha sonra, yay uzunluğu kavramını vereceğiz. Bu bize Lorentz uzayı ile hiperbolik yay uzunluğu kıyaslaması imkanını sunar.

**TANIM 1.3.1.**  $\alpha \in E_1^4$  Minkowski 4-uzayında bir eğri olsun. Böylece  $\alpha$  eğrisinin hız vektörü  $\dot{\alpha}$  olmak üzere

- i)  $\langle \dot{\alpha}, \dot{\alpha} \rangle < 0$  ise  $\alpha$  timelike eğri
- ii)  $\langle \dot{\alpha}, \dot{\alpha} \rangle > 0$  ise  $\alpha$  spacelike eğri
- iii)  $\langle \dot{\alpha}, \dot{\alpha} \rangle = 0$  ise  $\alpha$  null eğri

denir.

### TANIM 1.3.2. (Hiperbolik Yay Uzunluğu)

Hiperbolik yay uzunluğu ile Lorentz uzunluğunu karşılaştıralım. Aynı olup olmadığını görelim. Önce  $H^n$  uzayının elemanlarına değinelim.

$x, y \in H^n$  noktaları olsun.

$$\begin{aligned}\|x - y\|^2 &= \|x\|^2 - 2\langle x, y \rangle + \|y\|^2 \\ &\geq -2 - 2\|x\|\|y\|\end{aligned}$$

eşitliği elde ederiz  $\Leftrightarrow x = y$  dir. Dolayısıyla,

$$d_L(x, y) = \|x - y\|$$

Lorentz uzaklık fonksiyonu,  $H^n$  uzayındaki metrik için ilk üç aksiyomu sağlar. Fakat üçgen eşitsizliğini sağlamaz; buna rağmen  $d_L$ ,  $H^n$  uzayındaki eğrinin uzunluğunu tanımlar.

$\gamma: [a, b] \rightarrow H^n$  eğrisi olsun ve  $P = \{t_0, t_1, \dots, t_m\}$ ,  $[a, b]$  aralığının bölümü olsun.  $\gamma$  eğrisinin  $P$  tanımlı uzunluğu

$$\ell_L(\gamma, P) = \sum_{i=1}^m \|\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})\|$$

olarak tanımlanır.  $\gamma$  eğrisi *Lorentz düzeltilebilirdir* denir  $\Leftrightarrow Q \leq P$  ise bu durumda

$$|\ell(\gamma) - \ell_L(\gamma, Q)| < \varepsilon$$

olan  $[a, b]$  aralığının  $\forall \varepsilon > 0$  için  $P$  parçasının  $\ell(\gamma)$  reel sayısı vardır.

$\ell(\gamma)$  var ise tektir çünkü  $P$  ve  $Q$ ,  $[a, b]$  aralığının parçaları ise  $R \leq P$ ,  $Q$  olan  $[a, b]$  aralığının bir  $R$  parçası vardır.

$\gamma$ , Lorentz rektefiyen yani sonsuz ise  $\gamma$  eğrisinin  $\|\gamma\|$  Lorentz uzunluğu  $\ell(\gamma)$  olarak ifade edilir.[10]

**TEOREM 1.3.1**  $\gamma: [a, b] \rightarrow H^n$  bir eğri olsun. Bu durumda  $\gamma \in H^n$  rektefiyendir  $\Leftrightarrow \gamma$ , Lorentz rektefiyendir ayrıca  $\gamma$  eğrisinin hiperbolik uzunluğu,  $\gamma$  eğrisinin Lorentz uzunluğuyla aynıdır. [10]

**İSPAT:**  $x, y \in H^n$  olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned}\|x - y\|^2 &= \|x\|^2 - 2\langle x, y \rangle + \|y\|^2 \\ &= 2(\cosh \theta(x, y) - 1)\end{aligned}$$

olur.  $\cosh \theta \geq 1 + (\frac{\theta^2}{2})$  olduğundan

$$\|x - y\| \geq \theta(x, y)$$

şeklinde ifade edilir.  $\gamma$  eğrisinin Lorentz rektefiyen olduğunu kabul edelim.  $Q \leq P$  ise

$$\|\gamma\| - \ell_L(\gamma, Q) < 1$$

olan  $[a, b]$  aralığının bir  $P$  kısmı vardır. Dolayısıyla her  $Q \leq P$  için

$$\ell_H(\gamma, Q) \leq \ell_L(\gamma, Q) \leq \|\gamma\| + 1$$

elde edilir. Böylece  $\gamma$  rektefiyendir. Taylor teoremini kullanarak,

$$\cosh \theta \leq 1 + \frac{n^2}{2} + \frac{n^4}{24} \cosh \theta$$

elde edilir. Dolayısıyla  $\cosh \theta \leq 12$  ise

$$\|x - y\| \leq \theta(x, y) \sqrt{1 + \theta^2(x, y)}$$

dir.

$\gamma$  rektefiyen ve  $\varepsilon > 0$  olsun. bu durumda

$$|\gamma|_H - \ell_H(\gamma, P) < \varepsilon$$

olan  $[a, b]$  aralığının bir  $P$  kısmı vardır.

$\delta > 0$  ve  $\mu(\gamma, \delta) = \sup\{\theta(\gamma(s), \gamma(t)) : |s - t| \leq \delta\}$  kümesi olsun.  $\gamma$ , düzgün sürekli olduğunda  $\mu(\gamma, \delta)$ ,  $\delta$  ile sifıra gider. Dolayısıyla  $\delta > 0$  olacak şekilde  $\cosh \mu(\gamma, \delta) \leq 12$  ve  $|\gamma|_H \sqrt{1 + \mu^2(\gamma, \delta)} < |\gamma|_H + \varepsilon$  vardır.

$|P| \leq \delta$  alalım. Bu durumda her  $Q \leq P$  için

$$\begin{aligned} |\gamma|_H - \varepsilon &< \ell_H(\gamma, Q) \\ &\leq \ell_L(\gamma, Q) \\ &\leq \ell_H(\gamma, Q) \sqrt{1 + \mu^2} \\ &< |\gamma|_H + \varepsilon \end{aligned}$$

elde edilir. Dolayısıyla her  $Q \leq P$  için

$$\|\gamma\| - \ell_L(\gamma, Q) < \varepsilon$$

dir. Böylece  $\gamma$ , Lorentz rektefiyendir ve  $\|\gamma\| = |\gamma|_H$  dir.

$\gamma : [a, b] \rightarrow H^n$  diferansiyellenebilir eğri olsun.  $\langle \gamma(t), \gamma(t) \rangle = -1$  iken  $\langle \gamma(t), \gamma'(t) \rangle = 0$  olur. Dolayısıyla  $\gamma'(t)$ ,  $\forall t$  için spacelike olduğu elde edilir.

**TEOREM 1.3.2.**  $\gamma: [a, b] \rightarrow H^n$  bir  $C^1$  eğrisi olsun. Bu durumda  $\gamma$  rektefiyendir ve hiperbolik uzunluğu,

$$\|\gamma\| = \int_a^b \|\gamma'(t)\| dt$$

formülünü verir. [10]

**İSPAT:**  $f: [a, b]^{n+1} \rightarrow IR$

$$x \mapsto f(x) = \left| -\gamma_1'(x_1)^2 + \dots + \gamma_{n+1}'(x_{n+1})^2 \right|^{1/2}$$

olarak tanımlansın. Bu durumda  $f$  süreklidir.  $[a, b]^{n+1}$  kompakt olduğundan

$$\{f(x) - f(y) : x, y \in [a, b]^{n+1}\}$$

kümesi sınırlıdır.  $\delta > 0$  ve

$$\mu(f, \delta) = \sup\{f(x) - f(y) : |x_i - y_i| \leq \delta \quad i = 1, 2, \dots, n+1 \text{ için}\}$$

kümesi olarak alalım.  $P = \{t_0, t_1, \dots, t_m\}$ ,  $|P| \leq \delta$  olacak şekilde  $[a, b]$  aralığının bir parçasıdır. Ortalama değer teoremini kullanarak

$$\gamma_i(t_j) - \gamma_i(t_{j-1}) = \gamma_i'(s_{ij})(t_j - t_{j-1})$$

olacak şekilde  $t_{j-1}$  ve  $t_j$  arasında bir  $s_{ij}$  reel sayısı vardır. Bu durumda  $s_j = (s_{1,j}, \dots, s_{n+1,j})$  olan

$$\|\gamma_i(t_j) - \gamma_i(t_{j-1})\| = f(s_j)(t_j - t_{j-1})$$

elde edilir. Dolayısıyla,

$$\begin{aligned} & \left| \|\gamma_i(t_j) - \gamma_i(t_{j-1})\| - \|\gamma'(t_j)\| \|\gamma_i(t_j) - \gamma_i(t_{j-1})\| \right| \\ &= \left| f(s_j) - \|\gamma'(t_j)\| \right| (t_j - t_{j-1}) \\ &\leq \mu(f, \delta)(t_j - t_{j-1}) \end{aligned}$$

olur.

$$s(\gamma, P) = \sum_{j=1}^m \|\gamma'(t_j)\| (t_j - t_{j-1})$$

kümesidir. Bu durumda

$$\begin{aligned}
|\ell_L(\gamma, P) - s(\gamma, P)| &\leq \sum_{j=1}^m \left| \|\gamma_i(t_j) - \gamma_i(t_{j-1})\| - \|\gamma'(t_j)\| \|\gamma_i(t_j) - \gamma_i(t_{j-1})\| \right| \\
&\leq \mu(f, \delta)(t_j - t_{j-1}) \\
&= \mu(f, \delta)(b - a)
\end{aligned}$$

elde ederiz. Daha sonra ise

$$\begin{aligned}
\left| \int_a^b \|\gamma'(t)\| dt - s(\gamma, P) \right| &= \left| \sum_{j=1}^m \int_{t_{j-1}}^{t_j} (\|\gamma'(t)\| - \|\gamma'(t_j)\|) dt \right| \\
&\leq \sum_{j=1}^m \left| \int_{t_{j-1}}^{t_j} (\|\gamma'(t)\| - \|\gamma'(t_j)\|) dt \right| \\
&\leq \sum_{j=1}^m \int_{t_{j-1}}^{t_j} (\|\gamma'(t)\| - \|\gamma'(t_j)\|) dt \\
&\leq \sum_{j=1}^m \int_{t_{j-1}}^{t_j} \mu(f, \delta) dt \\
&= \mu(f, \delta)(b - a)
\end{aligned}$$

olur. Böylece

$$\begin{aligned}
\left| \int_a^b \|\gamma'(t)\| dt - \ell_L(\gamma, P) \right| &\leq \left| \int_a^b \|\gamma'(t)\| dt - s(\gamma, P) \right| + |s(\gamma, P) - \ell_L(\gamma, P)| \\
&\leq 2 \mu(f, \delta)(b - a)
\end{aligned}$$

olur.  $[a, b]^{n+1}$  kompakt olduğundan  $f : [a, b]^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}$  düzgün süreklidir. Bundan dolayı  $\mu(f, \delta)$ ,  $\delta$  ile sıfıra gider. Dolayısıyla,

$$\lim_{|P| \rightarrow 0} \ell_L(\gamma, P) = \int_a^b \|\gamma'(t)\| dt$$

olur.

$\gamma : [a, b] \rightarrow H^n$  bir eğri olsun.  $dx = (dx_1 + dx_2 + \dots + dx_{n+1})$  ve

$\|dx\| = (-dx_1^2 + \dots + dx_{n+1}^2)^{1/2}$  dir. Bu durumda  $\int_{\gamma} \|dx\| = \|\gamma\|$  elde edilir. Ayrıca  $\gamma$ ,  $C^1$  eğrisi

ise  $\int_{\gamma} \|dx\| = \int_a^b \|\gamma'(t)\| dt$  dir.  $\|dx\|$  diferansiyeline,  $H^n$  uzayının hiperbolik uzunluğunun

elemanı denir.

## BÖLÜM 2

### EĞRİSEL YAPILAR

Bu bölümde Riemann üzerinde jeodezik eğrileri, uzunluk ve uzaklıklar arasındaki ilişkileri belirteceğiz. Buradaki amacımız; bütün minimize edilmiş eğrilerin jeodezik olduğunu ve bütün jeodeziklerin en küçük lokalinde minimize edilmiş uzunluğu olduğunu göstermektir.  $M, g$  sabit Riemann metriğine sahip  $C^\infty$   $n$ -manifoldunu alacağız. Bütün kovaryant türevler ve jeodezikler,  $g$  nin Riemann konneksiyonuna göre oluşturulur.

#### 2.1. Riemann Manifoldları Üzerinde Uzunluklar ve Uzaklıklar

**TANIM 2.1.1.**  $\gamma : [a, b] \rightarrow M$  eğri parçası ise  $\gamma$  eğrisinin uzunluğu

$$L(\gamma) = \int_a^b \left| \dot{\gamma}(t) \right| dt \quad (2.1)$$

olarak tanımlanır. Bazı durumlarda  $L$  yerine  $L_g$  yazarak metrik üzerinde bağımlı olduğu da belirtilebilir.

Bir eğrinin uzunluğunda parametrizasyon bağımsız olmalıdır. Bunun için  $\varphi : [c, d] \rightarrow [a, b]$  eğrisi  $C^\infty$  ve tersi de  $C^\infty$  olan  $\tilde{\gamma} = \gamma \circ \varphi$  eğrisi olarak yeniden parametrize edilir. [8]

**LEMMA 2.1.1.** Herhangi  $\gamma : [a, b] \rightarrow M$  eğri parçası için  $\gamma$  nın yeniden parametrize edilmesiyle  $L(\gamma) = L(\tilde{\gamma})$  olur. [8]

**İSPAT:**  $\forall t \in I$  için  $\gamma : I \rightarrow M$  eğrisi,  $C^\infty$  ve  $\dot{\gamma}(t) \neq 0$  olan regüler eğridir. Burada  $\dot{\gamma}(t)$  tanjant vektörü,  $\gamma_*(d/dt)$  ve  $\gamma$  regüler eğrisi  $I$  aralığının  $M$  içine gömmesidir. Jeodezikler, sabit hızlı olduğundan regülerdir.



$\gamma: [a, b] \rightarrow M$  sürekli dönüşümü,  $i = 1, 2, \dots, k$  için  $\gamma|_{[a_{i-1}, a_i]}$  regüler eğrisi,  $a = a_0 < \dots < a_k = b$  şeklinde sonlu parçaları varsa bu eğriye parçalı regüler denir. Riemann manifoldu üzerinde bütün uzaklıklar eğri parçaları boyunca ölçülür. Admissible eğriyi değerlendirerek  $\gamma: [a] \rightarrow M$ ,  $\gamma(a) = p$  sabit eğrisi belirlenir.

Admissible eğrinin her iki tarafından  $a_i$  noktasına yaklaşırken iyi tanımlı, sıfır olmayan ve bir taraftan hız vektörüne sahip olmalıdır. Fakat iki taraftan yaklaşılan hız vektörlerinin eşit olması gerekir.

$$\dot{\gamma}(a_i^-) = \lim_{t \rightarrow a_i^-} \dot{\gamma}(t);$$

$$\dot{\gamma}(a_i^+) = \lim_{t \rightarrow a_i^+} \dot{\gamma}(t)$$

şeklinde ifade edilir.

$\gamma: [a, b] \rightarrow M$  admissible eğrisi ve  $a = a_0 < \dots < a_k = b$  gibi alt parçaları olsun.  $\gamma$  eğrisinin uzunluğu  $\gamma|_{[a_{i-1}, a_i]}$ ,  $C^\infty$  altparçalarının uzunluklarının toplamı şeklinde tanımlanır.  $[c, d]$  aralığının  $c = c_1 < \dots < c_k = d$  altbölümü için  $C^\infty$  tersi olan  $\forall [c_{i-1}, c_i]$  altaralığı  $C^\infty$  kısıtlanan  $\varphi: [c, d] \rightarrow [a, b]$  homeomorfizmini admissible eğrisini  $\gamma: [a, b] \rightarrow M$  eğrisine parametrize ederek genişletebileceğinden eğri uzunluğunu parametrizasyondan bağımsız olduğunu gösterir.

**TANIM 2.1.2.**  $\gamma: [a, b] \rightarrow M$  admissible eğrisinin *yay uzunluk fonksiyonu*

$$s: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$$

$$t \mapsto s(t) = L(\gamma|_{[a, t]}) = \int_a^t |\dot{\gamma}(u)| du \quad (2.2)$$

şeklinde tanımlanır.  $s$ ,  $\forall \gamma$  eğrisinin  $C^\infty$  olduğu durumda  $C^\infty$  dur.  $\dot{s}(t)$ ,  $\gamma$  eğrisinin  $|\dot{\gamma}(t)|$  hızına eşittir. [8]

Eğriler arasında birim hızlı olması kolaylık sağlar. Aşağıdaki gibi her admissible eğri bir parametrizasyona sahiptir.

**Örnek 2.1.**  $\gamma : [a, b] \rightarrow M$  bir admissible eğri ve  $l = L(\gamma)$  kümesi olsun.

a)  $\tilde{\gamma}$  birim hızlı olacak şekilde  $\gamma$  eğrisinin  $\tilde{\gamma} : [0, l] \rightarrow M$  tek bir parametrizasyonu olduğunu gösteriniz.

$\tilde{\gamma}$  birim hızlı olsun.  $h(s) = t$ ,  $\tilde{\gamma} = \gamma \circ h$  ve  $\gamma = \gamma(t)$  olarak tanımlansın. Bu durumda

$$\frac{d\tilde{\gamma}}{ds} = \frac{d\gamma}{dh} \cdot \frac{dh}{ds} = \frac{d\gamma}{dt} \cdot \frac{dt}{ds} = \frac{\gamma'(t)}{\frac{ds}{dt}}$$

elde edilir.  $\|\gamma'(s)\| = 1$  olduğundan

$$\|\gamma'(s)\| = \frac{\|\gamma'(s)\|}{\left\|\frac{ds}{dt}\right\|} = 1 \Rightarrow \|\gamma'(s)\| = \frac{ds}{dt}$$

$$\Rightarrow s = \int \|\gamma'(s)\| dt$$

olur.

b)  $\tilde{\gamma}$ ,  $[0, l]$  formunun parametre aralığı olan herhangi birim hızlı eğri ise,  $\gamma$  eğrisinin yay uzunluk fonksiyonu  $h(s) = s$  olduğunu gösteriniz.

$$\frac{ds}{dt} = 1 \text{ olduğu için}$$

$s = t$  aldığımızda  $h(s) = t$  dönüşümü  $h(s) = s$  halini alır.

Bu sebepten dolayı bu eğriye, *yay uzunluğuyla parametrize edilen eğri* denir.

$\gamma : [a, b] \rightarrow M$  herhangi bir admissible eğri ve  $f \in C^\infty[a, b]$  olsun.

$$\int_{\gamma} f ds = \int_a^b f(t) |\dot{\gamma}(t)| dt \quad (2.3)$$

şeklinde  $\int_{\gamma} f ds$  ile belirtilen yay uzunluğuna göre  $f$  nin integralini tanımlarız.

**Örnek 2.2.**  $\gamma : [a, b] \rightarrow M$  bir admissible eğri ve  $f \in C^\infty[a, b]$  olsun.

$\int_{\gamma} f ds$ , parametrizasyonun bağımsızlığını gösteriniz.

$$\int_{\gamma} f ds = \int_a^b f(t) |\dot{\gamma}(t)| dt$$

olarak yay uzunluğuna göre ifade edilmişti. Eğrinin yay uzunluğunun parametrizasyondan bağımsız olduğu Lemma 2.1.1 in ispatında gösterildi. Böylece  $\int_{\gamma} f ds$  parametrizasyondan bağımsız olduğu ifade edilmiştir.

$V, [\tilde{a}_{i-1}, \tilde{a}_i]$  her bir alt aralık üzerinde  $C^\infty$  olan  $a = \tilde{a}_0 < \tilde{a}_1 < \dots < \tilde{a}_m = b$  sonlu altbölümü var ise,  $V : [a, b] \rightarrow TM$  sürekli dönüşümüne, yani bütün  $t$ ' ler için  $V_t \in T_{\gamma(t)}M$  ye,  $\gamma$  boyunca kısmi  $C^\infty$  vektör alanı denir. Verilen herhangi bir  $V_\alpha \in T_{\gamma(\alpha)}M$  vektörü için  $V_\alpha$ ,  $\gamma$  boyunca tek bir kısmi  $C^\infty$  paralel dönüşümüne sahip;  $\gamma(a_1)$  birinci parçası boyunca  $V_\alpha$  paralel dönüşümü  $C^\infty$ , ikinci parçası boyunca  $V_\alpha$  paralel dönüşümü  $C^\infty$  ve bu şekilde devam edildiğinde her  $\gamma$  durumu için paralel dönüşüm  $C^\infty$  dur.

### TANIM 2.1.3: (Uzaklık)

$M$  nin bir bağlantılı Riemann manifoldu olduğunu farzedelim. Herhangi bir  $p, q \in M$  nokta çifti için,  $p$  den  $q$  ya bütün elde edilebilir eğrilerin uzunluğunun infimumu olarak  $d(p, q)$  Riemann uzaklığını tanımlıyoruz. Kontrol etmek için iyi tanımlı, herhangi iki noktasının admissible eğrisi tarafından bağlantılı olduğunu göstermeye ihtiyacımız vardır.

Bağlantılı manifold, yol bağlantılı olduğundan  $c : [a, b] \rightarrow M$  sürekli yoluyla bağlantılıdır. Kompaklığıyla her  $i$  için  $c[a_{i-1}, a_i]$  ne tek bir haritasında içerilen  $[a, b]$  nin sonlu altbölümü vardır. Daha sonra aynı noktalar arasında bir  $\gamma$  kabul edilebilir eğrisini açığa vuran koordinatlardaki  $C^\infty$  yoluyla böyle her parçayı yer değiştirebiliriz. Bu nedenle  $\forall p, q \in M$  için  $d(p, q)$  sonludur.

**LEMMA 2.1.3.** Yukarıda tanımlanan  $d$  uzaklık fonksiyonuyla, herhangi bağlantılı Riemann manifoldu, verilen manifold topolojisiyle aynı belirlenen topolojisi olan metrik uzaydır.[8]

**İSPAT :**  $d(p, q) = d(q, p) \geq 0$  ve  $d(p, p) = 0$  olarak tanımdan açıktır. Üçgen eşitsizliği ise, uzunluğu verilen iki eğrinin  $p$  den  $r$  ye uzunlukları toplamı,  $p$  den  $q$  ya ve  $q$  dan  $r$  ye admissible eğrilerinin birleşmesinin doğruluğundan elde edilir.  $p \neq q$  olduğunda  $d(p, q) > 0$  olduğunu gösterir ve metrik topolojisi, manifoldun topolojisiyle aynı olduğunu gösterir. Bu yüzden lokal koordinatlardaki Riemann uzaklığını Öklid uzaklığıyla karşılaştırmamız gerekir.  $p \in M$  ve  $(x^i)$ ,  $p$  merkezli normal koordinatları olsun.

Düzgün normal komşuluk lemmasının ispatındaki (Lemma 3.3.2.) gibi  $\forall V \in T_x M$  ve  $x \in \bar{y}$  durumunda  $c|V|_{\bar{q}} \leq |V|_q \leq C|V|_{\bar{q}}$  olan  $c$  ve  $C$  pozitif sabitleri ve  $p$  etrafında  $\varepsilon$  yarıçapının  $\bar{y}$  kapalı jeodezik yuvarı vardır.

$$cL_{\bar{q}}(\gamma) \leq L_q(\gamma) \leq CL_{\bar{q}}(\gamma) \quad (2.1)$$

görüntüsü,  $\bar{y}$  de içeren herhangi  $\gamma$  admissible eğrisi için uzunluğun tanımından gelir.

Şimdi  $q \neq p$  ise,  $q \notin \bar{y}$  olacak şekilde  $\varepsilon$  ye küçültebiliriz. Daha sonra  $p$  den  $q$  ya herhangi  $\gamma: [a, b] \rightarrow M$  admissible eğrisi,  $\partial y$  jeodezik küresi boyunca geçer. (Kürenin tümleyeni bağlantısız olduğundan ve  $p, q$  farklı bileşenlerde uzanır.)

İlk zamanı  $t_0$  ile belirtmiş olursak,

$$d(p, q) \geq L_q(\gamma) \geq L_q(\gamma|_{[a, t_0]}) \geq cL_{\bar{q}}(\gamma|_{[a, t_0]}) \geq cd_{\bar{q}}(p, \gamma(t_0)) = c\varepsilon > 0 \quad (2.2)$$

gelir. Böylece  $d$  bir metriktir.

Son olarak, iki topolojiyi karşılaştırmak için yukarıdaki gibi  $y$  formunun açık kümesinde küçük Öklid yuvarından manifold topoloji için baz inşa edebiliriz ve topolojisi için küçük metrik yuvarı tarafından üretildiği önemlidir. Böyle herhangi  $y$  kümesi için, Öklid uzaklık ve Riemann uzaklığı denktir ve bu yüzden iki topolojideki açık baz kümeleri, ikisinde de açıktır. Bu, iki topolojinin aynı olduğunu gösterir.

## 2.2. Jeodezikler

Riemann manifoldundaki  $\gamma$  admissible eğriye, aynı son noktaya sahip herhangi diğer  $\bar{\gamma}$  admissible eğri için  $L(\gamma) \geq L(\bar{\gamma})$  ise, minimize olarak adlandırılır.  $\gamma$  minimize olan uzaklığın tanımından gelir  $\Leftrightarrow L(\gamma)$  son noktaları arasındaki uzaklığa eşittir.

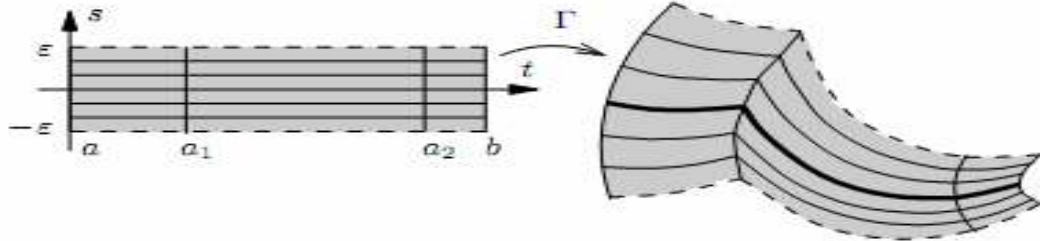
Bütün minimize eğrilerin jeodezikler olduğunu göstermek için  $M$  deki admissible eğrilerin kümesi üzerinde fonksiyonel şeklinde  $L$  uzunluk fonksiyonu düşünebiliriz. (Tanım kümesi, fonksiyonların kümeleri olan fonksiyonlara genellikle *fonksiyonel* denir.) Görüşün bu noktasından minimize eğriler için araştırma, bu fonksiyonelin minimali için araştırılması şeklinde düşünülür.

Calculusun, minimize olarak bir  $\gamma$  eğrisi için gerekli şart bazı durumlarda  $L$  nin türevinin  $\gamma$  da sıfır olmasıdır. Bu, Calculus varyasyonları şeklinde bilinen konuyu getirmektedir. Bunlar Calculusun kullanımı özdeşlemek ve fonksiyonellerin uç noktalarını analiz etmek için fonksiyon ya da dönüşümlerin uzayları üzerinde tanımlıdır.

Tamamen gelişen durumundaki, Calculus varyasyonu türev, gradyent, kritik noktalar, lokal uç noktaları, eyer noktası ve Hessian gibi fonksiyon uzaylarının sonsuz boyutlu grubu çok değişkenli Calculusun genellikle bütün araçlarının birini uygulamayı sağlar. Oysa amacımız için sonsuz boyutta grubunda Calculus teoresini formalize etmeye ihtiyaç yoktur.  $\gamma$  minimize eğri ve  $\Gamma_s; L(\Gamma_s), \Gamma_0 = \gamma$  ve  $s$  nin farklı fonksiyonları olan aynı bitiş noktalı admissible eğrilerin ailesi  $\Gamma_s$  ise , daha sonra temel Calculus dan  $L(\Gamma_s)$   $s=0$  da  $s$ -türevine sahip değildir çünkü orada minimum elde edilir.

### 2.2.1. Admissible Aileler

Daha ayrıntılı bir şekilde incelenirse daha fazla tanımlardan yararlanmak gerekir. Eğrilerin admissible eğrisi ,  $\forall s \in (-\varepsilon, \varepsilon)$  için  $\Gamma_s(t) = \Gamma(s, t)$  bir admissible eğrisinden ve  $a = a_0 < \dots < a_k = b$  bazı sonlu altbölümleri için  $(-\varepsilon, \varepsilon) \times [a_{i-1}, a_i]$  formunun her dikdörtgeni üzerinde  $C^\infty$  olan  $\Gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \times [a, b] \rightarrow M$  sürekli dönüşümdür.  $\Gamma$  , bir admissible aile ise;  $\Gamma$  boyunca vektör alanı,  $\forall (s, t)$  için  $V(s, t) \in T_{\Gamma(s, t)}$  ve  $V|_{(-\varepsilon, \varepsilon) \times [\hat{a}_{i-1}, \hat{a}_i]}$ ,  $a = \hat{a}_0 < \dots < \hat{a}_m = b$  bazı altbölümleri için  $C^\infty$  olan  $V : (-\varepsilon, \varepsilon) \times [a, b] \rightarrow TM$  sürekli bir dönüşümdür.



Şekil 2.1. Admissible aileler

$\Gamma$  admissible ailesi, eğrinin iki konneksiyonunu tanımlar. Bunlar;  $\Gamma_s(t) = \Gamma(s, t)$  ana eğrileri ,  $s$ =sabit düzenlenerek  $[a, b]$  üzerinde tanımlanır ve  $\Gamma^{(t)}(s) = \Gamma(s, t)$  transvers eğrileri  $t$ =sabit düzenlenerek  $(-\varepsilon, \varepsilon)$  üzerinde tanımlanır. Transvers eğrileri, ana eğriler genelde sadece parçalı regülerken  $\forall t$  için  $(-\varepsilon, \varepsilon)$  üzerinde  $C^\infty$  dur. Her  $\Gamma, C^\infty$  durumunda, eğrilerin bu iki ailesine teğet vektörler ,  $\Gamma$  boyunca vektör alanlarının örnekleridir; onları

$$\partial_t \Gamma(s, t) = \frac{d}{dt} \Gamma_s(t); \partial_s \Gamma(s, t) = \frac{d}{ds} \Gamma^{(t)}(s) \quad (2.3)$$

şeklinde belirtiriz.

Aslında,  $\partial_s \Gamma$ ,  $(-\varepsilon, \varepsilon) \times [a, b]$  bütün dikdörtgensel üzerinde her zaman süreklidir. Bir taraftan,  $(-\varepsilon, \varepsilon) \times \{a_i\}$  doğru parçası boyunca değeri sadece bu parça üzerindeki  $\Gamma$  nin değerine bağlıdır, çünkü türevi sadece  $s$  değişkenine göre alınır. Diğer bir taraftan her  $(-\varepsilon, \varepsilon) \times [a_{i-1}, a_i]$  ve  $(-\varepsilon, \varepsilon) \times [a_i, a_{i+1}]$  altdikdörtgensel üzerinde süreklidir (aslında  $C^\infty$ ), bu yüzden  $t=a_i$  deki sağ tarafın ve sol tarafın limitleri eşit olmalıdır. Bu nedenle  $\partial_s \Gamma$ , her zaman  $\Gamma$  boyunca bir vektör alanıdır. (Oysa  $\partial_t \Gamma$  genellikle  $t=a_i$  de sürekli değildir.)

$V$ ,  $\Gamma$  boyunca bir vektör alanı ise, formların  $C^\infty$  olduğu en küçük olduğu yer olan transvers eğrileri boyunca ya da ana eğriler boyunca  $V$  nin kovaryant türevlerini hesaplayabiliriz;  $T$  boyunca sonuçlanan vektör alanları sırasıyla  $D_s V$  ve  $D_t V$  şeklinde belirtilir.

Minimalize eğrilerin ispatındaki önemli noktası; Riemann konneksiyonunun simetrisi olan jeodezik olmasıdır. Aşağıdaki Lemma ispatlarımızda yararlanır.

#### LEMMA 2.2.1.1. (Simetri Lemma)

Riemann manifoldundaki  $\Gamma: (-\varepsilon, \varepsilon) \times [a, b] \rightarrow M$ , eğrilerin kabul edilebilir ailesi olsun.  $\Gamma, C^\infty$  olduğu herhangi bir  $(-\varepsilon, \varepsilon) \times [a_{i-1}, a_i]$  dikdörtgen üzerinde,  $D_s \partial_t \Gamma = D_t \partial_s \Gamma$  olur. [8]

**İSPAT:** Bu lokal bir soru olduğundan herhangi bir  $\Gamma(s_0, t_0)$  noktası etrafında  $(x^j)$  koordinatlarında hesaplama yapabiliriz.  $\Gamma(s, t) = (x^1(s, t), \dots, x^n(s, t))$  şeklinde  $\Gamma$  nin bileşenlerini yazarsak;

$$\partial_t \Gamma = \frac{\partial x^k}{\partial t} \partial_k; \quad \partial_s \Gamma = \frac{\partial x^k}{\partial s} \partial_k \quad (2.4)$$

elde ederiz. Daha sonra eğri boyunca kovaryant türevleri için koordinat formülünü kullanarak,

$$D_s \partial_t \Gamma = \left( \frac{\partial^2 x^k}{\partial s \partial t} + \frac{\partial x^i}{\partial t} \frac{\partial x^j}{\partial s} \Gamma_{ji}^k \right) \partial_k;$$

$$D_t \partial_s \Gamma = \left( \frac{\partial^2 x^k}{\partial t \partial s} + \frac{\partial x^i}{\partial s} \frac{\partial x^j}{\partial t} \Gamma_{ji}^k \right) \partial_k \quad (2.5)$$

olur. Yukarıdaki ikinci doğrudaki  $i$  ve  $j$  nin rolünü ters çevirmeye ve  $\Gamma_{ji}^k = \Gamma_{ij}^k$  simetri şartını kullanarak bu iki ifadenin eşit olduğunu görürüz.

$\gamma:[a,b]$  admissible eğri ise,  $\gamma$  varyasyonu, bütün  $t \in [a,b]$  için  $\Gamma_0(t) = \gamma(t)$  olacak şekilde  $\Gamma$  admissible ailesidir. Buna,  $\forall s$  için  $\Gamma_s(a) = \gamma(a)$  ve  $\Gamma_s(b) = \gamma(b)$  bağıntısı ise uygun varyasyon veya sabit bitiş noktalı varyasyon denir.  $\Gamma$ ,  $\gamma$  nin bir varyasyonu ise,  $\Gamma$  nin varyasyon alanı,  $\gamma$  boyunca  $V(t) = \partial_s \Gamma(0,t)$  vektör alanıdır.  $V(a) = V(b) = 0$  ise  $\gamma$  boyunca  $V$  vektör alanı uygundur. Uygun varyasyonun varyasyon alanı, kendisine uygun olduğu kesindir.

**LEMMA 2.2.1.2.**  $\gamma$ , bir admissible eğri ve  $V$ ,  $\gamma$  boyunca bir vektör alanı ise  $V$ ,  $\gamma$  nin bazı varyasyonlarının varyasyon alanıdır.  $V$ , uygun ise, varyasyon zaten uygun olarak alınır. [8]

**İSPAT :**  $\Gamma(s,t) = \exp(sV(t))$  kuralım.  $[a,b]$  nin kompaktlığından  $\Gamma$  nin,  $(-\varepsilon, \varepsilon) \times [a,b]$  üzerinde tanımlı olan bazı  $\varepsilon > 0$  vardır.  $V_1$  tanım kümesinin tamamı üzerinde sürekli ve  $C^\infty$  olduğu her  $[a_{i-1}, a_i]$  alt aralığı için  $(-\varepsilon, \varepsilon) \times [a_{i-1}, a_i]$  üzerinde  $\Gamma$ ,  $C^\infty$  dur. Üstel dönüşümün özelliklerinden  $\Gamma$  nin varyasyon alanı,  $V$  dir. Dahası,  $V(a) = V(b) = 0$  ise,  $\Gamma(s,a) \equiv \gamma(a)$  ve  $\Gamma(s,b) \equiv \gamma(b)$  olduğu açıktır bu yüzden  $\Gamma$  uygundur.

### 2.2.2. Minimalize Eğriler

Uygun varyasyon boyunca uzunluk fonksiyonun türevi için ifadeyi hesaplayabiliriz. Geleneksel olarak dönüşümün uzay üzerinde fonksiyonelinin türevine birinci varyasyon denir.

#### LEMMA 2.2.2.1 (Birinci Varyasyon Lemma)

$\gamma:[a,b] \rightarrow M$  herhangi birim hızlı admissible eğri,  $\Gamma$ ;  $\gamma$  eğrisinin uygun varyasyonu ve  $V$ ; onun varyasyon alanı olsun. Daha sonra  $\Delta_i \dot{\gamma} = \dot{\gamma}(a_i^+) - \dot{\gamma}(a_i^-)$ ,  $a_i$  noktasında  $\dot{\gamma}$  tanjant vektör alanında sıçrama ve

$$\frac{d}{ds} \Big|_{s=0} L(r_s) = - \int_a^b \langle V, D_t \dot{\gamma} \rangle dt - \sum_{i=1}^{k-1} \langle V(a_i), \Delta_i \dot{\gamma} \rangle \quad (2.6)$$

olur. [8]

**İSPAT:** Kısalık için

$$T(s,t) = \partial_t \Gamma(s,t), \quad S(s,t) = \partial_s \Gamma(s,t) \quad (2.7)$$

olarak belirtelim.  $\Gamma$ 'nin  $C^\infty$  olduğu  $[a_{i-1}, a_i]$  altaralığında  $L(\Gamma_s)$  deki integrandı  $C^\infty$  ve integrasyonun tanım kümesi kompakt olduğundan, en son doğrudaki simetri lemmasını kullandığımızda

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} L(\Gamma_s) \Big|_{[a_{i-1}, a_i]} &= \int_{a_{i-1}}^{a_i} \frac{\partial}{\partial_s} \langle T, T \rangle^{1/2} dt \\ &= \int_{a_{i-1}}^{a_i} \frac{1}{2} \langle T, T \rangle^{-1/2} 2 \langle D_s T, T \rangle dt \\ &= \int_{a_{i-1}}^{a_i} \frac{1}{|T|} \langle D_t S, T \rangle dt \end{aligned} \quad (2.9)$$

elde etmek için integral işareti altında diferansiyelleyebiliriz.  $s=0$  aldığımızda  $S(0,t)=V(t)$  ve  $T(0,t)=\dot{\gamma}(t)$   $S(0,t)=V(0,t)=\dot{\gamma}(t)$  (uzunluğu 1) olarak notasyonladığımızda

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} \Big|_{s=0} L(\Gamma_s \Big|_{[a_{i-1}, a_i]}) &= \int_{a_{i-1}}^{a_i} \langle D_t V, \dot{\gamma} \rangle dt \\ &= \int_{a_{i-1}}^{a_i} \left( \frac{d}{dt} \langle V, \dot{\gamma} \rangle - \langle V, D_t \dot{\gamma} \rangle \right) dt \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \langle V(a_i), \dot{\gamma}(a_i^-) \rangle - \langle V(a_{i-1}), \dot{\gamma}(a_{i-1}^+) \rangle \\ &\quad - \int_{a_{i-1}}^{a_i} \langle V, D_t \dot{\gamma} \rangle dt \end{aligned} \quad (2.10)$$

olur. Son olarak  $i$  leri baştan sona topladığımızda  $V(a_0)=V(a_k)=0$  notasyonudur. Çünkü  $\Gamma$ , uygun varyasyondur. Bu durumda

$$\frac{d}{ds} \Big|_{s=0} L(\Gamma_s) = - \int_a^b \langle V, D_t \dot{\gamma} \rangle dt - \sum_{i=1}^{k-1} \langle V(a_i), \Delta_i \dot{\gamma} \rangle \quad (2.11)$$

elde ederiz.



Çünkü herhangi bir admissible eğrinin, birim hızlı parametrizasyona sahiptir ve uzunluğu, parametrizasyondan bağımsızdır.  $\gamma$ , yukarıdaki önermedeki gereken gerçek kısıtlama değildir, fakat hesaplamaya yakın çıkar.

**Örnek 2.2.1 :**  $\gamma$  bir  $C^\infty$ , birim hızlı eğri olsun.

a) Bütün  $t$  için  $D_t \dot{\gamma}$ ,  $\dot{\gamma}$  ile ortogonal olduğunu gösteriniz.

$\gamma$  birim hızlı eğri olduğundan

$$\langle \dot{\gamma}, \dot{\gamma} \rangle = \pm 1$$

olur. Bu durumda

$$\begin{aligned} \langle \dot{\gamma}, \dot{\gamma} \rangle = \pm 1 \quad \frac{d}{dt} \langle \dot{\gamma}, \dot{\gamma} \rangle = 0 &\Rightarrow \langle D_t \dot{\gamma}, \dot{\gamma} \rangle + \langle \dot{\gamma}, D_t \dot{\gamma} \rangle = 0 \\ &\Rightarrow \langle D_t \dot{\gamma}, \dot{\gamma} \rangle = 0 \text{ (simetrikten)} \end{aligned}$$

Böylece  $D_t \dot{\gamma}, \dot{\gamma}$  ortogonaldir.

b)  $\Gamma$ , bütün  $s$  ler için  $\Gamma$  nin  $\gamma$  yeni parametrizasyonu olan  $\gamma$  nin uygun varyasyonu ise  $L(\Gamma_s)$  nin birinci varyasyonunun sıfır olduğunu gösteriniz.

$$\frac{d}{ds} (L(r_s)) = 0 \text{ göstermeliyiz.}$$

$\Delta_i \dot{\gamma} = \dot{\gamma}(a_i^+) - \dot{\gamma}(a_i^-)$  alınarak

$$\frac{d}{ds} \Big|_{s=0} L(\Gamma_s) = - \int_a^b \langle V, D_t \dot{\gamma} \rangle dt - \sum_{i=1}^{k-1} \langle V(a_i), \Delta_i \dot{\gamma} \rangle$$

olduğu gösterilmişti. Admissible eğri olduğundan  $V \in T$  ve böylece  $V \approx \dot{\gamma}$  olur. Böylece ortogonallikten

$$- \int_a^b \langle V, D_t \dot{\gamma} \rangle dt = 0$$

elde edilir.  $\dot{\gamma}$  var olduğundan  $\dot{\gamma} = \gamma^+ = \gamma^-$  ifade edilir. Bunu denklemde yerine koyarsak

$$\sum_{i=1}^{k-1} \langle V(a_i), \Delta_i \dot{\gamma} \rangle = 0$$

elde etmiş oluruz. Dolayısıyla

$$\frac{d}{ds} (L(r_s)) = 0$$

olur.

**TEOREM 2.2.2.1.** Her minimize eğri, birim hızlı parametrizasyon şeklinde ifade edildiğinde, jeodeziktir. [8]

**İSPAT:**  $\gamma: [a, b] \rightarrow M$  minimize ve birim hızlı olduğunu farzedelim ve  $a = a_0 < \dots < a_k = b$ ,  $\gamma$  nın  $[a_{i-1}, a_i]$  üzerinde  $C^\infty$  olacak şekilde alt bölümü olsun.  $\Gamma$ ,  $\gamma$  nın herhangi uygun varyasyonu ise  $s = 0$  olduğunda  $dL(\Gamma_s) = 0$  olduğu temel calculusun sonuçlarıdır.  $\gamma$  boyunca her uygun vektör alanı, bazı uygun varyasyonun, varyasyon alanı olduğundan,

$$\left. \frac{d}{ds} \right|_{s=0} L(\Gamma_s) = - \int_a^b \langle V, D_t \dot{\gamma} \rangle dt - \sum_{l=1}^{k-1} \langle V(a_l), \Delta_l \dot{\gamma} \rangle; \quad \Delta_l \dot{\gamma} = \dot{\gamma}(a_l^+) - \dot{\gamma}(a_l^-) \quad (2.12)$$

sağ tarafı böyle her  $V$  alanı için sıfır olmalıdır.

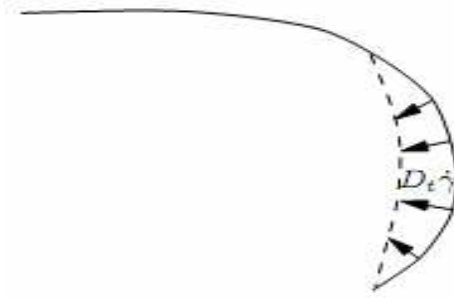
İlk basamak, her  $[a_{i-1}, a_i]$  altaralığı üzerinde  $D_t \dot{\gamma} = 0$  olduğunu göstermektir, bu yüzden  $\gamma$ , kırık jeodeziktir. Böyle bir aralık seçelim ve  $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R})$ ,  $\varphi > 0$  ve  $[a_{i-1}, a_i]$  üzerinde ve  $\varphi = 0$  her aralıkta olacak şekilde bump (atlayan) fonksiyon olsun. Daha sonra  $V = \varphi D_t \dot{\gamma}$  ile

$$0 = - \int_{a_{i-1}}^{a_i} \varphi |D_t \dot{\gamma}|^2 dt \quad (2.13)$$

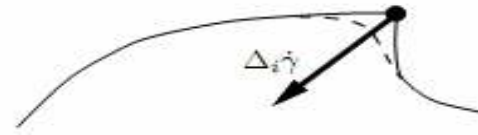
olur. Integrand negatif olmadığından her böyle alt aralık üzerinde  $D_t \dot{\gamma} = 0$  olduğunu gösterir.

Sonra,  $\gamma$  eğrisinin köşelere sahip olmadığını söyleyen  $\Delta_l \dot{\gamma} = 0$  olduğunu göstermemiz gerekir. Herhangi  $0 < i < k$  için,  $V(a_i) = \Delta_i \dot{\gamma}$  ve  $V(a_j) = 0$   $j \neq i$  için olacak şekilde  $\gamma$  boyunca bir  $V$  vektör alanı yapılandırmaya koordinat haritasındaki bump fonksiyonunu kullanmak kolaydır. Daha sonra ifade,  $-|\Delta_i \dot{\gamma}|^2 = 0$  olarak kalır.

Son olarak  $\gamma$  nın birer taraflı iki hız vektörleri her  $\gamma$  de eşleştiğinden  $\gamma|_{[a_i, a_{i+1}]}$  eğrisi,  $\gamma|_{[a_{i-1}, a_i]}$  eğrisinin jeodeziğinin devamı olduğu jeodeziğin tekliğinden ve bu nedenle  $\gamma$  nın  $C^\infty$  olduğu gelir.



Şekil 2.2. ivme vektörünün  $\gamma$  deforme edilmesi



Şekil 2.3. Köşenin yuvarlanması

Önceki ispat aydınlatıcı geometrik gösterime sahiptir.  $V = \varphi D_t \dot{\gamma}$  ile birinci varyasyon, ivme vektörlü doğrultudaki  $\gamma$  deforme uzunluğunun gösterimi negatiftir. (Şekil 2.2) Benzer şekilde,  $\gamma$  kırık jeodeziğinin uzunluğu,  $V(a_i) = \Delta_i \dot{\gamma}$  olacak şekilde  $V$  vektör alanının doğrultusundaki deformesi tarafından azalır. (Şekil 2.3) Birinci varyasyon formülü, gerçekte Teorem 2.2.2.1 daki iddia edilenden daha fazla şey söyler. İspatlamadaki  $\gamma$  jeodeziği, minimize eğrinin kabulünü genişleterek kullanılır. Sadece  $s = 0$  da  $s$  ye göre  $L(\Gamma_s)$  nin türevinin sıfır,  $\gamma$  nin herhangi  $\Gamma$  uygun varyasyonu için  $L$  nin kritik noktası olması gerçeğini kullanırız. Bu nedenle aşağıdaki durumda Teorem 2.2.2.1 yi genişletebiliriz.

**SONUÇ 2.2.2.1:**  $\gamma$  birim hızlı admissible eğrisi,  $L$  için bir kritik noktadır  $\Leftrightarrow \gamma$ , jeodeziktir. [8]

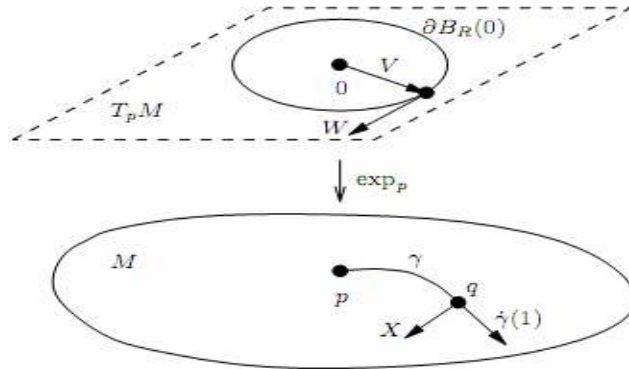
**İSPAT :**  $\gamma$  bir kritik nokta ise, Teorem 2.2.2.1 nin ispatını,  $\gamma$  jeodezik olduğunu göstermeye modifiye olmadan oluşturur. Tersi ile  $\gamma$  jeodezik ise daha sonra ikinci varyasyon formülünde ilk terimi, jeodezik denklemeyle sıfır olur ve ikinci terimi yok olur çünkü  $\dot{\gamma}$  sıçramaya sahip değildir.

Böylece,  $D_t \dot{\gamma} = 0$  jeodezik denklemleri, uzunluk fonksiyonelinin kritik noktalarını karakterize eder. Genelde, dönüşümün uzay üzerinde bir fonksiyonelinin kritik noktalarını karakterize eden denklemler, fonksiyonelin varyasyon denklemleri veya Euler-Lagrange denklemleri denir.

Diferansiyel geometrisindeki bir çok farklı denklem, varyasyon denklemleriyle başlar. Einstein denklemleri, Yamabe denklemleri ve minimal yüzey denklemleri bu tip denklemlerdir.

### 2.2.3. Lokal Minimalize Eğriler

Teorem 2.2.2.1 i tersine dönüştürürüz ve jeodeziklerin lokal minimize olduğunu gösteririz. İspat, aşağıdaki basit geometrik gerçeği temel alır.



Şekil 2.4. Gauss Lemmanın ispatı

#### TEOREM 2.2.3.1. (Gauss Lemma)

$U, p \in M$  merkezli jeodezik yuvar olsun.  $\frac{\partial}{\partial r}$  birim radyal vektör alanı,  $U$  daki jeodezik kürelere  $g$ -ortogonaldır.[8]

**İSPAT:**  $q \in U$  ve  $x \in T_q M$ ,  $q$  boyunca jeodezik küresine teğet vektör olsun. Çünkü  $\exp_p, U$  üzerinde diffeomorfizmdir,  $q = \exp_p V$  olacak şekilde  $V \in T_p M$  vektörü vardır. Ayrıca  $x = (\exp_p)_* w$  olacak şekilde  $w \in T_v(T_p M) = T_p M$  vektörü vardır (Şekil 2.4). Daha sonra  $R = d(p, q)$  olan  $V \in \partial B_R(a)$  ve  $V \in T_v \partial B_R(0)$  olur.  $p$  den  $q$  ya radyal jeodezik,  $\dot{\gamma}(t) = R \partial / \partial r$  ile  $\gamma(t) = \exp_p(tV)$  dir. Böylece  $g$  ye göre  $x \perp \dot{\gamma}(1)$  olduğunu göstermeye ihtiyacımız vardır.  $\sigma(0) = V$  ve  $\dot{\sigma}(0) = w$  olacak şekilde  $\partial B_R(0)$  da uzayan  $\sigma : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow T_p M$  eğrisini seçelim ve

$$\Gamma(s, t) = \exp_p(t\sigma(s)) \quad (2.14)$$

şeklinde verilen  $\gamma$  nın  $\Gamma$  varyasyonunu değerlendirelim.  $\forall s \in (-\varepsilon, \varepsilon)$  için  $\sigma(s), R$  uzunluğunun bir vektörüdür, bu yüzden  $\Gamma_s, R$  sabit hızlı jeodeziktir.

$$\begin{aligned}
S(0,0) &= \left. \frac{d}{ds} \right|_{s=0} \exp_p(0) = 0; \\
T(0,0) &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \exp_p(tV) = V; \\
S(0,1) &= \left. \frac{d}{ds} \right|_{s=0} \exp_p(\sigma(s)) = (\exp_p)_* \sigma(0) \\
&= X; \\
T(0,1) &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=1} \exp_p(tV) = \dot{\gamma}(1)
\end{aligned} \tag{2.15}$$

olduğu tanımından gelir. Bu nedenle  $(s,t)=(0,0)$  ve  $(s,t)=(0,1)$  olduğundan  $\langle x, \dot{\gamma}(1) \rangle$  ye eşit olduğunda  $\langle S, T \rangle = 0$  dır, bu yüzden teoremin ispatı için  $\langle S, T \rangle$  nin  $t$  nin bağımsızlığını göstermek için yeterlidir.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t} \langle S, T \rangle &= \langle D_t S, T \rangle + \langle S, D_t T \rangle \\
&= \langle D_s T, T \rangle + \sigma = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial s} |T|^2 = 0
\end{aligned} \tag{2.16}$$

(1)  $D_t S = D_s T$  simetri lemması, (2) her  $\Gamma_s$  jeodezik olduğundan  $D_t T \equiv 0$  olduğu gerçeği ve (3) bütün  $(s,t)$  için  $|T| = |\dot{\Gamma}_s| \equiv R$  olduğu gerçeğini kullanarak hesaplarız. Bu, teoremi ispatlar.

Sonraki sonucun formunda öncelikle Gauss Lemma'yı kullanırız.

**SONUÇ 2.2.3.1.** :  $(x^i)$ ,  $p \in M$  merkezli bir  $U$  jeodezik yuvarı üzerinde normal koordinatlar olsun, ve  $r$  radyal uzaklık fonksiyonu olsun. Daha sonra  $U - \{p\}$  üzerinde

$$\text{grad}r = \frac{\partial}{\partial r} \text{ olur. [8]}$$

**İSPAT :** Herhangi  $g \in U - \{p\}$  ve  $Y \in T_g M$  için

$$dr(Y) = \left\langle \frac{\partial}{\partial r}, Y \right\rangle \tag{2.17}$$

olduğunu göstermek gerekir.

$q$  boyunca  $\exp_p(\partial B_R(0))$  jeodezik küresi,  $r = R$  denkleminde normal koordinatında karakterize edilir.  $\frac{\partial}{\partial r}$ , bu küreye transvers olduğundan bazı küreye teğet  $X$  vektörü ve bazı  $\alpha$  sabiti için  $\alpha \frac{\partial}{\partial r} + X$  şeklinde  $Y$  yi birleştirebiliriz.  $X$ ,  $r$  nin seviye kümesine teğet olduğundan  $dr(X) = 0$  ve koordinattaki doğrudan hesaplamalarıyla  $dr\left(\frac{\partial}{\partial r}\right) = 1$  olarak elde edilir. Bu nedenle (2.17) ün sol tarafı

$$dr\left\langle \alpha \frac{\partial}{\partial r} + X \right\rangle = \alpha dr\left(\frac{\partial}{\partial r}\right) + dr(X) = \alpha \quad (2.18)$$

olur.

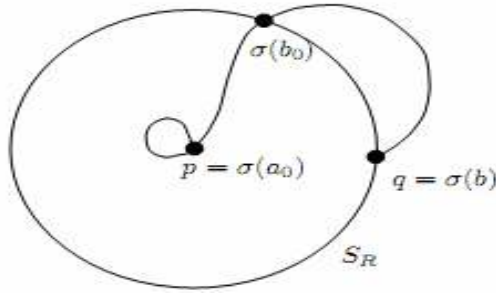
Diğer bir yandan, Teorem 3.3.1.(e) ile,  $\frac{\partial}{\partial r}$  birim vektördür. Bu nedenle (2.17) denkleminin sağ tarafı,

$$\left\langle \frac{\partial}{\partial r}, \alpha \frac{\partial}{\partial r} + X \right\rangle = \alpha \left| \frac{\partial}{\partial r} \right|^2 + \left\langle \frac{\partial}{\partial r}, X \right\rangle = \alpha \quad (2.19)$$

ve  $X$ ,  $\frac{\partial}{\partial r}$  ye ortogonal olarak sonuçlandırmak için Gauss Lemması kullanılır.

**TEOREM 2.2.3.2.**  $p \in M$  ve  $q, p$  etrafında jeodezik yuvarında içerildiğini farzedelim. Daha sonra  $p$  den  $q$  ye radyal jeodezik,  $M$  deki  $p$  den  $q$  ya tek minimize eğrisidir. [8]

**İSPAT:**  $\exp_p(B_\varepsilon(0)); q$  yu içeren jeodezik yuvar olacak şekilde  $\varepsilon > 0$  seçelim.  $\gamma: [0, R] \rightarrow M$  yay uzunluğuyla parametrize edilen  $p$  den  $q$  ya radyal jeodezik olsun ve bazı  $V \in T_p M$  birim vektörü için  $\gamma(t) = \exp_p(tV)$  yazalım. Daha sonra  $\gamma$ , birim hıza sahip olduğundan  $L(\gamma) = R$  dir, bu yüzden  $p$  den  $q$  ya herhangi diğer kabul edilebilir eğri  $R$  den daha büyük uzunluğa sahiptir.  $S_R = \exp_p(\partial B_R(0))$ ,  $R$  yarıçapının jeodezik küresini belirtsin.



Şekil 2.5 radyal jeodeziklerin  
minimize olma durumu

$\sigma: [0, b] \rightarrow M$  aynı zamanda yay uzunluğuyla parametre edilebilen bir eğri olsun. İncelemeye  $L(\sigma) \geq L(\gamma)$  göstermeyle başlarız.

$a_0 \in [a, b]$ ,  $\sigma(t) \in S_R$  olan  $a_0$  sonrası birinci zaman  $b_0 \in [a, b]$  ve  $\alpha(t) = p$  olan son zamanı belirtsin (Şekil 2.5). Herhangi bir  $t \in [a_0, b_0]$  için  $X(t), \sigma(t)$  boyunca jeodezik küreye teğet olan

$$\dot{\sigma}(t) = \alpha(t) \frac{\partial}{\partial r} + X(t) \quad (2.20)$$

şeklinde  $\dot{\sigma}(t)$  bileşenlerine ayırabiliriz. Gauss lemmadan bu, ortogonal bir ayrışımıdır, bu yüzden  $|\dot{\sigma}(t)|^2 = \alpha(t)^2 + |X(t)|^2 \geq \alpha(t)^2$  olur. Dahası, Sonuç 2.2.3.1. den  $\alpha(t) = \left\langle \frac{\partial}{\partial r}, \dot{\sigma}(t) \right\rangle = dr(\dot{\alpha}(t))$  olur. Bu nedenle

$$\begin{aligned} L(\sigma) &\geq L\left(\sigma \Big|_{[a_0, b_0]}\right) \\ &= \lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{a_0 + \delta}^{b_0} |\dot{\sigma}(t)| dt \\ &= \lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{a_0 + \delta}^{b_0} (\dot{\sigma}(t)) dt \\ &= \lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{a_0 + \delta}^{b_0} \frac{d}{dt} r(\sigma(t)) dt \\ &= r(\sigma(b_0)) - r(\sigma(a_0)) \\ &= R = L(\gamma) \end{aligned} \quad (2.21)$$

elde edilir. Bu yüzden  $\gamma$  minimalizedir.

$L(\sigma) = R$  olduğunu farzedelim. Bu durumda (2.21) deki eşitsizliklerde eşitlik sağlanır. Çünkü  $\sigma$ , birim hızlı eğri kabul etmiştik, ilk eşitlik  $a_0 = 0$  ve  $b_0 = b = R$  olduğunu gösterir çünkü diğer bir deyişle  $-l = a_0$  öncesi ve  $t = b_0$  sonrası  $\sigma$  nın parçası pozitif uzunluğu verir. İkinci eşitlik  $X(t) > 0$  olduğunu gösterir, bu yüzden  $\dot{\sigma}(t), \frac{\partial}{\partial r}$  nin pozitif çarpanıdır.  $\sigma$  birim hızlı olması için  $\dot{\sigma}(t), \frac{\partial}{\partial r}$  sahip olmalıyız. Böylece  $\sigma$  ve  $\gamma$ ,  $t = R$  zamanında  $q$  boyunca ilerleyen  $\frac{\partial}{\partial r}$  nin integral eğrileridir, bu yüzden  $\sigma = \gamma$  dir.

**SONUÇ 2.2.3.2.**  $p \in M$  etrafında herhangi jeodezik yuvarla birlikte  $r(x)$  radyal uzaklık fonksiyonu,  $p$  den  $x$  e Riemann uzaklığına eşit  $r(x) = \left( \sum_i (x^i)^2 \right)^{1/2}$  ile tanımlanır.

**İSPAT:**  $p$  den  $x$  e,  $\gamma$  radyal jeodeziği Teorem 2.2.3.2 tarafından minimalizedir. Hızının, normal koordinatlardaki hem  $g$  normu hem de Öklid normundaki birim vektör olan  $\frac{\partial}{\partial r}$  ye eşit olmasından  $\gamma$  nın uzunluğu  $r(x)$  olan Öklid uzunluğuna eşittir.

Bu sonuç,  $M$  deki jeodezik yuvarlar ve küreler için sadeleştirilmiş notasyonunu belirtir.  $U = \exp_p(B_R(0))$ ,  $p$  etrafında jeodezik yuvar ise, Sonuç 2.2.3.2.,  $U$  nunu  $p$  etrafında  $R$  yarıçaplı metrik yuvarına eşit olduğunu gösterir. Benzer şekilde,  $R$  yarıçaplı jeodezik küre,  $R$  de olan  $p$  den uzaklığı olan noktaların kümesidir. Şimdiden  $p$  nin normal komşuluk içinde duran böyle metrik yuvarlar ve kürelerin açık ve kapalı jeodezik küreler ve yuvarlar için  $B_R(p) = \exp_p(B_R(0))$ ,  $\bar{B}_R(p) = \exp_p(\bar{B}_R(0))$  ve  $S_R(p) = \exp_p(\partial B_R(0))$  notasyonlarını kullanacağız.

$\gamma_u^l$ , noktaların her lifti arasında minimize olacak şekilde herhangi  $t_0 \in I$   $U \in I$  komşuluğuna sahip ise,  $\gamma: I \rightarrow M$  eğrisi lokal minimize diyebiliriz. Önemlidir ki, minimize eğri, otomatik olarak lokal minimalizedir çünkü noktaların herhangi ikisi arasında minimalizedir.



**TEOREM 2.2.3.3.** Her Riemann jeodeziği lokal minimalizedir. [8]

**İSPAT:**  $\gamma: I \rightarrow M$  açık aralıkta tanımlanan bir jeodezik ve  $t_0 \in I$  olsun.  $w, \gamma(t_0)$  in düzgün normal komşuluğu olsun ve  $U \subset I$   $t_0$  ı içeren  $\gamma^{-1}(w)$  nin bağlantılı bileşenleri olsun.  $t_1, t_2 \in U$  ve  $g_i = \gamma(t_i)$  ise, düzgün normal komşuluğun tanımı,  $q_2$  nin  $q_1$  etrafında bir jeodezik yuvarında içerildiğini gösterir. Bu nedenle Teorem 2.2.3.2. ile  $q_1$  den  $q_2$  ye radyal jeodezik, bunların arasında tek bir minimize eğridir. Oysa  $\gamma$  nin kısıtlanması, aynı jeodezik yuvarda ilerleyen  $q_1$  den  $q_2$  ye bir jeodeziktir ve böylece  $\gamma$ , bu minimize jeodezik olmalıdır.

Gauss lemma ve onun sonuçları, ilk varyasyon formülü kullanmaksızın minimize eğrilerin, jeodezikler olduğu diğer ispatta kullanılır.

Teorem 2.2.2.1 nin diğer bir ispatını da verecek olursak  $\gamma: [a, b] \rightarrow M$  bir minimize eğri parçası olsun. önceki ispattaki gibi,  $t_0 \in [a, b]$  için  $\gamma(U)$  nun,  $w$  düzgün normal komşuluğundan içerilecek şekilde  $t_0$  in bağlantılı  $U$  komşuluğunu bulabiliriz. Daha sonra  $t_1, t_2 \in U$  için yukarıdaki gibi aynı ifade,  $\gamma(t_1)$  den  $\gamma(t_2)$  ye tek minimize eğrinin, onları birleştiren radyal jeodeziği olduğu gösterir.  $\gamma$  nin kısıtlanması, böyle bir minimize eğri olduğundan, bu radyal jeodezikle denk düşer. Bu nedenle  $\gamma$ ,  $t_0$  komşuluğundaki jeodezik denklemini çözer  $t_0$  keyfi olduğundan  $\gamma$ , jeodeziktir.

## BÖLÜM 3

### KONNEKSİYON VE KOORDİNATLAR

Riemann geometrisinde, jeodezikler ve kovaryant türevler için metrik özelliğini sağlayan Riemann manifoldu üzerinde belirli bir konneksiyon almamız gerekir. Bu şekilde  $\mathbb{R}^n$  uzayının gömme altmanifoldunda içerilen herhangi bir Riemann manifoldu üzerinde tek bir konneksiyonu belirten iki özelliğini tanımlanır. Bunlar; metrikle uyumluluğu ve simetrilidir.

Bunun yanında jeodeziklerin kollektif davranışları, üstel dönüşüm, Riemann normal komşulukları ve normal koordinatları tanımlanır.

#### 3.1 Riemann Konneksiyonu

Riemann geometrisinde hesaplamalara özellikle uygun olan her Riemann manifoldunda doğal konneksiyon vardır.  $\mathbb{R}^n$  uzayının altmanifoldundaki jeodezik; ivme vektör alanı, TM üzerinde sıfır tanjant projeksiyonu doğruya yakın olması konneksiyon diliyle belirtildiğinde;

$M \subset \mathbb{R}^n$  gömme altmanifoldu olsun. M deki herhangi bir vektör alanı,  $\mathbb{R}^n$  üzerinde düzgün bir vektör alanına genişletilebilir. X ve Y,  $\mathbb{R}^n$  uzayına keyfice genişletilebilir olsun.  $\exists p \in M$ ,  $\Pi^T : T_p(\mathbb{R}^n) \rightarrow T_p M$  ortogonal dönüşümü ve  $\bar{\nabla}$ : Öklid konneksiyonu olacak şekilde

$$\nabla^T : T(M) \times T(M) \rightarrow T(M)$$

$$(X, Y) \mapsto \nabla_x^T(Y) = \Pi^T(\bar{\nabla}_X Y)$$

dönüşüm olarak tanımlanır. Bu dönüşüm, aşağıdaki tanjant konneksiyon denilen M üzerinde lineer konneksiyon üretir.

**LEMMA 3.1.1.**  $\nabla^T$  operatörü, iyi tanımlıdır ve  $M$  üzerinde bir konneksiyondur.

**İSPAT:**  $p \in M$  noktasında  $\bar{\nabla}_X Y$  konneksiyonunun değeri sadece  $X_p$  ye bağlı olduğundan  $\nabla_x^T(Y)$ ,  $X$  'e genişletilen vektör alanının seçiminden bağımsızdır. Yani  $p$  deki  $\bar{\nabla}_X Y$  nin değeri,  $X_p$  nin başlangıç tanjant vektör eğrisi boyunca sadece  $Y$  nin değerine bağlıdır. Böylece  $\nabla^T$  iyi tanımlıdır.

$\nabla_x^T(Y)$ ,  $Y$  deki  $\mathbb{R}$  üzerinde ve  $X$  deki  $C^\infty(M)$  üzerinde olduğu bellidir. Konneksiyon olduğunu göstermek için sadece çarpım kuralının doğruluğu gösterilir.  $f \in C^\infty(M)$ ,  $\mathbb{R}^n$  uzayında keyfice genişletilebilir olsun.  $M$  boyunca

$$\begin{aligned}\nabla_x^T(fY) &= \Pi^T(\bar{\nabla}_X(fY)) \\ &= (Xf)\Pi^T Y + f\Pi^T(\nabla_x^T Y) \\ &= (Xf)Y + f(\nabla_x^T Y)\end{aligned}\quad (3.1)$$

elde ederiz. Böylece  $\nabla^T$ , konneksiyondur.

Tanjant konneksiyon yerine belirlenen metrikli  $\mathbb{R}^n$  uzayının altmanifoldları alınmasıyla genelliği değişmez.  $\mathbb{R}^n$  uzayı üzerinde Öklid konneksiyonu,

$$\bar{\nabla}_X \langle Y, Z \rangle = \langle \bar{\nabla}_X Y, Z \rangle + \langle Y, \bar{\nabla}_X Z \rangle \quad (3.2)$$

şeklindedir. Bu şekilde  $g$ ,  $M$  manifoldu üzerinde bir Riemann metriği olsun.  $\forall X, Y, Z$  vektör alanları için  $\nabla$  lineer konneksiyonu,

$$\nabla_X \langle Y, Z \rangle = \langle \nabla_X Y, Z \rangle + \langle Y, \nabla_X Z \rangle \quad (3.3)$$

şeklindedir ve bu durumda  $g$  ile uyumludur. [6]

**LEMMA 3.1.2.** Aşağıdaki şartlar bir Riemann manifoldu üzerinde  $\nabla$  lineer konneksiyonu için denktir:

- (a)  $\nabla$ ,  $g$  ile uyumludur.
- (b)  $\nabla g \equiv 0$  tir.
- (c)  $V, W$  herhangi  $\gamma$  eğrisi boyunca bir vektör alanı ise

$$\frac{d}{dt} \langle V, W \rangle = \langle D_t V, W \rangle + \langle V, D_t W \rangle$$

olur.

- (d)  $V, W$  bir  $\gamma$  eğrisi boyunca paralel vektör alanıysa bu durumda  $\langle V, W \rangle$  sabittir.

(e)  $\forall t_0, t_1$  için  $P_{t_0, t_1} : T_{\gamma(t_0)} M \rightarrow T_{\gamma(t_1)} M$  paralel dönüşümü izometridir.

Ayrıca tanjant konneksiyonu

$$\tau : T(M) \times T(M) \rightarrow T(M)$$

$$(X, Y) \mapsto \tau(X, Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y]$$

olarak tanımlı  $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ -tensör alanı şeklindeki burulma fonksiyonunu içerir.

Eğer burulması yoksa yani

$$\nabla_X Y - \nabla_Y X \equiv [X, Y]$$

ise,  $\nabla$  lineer konneksiyona *simetrik* denir. [8]

**LEMMA 3.1.3.**  $M \subset \mathbb{R}^n$  gömme altmanifoldu üzerinde tanjant konneksiyonu simetriktir. [8]

**TEOREM 3.1.1** (Riemann geometrinin temel lemması)

$(M, g)$  bir Riemann manifoldu olsun.  $M$  üzerinde  $g$  ile uyumlu ve simetrik olan bir tek  $\nabla$  lineer konneksiyonu vardır.

Bu konneksiyona,  $g$  nin *Riemann konneksiyonu* ya da *Levi-Civita konneksiyonu* denir.

**İSPAT:**  $\nabla$  teklifi ispatlamak için,  $X, Y, Z \in T(M)$  keyfi vektör alanları olsun.  $X, Y, Z$  için

$$\begin{aligned} X\langle Y, Z \rangle &= \langle \nabla_X Y, Z \rangle + \langle Y, \nabla_X Z \rangle \\ Y\langle Z, X \rangle &= \langle \nabla_Y Z, X \rangle + \langle Z, \nabla_Y X \rangle \\ Z\langle X, Y \rangle &= \langle \nabla_Z X, Y \rangle + \langle X, \nabla_Z Y \rangle \end{aligned} \quad (3.4)$$

denklemlerini elde ederiz. Herbir basamakta son terimde simetrik şartını kullanarak

$$\begin{aligned} X\langle Y, Z \rangle &= \langle \nabla_X Y, Z \rangle + \langle Y, \nabla_X Z \rangle + \langle Y, [X, Z] \rangle \\ Y\langle Z, X \rangle &= \langle \nabla_Y Z, X \rangle + \langle Z, \nabla_Y X \rangle + \langle Z, [Y, X] \rangle \\ Z\langle X, Y \rangle &= \langle \nabla_Z X, Y \rangle + \langle X, \nabla_Z Y \rangle + \langle X, [Z, Y] \rangle \end{aligned} \quad (3.5)$$

şeklinde yazılabilir. Bu denklemlerin ilk ikisini toplayıp üçüncüsünü çıkarttığımızda

$$\begin{aligned} X\langle Y, Z \rangle + Y\langle Z, X \rangle - Z\langle X, Y \rangle \\ = 2\langle \nabla_X Y, Z \rangle + \langle Y, [X, Z] \rangle + \langle Z, [Y, X] \rangle - \langle X, [Z, Y] \rangle \end{aligned} \quad (3.6)$$

elde ederiz.

Son olarak,  $\langle \nabla_X Y, Z \rangle$  için çözümünde

$$\langle \nabla_X Y, Z \rangle = \frac{1}{2} (X\langle Y, Z \rangle + Y\langle Z, X \rangle - Z\langle X, Y \rangle - \langle Y, [X, Z] \rangle - \langle Z, [Y, X] \rangle + \langle X, [Z, Y] \rangle) \quad (3.7)$$

bulunur.

$\nabla^1, \nabla^2$  simetrik ve  $g$  ile uyumlu olan iki konneksiyon olduğunu varsayalım. (3.7) nin sağ tarafı, konneksiyona bağlı olmadığından  $\forall X, Y, Z$  için  $\langle \nabla_X^1 Y - \nabla_X^2 Y, Z \rangle = 0$  olduğu çıkar. Böylece bütün  $X$  ve  $Y$  için  $\nabla_X^1 Y = \nabla_X^2 Y$  meydana gelir; bu yüzden  $\nabla^1 = \nabla^2$  olur. Bu durumda her bir koordinat haritasındaki böyle bir konneksiyonun var olduğu gösterilmiş olur. Tekliği için, kapsayan değişik haritaların birleşiminde konneksiyonların kurulmuş olduğu sağlatılmalıdır.

$(U, (x^i))$ , lokal koordinat haritası olsun. Lie braketi sıfır olan koordinat vektör alanına (3.7) yi uygulayarak

$$\langle \nabla_{\partial_i} \partial_j, \partial_\ell \rangle = \frac{1}{2} (\partial_i \langle \partial_j, \partial_\ell \rangle + \partial_j \langle \partial_\ell, \partial_i \rangle - \partial_\ell \langle \partial_i, \partial_j \rangle) \quad (3.8)$$

elde ederiz.

Metrik katsayılarının tanımları ve Christoffel sembolleri;

$$g_{ij} = \langle \partial_i, \partial_j \rangle = \begin{cases} 0 & , i \neq j \\ 1 & , i = j = 2, 3, 4 \\ -1 & , i = j = 1 \end{cases}$$

ve  $\nabla_{\partial_i} \partial_j = \Gamma_{ij}^k \partial_k$  şeklinde tekrar ifade edilir. (3.8) e bunları yerleştirirsek

$$\begin{aligned} \partial_i \langle \partial_j, \partial_\ell \rangle &= \langle \nabla_{\partial_i} \partial_j, \partial_\ell \rangle + \langle \partial_j, \nabla_{\partial_i} \partial_\ell \rangle \\ &= \Gamma_{ij}^k g_{k\ell} + \Gamma_{il}^k g_{kj} \end{aligned} \quad (3.9)$$

$$\begin{aligned} \partial_j \langle \partial_\ell, \partial_i \rangle &= \langle \nabla_{\partial_j} \partial_\ell, \partial_i \rangle + \langle \partial_\ell, \nabla_{\partial_j} \partial_i \rangle \\ &= \Gamma_{j\ell}^k g_{ki} + \Gamma_{ij}^k g_{k\ell} \end{aligned} \quad (3.10)$$

$$\begin{aligned} \partial_\ell \langle \partial_i, \partial_j \rangle &= \langle \nabla_{\partial_\ell} \partial_i, \partial_j \rangle + \langle \partial_i, \nabla_{\partial_\ell} \partial_j \rangle \\ &= \Gamma_{\ell i}^k g_{kj} + \Gamma_{\ell j}^k g_{ki} \end{aligned} \quad (3.11)$$

$$(3.9) + (3.10) - (3.11) = \frac{1}{2} (2\Gamma_{ij}^k g_{k\ell} + \Gamma_{il}^k g_{kj} + \Gamma_{j\ell}^k g_{ki} - \Gamma_{\ell i}^k g_{kj} - \Gamma_{\ell j}^k g_{ki})$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2} (2\Gamma_{ij}^k g_{kl} + (\Gamma_{il}^k - \Gamma_{li}^k) g_{kj} + (\Gamma_{jl}^k - \Gamma_{lj}^k) g_{ki}) \\
&= \Gamma_{ij}^k g_{kl}
\end{aligned} \tag{3.12}$$

eşitliğini verir.

Son olarak,  $g_{m\ell} g^{\ell k} = \delta_m^k$  olan notasyonla ve  $g^{\ell k}$  ters matrisiyle her iki tarafın çarpılmasıyla

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} g^{k\ell} (\partial_i g_{j\ell} + \partial_j g_{i\ell} - \partial_\ell g_{ij}) \tag{3.13}$$

elde edilir.

Bu formül, her bir atlas içinde bir konneksiyon tanımlar ve  $\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k$  olur. Böylece sadece metrikle uyumluluğunu irdelemek gerekir. Bunun için de  $\nabla g = 0$  olduğu gösterilir. Koordinat çatisı açısından  $\nabla g$  nin bileşenleri

$$g_{ij,k} = \partial_k g_{ij} - \Gamma_{ki}^\ell g_{\ell j} - \Gamma_{kj}^\ell g_{i\ell}$$

dir. Burada

$$\begin{aligned}
\Gamma_{ki}^\ell g_{\ell j} + \Gamma_{kj}^\ell g_{i\ell} &= \frac{1}{2} (\partial_k g_{ij} + \partial_i g_{kj} - \partial_j g_{ki}) + \frac{1}{2} (\partial_k g_{ji} + \partial_j g_{ki} - \partial_i g_{kj}) \\
&= \partial_k g_{ij}
\end{aligned} \tag{3.14}$$

sonucundan yararlanarak  $g_{ij,k} = 0$  bulunur.

Yukarıdaki konneksiyona göre jeodeziklere *Riemann jeodezikler* denir. Bu tanımda en önemli sonuç, aşağıdaki lemmadır. Yani  $\gamma$  bir Riemann manifoldu üzerinde eğri ise, her hangi  $t$  zamanda  $\gamma$  eğrisinin hızı  $|\dot{\gamma}|$ , eğrinin hız vektör uzunluğudur.  $|\dot{\gamma}|$ ,  $t$  den bağımsız ise sabit hız, 1'e eşit ise *birim hızlı* denir.

**LEMMA 3.1.4.** Bütün Riemann jeodezikleri, sabit hızlı eğriliklerdir.

**İSPAT:**  $\gamma$ , bir Riemann jeodeziği olsun.  $\dot{\gamma}$ ,  $\gamma$  boyunca paralel olduğundan  $|\dot{\gamma}| = \langle \dot{\gamma}, \dot{\gamma} \rangle^{1/2}$  uzunluğu sabittir.

**TEOREM 3.1.2.** (Riemann konneksiyonun doğallığı)

$\varphi : (M, g) \rightarrow (\tilde{M}, \tilde{g})$  izometri olduğunu farzedelim.

$$(a) \varphi_*(\nabla_X Y) = \tilde{\nabla}_{\varphi_*X} (\varphi_*Y)$$

şeklinde  $\varphi$ ,  $g$  nin  $\nabla$  Riemann konneksiyonunu  $\tilde{g}$  nin  $\tilde{\nabla}$  Riemann konneksiyonuna götürür.

(b)  $V, M$  deki bir  $\gamma$  eğrisi boyunca bir vektör alanı ise, bu durumda

$$\varphi_*D_t V = \tilde{D}_t(\varphi_*V)$$

dir.

(c)  $\varphi$ , jeodezikleri jeodeziklere götürür:

$\gamma$  eğrisi,  $M$  deki  $p$  başlangıç noktalı ve  $V$  başlangıç hızlı jeodezikler ise bu durumda  $\varphi \circ \gamma$ ,  $\tilde{M}$  daki  $\varphi(p)$  başlangıç noktalı ve  $\varphi_*V$  başlangıç hızlı jeodeziktir. [8]

**İSPAT:** (a)  $\varphi^*\tilde{\nabla} : T(M) \times T(M) \rightarrow T(M)$

$$(X, Y) \mapsto (\varphi^*\tilde{\nabla})_X Y = \varphi_*^{-1}(\tilde{\nabla}_{\varphi_*X}(\varphi_*Y))$$

şeklinde dönüşüm tanımlanır.

$\varphi^*\tilde{\nabla}$ ,  $M$  üzerinde simetrik bir konneksiyondur.(pull-back)  $g$  ile uyumlu olduğundan Riemann konneksiyonun tekliğinden  $\varphi^*\tilde{\nabla} = \nabla$  olur.

$$(b) \varphi^*\tilde{D}_t : T(\gamma) \rightarrow T(\gamma)$$

şeklindeki formülle operatör tanımlanır ve  $D_t$  ye eşittir. Bir Riemann manifoldu üzerinde konneksiyonu göstermek için, jeodezik bölgesel olarak minimize olur. Bu durumda konneksiyonun simetrisi belirleyicidir. Ayrıca  $\mathbb{R}^n$  uzayının gömme altmanifoldu üzerinde tanjant konneksiyonu simetrik ve metrikle uyumlu olduğundan Riemann konneksiyonu, tanjant konneksiyonuyla denktir. Bu konneksiyon belirlenen metrikli  $\mathbb{R}^n$  uzayının  $M$  manifoldu, teğetsel konneksiyonu, simetrik ve uyumluluğu olan Riemann konneksiyon şeklinde adlandırılır.

### 3.2. Üstel Dönüşüm

Riemann jeodezikleri için başlangıç noktası ve\veya başlangıç vektörü geçerli ise jeodezikler nasıl değişebilir. Bu konuyu irdeleyeceğiz.

Başlangıç verisindeki jeodeziklerin bağımlılığı, üstel dönüşüm olan Riemann geometrisinin temelini oluşturan tanjant demetlerinden manifolda bir dönüşümle kodlanır.

**TANIM 3.2.1.**  $\mathcal{E} := \{v \in TM : \gamma_v, [0,1] \text{ içeren aralıktadır tanımlanır.}\}$ ,  $TM$  nin alt kümesi üstel dönüşümün tanım kümesi olsun.

$$\exp: \mathcal{E} \rightarrow M$$

$$V \mapsto \exp(V) = \gamma_V(1)$$

üstel dönüşümü tanımlanır.  $\forall p \in M$  için  $\exp_p$  kısıtlanmış üstel dönüşümü,  $\exp$  üstel dönüşümünün  $\mathcal{E}_p = \mathcal{E} \cap T_p M$  kümesine kısıtlanmasıdır.[8]

#### TEOREM 3.2.1. (Üstel dönüşümün özellikleri)

(a)  $\mathcal{E}$ , sıfır kesitini içeren  $TM$  nin bir açık altkümesidir ve  $\forall \mathcal{E}_p$  kümesi için sıfıra göre yıldız şekillidir (star-shaped).

(b)  $\forall V \in TM$  için  $\gamma_V$  jeodeziği, tanımlanan bütün  $t$ ' ler için

$$\gamma_V(t) = \exp(tV)$$

olarak verilir.

(c) Üstel dönüşüm  $C^\infty$  dur.

İspatlamadan önce bazı özellikleri vermeliyiz. [8]

**LEMMA 3.2.1.** Herhangi bir  $V \in TM$  ve  $c, t \in \mathbb{R}$  için tanımlandığında

$$\gamma_{cV}(t) = \gamma_V(ct)$$

olur. [8]

**İSPAT :**  $\gamma_V$  nin tanım kümesinin,  $I \subset \mathbb{R}$  açık aralığında olduğunu farzedelim.

Basitleştirmek için,  $\gamma = \gamma_V$  yazın ve  $C^{-1}I = \{t : ct \in I\}$  diye ifade edilen  $\tilde{\gamma}(t) = \gamma(ct)$  nin yeni  $\tilde{\gamma}$  eğrisini tanımlayın  $\tilde{\gamma}$ ' nin  $p$  başlangıç noktalı ve  $cV$  başlangıç hızlı jeodezik olduğunu ve daha sonra  $\gamma_{cV}$  na eşit olması gereken teklifi tarafından takip ettiğini göstereceğiz.



Bu,  $\tilde{\gamma}(0) = \gamma(0) = p$  tanımından kaynaklanmaktadır. Herhangi bir yerel koordinata  $\gamma(t) = (\gamma^1(t), \dots, \gamma^n(t))$  yazarsak, dizi kuralı

$$\begin{aligned}\tilde{\gamma}^i(t) &= \frac{d}{dt} \gamma^i(ct) \\ &= \gamma^i(ct)\end{aligned}\tag{3.15}$$

denklemini verir.

Özellikle,  $\tilde{\gamma}(0) = c\dot{\gamma}(0) = cV$  olarak takip eder.

Şimdi  $D_t$  ve  $\tilde{D}_t$  arasında  $\gamma$  ve  $\tilde{\gamma}$  boyunca kovaryant diferansiyel operatörlerini simgelesin. Tekrar koordinatlara zincir kuralını uygulayarak

$$\begin{aligned}\left( \tilde{D}_t \dot{\gamma}(t) = \frac{d}{dt} \dot{\gamma}^k(t) + \Gamma_{ij}^k \dot{\gamma}^i(t) \dot{\gamma}^j(t) \right) \partial_k \\ = (c^2 \dot{\gamma}^k(ct) + c^2 \Gamma_{ij}^k(\gamma(ct)) \dot{\gamma}^i(ct) \dot{\gamma}^j(ct)) \partial_k \\ = c^2 D_t \dot{\gamma}(ct) = 0\end{aligned}\tag{3.16}$$

Bu nedenle  $\hat{\gamma}$ , bir jeodeziktir ve dolayısıyla söylendiği gibi  $\tilde{\gamma} = \gamma_{cV}$  dir.

Teorem 3.2.1 in ispatı  $t=1$  için;  $\exp(cV) = \gamma_{cV}(1) = \gamma_V(c)$  olduğu söylenir ki bu da (b) yi verir. Dahası  $V \in \mathcal{E}_p$ ,  $\gamma_V$  tanımı en az  $[0,1]$  aralığında tanımlanır. Bunun için  $0 \leq t \leq 1$  aldığımızda teorem,  $\exp(tV) = \gamma_{tV}(1) = \gamma_V(t)$  tanımlı olduğunu söyler. Bu,  $\mathcal{E}_p$ 'nin yıldız-şekli olduğunu gösterir.

$(x^i)$ ,  $U \subset M$  açık kümesi üzerinde herhangi yerel koordinatlar olsun ve  $(x^i, v^i)$ ,  $\pi^{-1}(u)$  üzerinde

$$\sigma_{(x,v)} = V^k \frac{\partial}{\partial X^k} - V^i V^j \Gamma_{ij}^k(x) \frac{\partial}{\partial V^k}\tag{3.17}$$

vektör alanını tanımlayalım.  $\sigma$  nin integral eğrileri

$$\dot{x}^k(t) = V^k(t),$$

$$\dot{V}^k(t) = -V^i(t)V^j(t)\Gamma_{ij}^k(x(t)) \quad (3.18)$$

şeklinde bulunur.

Bu,  $V^k = \dot{x}^k$  nı (3.18) denkleminde yerine koyduğumuzda birinci-mertebeden sistem olduğunu gösterir.  $\pi^{-1}(u)$  üzerinde  $\sigma$  nin integral eğrileri  $\pi: TM \rightarrow M$  projeksiyonu altındaki jeodeziklere iz düşebilir.  $(\pi(X(t), V(t)) = X(t))$  dir; tersi olarak herhangi bir  $\gamma(t) = (X'(t), \dots, X^n(t))$  jeodeziği,  $v'(t) = \dot{x}^i(t)$  alınarak  $\sigma$  integral eğrisine taşınır.

$\sigma$  nin önemi, onun aslında jeodezik vektör alanı denilen  $TM$  tanjant demetinin total uzayına genişlemesinden kaynaklanır. Aşağıda kanıtlanacak olan herhangi  $f \in C^\alpha(TM)$ , için  $\sigma, f$  üzerinde

$$\sigma f(p, V) = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} f(\gamma_V(t), \dot{\gamma}_V(t)) \quad (3.19)$$

şeklinde rol oynar.

Burada ve her uygun olduğunda,  $V$  nin tanjant olduğu noktayı vurgulamak istememize bağlı olarak,  $V \in T_p M$  elemanı için dönüşümlü olarak  $(p, V)$  ve  $X$  notasyonlarını kullanırız.) Çünkü bu formül koordinatlardan bağımsızdır, bu da (3.17) deki verileri  $\sigma$  nin çeşitli tanımlarının farklı koordinat sistemlerinde birbirini tuttuğunu gösterir.

$\sigma$  'nin (3.19) u karşıladığını ispatlamak için,  $\gamma_V(t)$  jeodeziklerin bileşenlerin  $x^i(t) = \dot{x}^i(t)$  şeklinde yazıyoruz. (3.18) deki dizi kuralını ve jeodezik denklemini kullanarak (3.19) un sağ tarafı

$$\begin{aligned} & \left[ \frac{\partial f}{\partial X^k} \left( X(t), V(t) \dot{X}^k(t) + \frac{\partial f}{\partial V^k} \left( X(t), V(t) \dot{\phi}^k(t) \right) \right]_{t=0} \\ &= \frac{\partial f}{\partial X^k} (p, V) V^k - \frac{\partial f}{\partial V^k} (p, V) V^i V^j \Gamma_{ij}^k(p) \\ &= \sigma f(p, V) \end{aligned} \quad (3.20)$$

olur.

Sonuçta  $\theta$  i içeren açık bir aralıkta tanımlı  $(p, V)$  başlangıçlı  $\theta_{(p, V)} = \theta(t, (p, V))$  eğrisini alalım. Bu bize,  $\sigma$  nin integral eğrisi olan  $\theta: \mathcal{G} \rightarrow TM$ ,  $C^\infty$  dönüşümü ve  $\{0\} \times TM \subset R \times TM$  nin 0 açık komşuluğu olduğunu gösterir.

Şimdi  $(p, V) \in \varepsilon$  olduğunu farz edelim. Bu  $\gamma_V$  jeodeziğinin en az  $[0, 1]$  aralığında tanımlandığı anlamına gelir ve böylece  $(p, V) \in TM$  de başlayan  $\sigma$  nin integral eğrisidir.  $(1, (p, V)) \in \varphi$  olduğundan,  $\sigma$  nin akısının tanımlandığı  $R \times TM$  deki  $(1, (p, V))$  nin açık komşuluğu vardır. Bu da  $(p, V)$  nin açık bir komşuluğunun var olduğu anlamına gelir. Bu,  $\varepsilon$  nun açık olduğunu gösterir.

Sonuç olarak jeodezikler,  $\sigma$  nin integral eğrilerinin projeksiyonu olduğundan, üstel dönüşümün her tanımlı olduğu durumda

$$\exp(V) = \gamma_V(1) = \pi \circ \theta(1, (p, V))$$

şeklinde ifade edilir ve bu nedenle  $\exp$ ,  $C^\infty$  dur.

Riemann konneksiyonun doğallığı ve jeodeziklerin tekliğini aşağıdaki üstel dönüşümün önemli doğallık özelliğine dönüştür.

### TEOREM 3.2.2. (Üstel dönüşümün doğallığı)

$\varphi: (m, g) \rightarrow (\bar{m}, \bar{g})$  bir izometri olduğunu varsayalım. Daha sonra herhangi  $p \in M$  için aşağıdaki diagrama

$$\begin{array}{ccc} T_p M & \xrightarrow{\varphi_*} & T_{\varphi(p)} \tilde{M} \\ \exp_p \downarrow & & \downarrow \exp_{\varphi(p)} \\ M & \xrightarrow{\varphi} & \tilde{M} \end{array}$$

karşılık gelir. [8]

### 3.3. Normal Komşuluklar ve Normal Koordinatlar

Herhangi bir  $p \in M$  noktasını alalım. Bu noktada tanımlı üstel dönüşüm,  $T_p M$  tanjant uzayını  $\varepsilon_p \subset M$  açık kümesine götürür.

#### LEMMA 3.3.1. (Normal Komşuluk Lemması)

Herhangi bir  $p \in M$  için

$$\exp_p : \mathcal{G} \rightarrow U$$

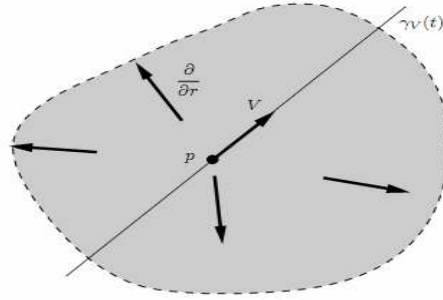
diffeomorfizm olan  $p \in M$  nin bir  $U$  komşuluğu ve  $T_p M$  de orijinin bir  $\mathcal{G}$  komşuluğu vardır. [8]

**İSPAT:**  $(\exp_p)_*$ , sıfırda izdüşürülebilir olduğunu göstermek için ters fonksiyon teoreminden yararlanılır.  $T_p M$  bir vektör uzayı olduğundan  $T_0(T_p M) = T_p M$  doğal bir özdeşlik dönüşümüdür. Bu tanımlama altında  $\exp_p (\exp_p)_* : T_0(T_p M) = T_p M \rightarrow T_p M$  birim dönüşümdür.

Keyfi bir  $V \in T_p M$  vektörünü alalım.  $(\exp_p)_* V$  hesaplamak için, başlangıç tanjant vektörü  $V$  olan, 0 da başlayan  $T_p M$  deki  $\tau$  eğrisini seçmeye ve  $\exp_p \circ \tau(t)$  bileşik eğrisinin başlangıç tanjant vektörünü hesaplamaya ihtiyacımız vardır. Böyle bir eğri  $\tau(t) = tV$  olduğu açıktır. Böylece

$$(\exp_p)_* V = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} (\exp_p \circ \tau)(t) = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \exp_p(tV) = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \gamma_V(t) = V \quad (3.21)$$

$p \in M$  nin herhangi  $U$  açık komşuluğu,  $p$  nin normal komşuluğu denilen  $0 \in T_p M$  nin yıldız-şekilli açık komşuluğunun  $\exp_p$  nin  $\beta_\varepsilon(0) \in T_p M$  yuvarı üzerinde diffeomorfizmi ise (yuvarın yarıçapı,  $g$  ile tanımlanan norma göre ölçülür), daha sonra  $\exp_p(\beta_\varepsilon(0))$  görüntü kümesine  $M$  deki *jeodezik yuvar* denir. Ayrıca,  $\bar{\beta}_\varepsilon(0)$  kapalı yuvarı,  $\exp_p$  diffeomorfizm olduğu  $V \in T_p M$  açık bir kümesini içerir ise,  $\exp_p(\bar{\beta}_\varepsilon(0))$  *kapalı jeodezik yuvar* ve  $\exp_p(\partial\bar{\beta}_\varepsilon(0))$  *jeodezik küre* denir.



Şekil 4.1. Riemann normal koordinatları

$T_p M$  için  $\{E_i\}$  ortonormal bazı,  $E: \mathbb{R}^n \rightarrow T_p M$

$$(x^1, x^2, \dots, x^n) \mapsto E(x^1, x^2, \dots, x^n) = x^i E_i$$

izomorfizmasını verir.  $U, p$  nin normal komşuluğu ise,

$$\varphi = E^{-1} \circ \exp_p^{-1}: U \rightarrow \mathbb{R}^n$$

koordinat haritasını elde etmek için üstel dönüşümle bu izomorfizmayı birleştirebiliriz. Böyle herhangi koordinatlara,  $p$  merkezli (Riemann) *normal koordinatları* denir.  $p \in M$  ve  $p$  nin bir  $U$  normal komşuluğu verildiğinde, normal koordinat haritaları ve ortonormal bazlar arasında (1-1) eşleme vardır.

Herhangi bir  $p$  merkezli normal koordinat haritasında

$$\frac{\partial}{\partial r} := \frac{x^i}{r} \frac{\partial}{\partial x^i}$$

ile  $\frac{\partial}{\partial r}$  birim radyal vektör alanı ve

$$r(x) = \left( \sum_i (x^i)^2 \right)^{1/2}$$

ile *radyal uzaklık fonksiyonu* tanımlanır. Öklid uzayından  $r(x)$  orijine uzaklıktır ve  $\frac{\partial}{\partial r}$ , orijin boyunca düz doğruya teğet birim vektör alanıdır. Bir sonraki önerme gösterir ki, normal koordinatlardaki herhangi bir metrik için özel geometrik anlama da sahiptir.

**TEOREM 3.3.1.** (Normal Koordinatların Özellikleri)

$(U, (x^i))$ ,  $p$  merkezli herhangi bir normal koordinat haritası olsun.

(a) Herhangi bir  $V \in V^i \partial_i \in T_p M$  için  $V$  başlangıç hızlı vektörü  $p$  başlangıçlı  $\gamma_V$  jeodeziği,  $U$  içerisinde kaldıkça

$$\gamma_V(t) = (tV^1, \dots, tV^n)$$

radyal doğru parçası ile normal koordinatlarda temsil edilir.

(b)  $p$  nin koordinatları,  $(0, \dots, 0)$  dir.

(c)  $p$  de metriğin bileşenleri  $\eta_{ij} = \delta_{ij}$  dir.

(d)  $U$  da içerilen herhangi bir  $\{x : r(x) < \varepsilon\}$  Öklid yuvarı,  $M$  deki jeodezik yuvardır.

(e) Herhangi bir  $q \in U - p$  noktasında  $\frac{\partial}{\partial r}$ ,  $p$  den  $g$  ye birim hızlı jeodeziğin hız vektörleridir ve bu nedenle  $g$  ye göre birim uzunluğuna sahiptir.

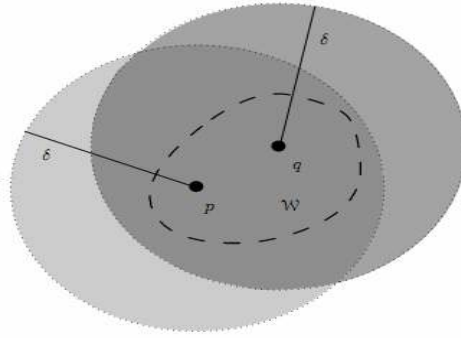
(f)  $g$  nin birinci kısmi türevleri ve Christofel sembolleri  $p$  de sıfırdır.[8]

Normal koordinatlar, Riemann geometrisindeki hesaplamalar için önemli bir araçtır. Bu yüzden önceki önermedeki ifade edilen özellikler dikkatli bir şekilde irdelenmelidir. Bu ispatlar,  $p$  başlangıçlı jeodeziklerin normal koordinatlarda basit formüllere sahip olduğu gerçeğinin apaçık sonuçlarıdır. Bu formülden dolayı,  $p$  başlangıcı ve  $p$  nin binormal komşuluğunda uzanan jeodeziklere, radyal jeodezikler denir. (fakat uyarlamak gerekir ki,  $p$  boyunca ilerlemeyen jeodezikler genelde normal koordinatlarda basit bir forma sahip değildir.)

Daha sonra jeodeziğin minimize özelliklerini çalışmada kullanmak için normal komşulukların içeriğinin aşağıda düzenlenmesine ihtiyacımız vardır.  $w_i \in W \subset M$  açık kümesine  $w_i$  nin noktalarının etrafında  $\delta > 0$  yarıçaplı jeodezik yuvar tanımlanıyor ise, *düzgün normal* denir.

**LEMMA 3.3.2. (Düzgün Normal Komşuluk Lemması)**

$p \in M$  ve  $p$  nin herhangi bir  $U$  komşuluğu verilsin,  $U$  da içerilen  $p$  nin düzgün normal komşuluğu vardır. [8]



Şekil 4.2. Düzgün normal komşuluğu

**İSPAT:** Üstel dönüşüm,  $TM$  nin açık bir  $\varepsilon$  alt kümesi üzerinde tanımlanır. Bunun için de

$$F : \varepsilon \rightarrow M \times M$$

$$(q, v) \mapsto F(q, V) = (q, \exp_p V)$$

dönüşümü tanımlanır.  $p$  merkezli  $M$  için  $(x^i)$  normal koordinat haritası seçilsin ve  $(x^i, v^i)$ ,  $TM$  üzerinde eşlenmiş standart koordinatları belirtmiş olsun. bu koordinatlarda,  $(p, 0)$  da  $F$  nin Jakobien matrisi, dönüşümlü olan

$$F_* = \begin{pmatrix} \frac{\partial x^i}{\partial x^j} & \frac{\partial x^i}{\partial v^j} \\ \frac{\partial \exp^i}{\partial x^j} & \frac{\partial \exp^i}{\partial v^j} \end{pmatrix} = \begin{cases} \begin{pmatrix} Id & 0 \\ * & Id \end{pmatrix} & i = j = 2,3,4 \\ \begin{pmatrix} -Id & 0 \\ * & -Id \end{pmatrix} & i = j = 1 \end{cases}$$

şeklinde yazılır. Böylece ters fonksiyon teoremiyle  $F$ ,  $TM$  deki  $(p, 0)$  noktasında tanımlı komşuluk üzerinde bir diffeomorfizmdir.

Herhangi  $Y \in M$  açık kümesi ve herhangi  $\delta > 0$  için,  $Y_\delta$ ,

$$Y_\delta = \{(p, v) \in TM : p \in Y, |v| < \delta\}$$

şeklinde tanımlı olup  $TM$  nin altkümesini belirtir. Standart koordinatlardaki  $|v| < \delta$  eşitsizliğini yazarak  $Y_\delta$  nin  $TM$  topolojisinde açık olduğu kolayca görülür.  $(p, 0) \in Y_\delta \subset \mathcal{G}$  şeklinde  $Y_\delta$  formun bazı kümelerinin olduğunu göstereceğiz.  $TM$  üzerindeki topolojiye göre lokal trivializasyonlar birim dönüşüm altında açık kümelerin çarpımı tarafından oluşturulur.  $|Y|_\delta$  kısıtlanmış normu bize,

$$\mathcal{X} = \{(x, v) : r(x) < 2\varepsilon, \varepsilon > 0\}$$

kümesinin varlığını gösterir.  $K = \{(x, v) : r(x) \leq 2\varepsilon, |v|_{\bar{g}} = 2\varepsilon\}$  kompakt kümesi üzerinde  $g$  normu sürekli ve sıfır değildir. Bu nedenle pozitif sabitler üzerinde sınırlıdır. Bu normlar, herhangi  $\lambda$  pozitif sabiti için,  $|\lambda V| = \lambda|V|$  sağlanmasıyla homojen olduğunda;  $V \in T_x M, r(x) \leq \varepsilon$  durumda  $c|V|_{\bar{g}} \leq |V|_{\bar{g}} \leq C|V|_{\bar{g}}$  olduğunu takip eder.

Şimdi  $Y = \{x : r(x) < \varepsilon\} \subset M$  kümesi ve  $\delta = c\varepsilon$  olsun. Seçimlerimizin her  $(x, v) \in Y_\delta$  durumunda  $|v|_{\bar{g}} \leq (1/c)|v|_{\bar{g}} < \varepsilon$  olduğunu garanti eder. Bu yüzden  $Y_\delta \subset \mathcal{X}$  olur.

F,  $Y_\delta$  üzerinde diffeomorfizm olduğundan ve  $(p, 0)$  dan  $(p, p)$  ye götürdüğünden  $(p, p) \in W \times W \subset F(Y_\delta)$  şeklinde  $W \times W \subset M \times M$  açık çarpım kümesi vardır.  $W$  kısıtlanması gerekliyse  $W \subset Y$  olduğunu da kabul edebiliriz.  $W$  kümesi hakkında iki iddia oluşur: Herhangi  $q \in W$  için (1)  $\exp_q, B_\delta(0) \subset T_q M$  üzerinde diffeomorfizmdir ve (2)  $W \subset \exp_q(B_\delta(0))$  dir.  $W$  nin,  $p$  nin gereken düzgün normal komşuluğu olduğunu bu iddialardan sonuçlanır.

İddia (1) ispatı için;  $\forall q \in W$  için  $\exp_q$  nun  $B_\delta(0) \subset T_q M$  altkümesi üzerinde tanımlı olan,  $F(q, V) = (q, \exp_q V)$  her  $|V|_q < \delta$  olduğunda  $F$  nin  $Y_\delta$  üzerinde tanımlı olduğuna dikkat edelim. Çünkü  $F, F(q, V) = (q, \exp_q V)$  formuna sahiptir. Tersine ise,  $C^\infty$  olan  $\varphi$  dönüşümü için benzer  $F^{-1}(q, V) = (q, \varphi(q, y))$  formuna sahiptir.  $\varphi_q(y) = \varphi(q, y)$  notasyonunu kullanalım. Çünkü daha sonra  $F \circ F^{-1}, Y_\delta$  üzerinde birim dönüşümü olup,  $\varphi_q \circ \exp_q$  nin  $\forall q \in W \subset Y$  için  $B_\delta(0) \subset T_q M$  üzerinde birim olduğunu takip eder. Benzer şekilde  $F(Y_\delta)$  üzerinde  $F \circ F^{-1} = Id$ ,  $\exp_q \circ \varphi_q$  nin  $\exp_q(B_\delta(0))$  üzerinde birim olduğu anlamına gelir, bu yüzden İddia (1) ispatlanır.

Son olarak iddia 2 ye bakalım.  $(q, y) \in W \times W$  keyfi olsun.  $W \times W \subset F(Y_\delta)$  olduğundan,  $(q, y) = F(q, V) = (q, \exp_q V)$  sağlayan bazı  $V \in B_\delta(0) \subset T_q M$  vardır. Bu, öncelikle ispatlanan  $y = \exp_q V$  doğru olduğunu gösterir.



## BÖLÜM 4

### EĞRİSEL YAPI FORMÜLLERİ

#### 4.1. Model Uzayların Jeodeziği

$\bar{g}$  Öklid metrikli  $IR^n$  üzerinde metrik katsayıları, standart koordinat sisteminde sabitleridir. Bu yüzden Christofel sembollerinin bu koordinatlarda tamamen sıfır olduğu aşıkardır. Bu, Öklid uzayı üzerinde Riemann konneksiyonun tam olarak Öklid konneksiyon olduğu anlamına gelir ve böylece sabit katsayılı vektör alanları paraleldir

#### Küreler

R yarıçaplı  $S_R^2$  2-küresi üzerinde, küresel koordinatlar denen doğrudan Christofel sembolleri hesaplamak ve aşağıdaki örnekteki gibi meridyenlerin jeodezik olduğunu göstermek çok zor değildir. Şöyleki

$$(x, y, z) = (R \sin \varphi \cos \theta, R \sin \varphi \sin \theta, R \cos \varphi), \quad -\pi < \theta < \pi, \quad 0 < \varphi < \pi$$

şeklinde kürenin  $S_R^2 - \{(x, y, z) : x \leq 0, y = 0\}$  altkümesi üzerinde  $(\theta, \varphi)$  küresel koordinatları tanımlasın.

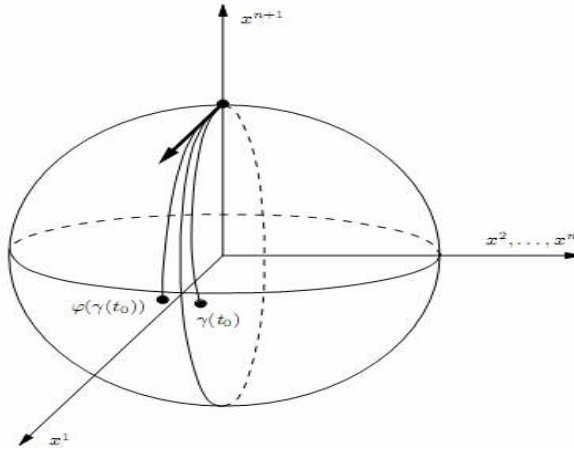
- Küresel koordinatlarda R yarıçaplı dairesel metrik,  $\delta_R = R^2 d\varphi + R^2$  şeklinde olur.
- Küresel koordinatlardaki  $g_R$  nın Christoffel sembolleri hesaplanabilir.
- Küresel koordinatlardaki jeodezik denklemi kullanılarak her  $(\theta(t), \varphi(t))$  meridyenin jeodezik olduğu doğrulanabilir.

Bunun gibi basit durumlarda bile bu örneği yaparken jeodezik denkleminin doğrudan hesaplanmasıyla, yeterince büyük sayıları içerdiğini görebiliriz. Metrik çok karmaşık veya boyutlarının sayısı yüksek olduğunda, bu yaklaşım zor olabilir. Bu yüzden jeodezik analizi ile diğer teorileri de ele almalıyız.

Neyse ki, kürenin homojen ve izotropik olması bütün boyutlarındaki jeodezikleri belirlemek için çok daha kısa bir yolu verir.

**TEOREM 4.1.**  $S_R^2$  üzerinde jeodezikler, öncelikle (orijin boyunca iki-düzlemi  $S_R^n$  nin kesişimi) sabit hızlı parametrizasyonlu büyük çemberdir.[8]

**İSPAT:** Önce,  $V$  başlangıç hızı ile,  $\partial_1$  in katı olan  $N$  kuzey noktasında başlayan  $\gamma(t) = (x^1(t), \dots, x^{n+1}(t))$  jeodeziğini değerlendirelim. Bu jeodeziğin  $x^2 = \dots = x^n = 0$  meridyeni boyunca aynen kalması, simetri ile sezgisel olarak kanıtlanır. Bu sezgiyi titizlikle meydana getirmek için bazı  $2 \leq i \leq n$  için  $x^i(t_0) \neq 0$  olan  $t_0$  zamanı önceden farzettığımızı kabul edelim. Diğer sabitlenen koordinatlardan ayrılan ve  $x^i$  yi  $-x^i$  ye götüren  $\varphi: R^{n+1} \rightarrow R^{n+1}$  lineer dönüşümü,  $N = \gamma(0)$  ve  $V = \dot{\gamma}(0)$  sabitlenen kürenin bir izometrisidir ve bu nedenle  $\gamma'$ 'yi  $\gamma$  ya götürür. Fakat  $\varphi(\dot{\gamma}(t_0)) \neq \dot{\gamma}(t_0)$  olduğundan çelişkidir.



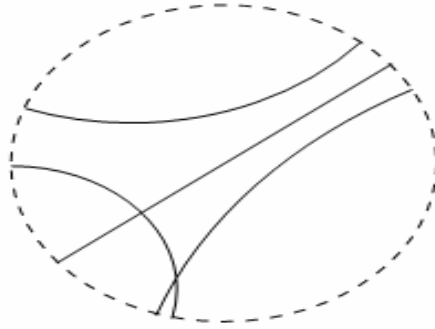
Şekil 4.1. Simetrik  $S^2$  üzerinde jeodeziklerin özdeşleşmesi

Jeodezikler, sabit hıza sahip olduğundan  $N$  başlangıç noktalı ve  $c\partial_1$  başlangıç vektöre sahip jeodezik,  $S_R^n$  nin sabit hızlı parametrizasyonlu  $(x^1, x^{n+1})$ -düzleminin kesişimindeki çember olmalıdır. Herhangi diğerk başlangıç noktasını  $N'$  ye, herhangi diğerk başlangıç vektörünü bu formun birine götüren ortogonal dönüşüm olduğundan ve ortogonal dönüşümler, orijin boyunca düzlemleri düzlemlere götürdüğünden  $S_R^n$  üzerinde jeodezikler, öncelikle orijin boyunca 2-düzlemle  $S_R^n$  nin kesişimidir.

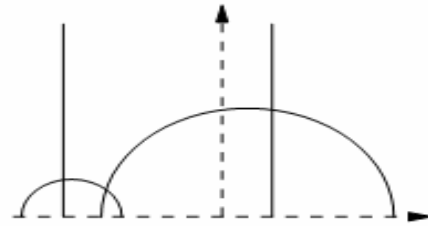
## Hiperbolik Uzaylar

$H_R^n$  nin jeodezikleri, kürenin durumundaki gibi homojenlik ve izotopiye kullanarak belirlenir.

**TEOREM 4.2.** Hiperbolik uzaylar üzerinde jeodezikler, sabit hızlı parametrelili aşağıdaki eğrilerdir:



Şekil 4.2 yuvarın jeodeziği



Şekil 4.3 yarı uzayın jeodeziği

**HİPERBOLOİD MODEL:** Büyük hiperbol ya da orijin boyunca 2-düzlemle  $H_R^n$  nin kesişimidir

**YUVAR MODELİ:**  $\partial B_R^n$  ortogonaliyle kesişen orijin boyunca doğru parçaları ve dairesel yaylardır.(şekil 4.2)

**YARI-UZAY MODELİ:**  $y=0$  hiperdüzlemi merkezli yarıdoğrular ve yarıçemberler (şekil 4.3)

## 4.2. Serret-Frenet Formülleri

$E_1^4$  uzayındaki  $\alpha(s)$  eğrisi boyunca hareket eden Frenet çatısını  $\{T, N, B, E\}$  olarak gösterelim. Bunlar sırasıyla tanjant, asal normal, binormal ve trinormal vektör alanları olarak adlandırılır.  $g(\alpha'(s), \alpha'(s)) = \pm 1$  olduğunda  $\alpha(s)$  spacelike ya da timelike eğrisi  $s$  yay uzunluğu fonksiyonuyla parametrize edilir denir.

Bu şekildeki eğri için Frenet denklemleri aşağıdaki gibi verilir:

**Durum 1 :**  $\alpha$  spacelike eğri olsun. bu durumda  $T$  spacelike vektör ve  $N$  asal normalini aşağıdaki durumları alır:

**Durum 1.1.**  $N$  spacelike olduğunda  $B$  aşağıdaki alt durumları alır:

**Durum 1.1.1.**  $B$  spacelike ise Frenet formülü,

$$\begin{bmatrix} T' \\ N' \\ B' \\ E' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & k_1 & 0 & 0 \\ -k_1 & 0 & k_2 & 0 \\ 0 & -k_2 & 0 & k_3 \\ 0 & 0 & k_3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ N \\ B \\ E \end{bmatrix}$$

$g(T, T) = g(N, N) = g(B, B) = 1, g(E, E) = -1$  ortogonal vektörler şeklinde ifade edilir.

**Durum 1.1.2.**  $B$  timelike ise Frenet formülü,

$$\begin{bmatrix} T' \\ N' \\ B' \\ E' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & k_1 & 0 & 0 \\ -k_1 & 0 & k_2 & 0 \\ 0 & k_2 & 0 & k_3 \\ 0 & 0 & k_3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ N \\ B \\ E \end{bmatrix}$$

$g(T, T) = g(N, N) = g(E, E) = 1, g(B, B) = -1$  ortogonal vektörler şeklinde ifade edilir.

**Durum 1.2.**  $N$  timelike olduğunda ise Frenet formülü,

$$\begin{bmatrix} T' \\ N' \\ B' \\ E' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & k_1 & 0 & 0 \\ k_1 & 0 & k_2 & 0 \\ 0 & k_2 & 0 & k_3 \\ 0 & 0 & -k_3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ N \\ B \\ E \end{bmatrix}$$

$g(T, T) = g(B, B) = g(E, E) = 1, g(N, N) = -1$  ortogonal vektörler şeklinde ifade edilir.

**Durum 2.**  $\alpha$  timelike eğri olduğunda  $T$  timelike vektör olur ve Frenet formülü,

$$\begin{bmatrix} T' \\ N' \\ B' \\ E' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & k_1 & 0 & 0 \\ k_1 & 0 & k_2 & 0 \\ 0 & -k_2 & 0 & k_3 \\ 0 & 0 & -k_3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ N \\ B \\ E \end{bmatrix}$$

$g(N, N) = g(B, B) = g(E, E) = 1, g(T, T) = -1$  ortogonal vektörler şeklinde ifade edilir. Buradaki  $k_1, k_2, k_3$  sırasıyla  $\alpha$  eğrisinin birinci, ikinci ve üçüncü eğrilikleridir.[8]

**TEOREM 4.2.1.**  $\alpha \in E_1^4$  keyfi bir spacelike eğrisi olsun. Bu durumda Frenet çatısı

$$T = \frac{\alpha'}{\|\alpha'\|},$$

$$N = \frac{\|\alpha'\|^2 \cdot \alpha'' - g(\alpha', \alpha'') \cdot \alpha'}{\|\|\alpha'\|^2 \cdot \alpha'' - g(\alpha', \alpha'') \cdot \alpha'\|}$$

$$E = \pm \frac{T \wedge N \wedge \alpha'''}{\|T \wedge N \wedge \alpha'''\|},$$

$$B = \pm N \wedge T \wedge E,$$

$$k_1 = \frac{\|\|\alpha'\|^2 \cdot \alpha'' - g(\alpha', \alpha'') \cdot \alpha'\|}{\|\alpha'\|^4},$$

$$k_2 = \frac{\|T \wedge N \wedge \alpha'''\| \cdot \|\alpha'\|}{\|\|\alpha'\|^2 \cdot \alpha'' - g(\alpha', \alpha'') \cdot \alpha'\|},$$

$$k_3 = \frac{g(\alpha^{(iv)}, E)}{\|T \wedge N \wedge \alpha'''\| \cdot \|\alpha'\|}$$

şeklinde ifade edilir.[11]

### 4.3. $E_1^4$ Uzayındaki Eğrinin İvolütü

Bir eğrinin teğetleri,  $\alpha$  eğrisinin asal normalleri oluyorsa  $\alpha^*$  eğrisine  $\alpha$  eğrisinin involütü denir. Aynı durumda  $\alpha$  eğrisi de  $\alpha^*$  eğrisinin evolütüdür.

**TEOREM 4.3.1.**  $\alpha$  ve  $\alpha^*$  s yay uzunluğuyla parametrize edilmiş birim hızlı spacelike eğrileri olsun. Frenet çatıları sırasıyla  $\{T, N, B, E, k_1, k_2, k_3\}$  ve  $\{T^*, N^*, B^*, E^*, k_1^*, k_2^*, k_3^*\}$  formundadır.  $\alpha$  eğrisinin involütü olan  $\alpha^*$  eğrisini bulunuz.

**İSPAT:** İvolütün tanımından dolayı

$$\alpha^*(s) = \alpha + \lambda T \quad (4.1)$$

olarak yazılır. İki tarafının s ye göre diferansiyeli alındığında

$$\begin{aligned} \frac{d\alpha^*}{ds^*} \frac{ds^*}{ds} &= \frac{d\alpha}{ds} + \frac{d\lambda}{ds} T + \lambda \frac{dT}{ds} \lambda k_1 N \\ T^* &= \frac{ds}{ds^*} \left( T \left( 1 + \frac{d\lambda}{ds} \right) + \lambda k_1 N \right) \end{aligned} \quad (4.2)$$

elde edilir. İvolüt tanımı dikkate alındığında  $T \perp T^*$  olduğundan

$$\begin{aligned} \langle T, T^* \rangle = 0 &\Rightarrow \frac{ds}{ds^*} \left( T^2 \left( 1 + \frac{d\lambda}{ds} \right) + \lambda k_1 N \cdot T \right) = 0 \\ &\Rightarrow 1 + \frac{d\lambda}{ds} = 0 \\ &\Rightarrow \lambda = c - s \end{aligned} \quad (4.3)$$

c sabit olacak şekilde elde edilir. Bunu (4.1) denkleminde yerine koyarsak;

$$\alpha^*(s) = \alpha + (c - s)T \quad (4.4)$$

denklemine sahip olunur. Bu ifadenin her iki tarafının s ye göre diferansiyeli alındığında

$$T^* \frac{ds^*}{ds} = (c - s)k_1 N \quad (4.5)$$

elde edilir. Eşitliğin iki tarafının normu alındığında,

$$T^* = N,$$

$$\frac{ds^*}{ds} = (c-s)k_1 \quad (4.6)$$

elde edilir. (4.4) denklemini  $s$  ye göre 4 kez diferansiyeli alındığında birinci türev (4.5) denkleminde

$$\alpha^{*'} = (c-s)k_1 N$$

olduğunu gösterildi. Diğerleri ise;

$$\begin{aligned} (\alpha^*)'' &= -(c-s)k_1^2 T + (-k_1 + (c-s)k_1') N + (c-s)k_1 k_2 B \\ (\alpha^*)''' &= \left( 3(s-c)k_1 k_1' + 2k_1^2 \right) T + \left( (s-c)k_1(k_1^2 + k_2^2) - 2k_1' + (c-s)k_1'' \right) N \\ &\quad + \left( 2(c-s)k_1' k_2 + (c-s)k_1 k_2' - 2k_1 k_2 \right) B + ((c-s)k_1 k_2 k_3) E \\ &= u_1 T + u_2 N + u_3 B + u_4 E \\ (\alpha^*)^{iv} &= v_1 T + v_2 N + v_3 B + v_4 E \end{aligned} \quad (4.7)$$

şeklinde ifade edilir. Asal normal ve birinci eğriliği ise;

$$\begin{aligned} N^* &= \frac{\|(\alpha^*)'\|^2 \cdot (\alpha^*)'' - g((\alpha^*)', (\alpha^*)'') \cdot (\alpha^*)'}{\|(\alpha^*)'\|^2 \cdot (\alpha^*)'' - g((\alpha^*)', (\alpha^*)'') \cdot (\alpha^*)'} \\ &= \frac{(k_1, 0, -k_2, 0)}{\sqrt{k_2^2 - k_1^2}} \\ k_1^* &= \frac{\|(\alpha^*)'\|^2 \cdot (\alpha^*)'' - g((\alpha^*)', (\alpha^*)'') \cdot (\alpha^*)'}{\|(\alpha^*)'\|^4} \\ &= \frac{(s-c)^3 k_1^3 \sqrt{k_2^2 - k_1^2}}{(s-c)^4 k_1^4} \\ &= \frac{\sqrt{k_2^2 - k_1^2}}{(s-c)k_1} \end{aligned} \quad (4.8)$$

elde edilir. Sıra binormal, trinormal, ikinci eğriliğe ve üçüncü eğriliğe geldiğinde,

$$T^* \wedge N^* \wedge (\alpha^*)''' = - \begin{vmatrix} -e_1 & e_2 & e_3 & e_4 \\ 0 & (c-s)k_1 & 0 & 0 \\ \frac{k_1}{\sqrt{k_2^2 - k_1^2}} & 0 & \frac{-k_1}{\sqrt{k_2^2 - k_1^2}} & 0 \\ u_1 & u_2 & u_3 & u_4 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{(c-s)k_1}{\sqrt{k_2^2 - k_1^2}} [k_2 u_4, 0, k_1 u_4, -k_1 u_3 - k_2 u_1]$$

$$E^* = \pm \frac{T^* \wedge N^* \wedge (\alpha^*)'''}{\|T^* \wedge N^* \wedge (\alpha^*)'''\|}$$

$$= \pm \frac{[k_2 u_4, 0, k_1 u_4, -k_1 u_3 - k_2 u_1]}{\sqrt{k_2^2 u_4^2 + k_1^2 u_4^2 + (k_1 u_3 + k_2 u_1)^2}}$$

$$= \pm \frac{A}{\|A\|}$$

$$B^* = \pm N^* \wedge T^* \wedge E^*$$

$$= \pm \begin{vmatrix} -e_1 & e_2 & e_3 & e_4 \\ \frac{k_1}{\sqrt{k_2^2 - k_1^2}} & 0 & \frac{k_2}{\sqrt{k_2^2 - k_1^2}} & 0 \\ 0 & (c-s)k_1 & 0 & 0 \\ \frac{k_2 u_4}{\|A\|} & 0 & \frac{k_1 u_4}{\|A\|} & \frac{-(k_1 u_3 + k_2 u_1)}{\|A\|} \end{vmatrix}$$

$$= \frac{(c-s)k_1 [(k_1 u_3 + k_2 u_1)k_2, 0, k_1(k_1 u_3 + k_2 u_1), k_1^2 u_4 + k_2^2 u_4]}{\sqrt{k_2^2 u_4^2 + k_1^2 u_4^2 + (k_1 u_3 + k_2 u_1)^2} \sqrt{k_2^2 - k_1^2}}$$

$$k_2^* = \frac{\|T^* \wedge N^* \wedge (\alpha^*)'''\| \cdot \|(\alpha^*)'\|}{\| \|(\alpha^*)'\|^2 \cdot (\alpha^*)'' - g((\alpha^*)', (\alpha^*)'') \cdot (\alpha^*)'\|}$$

$$= \frac{\sqrt{k_2^2 u_4^2 + k_1^2 u_4^2 + (k_1 u_3 + k_2 u_1)^2}}{(k_2^2 - k_1^2)(s-c)k_1}$$

$$k_3^* = \frac{g((\alpha^*)^{(iv)}, E)}{\|T^* \wedge N^* \wedge (\alpha^*)'''\| \cdot \|(\alpha^*)'\|}$$



$$= \frac{(v_4) \sqrt{k_2^2 - k_1^2}}{(c-s)^2 k_1^2 \sqrt{k_2^2 u_4^2 + k_1^2 u_4^2} + (k_1 u_3 + k_2 u_1)^2} \quad (4.9)$$

olarak bulunur.

**ÖRNEK 4.1.**  $\alpha$  ve  $\alpha^*$ ,  $s$  yay uzunluğuyla parametrize edilmiş birim hızlı spacelike eğrileri olsun. Frenet çatıları sırasıyla  $\{T, N, B, E, k_1, k_2, k_3\}$  ve  $\{T^*, N^*, B^*, E^*, k_1^*, k_2^*, k_3^*\}$  formundadır.  $\alpha$  W -eğrisinin involütü olan  $\alpha^*$  eğrisini bulunuz.

İnvolutün tanımından dolayı

$$\alpha^*(s) = \alpha + \lambda T \quad (4.10)$$

olarak yazılır. İki tarafın  $s$  ye göre diferansiyeli alındığında

$$\begin{aligned} \frac{d\alpha^*}{ds^*} \frac{ds^*}{ds} &= \frac{d\alpha}{ds} + \frac{d\lambda}{ds} T + \lambda \frac{dT}{ds} \lambda k_1 N \\ T^* &= \frac{ds}{ds^*} \left( T \left( 1 + \frac{d\lambda}{ds} \right) + \lambda k_1 N \right) \end{aligned} \quad (4.11)$$

elde edilir. Tanımı dikkate aldığımızda  $T \perp T^*$  olduğundan,

$$\begin{aligned} \langle T, T^* \rangle = 0 &\Rightarrow \frac{ds}{ds^*} \left( T^2 \left( 1 + \frac{d\lambda}{ds} \right) + \lambda k_1 N \cdot T \right) = 0 \\ &\Rightarrow 1 + \frac{d\lambda}{ds} = 0 \\ &\Rightarrow \lambda = c - s \end{aligned} \quad (4.12)$$

$c$  sabit olacak şekilde elde edilir. Bunu (4.10) denkleminde yerine koyarsak;

$$\alpha^*(s) = \alpha + (c-s)T \quad (4.13)$$

denkleminde sahip olunur. Bu ifadenin her iki tarafının  $s$  ye göre diferansiyeli alındığında,

$$T^* \frac{ds^*}{ds} = (c-s)k_1 N \quad (4.14)$$

elde edilir. Eşitliğin iki tarafının normu alındığında,

$$T^* = N,$$

$$\frac{ds^*}{ds} = (c-s)k_1$$

elde edilir. (4.13) denklemini  $s$  ye göre 4 kez diferansiyeli alındığında birinci türev (4.14) denkleminde

$$\alpha^{*'} = (c-s)k_1 N$$

olduğunu gösterildi. Diğerleri ise;

$$(\alpha^*)'' = (s-c)k_1^2 T - k_1 N + (c-s)k_1 k_2 B$$

$$(\alpha^*)''' = (2k_1^2)T + ((s-c)k_1(k_1^2 + k_2^2))N + (-2k_1 k_2)B + ((c-s)k_1 k_2 k_3)E$$

$$(\alpha^*)^{iv} = (c-s)[k_1^2(k_1^2 + k_2^2)]T + 3k_1(k_1^2 + k_2^2)N + (s-c)k_1 k_2(k_1^2 + k_2^2)B - 3k_1 k_2 k_3 E$$

şeklinde bulunur.

$$\begin{aligned} N^* &= \frac{\|(\alpha^*)'\|^2 \cdot (\alpha^*)'' - g((\alpha^*)', (\alpha^*)'') \cdot (\alpha^*)'}{\|(\alpha^*)'\|^2 \cdot (\alpha^*)'' - g((\alpha^*)', (\alpha^*)'') \cdot (\alpha^*)'} \\ &= \frac{(k_1, 0, k_2, 0)}{\sqrt{k_2^2 - k_1^2}} \\ k_1^* &= \frac{\|(\alpha^*)'\|^2 \cdot (\alpha^*)'' - g((\alpha^*)', (\alpha^*)'') \cdot (\alpha^*)'}{\|(\alpha^*)'\|^4} \\ &= \frac{(s-c)^3 k_1^3 \sqrt{k_2^2 - k_1^2}}{(s-c)^4 k_1^4} \\ &= \frac{\sqrt{k_2^2 - k_1^2}}{(s-c)k_1} \end{aligned}$$

elde edilir. Sıra binormal, trinormal, ikinci eğriliğe ve üçüncü eğriliğe geldiğinde,

$$T^* \wedge N^* \wedge (\alpha^*)''' = \begin{vmatrix} -e_1 & e_2 & e_3 & e_4 \\ 0 & (c-s)k_1 & 0 & 0 \\ \frac{k_1}{\sqrt{k_2^2 - k_1^2}} & 0 & \frac{k_2}{\sqrt{k_2^2 - k_1^2}} & 0 \\ 2k_1^2 & ((s-c)k_1(k_1^2 + k_2^2)) & (-2k_1 k_2) & ((c-s)k_1 k_2 k_3) \end{vmatrix}$$

$$= \frac{(c-s)k_1^2 k_2}{\sqrt{k_2^2 - k_1^2}} [k_2 k_3 (c-s), 0, k_1 k_3 (c-s), -4k_1]$$

$$E^* = \pm \frac{T^* \wedge N^* \wedge (\alpha^*)'''}{\|T^* \wedge N^* \wedge (\alpha^*)'''\|}$$

$$= \pm \frac{[k_2 k_3 (c-s), 0, k_1 k_3 (c-s), -4k_1]}{\sqrt{k_2^2 k_3^2 (c-s)^2 + k_1^2 k_3^2 (c-s)^2 + 16k_1^2}}$$

$$B^* = \pm N^* \wedge T^* \wedge E^*$$

$$= \pm \begin{vmatrix} -e_1 & e_2 & e_3 & e_4 \\ \frac{k_1}{\sqrt{k_2^2 - k_1^2}} & 0 & \frac{k_2}{\sqrt{k_2^2 - k_1^2}} & 0 \\ 0 & (c-s)k_1 & 0 & 0 \\ \frac{k_2 k_3 (c-s)}{\|A\|} & 0 & \frac{k_1 k_3 (c-s)}{\|A\|} & \frac{-4k_1}{\|A\|} \end{vmatrix}$$

$$= \pm \frac{(c-s)k_1 [4k_1 k_2, 0, 4k_1^2, (c-s)k_3 (k_1^2 - k_2^2)]}{\sqrt{k_2^2 k_3^2 (c-s)^2 + k_1^2 k_3^2 (c-s)^2 + 16k_1^2} \sqrt{k_2^2 - k_1^2}}$$

$$k_2^* = \frac{\|T^* \wedge N^* \wedge (\alpha^*)'''\| \cdot \|(\alpha^*)'\|}{\|(\alpha^*)'\|^2 \cdot (\alpha^*)'' - g((\alpha^*)', (\alpha^*)'') \cdot (\alpha^*)'\|}$$

$$= \frac{k_2 \sqrt{k_2^2 k_3^2 (c-s)^2 + k_1^2 k_3^2 (c-s)^2 + 16k_1^2}}{(k_2^2 - k_1^2)(c-s)}$$

$$k_3^* = \frac{g((\alpha^*)^{(iv)}, E)}{\|T^* \wedge N^* \wedge (\alpha^*)'''\| \cdot \|(\alpha^*)'\|}$$

$$= \frac{-3k_1 k_2 k_3 \sqrt{k_2^2 - k_1^2}}{(c-s)^2 k_1^3 k_2 \sqrt{k_2^2 u_4^2 + k_1^2 u_4^2} + (k_1 u_3 + k_2 u_1)^2}$$

olarak bulunur.

#### 4.4. $E_1^4$ Uzayındaki Bertrand Eğri Çifti

$\alpha$  ve  $\alpha^*$  eğrilerinin noktaları arasında karşılıklı noktada asal normalleri ortak olacak biçimde 1-1 eşleme varsa böyle eğrilere *bertrand eğrileri* denir.  $\lambda, \mu \in IR$  olacak şekilde Öklid uzayında Bertrant eğrilerinin eğrilikleri arasında  $\lambda k_1 + \mu k_2 = 1$  eşitliğine sahiptir.

**TEOREM :**  $\alpha$  ve  $\alpha^*$  s yay uzunluğuyla parametrize edilmiş birim hızlı spacelike eğrileri olsun. Frenet çatıları sırasıyla  $\{T, N, B, E, k_1, k_2, k_3\}$  ve  $\{T^*, N^*, B^*, E^*, k_1^*, k_2^*, k_3^*\}$  formundadır.  $\alpha$  eğrisini, eğrilikleri sabit olan  $W$ -eğrisi olarak  $\alpha^*$  Bertrant eğri çiftini bulunuz.

**İSPAT:** Bertrant eğrilerinin tanımından dolayı

$$\alpha^*(s) = \alpha + \lambda N \quad (4.15)$$

olarak yazılır. İki tarafının s ye göre diferansiyeli alındığında,

$$\begin{aligned} \frac{d\alpha^*}{ds^*} \frac{ds^*}{ds} &= \frac{d\alpha}{ds} + \frac{d\lambda}{ds} N + \lambda \frac{dN}{ds} \\ T^* &= \frac{ds}{ds^*} \left( T(1 - \lambda k_1) + \frac{d\lambda}{ds} N + \lambda k_2 B \right) \end{aligned} \quad (4.16)$$

elde edilir. Tanımı dikkate aldığımızda  $N \perp T^*$  olduğundan,

$$\begin{aligned} \langle N, T^* \rangle = 0 &\Rightarrow \frac{ds}{ds^*} \left( (1 - \lambda k_1) T \cdot N + \frac{d\lambda}{ds} N \cdot N + \lambda k_2 B \cdot N \right) = 0 \\ &\Rightarrow \frac{d\lambda}{ds} = 0 \\ &\Rightarrow \lambda = c \end{aligned} \quad (4.17)$$

c sabit olacak şekilde

$$\alpha^*(s) = \alpha + \lambda N \quad (4.18)$$

denklemini elde edilir. Bu ifadenin her iki tarafının s ye göre diferansiyeli alındığında,

$$T^* \frac{ds^*}{ds} = ((1 - \lambda k_1) T + \lambda k_2 B) \quad (4.19)$$

elde edilir. Eşitliğin iki tarafının normu alındığında,

$$\frac{ds^*}{ds} = \sqrt{\lambda^2 k_2^2 - (1 - \lambda k_1)^2}$$

elde edilir. (4.18) denkleminin  $s$  ye göre 4 kez diferansiyeli alındığında birinci türev (4.19) denkleminde,

$$\alpha^{*'} = ((1 - \lambda k_1)T + \lambda k_2 B)$$

olduğunu gösterildi. Diğerleri ise

$$(\alpha^*)'' = (k_1 - \lambda k_1^2 - \lambda k_2^2)N + \lambda k_2 k_3 E$$

$$(\alpha^*)''' = (k_1(-k_1 + \lambda k_1^2 + \lambda k_2^2))T + (k_2(k_1 - \lambda k_1^2 - \lambda k_2^2 + \lambda k_3^2))B$$

$$\begin{aligned} (\alpha^*)^{iv} = & (-k_1^3 + \lambda k_1^4 + 2\lambda k_1^2 k_2^2 - k_1 k_2^2 + \lambda k_2^4 - \lambda k_2^2 k_3^2)N \\ & + k_2 k_3 (k_1 - \lambda k_1^2 + \lambda k_3^2)E \end{aligned}$$

şeklinde ifade edilir. Asal normal ve birinci eğriliği ise;

$$\begin{aligned} N^* &= \frac{\|(\alpha^*)'\|^2 \cdot (\alpha^*)'' - g((\alpha^*)', (\alpha^*)'') \cdot (\alpha^*)'}{\|(\alpha^*)'\|^2 \cdot (\alpha^*)'' - g((\alpha^*)', (\alpha^*)'') \cdot (\alpha^*)'} \\ &= \frac{\lambda^2 k_2^2 - (1 - \lambda k_1)^2 [(k_1 - \lambda(k_1^2 + k_2^2))N + \lambda k_2 k_3 E]}{\lambda^2 k_2^2 - (1 - \lambda k_1)^2 \sqrt{(k_1 - \lambda(k_1^2 + k_2^2))^2 + \lambda^2 k_2^2 k_3^2}} \\ &= \frac{[(k_1 - \lambda(k_1^2 + k_2^2))N + \lambda k_2 k_3 E]}{\sqrt{(k_1 - \lambda(k_1^2 + k_2^2))^2 + \lambda^2 k_2^2 k_3^2}} \\ k_1^* &= \frac{\|(\alpha^*)'\|^2 \cdot (\alpha^*)'' - g((\alpha^*)', (\alpha^*)'') \cdot (\alpha^*)'}{\|(\alpha^*)'\|^4} \\ &= \frac{(\lambda^2 k_2^2 - (1 - \lambda k_1)^2) \sqrt{(k_1 - \lambda(k_1^2 + k_2^2))^2 + \lambda^2 k_2^2 k_3^2}}{(\lambda^2 k_2^2 - (1 - \lambda k_1)^2)^2} \\ &= \frac{\sqrt{(k_1 - \lambda(k_1^2 + k_2^2))^2 + \lambda^2 k_2^2 k_3^2}}{(\lambda^2 k_2^2 - (1 - \lambda k_1)^2)} \end{aligned}$$

elde edilir. Sıra binormal, trinormal, ikinci eğriliğe ve üçüncü eğriliğe geldiğinde,

$$T^* \wedge N^* \wedge (\alpha^*)''' = \begin{pmatrix} -e_1 & e_2 & e_3 & e_4 \\ \frac{(1-\lambda k_1)}{\sqrt{\lambda^2 k_2^2 - (1-\lambda k_1)^2}} & 0 & \frac{\lambda k_2}{\sqrt{\lambda^2 k_2^2 - (1-\lambda k_1)^2}} & 0 \\ 0 & \frac{(k_1 - \lambda(k_1^2 + k_2^2))}{\sqrt{(k_1 - \lambda(k_1^2 + k_2^2))^2 + \lambda^2 k_2^2 k_3^2}} & 0 & \frac{[\lambda k_2 k_3]}{\sqrt{(k_1 - \lambda(k_1^2 + k_2^2))^2 + \lambda^2 k_2^2 k_3^2}} \\ (k_1(-k_1 + \lambda k_1^2 + \lambda k_2^2)) & 0 & (k_2(k_1 - \lambda k_1^2 - \lambda k_2^2 + \lambda k_3^2)) & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \left( 0, \frac{(1-\lambda k_1)\lambda k_2 k_3}{\sqrt{\lambda^2 k_2^2 - (1-\lambda k_1)^2} \sqrt{(k_1 - \lambda(k_1^2 + k_2^2))^2 + \lambda^2 k_2^2 k_3^2}}, 0, \frac{(k_1 - \lambda(k_1^2 + k_2^2))(k_2(k_1 - \lambda k_1^2 - \lambda k_2^2 + \lambda k_3^2))}{\sqrt{\lambda^2 k_2^2 - (1-\lambda k_1)^2} \sqrt{(k_1 - \lambda(k_1^2 + k_2^2))^2 + \lambda^2 k_2^2 k_3^2}} \right)$$

$$\begin{aligned} E^* &= \pm \frac{T^* \wedge N^* \wedge (\alpha^*)'''}{\|T^* \wedge N^* \wedge (\alpha^*)'''\|} \\ &= \pm \frac{\left( 0, -(1-\lambda k_1)\lambda k_2 k_3, 0, (k_1 - \lambda(k_1^2 + k_2^2))(k_2(k_1 - \lambda k_1^2 - \lambda k_2^2 + \lambda k_3^2)) \right)}{\sqrt{(1-\lambda k_1)^2 \lambda^2 k_2^2 k_3^2 + (k_1 - \lambda(k_1^2 + k_2^2))^2 (k_2(k_1 - \lambda k_1^2 - \lambda k_2^2 + \lambda k_3^2))^2}} \\ &= \pm \frac{A}{\|A\|} \end{aligned}$$

olarak alalım.

$$\begin{aligned} B^* &= \pm N^* \wedge T^* \wedge E^* \\ &= \frac{\lambda k_2 (k_1 - \lambda(k_1^2 + k_2^2))^2 (k_2(k_1 - \lambda k_1^2 - \lambda k_2^2 + \lambda k_3^2)) + \lambda^3 k_2^3 k_3^2}{\|A\| \sqrt{\lambda^2 k_2^2 - (1-\lambda k_1)^2} \sqrt{(k_1 - \lambda(k_1^2 + k_2^2))^2 + \lambda^2 k_2^2 k_3^2}} T \\ &+ \frac{(k_1 - \lambda(k_1^2 + k_2^2))(1-\lambda k_1)(k_1 - \lambda(k_1^2 + k_2^2))(k_2(k_1 - \lambda k_1^2 - \lambda k_2^2 + \lambda k_3^2)) + \lambda^2 k_2^2 k_3^2 (1-\lambda k_1)}{\|A\| \sqrt{\lambda^2 k_2^2 - (1-\lambda k_1)^2} \sqrt{(k_1 - \lambda(k_1^2 + k_2^2))^2 + \lambda^2 k_2^2 k_3^2}} B \end{aligned}$$

$$k_2^* = \frac{\|T^* \wedge N^* \wedge (\alpha^*)'''\| \cdot \|(\alpha^*)'\|}{\|(\alpha^*)'\|^2 \cdot (\alpha^*)'' - g((\alpha^*)', (\alpha^*)'') \cdot (\alpha^*)'\|}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\|A\|}{\sqrt{\lambda^2 k_2^2 - (1 - \lambda k_1)^2} \sqrt{(k_1 - \lambda(k_1^2 + k_2^2))^2 + \lambda^2 k_2^2 k_3^2}} \\
k_3^* &= \frac{g((\alpha^*)^{(iv)}, E)}{\|T^* \wedge N^* \wedge (\alpha^*)''\| \cdot \|(\alpha^*)'\|} \\
&= \frac{k_2 k_3 (k_1 - \lambda k_1^2 + \lambda k_3^2)}{\|A\| \sqrt{\lambda^2 k_2^2 - (1 - \lambda k_1)^2}}
\end{aligned}$$

olarak bulunur.

## BÖLÜM 5

### EĞRİSEL UYGULAMALAR

Şimdi, bu çalışma için bazı geometrik uygulamalar sunacağız.

**Problem 5.1.**  $A(1,0,0)$  noktasında bulunan bir parçacık  $\frac{\partial}{\partial t}$  vektör alanında  $A^*(-1,0,0)$  hareket edecek şekilde  $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$  çatısına göre alındığında Frenet çatısını inceleyelim.

$\alpha(s) = (\cos s, \sin s, 0, t)$  eğrisi  $t > 0$  spacelike olarak ele alındığında

$$\alpha'(s) = (-\sin s, \cos s, 0, t') \quad \alpha'(0) = (0, 1, 0, t')$$

$$\alpha''(s) = (-\cos s, -\sin s, 0, t'') \quad \alpha''(0) = (-1, 0, 0, t'')$$

$$\alpha'''(s) = (\sin s, -\cos s, 0, t''') \quad \alpha'''(0) = (0, -1, 0, t''')$$

$$\alpha^{iv}(s) = (\cos s, \sin s, 0, t^{iv}) \quad \alpha^{iv}(0) = (1, 0, 0, t^{iv})$$

diferansiyellerini aldığımızda

$$\begin{aligned} T &= \frac{\alpha'}{\|\alpha'\|} \\ &= \frac{(0, 1, 0, t')}{\sqrt{1 + t'^2}}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} N &= \frac{\|\alpha'\|^2 \cdot \alpha'' - g(\alpha', \alpha'') \cdot \alpha'}{\|\|\alpha'\|^2 \cdot \alpha'' - g(\alpha', \alpha'') \cdot \alpha'\|} \\ &= \frac{(-(1+t'^2), -t't'', 0, t'')}{\sqrt{-(1+t'^2)^2 + t''^2(t'^2+1)}} \\ &= \frac{A}{\|A\|} \end{aligned}$$



olsun;

$$E = \pm \frac{T \wedge N \wedge \alpha'''}{\|T \wedge N \wedge \alpha'''\|}$$

$$T \wedge N \wedge \alpha''' = \begin{vmatrix} -e_1 & e_2 & e_3 & e_4 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{1+t'^2}} & 0 & \frac{t'}{\sqrt{1+t'^2}} \\ \frac{-(1+t'^2)}{\|A\|} & \frac{-t't''}{\|A\|} & 0 & \frac{t''}{\|A\|} \\ 0 & -1 & 0 & t''' \end{vmatrix}$$

$$= \frac{-\sqrt{(1+t'^2)}(t''' + t')}{\|A\|} B$$

$$E = \pm(0, 0, -1, 0)$$

$$B = \pm N \wedge T \wedge E$$

$$= \pm \begin{vmatrix} -e_1 & e_2 & e_3 & e_4 \\ \frac{-(1+t'^2)}{\|A\|} & \frac{-t't''}{\|A\|} & 0 & \frac{t''}{\|A\|} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{1+t'^2}} & 0 & \frac{t'}{\sqrt{1+t'^2}} \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \pm \left( \frac{-t''\sqrt{(1+t'^2)}}{\sqrt{-(1+t'^2)^2 + t''^2(t'^2 + 1)}} \right) (t'', t', 0, -1)$$

$$k_1 = \frac{\| \|\alpha'\|^2 \cdot \alpha'' - g(\alpha', \alpha'') \cdot \alpha' \|}{\|\alpha'\|^4}$$

$$= \frac{\sqrt{-(1+t'^2)^2 + t''^2(t'^2 + 1)}}{(1+t'^2)^2}$$

$$k_2 = \frac{\|T \wedge N \wedge \alpha'''\| \cdot \|\alpha'\|}{\| \|\alpha'\|^2 \cdot \alpha'' - g(\alpha', \alpha'') \cdot \alpha' \|}$$

$$= \frac{(t''' + t')(1 + t'^2)}{-(1 + t'^2)^2 + t''^2(t'^2 + 1)}$$

$$k_3 = \frac{g(\alpha^{(iv)}, E)}{\|T \wedge N \wedge \alpha'''\| \cdot \|\alpha'\|}$$

$$= \frac{t^{(iv)} \sqrt{-(1 + t'^2)^2 + t''^2(t'^2 + 1)}}{(t''' + t')(1 + t'^2)}$$

olarak Frenet çatısı elde edilir. Aynı şekilde  $A^*(-1, 0, 0)$  noktasındaki duruma baktığımızda

$\alpha(s) = (-\cos s, \sin s, 0, t)$  eğrisi  $t > 0$  spacelike olarak ele alındığında

$$\alpha'(s) = (\sin s, \cos s, 0, t') \quad \alpha'(0) = (0, 1, 0, t')$$

$$\alpha''(s) = (\cos s, -\sin s, 0, t'') \quad \alpha''(0) = (1, 0, 0, t'')$$

$$\alpha'''(s) = (-\sin s, -\cos s, 0, t''') \quad \alpha'''(0) = (0, -1, 0, t''')$$

$$\alpha^{(iv)}(s) = (-\cos s, \sin s, 0, t^{(iv)}) \quad \alpha^{(iv)}(0) = (1, 0, 0, t^{(iv)})$$

diferansiyellerini aldığımızda

$$T = \frac{\alpha'}{\|\alpha'\|}$$

$$= \frac{(0, 1, 0, t')}{\sqrt{1 + t'^2}},$$

$$N = \frac{\|\alpha'\|^2 \cdot \alpha'' - g(\alpha', \alpha'') \cdot \alpha'}{\|\|\alpha'\|^2 \cdot \alpha'' - g(\alpha', \alpha'') \cdot \alpha'\|}$$

$$= \frac{((1 + t'^2), -t't'', 0, t'')}{\sqrt{-(1 + t'^2)^2 + t''^2(t'^2 + 1)}}$$

$$= \frac{A}{\|A\|}$$

alırsak;

$$E = \pm \frac{T \wedge N \wedge \alpha'''}{\|T \wedge N \wedge \alpha'''\|}$$

$$T \wedge N \wedge \alpha''' = \begin{vmatrix} -e_1 & e_2 & e_3 & e_4 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{1+t'^2}} & 0 & \frac{t'}{\sqrt{1+t'^2}} \\ \frac{(1+t'^2)}{\|A\|} & \frac{-t't''}{\|A\|} & 0 & \frac{t''}{\|A\|} \\ 0 & -1 & 0 & t''' \end{vmatrix}$$

$$= \frac{\sqrt{(1+t'^2)}(t''' + t')}{\|A\|}$$

$$E = \pm(0, 0, 1, 0)$$

$$B = \pm N \wedge T \wedge E$$

$$= \pm \begin{vmatrix} -e_1 & e_2 & e_3 & e_4 \\ -\frac{(1+t'^2)}{\|A\|} & \frac{-t't''}{\|A\|} & 0 & \frac{t''}{\|A\|} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{1+t'^2}} & 0 & \frac{t'}{\sqrt{1+t'^2}} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \pm \left( \frac{t''\sqrt{(1+t'^2)}}{\|A\|} \right) (t'', t', 0, -1)$$

$$k_1 = \frac{\| \|\alpha'\|^2 \cdot \alpha'' - g(\alpha', \alpha'') \cdot \alpha' \|}{\|\alpha'\|^4}$$

$$= \frac{\|A\|}{(1+t'^2)^2}$$

$$k_2 = \frac{\|T \wedge N \wedge \alpha'''\| \cdot \|\alpha'\|}{\| \|\alpha'\|^2 \cdot \alpha'' - g(\alpha', \alpha'') \cdot \alpha' \|}$$

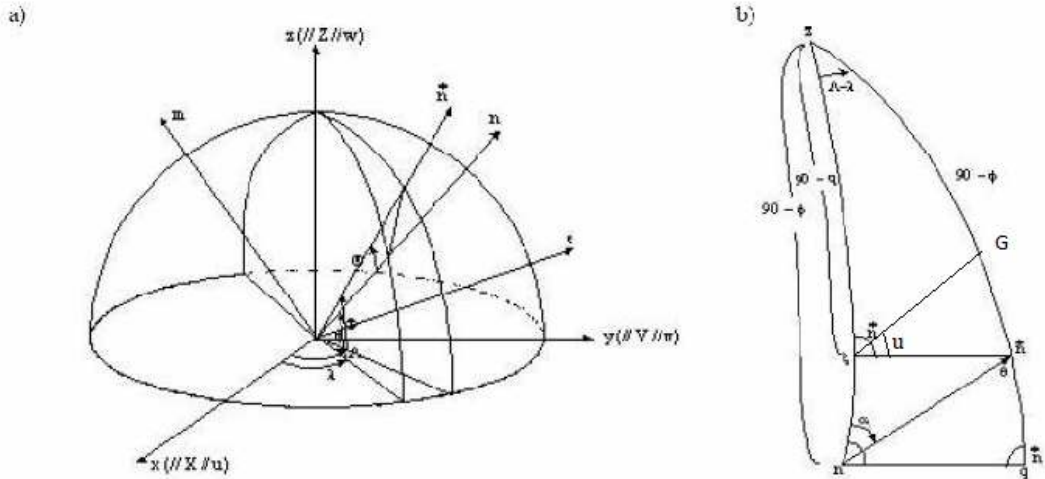
$$= \frac{(t''' + t')(1+t'^2)}{\|A\|^2}$$

$$k_3 = \frac{g(\alpha^{(v)}, E)}{\|T \wedge N \wedge \alpha''\| \cdot \|\alpha'\|}$$

$$= \frac{t^{(v)} \|A\|}{(t''' + t')(1 + t'^2)}$$

olarak bulduğumuz Frenet çatılarını karşılaştırdığımızda eğriliklerinin değişmediğini ve teğetlerinin aynı, asal birinci bileşenlerinin ve binormallerinin ters işaretli olduğu görülür.

### Problem 5.2.



Şekil 5.1.a, kürenin kuzey kutup tarafında kalan yarısını temsil etmektedir. Eğer eksenlerin bu birim küreyi deldikleri noktalar kendi simgeleriyle gösterilirse küre yüzeyinde z, n, n noktaları bir küresel üçgen oluşturur.(Şekil 5.1.b) Toplam çekül sapması ( $\theta$ ), onun azimutu ( $\alpha_\theta$ ), doğu-batı bileşeni (n) ve kuzey-güney bileşeni ( $\xi$ ) astronomik ve jeodezik verilerle aynı küresel üçgende toplanmış olurlar. Burada koordinatları yazacak olursak;

$$x = q \cdot \cot g u \cdot \cos \alpha$$

$$y = q \cdot \cot g u \cdot \sin \alpha$$

$$z = tg \alpha$$

dir. Bu durumda güneşin geldiği doğrultuda bulunan bir evin güneydoğu duvarı, doğuyla  $180^\circ + 29^\circ$  lik, güneybatı duvarı güneyle  $29^\circ$  lik açı yapar. O halde güneş açısı  $119^\circ$  ile  $229^\circ$  arasında yer alır. q boyundaki duvara dik çubuğun bulunduğu dikey saati

koordinat merkezi alınırsa y eksenine dik, x-ekseni batıya yönelik,  $\varphi$  bulunan yerin enlemi,  $|\delta| < \varepsilon$  deklinasyonu ve  $\alpha$  çubuğun güneye yaptığı açı olmak üzere,

$$y^2(\sin^2 \varphi - \sin^2 \delta) + x^2(\cos^2 \varphi \cdot \sin^2 \alpha - \sin^2 \delta) + xy(\sin \alpha \cdot \sin 2\varphi) - xq \sin 2\alpha \cos^2 \varphi - yq \cos \alpha \cdot \sin 2\varphi + q^2(\cos^2 \alpha \cdot \cos^2 \varphi - \sin^2 \delta) = 0$$

hiperbolünü izler.

Dönenceler için  $\delta = 0$  alınırsa doğru

$$y \sin \varphi + x \sin \alpha \cdot \cos \alpha = q \cos \alpha \cdot \cos \varphi$$

elde edilir.

## KAYNAKLAR

- [1] AYDEMİR, I., KURUOĞLU, N., “Time like Ruled Surfaces in the Minkowski Space”, *Int. J. Appl. Math.* 10 (2002), no.2, 149915
- [2] BEEM, J. K., EHRLICH, P. E., “Global Lorentzian Geometry”, Marcel Dekker Inc. New York, 1981.
- [3] CARMO, M. P., *Riemann Geometry*, Instituto de Matematica Pura e Aplicada, 1992.
- [4] ÇÖKEN, A. C., ÇİFTÇİ, Ü., On Null Curves on Surfaces and Null Vectors in Lorentz Space, *SDÜ Fen Edb. Fak. (e-dergi)2(1)*, 111-116, 2007.
- [5] GALLOT, S., HULİN, D., LAFONTAİNE, J., *Riemannian Geometry*, Universite de Savoie, 1987.
- [6] HACISALİHOĞLU, H. H., *Differential Geometry*, Ankara University Faculty of Science Press, 2000.
- [7] ILARSLAN, K. and BOYACIOĞLU, O. Position Vectors of A Space-like W-curve in Minkowski Space  $E_1^3$ , *Bull. Korean Math. Soc.* 44,429-438, 2007.
- [8] LEE, J. M. , *Riemann Manifolds An Introduction to Curvature*, Department of Mathematics, University of Washington Seattle, 1991
- [9] O’NEILL, B. *Semi-Riemannian Geometry with Applications to Relativity*. Academic Press, New York, 1983.
- [10] RATCLIFFE, J. G., “Foundations of Hyperbolic Manifolds”, Department of Mathematics, Vanderbilt University, 1994.
- [11] THOMPSON, A. C. , *Minkowski Geometry*, Cambridge University Press, (1996)
- [12] TOSUN, M., KURUOĞLU, N., “On Properties of Generalized Time like Ruled Surfaces in the Minkowski Space ” *Antarct. J. Math.*, 2 (2005), no. 2, 1739180.
- [13] TURGUT, M. and YILMAZ, S. On the Differential Geometry of the curves in Minkowski space-time I, *Int. J. Contemp. Math. Sci.* 3 (27), 1343-1349, 2008.
- [14] TURGUT, M. And YILMAZ, S. On the Frenet Frame and A Characterization of space-like Involute-Evolute Curve Couple in Minkowski Space-time, *Int. Math. Forum*, 3 (16), 793-803, 2008.
- [15] TURGUT, M. OZYILMAZ, E. and YILMAZ, S. On the Differential Geometry of the curves in Minkowski space-time II, *Int. J. Comput. Math. Sci.* 3 (2), 53-55, 2009.
- [16] WALRAVE J. *Curves and Surfaces in Minkowski Space*. PhD Thesis , K.U. Leuven, Faculty of Science, Leuven, 1995.
- [17] TURGUT, A., *3-Boyutlu Minkowski Uzayında Spacelike ve Timelike Regle Yüzeyler*, PhD Thesis, 1995.

## ÖZGEÇMİŞ

Hatice TOZAK, 28.08.1985 tarihinde Denizli’de doğdu. İlköğrenimini Denizli’deki Namık Kemal İlköğretim Okulunda tamamladı. İlköğrenim ikinci kademesini Denizli Türk Eğitim Vakfı Anadolu Lisesi’nde tamamladı. Ortaöğrenimini ise Denizli Erbakır Fen Lisesi’nde bitirdi. Lisans eğitimini Ege Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü’nde tamamladı. Şimdi ise Pamukkale Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Anabilim Dalı’nda yüksek lisans eğitimine devam etmektedir.