



---

**AĞIRLIKLI KALANLAR YÖNTEMİ  
VE  
BAZI UYGULAMALARI**

**Mukaddes ÖKTEN**

**Temmuz 2010  
DENİZLİ**

**AĞIRLIKLI KALANLAR YÖNTEMİ  
VE  
BAZI UYGULAMALARI**

**Pamukkale Üniversitesi  
Fen Bilimleri Enstitüsü  
Yüksek Lisans Tezi  
Matematik Anabilim Dalı**

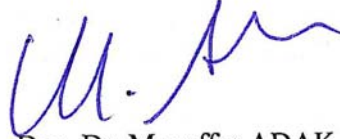
**Mukaddes ÖKTEN**

**Danışman: Doç. Dr. Uğur YÜCEL**

**Temmuz 2010  
DENİZLİ**

**YÜKSEK LİSANS TEZİ ONAY FORMU**

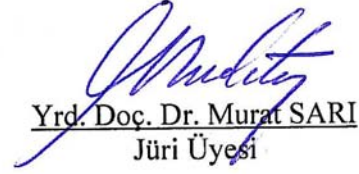
Mukaddes ÖKTEN tarafından Doç. Dr. Uğur YÜCEL yönetiminde hazırlanan “**Ağırlıklı Kalanlar Yöntemi ve Bazı Uygulamaları**” başlıklı tez tarafımızdan okunmuş, kapsamı ve niteliği açısından bir Yüksek Lisans Tezi olarak kabul edilmiştir.



Doç. Dr. Muzaffer ADAK  
Jüri Başkanı



Doç. Dr. Uğur YÜCEL  
Jüri Üyesi (Danışman)



Yrd. Doç. Dr. Murat SARI  
Jüri Üyesi

Pamukkale Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun  
15.07/2010 tarih ve 19/16 sayılı kararıyla onaylanmıştır.



**Prof. Dr. Halil KARAHAN**  
Müdür

Bu tezin tasarımı, hazırlanması, yürütülmesi, araştırmalarının yapılması ve bulgularının analizlerinde bilimsel etiğe ve akademik kurallara özenle riayet edildiğini; bu çalışmanın doğrudan birincil ürünü olmayan bulguların, verilerin ve materyallerin bilimsel etiğe uygun olarak kaynak gösterildiğini ve alıntı yapılan çalışmalara atfedildiğini beyan ederim.

İmza

:



Öğrenci Adı Soyadı : Mukaddes ÖKTEN

## TEŐEKKÖR

Bu çalıőmanın hazırlanmasında bana güvenen ve beni her zaman destekleyen canım aileme, gerekli bütün imkanları sağlayarak yakın ilgi ve yardımlarını esirgemeyen değerli hocam Doç Dr. Uğur YÖCEL'e ve Pamukkale Üniversitesi Fen Edebiyat Fakóltesi Matematik Bölümü'ndeki tüm öğretim elemanlarına gönülden teşekkür ederim.

## ÖZET

### AĞIRLIKLIL KALANLAR YÖNTEMİ VE BAZI UYGULAMALARI

Ökten, Mukaddes  
Yüksek Lisans Tezi, Matematik ABD  
Tez Yöneticisi: Doç. Dr. Uğur YÜCEL

Temmuz 2010, 70 Sayfa

Bu çalışmada, diferansiyel denklemlerin yaklaşık çözümlerini bulmak için matematiksel bir yöntem olan ağırlıklı kalanlar yöntemi sunulmuştur. Bu yöntem, akışkanlar mekaniği, ısı transferi, kimya mühendisliği, v.b. alanlarda yaygın olarak kullanılmaktadır.

Diferansiyel denklemler ve ağırlıklı kalanlar yönteminin kısa bir tarifinden sonra, yöntemin uygunluğu, programlamadaki kolaylığı, daha az bilgisayar işi ve doğruluğu gibi avantajlarını göstermek için bazı uygulamalar verilmiştir.

**Anahtar Kelimeler:** Galerkin yöntemi, Kollokasyon yöntemi, Alt bölge yöntemi, En küçük kareler yöntemi, Momentler yöntemi, Deneme fonksiyonu, Yaklaşık çözüm.

Doç. Dr. Muzaffer ADAK  
Doç. Dr. Uğur YÜCEL  
Yrd. Doç. Dr. Murat SARI

**ABSTRACT****THE METHOD OF WEIGHTED RESIDUALS AND ITS SOME APPLICATIONS**

Ökten, Mukaddes  
M. Sc. Thesis in Mathematics  
Supervisor: Doç. Dr. Uğur YÜCEL

July 2010, 70 Pages

In this work, the method of weighted residuals, which is a mathematical method of seeking for approximate solutions of differential equations, is presented. This method is extensively used in the fields of fluid mechanics, heat transfer, chemical engineering, etc.

After a brief description of differential equations and the method of weighted residuals, some applications are illustrated to show the advantages of the method such as convenience, simplicity in programming, less amount of computer work and accuracy.

**Keywords:** Galerkin method, Collocation method, Subdomain method, Least squares method, Method of moments, Trial function, Approximate solution.

Assoc. Prof. Dr. Muzaffer ADAK  
Assoc. Prof. Dr. Uğur YÜCEL  
Asst. Prof. Dr. Murat SARI

## İÇİNDEKİLER

Yüksek Lisans Tezi Onay Formu.....	i
Bilimsel Etik Sayfası.....	ii
Teşekkür.....	iii
Özet.....	iv
Abstract.....	v
İçindekiler.....	vi
Şekiller Dizini.....	vii
Tablolar Dizini.....	viii
1. Giriş.....	1
1.1 Kuramsal Bilgiler ve Literatür Taraması.....	2
1.2 Materyal ve Metot.....	3
2. Temel Kavramlar.....	4
2.1 Tanımlar.....	4
2.1.1 Adi Diferansiyel denklemler.....	4
2.1.2 Başlangıç-sınır değer problemi.....	5
2.1.3 Kısmi diferansiyel denklemler.....	5
2.1.4 Sınır Koşulları.....	9
2.1.5 Başlangıç koşulları.....	10
2.1.6 İyi-konulmuş kısmi diferansiyel denklemler.....	10
2.2 İkinci Mertebe Kısmi Diferansiyel Denklemlerin Sınıflandırılması.....	10
2.3 Hata ve Hata Türleri.....	11
2.3.1 Mutlak hata.....	13
2.3.2 Bağıl hata.....	13
2.3.3 Ortalama Karesel Hata.....	13
3. Ağırlıklı Kalanlar Yöntemi.....	14
3.1 Kollokasyon Yöntemi.....	15
3.2 Alt Bölge Yöntemi.....	16
3.3 En Küçük Kareler Yöntemi.....	17
3.4 Galerkin Yöntemi.....	17
3.5 Momentler Yöntemi.....	18
3.6 Deneme Fonksiyonlarının Seçimi.....	18
4. Ağırlıklı Kalanlar Yönteminin Uygulamaları.....	21
4.1 Adi diferansiyel denklemlere uygulamaları.....	21
4.2 Kısmi diferansiyel denklemlere uygulamaları.....	52
5. Sonuçlar ve Tartışma.....	65
Kaynaklar.....	67
Özgeçmiş.....	70



## ŞEKİLLER DİZİNİ

<b>Şekil 4.1</b> Örnek 4.1.2 için analitik çözüm ile yaklaşık çözümlerin karşılaştırılması.....	26
<b>Şekil 4.2</b> Örnek 4.1.12 için analitik çözüm ile yaklaşık çözümlerin grafiği.....	50
<b>Şekil 4.3</b> Örnek 4.1.12 için bağıl hatalar grafiği.....	50

**TABLolar DİZİNİ**

<b>Tablo 4.1</b> Örnek 4.1.5'in farklı yaklaşımlarla çözümünün karşılaştırılması.....	34
<b>Tablo 4.2</b> Örnek 4.1.6'nın farklı yaklaşımlarla çözümünün karşılaştırılması.....	36
<b>Tablo 4.3</b> Örnek 4.1.7'nin analitik çözümü ve yaklaşık çözümü değerleri.....	37
<b>Tablo 4.4</b> Örnek 4.1.10'un kollokasyon yöntemiyle elde edilen değerleri.....	44
<b>Tablo 4.5</b> Örnek 4.1.11'in Galerkin yöntemiyle elde edilen değerleri.....	45
<b>Tablo 4.6</b> Örnek 4.1.12'nin farklı yaklaşımlarının karşılaştırılması.....	48
<b>Tablo 4.7</b> Örnek 4.1.13 için analitik çözüm ile yaklaşık çözüm değerleri.....	52
<b>Tablo 4.8</b> Örnek 4.2.2 için analitik çözüm ile ağırlıklı kalanlar çözümleri.....	55
<b>Tablo 4.9</b> Örnek 4.2.3 için analitik çözüm ile yaklaşık çözüm değerleri.....	58
<b>Tablo 4.10</b> Örnek 4.2.4 için elde edilen çözüm değerleri.....	61
<b>Tablo 4.11</b> Örnek 4.2.5 için elde edilen çözüm değerleri.....	62
<b>Tablo 4.12</b> Örnek 4.2.6 için elde edilen çözüm değerleri.....	64

## 1. GİRİŞ

Tabiatta karşılaşılan her hadise genelde fizik kanunları yardımıyla ve matematik diliyle anlaşılmaya çalışılır. Newton ve 17. yüzyılın diğer bilim insanları fiziğin temel kanunlarını ifade etmek için diferansiyel denklemleri ortaya koymuşlardır. Diferansiyel denklemler fiziksel büyüklükler (kuvvet, kütle, yer değiştirme, v.b. ) ve bu büyüklüklerin uzay ve zamana göre değişim oranları (türevleri) arasındaki ilişkilerini tanımlamaktadırlar. Bu ilişkilerin ne ifade ettiğini bulmak için diferansiyel denklemlerin 'çözümüne' vardır.

Uygulamalı bilim dallarında karşımıza çıkan diferansiyel denklemlerin çoğu bilinen analitik yöntemlerle çözülemediğinden çeşitli sayısal (sonlu farklar yöntemi, sonlu elemanlar yöntemi v.b.) ve yaklaşık (varyasyonel metot, pertürbasyon teorisi v.b.) yöntemler geliştirilmiştir. Yaklaşık yöntemlerden biri de ağırlıklı kalanlar yöntemidir. Buna ek olarak son zamanlarda geliştirilen yaklaşık yöntemler arasında homotopi analiz yöntemi, varyasyonel iterasyon yöntemi ve homotopi pertürbasyon yöntemi sayılabilir. Biz bu çalışmada ağırlıklı kalanlar yöntemi üzerinde duracağız.

Ağırlıklı kalanlar yöntemi, günümüzde fen ve mühendislik alanlarındaki bir çok problemi çözmeye kullanılan ve sonlu elemanlar yöntemi olarak bilinen sayısal yöntemden önce var olan bir yöntemdir. Bu yöntem sonlu elemanlar yöntemi için taban teşkil etmektedir. Diğer yaklaşık yöntemlerle karşılaştırıldığında probleme uygulaması kolay ve çok fazla bilgisayar hesaplama süresi gerektirmediğinden kullanışlı bir yöntemdir. Bu nedenle bu çalışmada bu yöntem kullanılarak fen ve mühendislik alanlarında karşılaşılan çeşitli problemlerin çözümleri yaklaşık olarak bulunacaktır. Problem çözümlerinden önce ilk olarak yöntem ile ilgili temel kavramlar verilecek, ardından yöntem kısaca tanıtılacaktır. Son olarak ise, yöntemin kullanılmasını daha iyi

kavramak amacıyla yöntemin adi ve kısmi diferansiyel denklemlere uygulamaları verilecektir.

### 1.1 Kuramsal Bilgiler ve Literatür Taraması

Ağırlıklı kalanlar yöntemi, bir fonksiyonun çeşitli değerler karşılığında elde edilen yaklaşık çözümü ile gerçek çözüm arasındaki farkların bir ağırlık fonksiyonu ile çarpılarak toplamlarını minimize etme işlemidir. Bu yöntem, kollakasyon, alt bölge, en küçük kareler, Galerkin ve momentler yöntemlerini kapsamaktadır. Bu yöntemler kararlı ısı ve kütle transferinde birçok denkleme uygulanabilir. Ayrıca bu yöntemlerle, ısı ve kütle transferi kadar akışkanlar mekaniği ve kimya mühendisliği problemleri de çözülebilir.

Kollokasyon yöntemi Slater (1934) tarafından metallerdeki elektronik enerji bandları üzerine ve Barta (1937) tarafından kare prizmanın bükülmesi üzerine ortaya çıkan diferansiyel denklemleri çözmek için kullanılmıştır. Daha sonra adi diferansiyel denklemleri çözmek için genel bir yöntem olarak geliştirilmiştir. Frazer (1937) çok farklı deneme fonksiyonları kullanmış ve kollokasyon noktalarını keyfi olarak yerleştirmiştir. Lanczos (1938), Tchebyshev polinomlarını dikkate alarak çözümü genişletmiştir ve kollokasyon noktaları olarak Tchebyshev polinomlarının köklerini kullanmıştır. Lanczos (1938) daha sonra bu yöntemi ortogonal kollokasyon yöntemi olarak yeniden ele almış ve bu yöntemin değişik problemleri temsil eden lineer olmayan denklemler için uygun olduğunu görmüştür.

Alt bölge yöntemi, ilk olarak Alman mühendisler Biezeno ve Koch tarafından çubuklar, ışınlar ve düzlemlerin kararlılığında ortaya çıkan problemlerin çözümü için geliştirilmiştir (Biezeno ve Koch 1923, Biezeno 1923-1924, Biezeno ve Grammel 1955).

En küçük kareler yönteminin kökeni 1795 yılında Gauss'un yapmış olduğu çalışmalara dayanmaktadır. 1806 yılında Legendre de aynı yöntem üzerine çalışmalar yapmıştır (Hall 1970, Sorenson 1970). Ayrıca Picone (1928) bu yöntemi diferansiyel denklemleri çözmek için ve Becker (1964) nükleer reaktör mühendisliğindeki karmaşık problemleri çözmek için kullanmıştır.

Galerkin yöntemi en iyi yaklaşım yöntemlerinden biridir. Rus mühendis Galerkin (1915) geliştirmiştir. Diğer kimi yaklaşım yöntemlerine nazaran daha çok kullanılır ve analitik çözüme daha yakın sonuçlar verir. Bu yöntemi ayrıca Duncan (1937, 1938a, b, c, 1939 ) ve Kontorovich ve Krylov (1958) çalışmıştır.

Momentler yöntemi ise Yamada (1947, 1948, 1950) tarafından laminer sınır tabaka problemleri ve nonlinear geçici difüzyon problemlerine uygulamak için geliştirilmiştir. İlk yaklaşım için alt bölge yöntemine benzerdir ve genellikle integral yöntemi olarak da adlandırılır.

Bu yöntemlerin hepsini, her ülkedeki farklı kişilerin çalışmalarını göz önüne alarak ağırlıklı kalanlar yöntemi adı altında Crandall (1956) birleştirmiştir. Daha sonra Collatz (1960), Clymer ve Braun (1963), Finlayson ve Scriven (1966) bu yöntemi farklı alanlardaki problemlere uygulamışlardır.

## **1.2 Materyal ve Metot**

Tezin hazırlanması aşamasında başlangıçta Bruce A. Finlayson'un "The Method of Weighted Residuals and Variational Principles with Application in Fluid Mechanics, Heat and Mass Transfer"(1972, Academic Press, New York and London) isimli kitabı baz alınmıştır. Fen bilimleri ve mühendislik alanlarındaki uygulamalar için gerektiğinde matematik tabanlı bilgisayar programları kullanılmıştır.

## 2. TEMEL KAVRAMLAR

Matematiksel fizik ve mühendislik alanlarında ortaya çıkan olguların çoğunun kısmi diferansiyel denklemler tarafından tanımlanabildiği iyi bilinmektedir. Örneğin fizikte, ısı akışı ve dalga yayılımı olguları kısmi diferansiyel denklemlerle tanımlanır. Ekolojide çoğu nüfus modeli kısmi diferansiyel denklemlerle ifade edilir. Kimyasal olarak reaktif bir malzemenin dağılımında kısmi diferansiyel denklemlerden yararlanır. Ek olarak, akışkanlar dinamiği, kuantum mekaniği, elektrik ve diğer çoğu modelin fiziksel olguları kısmi diferansiyel denklemler tarafından geçerlilik bölgesi içerisinde ele alınır.

Diferansiyel denklemler, bilim ve mühendislik modellerinin fiziksel olgularını matematiksel olarak ifade etmede kullanışlı bir araç olmuştur. Bu yüzden diferansiyel denklemler bilim dünyasında önemli bir yere sahiptir. Bu bölümde diferansiyel denklemlerle ilgili temel kavramlar özet olarak verilecektir.

### 2.1 Tanımlar

Bir veya daha çok bağımlı değişken, bir veya daha çok bağımsız değişken ve bağımlı değişkenin bağımsız değişkene göre türevlerini içeren bağıntıya *diferansiyel denklem* denir.

#### 2.1.1 Adi diferansiyel denklemler

Diferansiyel denklemde bağımsız değişken sayısı bir ise bu denkleme *adi diferansiyel denklem* denir. Yani adi diferansiyel denklemlerde bağımlı değişken  $u = u(x)$  şeklinde bir tek bağımsız değişkene sahip olmalıdır. Adi diferansiyel denklem içerisinde bulunan en yüksek mertebeli türevin mertebesine *diferansiyel denklemin*

*mertebesi* denir. En yüksek mertebeden türevin kuvvetine de *diferansiyel denklemin derecesi* denir. Diferansiyel denklemin derecesi hesaplanırken denklemin türevlerine göre polinom olarak yazılması gerektiğine dikkat edilmelidir.

$x$  bağımsız,  $y$  bağımlı değişkenli  $n$ . mertebeden bir adi diferansiyel denklem

$$a_0(x)y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = b(x) \quad (1)$$

şeklinde yazılabiliyor ise denkleme *lineer adi diferansiyel denklem* denir. Aksi takdirde *lineer olmayan adi diferansiyel denklem* denir.

Denklem lineer ise, (1) denkleminde bulunan  $a_0, a_1, \dots, a_n$  katsayılarının her biri sabit sayılar ise denkleme *sabit katsayılı lineer diferansiyel denklem* denir. Eğer,  $a_0, a_1, \dots, a_n$  katsayılarından en az bir tanesi bağımsız değişkene bağlı ise denkleme *değişken katsayılı lineer diferansiyel denklem* denir. (1) denkleminde eşitliğin sağ tarafı sıfır ise yani  $b(x) = 0$  ise denkleme *homojen (ikinci yansız) lineer adi diferansiyel denklem*,  $b(x) \neq 0$  ise denkleme *homojen olmayan (ikinci yanlı) lineer adi diferansiyel denklem* denir.

### 2.1.2 Başlangıç-sınır değer problemi

Bir diferansiyel denklemin belli koşullara göre çözümleri arandığında eğer bağımlı değişken ve türevlerine göre koşullar tek bir noktada verilmiş ise probleme *başlangıç değer problemi* adı verilir. Eğer koşullar farklı noktalarda verilmiş ise probleme *sınır değer problemi* denir. Örneğin;

$$y'' + y = 0, \quad y(0) = 1, y'(0) = -1 \rightarrow \text{başlangıç değer problemi}$$

$$y'' + y = 0, \quad y(0) = 1, y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 \rightarrow \text{sınır değer problemi}$$

olarak adlandırılırlar.

### 2.1.3 Kısmi diferansiyel denklemler

Kısmi diferansiyel denklem, bağımlı değişken (bilinmeyen fonksiyon) ve onun kısmi türevlerini içeren bir denklemdir. Adi diferansiyel denklemlerin tersine, kısmi

diferansiyel denklemlerde bağımlı değişken  $u = u(x, t)$  ya da  $u = u(x, y, t)$  gibi birden fazla bağımsız değişkene bağlıdır. Eğer  $u = u(x, t)$  ise,  $u$  fonksiyonu  $x$  uzay değişkenine ve  $t$  zaman değişkenine bağlıdır. Bununla birlikte, eğer  $u = u(x, y, t)$  ise  $u$  fonksiyonu  $x, y$  uzay değişkenine ve  $t$  zaman değişkenine bağlıdır.

Örneğin,

$$u_t = ku_{xx} \quad (2)$$

$$u_t = k(u_{xx} + u_{yy}) \quad (3)$$

$$u_t = k(u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}) \quad (4)$$

denklemleri sırasıyla bir boyutlu ısı akışı, iki boyutlu ısı akışı ve üç boyutlu ısı akışını gösteren denklemler olarak bilinirler. (2) denkleminde  $u = u(x, t)$  bağımlı değişken ve  $x$  uzay değişkeni,  $t$  zaman değişkenine bağlıdır. (3) denkleminde  $u = u(x, y, t)$  bağımlı değişkendir ve 3-tane bağımsız değişkene bağlıdır. Bunlar  $x, y$  uzay değişkenleri ve  $t$  zaman değişkenidir. (4) denkleminde  $u = u(x, y, z, t)$  bağımlı değişkendir ve 4-tane bağımsız değişkene bağlıdır. Bunlar  $x, y, z$  uzay değişkenleri ve  $t$  zaman değişkenidir.

Kısmi diferansiyel denklemlerin diğer örnekleri

$$u_{tt} = c^2 u_{xx} \quad (5)$$

$$u_{tt} = c^2 (u_{xx} + u_{yy}) \quad (6)$$

$$u_{tt} = c^2 (u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}) \quad (7)$$

sırasıyla bir boyutlu dalga yayılımını, iki boyutlu dalga yayılımını ve üç boyutlu dalga yayılımını simgeleyen denklemler tarafından verilir. (5), (6) ve (7) denklemlerinde bilinmeyen fonksiyonlar sırasıyla  $u = u(x, t)$ ,  $u = u(x, y, t)$  ve  $u = u(x, y, z, t)$  fonksiyonlarıdır.

Laplace denklemi

$$u_{xx} + u_{yy} = 0 \quad (8)$$

$$u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = 0 \quad (9)$$

ile verilir, ve  $u$  fonksiyonu  $t$  zaman değişkenine bağlı değildir.



Bir kısmi diferansiyel denklemin mertebesi, denklemdeki en yüksek kısmi türevin mertebesidir. Örneğin, aşağıdaki denklemler

$$\begin{aligned} u_x - u_y &= 0, \\ u_{xx} - u_t &= 0, \\ u_y - uu_{xxx} &= 0, \end{aligned} \tag{10}$$

sırasıyla 1. mertebe, 2. mertebe ve 3. mertebeden kısmi diferansiyel denklemlerdir.

Kısmi diferansiyel denklemler lineer yada lineer olmayan denklemler olarak sınıflandırılır. Bir kısmi diferansiyel denklem eğer;

(i) denklemdeki bağımlı değişken ve bağımlı değişkenin her bir kısmi türevinin kuvveti 1 olmalıdır ve

(ii) bağımlı değişkenin katsayıları ve her bir kısmi türevinin katsayıları sabitler ya da bağımsız değişkenlerin fonksiyonları olmalıdır,

şartlarını sağlarsa 'lineer' olarak adlandırılır. Bununla birlikte kısmi diferansiyel denklem bu şartlardan herhangi birini sağlamazsa 'lineer olmayan' olarak adlandırılır.

Lineer kısmi diferansiyel denklemler bilimsel uygulama alanlarının çoğunda difüzyon denklemi ve dalga denklemi gibi denklemlerle ortaya çıkar. Aşağıda önemli olan ve iyi bilinen modellerin bazıları yer almaktadır.

1. Bir boyutlu ısı denklemi

$$u_t = ku_{tt} \tag{11}$$

ile verilir. Burada  $k$  bir sabittir.

2. Bir boyutlu dalga denklemi

$$u_{tt} = c^2 u_{xx} \tag{12}$$

ile verilir. Burada  $c$  bir sabittir.

3. Laplace denklemi

$$u_{xx} + u_{yy} = 0 \tag{13}$$

ile verilir.

4. Lineer Schrödinger denklemi

$$iu_t + u_{xx} = 0, \quad i^2 = -1 \tag{14}$$

ile verilir.

Kısmi diferansiyel denklemlerin, matematiksel fiziğin, akışkanlar dinamiğinin de dahil olduğu mühendisliğin, plazma fiziğinin, kuantum alan teorisinin, lineer olmayan dalga yayılımının ve lineer olmayan fiber optiğinin farklı alanlarında ortaya çıktığından daha önce bahsedildi. Aşağıda en çok ilgilenilen ve iyi bilinen lineer olmayan modellerin bazıları yer almaktadır:

1. Burgers denklemi

$$u_t + uu_x = \alpha u_{xx} \quad (15)$$

ile verilir.

2. Sine- Gordon denklemi

$$u_{tt} = c^2 u_{xx} + \alpha \sin u \quad (16)$$

ile verilir.

3. Lineer olmayan Schrödinger denklemi

$$iu_t + u_{xx} + \gamma |u|^2 u = 0 \quad (17)$$

ile verilir.

Kısmi diferansiyel denklemler, aynı zamanda homojen (ikinci yansız) ve homojen olmayan (ikinci yanlı) olarak sınıflandırılabilir. Herhangi mertebeden bir kısmi diferansiyel denklem, eğer kısmi diferansiyel denklemin her terimi bağımlı değişkeni ya da onun türevlerinden birini içerirse *homojen (ikinci yansız) kısmi diferansiyel denklem* olarak adlandırılır; aksi taktirde *homojen olmayan (ikinci yanlı) kısmi diferansiyel denklem* olarak adlandırılır.

Bir lineer homojen adi diferansiyel denklem için, eğer  $u_1, u_2, u_3, \dots, u_n$  denklemin çözümleriye, bu durumda  $u_1, u_2, u_3, \dots, u_n$  'in lineer kombinasyonu olan

$$u = c_1 u_1 + c_2 u_2 + c_3 u_3 + \dots + c_n u_n \quad (18)$$

ifadesinin de denklemin çözümü olduğu bilinmektedir. Bu çözümlerin iki ya da daha fazlasının kombinasyonu kavramı 'süperpozisyon prensibi' olarak adlandırılır. Süperpozisyon prensibinin verilen bir bölgede lineer homojen kısmi diferansiyel denklemler için kullanışlı olduğu dikkat edilmesi gereken önemli bir noktadır.

Bir lineer adi diferansiyel denklem için, genel çözüm keyfi sabitlere bağlıdır. Adi diferansiyel denklemlerin tersine, lineer kısmi diferansiyel denklemlerde, genel çözüm keyfi fonksiyonlara bağlıdır. Bu,

$$u_x + u_y = 0 \quad (19)$$

kısmi diferansiyel denkleminin

$$u = f(x - y) \quad (20)$$

şeklindeki çözümlere sahip olduğu dikkate alınarak kolaylıkla incelenebilir. Burada  $f(x - y)$  türevlenebilir keyfi bir fonksiyondur. Bu, (20) denkleminin çözümünün

$$\begin{aligned} u &= x - y, \\ u &= e^{x-y}, \\ u &= \sinh(x - y), \\ u &= \ln(x - y), \end{aligned} \quad (21)$$

fonksiyonlarından herhangi biri şeklinde olabileceği anlamına gelir.

#### 2.1.4 Sınır koşulları

Sınırlı bir  $\Omega$  bölgesinde fiziksel olguların matematiksel davranışını kontrol eden bir kısmi diferansiyel denklem verildiğinde,  $u$  bağımlı değişkeni genellikle  $\Omega$  bölgesinin sınırında tanımlanır. Sınır verisi sınır koşulları olarak adlandırılır. Sınır koşulları aşağıdaki gibi tanımlanan 3 tipte verilir:

- 1. Dirichlet Sınır Koşulları:** Bu durumda,  $u$  fonksiyonu genellikle sınırlı bölgenin sınırı üzerinde tanımlanır.  $L$  uzunluklu bir çubuk için,  $0 < x < L$ , sınır koşulları  $\alpha$  ve  $\beta$  sabitler olmak üzere  $u(0) = \alpha$ ,  $u(L) = \beta$  ile verilir. Dikdörtgensel bir düzlem için,  $0 < x < L_1$ ,  $0 < x < L_2$ , sınır koşulları için  $u(0, y)$ ,  $u(L_1, y)$ ,  $u(x, 0)$  ve  $u(x, L_2)$  değerleri tanımlanır. Sınır üzerindeki herhangi bir noktada  $u$  bağımlı değişkeni sıfır ise, sınır koşulu 'homojen' olarak adlandırılır, aksi takdirde 'homojen olmayan' olarak adlandırılır.

- 2. Neumann Sınır Koşulları:** Bu durumda, sınır için dışa doğru normal boyunca  $u$ 'nun  $\frac{du}{dn}$  normal türevi tanımlanır.  $L$  uzunluklu bir çubuk için, Neumann sınır koşulları  $u_x(0, t) = \alpha$ ,  $u_x(L, t) = \beta$  formlarından oluşur.

**3. Karışık Sınır Koşulları:** Bu durumda,  $u$  bağımlı değişkeni ve normal türevinin lineer bir kombinasyonu sınır üzerinde tanımlanır.

### 2.1.5 Başlangıç koşulları

Kısmi diferansiyel denklemlerin çoğunlukla ısı dağılımı, dalga yayılım olgusu ve kuantum mekaniği olgusu gibi fiziksel olguları ifade etmede ortaya çıktığına önceden değinildi. Kısmi diferansiyel denklemlerin çoğu uzay değişkenlerinin yanı sıra, difüzyon denklemi ve dalga denklemi gibi,  $t$  zaman değişkenine de bağlıdır.  $t = 0$  başlangıç anında  $u$  bağımlı değişkeninin başlangıç değerlerinin tanımlanması gerekir. Isı durumu için başlangıç zamanında sıcaklığı tanımlayan  $u(t = 0)$  başlangıç değerinin tanımlanması gerekir. Dalga denklemi için,  $u(t = 0)$  ve  $u_t(t = 0)$  başlangıç koşullarının tanımlanması gerekir.

### 2.1.6 İyi-konulmuş kısmi diferansiyel denklemler

Bir kısmi diferansiyel denklem, denklemi ve tanımlanan koşulları sağlayan ve kararlı olması şartıyla var olan tek bir çözüme sahipse iyi-konulmuş olduğu söylenir. Kısmi diferansiyel denklemin katsayıları ya da koşullarındaki küçük bir değişiklik, kısmi diferansiyel denklemin çözümünde küçük bir değişiklikle sonuçlanırsa, çözümün kararlı olduğu söylenir.

## 2.2 İkinci Mertebe Kısmi Diferansiyel Denklemlerin Sınıflandırılması

$x$  ve  $y$  bağımsız değişkenli ikinci mertebe lineer kısmi diferansiyel denklemin genel formu

$$Au_{xx} + Bu_{xy} + Cu_{yy} + Du_x + E_y + Fu = G \quad (22)$$

ile verilir. Burada  $A, B, C, D, E, F$  ve  $G$ ,  $x$  ve  $y$  değişkenlerinin fonksiyonları ya da sabitlerdir. İkinci mertebe bir kısmi diferansiyel denklem (22), genellikle denklemlerin 3 temel sınıfı içerisinde aşağıdaki gibi sınıflandırılır:

**1. Parabolik Denklem:** Parabolik denklem

$$B^2 - 4AC = 0 \quad (23)$$

özelliğini sağlayan bir denklemdir. Parabolik denklemlerin örnekleri ısı akışı ve difüzyon süreç denklemleridir. Isı transferi denklemi

$$u_t = ku_{xx} \quad (24)$$

şeklindedir.

**2. Hiperbolik Denklem:** Hiperbolik denklem

$$B^2 - 4AC > 0 \quad (25)$$

özelliğini sağlayan bir denklemdir. Hiperbolik denklemlerin örnekleri dalga yayılımı denklemleridir. Dalga denklemi

$$u_{tt} = c^2 u_{xx} \quad (26)$$

şeklindedir.

**3. Eliptik Denklem:** Eliptik denklem

$$B^2 - 4AC < 0 \quad (27)$$

özelliğini sağlayan bir denklemdir. Eliptik denklemlerin örnekleri Laplace denklemi ve Schrodinger denklemdir. İki boyutlu Laplace denklemi

$$u_{xx} + u_{yy} = 0 \quad (28)$$

ile verilir.  $u(x, y)$  potansiyel fonksiyonu tanımlandığı için Laplace denklemi sıklıkla potansiyel denklemi olarak da adlandırılır.

### 2.3 Hata ve Hata Türleri

Sayısal hatalar, matematiksel işlemler ve değerlerin yaklaşık kullanımlarından ortaya çıkan farklar olarak tanımlanabilir. Bu hataların bir kısmı kullanıcıların kendisinden, bir kısmı bilgisayarda kullanılan yazılımlardan ve bir kısmı da bilgisayarların doğal olarak sayıları belirli bir uzunlukta depolayabilme, yuvarlatma ve kesmelerinden kaynaklanır.

Örneğin bir deneyde ölçülen veya gözlenen değer, belirli bir hassasiyette gözlenir. Yani, belirli bir ondalıktan sonra gelecek sayılar bilinemez. Gözlemlenen değer, noktadan sonra dört basamaklı ise beşinci basamak için bir şey söylenemez. Bu şekilde

gözlemlenen veya ölçülen değerlerin binlerce aritmetik işlemin bulunduğu bir algoritmada kullanılacağı varsayılırsa, her bir işlemten sonra, sonucun daha az doğru olduğu sonucuna varabiliriz. Farklı bir örnek vermek gerekirse  $\pi = 3.141592654\dots$ ,  $\sqrt{2} = 1.41421\dots$ ,  $2/3 = 0.66666\dots$  gibi ondalık haneleri sonsuza uzanan sayılar aritmetik işlemlerde kullanıldığında yapılan hataların daha açık olacağı görülür. Hatalara hesaplayıcılar yönünden bakıldığında, farklı bir durumla karşılaşılır. Bilindiği gibi hesaplayıcılar, bir devreden akımın geçip geçmemesi esasına göre, iki tabanlı sayı sistemine göre çalışır. Aritmetik işlemlerde verilen tüm on tabanlı sayılar hesaplayıcılarda önce iki tabanlı sayılara dönüştürülür daha sonra işlenir. Şayet verilen sayı bir tam sayı ise, bütün tamsayıların iki tabanlı karşılığı olduğundan ve her iki sayıda tamsayı olduğundan iki sayı arasında bir fark oluşmaz. Şayet verilen sayı reel sayı ise ondalık kısmının iki tabanında tam karşılığının olup olmadığı araştırılmalıdır. Örneğin,

$$(0.125)_{10} = (0.001)_2$$

durumunda olduğu gibi  $(0.125)$  sayısının iki tabanlı karşılığı  $(0.001)$  olduğu halde  $(0.1)$  reel sayısının iki tabanında tam olarak ifade edilmesi mümkün değildir. Gözlemlenen veya ölçülen değerlerin hesaplayıcılar içerisinde sınırlı bir hafızada tutulur. Bu nedenle, sayılar iki tabanında ancak belirli uzunlukta ifade edilebilmektedir. Örneğin, reel sayılar için normal hassasiyette 32 bitlik bir yer ayrılan hesaplayıcıda 7 ondalık basamağa, çift hassasiyette ise 64 bitlik yer ayrılır ve bu da yaklaşık 15 ondalık basamağa karşılık gelir. Bu nedenle değerler için hesaplayıcılardaki ayrılan yerler veri tipine göre değişmektedir. Bu da farklı bir türde hataya neden olabilmektedir.

Kesme ve yuvarlatma hataları, verilerin sayısal işlemlere girmesinden kaynaklanan hatalardır. Sonsuz terimli bir seriyi uygun şekilde keserek sayısal sonuçlar elde edilir. Belirli terimden sonra gelen terimlerin ihmal edilmesi kesme hatası olarak bilinir. Burada yapılan hata atılan terimlerin toplamı kadar olur. Örneğin;

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots$$

radyan cinsinden verilen bir  $x$  açısının sinüsünün hesaplanmasında kullanılır. Bu sonsuz serinin tüm terimlerinin hesaplanması mümkün değildir ve hesaplamada belirli bir terim işleme alınarak  $\sin(x)$  için yaklaşık bir değer elde edilir. Bu hesaplamada ihmal edilen terimlerin toplamı yapılan kesme hatasına eşit olur.

### 2.3.1 Mutlak hata

Doğru olarak kabul edilen bir büyüklüğün değeri (analitik olarak bilinen) ile sayısal hesaplamalar sırasında elde edilen değeri arasındaki fark mutlak hata olarak tanımlanır:

$$\text{Mutlak hata} = |\text{gerçek değeri} - \text{yaklaşık değeri}|.$$

### 2.3.2 Bağlı Hata

Mutlak hatanın gerçeri değeri bölünmesiyle elde edilen hatadır. Fakat her problem için gerçeri değeri bilme olanağı olmadığı için bağlı hata genel olarak mutlak hatanın yaklaşık değeri bölünmesiyle elde edilir. Yani bağlı hata, gerçeri değeri biliniyorsa

$$\text{Bağlı hata} = \text{Mutlak hata} / \text{gerçeri değeri}$$

şeklinde, gerçeri değeri bilinmiyorsa

$$\text{Bağlı hata} = \text{Mutlak hata} / \text{yaklaşık değeri}$$

şeklinde tanımlanır.

### 2.3.3 Ortalama Karesel Hata

İki fonksiyonun yakınlığı için mantıklı bir skaler indeks  $L_2$  normu ya da Euclid normudur. Bu ölçü mühendislikte genellikle ortalama kare hatanın karekökü olarak adlandırılır. Ortalama karesel hata

$$E_{RMS}(x) = \frac{\sqrt{\int (u(x) - \tilde{u}_N(x))^2 dx}}{\int dx}$$

olarak tanımlanabilir. Ayrıca ayrık noktalarda ortalama karesel hata

$$E_{RMS} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N (u_i - \tilde{u}_i)^2}{N}}$$

şeklinde dir.

### 3. AĞIRLIKLI KALANLAR YÖNTEMİ

Bir fonksiyonun çeşitli değerler karşılığında elde edilen yaklaşık çözümü ile gerçek çözüm arasındaki farkların bir ağırlık fonksiyonu ile çarpılarak toplamlarını minimize etme işlemine ‘ağırlıklı kalanlar yöntemi’ denir.

Fen ve mühendislik alanında ortaya çıkan denklemlerin çoğu analitik olarak çözülememektedir. Bu sebeple analitik çözümünü bulamadığımız diferansiyel denklemleri çözmek için nümerik yöntemler ve yaklaşık yöntemler geliştirilmiştir. Ağırlıklı kalanlar yöntemi de bu yaklaşık yöntemlerden biridir ve sonlu elemanlar yönteminden önce diferansiyel denklemleri çözmek için geliştirilmiş bir yöntem olup, sonlu elemanlar yöntemi için eleman yöntemi türetmede ağırlıklı kalanlar yönteminden Galerkin yöntemi kullanılır. Ağırlıklı kalanlar yöntemi, bir nevi sonlu elemanlar yönteminin temelini oluşturur denilebilir. Yöntem aşağıdaki şekilde kısaca tanımlanabilir:

$D$  lineer diferansiyel operatör olmak üzere

$$D(u(x)) = p(x) \quad (29)$$

diferansiyel denklemi ele alınsın.  $u$  fonksiyonuna  $\tilde{u}_N$  deneme fonksiyonu yardımıyla yaklaşılacağı düşünölsün. Yani

$$u \cong \tilde{u}_N = \sum_{i=0}^N c_i \varphi_i \quad (30)$$

olsun. Burada  $c_i$  'ler keyfi sabitler,  $\varphi_i$  'ler ise lineer bağımsız baz fonksiyonlarıdır.  $\tilde{u}_N$  bu baz fonksiyonlarının lineer kombinasyonu şeklinde yazılmıştır. (30) ifadesini (29) denkleminde yerine yazarsak



$$E(x) = R(x) = D(\tilde{u}_N(x)) - p(x) \neq 0$$

elde edilir. Elde edilen değer ‘hata’ ya da ‘kalan’ olarak adlandırılır.

Ağırlıklı kalanlar yöntemindeki mantık, bölge üzerinden alınan kalanın ağırlıklı integralini sıfır yapmaktır. Bu ise

$$\int_X R(x)W_i dx = 0 \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (31)$$

anlamına gelir. Burada  $W_i$ ’ler ağırlık fonksiyonları olup, bu fonksiyonların sayısı  $\tilde{u}_N$ ’deki  $c_i$  bilinmeyen sabitlerinin sayısına eşittir. Sonuçta, adi diferansiyel denklemler için bilinmeyen  $c_i$  sabitlerinin sayısı kadar cebirsel denklem, kısmi diferansiyel denklemler için ise, adi diferansiyel denklem elde edilir. Ağırlıklı kalanlar yöntemi buradaki  $W_i$  ağırlık fonksiyonlarının seçimine bağlı olarak 5 farklı alt yöntem içerir. Bunlar;

1. Kollokasyon yöntemi,
2. Alt bölge yöntemi,
3. En küçük kareler yöntemi,
4. Galerkin yöntemi,
5. Momentler yöntemi,

şeklindedir. Şimdi bu yöntemleri tanıyalım.

### 3.1 Kollokasyon Yöntemi

Kollokasyon yöntemi Slater (1934) tarafından metallerdeki elektronik enerji bantları üzerine ve Barta (1937) tarafından kare prizmanın bükülmesi üzerine ortaya çıkan denklemleri çözmek için kullanılmıştır. Daha sonra adi diferansiyel denklemleri çözmek için genel bir yöntem olarak geliştirilmiştir. Frazer (1937) çok farklı deneme fonksiyonları kullanmıştır ve kollokasyon noktalarını keyfi olarak yerleştirmiştir. Lanczos (1938), Tchebyshev polinomlarını dikkate alarak çözümü genişletmiştir ve kollokasyon noktaları olarak Tchebyshev polinomlarının köklerini kullanmıştır. Yazar daha sonra bu yöntemi ortogonal kollokasyon yöntemi olarak yeniden ele almış ve bu yöntemin kimya mühendisliğindeki kimi problemleri temsil eden lineer olmayan denklemler için daha uygun olduğunu göstermiştir.

Bu yöntemde ağırlık fonksiyonları bölgedeki Dirac  $\delta$  fonksiyonlarının ailesinden alınır. Yani  $W_i(x) = \delta(x - x_i)$  şeklinde seçilir. Dirac  $\delta$  fonksiyonu;

$$\delta(x - x_i) = \begin{cases} \infty, & x = x_i \\ 0, & \text{aksi halde} \end{cases}$$

şeklinde tanımlanır. Ağırlık fonksiyonunun eğiti (31) ifadesinde yerine yazılırsa

$$\int_x R(x)\delta(x - x_i)dx = 0 \Rightarrow R(x_i) = 0$$

elde edilir. Bu ise kalanın belirli noktalarda sıfıra eşitlendiğinin bir göstergesidir. Burada  $X$  bir reel aralıktır.

### 3.2 Alt Bölge Yöntemi

Alt bölge yöntemi, ilk olarak Alman mühendisler Biezeno ve Koch tarafından çubuklar, ışınlar ve düzlemlerin kararlılığında ortaya çıkan problemlere çözüm için geliştirilmiştir (Biezeno ve Koch 1923, Biezeno 1923-1924, Biezeno ve Grammel 1955).

Bu yöntemde çalışılan bölge bilinmeyen katsayı kadar alt bölgeye bölünür ve her bir bölge üzerinden kalanın integrali sıfıra eşitlenir. Diyelim ki  $n$  - tane katsayı bilinmesin ve  $X$  aralığı,  $X_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$  olmak üzere  $n$ -tane alt aralığa ayrılınsın. Ağırlık fonksiyonları;

$$W_i = \begin{cases} 1, & x \in X_i \text{ ise} \\ 0, & x \notin X_i \text{ ise} \end{cases}$$

şeklinde seçilir. Buradaki  $W_i$  ağırlık fonksiyonlarını (31) ifadesinde kullanırsak

$$\int_x R(x)W_i dx = \sum_i \left( \int_{X_i} R(x)W_i dx \right) = \sum_i \left( \int_{X_i} R(x) dx \right) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

elde edilir.

### 3.3 En Küçük Kareler Yöntemi

En küçük kareler yönteminin kökeni 1795 yılında Gauss'un yapmış olduğu çalışmalara dayanmaktadır. 1806 yılında Legendre de aynı yöntem üzerine çalışmalar yapmıştır. Ayrıca Picone (1928) diferansiyel denklemleri çözmek için ve Becker (1964) nükleer reaktör mühendisliğindeki karmaşık problemleri çözmek için kullanmıştır.

Bu yöntem adından da anlaşılacağı gibi kalanın karesi üzerinden alınan integrali minimum yapmaya çalışmaktır. Yani

$$S = \int_x R(x)R(x)dx = \int_x R^2(x)dx$$

integralinin minimumudur. Bu skaler fonksiyonun minimumunu bulmak için, tüm bilinmeyen sabitlere göre  $S$ 'nin türevlerini sıfıra eşitleriz. Yani

$$\frac{\partial S}{\partial c_i} = 0 \Rightarrow 2 \int_x R(x) \frac{\partial R}{\partial c_i} dx = 0$$

şeklindedir. Bu ifadeyi (31) ile karşılaştırsak  $W_i$  ağırlık fonksiyonlarının

$$W_i = \frac{\partial R}{\partial c_i}$$

şeklinde olduğu görülür. Yani ağırlık fonksiyonları, kalanın bilinmeyen sabitlere göre türevidir.

### 3.4 Galerkin Yöntemi

En iyi yaklaşım yöntemlerinden biridir. Rus mühendis Galerkin (1915) geliştirmiştir. Diğer yaklaşım yöntemlerine nazaran daha çok kullanılır ve analitik çözüme daha yakın sonuçlar verir. Bu yöntemi ayrıca Duncan (1937, 1938a, b, c, 1939), Kontorovich ve Krylov (1958) çalışmıştır.

Bu yöntem en küçük kareler yönteminin bir modifikasyonu olarak değerlendirilebilir. Bilinmeyen  $c_i$  sabitlerine göre kalanın türevlerini kullanmak yerine, deneme fonksiyonunun bu  $c_i$  sabitlerine göre türevleri kullanılır. Yani ağırlık fonksiyonları

$$W_i = \frac{\partial \tilde{u}_N}{\partial c_i}$$

şeklinde olur.

### 3.5 Momentler Yöntemi

Momentler yöntemi Yamada (1947, 1948, 1950) tarafından laminar sınır tabaka problemleri ve nonlinear geçici difüzyon problemlerine uygulamak için geliştirilmiştir. İlk yaklaşım için alt bölge yöntemine benzerdir ve genellikle integral yöntemi olarak da adlandırılır.

Bu yöntemde, ağırlık fonksiyonları polinomlar ailesinden seçilir. Yani

$$W_i = x^{i-1}, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

şeklinde dir. Deneme fonksiyonundaki baz fonksiyonları polinomlardan seçilirse Galerkin yöntemi ile momentler yönteminin sonuçlarının çoğunlukla aynı olduğuna dikkat edilmelidir.

Bu yöntemlerin hepsini, her ülkedeki farklı kişilerin çalışmalarını göz önüne alarak ağırlıklı kalanlar yöntemi adı altında Crandall (1956) birleştirmiştir. Daha sonra Collatz (1960), Clymer ve Braun (1963), Finlayson ve Scriven (1966) bu yöntemi farklı alanlardaki problemler için ele alıp geliştirmişlerdir.

### 3.6 Deneme Fonksiyonlarının Seçimi

Ağırlıklı kalanlar yöntemi uygulanırken deneme fonksiyonunun seçimi önemlidir. Deneme fonksiyonunun seçimi, yöntemin kuvvetini belirlemede etkin bir faktördür. Düşük mertebe yaklaşımlarda seçim, sonuçları ciddi oranda etkileyebilir fakat nümerik yakınsama istenildiği için daha yüksek mertebe yaklaşımlarda seçim, sonucu daha az etkiler. İlgilenilen esas durum, nihai sonuçtan ziyade yakınsama oranıdır. Herhangi bir problemi ele alırken yapılması gereken ilk adım analitik yöntemleri denemektir. Belki temel problem analitik olarak çözülemez, fakat özel durumlarda çözülebilir. Özel durumlar deneme fonksiyonunun nasıl seçileceği hakkında fikir sağlarlar. Bu sayede

probleme verilen koşulları (hepsini değil) sağlayan deneme fonksiyonunu seçmek kolaylaşır.

Deneme fonksiyonları, tam ve lineer bağımsız olmalıdır. Polinomlar tamdır ve bu nedenle herhangi bir sürekli fonksiyon polinomlar yardımıyla seriye açılabilir. Fonksiyonların bir kümesinin tamlık özelliği, yeterli terimin kullanılması şartıyla analitik çözümü elde edebileceğimizi garantiler. Aksi takdirde ardışık yaklaşımlar çözüme yakınsamaz.

Deneme fonksiyonlarının seçimi konusunda yukarıda bahsedilenlerin dışında iki tane daha temel kriter vardır. Bunlar problemin simetrikliğini inceleme ve sınır koşullarını uygulamadır. Eğer sınır koşulları  $y(x, z) = f(x, z)$  şeklinde ise, deneme fonksiyonlarının uygun formu

$$y(x, z) = f(x, z) + \sum_{i=1}^N a_i y_i(x, z) \quad (32)$$

şeklinindedir. Burada, sınır üzerinde  $y_i$ 'lerin değeri sifıra eşittir. Deneme fonksiyonları, bazen sınır koşullarını, bazen simetri koşullarını uygulayarak bulunabilir ve genel bir polinomla ifade edilebilir.

Ortogonal polinomlar, deneme fonksiyonlarında çok kullanışlıdır. Sınır koşullarının bazısını sağlamak ve polinomların kombinasyonları ile analitik çözüme ulaşmak için yapılandırılabilirler. Ortogonal polinomlardan yararlanıp, yeteri kadar terim kullanarak doğru bir şekilde hesaplama yapılmasıyla elde edilen yaklaşım  $x$ ' in kuvvetleriyle de ifade edilebilmesine rağmen polinomların ortogonalitesi hesaplama avantajı sağlar.

Hesaplama zorluğu yüzünden genellikle birinci ya da ikinci yaklaşımlara kadar işlem yapılmasına rağmen transandantal deneme fonksiyonları da gerektiğinde kullanılabilir (Schetz, 1963; Richardson, 1968).

Zamana bağlı problemlerde, çözümü sınır koşullarını sağlayan

$$Y(x, t) = f(x) + \sum_{i=1}^N A_i(t) X_i(x) \quad (33)$$

şeklindeki uzaysal modelleri dikkate alarak genişletmek elverişlidir.  $A_i(t)$  fonksiyonları, daha sonra yaklaşık yöntemler tarafından belirlenir ve başlangıç koşullarını sağlar. Bir denklemin farklı noktadaki çözümleri biliniyorsa bu çözümler yardımıyla deneme fonksiyonunu oluşturmak mümkündür. Örneğin;  $z = 0$ 'da çözüm  $T_1(x, y)$  ve  $z = \infty$ 'da  $T_2(x, y)$  ise deneme fonksiyonu;

$$T(x, y) = Z_1(z)T_1(x, y) + Z_2(z)T_2(x, y) \quad (34)$$

olarak alınabilir ve ağırlıklı kalanlar yöntemi  $Z_i$  fonksiyonlarını belirlemek için kullanılır.

Daha önce bahsedilen yöntemlerde kullanılan deneme fonksiyonunun problemlerin çözümündeki uygulamalarına bağlı olarak belirli bir yöntem sınıfı altında adlandırıldığından da bahsedilebilir. Deneme fonksiyonu problemdeki sınır koşullarını sağlar, diferansiyel denlemi sağlamazsa; problemin çözümünde kullanılmış olduğumuz yöntem *iç yöntemler* olarak adlandırılır. Deneme fonksiyonu diferansiyel denlemi sağlar, sınır koşullarını sağlamazsa kullanılan yöntem *sınır yöntemleri* adı verilir. Deneme fonksiyonu hem diferansiyel denlemi hem de sınır koşullarını sağlamazsa yöntem *karışık yöntemler* olarak adlandırılır. Adi diferansiyel denklemlerin çözümünde iç yöntemler kullanılır. Kısmi diferansiyel denklemlerin çözümünde ise hem iç, hem sınır yöntemleri kullanılır.

#### 4. AĞIRLIKLIL KALANLAR YÖNTEMİNİN UYGULAMALARI

Bu bölümde ağırlıklı kalanlar yönteminin denklemlerin çözümünde nasıl uygulandığını daha iyi anlamak için yöntemin adi diferansiyel denklemlere ve kısmi diferansiyel denklemlere uygulanışını içeren örnekler verilecektir.

##### 4.1 Adi Diferansiyel Denklemlere Uygulamaları

Bu başlık altında yöntemin lineer ve lineer olmayan adi diferansiyel denklemlere uygulanışı detaylı bir şekilde verilecektir. İlk önce basit bir problemle başlayalım.

**Örnek 4.1.1:**  $u'(x) + u(x) = x$ ,  $0 \leq x \leq 1$

$$u(0) = 0$$

başlangıç-değer problemini yukarıda bahsedilen yöntemlerle çözmeyi ele alalım (Gaul vd 2003).

**Çözüm:** Bu problemin analitik çözümü  $u_{analitik}(x) = e^{-x} + x - 1$ ,  $u_{analitik}(1) = 0.367879$  olarak bulunur. Taban fonksiyonları polinomlar olarak ele alınırsa deneme fonksiyonu

$$\tilde{u}_N(x) = \sum_{i=0}^{N+1} c_i x^i$$

şeklinde yazılabilir.  $N = 2$  için;

$$\tilde{u}_2(x) = \sum_{i=0}^3 c_i x^i \Rightarrow \tilde{u}_2(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3$$

elde edilir. Problemden verilen başlangıç koşulu sağlatılırsa;  $c_0 = 0$  olarak bulunur ve

$$\tilde{u}_2(x) = c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3$$

yazılabilir. Deneme fonksiyonu denklemden yerine yazılırsa kalan ifadesi

$$R(x) = c_1(1 + x) + c_2(2x + x^2) + c_3(3x^2 + x^3) - x$$

şeklinde elde edilir.

#### 4.1.1.1 Kollokasyon yöntemi

Kalan ifadesinde bulunan bilinmeyen sabit sayısı kadar noktada kalanın değeri sıfıra eşitlenmelidir. Kalan ifadesinde 3-tane bilinmeyen sabit olduğu için problemin aralığından 3-tane kollokasyon noktası seçilmelidir. Kollokasyon noktaları  $x_1 = 0$ ,  $x_2 = 0.5$ ,  $x_3 = 1$  olarak alınırsa;

$$R(x_1) = 0$$

$$R(x_2) = 0$$

$$R(x_3) = 0$$

denklemlerinden  $c_1 = 0$ ,  $c_2 = 0.4737$ ,  $c_3 = -0.1053$  şeklinde bulunur. Bulunan bu değerler deneme fonksiyonunda yerine yazılırsa;

$$\tilde{u}_{2kollokasyon}(x) = 0.4737x^2 - 0.1053x^3, \quad \tilde{u}_{2kollokasyon}(1) = 0.368400$$

olarak elde edilir.

#### 4.1.1.2 Alt bölge yöntemi

3-tane bilinmeyen olduğu için problemin aralığı 3 alt aralığa bölünür ve her bir alt aralık üzerinden kalanın integrali sıfıra eşitlenmelidir. Bu yöntemde ağırlık fonksiyonları her bir alt aralıkta  $W_i = 1$  olarak alınır. Alt aralıklar

$0 \leq x \leq \frac{1}{3}$ ,  $\frac{1}{3} < x \leq \frac{2}{3}$ ,  $\frac{2}{3} < x \leq 1$ , şeklinde alınır. Bu durumda

$$\int_0^{\frac{1}{3}} R dx = 0, \quad \int_{\frac{1}{3}}^{\frac{2}{3}} R dx = 0, \quad \int_{\frac{2}{3}}^1 R dx = 0$$

denklemleri elde edilir. Bu denklemlerin çözümüyle  $c_1 = \frac{1}{174}$ ,  $c_2 = \frac{27}{58}$ ,  $c_3 = -\frac{3}{29}$

bulunur. Deneme fonksiyonu;

$$\tilde{u}_{2altbolge}(x) = \frac{1}{174}x + \frac{27}{58}x^2 - \frac{3}{29}x^3, \quad \tilde{u}_{2altbolge}(1) = 0.367816$$

olarak elde edilir.



#### 4.1.1.3 En küçük kareler yöntemi

Bu yöntemde ağırlık fonksiyonları  $W_i = \frac{\partial R}{\partial c_i}$ ,  $i = 1,2,3$  şeklindeydi. Bu durumda

$$W_1 = \frac{\partial R}{\partial c_1} = 1 + x, W_2 = \frac{\partial R}{\partial c_2} = 2x + x^2, W_3 = \frac{\partial R}{\partial c_3} = 3x + x^3$$

şeklinde bulunur. (31) ifadesi göz önüne alınırsa;

$$\int_0^1 R(x)W_i dx = 0, \quad i = 1,2,3$$

olarak yazılabilir. Sonuçta elde edilen cebirsel denklemlerin çözümüyle

$$c_1 = \frac{91}{16411}, c_2 = \frac{7635}{16411}, c_3 = -\frac{6755}{65644} \text{ elde edilir. Deneme fonksiyonu}$$

$$\tilde{u}_{2en.k.kareler}(x) = \frac{91}{16411}x + \frac{7635}{16411}x^2 - \frac{6755}{65644}x^3, \quad \tilde{u}_{2en.k.kareler}(1) = 0.3679$$

şeklinde olur.

#### 4.1.1.4 Galerkin yöntemi

Bu yöntemde ağırlık fonksiyonları  $W_i = \frac{\partial \tilde{u}_2}{\partial c_i}$ ,  $i = 1,2,3$  şeklindeydi. Bu durumda

$$W_1 = \frac{\partial \tilde{u}_2}{\partial c_1} = x, W_2 = \frac{\partial \tilde{u}_2}{\partial c_2} = x^2, W_3 = \frac{\partial \tilde{u}_2}{\partial c_3} = x^3$$

şeklinde bulunur. (31) ifadesi göz önüne alınırsa;

$$\int_0^1 R(x)W_i dx = 0, \quad i = 1,2,3$$

olarak yazılabilir. Sonuçta elde edilen cebirsel denklemlerin çözümüyle

$$c_1 = \frac{1}{91}, c_2 = \frac{165}{364}, c_3 = -\frac{5}{52} \text{ elde edilir. Deneme fonksiyonu}$$

$$\tilde{u}_{2galerkin}(x) = \frac{1}{91}x + \frac{165}{364}x^2 - \frac{5}{52}x^3, \quad \tilde{u}_{2galerkin}(1) = 0.3681$$

şeklinde olur.

#### 4.1.1.5 Momentler yöntemi

Bu yöntemde ağırlık fonksiyonları  $W_i = x^{i-1}$ ,  $i = 1,2,3$  şeklindeydi. Bu durumda

$$W_1 = 1, W_2 = x, W_3 = x^2$$

şeklinde bulunur. (31) ifadesi göz önüne alınır;

$$\int_0^1 R(x)W_i dx = 0, \quad i = 1,2,3$$

olarak yazılabilir. Sonuçta elde edilen cebirsel denklemlerin çözümüyle

$c_1 = \frac{1}{193}$ ,  $c_2 = \frac{90}{193}$ ,  $c_3 = -\frac{20}{193}$  elde edilir. Deneme fonksiyonu;

$$\tilde{u}_{2moment}(x) = \frac{1}{193}x + \frac{90}{193}x^2 - \frac{20}{193}x^3, \quad \tilde{u}_{2moment}(1) = 0.367876$$

şeklinde olur.

**Örnek 4.1.2:**  $\frac{d}{dx}\left(c(u)\frac{du}{dx}\right) = 0, \quad c(u) = 1 + u$

$$u(0) = 0, \quad u(1) = 1$$

sınır-değer probleminin kollokasyon ve Galerkin yöntemleriyle çözümünü ele alalım.

**Çözüm:** Bu problemin analitik çözümü  $u_{analitik}(x) = -1 + (1 + 3x)^{0.5}$   $u_{analitik}(0.5) = 0.5811$  olarak bulunur. Taban fonksiyonları polinomlar olarak ele alınırsa deneme fonksiyonu

$$\tilde{u}_N(x) = \sum_{i=0}^{N+1} c_i x^i$$

şeklinde yazılabilir. Problemden verilen sınır koşulları sağlatılırsa

$$\tilde{u}_N(0) = 0 \Rightarrow c_0 = 0,$$

$$\tilde{u}_N(x) = x + \sum_{i=2}^{N+1} c_i (x^i - x)$$

olarak bulunur ve deneme fonksiyonu

$$\tilde{u}_N(x) = x + \sum_{i=2}^{N+1} c_i (x^i - x) \Rightarrow \tilde{u}_N(x) = x + \sum_{i=1}^N A_i (x^{i+1} - x)$$

yazılabilir. Deneme fonksiyonu denklemden yerine yazılırsa kalan ifadesi

$$R(x, \tilde{u}_N) = (\tilde{u}'_N)^2 + (1 + \tilde{u}_N)\tilde{u}''_N$$

şeklinde elde edilir.

#### 4.1.2.1 Kollokasyon yöntemi

Kalan ifadesinde bulunan bilinmeyen sabit sayısı kadar noktada kalanın değeri sıfıra eşitlenmelidir. Kalan ifadesinde N- tane bilinmeyen sabit vardır. Bu durumda

$$\begin{aligned} & \left[ (\tilde{u}'_N)^2 + (1 + \tilde{u}_N)\tilde{u}''_N \right]_{x_j} = 0 \\ \Rightarrow & \left[ \left( 1 + \sum_{i=1}^N A_i [(i+1)x^i - 1] \right)^2 + \left( 1 + x + \sum_{i=1}^N A_i (x^{i+1} - x) \right) \sum_{i=1}^N A_i (i+1)ix^{i-1} \right]_{x_j} = 0 \end{aligned}$$

elde edilir.  $N = 1$  için birinci yaklaşım

$$\tilde{u}_1 = x + A_1(x^2 - x)$$

ve kalan ifadesi

$$R(x, \tilde{u}_1) = (1 + A_1(2x - 1))^2 + 2A_1(1 + x + A_1(x^2 - x))$$

şeklindedir. Birinci yaklaşım için 1- tane bilinmeyen sabit vardır. Bu nedenle 1-tane kollokasyon noktasına ihtiyaç duyulur.  $x = 1/2$  kollokasyon noktası için

$$\begin{aligned} R(x, \tilde{u}_1) \Big|_{x=1/2} = 0 & \Rightarrow -\frac{A_1^2}{2} + 3A_1 + 1 = 0 \\ & \Rightarrow A_1 = -0.3166 \end{aligned}$$

elde edilir. Bu durumda çözüm

$$\tilde{u}_{1\text{kollokasyon}} = x - 0.3166(x^2 - x), \quad \tilde{u}_{1\text{kollokasyon}}(0.5) = 0.5792$$

olarak bulunur.

#### 4.1.2.2 Galerkin yöntemi

Bu yöntemde ağırlık fonksiyonu  $W_1 = \frac{d\tilde{u}_1}{dA_1}$  şeklindedir. Bu durumda

$$W_1 = x^2 - x$$

olarak bulunur. (31) ifadesi göz önüne alınırsa

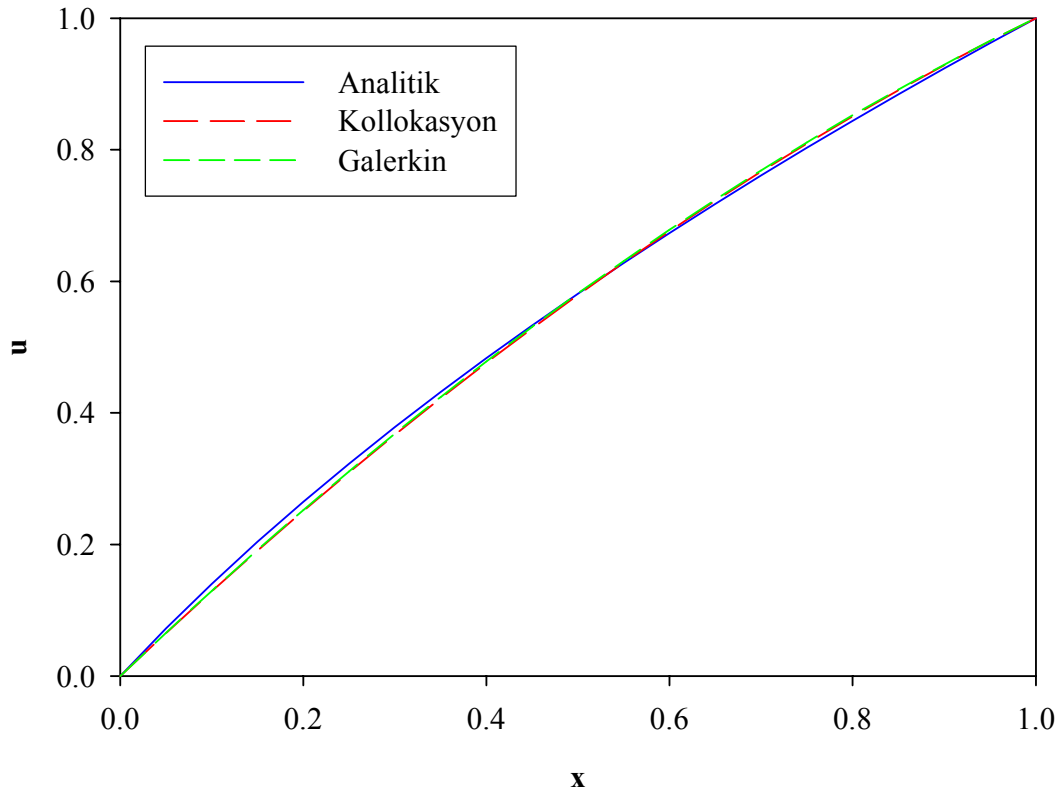
$$\int_0^1 R(x, \tilde{u}_1)W_1 dx = 0$$

$$\int_0^1 \left\{ (1 + A_1(2x-1))^2 + 2A_1(1+x+A_1(x^2-x)) \right\} (x^2-x) dx = 0$$

olarak yazılabilir. Buradan  $A_1 = -0.3262$  olarak elde edilir. Bu durumda çözüm

$$\tilde{u}_{1galerkin}(x) = x - 0.3262(x^2 - x), \quad \tilde{u}_{1galerkin}(0.5) = 0.5816$$

şeklinde bulunur. Şekil 4.1'de analitik çözüm ile yaklaşık çözümlerin karşılaştırılmasını veren grafik verilmiştir.



**Şekil 4.1** Örnek 4.1.2 için analitik çözüm ile yaklaşık çözümlerin karşılaştırılması

Şekil 4.1'den de görüldüğü gibi deneme fonksiyonunda  $N=1$  olarak yaklaşık çözümler elde edilmesine rağmen analitik çözüm ile yaklaşık çözüm değerleri birbirine çok yakındır. Bu ise deneme fonksiyonunun problemin çözümü için uygun olduğunu gösterir.

**Örnek 4.1.3:** Ağırlıklı kalanlar yöntemini kullanarak

$$\theta'' = x, \quad 0 < x < 1$$

$$\theta(0) = 1, \quad \theta'(1) + \theta(1) = 0$$

denkleminin çözümünü bulmayı ele alalım (Finlayson 1972).

**Çözüm:** Bu problemin analitik çözümü  $u_{analitik}(x) = \frac{1}{6}x^3 - \frac{5}{6}x + 1$  olarak bulunur.

Taban fonksiyonları polinomlar olarak ele alınırsa deneme fonksiyonu;

$$\tilde{\theta}_N(x) = \sum_{i=0}^{N+1} c_i x^i$$

şeklinde yazılabilir.  $N = 1$  için

$$\tilde{\theta}_1(x) = \sum_{i=0}^2 c_i x^i \Rightarrow \tilde{\theta}_1(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2$$

elde edilir. Problemden verilen sınır koşulları sağlatılırsa

$$\theta_1(0) = 1 \Rightarrow c_0 = 1$$

$$\theta_1'(1) + \theta_1(1) = 0 \Rightarrow c_1 = -\frac{1+3c_2}{2}$$

olarak bulunur ve

$$\tilde{\theta}_1(x) = 1 - \left( \frac{1+3c_2}{2} \right) x + c_2 x^2$$

yazılabilir. Deneme fonksiyonu denkleminde yerine yazılırsa kalan ifadesi

$$R(x) = \theta''(x) - x \Rightarrow R(x) = 2c_2 - x$$

şeklinde elde edilir.

#### 4.1.3.1 Kollokasyon yöntemi

Kalan ifadesinde bulunan bilinmeyen sabit sayısı kadar noktada kalanın değeri sıfıra eşitlenmelidir. Kalan ifadesinde 1-tane bilinmeyen sabit olduğu için 1-tane kollokasyon noktasına ihtiyaç duyulur.  $x = 0.5$  kollokasyon noktası için

$$R(x)|_{x=0.5} = 0$$

denklemden  $c_2 = \frac{1}{4}$  olarak bulunur. Bulunan bu değer  $c_1 = -\frac{1+3c_2}{2}$  ifadesinde yerine

yazıldığında  $c_1 = -\frac{7}{8}$  şeklinde elde edilir. Bulunan bu değerler deneme fonksiyonunda

yerine yazılırsa

$$\tilde{\theta}_{1kollokasyon}(x) = 1 - \frac{7}{8}x + \frac{1}{4}x^2$$

olarak elde edilir.

#### 4.1.3.2 Alt bölge yöntemi

1-tane bilinmeyen olduğu için problemin aralığını alt aralığa bölmeye gerek yoktur. Verilen aralık üzerinden kalanın integrali sıfıra eşitlenmelidir. Bu yöntemde ağırlık fonksiyonu  $W = 1$  olarak alınır. Bu durumda

$$\int_0^1 RWdx = 0 \Rightarrow \int_0^1 Rdx = 0$$

denkleminin çözümüyle  $c_2 = \frac{1}{4}$  elde edilir. Bulunan bu değer  $c_1 = -\frac{1+3c_2}{2}$  ifadesinde yerine yazıldığında  $c_1 = -\frac{7}{8}$  olarak bulunur. Bulunan bu değerler deneme fonksiyonunda yerine yazılırsa

$$\tilde{\theta}_{altbölge}(x) = 1 - \frac{7}{8}x + \frac{1}{4}x^2$$

olarak elde edilir.

#### 4.1.3.3 En küçük kareler yöntemi

Bu yöntemde ağırlık fonksiyonu  $W = \frac{dR}{dc_2}$  şeklindedir. Bu durumda

$$W = \frac{dR}{dc_2} = 2$$

şeklinde bulunur. (31) ifadesinden

$$\int_0^1 R(x)Wdx = 0$$

olarak yazılabilir. Sonuçta elde edilen cebirsel denklemin çözülmesiyle  $c_2 = \frac{1}{4}$  elde

edilir. Bulunan bu değer  $c_1 = -\frac{1+3c_2}{2}$  ifadesinde yerine yazıldığında  $c_1 = -\frac{7}{8}$  olarak

bulunur. Bu değerler deneme fonksiyonunda yerine yazılırsa

$$\tilde{\theta}_{en.k.kareler}(x) = 1 - \frac{7}{8}x + \frac{1}{4}x^2$$

olarak elde edilir.

#### 4.1.3.4 Galerkin yöntemi

Bu yöntemde ağırlık fonksiyonu  $W = \frac{d\tilde{\theta}_1}{dc_2}$  şeklindedir. Bu durumda

$$W = \frac{d\tilde{\theta}_1}{dc_2} = -\frac{3}{2}x + x^2$$

şeklinde bulunur. (31) ifadesinden

$$\int_0^1 R(x)W dx = 0$$

olarak yazılabilir. Sonuçta elde edilen cebirsel denklemin çözülmesiyle  $c_2 = \frac{11}{18}$  elde

edilir. Bulunan bu değer  $c_1 = -\frac{1+3c_2}{2}$  ifadesinde yerine yazıldığında  $c_1 = -\frac{17}{12}$  olarak

bulunur. Bu değerler deneme fonksiyonunda yerine yazılırsa

$$\tilde{\theta}_{1galerkin}(x) = 1 - \frac{17}{12}x + \frac{11}{18}x^2$$

bulunur.

#### 4.1.3.5 Momentler yöntemi

Bu yöntemde ağırlık fonksiyonları  $W_i = x^{i-1}$ ,  $i = 1, 2, 3, \dots, n$  şeklindeydi. Deneme fonksiyonunda 1- tane bilinmeyen olduğundan  $n = 1$  olmalıdır. Bu durumda

$$W_1 = 1$$

şeklinde bulunur. (31) ifadesi göz önüne alınırsa

$$\int_0^1 R(x)W_1 dx = 0$$

olarak yazılabilir. Sonuçta elde edilen cebirsel denklemin çözümüyle  $c_2 = \frac{1}{4}$  elde edilir.

Bulunan bu değer  $c_1 = -\frac{1+3c_2}{2}$  ifadesinde yerine yazıldığında  $c_1 = -\frac{7}{8}$  olarak

bulunur. Bulunan bu değerler deneme fonksiyonunda yerine yazılırsa

$$\tilde{\theta}_{1moment}(x) = 1 - \frac{7}{8}x + \frac{1}{4}x^2$$

olarak elde edilir.

Denklemin çözümünde alınan  $N$  değerinin artmasının analitik çözüme daha yakın sonuçlar vereceğine dikkat edilmelidir.

**Örnek 4.1.4:**  $\theta'' = x, \quad 0 < x < 1,$   
 $\theta(0) = 1, \quad \theta'(1) + \theta(1) = 0$

denklemini, deneme fonksiyonunun genel formunda  $N = 2$  olarak ağırlıklı kalanlar yöntemiyle çözümü ve bulunan çözümleri analitik çözümlle karşılaştırmayı ele alalım.

**Çözüm:** Bu problemin analitik çözümü  $u_{analitik}(x) = \frac{1}{6}x^3 - \frac{5}{6}x + 1$  olarak bulunur.

Taban fonksiyonları polinomlar olarak ele alınırsa deneme fonksiyonu;

$$\tilde{\theta}_N(x) = \sum_{i=0}^{N+1} c_i x^i$$

şeklinde yazılabilir.  $N=2$  için

$$\tilde{\theta}_2(x) = \sum_{i=0}^3 c_i x^i \Rightarrow \tilde{\theta}_2(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3$$

elde edilir. Problemden verilen sınır koşulları sağlatılırsa

$$\theta_2(0) = 1 \Rightarrow c_0 = 1$$

$$\theta_2'(1) + \theta_2(1) = 0 \Rightarrow c_1 = -\frac{1 + 3c_2 + 4c_3}{2}$$

olarak bulunur ve

$$\tilde{\theta}_1(x) = 1 - \left( \frac{1 + 3c_2 + 4c_3}{2} \right) x + c_2 x^2 + c_3 x^3$$

yazılabilir. Deneme fonksiyonu denkleminde yerine yazılırsa kalan ifadesi

$$R(x) = \theta''(x) - x \Rightarrow R(x) = 2c_2 + 6c_3 x - x$$

şeklinde elde edilir.

#### 4.1.4.1 Kollokasyon yöntemi

Kalan ifadesinde bulunan bilinmeyen sabit sayısı kadar noktada kalanın değeri sıfıra eşitlenmelidir. Kalan ifadesinde 2-tane bilinmeyen sabit olduğu için 2-tane kollokasyon noktasına ihtiyaç duyulur.  $x_1 = 0.5$  ve  $x_2 = 0.75$  kollokasyon noktaları için

$$R(x_1) = 0,$$

$$R(x_2) = 0$$



denklemlerinden  $c_2 = 0$  ve  $c_3 = \frac{1}{6}$  olarak bulunur. Bu değerler deneme fonksiyonunda yerine yazılırsa

$$\tilde{\theta}_{2kollokasyon}(x) = 1 - \frac{5}{6}x + \frac{1}{6}x^3$$

elde edilir.

#### 4.1.4.2 Alt bölge yöntemi

2-tane bilinmeyen olduğu için problemin aralığı 2 alt aralığa bölünür ve her bir alt aralık üzerinden kalanın integrali sıfıra eşitlenmelidir. Bu yöntemde ağırlık fonksiyonları her bir alt aralıkta  $W_i = 1$  olarak alınır. Alt aralıklar  $0 < x \leq \frac{1}{2}$  ve  $\frac{1}{2} < x < 1$

şeklinde alınır. Bu durumda

$$\int_0^{\frac{1}{2}} R dx = 0, \quad \int_{\frac{1}{2}}^1 R dx = 0$$

denklemleri elde edilir. Bu denklemlerin çözümüyle  $c_2 = 0$  ve  $c_3 = \frac{1}{6}$  bulunur.

Bulunan bu değerler deneme fonksiyonunda yerine yazılırsa

$$\tilde{\theta}_{2altbolge}(x) = 1 - \frac{5}{6}x + \frac{1}{6}x^3$$

olarak elde edilir.

#### 4.1.4.2 En küçük kareler yöntemi

Bu yöntemde ağırlık fonksiyonları  $W_i = \frac{\partial R}{\partial c_i}$ ,  $i = 2,3$  şeklindeydi. Bu durumda

$$W_2 = \frac{\partial R}{\partial c_2} = 2, \quad W_3 = \frac{\partial R}{\partial c_3} = 6x$$

şeklinde bulunur. (31) ifadesi göz önüne alınırsa

$$\int_0^1 R(x)W_i dx = 0, \quad i = 2,3$$

olarak yazılabilir. Sonuçta elde edilen cebirsel denklemlerin çözümüyle  $c_2 = 0$  ve  $c_3 = \frac{1}{6}$  olarak elde edilir. Bulunan bu değerler deneme fonksiyonunda yerine yazılırsa;

$$\tilde{\theta}_{2en.k.kareler}(x) = 1 - \frac{5}{6}x + \frac{1}{6}x^3$$

olarak elde edilir.

#### 4.1.4.4 Galerkin yöntemi

Bu yöntemde ağırlık fonksiyonları  $W_i = \frac{\partial \tilde{\theta}_2}{\partial c_i}$ ,  $i = 2,3$  şeklindeydi. Bu durumda

$$W_2 = \frac{\partial \tilde{\theta}_2}{\partial c_2} = -\frac{3}{2}x + x^2, W_3 = \frac{\partial \tilde{\theta}_2}{\partial c_3} = -2x + x^3$$

şeklinde bulunur. (31) ifadesi göz önüne alınırsa

$$\int_0^1 R(x)W_i dx = 0, \quad i = 2,3$$

olarak yazılabilir. Sonuçta elde edilen cebirsel denklemlerin çözümüyle  $c_2 = 0$  ve  $c_3 = \frac{1}{6}$  olarak elde edilir. Bu değerler deneme fonksiyonunda yerine yazılırsa

$$\tilde{\theta}_{2galerkin}(x) = 1 - \frac{5}{6}x + \frac{1}{6}x^3$$

bulunur.

#### 4.1.4.5 Momentler yöntemi

Bu yöntemde ağırlık fonksiyonları  $W_i = x^{i-1}$ ,  $i = 1,2$  şeklindeydi. Bu durumda

$$W_1 = 1, W_2 = x$$

olarak elde edilir. (31) ifadesi göz önüne alınırsa

$$\int_0^1 R(x)W_i dx = 0, \quad i = 1,2$$

olarak yazılabilir. Sonuçta elde edilen cebirsel denklemin çözümüyle  $c_2 = 0$  ve  $c_3 = \frac{1}{6}$

olarak elde edilir. Bulunan bu değerler deneme fonksiyonunda yerine yazıldığında

$$\tilde{\theta}_{2moment}(x) = 1 - \frac{5}{6}x + \frac{1}{6}x^3$$

bulunur.

Görüldüğü gibi deneme fonksiyonunun genel formunda  $N = 2$  alınarak denklemin ağırlıklı kalanlar yöntemlerinden her biriyle elde edilen çözüm, denklemin analitik çözümünü vermektedir.

**Örnek 4.1.5:**  $u'' = \exp(u)$ ,  $0 < x < 1$

$$u(0) = u(1) = 0$$

denkleminin deneme fonksiyonunun genel formunda  $N = 1$  alarak kollokasyon yöntemiyle çözümünü ele alalım ve bulunan çözümü analitik çözümle karşılaştıralım (Finlayson 1972). Analitik çözüm:

$x$	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
$u_{analitik}(x)$	-0.0414	-0.0733	-0.0958	-0.1092	-0.1137

**Çözüm:** Taban fonksiyonları polinomlar olarak ele alınırsa deneme fonksiyonu;

$$\tilde{u}_N(x) = \sum_{i=0}^{N+1} c_i x^i$$

şeklinde yazılabilir.  $N = 1$  için

$$\tilde{u}_1(x) = \sum_{i=0}^2 c_i x^i \Rightarrow \tilde{u}_1(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2$$

elde edilir. Problemden verilen sınır koşulları sağlatılırsa

$$\tilde{u}_1(0) = 0 \Rightarrow c_0 = 0$$

$$\tilde{u}_1(1) = 1 \Rightarrow c_1 = -c_2$$

olarak bulunur ve

$$\tilde{u}_1(x) = -c_2 x + c_2 x^2$$

yazılabilir. Deneme fonksiyonu denklemden yerine yazılırsa kalan ifadesi

$$R(x) = u''(x) - \exp(u) \Rightarrow R(x) = 2c_2 - e^{c_2(x^2-x)}$$

şeklinde elde edilir.

#### 4.1.5.1 Kollokasyon yöntemi

Kalan ifadesinde bulunan bilinmeyen sabit sayısı kadar noktada kalanın değeri sıfıra eşitlenmelidir. Kalan ifadesinde 1- tane bilinmeyen sabit olduğu için 1-tane kollokasyon noktasına ihtiyaç duyulur.  $x = 0.5$  kollokasyon noktası için

$$R(x)|_{x=0.5} = 0$$

eşitliğinden  $2c_2 = e^{-0.25c_2}$  denklemi elde edilir. Bu denklem basit iterasyon yöntemiyle çözümlerse  $c_2 = 0.4471$  olarak bulunur. Bulunan bu değer deneme fonksiyonunda yerine yazılırsa

$$\tilde{u}_{1kollokasyon}(x) = -0.4471x(1-x)$$

olarak elde edilir. Şimdi de  $u'' = \exp(u)$  denkleminin başka bir yaklaşık çözümünü bulmayı ele alalım. Bunun için üstel fonksiyonun seri açılımından yararlanılır. Buradan

$$u'' = \exp(u) \Rightarrow u'' = 1 + u + \frac{u^2}{2!} + \dots$$

şeklinde yazabiliriz. Seri açılımının ilk iki terimini alınarak denklem çözülmeye çalışılır. Yani denklem  $u'' \cong 1 + u$  şeklinde düşünülür. Denklem

$$u''_y = 1 + u_y, \quad 0 < x < 1,$$

$$u_y(0) = u_y(1) = 0$$

şeklinde ele alınabilir. Burada  $u_y$  fonksiyonu  $u$  fonksiyonunun yaklaşık çözümünü göstermektedir. Bu denklemin çözümü

$$u_y(x) = \frac{1}{e+1}e^x + \frac{e}{e+1}e^{-x} - 1$$

şeklinindedir. Tablo 4.1'de analitik çözüm ile kollokasyon yöntemiyle elde edilen çözümün noktadaki değerleri verilmiştir.

**Tablo 4.1** Örnek 4.1.5'in farklı yaklaşımlarla çözümünün karşılaştırılması

$x$	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
$u_{analitik}(x)$	-0.0414	-0.0733	-0.0958	-0.1092	-0.1137
$u_y(x)$	-0.0413	-0.0730	-0.0954	-0.1087	-0.1132
$u_{1kollokasyon}(x)$	-0.0402	-0.0715	-0.0939	-0.1073	-0.1118

**Örnek 4.1.6:**  $y'' + y = 3x^2$ ,  $y(0) = 0$ ,  $y(2) = 3.5$  denkleminin kollokasyon yöntemiyle çözümünü ele alalım (Gerald ve Wheatley 1999).

**Çözüm:** Bu problemin analitik çözümü  $y_{analitik}(x) = 6 \cos x - 0.0034 \sin x + 3x^2 - 6$  olarak bulunur. Taban fonksiyonları polinomlar olarak ele alınırsa deneme fonksiyonu

$$\tilde{y}_N(x) = \sum_{i=0}^{N+1} c_i x^i$$

şeklinde yazılabilir.  $N = 3$  için

$$\tilde{y}_3(x) = \sum_{i=0}^4 c_i x^i \Rightarrow \tilde{y}_3(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + c_4 x^4$$

elde edilir. Problemden verilen sınır koşulları sağlatılırsa  $c_0 = 0$  ve

$$c_1 = \frac{7}{4} - 2c_2 - 4c_3 - 8c_4 \text{ olarak bulunur ve}$$

$$\tilde{y}_3(x) = \left( \frac{7}{4} - 2c_2 - 4c_3 - 8c_4 \right) x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + c_4 x^4$$

yazılabilir. Deneme fonksiyonu denklemden yerine yazılırsa kalan ifadesi

$$R(x) = (2 - 2x + x^2)c_2 + (2x + x^3)c_3 + (-8x + 12x^2 + x^4)c_4 + \frac{7}{4}x - 3x^2$$

şeklinde elde edilir.

#### 4.1.6.1 Kollokasyon yöntemi

Kalan ifadesinde bulunan bilinmeyen sabit sayısı kadar noktada kalanın değeri sıfıra eşitlenmelidir. Kalan ifadesinde 3- tane bilinmeyen sabit olduğu için problemin aralığından 3-tane kollokasyon noktası seçilmelidir. Kollokasyon noktaları  $x_1 = 0.5$ ,  $x_2 = 1$ ,  $x_3 = 1.5$  olarak alınır

$$R(x_1) = 0,$$

$$R(x_2) = 0,$$

$$R(x_3) = 0$$

denklemlerinden  $c_2 = -0.2540$ ,  $c_3 = 0.2812$ ,  $c_4 = 0.1321$  şeklinde bulunur. Bulunan bu değerler deneme fonksiyonunda yerine yazılırsa

$$\tilde{y}_{3kollokasyon}(x) = 0.0766x - 0.2540x^2 + 0.2812x^3 + 0.1321x^4$$

olarak elde edilir. Tablo 4.2’de analitik çözüm ile kollokasyon yöntemiyle elde edilen çözümün noktasal değerleri verilmiştir.

**Tablo4.2** Örnek4.1.6’nın analitik çözümü ve yaklaşık çözümünün karşılaştırılması

$x$	$y_{analitik}$	$y_{3kollokasyon}$	Mutlak Hata	$x$	$y_{analitik}$	$y_{3kollokasyon}$	Mutlak Hata
0.00	0.0000	0.0000	0.0000	1.10	0.3485	0.3446	0.0039
0.10	-0.0003	0.0054	0.0057	1.20	0.4910	0.4860	0.0050
0.20	-0.0003	0.0076	0.0079	1.30	0.6717	0.6654	0.0063
0.30	0.0010	0.0088	0.0078	1.40	0.8965	0.8885	0.0080
0.40	0.0050	0.0114	0.0064	1.50	1.1710	1.1612	0.0098
0.50	0.0139	0.0182	0.0043	1.60	1.5014	1.4898	0.0116
0.60	0.0301	0.0324	0.0023	1.70	1.8936	1.8810	0.0126
0.70	0.0569	0.0573	0.0004	1.80	2.3535	2.3416	0.0119
0.80	0.0978	0.0968	0.0010	1.90	2.8870	2.8789	0.0081
0.90	0.1570	0.1548	0.0022	2.00	3.5000	3.5004	0.0004
1.00	0.2390	0.2358	0.0032				

**Örnek 4.1.7:**  $y'' + y = 3x^2$ ,  $y(0) = 0$ ,  $y(2) = 3.5$  denkleminin Galerkin yöntemiyle çözümünü ele alalım (Gerald ve Wheatley 1999).

**Çözüm:** Bu problemin analitik çözümü  $y_{analitik}(x) = 6 \cos x - 0.0034 \sin x + 3x^2 - 6$  olarak bulunur. Taban fonksiyonları polinomlar olarak ele alınırsa deneme fonksiyonu

$$\tilde{y}_N(x) = \sum_{i=0}^{N+1} c_i x^i$$

şeklinde yazılabilir.  $N = 3$  için

$$\tilde{y}_3(x) = \sum_{i=0}^4 c_i x^i \Rightarrow \tilde{y}_3(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + c_4 x^4$$

elde edilir. Problemden verilen sınır koşulları sağlatılırsa  $c_0 = 0$  ve

$c_1 = \frac{7}{4} - 2c_2 - 4c_3 - 8c_4$  olarak bulunur ve

$$\tilde{y}_3(x) = \left( \frac{7}{4} - 2c_2 - 4c_3 - 8c_4 \right) x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + c_4 x^4$$

yazılabilir. Deneme fonksiyonu denkleme yerine yazılırsa kalan ifadesi

$$R(x) = (2 - 2x + x^2)c_2 + (2x + x^3)c_3 + (-8x + 12x^2 + x^4)c_4 + \frac{7}{4}x - 3x^2$$

şeklinde elde edilir.

#### 4.1.7.1 Galerkin yöntemi

Bu yöntemde ağırlık fonksiyonları  $W_i = \frac{\partial \tilde{y}_3}{\partial c_i}$ ,  $i = 2,3,4$  şeklindeydi. Bu durumda

$$W_2 = \frac{\partial \tilde{y}_3}{\partial c_2} = -2x + x^2, W_3 = \frac{\partial \tilde{y}_3}{\partial c_3} = -4x + x^3, W_4 = \frac{\partial \tilde{y}_3}{\partial c_4} = -8x + x^4$$

şeklinde bulunur. (31) ifadesi göz önüne alınırsa

$$\int_0^1 R(x)W_i dx = 0, \quad i = 2,3,4$$

olarak yazılabilir. Sonuçta elde edilen cebirsel denklemlerin çözümüyle  $c_2 = -\frac{1091}{5472}$ ,

$c_3 = \frac{497}{1824}$  ve  $c_4 = \frac{49}{384}$  olarak elde edilir. Bulunan bu değerler deneme fonksiyonunda

yerine yazılırsa

$$\tilde{y}_{3galerkin}(x) = \frac{13}{342}x - \frac{1091}{5472}x^2 + \frac{497}{1824}x^3 + \frac{49}{384}x^4$$

olarak elde edilir. Tablo 4.3'de analitik çözüm ile Galerkin yöntemiyle elde edilen çözümün noktalardaki değerleri verilmiştir.

**Tablo 4.3** Örnek 4.1.7'nin analitik çözümü ile yaklaşık çözüm değerleri

$x$	$y_{analitik}$	$y_{3galerkin}$	Mutlak Hata	$x$	$y_{analitik}$	$y_{3galerkin}$	Mutlak Hata
0.00	0.0000	0.0000	0.0000	1.10	0.3485	0.3501	0.0016
0.10	-0.0003	0.0021	0.0024	1.20	0.4910	0.4940	0.0030
0.20	-0.0003	0.0020	0.0023	1.30	0.6717	0.6755	0.0038
0.30	0.0010	0.0018	0.0008	1.40	0.8965	0.9003	0.0038
0.40	0.0050	0.0040	0.0010	1.50	1.1710	1.1740	0.0030
0.50	0.0139	0.0112	0.0027	1.60	1.5014	1.5027	0.0013
0.60	0.0301	0.0264	0.0037	1.70	1.8936	1.8929	0.0007
0.80	0.0978	0.0946	0.0032	1.90	2.8870	2.8843	0.0027
0.90	0.1570	0.1551	0.0019	2.00	3.5000	3.5000	0.0000
1.00	0.2390	0.2387	0.0003				

**Örnek 4.1.8:**  $u'(x) + 2u(x) = 1$

$$u(0) = 0$$

başlangıç-değer probleminin Galerkin, momentler ve en küçük kareler yöntemleriyle çözümünü ele alalım.

**Çözüm:** Bu problemin analitik çözümü  $u_{analitik}(x) = \frac{1}{2}(1 - e^{-2x})$ ,

$u_{analitik}(0.9) = 0.5826494441$  olarak bulunur. Taban fonksiyonları polinomlar olarak ele alınırsa deneme fonksiyonu

$$\tilde{u}_N(x) = \sum_{j=1}^N c_j x^j + c_0$$

şeklinde yazılabilir. Problemden verilen başlangıç koşulu sağlatılırsa  $c_0 = 1$  olarak bulunur ve deneme fonksiyonu denklemden yerine yazılırsa kalan ifadesi

$$R(x) = \tilde{u}'_N(x) + 2\tilde{u}_N(x) - 1 \Rightarrow R(x) = \sum_{j=1}^N (jx^{j-1} + 2x^j)c_j + 2c_0 - 1$$

şeklinde elde edilir.

#### 4.1.8.1 Galerkin yöntemi

Bu yöntemde ağırlık fonksiyonları  $W_i = \frac{\partial \tilde{u}_N}{\partial c_i}$ ,  $i = 1, 2, 3, \dots, N$  şeklindeydi. Bu

durumda (31) ifadesi göz önüne alınırsa;

$$\int_0^1 R(x)W_i dx = 0, \quad i = 1, 2, 3, \dots, N$$

olarak yazılabilir. Kalan ifadesi ve ağırlık fonksiyonları göz önüne alınırsa

$$\int_0^1 R(x)W_i dx = 0 \Rightarrow \int_0^1 \left[ \sum_{j=1}^N (jx^{j-1} + 2x^j)c_j + 2c_0 - 1 \right] W_i dx = 0$$

$$\Rightarrow \sum_{j=1}^N \underbrace{\int_0^1 [jx^{j-1} + 2x^j] W_i dx}_{K_{ij}} c_j = \underbrace{\int_0^1 (1 - 2c_0) W_i dx}_{F_i}$$

$$\Rightarrow K_{ij}c_j = F_i$$



şeklinde denklem sistemi oluşur. Burada  $K_{ij}$ ,  $N \times N$ -tipinde bir matris ve  $F_i$ , sütun vektörüdür.  $N = 7$  için denklem sisteminin çözümüyle  $c_j, 1, 2, \dots, 7$  değerleri bulunur. Sonuçta  $\tilde{u}_{7 \text{ galerkin}}(0.9) = 0.5826494538$  olarak elde edilir.

#### 4.1.8.2 En küçük kareler yöntemi

Bu yöntemde ağırlık fonksiyonları  $W_i = \frac{\partial R}{\partial c_i}$ ,  $i = 1, 2, 3, \dots, N$  şeklindeydi. Bu durumda (31) ifadesi göz önüne alınırsa

$$\int_0^1 R(x)W_i dx = 0, \quad i = 1, 2, 3, \dots, N$$

olarak yazılabilir. Kalan ifadesi ve ağırlık fonksiyonları göz önüne alınırsa

$$\begin{aligned} \int_0^1 R(x)W_i dx = 0 &\Rightarrow \int_0^1 \left[ \sum_{j=1}^N (jx^{j-1} + 2x^j)c_j + 2c_0 - 1 \right] W_i dx = 0 \\ &\Rightarrow \sum_{j=1}^N \underbrace{\int_0^1 [jx^{j-1} + 2x^j] W_i dx}_{K_{ij}} c_j = \underbrace{\int_0^1 (1 - 2c_0) W_i dx}_{F_i} \\ &\Rightarrow K_{ij}c_j = F_i \end{aligned}$$

şeklinde denklem sistemi oluşur. Burada  $K_{ij}$ ,  $N \times N$ -tipinde bir matris ve  $F_i$ , sütun vektörüdür.  $N = 7$  için denklem sisteminin çözümüyle  $c_j, 1, 2, \dots, 7$  değerleri bulunur. Sonuçta  $\tilde{u}_{7 \text{ en.k.kareler}}(0.9) = 0.5826494115$  olarak elde edilir.

#### 4.1.8.3 Momentler yöntemi

Bu yöntemde ağırlık fonksiyonları  $W_i = x^{i-1}$ ,  $i = 1, 2, 3, \dots, N$  şeklindeydi. Bu durumda (31) ifadesi göz önüne alınırsa

$$\int_0^1 R(x)W_i dx = 0, \quad i = 1, 2, 3, \dots, N$$

olarak yazılabilir. Kalan ifadesi ve ağırlık fonksiyonları göz önüne alınırsa

$$\int_0^1 R(x)W_i dx = 0 \Rightarrow \int_0^1 \left[ \sum_{j=1}^N (jx^{j-1} + 2x^j)c_j + 2c_0 - 1 \right] W_i dx = 0$$

$$\Rightarrow \sum_{j=1}^N \int_0^1 \underbrace{[jx^{j-1} + 2x^j] W_i dx}_{K_{ij}} c_j = \int_0^1 \underbrace{(1 - 2c_0) W_i dx}_{F_i}$$

$$\Rightarrow K_{ij} c_j = F_i$$

şeklinde denklem sistemi oluşur. Burada  $K_{ij}$ ,  $N \times N$ -tipinde bir matris ve  $F_i$ , sütun vektörüdür.  $N = 7$  için denklem sisteminin çözümüyle  $c_j, 1, 2, \dots, 7$  değerleri bulunur. Sonuçta  $\tilde{u}_{7moment}(0.9) = 0.5826494102$  olarak elde edilir.

**Örnek 4.1.9:**  $u''(x) + x = 0$ ,  $u(0) = 0$ ,  $u(1) = 0$  denklemini alt bölge yöntemi, kollokasyon yöntemi ve Galerkin yöntemiyle çözmeyi ele alalım (Brebbia ve Dominguez 1992).

**Çözüm:** Verilen denklemin analitik çözümü  $u_{analitik}(x) = \frac{x}{6} - \frac{x^3}{6}$  olarak bulunur. Taban fonksiyonları polinomlar olarak ele alınırsa deneme fonksiyonu

$$\tilde{u}_N(x) = \sum_{i=0}^{N+1} c_i x^i$$

şeklinde yazılabilir.  $N = 3$  için

$$\tilde{u}_3(x) = \sum_{i=0}^4 c_i x^i \Rightarrow \tilde{u}_3(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + c_4 x^4$$

elde edilir. Problemden verilen sınır koşulları sağlatılırsa

$$\tilde{u}_3(0) = 0 \Rightarrow c_0 = 0,$$

$$\tilde{u}_3(1) = 0 \Rightarrow c_1 + c_2 + c_3 + c_4 = 0 \Rightarrow c_4 = -c_1 - c_2 - c_3$$

olarak bulunur ve

$$\tilde{u}_3(x) = c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 - (c_1 + c_2 + c_3) x^4$$

yazılabilir. Deneme fonksiyonu denklemde yerine yazılırsa kalan ifadesi

$$R(x) = \tilde{u}_3''(x) + x \Rightarrow R(x) = 2c_2 + 6c_3 x - 12(c_1 + c_2 + c_3)x^2 + x$$

şeklinde elde edilir.

#### 4.1.9.1 Kollokasyon yöntemi

Kalan ifadesinde bulunan bilinmeyen sabit sayısı kadar noktada kalanın değeri sıfıra eşitlenmelidir. Kalan ifadesinde 3- tane bilinmeyen sabit olduğu için 3-tane kollokasyon

noktasına ihtiyaç duyulmaktadır. Kollokasyon noktaları  $x_1 = \frac{1}{4}$ ,  $x_2 = \frac{1}{2}$ ,  $x_3 = \frac{3}{4}$  olarak alınır

$$R(x_1) = 0,$$

$$R(x_2) = 0,$$

$$R(x_3) = 0$$

denklemlerinden  $c_1 = \frac{1}{6}$ ,  $c_2 = 0$ ,  $c_3 = -\frac{1}{6}$  şeklinde bulunur. Bu değerler deneme fonksiyonunda yerine yazıldığında

$$\tilde{u}_{3kollokasyon}(x) = \frac{x}{6} - \frac{x^3}{6}$$

bulunur.

#### 4.1.9.2 Alt bölge yöntemi

3-tane bilinmeyen olduğu için problemin aralığı 3 alt aralığa bölünür ve her bir alt aralık üzerinden kalanın integrali sıfıra eşitlenmelidir. Bu yöntemde ağırlık fonksiyonları her bir alt aralıkta  $W_i = 1$  olarak alınır. Alt aralıklar

$0 \leq x \leq \frac{1}{3}$ ,  $\frac{1}{3} < x \leq \frac{2}{3}$ ,  $\frac{2}{3} < x \leq 1$  şeklinde alınabilir. Bu durumda

$$\int_0^{\frac{1}{3}} R dx = 0, \int_{\frac{1}{3}}^{\frac{2}{3}} R dx = 0, \int_{\frac{2}{3}}^1 R dx = 0$$

denklemleri elde edilir. Bu denklemlerin çözümüyle  $c_1 = \frac{1}{6}$ ,  $c_2 = 0$ ,  $c_3 = -\frac{1}{6}$  bulunur.

Deneme fonksiyonu

$$\tilde{u}_{3altbolge}(x) = \frac{x}{6} - \frac{x^3}{6}$$

olarak elde edilir.

### 4.1.9.3 Galerkin yöntemi

Bu yöntemde ağırlık fonksiyonları  $W_i = \frac{\partial \tilde{u}_3}{\partial c_i}$ ,  $i = 1, 2, 3$  şeklindeydi. Bu durumda

$$W_1 = \frac{\partial \tilde{u}_3}{\partial c_1} = x - x^4, W_2 = \frac{\partial \tilde{u}_3}{\partial c_2} = x^2 - x^4, W_3 = \frac{\partial \tilde{u}_2}{\partial c_3} = x^3 - x^4$$

şeklinde bulunur. (31) ifadesi göz önüne alınırsa

$$\int_0^1 R(x)W_i dx = 0, \quad i = 1, 2, 3$$

olarak yazılabilir. Sonuçta elde edilen cebirsel denklemlerin çözümüyle

$c_1 = \frac{1}{6}$ ,  $c_2 = 0$ ,  $c_3 = -\frac{1}{6}$  elde edilir. Deneme fonksiyonu

$$\tilde{u}_{3\text{kollokasyon}}(x) = \frac{x}{6} - \frac{x^3}{6}$$

şeklinde elde edilir.

Görüldüğü gibi verilen denklemin  $N = 3$  için kollokasyon yöntemi, alt bölge yöntemi ve Galerkin yöntemi ile çözümü analitik çözümü vermektedir.

**Örnek 4.1.10:**  $u''(x) + u(x) + x = 0$ ,  $u(0) = 0$ ,  $u(1) = 0$  denkleminin kollokasyon yöntemiyle çözümünü ele alalım (Brebbia ve Dominguez 1992).

**Çözüm:** Verilen denklemin analitik çözümü  $u_{\text{analitik}}(x) = \frac{\sin x}{\sin(1)} - x$  olarak bulunur.

Taban fonksiyonları polinomlar olarak ele alınırsa deneme fonksiyonu

$$\tilde{u}_N(x) = \sum_{i=0}^{N+1} c_i x^i$$

şeklinde yazılabilir.  $N = 2$  için

$$\tilde{u}_2(x) = \sum_{i=0}^3 c_i x^i \Rightarrow \tilde{u}_2(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3$$

elde edilir. Problemden verilen sınır koşulları sağlatılırsa

$$\tilde{u}_2(0) = 0 \Rightarrow c_0 = 0,$$

$$\tilde{u}_2(1) = 0 \Rightarrow c_1 + c_2 + c_3 = 0 \Rightarrow c_3 = -c_1 - c_2$$

olarak bulunur ve

$$\tilde{u}_2(x) = c_1 x + c_2 x^2 - (c_1 + c_2)x^3$$

yazılabilir. Deneme fonksiyonu denklemde yerine yazılırsa kalan ifadesi

$$R(x) = \tilde{u}_2''(x) + u(x) + x \Rightarrow R(x) = 2c_2 + (1 - 5c_1 - 6c_2)x + c_2x^2 - (c_1 + c_2)x^3$$

şeklinde elde edilir.

#### 4.1.10.1 Kollokasyon yöntemi

Kalan ifadesinde bulunan bilinmeyen sabit sayısı kadar noktada kalanın değeri sıfıra eşitlenmelidir. Kalan ifadesinde 2- tane bilinmeyen sabit olduğu için 2-tane kollokasyon noktasına ihtiyaç duyulmaktadır. Kollokasyon noktaları  $x_1 = \frac{1}{4}$ ,  $x_2 = \frac{1}{2}$  olarak alınır

$$R(x_1) = 0,$$

$$R(x_2) = 0$$

denklemlerinden  $c_1 = \frac{6}{31}$ ,  $c_2 = -\frac{2}{217}$  şeklinde bulunur. Bu değerler deneme fonksiyonunda yerine yazıldığında

$$\tilde{u}_{2kollokasyon1}(x) = \frac{6}{31}x - \frac{2}{217}x^2 - \frac{40}{217}x^3$$

bulunur. Eğer kollokasyon noktaları  $x_1 = \frac{1}{4}$ ,  $x_2 = \frac{3}{4}$  şeklinde alınır

$$R(x_1) = 0,$$

$$R(x_2) = 0$$

denklemlerinden  $c_1 = \frac{512}{2697}$ ,  $c_2 = -\frac{16}{899}$  şeklinde bulunur. Bu değerler deneme fonksiyonunda yerine yazılırsa

$$\tilde{u}_{2kollokasyon2}(x) = \frac{512}{2697}x - \frac{16}{899}x^2 - \frac{16}{93}x^3$$

olarak elde edilir. Tablo 4.4'de analitik çözüm ile kollokasyon yöntemiyle elde edilen çözümün noktalardaki değerleri verilmiştir.

**Tablo 4.4** Örnek 4.1.10'nun kollokasyon yöntemiyle elde edilen değerleri

$x$	$u_{analitik}$	$u_{2kollokasyon1}$	$u_{2kollokasyon2}$
0.10	0.018641	0.019078	0.018634
0.30	0.051194	0.052258	0.050705
0.50	0.069746	0.071428	0.068965
0.70	0.065585	0.067741	0.065156
0.90	0.030901	0.032350	0.031021

**Örnek 4.1.11:**  $u''(x) + u(x) + x = 0$ ,  $u(0) = 0$ ,  $u(1) = 0$  denkleminin Galerkin yöntemiyle çözümünü ele alalım (Brebbia ve Dominguez 1992).

**Çözüm:** Verilen denklemin analitik çözümü  $u_{analitik}(x) = \frac{\sin x}{\sin(1)} - x$  olarak bulunur.

Taban fonksiyonları polinomlar olarak ele alınırsa deneme fonksiyonu

$$\tilde{u}_N(x) = \sum_{i=0}^{N+1} c_i x^i$$

şeklinde yazılabilir.  $N = 2$  için

$$\tilde{u}_2(x) = \sum_{i=0}^3 c_i x^i \Rightarrow \tilde{u}_2(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3$$

elde edilir. Problemden verilen sınır koşulları sağlatılırsa

$$\tilde{u}_2(0) = 0 \Rightarrow c_0 = 0,$$

$$\tilde{u}_2(1) = 0 \Rightarrow c_1 + c_2 + c_3 = 0 \Rightarrow c_3 = -c_1 - c_2$$

olarak bulunur ve

$$\tilde{u}_2(x) = c_1 x + c_2 x^2 - (c_1 + c_2) x^3$$

yazılabilir. Deneme fonksiyonu denklemden yerine yazılırsa kalan ifadesi

$$R(x) = \tilde{u}_2''(x) + u(x) + x \Rightarrow R(x) = 2c_2 + (1 - 5c_1 - 6c_2)x + c_2 x^2 - (c_1 + c_2)x^3$$

şeklinde elde edilir.

#### 4.1.11.1 Galerkin yöntemi

Bu yöntemde ağırlık fonksiyonları  $W_i = \frac{\partial \tilde{u}_2}{\partial c_i}$ ,  $i = 1, 2$  şeklindeydi. Bu durumda

$$W_1 = \frac{\partial \tilde{u}_2}{\partial c_1} = x - x^3, W_2 = \frac{\partial \tilde{u}_2}{\partial c_2} = x^2 - x^3$$

şeklinde bulunur. (31) ifadesi göz önüne alınır

$$\int_0^1 R(x)W_i dx = 0, \quad i = 1, 2$$

olarak yazılabilir. Sonuçta elde edilen cebirsel denklemlerin çözümüyle  $c_1 = \frac{71}{369}$ ,

$c_2 = -\frac{8}{369}$  olarak elde edilir. Bulunan bu değerler deneme fonksiyonunda yerine yazılırsa

$$\tilde{u}_{2galerkin}(x) = \frac{71}{369}x - \frac{8}{369}x^2 - \frac{7}{41}x^3,$$

$$R(x) = \frac{1}{369}(-16 + 62x - 8x^2 - 63x^3)$$

olarak elde edilir. Tablo 4.5’de analitik çözüm ile Galerkin yöntemiyle elde edilen çözümün noktadaki değerleri verilmiştir.

**Tablo 4.5** Örnek 4.1.11’in Galerkin yöntemiyle elde edilen değerleri

$x$	$u_{analitik}$	$u_{2galerkin}$	$R$
0.10	0.018641	0.018853	-0.026945
0.30	0.051194	0.051162	+0.000485
0.50	0.069746	0.069444	+0.013888
0.70	0.065585	0.065504	+0.005070
0.90	0.030901	0.031146	-0.034165

**Örnek 4.1.12:**  $u''(x) + u(x) = 1$ ,  $u(0) = 1$ ,  $u(1) = 0$  denkleminin kollokasyon, alt bölge, en küçük kareler, Galerkin ve momentler yöntemleriyle çözümünü ele alalım.

**Çözüm:** Verilen denklemin analitik çözümü  $u_{analitik}(x) = 1 - \frac{\sin x}{\sin(1)}$  olarak bulunur.

Taban fonksiyonları polinomlar olarak ele alınır deneme fonksiyonu

$$\tilde{u}_N(x) = \sum_{i=0}^{N+1} c_i x^i$$

şeklinde yazılabilir.  $N = 1$  için

$$\tilde{u}_1(x) = \sum_{i=0}^2 c_i x^i \Rightarrow \tilde{u}_1(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2$$

elde edilir. Problemden verilen sınır koşulları sağlatılırsa

$$\tilde{u}_1(0) = 1 \Rightarrow c_0 = 1,$$

$$\tilde{u}_1(1) = 0 \Rightarrow 1 + c_1 + c_2 = 0 \Rightarrow c_2 = -1 - c_1$$

olarak bulunur ve

$$\tilde{u}_1(x) = 1 + c_1 x - (1 + c_1)x^2$$

yazılabilir. Deneme fonksiyonu denkleminde yerine yazılırsa kalan ifadesi

$$R(x) = \tilde{u}_1''(x) + u(x) - 1 \Rightarrow R(x) = -2(1 + c_1) + c_1 x - (1 + c_1)x^2$$

şeklinde elde edilir.

#### 4.1.12.1 Kollokasyon yöntemi

Kalan ifadesinde bulunan bilinmeyen sabit sayısı kadar noktada kalanın değeri sıfıra eşitlenmelidir. Kalan ifadesinde 1- tane bilinmeyen sabit olduğu için 1-tane kollokasyon noktasına ihtiyaç duyulmaktadır. Kollokasyon noktası  $x_1 = 0.5$  olarak alınır

$$R(x_1) = 0$$

denkleminde  $c_1 = -1.285714$  şeklinde bulunur. Bulunan bu değer deneme fonksiyonunda yerine yazılırsa;

$$\tilde{u}_{1kollokasyon}(x) = 1 - 1.285714x + 0.285714x^2$$

olarak elde edilir.

#### 4.1.12.2 Alt bölge yöntemi

1-tane bilinmeyen olduğu için problemin aralığını alt aralığa bölmeye gerek yoktur. Verilen aralık üzerinden kalanın integrali sıfıra eşitlenmelidir. Bu yöntemde ağırlık fonksiyonu  $W = 1$  olarak alınır. Bu durumda

$$\int_0^1 RW dx = 0 \Rightarrow \int_0^1 R dx = 0$$



denkleminin çözümüyle  $c_1 = -1.27273$  elde edilir. Bulunan bu değer deneme fonksiyonunda yerine yazılırsa

$$\tilde{u}_{1altbolge}(x) = 1 - 1.27273x + 0.27273x^2$$

olarak elde edilir.

#### 4.1.12.3 En küçük kareler yöntemi

Bu yöntemde ağırlık fonksiyonu  $W = \frac{dR}{dc_1}$  şeklindedir. Bu durumda

$$W = \frac{dR}{dc_1} = -2 + x - x^2$$

şeklinde bulunur. (31) ifadesinden

$$\int_0^1 R(x)W dx = 0$$

olarak yazılabilir. Sonuçta elde edilen cebirsel denklemin çözümüyle;  $c_1 = -1.27228$  elde edilir. Bulunan bu değer deneme fonksiyonunda yerine yazılırsa;

$$\tilde{u}_{1en.k.kareler}(x) = 1 - 1.27228x + 0.27228x^2$$

olarak elde edilir.

#### 4.1.12.4 Galerkin yöntemi

Bu yöntemde ağırlık fonksiyonu  $W = \frac{d\tilde{u}_1}{dc_1}$  şeklindedir. Bu durumda  $W = x - x^2$

şeklinde bulunur. (31) ifadesi göz önüne alınırsa

$$\int_0^1 R(x)W dx = 0$$

olarak yazılabilir. Sonuçta elde edilen cebirsel denklemin çözümüyle  $c_1 = -1.27778$  olarak elde edilir. Bulunan bu değer deneme fonksiyonunda yerine yazılırsa;

$$\tilde{u}_{1galerkin}(x) = 1 - 1.27778x + 0.27778x^2$$

olarak elde edilir.

#### 4.1.12.5 Momentler yöntemi

Bu yöntemde ağırlık fonksiyonları  $W_i = x^{i-1}$ ,  $i = 1, 2, 3, \dots, n$  şeklindeydi. Deneme fonksiyonunda 1- tane bilinmeyen olduğundan  $n = 1$  olmalıdır. Bu durumda

$$W_1 = 1$$

şeklinde bulunur. (31) ifadesi göz önüne alınırsa

$$\int_0^1 R(x)W_1 dx = 0$$

olarak yazılabilir. Sonuçta elde edilen cebirsel denklemin çözümüyle  $c_1 = -1.27273$  elde edilir. Bulunan bu değer deneme fonksiyonunda yerine yazılırsa

$$\tilde{u}_{1moment}(x) = 1 - 1.27273x + 0.27273x^2$$

olarak elde edilir.

Farklı yaklaşımlar için ortalama karesel hata Tablo 4.6 'nin son satırında gösterilir. Ortalama karesel hata büyüklük olarak hepsinde benzerdir ve Galerkin yöntemindeki büyüklük diğerlerine nazaran daha düşüktür.

**Tablo 4.6** Örnek 4.1.12'nin farklı yaklaşımlarının karşılaştırılması

$x$	$u_{analitik}$	$u_{1kollokasyon}$	$u_{1altbolge}$	$u_{1en.k.kareler}$	$u_{1galerkin}$
0.00	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
0.05	0.94060	0.93643	0.93705	0.93707	0.93681
0.10	0.88136	0.87429	0.87545	0.87550	0.87500
0.15	0.82241	0.81357	0.81523	0.81528	0.81458
0.20	0.76390	0.75429	0.75636	0.75644	0.75556
0.25	0.70599	0.69643	0.69886	0.69895	0.69792
0.30	0.64881	0.64000	0.64273	0.64282	0.64167
0.35	0.59250	0.58500	0.58795	0.58806	0.58681
0.40	0.53722	0.53143	0.53455	0.53465	0.53333
0.45	0.48309	0.47929	0.48250	0.48261	0.48125
0.50	0.43025	0.42857	0.43182	0.43193	0.43056

(Devamı arkada)

0.55	0.37884	0.37929	0.38250	0.38261	0.38125
0.60	0.32898	0.33143	0.33455	0.33465	0.33333
0.65	0.28080	0.28500	0.28795	0.28806	0.28681
0.70	0.23441	0.24000	0.24273	0.24282	0.24167
0.75	0.18994	0.19643	0.19886	0.19895	0.19792
0.80	0.14750	0.15429	0.15636	0.15644	0.15556
0.85	0.10718	0.11357	0.11523	0.11528	0.11458
0.90	0.06910	0.07429	0.07545	0.07550	0.07500
0.95	0.03334	0.03643	0.03705	0.03707	0.03681
1.00	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000
RMS Hataları		0.00591	0.00584	0.00585	0.00576

Şekil 4.2’de analitik çözüm ve yaklaşık çözümlerin grafiği verilmiştir. Şekil 4.3’de ise bağıl hatalar yer almaktadır.

**Örnek 4.1.13:**  $f'''(x) + \frac{1}{2}f(x)f''(x) = 0, \quad x \in [0, +\infty)$

şeklinde nonlinear adi diferansiyel denklem ile ifade edilen Blasius denklemini

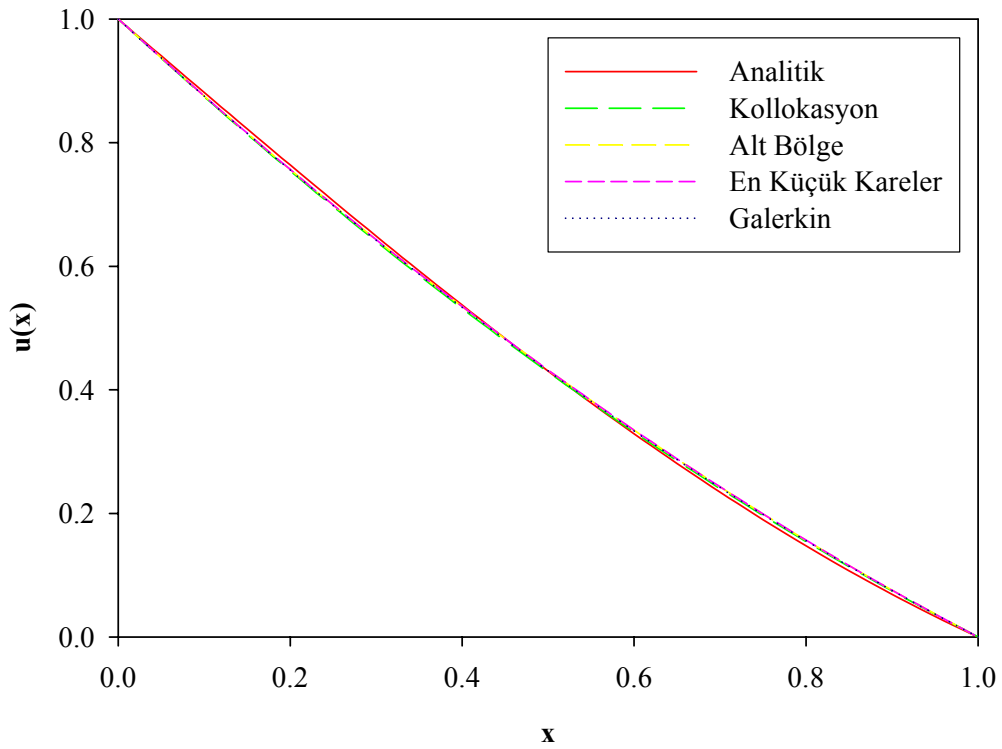
$$f(0) = f'(0) = 0, \quad f'(+\infty) = 1$$

sınır koşullarını gözönüne alarak ağırlıklı kalanlar yöntemlerinden kollokasyon yöntemiyle çözümünü ele alalım.

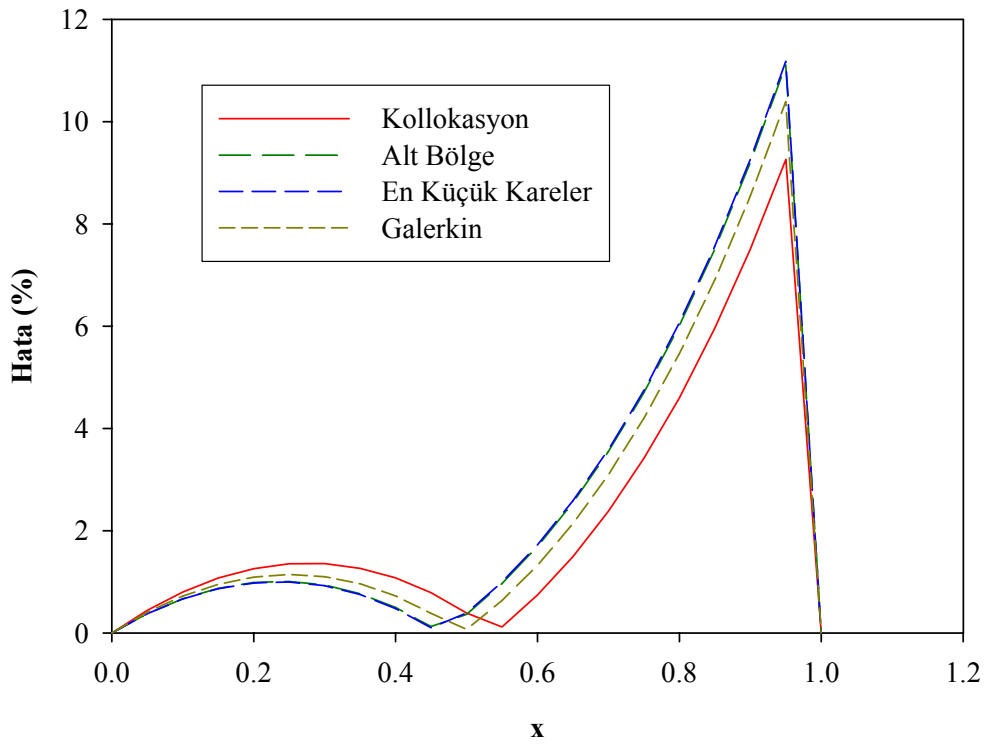
**Çözüm:** Denklemin çözümü için  $f'(x)$  fonksiyonunun

$$f'(x) = 1 - e^{x(ax+b)}$$

şeklinde olabileceğini kabul edebiliriz.  $a$  ve  $b$  katsayıları kollokasyon yöntemiyle belirlenecek olan bilinmeyen sabitlerdir.  $f'(x)$  fonksiyonu gözönüne alınırsa



Şekil 4.2 Örnek 4.1.12 için analitik çözüm ile yaklaşık çözümlerin grafiği



Şekil 4.3 Örnek 4.1.12 için analitik çözüm ile yaklaşık çözümler arasındaki bağlı hatalar

$$f''(x) = -(2ax + b)e^{x(ax+b)}$$

$$f'''(x) = -2ae^{x(ax+b)} - (2ax + b)^2 e^{x(ax+b)}$$

$$f(x) = x + \frac{-\sqrt{\pi} e^{\left(\frac{-b^2}{4a}\right)} \left( \operatorname{erf}\left(\frac{b}{2\sqrt{-a}}\right) - \operatorname{erf}\left(\frac{2ax+b}{2\sqrt{-a}}\right) \right)}{2\sqrt{-a}}$$

elde edilir. Burada

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt$$

olduğuna dikkat edilmelidir. Bulunan  $f$  fonksiyonu ve türevlerinin diferansiyel denklemde yerine yazılmasıyla kalan ifadesi

$$R = f''' + \frac{1}{2} ff''$$

eşitliğinden

$$R = -2ae^{x(ax+b)} - (2ax + b)^2 e^{x(ax+b)} + \frac{1}{2} \left( x + \frac{-\sqrt{\pi} e^{\left(\frac{-b^2}{4a}\right)} \left( \operatorname{erf}\left(\frac{b}{2\sqrt{-a}}\right) - \operatorname{erf}\left(\frac{2ax+b}{2\sqrt{-a}}\right) \right) \right) \left( -2ae^{x(ax+b)} - (2ax + b)^2 e^{x(ax+b)} \right)$$

olarak elde edilir.

#### 4.1.13.1 Kollokasyon yöntemi

Kalan ifadesinde bilinmeyen sabit sayısı kadar noktada kalanın değeri sıfıra eşitlenmelidir. Kalan ifadesinde 2- tane bilinmeyen sabit olduğu için 2- tane kollokasyon noktasına ihtiyaç duyulur.  $x_1 = 1$  ve  $x_2 = 3$  kollokasyon noktaları için

$$R(x_1) = 0,$$

$$R(x_2) = 0$$

eşitliklerinden lineer olmayan denklem sistemi oluşur. Denklem sisteminin çözümüyle  $a = -0.1057$  ve  $b = -0.2900$  olarak elde edilir. Blasius denkleminin yaklaşık çözümü  $a$  ve  $b$  değerlerinin yerine yazılmasıyla

$$f(x) = x + \frac{-\sqrt{\pi} e^{\frac{(-0.2900)^2}{4(-0.1057)}} \left( \operatorname{erf}\left(\frac{-0.2900}{2\sqrt{0.1057}}\right) - \operatorname{erf}\left(\frac{2(-0.1057)x + (-0.2900)}{2\sqrt{0.1057}}\right) \right)}{2\sqrt{0.1057}}$$

olarak elde edilir.

Blasius denkleminin varyasyonel iterasyon yöntemiyle elde edilen çözümleri (Howarth, 1938) ve kollokasyon yöntemiyle elde edilen çözümler Tablo 4.7 de verilmiştir. Varyasyonel iterasyon yöntemiyle elde edilen çözümler Tabloda ‘analitik’ olarak isimlendirilecektir.

**Tablo 4.7** Örnek 4.1.13 için analitik çözüm ile yaklaşık çözümün karşılaştırılması

$x$	Analitik	Kollokasyon	Mutlak hata	Bağıl hata(%)
1	0.16557	0.1595	0.00607	3.6617
2	0.65003	0.6459	0.00413	0.6354
3	1.39682	1.3910	0.00582	0.4167
4	2.30576	2.2882	0.01756	0.7616
5	3.28329	3.2546	0.02869	0.8738
6	4.27964	4.2456	0.03404	0.7954
7	5.27926	5.2437	0.03556	0.6736
8	6.27923	6.2433	0.03593	0.5722

## 4.2 Kısmi Diferansiyel Denklemlere Uygulamaları

Bu başlık altında yöntemin lineer ve lineer olmayan kısmi diferansiyel denklemlere uygulanışı detaylı bir şekilde verilecektir. İlk önce Laplace denklemini çözmekle başlayalım

**ÖRNEK 4.2.1:**  $u_{xx} + u_{yy} = 0$ ,  $0 < x, y < 1$ ,

$$u(x, 0) = x(1 - x),$$

$$u(0, y) = u(1, y) = u(x, 1) = 0$$

problemini Galerkin yöntemiyle çözelim (Finlayson 1972).

**Çözüm:** Deneme fonksiyonu sınır koşullarını sağlayacak şekilde

$$\tilde{u}_N(x, y) = \sum_{i=1}^N x^i (1-x)^i c_i(y)$$

şeklinde alınabilir.  $N = 1$  için birinci yaklaşım

$$\tilde{u}_1(x, y) = x(1-x)c_1(y)$$

elde edilir. Problemden verilen sınır koşulları sağlatılırsa

$$\tilde{u}_1(x, 0) = x(1-x) \Rightarrow c_1(0) = 1$$

$$\tilde{u}_1(x, 1) = 0 \Rightarrow c_1(1) = 0$$

olarak bulunur. Deneme fonksiyonu denkleme yerine yazılırsa kalan ifadesi

$$R(x, y, \tilde{u}_1) = \frac{\partial^2 \tilde{u}_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \tilde{u}_1}{\partial y^2} \Rightarrow R(x, y, \tilde{u}_1) = -2c_1 + x(1-x)c_1''$$

şeklinde elde edilir.

#### 4.2.1.1 Galerkin yöntemi

Bu yöntemde ağırlık fonksiyonu  $W_1 = \frac{d\tilde{u}_1}{dc_1}$  şeklindedir. Bu durumda

$$W_1 = x(1-x)$$

olarak bulunur. (31) ifadesi göz önüne alınır;

$$\int_0^1 R(x, y, \tilde{u}_1) W_1 dx = 0$$

olarak yazılabilir. Buradan

$$\Rightarrow -\frac{1}{3}c_1 + \frac{1}{30}c_1'' = 0$$

elde edilir. Aslında başlangıçtaki kısmi diferansiyel denklemin çözümü

$$-\frac{1}{3}c_1 + \frac{1}{30}c_1'' = 0$$

adi diferansiyel denkleminin  $c_1(0) = 1$ ,  $c_1(1) = 0$  sınır koşullarıyla birlikte çözümüne indirgenmiş olur. Adi diferansiyel denklemin genel çözümü

$$c_1(y) = Ae^{-\sqrt{10}y} + Be^{\sqrt{10}y}$$

şeklindedir. Sınır koşulları dikkate alınır

$$A = -\frac{e^{\sqrt{10}}}{e^{-\sqrt{10}} - e^{\sqrt{10}}}, \quad B = \frac{e^{-\sqrt{10}}}{e^{-\sqrt{10}} - e^{\sqrt{10}}}$$

olarak bulunur. Bu durumda özel çözüm

$$c_1(y) = \frac{1}{1 - e^{-2\sqrt{10}}} \left[ e^{-\sqrt{10}y} - e^{\sqrt{10}(y-2)} \right]$$

şeklindedir. Buradan verilen denklem için birinci yaklaşım bulunan  $c_1(y)$  fonksiyonunun

$$\tilde{u}_1(x, y) = x(1-x)c_1(y)$$

ifadesinde yerine yazılmasıyla elde edilir.

**Örnek 4.2.2:**  $u_{xx} + u_{yy} = -2$

$$u(-1, y) = u(1, y) = 0,$$

$$u(x, -1) = u(x, 1) = 0$$

denkleminin ağırlıklı kalanlar çözümlerini bulalım.

**Çözüm:** Deneme fonksiyonu sınır koşullarını sağlayacak şekilde

$$\tilde{u}_N(x, y) = \sum_{j=1}^N c_j (1-x^2)^j (1-y^2)^j$$

şeklinde alınabilir. Deneme fonksiyonu denklemde yerine yazılırsa kalan ifadesi

$$R(x, y, \tilde{u}_N) = \sum_{j=1}^N \left[ 4j(j-1) \left( (1-x^2)^{j-2} x^2 (1-y^2)^j + (1-y^2)^{j-2} y^2 (1-x^2)^j \right) \right] \\ - \sum_{i=1}^N 2j \left[ (1-x^2)^{j-1} (1-y^2)^j + (1-x^2)^{j-2} x^2 (1-y^2)^j \right] + 2$$

şeklinde elde edilir.

#### 4.2.2.1 Galerkin yöntemi

Bu yöntemde ağırlık fonksiyonları  $W_i = \frac{\partial \tilde{u}_N}{\partial c_i}$ ,  $i = 1, 2, 3, \dots, N$  şeklindeydi. Bu

durumda (31) ifadesi ve bölgenin sınırları göz önüne alınırsa

$$\int_0^1 \int_0^1 R(x, y, \tilde{u}_N) W_i dx dy, \quad i = 1, 2, 3, \dots, N$$

olarak yazılabilir. Kalan ifadesi ve ağırlık fonksiyonları göz önüne alınırsa

$$K_{ij} c_j = F_i$$

şeklinde denklem sistemi oluşur. Burada  $K_{ij}$ ,  $N \times N$ -tipinde bir matris ve  $F_i$ , sütun vektörüdür.  $N = 10$  için denklem sisteminin çözümüyle  $c_j$ ,  $1, 2, \dots, 10$  değerleri bulunur.

Elde edilen çözümün farklı noktadaki değerleri Tablo 4.8'de yer almaktadır.



#### 4.2.2.2 En küçük kareler yöntemi

Bu yöntemde ağırlık fonksiyonları  $W_i = \frac{\partial R}{\partial c_i}$ ,  $i = 1, 2, 3, \dots, N$  şeklindeydi. Bu durumda (31) ifadesi göz önüne alınırsa

$$\int_0^1 \int_0^1 R(x, y, \tilde{u}_N) W_i dx dy, \quad i = 1, 2, 3, \dots, N$$

olarak yazılabilir. Kalan ifadesi ve ağırlık fonksiyonları göz önüne alınırsa;

$$K_{ij} c_j = F_i$$

şeklinde denklem sistemi oluşur. Burada  $K_{ij}$ ,  $N \times N$ -tipinde bir matris ve  $F_i$ , sütun vektörüdür.  $N = 10$  için denklem sisteminin çözümüyle  $c_j$ ,  $1, 2, \dots, 10$  değerleri bulunur. Elde edilen çözümün farklı noktadaki değerleri Tablo 4.8'de yer almaktadır.

Verilen denklemin analitik çözümünü bulmak için değişkenlere ayırma yönteminden yararlanılır. Problemin çözümü sırasında simetriklikten faydalanıldığına dikkat edilmelidir.

**Tablo 4.8** Örnek 4.2.2 için analitik çözüm ile ağırlıklı kalanlar çözümleri

$x$	$y$	<i>Analitik</i>	<i>Galerkin</i>	<i>En küçük kareler</i>
0.00	0.00	0.58939	0.59046	0.60170
0.00	0.25	0.55777	0.5576	0.56925
0.00	0.50	0.45869	0.46104	0.46863
0.00	0.75	0.27946	0.28589	0.28819
0.00	1.00	0.00000	0.00000	0.00000
0.25	0.00	0.55777	0.5576	0.56925
0.25	0.25	0.52831	0.52727	0.53836
0.25	0.50	0.43561	0.43572	0.44268
0.25	0.75	0.26663	0.26963	0.27152
0.25	1.00	0.00000	0.00000	0.00000
0.50	0.00	0.45869	0.46104	0.46863

(Devamı arkada)

0.50	0.25	0.43561	0.43584	0.44266
0.50	0.50	0.36231	0.35814	0.36250
0.50	0.75	0.22549	0.21988	0.22055
0.50	1.00	0.00000	0.00000	0.00000
0.75	0.00	0.27946	0.28589	0.28819
0.75	0.25	0.26663	0.26966	0.27153
0.75	0.50	0.22549	0.21989	0.22055
0.75	0.75	0.14563	0.13300	0.13214
0.75	1.00	0.00000	0.00000	0.00000
1.00	0.00	0.00000	0.00000	0.00000
1.00	0.25	0.00000	0.00000	0.00000
1.00	0.50	0.00000	0.00000	0.00000
1.00	0.75	0.00000	0.00000	0.00000
1.00	1.00	0.00000	0.00000	0.00000

**Örnek 4.2.3:**  $u_{xx} + u_{yy} = -1$

$$u(-1, y) = u(1, y) = 0,$$

$$u(x, -1) = u(x, 1) = 0$$

denkleminin ağırlıklı kalanlar çözümlerini bulalım.

**Çözüm:** Deneme fonksiyonu sınır koşullarını sağlayacak şekilde

$$\tilde{u}_N(x, y) = \sum_{j=1}^N c_j (1-x^2)^j (1-y^2)^j$$

şeklinde alınabilir. Deneme fonksiyonu denklemde yerine yazılırsa kalan ifadesi

$$R(x, y, \tilde{u}_N) = \sum_{j=1}^N \left[ 4j(j-1) \left( (1-x^2)^{j-2} x^2 (1-y^2)^j + (1-y^2)^{j-2} y^2 (1-x^2)^j \right) \right] \\ - \sum_{i=1}^N 2j \left[ (1-x^2)^{j-1} (1-y^2)^j + (1-x^2)^{j-2} x^2 (1-y^2)^j \right] + 1$$

şeklinde elde edilir.

#### 4.2.3.1 Galerkin yöntemi

Bu yöntemde ağırlık fonksiyonları  $W_i = \frac{\partial \tilde{u}_N}{\partial c_i}$ ,  $i = 1, 2, 3, \dots, N$  şeklindeydi. Bu

durumda (31) ifadesi ve bölgenin sınırları göz önüne alınırsa;

$$\int_0^1 \int_0^1 R(x, y, \tilde{u}_N) W_i dx dy, \quad i = 1, 2, 3, \dots, N$$

olarak yazılabilir. Kalan ifadesi ve ağırlık fonksiyonları göz önüne alınır

$$K_{ij} c_j = F_i$$

şeklinde denklem sistemi oluşur. Burada  $K_{ij}$ ,  $N \times N$ -tipinde bir matris ve  $F_i$ , sütun vektörüdür.  $N = 10$  için denklem sisteminin çözümüyle  $c_j, 1, 2, \dots, 10$  değerleri bulunur. Elde edilen çözümün farklı noktadaki değerleri Tablo 4.9'da yer almaktadır.

#### 4.2.3.2 En küçük kareler yöntemi

Bu yöntemde ağırlık fonksiyonları  $W_i = \frac{\partial R}{\partial c_i}$ ,  $i = 1, 2, 3, \dots, N$  şeklindeydi. Bu

durumda (31) ifadesi göz önüne alınır

$$\int_0^1 \int_0^1 R(x, y, \tilde{u}_N) W_i dx dy, \quad i = 1, 2, 3, \dots, N$$

olarak yazılabilir. Kalan ifadesi ve ağırlık fonksiyonları göz önüne alınır

$$K_{ij} c_j = F_i$$

şeklinde denklem sistemi oluşur. Burada  $K_{ij}$ ,  $N \times N$ -tipinde bir matris ve  $F_i$ , sütun vektörüdür.  $N = 10$  için denklem sisteminin çözümüyle  $c_j, 1, 2, \dots, 10$  değerleri bulunur. Elde edilen çözümün farklı noktadaki değerleri Tablo 4.9'da yer almaktadır.

Verilen denklemin analitik çözümünü bulmak için değişkenlere ayırma yönteminden yararlanılır. Problemin çözümü sırasında simetriklikten faydalandığına dikkat edilmelidir.

**Tablo 4.9** Örnek 4.2.3 için analitik çözüm ile yaklaşık çözüm değerleri

$x$	$y$	<i>Analitik</i>	<i>Galerkin</i>	<i>En küçük kareler</i>
0.00	0.00	0.29468	0.29523	0.30085
0.00	0.25	0.27890	0.27932	0.28462
0.00	0.50	0.22934	0.23043	0.23433
0.00	0.75	0.13971	0.14293	0.14410
0.25	0.00	0.27889	0.27932	0.28462
0.25	0.25	0.26416	0.26475	0.26918
0.25	0.50	0.21780	0.21788	0.22130
0.25	0.75	0.13333	0.13482	0.13577
0.50	0.00	0.22934	0.23043	0.23433
0.50	0.25	0.21780	0.21788	0.22130
0.50	0.50	0.18114	0.17903	0.18124
0.50	0.75	0.11274	0.10992	0.11028
0.75	0.00	0.13973	0.14293	0.14410
0.75	0.25	0.13333	0.13481	0.13577
0.75	0.50	0.11274	0.10994	0.11029
0.75	0.75	0.07283	0.066501	0.066062

**Örnek 4.2.4:**  $u_t + uu_x = \nu u_{xx}$ ,  $0 \leq x \leq 1$

$$u(0, t) = u(1, t) = 0$$

$$u(x, 0) = \sin \pi x$$

denklemini  $\nu = 1$  için Galerkin yöntemiyle çözmeyi ele alalım.

**Çözüm:** Deneme fonksiyonu sınır koşullarını sağlayacak şekilde

$$\tilde{u}_N(x, t) = \sum_{i=1}^N c_i(t) \sin(\pi i x)$$

şeklinde alınabilir. Başlangıç koşulunun sağlanabilmesi için  $c_1(0) = 1$  ve  $c_i(0) = 0$ ,  $i = 2, \dots, N$  olması gerektiğine dikkat edilmelidir.  $N = 2$  için ikinci yaklaşım

$$\tilde{u}_2(x, t) = c_1(t) \sin(\pi x) + c_2(t) \sin(2\pi x)$$

elde edilir. Deneme fonksiyonu denklemde yerine yazılırsa kalan ifadesi

$$R(x,t,\tilde{u}_2) = c'_1 \sin(\pi x) + c'_2 \sin(2\pi x) + (c_1 \sin(\pi x) + c_2 \sin(2\pi x))(c_1 \pi \cos(\pi x) + c_2 2\pi \cos(2\pi x)) \\ + c_1 \pi^2 \sin(\pi x) + 4c_2 \pi^2 \sin(2\pi x)$$

şeklinde elde edilir.

#### 4.2.4.1 Galerkin yöntemi

Bu yöntemde ağırlık fonksiyonları  $W_i = \frac{\partial \tilde{u}_2}{\partial c_i}$ ,  $i = 1,2$  şeklindedir. Bu durumda

$$W_1 = \sin(\pi x), \quad W_2 = \sin(2\pi x)$$

olarak bulunur. (31) ifadesi göz önüne alınır;

$$\int_0^1 R(x,t,\tilde{u}_2) W_i dx = 0, \quad i = 1,2$$

olarak yazılabilir. Buradan

$$\frac{1}{2} c'_1 + \frac{1}{2} c_1 \pi^2 - \frac{1}{4} c_1 c_2 \pi = 0$$

$$\frac{1}{2} c'_2 + \frac{1}{4} c_1^2 \pi + 2c_2 \pi^2 = 0$$

elde edilir. Elde edilen lineer olmayan adi diferansiyel denklem sistemi  $c_1(0) = 1$  ve  $c_2(0) = 0$  koşullarıyla birlikte  $t = 0.1$  için maple yardımıyla nümerik olarak çözümlenerek  $c_1(0.1) \cong 0.371835$  ve  $c_2(0.1) \cong -0.009488$  olarak hesaplanmıştır. Bulunan bu değerlerin deneme fonksiyonunda yerine yazılmasıyla

$$\tilde{u}_2(x,0.1) = 0.371835 \sin(\pi x) - 0.009488 \sin(2\pi x)$$

ikinci yaklaşımı elde edilir.

Deneme fonksiyonunda  $N = 3$  alınır üçüncü yaklaşım;

$$\tilde{u}_3(x,t) = c_1(t) \sin(\pi x) + c_2(t) \sin(2\pi x) + c_3(t) \sin(3\pi x)$$

şeklinde olur. Deneme fonksiyonu denklemde yerine yazılmasıyla  $R(x,t,\tilde{u}_3)$  kalan ifadesin hesaplanır. Galerkin yöntemiyle çözümlerse, ağırlık fonksiyonları

$W_i = \frac{\partial \tilde{u}_2}{\partial c_i}$ ,  $i = 1,2,3$  şeklindedir. Bu durumda

$$W_1 = \sin(\pi x), \quad W_2 = \sin(2\pi x), \quad W_3 = \sin(3\pi x)$$

olarak bulunur. (31) ifadesi göz önüne alınır;

$$\int_0^1 R(x, t, \tilde{u}_3) W_i dx = 0, \quad i = 1, 2, 3$$

olarak yazılabilir. Buradan

$$\frac{1}{2} c_1' + \frac{1}{2} c_1 \pi^2 - \frac{1}{4} c_1 c_2 \pi - \frac{1}{4} c_3 c_2 \pi = 0$$

$$\frac{1}{2} c_2' + \frac{1}{4} c_1^2 \pi + 2c_2 \pi^2 - \frac{1}{2} c_1 c_3 \pi = 0$$

$$\frac{1}{2} c_3' + \frac{9}{2} c_3^2 \pi + \frac{3}{4} c_1 c_2 \pi = 0$$

elde edilir. Elde edilen lineer olmayan adi diferansiyel denklem sistemi  $c_1(0) = 1$ ,  $c_2(0) = 0$  ve  $c_3(0) = 0$  koşullarıyla birlikte  $t = 0.1$  için maple yardımıyla nümerik olarak çözümlenerek  $c_1(0.1) \cong 0.371835$ ,  $c_2(0.1) \cong -0.009472$  ve  $c_3(0.1) \cong 0.000258$  olarak hesaplanmıştır. Bulunan bu değerlerin deneme fonksiyonunda yerine yazılmasıyla

$$\tilde{u}_3(x, 0.1) = 0.371835 \sin(\pi x) - 0.009472 \sin(2\pi x) + 0.000258 \sin(3\pi x)$$

üçüncü yaklaşımı elde edilir.

İkinci yaklaşımın, üçüncü yaklaşımın ve analitik çözümün (Cole 1951)  $t = 0.1$  zamanı ve  $x$ 'in farklı noktadaki değerleri için elde edilen sonuçları Tablo 4.10 da verilmiştir.

**Örnek 4.2.5:**  $u_t = 4u_{xx}$ ,  $0 < x < 1$ ,  $t > 0$

$$u(0, t) = u(1, t) = 0$$

$$u(x, 0) = x^2(1 - x)$$

denklemini Galerkin yöntemiyle çözmeyi ele alalım.

**Çözüm:** Deneme fonksiyonu sınır koşullarını sağlayacak şekilde

$$\tilde{u}_N(x, t) = \sum_{i=1}^N c_i(t) x^i (1 - x)$$

şeklinde alınabilir. Başlangıç koşulunun sağlanabilmesi için  $c_1(0) = 0$ ,  $c_2(0) = 1$  ve  $c_i(0) = 0$ ,  $i = 3, \dots, N$  olması gerektiğine dikkat edilmelidir.  $N = 3$  için deneme fonksiyonu

$$\tilde{u}_3(x,t) = c_1(t)x(1-x) + c_2(t)x^2(1-x) + c_3(t)x^3(1-x)$$

şeklinde olur. Deneme fonksiyonu denklemde yerine yazılırsa kalan ifadesi

$$R(x,t,\tilde{u}_3) = c_1'x(1-x) + c_2'x^2(1-x) + c_3'x^3(1-x) \\ + 8c_1 - 4c_2(2-6x) - 4c_3(6x-12x^2)$$

şeklinde elde edilir.

**Tablo 4.10** Örnek 4.2.4 için elde edilen çözüm değerleri

$x$	Analitik çözüm $u(x,0.1)$	Yaklaşık çözüm $u_2(x,0.1) (N=2)$	Yaklaşık çözüm $u_3(x,0.1) (N=3)$
0.1	0.10954	0.10932	0.10955
0.2	0.20979	0.20954	0.20980
0.3	0.29190	0.29180	0.29190
0.4	0.34792	0.34805	0.34792
0.5	0.37158	0.37183	0.37158
0.6	0.35905	0.35921	0.35905
0.7	0.30991	0.30984	0.30992
0.8	0.22782	0.22757	0.22781
0.9	0.12069	0.12049	0.12070

#### 4.2.5.1 Galerkin yöntemi

Bu yöntemde ağırlık fonksiyonları  $W_i = \frac{\partial \tilde{u}_3}{\partial c_i}$ ,  $i = 1,2,3$  şeklindedir. Bu durumda

$$W_1 = x(1-x), \quad W_2 = x^2(1-x), \quad W_3 = x^3(1-x)$$

olur. (31) ifadesi göz önüne alınırsa;

$$\int_0^1 R(x,t,\tilde{u}_3)W_i dx = 0, \quad i = 1,2,3$$

olarak yazılabilir. Buradan

$$\frac{1}{30}c_1' + \frac{1}{60}c_2' + \frac{1}{105}c_3' + \frac{4}{3}c_1 + \frac{2}{3}c_2 + \frac{2}{5}c_3 = 0$$

$$\frac{1}{60}c_1' + \frac{1}{105}c_2' + \frac{1}{168}c_3' + \frac{2}{3}c_1 + \frac{8}{15}c_2 + \frac{2}{5}c_3 = 0$$

$$\frac{1}{105}c_1' + \frac{1}{168}c_2' + \frac{2}{5}c_1 + \frac{2}{5}c_2 = 0$$

elde edilir. Elde edilen lineer adi diferansiyel denklem sistemi  $c_1(0) = 0$ ,  $c_2(0) = 1$  ve  $c_3(0) = 0$  koşullarıyla birlikte  $t = 0.1$  için maple yardımıyla nümerik olarak çözümlenerek  $c_1(0.1) \cong 0.00775169$ ,  $c_2(0.1) \cong 0.00878383$  ve  $c_3(0.1) \cong -0.00878378$  olarak hesaplanmıştır. Bulunan bu değerlerin deneme fonksiyonunda yerine yazılmasıyla

$$\tilde{u}_3(x, 0.1) = 0.00775169 x(1-x) + 0.00878383 x^2(1-x) - 0.00878378 x^3(1-x)$$

üçüncü yaklaşımı elde edilir. Verilen denklemin analitik çözümü değişkenlerine ayırma yöntemi ile

$$u(x, t) = \frac{4}{\pi^3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{[2(-1)^{n+1} - 1]}{n^3} e^{-4n\pi^2 t} \sin(n\pi x)$$

olarak bulunur. Üçüncü yaklaşımın ve analitik çözümün (seride ilk 25 terim toplanarak)  $t = 0.1$  zamanı ve  $x$ 'in farklı noktadaki değerleri için elde edilen sonuçları Tablo 4.11 de verilmiştir.

**Tablo 4.11** Örnek 4.2.5 için elde edilen çözüm değerleri

$x$	Analitik çözüm $u(x, 0.1)$	Yaklaşık çözüm $u_3(x, 0.1) (N = 3)$
0.1	0.000769244	0.000768801
0.2	0.00146320	0.00146513
0.3	0.00201392	0.00201522
0.4	0.00236751	0.00236636
0.5	0.00248935	0.00248691
0.6	0.00236751	0.00236636
0.7	0.00201393	0.00201522
0.8	0.00146322	0.00146514
0.9	0.000769260	0.000768802



Verilen problem için elde edilen yaklaşık çözüm değerleri zaman değeri büyüdükçe yani  $t$  arttıkça ve deneme fonksiyonunda kullanılan terim sayısı arttıkça yani,  $N$  değeri arttıkça analitik çözüme daha yakın olur.

**Örnek 4.2.6:**  $u_{tt} - u_{xx} = 0, \quad 0 < x < \pi, \quad t > 0$

$$u(0, t) = u(\pi, t) = 0$$

$$u(x, 0) = \sin^3 x, \quad u_t(x, 0) = 0$$

denklemini Galerkin yöntemiyle çözmeyi ele alalım.

**Çözüm:** Deneme fonksiyonu sınır koşullarını sağlayacak şekilde

$$\tilde{u}_N(x, t) = \sum_{i=1}^N c_i(t) \sin^i(x)$$

şeklinde alınabilir. Başlangıç koşullarının sağlanabilmesi için  $c_1(0) = 0, c_2(0) = 0, c_3(0) = 1, c_i(0) = 0, i = 4, \dots, N$  ve  $c'_i(0) = 0, i = 1, \dots, N$  olması gerektiğine dikkat edilmelidir.  $N = 3$  için deneme fonksiyonu

$$\tilde{u}_3(x, t) = c_1(t) \sin(x) + c_2(t) \sin^2(x) + c_3(t) \sin^3(x)$$

şeklinde olur. Deneme fonksiyonu denklemde yerine yazılırsa kalan ifadesi

$$R(x, t, \tilde{u}_3) = c_1'' \sin(x) + c_2'' \sin^2(x) + c_3'' \sin^3(x) \\ + c_1 \sin(x) - 2c_2(\cos^2(x) - \sin^2(x)) - 3c_3(2 \sin(x) \cos^2(x) - \sin^3(x))$$

şeklinde elde edilir.

#### 4.2.6.1 Galerkin yöntemi

Bu yöntemde ağırlık fonksiyonları  $W_i = \frac{\partial \tilde{u}_3}{\partial c_i}, \quad i = 1, 2, 3$  şeklindedir. Bu durumda

$$W_1 = \sin(x), \quad W_2 = \sin^2(x), \quad W_3 = \sin^3(x)$$

olur. (31) ifadesi göz önüne alınırsa;

$$\int_0^1 R(x, t, \tilde{u}_3) W_i dx = 0, \quad i = 1, 2, 3$$

olarak yazılabilir. Buradan

$$\frac{1}{2} \pi c_1'' + \frac{4}{3} c_2'' + \frac{3}{8} \pi c_3'' + \frac{1}{2} \pi c_1 + \frac{4}{3} c_2 + \frac{3}{8} \pi c_3 = 0$$

$$\frac{4}{3}c_1'' + \frac{3}{8}\pi c_2'' + \frac{16}{15}c_3'' + \frac{4}{3}c_1 + \frac{1}{2}\pi c_2 + \frac{8}{5}c_3 = 0$$

$$\frac{3}{8}\pi c_1'' + \frac{16}{15}c_2'' + \frac{5}{16}\pi c_3'' + \frac{3}{8}\pi c_1 + \frac{8}{5}c_2 + \frac{9}{16}\pi c_3 = 0$$

elde edilir. Elde edilen lineer adi diferansiyel denklem sistemi  $c_1(0) = 0$ ,  $c_2(0) = 0$ ,  $c_3(0) = 1$  ve  $c_i'(0) = 0$ ,  $i = 1, 2, 3$  koşullarıyla birlikte  $t = 0.2$  için maple yardımıyla nümerik olarak çözümlenerek  $c_1(0.2) \cong 0.11604821$ ,  $c_2(0.2) = 0$  ve  $c_3(0.1) \cong 0.82533563$  olarak hesaplanmıştır. Bulunan bu değerlerin deneme fonksiyonunda yerine yazılmasıyla

$$\tilde{u}_3(x, 0.1) = 0.11604821 \sin(x) + 0.82533563 \sin^3(x)$$

üçüncü yaklaşımı elde edilir. Verilen denklemin analitik çözümü

$$u(x, t) = \frac{3}{4} \sin(x) - \frac{1}{4} \sin(3x)$$

şeklinindedir. Üçüncü yaklaşımın ve analitik çözümün  $t = 0.2$  zamanı ve  $x$ 'in farklı noktadaki değerleri için elde edilen sonuçları Tablo 4.12'de verilmiştir.

**Tablo 4.12** Örnek 4.2.6 için elde edilen çözüm değerleri

$x$	Analitik çözüm $u(x, 0.2)$	Yaklaşık çözüm $u_3(x, 0.2) (N = 3)$
0	0.0000000	0.0000000
$\pi/8$	0.0906638	0.0906637
$\pi/4$	0.3738588	0.3738587
$\pi/2$	0.9413839	0.9413838
$\pi$	0.0000000	0.0000000

## 5. SONUÇLAR VE TARTIŞMA

Bu çalışmada lineer ve lineer olmayan adi ve kısmi diferansiyel denklemler ağırlıklı kalanlar yöntemi kullanılarak çözülmüştür. Yöntemin çözüm aşamasında denklemlere uygulamasının kolay; fakat çözümün, deneme fonksiyonunun seçimine önemli ölçüde bağlı olduğu görülmüştür. Deneme fonksiyonlarının genellikle verilen problemin koşullarını sağlayacak şekilde ve sınır verilerine uygun olarak seçilmesi gerektiği sonucuna varılmıştır. Probleme uygun olarak seçilmeyen deneme fonksiyonları ile çözüme başlandığında elde edilen çözüm genellikle istenilen sonucu vermez. Yani denklem analitik olarak çözülebiliyorsa (veya analitik çözüm olarak kabul edilen bir çözüme sahipse), uygun olarak seçilmeyen bir deneme fonksiyonuyla çözüme başlandığında elde edilen çözüm ile analitik çözüm arasındaki hata büyük olacaktır.

Ağırlıklı kalanlar yöntemiyle bir adi diferansiyel denklem çözülmek istenirse, ‘kalanın ağırlıklı integralinin sıfıra eşit olması gerektiği’ mantığı çerçevesinde oluşan işlemler sonucunda deneme fonksiyonunda bulunan bilinmeyen sabit sayısı kadar cebirsel denklem; kısmi diferansiyel denklem çözülmek istenirse, bilinmeyen sabit sayısı kadar adi diferansiyel denklem elde edilir. Her zaman bu yöntem kullanılarak kısmi diferansiyel denklemleri çözmeye, kısmi diferansiyel denklemi adi diferansiyel denklem sistemine dönüştürmek avantaj getirmeyebilir. Bu sebeple kısmi diferansiyel denklem, çalışılan bölge ve sınır verileri göz önüne alınarak, uygun bir deneme fonksiyonu yardımıyla yöntem için gerekli olan katlı integrallerin hesaplanması sonucunda, adi diferansiyel denklem sistemi yerine cebirsel denklem sistemine dönüştürülebilir. Bu ise çoğu zaman hesaplama kolaylığı sağlamaktadır.

Ağırlıklı kalanlar yöntemi uygun deneme fonksiyonu seçilerek işleme başlandığında istenilen çözümü kolaylıkla elde etmede kullanışlı bir yöntemdir. Diğer yaklaşık yöntemlere nazaran hem yöntemin kavranması hem de uygulanması kolaydır. Bu yöntem fen ve mühendislik alanlarında ortaya çıkan lineer ve lineer olmayan diferansiyel denklemlere rahatlıkla uygulanabilir. Bu sebeple, bu yöntem ilerleyen

zamanlarda çözülmek istenen denklemler için tercih edilebilecek yöntemlerin başında gelebilir.

Ağırlıklı kalanlar yöntemi için yukarıda bahsedilen avantajların yanı sıra bazı önemli dezavantajları da vardır. Bunlardan biri, iyi bir deneme fonksiyonu bulmak her zaman kolay değildir. Diğer ise, deneme fonksiyonunun polinomlar ailesinden (problemin çözümü hakkında herhangi bir ön bilgi olmadığında kullanılan geleneksel seçim) seçilmesi her zaman çözüm için uygun olmayabilir.

## KAYNAKLAR

- Alavala, C. R. (2008) Finite Element Methods: Basic Concepts and Applications, **Prentice- Hall of India Pvt Ltd**, 408s.
- Barta, J. (1937) Über die Näherungsweise Lösung einiger Zweidimensionaler Elastizitätsaufgaben, **Z. Angew. Math. Mech.**, 17: 184-185.
- Becker, M. (1964) The Principles and Applications of Variational Methods, **MIT Press**, Cambridge, Massachusetts.
- Biezeno, C. B. (1923-1924) Over een Vereenvoudiging en over een Uitbreiding van de Methode van Ritz, **Christiaan Huygens**, 3: 69.
- Biezeno, C. B. and Grammel, R. (1955) Engineering Dynamics, Vol. I, Theory of Elasticity, **Blackie**, Glasgow and London.
- Biezeno, C. B. and Koch, J. J. (1923) Over een Nieuwe Methode ter Berekening van Vlokke Platen met Toepassing op Enkele voor de Techniek Belangrijke Belastinggevallen, **Ing. Grav.**, 38: 25-36.
- Brebbia, C. A. and Dominguez, J. (1992) Boundary Elements An Introductory Course, Second Edition, **WIT Press/Computational Mechanics Publications**, Southampton, 325s.
- Clymer, A. B. and Braun, K. N. (1963) Assumed Mode Methods for Structural Analysis and Simulation”, **AIAA Simulation for Aerospace Flight Conf.**, New York, s. 244-260.
- Cole, J. D. (1951) On a Quasi – Linear Parabolic Equation Occurring in Aerodynamics, **Quart. Appl. Math.**, 9: 225-236.
- Collatz, L. (1960) The Numerical Treatment of Differential Equations, **Springer-Verlag**, Berlin.
- Cook, R. D., Malkus, D. S., Plesha, M. E. and Witt, R. J. (2007) Concepts and Applications of Finite Element Analysis, 4<sup>th</sup> edition, **Wiley India Pvt Ltd**, 736s.
- Crandall, S. H. (1956) Engineering Analysis, **McGraw-Hill**, New York.
- Duncan, W. J. (1937) Galerkin’s Method in Mechanics and Differential Equations”, Great Britain Aero Res. Counc. London. Rep. and Memo. No. 1798. Reprinted in **Great Britain Air Ministry Aero. Res. Comm. Tech. Rep. 1**, s. 484-516.

- Duncan, W. J. (1938a) The Principles of Galerkin's Method, Great Britain Aero. Res. Counc. London. Rep. and Memo. No. 1848. Reprinted in **Great Britain Air Ministry Aero. Res. Comm. Tech. Rep.** 2, s. 589-612.
- Duncan, W. J. (1938b) Note on Galerkin's Method for the Treatment of Problems Concerning Elastic Bodies, **Phil. Mag.**, 25: 628-633.
- Duncan, W. J. (1938c) Application of the Galerkin Method to the Torsion and Flexure of Cylinders and Prisms, **Phil. Mag.**, 25: 636-649.
- Duncan, W. J. and Lindsay, D. D. (1939) Methods for Calculating the Frequencies of Overtones, **Great Britain Aero Res. Comm., Rep. and Memo.** No. 1888.
- Finlayson, B. A. and Scriven, L. E. (1966) The Method of Weighted Residuals -A Review, **Appl. Mech. Rev.** 19: 735-748.
- Finlayson, B. A. (1972) The Method of Weighted Residuals and Variational Principles, **Academic Press**, New York and London.
- Frazer, R. A., Jones, W. P. and Skan, S. W. (1937) Approximations to Functions and to the Solutions of Differential Equations, Britain Aero. Res. Counc. London. Rep. and Memo. No. 1799. Reprinted in **Great Britain Air Ministry Aero. Res. Comm. Tech. Rep.** 1: 517-549.
- Galerkin, B. G. (1915) Rods and Plates. Series in Some Problems of Elastic Equilibrium of Rods and Plates. **Vestn. Inzh. Tech.** (USSR) 19 :897-908. Translation 63-18924, Clearinghouse, Fed. Sci. Tech. Info., Springfield, Virginia.
- Garg, V. K. (1998) Applied Computational Fluid Dynamics, **CRC Press**.
- Gaul, L., Kögl, M. and Wagner, M. (2003) Boundary Elements Methods for Engineers and Scientists: An Introductory Course with Advanced Topics, **Springer Verlag Berlin Heidelberg**.
- Gerald, C. F. and Wheatley, P. O. (1999) Applied Numerical Analysis, 6<sup>th</sup> ed., California Polytechnic State University, San Luis Obispo, **Addison-Wesley**, An imprint of Addison Wesley Longman, Inc.
- Hall, T. (1970) Carl Friedrich Gauss, **MIT Press**, Cambridge, Massachusetts.
- Huebner, K. H., Dewhirst, D. L., Smith, D. E. and Byrom, T. G. (2008) The Finite Element Method for Engineers, Fourth edition, **Wiley India**.
- Kantorovich, L. V., Krylov, V. I. (1958) Approximate Methods of Higher Analysis, **Wiley (Interscience)**, New York.
- Lanczos, C. (1938) Trigonometric Interpolation of Empirical and Analytical Functions, **J. Math. Phys.** 17:123-199.

- Picone, M. (1928) Sul Metodo delle Minime Potenze Ponderate e sul Metodo di Ritz per il Calcolo Approssimato nei Problemi della Fisica-Matematica, **Rend. Circ. Mat.Palermo**, 52: 225-253.
- Polyanin, A. D. and Zaitsev, V. F. (2003) Handbook of Exact Solutions for Ordinary Differential Equations, Second edition, **CRC Press**, London, New York, Washington.
- Reddy, J. N. (2002) Energy Principles and Variational Methods in Applied Mechanics, Second edition, **John Wiley & Sons**.
- Richardson, P. D. (1968) Further Results from Use of a Transcendental Profile Function in Conduction and Convection, **Int. J. Heat Mass Transfer**, 11: 359-365.
- Schetz, J. A. (1963) On the Approximate Solution of Viscous Flow Problems, **J. Appl. Mech.**, 30 :263- 268.
- Slater, J. C. (1934) Electronic Energy Bands in Metals, **Phys. Rev.** 45: 784-801.
- Yamada, H. (1947) **Rep. Res. Inst. Fluid Eng. Kyushu Univ.**, 3: 29.
- Yamada, H. (1948) An Approximate Method of Integration of Laminar Boundary-Layer Equations, I (in Japanese), **Rep. Res. Inst. Fluid Eng.**, 4: 27-42 ; (1950). **Appl. Mech. Rev.**, 3, No. 762.
- Yamada, H. (1950) A Method of Approximate Integration of the Laminar Boundary-Layer Equation, I (in Japanese), **Rep. Res. Inst. Fluid Eng.**, 6: 87-98 ; (1952). **Appl. Mech. Rev.** 5, No. 488.
- Wazwaz, A. M. (2002) Partial Differential Equations Methods and Applications, **A. A. Balkema Publishers**, Lisse, Abingdon, Exton(Pa), Tokyo.
- Zwillinger D. (1997) Handbook of Differential Equations, 3<sup>rd</sup> edition, **Academic Press**.

## ÖZGEÇMİŞ

Mukaddes ÖKTEN, 12 Şubat 1988 tarihinde Denizli'nin Çameli ilçesinde doğmuştur. İlk ve orta öğrenimini Çameli Atatürk İlköğretim Okulu'nda, lise öğrenimini Çameli Çok Programlı Lisesi'nde tamamlamıştır. 2004 yılında Pamukkale Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü'nde lisans öğrenimine başlamış ve 2008 yılında mezun olmuştur. Aynı yıl Pamukkale Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim dalında yüksek lisans eğitimine başlamış ve halen devam etmektedir.



