KOZMOLOJİK SABİT VE KARANLIK ENERJİ PROBLEMİ

Gülçin KÖSEOĞLU

Temmuz 2009
DENİZLİ

KOZMOLOJİK SABİT VE KARANLIK ENERJİ PROBLEMİ

Pamukkale Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Yüksek Lisans Tezi
<u>Fizik Anabilim Dalı</u>

Gülçin KÖSEOĞLU

Danışman: Doç. Dr. Muzaffer ADAK

Temmuz , 2009
DENİZLİ

Bu tezin tasarımı hazırlanması, yürütülmesi araştırmalarının yapılması ve bulgularının analizinde bilimsel etiğe ve akademik kurallara özenle riayet edildiğini; bu çalışmanın doğrudan birincil ürünü olmayan bulguların, verilerin ve materyallerin bilimsel etiğe uygun olarak kaynak gösterildiğini ve alıntı yapılan çalışmalara atfedildiğini beyan ederim.

İmza :

Öğrenci Adı Soyadı: Gülçin KÖSEOĞLU

YÜKSEK LİSANS TEZİ ONAY FORMU

Gülçin KÖSEOĞLU tarafından Doç. Dr. Muzaffer ADAK yönetiminde hazırlanan **"Kozmolojik Sabit ve Karanlık Enerji Problemi"** başlıklı tez tarafımızdan okunmuş, kapsamı ve niteliği açısından bir Yüksek Lisans Tezi olarak kabul edilmiştir.

Yrd. Doç. Dr. Mestan KALAY
Jüri Başkanı

Doç. Dr. Muzaffer ADAK
Jüri Üyesi

Yrd. Doç. Dr. Murat SARI
Jüri Üyesi

Pamukkale Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu' nun 12.08.2009 tarih ve 18/09 sayılı kararıyla onaylanmıştır.

Prof. Dr. Halil KARAHAN
Müdür

TEŞEKKÜR

Kozmolojik Sabit ve Karanlık Enerji Problemi konusunda birlikte çalıştığımız danışman hocam Doç. Dr. Muzaffer ADAK'a zamanını ve emeğini benden esirgemediği için çok teşekkür ederim.

ÖZET

KOZMOLOJİK SABİT VE KARANLIK ENERJİ PROBLEMİ

Köseoğlu, Gülçin
Yüksek Lisans Tezi, Fizik ABD
Tez Yöneticisi: Doç. Dr. Muzaffer ADAK

Temmuz 2009, 30 Sayfa

Newton'un gravitasyon teorisi genel göreceliliğin zayıf alan limitidir ve yalnızca dünya yarıçapının büyüklüğü mertebelerinde başarılıdır. Einstein'ın gravitasyon teorisi olan genel görecelilik, güneş sistemi gibi daha büyük ölçeklerde başarılıdır. Ancak, genel göreceliliğin kozmolojide bazı problemleri vardır. Son gözlemler evrenin genişlemesinin hızlanarak devam ettiğini göstermiştir. Diğer taraftan, gravitasyonun çekici özellikte olduğunu biliyoruz. Bu da teorik olarak büyük patlamaya göre evrenin genişlemesinin yavaşlaması anlamına geliyor. Bu bağlamda, biz bu kozmik hızlanmayı açıklamak için dinamik nanmetrisitiyle ifade edilen yeni bir gravitasyon teorisi kullanarak çok büyük ölçeklerde gravitasyonun itici yönünü gösteren basit bir çözüm bulduk.

Anahtar Kelimeler: Nanmetrisiti, Kozmik hızlanma, Riemannsal olmayan geometri.

Doç. Dr. Muzaffer ADAK
Yrd. Doç. Dr. Mestan KALAY
Yrd. Doç. Dr. Murat SARI

ABSTRACT

COSMOLOGICAL CONSTANT AND DARK ENERGY PROBLEM

Köseoğlu, Gülçin
M. Sc. Thesis in Physics
Supervisor: Assoc. Prof. Dr. Muzaffer ADAK

July 2009, 30 pages

Newton's gravity theory is the weak field limit of general relativity and is successful only in the order of world radius. Einstein's gravity theory, the so-called general relativity, is successful on larger scales such as solar system. General relativity, however, has some drawbacks in cosmology. Last observations have showed that the expansion of universe is accelerating. On the other hand, we know that gravity has attractive nature. This means that theoretically the expansion of universe should decelerate according to big bang scenario. In this context, in order to explain this cosmic speed-up we found a simple solution showing the impulsive nature of gravity at very large scales by using a modified gravity theory written in terms of dynamical nonmetricity.

Keywords: Nonmetricity, Cosmic speed-up, Non-Riemannian geometry.

Assoc. Prof. Dr. Muzaffer ADAK
Asst. Prof. Dr. Mestan KALAY
Asst. Prof. Dr. Murat SARI

İÇİNDEKİLER

Sayfa

ŞEKİLLER DİZİNİ

Sayfa

SİMGE VE KISALTMALAR DİZİNİ

M	Manifold
g	Metrik
∇	Bağlantı
$\imath$	İç çarpım
η_{ab}	Minkowski metriği
$\{e^a\}$	Ortonormal baz 1-formları
$\{X_b\}$	Ortonormal referans çerçevesi
$\wedge$	Dış çarpım
d	Dış türev operatörü
$\Lambda^a{}_b$	Tüm bağlantı 1-formları
D	Kovaryant dış türev operatörü
Q_{ab}	Nanmetrisiti 1-formları
T^a	Burulma 2-formları
$\omega^a{}_b$	Levi-Cevita bağlantı 1-formları
$R^a{}_b$	Eğrilik 2-formları
*	Hodge yıldız operatörü
T(M)	Teğet uzayı

1. GİRİŞ

Madde yoksa Einstein'ın genel göreceliliği gravitasyon için doğal olarak püsüdo-Riemannsal bir formülasyon öngörür. Yani, nanmetrisiti ve burulma kendiliğinden sıfır olur [1]-[3]. Kısaca;

$$(Ric)_a - \frac{1}{2}\Re e_a = \kappa^* \tau_a \tag{1.1}$$

biçiminde yazılan Einstein denklemi,

$$L^{HE} = R^a{}_b \wedge {}^*\left(e_a \wedge e^b\right) = \Re^* 1 \tag{1.2}$$

Hilbert-Einstein Lagranj 4-formu cinsinden

$$I = \int \left(L^{HE} + L^{mad}\right) \tag{1.3}$$

olarak ifade edilen eylem integralinin metrik varyasyonu altında yerel ekstramumu olarak elde edilir. Sembollerin anlamları sonraki bölümde açıklanacak. Şimdilik sadece $\Re$ nin Levi-Civita bağlantısı cinsinden yazılan uzayzaman eğrilik skaleri olduğunu söyleyelim. Böyle bir bağlantı metrik uyumludur, sıfır burulmalıdır ve tamamen metriğe bağlı olduğu için de çok kullanışlıdır. Genel görecelilik, güneş sistemi büyüklük mertebeli gravitasyon olaylarını açıklamada çok başarılıdır.

Ancak, geçen 30 yılda Einstein'ın teorisinde bazı noksanlıklar ortaya çıktı ve insanlar, genel göreceliliğin gravitasyonel etkileşmeleri açıklayabilen yegâne temel teori olup olmadığını araştırmaya başladılar. Bu arayışlar temel olarak kozmoloji ve kuantum alan teorisinden kaynaklandı. İlk durumda, büyük patlama tekilliği, düzlük ve ufuk problemleri, genel göreceliliğe ve parçacık fiziğindeki standart modele dayanan standart kozmolojik modelin uç bölgelerde evreni tarif etmede yetersiz olduğu savına neden olmuşlardır. Diğer taraftan, uzayzamanın (dolayısıyla gravitasyonun) tam bir kuantum tarifi yapılmak istenirse klasik bir teori olan genel göreceliliğin bir temel teori olarak işlev görmediği görülür. Kozmoloji ile ilgili problemler bu projenin esas konusu olduğu için ilerleyen kısımlarda daha ayrıntılı bilgiler sunulacaktır. Ancak, genel bilgi ve isteklendirme açısından bahsi geçen ikinci nedeni biraz daha açalım. Süpersicim, süpergraviti ve büyük birleşik teori gibi dört temel etkileşmenin birleştirilmesi denemelerinde insanlar, geometriye nonminimal çiftlenimli ve/veya daha yüksek mertebeli eğrilik invaryantlarının olduğu etkin eylemleri hesaba katmışlardır. Böyle katkılar kuantum gravitiye ulaşmak için eklenen bir-çevrim veya daha yüksek-çevrim düzeltmelerinden dolayıdır. Diğer bir ifadeyle, bu çalışmalar eğri uzayzamanlarda kuantizasyonu başarmak için yapılmışlardır ve sonuç da şudur; kuantum skaler alanları ve arkaplan geometrisi arasındaki etkileşimler veya gravitasyonun kendisiyle etkileşimleri Hilbert-Einstein Lagrangianında düzeltme terimleri doğurmuşlardır. Püsüdo-Riemannsal geometride yapılan bu çalışmaların Riemannsal olmayan geometrilerde de formülasyonu mümkündür ve bu formülasyon daha ekonomik ve daha zariftir [4]-[9].

Genel göreceliliği modifiye etmek için diğer bir sebep, değişken bir gravitasyonel çiftlenime neden olan Mach ilkesini tam olarak sağlama arzusundan gelir. Mach ilkesi şöyle ifade edilebilir; "yerel eylemsiz çerçeve uzak astronomik cisimlerin hareketinin ortalamasıyla belirlenir". Bu gerçek, gravitasyonel çiftlenimin ölçeğe bağımlı ve bir skaler alanla ilişkili olabileceği şüphesini doğurur. Sonuç olarak, eylemsizlik ve eşdeğerlilik ilkesi gözden geçirilmelidir. Örneğin, Brans-Dicke teorisi, Einstein gravitasyonuna alternatif bir teori tanımlamak için yapılan ciddi bir gayrettir. Özetle, Brans-Dicke teorisi değişken bir Newton gravitasonel çiftlenim katsayısı hesaba katar ki bu katsayının dinamiği geometriye nanminimal olarak bağlanan skaler bir alan tarafından belirlenir.

Sonuçta, yeni gravitasyon modellerine ihtiyaç vardır. Peki, iyi bir gravitasyon teorisinin sahip olması gereken asgari özellikler nelerdir? İlk olarak, bir gravitasyon teorisi astrofiziksel gözlemleri açıklamalıdır, yani; düşük enerji limitinde Newton dinamiğine dönüşmelidir ve deneysel olarak doğrulanan klasik güneş sistemi testlerini geçmelidir. İkinci adım olarak, gözlenen baryon içeriklerini, radyasyonu ve galaksi ölçeğine genişletilen Newton potansiyelini hesaba katan galaksi dinamiklerini vermelidir. Üçüncü olarak, galaksi kümeleri gibi büyük ölçekte problemlerle ve kozmolojik dinamiklerle ilgilenmelidir.

O halde, yeni gravitasyon modelleri üç türlü olabilir; Einstein denkleminin (i) sağ veya (ii) sol veya (iii) her iki tarafını değiştirmek. Sağ tarafı değiştirmek aslında (1.3) denkleminde L^{mad} Lagranj 4-formu için değişik alternatifler denemektir. Biz bu çalışmada bu yaklaşımla hiç uğraşmadık. Aynı anda, her iki tarafı birden değiştirirsek problem kontorolden çıkabileceği için ve sonuçları yorumlamada sıkıntılarla karşılaşabileceğimiz için bunu da yapmadık. Sonuçta, yalnız sol tarafı değiştirdik. Bunu yaparken de burulma ve eğrilikten vazgeçip gravitasyon alanını sadece nanmetrisiti cinsinden açıklamaya çalıştık. Madde yokken nanmetrisitinin dinamik olduğu teorilerin yorumlanmasındaki zorluğa karşın, nanmetrisitinin bazı astrofizik olaylarda önemli bir rol oynayabileceğine dair teorik ipuçları vardır. Bu ipuçlarına göre, bilinen maddenin çevresiyle gravitasyonel etkileşmesi onun kütlesi vasıtasıyla olurken, evrendeki karanlık maddenin çevresiyle etkileşmesi hem kütlesi hem de yeni bir tür gravitasyonel yükü vasıtasıyla olabilir [6]-[8]. Böyle yeni bir gravitasyonel etkileşme, bize evrendeki madde miktarını belirleme fırsatı verebilir. Böylece, evrenin akıbeti öngörülebilir. Aynı zamanda, bu yeni etkileşme kara deliklerin yapısı üzerinde önemli etkilere sebep olabilir. Örneğin, bu bilinmeyen gravitasyonel yükün itici özelliği olabilir. Böylece, büyük patlama senaryosundaki ve kara deliklerdeki tekillikler bu yeni etkileşmeden dolayı oluşmayabilir.

Bu genel bilgileri ve problemleri özetledikten sonra şimdi çözmeyi amaçladığımız problemi tanıtalım. Ia tipi süpernovalardan alınan son gözlemsel veriler göstermiştir ki *evrenin genişlemesi* bugünlerde *hızlanma* dönemindedir [10],[11]. Ayrıca, kozmik mikrodalga arkaplan radyasyonu (CMBR) üzerine yapılan son gözlemlere göre evrenin geometrisi *uzaysal olarak düzdür* [12],[13]. Kozmik hızlanma, *karanlık enerji* denilen büyük bir negatif basınca sahip mistik bir kozmolojik akışkan yardımıyla genel görecelilik çerçevesinde açıklanabilir. Karanlık enerji için en basit olasılığın kozmolojik sabit olmasına karşın, maalesef bu sabitin bugünkü değeri ($\approx 10^{-46}\ km^{-2}$) evrende öngörülen karanlık madde miktarını karşılamakdan çok uzaktır. Bu gerçek insanları başka ihtimallere yöneltmiştir. Bunların birçoğunda kozmolojik sabit sıfır alınmıştır ve karanlık madde yeni dinamik skaler alanlarla ilişkilendirilmişlerdir. Ancak, bu teklifler kozmik hızlanma problemini çözememişlerdir ve ciddi zaaflara sahiptirler. O halde, bu problemle uğraşırken, kozmik ivmelenmeninin bu türden mekanizmalardan ziyade yeni gravitasyonel fizikten kaynaklandığından şüphelenmek kayda değerdir. Bu, bizim bu tezde izleyeceğimiz yol haritasıdır. Özetlersek, bu tezde problem, evrenin genişlemesindeki açıklanamayan hızlanmadır ve amaç da yalnızca nanmetrisiti niceliğiyle yazılan yeni bir gravitasyon teorisiyle bu probleme çözüm bulmaktır. Bu tür gravitasyon teorilerine Simetrik Teleparalel Gravitasyon (STPG) denir. Çalışmamızda sonuç olarak ayar invaryant STPG Lagranjından varyasyonla üretilen alan denklemlerine konform düz çözüm bulduk ve bunu müzakere ettik.

2. MATEMATİKSEL ÖNBİLGİLER

Bu bölümde en bilindik geometrik kavramlardan başlayarak modern diferansiyel geometrik kavramlara geçiş yapacağız.

2.1. Vektörler ve Kovektörler

Üç boyutlu Öklit uzayında bir vektörü kartezyen koordinat bazında $\vec{V} = V_x\hat{i} + V_y\hat{j} + V_z\hat{k}$ biçiminde gösterebiliriz. Daha soyut bir gösterim de şu şekildedir,

$$\vec{V} = V_x\frac{\partial}{\partial x} + V_y\frac{\partial}{\partial y} + V_z\frac{\partial}{\partial z} = \sum_{i=1}^{N} V^i\frac{\partial}{\partial x^i} = \sum_{i=1}^{N} V^i\partial_i\,.$$

Vektör var ise buna karşı gelen bir kovektörde vardır,

$$\tilde{V} = \sum_{i=1}^{3}\tilde{V}_i dx^i\,.$$

O halde,

$$dx^i\left(\frac{\partial}{\partial x^j}\right) = \delta^i_j$$

bağıntısı dualite bağıntısı olarak adlandırılır.

2.2. Metrik

Manifold'da bulunan birbirine sonsuz yakın iki nokta arasındaki mesafedir. Üç boyutlu Öklit uzayında metrik:

$$g = dx^2 + dy^2 + dz^2 = \sum_{i=1}^{3} dx^i dx^i$$

<u>Örnek 1</u>: Üç boyutlu Öklit uzayında kartezyen koordinatlarda metrik bileşenlerini bulalım.

$$g = \sum_{i=1}^{3}\ \sum_{j=1}^{3} g_{ij}dx^i dx^j = dx^2 + dy^2 + dz^2$$

O halde,

$$g_{11} = 1, g_{22} = 1, g_{33} = 1, g_{12} = 0, g_{13} = 0, g_{23} = 0$$

olmalıdır. Buna göre metrik bileşenlerini matris olarak

$$[g_{ij}] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

biçiminde temsil edebiliriz.

<u>Örnek 2</u>: Şimdi de üç boyutlu Öklit uzayında silindirik koordinatlarda metrik bileşenlerini yazalım. Kartezyen ve silindirik koordinatlar arasındaki dönüşüm bağıntıları $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, $z = z$ kullanılırsa metriği

$$g = dr^2 + r^2 d\varphi^2 + dz^2$$

biçiminde yazabiliriz. Buna göre metrik bileşenlerinin

$$g_{11} = 1, g_{22} = r^2, g_{33} = 1, g_{12} = g_{13} = g_{32} = 0$$

olduğunu görürüz. Metriği matris olarak

$$[g_{ij}] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

biçiminde temsil edebiliriz. Burada $\left\{ \frac{\partial}{\partial r}, \frac{\partial}{\partial \varphi}, \frac{\partial}{\partial z} \right\}$ kümesine koordinat bazı denir. Bunun duali olan $\{dr, d\varphi, dz\}$ kümesine de koordinat kobazı denir. Bu kobazlardan ortonormal bir küme oluşturabiliriz.

$$g = \sum_i \sum_j g_{ij} e^i e^j$$

Burada metrik bileşenleri Kronecker deltasına eşit $g_{ij} = \delta_{ij}$ olacak şekilde $e^1 = dr, e^2 = rd\varphi$ ve $e^3 = dz$ yazabiliriz. Öyle ki $\{e^1, e^2, e^3\}$ kümesine ortonormal kobaz denir. Dualite ortonormal kobazdan ortonormal bazı verecektir,

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial r}, X_2 = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \varphi}, X_3 = \frac{\partial}{\partial z}.$$

2.3. Dış Cebirde Bazı Temel Tanımlar

Bu kısımda koordinat sisteminden bağımsız olan dış cebirde kullanılan bazı temel tanımlar ve özellikler özetlenecektir.

2.3.1. Formlar

$\left\{e^a\right\}$ kümesine ortonormal koçerçeve veya ortonormal 1-formlar denir. En genelde bir p-formu ortonormal kobazda

$$\underset{(p)}{\Psi} = \frac{1}{p!}\Psi_{a_1 a_2 \ldots . a_p} e^{a_1} \wedge e^{a_2} \wedge \ldots\ldots\ldots \wedge e^{a_p}$$

olarak ifade edebildiğimiz gibi koordinat kobazında

$$\underset{(p)}{\Psi} = \frac{1}{p!}\Psi_{\alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_p} dx^{\alpha_1} \wedge dx^{\alpha_2} \wedge \cdots \wedge dx^{\alpha_p}$$

olarak ifade ederiz. Burada $\wedge$ işlemi dış çarpımı gösterir. Dış çarpımın en temel özelliği şudur

$$\underset{(p)}{\alpha} \wedge \underset{(q)}{\beta} = (-1)^{p.q} \beta \wedge \alpha .$$

Buna göre p-formun tanımında $\Psi_{a_1 \cdots a_p}$ niceliği tüm indislerinde antisimetriktir.

2.3.2. Dış Türev

Dış türev operatörü, herhangi bir p-formu (p+1)-forma gönderir.

$$d\underset{(p)}{\Psi} = \frac{1}{p!}(\partial_\beta \Psi_{\alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_p}) dx^\beta \wedge dx^{\alpha_1} \wedge \cdots \wedge dx^{\alpha_p}$$

Başlıca özellikleri şunlardır

• $d(\underset{(p)}{\alpha} \wedge \underset{(q)}{\beta}) = d\alpha \wedge \beta + (-1)^p \alpha \wedge d\beta$

• $d(d\underset{(p)}{\psi}) = d^2 \psi = 0$

• $d(\underset{(p)}{\alpha} + \underset{(q)}{\beta}) = d\alpha + d\beta$

2.3.3. İç Çarpım

İç çarpım operatörü, bir anti türev işlemcisidir ve herhangi bir p-formu (p-1)-forma dönüştürür. En temel özellikleri şunlardır

• $\iota_a \underset{(0)}{f} = 0$

• $\iota_a(\underset{(p)}{\alpha} \wedge \underset{(q)}{\beta}) = \iota_a \alpha \wedge \beta + (-1)^p \alpha \wedge \iota_a \beta$

• $\iota_a e^b = \delta_a^b$

2.3.4. Hodge Yıldız 0peratörü

Hodge operatörü, herhangi bir p-formu (n-p)-forma dönüştürür. Burada n manifoldun boyutudur. Bu operatör yardımıyla M manifoldunun yönelimi hacim 4-formuyla verilir. Biz bu çalışmada

$$*1 = e^0 \wedge e^1 \wedge e^2 \wedge e^3 = \frac{1}{4!}\varepsilon_{abcd} e^a \wedge e^b \wedge e^c \wedge e^d$$

olarak seçiyoruz, öyle ki tümden antisimetrik Levi-Cevita tensörü $\varepsilon_{0123} = +1$. Temel üç özelliğini şöyle sıralayabiliriz.

• $\underset{(p)}{\alpha} \wedge * \underset{(q)}{\beta} = \beta \wedge * \alpha$ veya $* \beta \wedge \alpha = * \alpha \wedge \beta$

• $*(\underset{(p)}{\alpha} \wedge e_a) = \iota_a * \alpha$

• $** \underset{(p)}{\alpha} = \pm \alpha$

Örnek 3: Üç boyutlu Öklit uzayında herhangi bir 1-formun dış türevinin bir vektörün rotasyonelini tanımladığını gösterelim. Daha tanıdık olması için kartezyen koordinatlarda çalışalım. İlk olarak keyfi 1-formu ortonormal kobazda yazalım.

$$A = A_1 e^1 + A_2 e^2 + A_3 e^3$$

Şimdi koordinat bazında yazalım.

$$A = A_1 dx + A_2 dy + A_3 dz$$

Dış türevini alalım.

$$dA = dA_1 \wedge dx + dA_2 \wedge dy + dA_3 \wedge dz$$

burada $d^2 = 0$ özelliğini kullandık.

$$dA = \frac{\partial A_x}{\partial y} dy \wedge dx + \frac{\partial A_x}{\partial z} dz \wedge dx + \frac{\partial A_y}{\partial x} dx \wedge dy + \frac{\partial A_y}{\partial z} dz \wedge dy + \frac{\partial A_z}{\partial x} dx \wedge dz + \frac{\partial A_z}{\partial y} dy \wedge dz$$

$$= \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right) dx \wedge dy + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right) dz \wedge dx + \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right) dy \wedge dz$$

$$= \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right) e^1 \wedge e^2 + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right) e^3 \wedge e^1 + \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right) e^2 \wedge e^3$$

Bunun Hodge yıldızını alalım.

$$*(e^1 \wedge e^2) = \varepsilon^{12}{}_3 e^3 = \varepsilon_{123} e^3 = e^3$$
$$*(e^3 \wedge e^1) = \varepsilon^{31}{}_2 e^2 = \varepsilon_{312} e^2 = e^2$$
$$*(e^2 \wedge e^3) = \varepsilon^{23}{}_1 e^1 = \varepsilon_{231} e^1 = e^1$$

Sonuçta

$$* \, dA = \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) e^3 + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) e^2 + \left(\frac{\partial A_z}{\partial_y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) e^1$$

elde ederiz. Buradaki bileşenler $rot\,\vec{A}$ 'nın bileşenleridir. O halde $* \, dA$ işlemi $\vec{A}$ nın rotasyonelini verir,

$$* \, dA \equiv \vec{\nabla} \times \vec{A} \, .$$

2.4. Koordinat Dönüşümleri ve Kovaryant Türev

Aynı fiziksel olayı M manifoldu üzerinde iki farklı gözlemci izlediğinde bu iki gözlemcinin çerçevelerini birbirine dönüştürebiliriz. $\{e^a\}$ kümesi O gözlemcisinin ortonormal koçerçevesi olsun ve $\{e^{a'}\}$ kümesi de O' gözlemcisinin ortonormal koçerçevesi olsun. O halde

$$e^{a'} = L^{a'}{}_a e^a$$

yazabiliriz ki $L^{a'}{}_a$ ya dönüşüm matrisi denir ve bu dönüşüm elemanları $L^{a'}{}_a L^a{}_{b'} = \delta^{a'}_{b'}$ özelliğine sahiptirler. Eğer dönüşüm elemanları koordinatlardan bağımsız ise bu dönüşüm global bir dönüşümdür. Bu dönüşümün dış türevini alalım.

$$de^{a'} = dL^{a'}{}_a \wedge e^a + L^{a'}{}_a \, de^a$$

Sağ taraftaki birinci terimden dolayı bu ifade kovaryant değildir. Bu fazla terimden kurtulmak için bağlantı 1-formları tanımlarız. Bağlantının görevi vektörleri, genel olarak tensörleri paralel taşımaktır. O halde, yeni bir türev tanımlıyoruz.

$$De^a = de^a + \Lambda^a{}_b \wedge e^b$$

Buna kovaryant dış türev diyeceğiz. Burada $\Lambda^a{}_b$ bağlantı 1-formları üzerinde öyle bir dönüşüm tanımlıyoruz ki

$$\Lambda^{a'}{}_{b'} = L^{a'}{}_a \Lambda^a{}_b L^b{}_{b'} + L^{a'}{}_a dL^a{}_{b'}$$

kovaryant dış türev kovaryant olarak dönüşsün. Yani, kovaryant türev genel koordinat dönüşümü altında invaryant kalsın,

$$De^{a'} = L^{a'}{}_a De^a \, .$$

Aslında, (1,0)-tipi bir tensörün kovaryant dış türevini tanımlamış olduk. Genel olarak (p,q)-tipi bir tensörün kovaryant dış türevi şöyledir.

$$
\begin{aligned}
DT^{a_1\cdots a_p}{}_{b_1\cdots b_q} &= dT^{a_1\cdots a_p}{}_{b_1\cdots b_q} + \Lambda^{a_1}{}_c \wedge T^{ca_2\cdots a_p}{}_{b_1\cdots b_q} + \cdots + \Lambda^{a_p}{}_c \wedge T^{a_1\cdots a_{p-1}c}{}_{b_1\cdots b_q} \\
&\quad + \Lambda^c{}_{b_1} \wedge T^{a_1\cdots a_p}{}_{cb_2\cdots b_q} + \cdots + \Lambda^c{}_{b_q} \wedge T^{a_1\cdots a_p}{}_{b_1\cdots b_{q-1}c}
\end{aligned}
$$

3. UZAYZAMAN

3.1. Uzayzaman Geometrisi

Uzayzaman genel olarak $\{M, g, \nabla\}$ üçlüsü ile gösterilmektedir. Burada M 4-boyutlu, türevlenebilir ve yönlendirilebilir bir manifoldu, g bunun üzerinde verilmiş (0,2)-tipi metrik tensörünü, ∇ tensörlerin paralel taşınmasında kullanılan bağlantıyı göstermektedir.

Uzayzamanın herhangi bir $p \in M$ noktasında kurulan koordinat sistemi, $\{\partial/\partial x^{\alpha}(p)\}$ şeklinde veya kısaca ∂_{α} ile gösterilen bir koordinat referans çerçevesi oluşturur. Bu referans çerçevesi, $\{dx^{\alpha}(p)\}$ olarak göstereceğimiz koteğet uzayının p noktasında koordinat referans koçerçevesini oluşturur. Teğet uzayının baz vektörleri ile koteğet uzayının kobaz vektörlerinin iç çarpımı Kronecker deltası ile belirlenir.

$$dx^{\alpha}(\frac{\partial}{\partial x^{\beta}}) \equiv \iota_{\beta} dx^{\alpha} = \delta^{\alpha}_{\beta}$$

$T_p(M)$ teğet uzayında herhangi bir lineer bağımsız vektörler kümesi ortonormal yapılabilir. Böyle bir kümeyi $\{X_a\}$, $a = 0,1,2,3,$ ile gösterelim ve 'ortonormal referans çerçevesi' olarak adlandıralım. Bu durumda M manifoldu üzerinde verilen metrik $g(X_a, X_b) = \eta_{ab}$ bağıntısını sağlar. Burada η_{ab} Minkowski metriği olarak bilinir ve köşegen elemanları (-1,1,1,1) ve diğer terimleri sıfır olan 4×4'lük bir matris olarak temsil edilebilir. Ortonormal referans çerçevesinin dualinin oluşturduğu kobaz $\{e^a\}$ ile gösterilir. $\{X_a\}$ ile bunun dual koçerçevesi $\{e^a\}$ şu eşitliği $e^a(X_b) \equiv \iota_{X_b}(e^a) = \delta^a_b$ sağlar.

3.2. Gravitasyonda Temel Tensörler

Bu kısımda Riemannsal olmayan gravitasyon modelleri için temel olan üç tane tensör tanıtacağız.

3.2.1. Nanmetrisiti Tensörü

$$Q_{ab} := -\frac{1}{2} D\eta_{ab}$$

Metriğin $\Lambda^a{}_b$ bağlantısına göre kovaryant dış türevine nanmetrisiti denir. Q_{ab} 1-formları (1,2)-tipi tensördür.

$$Q_{ab} := -\frac{1}{2} D\eta_{ab} = -\frac{1}{2}\left[d\eta_{ab} - \Lambda^c{}_a \eta_{cb} - \Lambda^c{}_b \eta_{ac} \right]$$

$$= -\frac{1}{2}\left[0 - \Lambda_{ba} - \Lambda_{ab} \right] = \frac{1}{2}\left[\Lambda_{ab} + \Lambda_{ba} \right] = \Lambda_{(ab)}$$

Nanmetrisiti tensörü paralel taşıma süresince uzunluk ve açı standartlarındaki deformasyonu ölçer. Sıfırdan farklı nanmetrisitiden dolayı paralel taşıma süresince vektörlerin boyu korunmaz. Sonuç olarak eğer bir vektörü kapalı bir eğri boyunca paralel taşırsak, son vektörün boyu başlangıç vektörün boyundan farklı olacaktır [18].

3.2.2.Burulma Tensörü

$$T^a := De^a = de^a + \Lambda^a{}_b \wedge e^b$$

Ortonormal baz 1-formlarının kovaryant dış türevi T^a burulma tensörünü tanımlar. T^a 2-formları, (1,2)-tipi burulma tensörü olarak tanımlanır. Düz uzayzamanda kapalı paralel kenarlar vardır. Bir A vektörünü M yolu boyunca paralel taşıdığımızda L noktasına ulaşırız. Aynı A vektörünü N yolu boyunca paralel taşıdığımızda da aynı L noktasına ulaşırız. Sıfır burulmalı uzayzamanda iki vektör arasında bir miktar dönme olsa da hala bir paralelkenar elde ederiz. Fakat burulma sıfırdan farklı olursa iki farklı yol, vektörü aynı noktaya ulaştırmaz. Sonuçta, burulmalı uzayzamanlarda kapalı paralelkenarlar yoktur denir [18].

3.2.3. Eğrilik Tensörü

$$R^a{}_b := D\Lambda^a{}_b := d\Lambda^a{}_b + \Lambda^a{}_c \wedge \Lambda^c{}_b$$

Kovaryant dış türevin bağlantı üzerine etkisi $R^a_b(\Lambda)$ eğrilik tensörünü verir. $R^a_b(\Lambda)$ eğrilik 2-formları en genelde Riemannsal olmayan (1,3)-tipi eğrilik tensörüdür. Eğrilik tensörü sıfır ise uzayzaman düzdür. Kapalı bir yörünge boyunca paralel taşınan vektörü düşünelim. Eğer bu vektörde bir dönme olmazsa uzay düzdür. Eğrilik tensörü sıfır değilse, yani herhangi bir bileşeni sıfır değilse uzayzaman eğridir. Kapalı bir yörünge boyunca paralel taşınan vektör dönerse uzay eğridir [18].

Genel olarak; metrik ölçme standartlarını belirlerken, bağlantı tensörlerin paralel taşınması kuralını belirler.

3.3. Riemannsal Uzayzaman

Riemannsal uzayzamanda $Q_{ab} = 0, T^a = 0$ fakat $R^a{}_b \neq 0$. Eğer $Q_{ab} = 0, T^a = 0$ ve $R^a{}_b = 0$ ise uzay 'Minkowski'dir. Ortonormal metriğin elemanlarında hiç (-) yoksa Riemannsal geometri, fakat (+) ve (-)'lerden oluşuyorsa Püsüdo-Riemannsal geometri olarak adlandırılır. Burada metrik dejenere olmamalıdır, $\det \eta_{ab} \neq 0$. Son olarak $Q_{ab} = 0$ ve $T^a = 0$ ise ∇ bağlantısı Levi-Cevita bağlantı 1-formları $\{\omega^a{}_b\}$ tarafından belirlenir.

<u>Örnek 4:</u> r=a yarıçaplı küre yüzeyi S^2 için $R^a{}_b$ 'yi hesaplayalım. İlk olarak ϑ ve φ küresel koordinatları cinsinden metriği yazarız

$$g = a^2 (d\vartheta^2 + \sin^2 d\varphi^2)$$

burada $\{d\vartheta, d\varphi\}$ koordinat 1-formlarıdır ve $e^1 = a d\vartheta$ ve $e^2 = a \sin\vartheta d\varphi$ ortonormal 1-formlardır. Şimdi ortonormal 1-formların dış türevlerini alalım.

$$de^1 = 0, de^2 = a\cos\vartheta d\vartheta \wedge d\phi = a\cos\vartheta \frac{1}{a} e^1 \wedge \frac{1}{a\sin\vartheta} e^2 = \frac{\cot\vartheta}{a} e^1 \wedge e^2$$

Ardından, Levi-Cevita bağlantı 1-formları $\omega^a{}_b \wedge e^b = -de^a$ bağıntısından hesaplayalım.

$$\omega^2{}_1 \wedge e^1 = -de^2 = -\frac{\cot\vartheta}{a} e^1 \wedge e^2 \qquad \Rightarrow \qquad \omega^2{}_1 = -\omega^1{}_2 = \frac{\cot\vartheta}{a} e^2$$

Son olarak $R^a{}_b = d\omega^a{}_b + \omega^a{}_c \wedge \omega^c{}_b$ bağıntısından Riemann eğrilik 2-formunu hesaplayalım.

$$R^1{}_2 = d\omega^1{}_2 + \omega^1{}_c \wedge \omega^c{}_2 = \frac{1}{a^2} e^1 \wedge e^2$$

O halde $R^1{}_2 \neq 0$ olduğu için S^2 eğridir.

3.4. Schwarzschild Çözümü

Bu kısımda Riemannsal geometriye bir uygulama olarak Einstein denkleminin Schwarzschild çözümünü türeteceğiz. İlk olarak Einstein denkleminin

$$(Ric)_a - \frac{1}{2}\Re e_a = \kappa * \tau^a$$

biçimini yazalım [18]. Yukarıda τ^a enerji-momentum 3-formu, κ çifttenim sabiti, $(Ric)_a = \iota_b R^b{}_a$ Ricci eğrilik 1-formu ve $\Re = \iota_a (Ric)^a$ eğrilik skaleridir. Einstein denklemi Püsüdo-Riemannsal uzayzamanda yazılmıştır. Çiftlenimli nonlineer denklem setinden oluşan Einstein denklemini çözmek çok zor olduğundan basitlik için ilk adım olarak boşlukta çözüm arayalım $\tau^a = 0$. Maddenin olmadığı yerde kütle çekim alanını bulmaya çalışacağız. Basitleştirici diğer bir kabül de küresel simetri ve statik çözüm önerisidir. Teklif edeceğimiz metrik şöyledir

$$g = -f^2 dt^2 + g^2 dr^2 + r^2 d\vartheta^2 + r^2 \sin^2\vartheta d\varphi^2$$

Metrik fonksiyonlarımız $f = f(r)$ ve $g = g(r)$ zamana bağlı olmadığı için ve metriğimiz $dt \wedge dr, dt \wedge d\vartheta, dt \wedge d\varphi$ terimlerini içermediği için statik ve $r^2 d\vartheta^2 + r^2 \sin^2\vartheta d\varphi^2$ parçası r yarıçaplı küre üzerindeki metrik olduğundan küresel simetrik çözüm tanımlamasını alır.

İlk adımda ortonormal 1-formları ve terslerini belirliyoruz.

$$e^0 = fdt \quad , \quad e^1 = gdr \quad , \quad e^2 = rd\vartheta \quad , \quad e^3 = r\sin\vartheta d\varphi$$

$$dt = \frac{e^0}{f}, \qquad dr = \frac{e^1}{g}, \qquad d\vartheta = \frac{e^2}{r}, \qquad d\varphi = \frac{e^3}{r\sin\vartheta}$$

İkinci adımda önce ortonormal 1-formların dış türevlerini alıyoruz,

$$de^0 = f'dr \wedge dt = f'\frac{e^1}{g} \wedge \frac{e^0}{f} = -\frac{f'}{fg} e^0 \wedge e^1, de^1 = g'dr \wedge dr = 0, de^2 = \frac{1}{rg} e^1 \wedge e^2,$$

$$de^3 = \frac{1}{rg} e^1 \wedge e^3 + \frac{\cot\vartheta}{r} e^2 \wedge e^3$$

Sonra $\omega^a{}_b \wedge e^b = -de^a$ $(a = 0,1,2,3)$ bağıntısını kullanarak Levi-Cevita bağlantı 1-formlarını hesap ediyoruz. $a = 0$ için

$$\omega^0{}_1 \wedge e^1 + \omega^0{}_2 \wedge e^2 + \omega^0{}_3 \wedge e^3 = -de^0 = \frac{f'}{fg} e^0 \wedge e^1$$

denklemini elde ederiz ki üssü r ye göre türevi gösterir. Bunu $\wedge e^2 \wedge e^3$ ile çarparsak

$$\omega^0{}_1 \wedge e^1 \wedge e^2 \wedge e^3 + 0 + 0 = \frac{f'}{fg} e^0 \wedge e^1 \wedge e^2 \wedge e^3 \Rightarrow \omega^0{}_1 = \frac{f'}{fg} e^0$$

sonucuna ulaşırız. Benzer işlemleri $a = 1,2,3$ için de yaparsak şu sonuçları elde ederiz.

$$\omega^0{}_1 = \frac{f'}{fg} e^0 = \frac{f'}{g} dt$$

$$\omega^2{}_1 = \frac{1}{rg} e^2 = \frac{1}{g} d\vartheta$$

$$\omega^3{}_1 = \frac{1}{rg} e^3 = \frac{\sin\vartheta}{g} d\varphi$$

$$\omega^3{}_2 = \frac{\cot\vartheta}{r} e^3 = \cos\vartheta d\varphi$$

Üçüncü adımda önce Levi-Cevita bağlantı 1-formlarının dış türevlerini hesap ediyoruz.

$$d\omega^0{}_1 = \left(\frac{f'}{g}\right)' dr \wedge dt = \left(\frac{f'}{g}\right)' \frac{e^1}{g} \wedge \frac{e^0}{f} = -\frac{1}{fg}\left(\frac{f'}{g}\right)' e^0 \wedge e^1$$

$$d\omega^1{}_2 = \frac{g'}{rg^3} e^1 \wedge e^2$$

$$d\omega^1{}_3 = -\frac{\cot\vartheta}{r^2 g} e^2 \wedge e^3 + \frac{g'}{rg^3} e^1 \wedge e^3$$

$$d\omega^2{}_3 = \frac{1}{r^2} e^2 \wedge e^3$$

Ardından $R^a{}_b = d\omega^a{}_b + \omega^a{}_c \wedge \omega^c{}_b$ kullanarak Riemann eğrilik 2-formlarını hesap ediyoruz.

$$R^0{}_1 = d\omega^0{}_1 + \omega^0{}_2 \wedge \omega^2{}_1 + \omega^0{}_3 \wedge \omega^3{}_1 = d\omega^0{}_1 = -\frac{1}{fg}\left(\frac{f'}{g}\right)' e^0 \wedge e^1$$

$$R^0{}_2 = -\frac{f'}{rfg^2} e^0 \wedge e^2$$

$$R^0{}_3 = -\frac{f'}{rfg^2} e^0 \wedge e^3,$$

$$R^1{}_2 = \frac{g'}{rg^3} e^1 \wedge e^2$$

$$R^1{}_3 = \frac{g'}{rg^3} e^1 \wedge e^3$$

$$R^2{}_3 = \frac{g^2 - 1}{r^2 g^2} e^2 \wedge e^3$$

Dördüncü adım olarak Ricci eğrilik 1-formlarını hesap ediyoruz.

$$(Ric)_0 = \iota_1 R^1{}_0 + \iota_2 R^2{}_0 + \iota_3 R^3{}_0 = \iota_1\left[-\frac{1}{fg}\left(\frac{f'}{g}\right)' e^0 \wedge e^1\right] + \iota_2\left[-\frac{f'}{rfg^2} e^0 \wedge e^2\right] + \iota_3\left[-\frac{f'}{rfg^2} e^0 \wedge e^3\right]$$

O halde

$$(Ric)_0 = \frac{1}{fg}\left[\left(\frac{f'}{g}\right)' + \frac{2f'}{rg}\right] e^0$$

$$(Ric)_1 = \left[\frac{2g'}{rg^3} - \frac{1}{fg}\left(\frac{f'}{g}\right)'\right] e^1$$

$$(Ric)_2 = \left[\frac{g'}{rg^3} + \frac{g^2-1}{r^2g^2} - \frac{f'}{rfg^2}\right] e^2$$

$$(Ric)_3 = \left[\frac{g'}{rg^3} + \frac{g^2-1}{r^2g^2} - \frac{f'}{rfg^2}\right] e^3$$

sonuçlarını elde ederiz. Beşinci adımda skaler eğriliği hesap ediyoruz.

$$\Re = \iota_0 (Ric)^0 + \iota_1 (Ric)^1 + \iota_2 (Ric)^2 + \iota_3 (Ric)^3$$

$$\Re = -\frac{2}{fg}\left(\frac{f'}{g}\right)' + 4\frac{g'}{rg^3} + 2\frac{g^2-1}{r^2g^2} - 4\frac{f'}{rfg^2}$$

Altıncı ve son adımda bu sonuçları boşlukta Einstein denklemine yerleştiriyoruz.

$$(Ric)_0 - \frac{1}{2}\Re e_0 = 0 \Rightarrow \frac{2g'}{rg^3} + \frac{g^2-1}{r^2g^2} = 0 \qquad \rightarrow \text{1.Denklem}$$

$$(Ric)_1 - \frac{1}{2}\Re e_1 = 0 \Rightarrow \frac{2f'}{rfg^2} - \frac{g^2-1}{r^2g^2} = 0 \qquad \rightarrow \text{2.Denklem}$$

$$(Ric)_2 - \frac{1}{2}\Re e_2 = 0 \Rightarrow \frac{f'}{rfg^2} - \frac{g'}{rg^3} + \frac{1}{fg}\left(\frac{f'}{g}\right)' = 0 \qquad \rightarrow \text{3.Denklem}$$

$$(Ric)_3 - \frac{1}{2}\Re e_3 = 0 \Rightarrow \frac{f'}{rfg^2} - \frac{g'}{rg^3} + \frac{1}{fg}\left(\frac{f'}{g}\right)' = 0 \qquad \rightarrow \text{4.Denklem}$$

Burada 3. ve 4. denklemlerin aynı olduğuna dikkat çekiyoruz. Şimdi, 1. ve 2. denklemleri toplarsak

$$\frac{2g'}{rg^3} + \frac{g^2-1}{r^2g^2} + \frac{2f'}{rfg^2} - \frac{g^2-1}{r^2g^2} = 0 \Rightarrow \frac{2}{rg^2}\left[\frac{g'}{g} + \frac{f'}{f}\right] = 0 \Rightarrow fg = 1 \Rightarrow g = \frac{1}{f}$$

sonucuna ulaşırız. Bunu 3. denklemde kullanırsak

$$f^2 = A + \frac{B}{r} \Rightarrow f^2 = 1 + \frac{B}{r}$$

çözümünü elde ederiz. Burada ilk çözümü 1. denklemde yerine koyarak $A = 1$ sonucuna ulaştık. Bu çözümün önemli üç özelliği şunlardır.

1. $r \to \infty$ iken metrik Minkowski oluyor. Buna asimtotik düzlük denir.

2. Newton'un gravitasyon teorisiyle uyumlu olması için $B = -\frac{2GM}{c^2}$ olmalıdır.

3. Metrik fonksiyonları Schwarzschild yarıçapında $r_S = \frac{2GM}{c^2}$ ve orijinde $r = 0$ ıraksak olurlar. Schwarzschild yarıçapına olay ufku da denir. Bu çözüm karadelik içerir.

4. EVREN MODELİ

4.1. Kozmoloji

Evrenin tarihini, yapısını, dinamiğini çalışan bilim dalına *kozmoloji* denir. Evren denince gökyüzünde olan bütün nesneleri anlarız: yıldızlar, galaksiler, takımyıldızları, pulsarlar, kuasarlar, kozmik ışınlar, arka plan radyasyonu vs. Güneş sistemini, ikili yıldızları ve galaksileri bir arada tutan temel kuvvet gravitasyondur. Genel Görecelilik Teorisi eğri uzayzamanda parçacıkların ve fotonların hareketlerini doğru tarif eden tatmin edici bir gravitasyon teorisidir. Ancak, Genel Göreceliliği evrene uygulamak basit olmadığı için bazı basitleştirici kabuller yapmalıyız.

1. *Homojenlik*: Birim hacimdeki galaksi sayısı ve dolayısıyla yoğunluk ρ uzayın büyük bölümü üzerinden düzgündür. Galaksilerin bugünkü görünen kütleleri için $\rho \approx 10^{-27}$ kg.m^{-3} mertebesindedir.

2. ***İzotropi:*** Birim katı açıdaki galaksi sayısı bütün yönlerde aynıdır.

3. ***Kırmızıya Kayma:*** Galaksilerin yaydığı ışık kırmızıya kayar.

Bu kabuller gözlemlerle uyumludur. Bu ifadelerin matematiksel karşılığı Robertson-Walker (RW) metriğine tekabül eder.

$$g = -c^2 dt^2 + S^2(t)\left[\frac{dr^2}{1-kr^2} + r^2(d\vartheta^2 + \sin^2\vartheta d\varphi^2)\right]$$

Burada t dünya zamanı, evren için zaman parametresidir, $S(t)$ uzay genişleme faktörü yalnızca t nin fonksiyonudur, k uzaysal eğriliktir. Eğer $k > 0$ ise evren kapalı ve eğridir, $k = 0$ ise evren düzdür, $k < 0$ ise evren açık ve eğridir. Şimdi RW metriğini Einstein denklemine

$$(Ric)_a - \frac{1}{2}\Re e_a = \frac{8\pi G}{c^4} * \tau_a$$

yerleştirerek genişleme fonksiyonunun zamanla nasıl değiştiğini belirlemeye çalışacağız. Bu sonuçları Einstein denklemine yerleştirelim. Burada $\tau_a = T_{ab} * e^b$ enerji-momentum 3-formudur. Standart yaklaşımda evren mükemmel akışkan gibi düşünülür; yani viskozite ve ısı iletimi yoktur,

$$\tau_a = \left(\rho + \frac{p}{c^2}\right)u_a * u + p * e_a .$$

Burada u^a akışkan parçacıklarının dünya hızıdır ve ko-haraket eden çerçevede $u^a = c\delta_0^a$ biçimindedir (dolayısıyla $u^a u_a = -c^2$), $u = u_a e^a$ hız 1-formu, ρ öz yoğunluk, p basınçtır. Bu durumda enerji-momentum tensörünün açık hali şöyle olur.

$$T_{ab} = \begin{pmatrix} \rho c^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p \end{pmatrix}$$

Bu durumda Einstein denkleminin sıfırıncı (zaman) bileşeni:

$$\dot{S}^2 + kc^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho S^2 \tag{4.1}$$

"Friedmann denklemini" verir, buradaki nokta zaman türevini göstermektedir. Diğer taraftan birinci, ikinci, üçüncü (veya kısaca uzay) bileşeni

$$2S\ddot{S} + \dot{S}^2 + kc^2 = -\frac{8\pi G}{c^2} pS^2 \tag{4.2}$$

verir. Denklem (4.1) den kc^2 yi çekip denklem (4.2) de yerleştirelim.

$$\ddot{S} = -\frac{4\pi G}{3c^2}(\rho c^2 + 3p)S \tag{4.3}$$

Şimdi de denklem (4.1) i $c^2 S^2 / 3$ ile çarptıktan sonra zaman türevini alalım.

$$2\dot{S}\ddot{S} = \frac{8\pi G}{3}(\dot{\rho}S^2 + 2\rho S\dot{S}) \tag{4.4}$$

Sonra da denklem (4.3) ü buraya yerleştirerek

$$\dot{\rho} + 3\left(\rho + \frac{p}{c^2}\right)\frac{\dot{S}}{S} = 0 \tag{4.5}$$

denklemini elde ediyoruz. Bu denklemin $D\tau_a = 0$ olarak ifade edilen süreklilik denkleminden de türetilebileceğini not edelim.

4.2. Friedmann Modelleri

Şimdiye kadarki gözlemsel veriler evrenin madde-baskın biçimde olduğunu gösteriyor; $\frac{p}{c^2} << \rho$. Yani yoğunluğun yanında basınç ihmal edilebilir, $p = 0$. Bazı sonuçları şöyle sıralayabiliriz. İlk olarak bu durumda denklem (4.5) in integrali

$$\rho S^3 = sbt$$

sonucunu verir ki evrenin toplam kütlesi sabit demektir. Bu noktada şuna dikkat edelim. $S(0)=0$ olacak şekilde zaman parametresinin orijinini ayarlayabiliriz. Bu durumda t evrenin yaşını gösterir. Alt indis 0 ile parametrelerin bugünkü değerlerini gösterelim. Buna göre t_0 evrenin bugünkü yaşı, S_0 ve ρ_0 parametreleri de S ve ρ nun bugünkü değeridir. İkinci olarak (4.3) denklemine göre $\ddot{S}<0$ olduğu için genişleme yavaşlıyor. Üçüncü bir nokta evrenin kaderinin k nın değerine bağlı olmasıdır. Yukarıdan

$$\rho S^3 = \rho_0 S_0^3 \rightarrow \rho = \left(\frac{S_0}{S}\right)^3 \rho_0$$

yazabiliriz, bunu da denklem (4.1) e koyarsak

$$\dot{S}^2 + kc^2 = \frac{A^2}{S}$$

denklemine ulaşırız. Burada $A^2 = \dfrac{8\pi G}{3}\rho_0 S_0^3$. Bu denklemi üç durum için integre edebiliriz.

a. *Düz Model (k = 0)*

$$\frac{dS}{dt} = \frac{A}{S^{1/2}} \rightarrow S(t) = \left(\frac{3A}{2}\right)^{2/3} t^{2/3}$$

Bu durumda $t \rightarrow \infty$ iken $\dot{S} \rightarrow 0$. Yani genişleme sonsuzda duracak, Şekil 4.1.

b. *Açık Model (kc^2 = -1)*

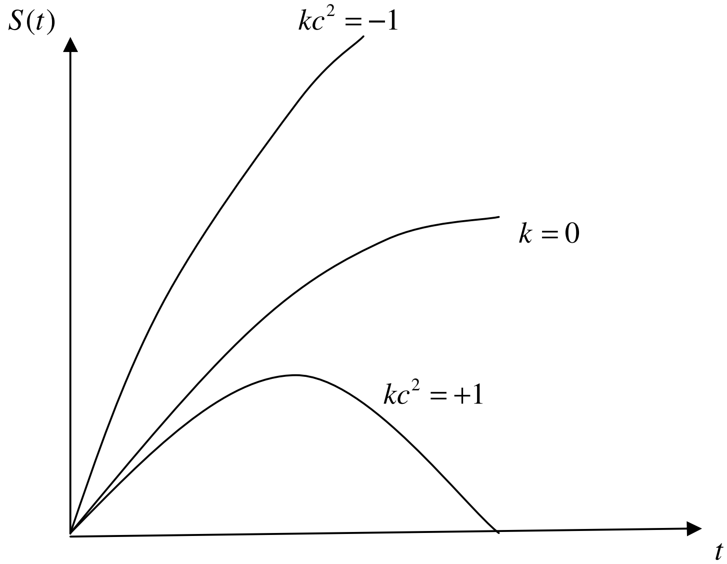
$$\frac{dS}{dt} = \left(\frac{A^2+S}{S}\right)^{1/2} \rightarrow S(t) = A^2 \sinh^2\left(\frac{\psi}{2}\right)$$

Burada $t = \dfrac{A^2}{2}(\sinh\psi - \psi)$. Bu durumda $t \rightarrow \infty$ iken $\dot{S} > 0$. Yani genişleme hiç durmayacak, Şekil 4.1.

c. *Kapalı Model (kc^2 = +1)*

$$\left(\frac{dS}{dt}\right) = \left(\frac{A^2-S}{S}\right)^{1/2} \rightarrow S(t) = A^2 \sin^2\left(\frac{\psi}{2}\right)$$

Burada $t = \dfrac{A^2}{2}(\psi - \sin\psi)$. Bu durumda $t \rightarrow t_{sonlu}$ iken $\dot{S} < 0$. Yani genişleme sonlu sürede duracak ve evren büzülmeye başlayacak, Şekil 4.1.



Şekil 4.1. Evrenin geleceğinin uzaysal eğriliğe hassas bağlılığı.

O halde, “k nasıl belirlenir?” sorusu önem kazanmaktadır. Öncelikle (4.1) denkleminden

$$k = \frac{8\pi G S^2}{3c^2}\left[\rho - \frac{3}{8\pi G}\left(\frac{\dot{S}_0}{S_0}\right)^2\right] = \frac{8\pi G S_0^2}{3c^2}(\rho_0 - \rho_c)$$

yazabiliriz ki burada $\rho_c = \dfrac{3H_0^2}{8\pi G}$ kritik yoğunluk, $H_0 \equiv \dfrac{\dot{S}_0}{S_0}$ Hubble sabitidir. Hubble sabitinin bugünkü değeri çok kesin olmamakla birlikte astronomların gözlemlerine göre $H_0 \simeq 50 \dfrac{km}{s.Mpc} \simeq 2\times 10^{-18}\dfrac{1}{s}$ mertebesindedir. Dolayısıyla $\rho_c = 5{,}7\times 10^{-27}\dfrac{kg}{m^3}$ olur. Buna göre k nin değerini belirleyebilmemiz için evrenin yoğunluğunun bugünkü değerini ölçmeliyiz. Bunun içinde iki temel yöntem vardır. Birincisi görülebilen galaktik madde temeline dayanır; $\rho_0 \approx 0{,}20\times 10^{-27}\dfrac{kg}{m^3}$. İkincisi de galaksilerin açısal hızları (dolayısıyla merkezkaç kuvvetleri) temeline dayanır. Bunun için önce yavaşlama parametresi

$$q_0 = -\frac{\ddot{S}_0 S_0}{\dot{S}_0^2}$$

olarak tanımlanır. Denklem (4.3) de $p = 0$ koyup, ρ için düzenlersek

$$\rho_0 = 2q_0\rho_c$$

buluruz. Burada çok kaba bir sonuç olmakla birlikte q_0 ~ 0,5 mertebesindedir. O halde $\rho_0 \approx 5{,}70 \times 10^{-27}\, kg/m^3$ elde edilir. Sonuç olarak iki yoğunluk arasında var. Bu farka "eksik madde" veya "karanlık madde" problemi denir. Şimdiye kadar ortaya çıkmayan bu madde için kütleli nötrinolar, kara delikler, aksiyonlar, WIMPs (zayıf etkileşen kütleli parçacıklar) gibi bazı teorik öngörüler vardır. Şimdilik k nin değeri için kesin bir sonuç söyleyemediğimiz için her üç durumda mümkündür.

5. SİMETRİK TELEPARALEL GRAVİTASYON

5.1. Simetrik Teleparalel Geometri

Simetrik Teleparalel Gravitasyon (STPG) modellerinde geometride sıfırdan farklı tensör sadece nanmetrisidir.

$$Q_{\alpha\beta} \neq 0 \ , \ T^{\alpha} = 0 \ , \ R^{\alpha}{}_{\beta} = 0 \tag{5.1}$$

STPG bir metrik teorisidir, yani (5.1) şartları için yalnız metrik anzastı yeterlidir. Bunu adım adım şöyle görelim.

Adım 1: Bir metrik yazılır, $g = g_{\alpha\beta}(x)dx^{\alpha} \otimes dx^{\beta}$. Burada x koordinat fonksiyonları olan x^{α} ları göstermektedir.

Adım 2: Koçerçeve ve tüm bağlantı $e^{\alpha} = dx^{\alpha}$, $\Lambda^{\alpha}{}_{\beta} = 0$ olarak seçilir. Bu durumda aşağıdaki sonuç geçerli olur.

$$R^{\alpha}{}_{\beta} = 0 \ , \ T^{\alpha} = 0 \ , \ Q_{\alpha\beta} = -\frac{1}{2}dg_{\alpha\beta} \neq 0$$

Adım 3: $e^{a} = h^{a}{}_{\alpha}dx^{\alpha}$ kullanılarak dört ayaklar $h^{a}{}_{\alpha}$ ve tersleri $h^{\alpha}{}_{a}$ belirlenir.

Adım 4: Ortonormal çerçevede tüm bağlantı

$$\Lambda^{a}{}_{b} = h^{a}{}_{\alpha}\Lambda^{\alpha}{}_{\beta}h^{\beta}{}_{b} + h^{a}{}_{\alpha}dh^{\alpha}{}_{b} = h^{a}{}_{\alpha}dh^{\alpha}{}_{b} \neq 0$$

ve ilgili tensörler

$$R^{a}{}_{b} = h^{a}{}_{\alpha}R^{\alpha}{}_{\beta}h^{\beta}{}_{b} = 0 \ , \ T^{a} = h^{a}{}_{\alpha}T^{\alpha} = 0 \ , \ Q^{a}{}_{b} = h^{a}{}_{\alpha}Q^{\alpha}{}_{\beta}h^{\beta}{}_{b} \neq 0$$

olarak yazılır.

Adım 5: Son olarak nanmetrisiti cinsinden yazılan dinamik alan denklemleri kullanılarak bilinmeyen metrik fonksiyonları belirlenir.

5.2. Simetrik Teleparalel Gravitasyona Ayar Yaklaşımı

Modern fizikte doğa olaylarını açıklamak için ayar teorisi çok kabul gören bir yaklaşımdır. Ayar teorisinde fiziksel bir nicelik matematiksel bir fonksiyonla temsil edilir. Ayar teorisine göre, önce kinetik ve kütle terimlerini içeren alan Lagranjı yazılır. Alanda bir dönüşüm tanımlanır ve önce global sonra da yerel olarak bu dönüşüm altında alan Lagranjının invaryant olması istenir. Kinetik terimdeki türevden dolayı yerel invaryans bozulur. Bunu tamir edecek şekilde yeni bir ayar alanı ve bu alanın dönüşümü tanımlanır. Bu ayar potansiyelinin tek başına kalması arzu edilmediği için ayar potansiyelinin kinetik ve kütle terimleri Lagranja eklenir. Yeni Lagranjın tanımlanan dönüşümler altında yerel olarak invaryantlığı kontrol edilir. İnvaryantlık bozulmuşsa ya invaryantlığı bozan terimler sıfırlanır ya da yeni bir alan eklenir. Son olarak, alandaki dönüşüm elemanları kümesinin grup yapısı araştırılır.

STPGye ayar yaklaşımı için ilk adım olarak aşağıdaki Lagranjı önerelim.

$$L^{Glo} = -\frac{\kappa}{8} dg_{\alpha\beta} \wedge {*dg^{\alpha\beta}} + M *1$$

Burada κ çiftlenim sabiti ve M kütle terimidir, $g_{\alpha\beta}$ metrik bileşenleridir. Ayrıca kütle teriminin $M*1 = \frac{M}{4} g_{\alpha\beta} \wedge {*g^{\alpha\beta}}$ biçiminde yazılabileceğini de not edelim. Bu Lagranj global ayar dönüşümü altında invaryanttır. Çünkü dönüşüm elemanlarının türevleri sıfırdır.

$$g_{\alpha\beta} = g_{\alpha'\beta'} L^{\beta'}{}_{\beta} L^{\alpha'}{}_{\alpha}$$

$$g^{\alpha\beta} = g^{\alpha'\beta'} L^{\beta}{}_{\beta'} L^{\alpha}{}_{\alpha'}$$

Burada metriğin $g_{\alpha\beta} g^{\alpha\gamma} = \delta^{\gamma}_{\beta}$ özelliği dönüşüm elemanları üzerinde $L^{\beta}{}_{\beta'} L^{\beta'}{}_{\alpha} = \delta^{\beta}_{\alpha}$ koşulunu verir. Buradaki global invaryantlığın yerel olmasını istiyoruz

$$L^{\alpha}{}_{\alpha'} = L^{\alpha}{}_{\alpha'}(x)$$

ki x uzayzaman koordinatlarını gösterir. Bu durumda yazdığımız Lagranj invaryant değildir. Çünkü dönüşüm elemanlarının türevleri $dL^{\beta'}_{\beta}$ sarkar. İnvaryansı kurtarmak için Lagranjımıza $dg_{\alpha\beta} \wedge {*\Lambda^{\alpha\beta}}$ ve $\Lambda_{\alpha\beta} \wedge {*\Lambda^{\alpha\beta}}$ türünde terimler ekliyoruz. Sonuçta,

$$L^{Yer} = \frac{\kappa}{2} Q_{\alpha\beta} \wedge {*Q^{\alpha\beta}} + M *1$$

Lagranjını elde ediyoruz. Yeni Lagranj yerel ayar dönüşümleri

$$g_{\alpha\beta} = g_{\alpha'\beta'} L(x)^{\beta'}{}_{\beta} L(x)^{\alpha'}{}_{\alpha}$$

$$\Lambda^{\alpha}{}_{\beta} = L(x)^{\alpha}{}_{\alpha'} \Lambda^{\alpha'}{}_{\beta'} L(x)^{\beta'}{}_{\beta} + L(x)^{\alpha}{}_{\alpha'} dL(x)^{\alpha'}{}_{\beta}$$

altında invaryanttır.

5.3. STPG Alan Denklemleri

Burada ortonormal ayarda çalışacağız. Bu durumda metrik bileşenleri 0,±1 lerden oluştuğu için varyasyonu hep sıfır olur ve dolayısıyla Lagranjımızın koçerçeve ve bağlantı varyasyonlarını yapmamız yeterlidir. STPGde koçerçeveyi de bağlantıyı da metrikten belirliyoruz, bunlar birbirinden bağımsız nicelikler değildir. Bununla birlikte e^a ile $\Lambda^a{}_b$ arasındaki ilişkide açık değildir. O halde en iyi yol Lagranj çarpanları yöntemini kullanmaktır.

$$L = \frac{\kappa}{2} Q_{ab} \wedge *Q^{ab} + M *1 + \lambda_a \wedge T^a + R^a{}_b \wedge \rho_a{}^b$$

Bu Lagranjın bağlantı varyasyonu ve koçerçeve varyasyonu sırasıyla

$$\lambda_a \wedge e^b + D\rho_a{}^b = -\Sigma_a{}^b \qquad (5.2)$$

$$M *e_a + D\lambda_a = -\tau_a \qquad (5.3)$$

denklemlerini verirler ki burada

$$\Sigma_a{}^b = \frac{\kappa}{2} *(Q_a^b + Q_a^b) \qquad (5.4)$$

$$\tau_a = -\frac{\kappa}{2}\left[(\iota_a Q^{bc}) *Q_{bc} + Q^{bc} \wedge (\iota_a *Q_{bc})\ \right] \qquad (5.5)$$

olarak tanımlanır. İlke olarak (5.2) denkleminden Lagranj çarpanları çözülür ve sonuçlar (5.3) denklemine yerleştirilir. Ancak ikinci alan denkleminde bize gerekli olan sadece $D\lambda_a$ dır. Bunu da (5.1) denkleminin kovaryant dış türevini alarak elde ederiz.

$$D\lambda_a \wedge e^b = -D\Sigma_a{}^b \qquad (5.6)$$

burada $De^a = T^a = 0$ ve $D^2\rho_a^b = R_c^b \wedge \rho_a^c - R_a^c \wedge \rho_c^b = 0$ kullandık. (5.3) denklemini $\wedge e^b$ ile çarpıp (5.6) denklemini oraya yerleştirirsek

$$D\Sigma_a{}^b - \tau_a \wedge e^b + M\delta_a^b *1 = 0 \qquad (5.7)$$

denklemini elde ederiz. Burada $e^a \wedge *e^b = \eta^{ab} *1$ özdeşliği kullanılmıştır. Simetri argümanlarını kullanmak için metriği kullanarak üstteki indisi aşağı indiriyoruz.

$$\kappa D *Q_{ab} + 2\kappa Q_b^c \wedge *Q_{ac} - \tau_a \wedge e_b + M\eta_{ab} *1 = 0 \qquad (5.8)$$

Burada Σ_{ab} yi (5.4) denklemi aracılığıyla Q_{ab} cinsinden yazdık. $Q_b^c \wedge *Q_{ac} = Q_a^c \wedge *Q_{bc}$ olduğu açıktır. Ayrıca τ_a nın (5.5) tanımını kullanırsak $\tau_a \wedge e_b = \tau_b \wedge e_a$ olduğunu görürüz. Son olarak $D*Q_{ab}$ ifadesinde $\Lambda^a_b = Q^a_b$ eşitliğini kullanırsak (5.8) denkleminin simetrik olduğunu görürüz.

$$d*Q_{ab} - (\iota_a Q^{cd})(\iota_b Q_{cd})*1 = 0 \qquad (a \neq b) \tag{5.9}$$

(5.8) denkleminin izi de şöyle olur.

$$d*Q + Q^{cd} \wedge *Q_{cd} + 4\frac{M}{\kappa}*1 = 0 \tag{5.10}$$

Son olarak (5.3) denkleminin kovaryant dış türevi

$$D\tau_a - MQ \wedge *e_a = 0 \tag{5.11}$$

alan denklemini verir. Burada $D*e_a = -Q \wedge *e_a$ özdeşliği ve $D^2\lambda_a = -R^b_a \wedge \lambda_b = 0$ sonucu kullanılmıştır. Son üç denklem STPG teorisini oluşturur.

5.4. Konform Düz Çözüm

Alt başlık 5.1 de yazılan adımların uygulaması olarak STPG alan denklemlerine konform düz çözüm arayalım.

Adım1: Konformal düz bir metrik anzastı yapıyoruz.

$$g = e^{2\psi}(-dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2)$$

Burada ψ skaler bir fonksiyondur. O halde $g_{\alpha\beta} = e^{2\psi}\delta^a_\alpha \delta^b_\beta \eta_{ab}$.

Adım2: Koçerçeveyi ve bağlantı 1-formunu koordinat ayarında $e^\alpha = dx^\alpha$ ve $\Lambda^\alpha{}_\beta = 0$ olarak seçelim. Bu durumda $R^\alpha{}_\beta = 0$, $T^\alpha = 0$ ve $Q_{\alpha\beta} = -\frac{1}{2}dg_{\alpha\beta} = -g_{\alpha\beta}d\psi$ olur.

Adım3: Ortonormal koçerçeveyi yazalım, $e^a = e^\psi \delta^a_\alpha dx^\alpha$. Bu durumda dört ayaklar ve tersleri $h^a{}_\alpha = e^\psi \delta^a_\alpha$ ve $h^\alpha{}_a = e^{-\psi}\delta^\alpha_a$ olarak elde edilir.

Adım4: Ortonormal koçerçeveye geçelim.

$$\Lambda^a{}_b = -\delta^a_b d\psi \quad , \quad R^a{}_b = 0 \quad , \quad T^a = 0 \quad , \quad Q^a{}_b = -\delta^a_b d\psi \tag{5.12}$$

Adım5: (5.12) ile verilen nanmetrisitiyi (5.9), (5.10) ve (5.11) alan denklemlerine yerleştirerek ψ 'yi belirleyeceğiz.

İlk dört adımdaki argümanları Weyl dönüşümü cinsinden de yazabiliridk. Yani, Minkowski metriği $g = -dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2$ alan denklemlerimizin aşikâr çözümüdür. Bu noktada

$$g \mapsto e^{2\psi} g \quad \text{veya} \quad e^a \mapsto e^{\psi} e^a$$

olarak tanımlanan Weyl dönüşümü altında Levi-Civita bağlantı 1-formları, nanmetrisiti 1-formları, tüm bağlantı 1-formları, burulma 2-formları ve eğrilik 2-formları sırasıyla aşağıdaki gibi dönüşürler.

$$\begin{aligned}
&\omega_{ab} \mapsto \omega_{ab} - (\partial_a \psi) e_b + (\partial_b \psi) e_a \\
&Q_{ab} \mapsto Q_{ab} - \eta_{ab} d\psi \\
&\Lambda_{ab} \mapsto \Lambda_{ab} - \eta_{ab} d\psi \\
&T^a \quad \mapsto e^{\psi} T^a \\
&R^a{}_b \mapsto R^a{}_b
\end{aligned}$$

Bu açıdan bakıldığında Weyl alanı olarak adlandırılan ψ fonksiyonu nanmetrisitinin kaynağı gibi yorumlanabilir. Bu sonuç yeni bir tür gravitasyonel yük (Weyl yükü) nanmetrisitinin kaynağıdır şeklinde de ifade edilir [6]-[7].

(5.12) denklemi ile verilen nanmetrisitiyi (5.9) denklemine yerleştirirsek

$$(\partial_\alpha \psi)(\partial_\beta \psi) = 0$$

elde ederiz. Şimdi de (5.12) nanmetrisitisini (5.10) denkleminde kullanarak

$$\partial^\alpha \partial_\alpha \psi + (\partial^\alpha \psi)(\partial_\alpha \psi) - M/\kappa = 0$$

denklemine ulaşıyoruz. Son olarak (5.12) denklemini (5.11) denkleminde kullanarak

$$(\partial_\alpha \psi)\left[\partial^\beta \partial_\beta \psi + (\partial^\beta \psi)(\partial_\beta \psi) - \frac{M}{\kappa}\right] = 0$$

denklemini türetiyoruz. Burada $\partial_\alpha := \left(\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)$ olmak üzere $\partial^\alpha \partial_\alpha = g^{\alpha\beta} \partial_\alpha \partial_\beta$.

O halde, çözülmesi gereken denklemler

$$(\partial_\alpha \psi)(\partial_\beta \psi) = 0 \qquad (\alpha \neq \beta) \tag{5.13}$$

$$-\ddot{\psi} + \nabla^2 \psi - \dot{\psi}^2 + (\vec{\nabla} \psi).(\vec{\nabla} \psi) - \left(\frac{M}{\kappa}\right) e^{2\psi} = 0 \tag{5.14}$$

olur ki burada nokta t türevini ve $\vec{\nabla}$ uzaysal gradyan operatörünü gösterir. (5.13) denklemine göre ψ sadece bir koordinata bağlı olabilir. İki durum fiziksel olarak ilginçtir.

1.Durum: $\psi = \psi(t)$ burada t zaman koordinatıdır. Bu durumda (5.14) denklemi

$$\ddot{\psi} + \dot{\psi}^2 + (M/\kappa) e^{2\psi} = 0$$

biçimine gelir. Çözüm için

$$\psi(t) = \ln y(t)$$

dönüşümünden faydalanırsak denklemimiz

$$\ddot{y} + \left(M/\kappa \right) y^3 = 0$$

denklemine dönüşür. Bu denklemi çözdüğümüzde $t = \int \left[b - \frac{M}{2\kappa} y^4 \right]^{-1/2} dy$ integralini elde ederiz ki burada b bir sabittir. Bu integralin çözümü eliptik integraller cinsinden ifade edilebilir. Kapalı bir çözüm için $b = 0$ seçerek

$$y(t) = -\frac{1}{a + (-M/2\kappa)^{1/2} t}$$

fonksiyonunu elde ediyoruz ki burada a bir sabittir. Bu durumda $T = \int e^{\psi(t)} dt = \int y(t) dt$ koordinat dönüşümü yaptığımızda

$$\frac{1}{a + (-M/2\kappa)^{1/2} t} = c e^{(-M/2\kappa)^{1/2} T}$$

eşitliğini elde ederiz. Burada c sabitini uygun seçerek genişleyen evren modeli için

$$g = -dT^2 + S^2(T)(dx^2 + dy^2 + dz^2)$$

metriğini yazabiliriz ki burada $S^2(T) = e^{2\psi[t(T)]} = e^{(-M/2\kappa)^{1/2} T}$ şeklinde ifade edilir. Bu çözüme göre kütle ve çiftlenim sabitlerinin işaretleri uygun seçilirse $\ddot{S} > 0$ olur ve bu sonuç da evrenin genişlemesinin hızlandığı anlamına gelir.

2.Durum: $\psi = \psi(r)$ burada r küresel radyal koordinattır. Bu durumda (5.14) denklemi

$$\psi'' + \frac{2}{r}\psi' + \psi'^2 - (\frac{M}{\kappa}) e^{2\psi} = 0$$

haline gelir ki burada üssü r türevidir. Çözüm için

$$\psi(r) = \ln y(r)$$

dönüşümü kullanışlı olabilir. Bu durumda $re^{\psi(r)} = \rho$ koordinat dönüşümüyle metriğimiz

$$g = -f^2(\rho) dt^2 + g^2(\rho) d\rho^2 + \rho^2 (d\vartheta^2 + \sin^2 \vartheta d\varphi^2)$$

biçimine dönüşür ki burada $f = \frac{\rho}{r}$ ve $g = \left(1 + r \frac{d\psi}{dr} \right)^{-1}$. Bu metrik küresel simetrik statik metrik olarak işlem görebilir. Fakat bu denklemin çözümünü elde etmeye muktedir olamadık.

6. SONUÇ

Bu çalışmada eğriliği ve burulması olmayan sadece nanmetrisitili bir geometride çalışıyoruz. Literatürdeki STPG çalışmalarından farklı olarak bu çalışmada konuya ayar teorisi gözüyle yaklaşılıyor. Bu yaklaşımda, metrik tensörü gravitasyon alanını temsil ederken bağlantı ayar alanını temsil eder. Buna göre metriğin kinetik ve kütle terimlerini içeren ayar invaryant bir Lagranj yazılıp varyasyonel alan denklemleri türetildi. Bu denklemlere çözüm ararken literatürdeki benzer çalışmalarda metrik ve bağlantı önkabülleri birbirinden bağımsız yapılırken bu çalışmada yalnızca metrik önkabülünün yeterli olduğu gösterildi. Bir uygulama olarak alan denklemlerine konform düz bir çözüm elde edildi. Yapılan bir koordinat dönüşümüyle özellikle genişleyen evren modeli için bir metrik yazıldı. Bu formdaki metrikle Genel Görecelilikte de mükemmel kozmoloji ilkesine uyan çözümlerde de karşılaşılır. Orada bu metriğin noksanlığı bir çeşit enerji korunum ihlalidir. Bizim teorimiz Genel Görecelilikten farklı olduğu ve literatürde çok az çalışıldığı için metriğimizin enerji korunumunu ihlal edip etmediğini bilemiyoruz.

KAYNAKLAR

[1] Dereli T and Tucker R W, (1994), *Class. Quantum Grav.* **11** 2575

[2] Dereli T and Tucker R W, (1995), *Class. Quantum Grav.* **12** L31

[3] Hehl W F, McCrea J D, Mielke E W and Ne'eman Y, (1995), *Phys. Rep.* **258** 1

[4] Dereli T and Tucker R W, (1987), *Class. Quantum Grav.* **4** 791

[5] Dereli T, Önder M and Tucker R W, (1995), *Class. Quantum Grav.* **12** L25

[6] Tucker R W and Wang C, (1995), *Class. Quantum Grav.* **12** 2587

[7] Tucker R W and Wang C, (1998), *Class. Quantum Grav.* **15** 933

[8] Dereli T and Tucker R W, (2002), *JHEP* **03** 041

[9] Capozziello S and Francaviglia M, (2008), *Gen. Rel. Grav.* **40** 357

[10] Riess A G *et al*., (1998), *Astron. J.* **116** 1009

[11] Perlmutter S *et al*., (1999), *Astron. J.* **517** 565

[12] Bernardis P de *et al*., (2000), *Nature* **404** 955

[13] Stompor R *et al*., (2001), *Ap. J.* **561** L7

[14] Adak M and Sert Ö, (2005), *Turk. J. Phys.* **29** 1

[15] Adak M, Kalay M and Sert Ö, (2006), *Int. J. Mod. Phys.D* **15** 619

[16] Adak M, (2006), *Turk. J. Phys.* **30** 379

[17] Adak M and Dereli T, (2008), *Europhys Lett.* **82** 30008

[18] Adak M, Ders Notları, (2007–2009) Pamukkale Üniversitesi,

ÖZGEÇMİŞ

Adı, Soyadı : Gülçin KÖSEOĞLU
Doğum yeri ve tarihi: DENİZLİ, 17.08.1979
Lise: Uşak Anadolu Öğretmen Lisesi (1993-1997)
Lisans: Eskişehir Osmangazi Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Fizik Bölümü (1997-2001)
Tezsiz yüksek lisans: Eskişehir Osmangazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü (2001-2003)
Tezli yüksek lisans: Pamukkale Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Fizik Anabilimdalı (2006-2009)

Yüksek Lisans Tezi: Kozmolojik Sabit Ve Karanlık Enerji Problemi
Tez Danışmanı: Doç. Dr. Muzaffer ADAK