PAMUKKALE ÜNİVERSİTESİ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

$(\bar{N}, q)$ TOPLANABİLEN VEYA SINIRLI OLAN DİZİ UZAYLARI ARASINDAKİ DÖNÜŞÜMLERİN ÖZELLİKLERİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

İnci BİRGİN

Anabilim Dalı : Matematik

Programı : Matematik

Tez Danışmanı: Prof. Dr. Mehmet Ali SARIGÖL

EYLÜL 2011

YÜKSEK LİSANS TEZ ONAY FORMU

Pamukkale Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü 091441018 nolu öğrecisi İnci BİRGİN tarafından hazırlanan "$(\bar{N}, q)$ **TOPLANABİLEN VEYA SINIRLI OLAN DİZİ UZAYLARI ARASINDAKİ DÖNÜŞÜMLERİN ÖZELLİKLERİ**" başlıklı tez tarafımızdan okunmuş, kapsamı ve niteliği açısından bir Yüksek Lisans tezi olarak kabul edilmiştir.

Jüri Başkanı :	**Prof. Dr. Nuri KOLSUZ**	
Jüri Üyesi :	**Prof. Dr. Sadulla JAFAROV**	
Jüri Üyesi : (Tez Danışmanı)	**Prof. Dr. Mehmet Ali SARIGÖL**	

Pamukkale Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun 05/10/2011 tarih ve ...27/24. sayılı kararıyla onaylanmıştır.

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü
Prof. Dr. Nuri KOLSUZ

Bu tezin tasarımı, hazırlanması, yürütülmesi, araştırmalarının yapılması ve bulgularının analizlerinde bilimsel etiğe ve akademik kurallara özenle riayet edildiğini; bu çalışmanın doğrudan birincil ürünü olmayan bulguların, verilerin ve materyallerin bilimsel etiğe uygun olarak kaynak gösterildiğini ve alıntı yapılan çalışmalara atfedildiğine beyan ederim.

İmza :

Öğrenci Adı Soyadı : İnci BIRGİN

ÖNSÖZ

Yüksek lisans öğrenimim ve tez çalışmalarım boyunca gösterdiği sabır, her türlü destek ve yardımdan dolayı çok değerli sayın hocam Prof. Dr. Mehmet Ali SARIGÖL'e en içten dileklerimle teşekkür ederim.

Ayrıca bu çalışmaların yapılması sırasında, maddi-manevi desteklerini hiç eksik etmeyen kıymetli aileme teşekkür ederim.

Eylül 2011 İnci BİRGİN

İÇİNDEKİLER

Sayfa

ÖZET vi
SUMMARY vii
1. TEMEL TANIM VE TEOREMLER 1
1.1 Temel Tanım ve Teoremler 1
1.2 Hausdorff Kompaktsızlık Ölçüsü Tanımı 7
2. $(\bar{N}, q)$ TOPLANABİLEN YA DA SINIRLI OLAN DİZİLERİN KÜMELERİ VE BU KÜMELERİN β-DUALLERİ 11
3. MATRİS DÖNÜŞÜMLERİ 20
4. KOMPAKTSIZLIK ÖLÇÜSÜ VE DÖNÜŞÜMLER 29
KAYNAKLAR 45

ÖZET

$(\bar{N}, q)$ TOPLANABİLEN VEYA SINIRLI OLAN DİZİ UZAYLARI ARASINDAKİ DÖNÜŞÜMLERİN ÖZELLİKLERİ

Dört bölümden oluşan bu tezde, $(\bar{N}, q)$ uzayları ile bazı BK uzayları arasındaki matris dönüşümleri ve kompakt operatörler incelenmiştir.

Birinci bölümde daha sonraki bölümlerde kullanacağımız bazı temel kavram ve teoremler ifade edilmiştir.

İkinci bölümde $(\bar{N}, q)_0$, $(\bar{N}, q)$ ve $(\bar{N}, q)_\infty$ uzaylarının bazı özelliklerini ifade eden ve Aljarrah ve Malkowsky (1998) ye ait olan teoremlerin ispatları verilmiştir.

Üçüncü bölümde $(\bar{N}, q)_0$, $(\bar{N}, q)$ ve $(\bar{N}, q)_\infty$ uzayları ile bilinen uzaylar arasındaki matris dönüşümleri ve Malkowsky ve Rakočević' ye ait olan teoremlerin ispatları verilmiştir.

Dördüncü bölümde çokça faydalandığımız Hausdorff kompaktsızlık ölçüsünün temel teoremleri ile bazı matris dönüşümlerinin kompakt operatör olması için gerek ve yeter şartları ifade eden teoremler detaylı olarak incelenmiştir.

Anahtar Kelimeler: BK uzayı, baz, matris dönüşümleri, kompaktsızlık ölçüsü

SUMMARY

PROPERTIES OF TRANSFORMATION BETWEEN SPACES OF SEQUENCES THAT ARE $(\bar{N}, q)$ SUMMABLE OR BOUNDED

In this thesis consisting of four chapters, some matrices transformation and compact operator between the spaces $(\bar{N}, q)$ and BK spaces are studied.

In the first chapter, some basic concepts and theorems which we will use in subsequent chapters are stated.

In the second chapter, the proofs of theorems of Aljarrah and Malkowsky (1998) stating some properties of $(\bar{N}, q)_0$, $(\bar{N}, q)$ ve $(\bar{N}, q)_\infty$ are given.

In the third chapter, the proofs of theorems of Malkowsky and Rakočević and matrix transformations between $(\bar{N}, q)_0$, $(\bar{N}, q)$ ve $(\bar{N}, q)_\infty$ spaces and the known spaces are given.

In the fourth chapter, with theorems that we make use of so much, stating the basic theorems of Hausdorff measure of noncompactness, the theorems stating if and only if some matrix transformation to be compact operator, are studied in detail.

Key Words: BK spaces, bases, matrix transformations, measure of noncompactness

1. TEMEL TANIM VE TEOREMLER

Bu bölümde daha sonraki bölümlerde kullanacağımız temel tanım ve teoremler verilmiştir.

1.1 Temel Tanım ve Teoremler

Tanım 1.1.1 (Çalışmada geçen bazı dizi örnekleri) **:**

ω : Reel veya kompleks terimli bütün dizilerin kümesi

φ : $\varphi \subset \omega$ olacak şekilde sonlu dizilerin kümesi

c_0 : $c_0 = \left\{x = (x_n) \in \omega \colon \lim_n x_n = 0\right\}$

c : $c = \left\{x = (x_n) \in \omega \colon \lim_n x_n \quad \text{mevcut}\right\}$

l_∞ : $l_\infty = \left\{x = (x_n) \in \omega \colon \sup_n |x_n| < \infty\right\}$

c_s : Reel veya kompleks terimli yakınsak serilerin kümesi, yani;

$$c_s = \left\{x = (x_n) \in \omega \colon \left(\sum_{k=0}^{n} x_k\right) \in c\right\}$$

b_s : Kısmi toplamlar dizisi sınırlı olan reel veya kompleks terimli serilerin kümesi, yani;

$$b_s = \left\{x = (x_n) \in \omega \colon \left(\sum_{k=0}^{n} x_k\right) \in l_\infty\right\}$$

l_1 : $l_1 = \left\{x = (x_n) \in \omega \colon \sum_{k=0}^{\infty} |x_k| < \infty\right\}$

l_p : $1 \leq p < \infty$ olmak üzere p. kuvvetleri mutlak yakınsak seri oluşturan dizilerin kümesi, yani;

$$l_p = \left\{ x = (x_n) \in \omega : \sum_{k=0}^{\infty} |x_k|^p < \infty ,\ 1 \le p < \infty \right\}$$

$e^{(k)} :\ e_n^{(k)} = \begin{cases} 1\,, & n = k \\ 0\,, & n \neq k \end{cases}$ ve $e^{(k)} = \left(e_n^{(k)}\right)$ dizisidir.

Tanım 1.1.2 (Vektör uzayı): L boştan farklı bir küme ve K reel veya kompleks sayıların cismini göstersin. Eğer ∀ x,y,z ∈ L ve $\alpha,\beta \in$ K olmak üzere

$$+ : \mathrm{L} \times \mathrm{L} \to \mathrm{L} \qquad \text{ve} \qquad \cdot : \mathrm{K} \times \mathrm{L} \to \mathrm{L}$$

fonksiyonları için

l_1) $x + y \in \mathrm{L}$ (kapalılık özelliği),

l_2) $x + (y + z) = (x + y) + z$ (birleşme özelliği),

l_3) $x + \theta = \theta + x$ olacak şekilde $\theta \in$ L vardır (birim eleman),

l_4) $x + (-x) = (-x) + x = \theta$ olacak şekilde $-x \in$ L vardır (ters eleman),

l_5) $x + y = y + x$ (değişme özelliği),

l_6) $\alpha \cdot x \in \mathrm{L}$ (skalerle çarpma işleminde kapalılık),

l_7) $\alpha \cdot (x + y) = \alpha \cdot x + \alpha \cdot y$

l_8) $(\alpha + \beta) \cdot x = \alpha \cdot x + \beta \cdot x$

l_9) $(\alpha\beta) \cdot x = \alpha \cdot (\beta \cdot x)$

l_{10}) $1 \in$ K birim eleman olmak üzere $1 \cdot x = x$

şartları sağlanıyorsa, L ye bir vektör uzayı veya lineer uzay denir.

Tanım 1.1.3 (Normlu uzay): X, K cismi üzerinde bir lineer uzay olsun. Eğer

$\|\cdot\| : \mathrm{X} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu için

n_1) $\forall x \in \mathrm{X},\ x \neq \theta$ için $\|x\| > 0\,,\ \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = \theta$

n_2) $\forall\, \lambda \in \mathrm{K}\,,\ \forall x \in \mathrm{X}$ için $\|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$

n_3) $\forall x, y \in \mathrm{X}$ için $\|x + y\| \le \|x\| + \|y\|$

şartları sağlanıyorsa $\|\cdot\|$ fonksiyonuna, X üzerinde bir norm ve X uzayına da normlu uzay denir.

Tanım 1.1.4 (Banach uzayı): Norma göre tam olan uzaya yani her Cauchy dizisinin yakınsak olduğu uzaya Banach uzayı denir.

Teorem 1.1.5: Eğer Y bir Banach uzayı ise B(X,Y) bir Banach uzayıdır (Kreyszig 1989).

Tanım 1.1.6 (FK uzayı): Koordinat fonksiyonelleri sürekli olan ω nın tam lineer alt metrik uzayına FK uzayı denir (Malkowsky ve Rakočević 2004).

Normlu FK uzayına BK uzayı adı verilir.

X, φ yi kapsayan bir BK uzayı olsun. Eğer $\forall x = (x_k)_{k=0}^{\infty} \in$ X dizisi için $x = \sum_{n=0}^{\infty} x_n e^{(n)}$ olacak şekilde bir tek gösterimi varsa, X' e AK özelliğe sahiptir veya kısaca AK uzayı adı verilir.

Tanım 1.1.7 (Schauder bazı): X lineer metrik uzay olsun. Eğer $\forall x \in$ X için $x = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n b_n$ olacak şekilde skalerlerin bir tek $(\lambda_n)_{n=0}^{\infty}$ dizisi bulunabiliyorsa, $(b_n)_{n=0}^{\infty}$ dizisine X lineer metrik uzayında Schauder bazı adı verilir.

B(X,Y), X normlu uzayından Y normlu uzayı içine olan bütün sınırlı lineer dönüşümlerin kümesini göstermek üzere

Tanım 1.1.8 (Sınırlı lineer operatör): X ve Y iki normlu uzay ve T: X → Y bir lineer operatör olsun. Eğer $\forall x \in$ X için

$$\|Tx\| \leq c\|x\|$$

olacak şekilde bir $c \geq 0$ reel sayısı varsa T ye sınırlı lineer operatör denir. (Burada eşitsizliğin solundaki norm Y uzayındaki, sağındaki norm ise X uzayındaki normdur.) Bu eşitsizliği sağlayan c sayılarının en büyük alt sınırına yani

$$\|T\| = \inf\{c \colon \forall x \in X \text{ için } \|T(x)\| \leq c\|x\|\}$$

sayısına T nin normu denir. Bu norm aynı zamanda

$$\|T\| = \sup_{\substack{x \in X \\ x \neq 0}} \frac{\|T(x)\|}{\|x\|}$$

eşitliği ile de verilebilir.

B(X,Y) yukarıdaki norma göre bir normlu uzaydır.

X üzerindeki bütün sınırlı lineer fonksiyonellerin oluşturduğu B(X, $\mathbb{C}$) normlu uzayına X in duali denir ve X^* ile gösterilir. Açıktır ki X^* üzerindeki norm

$$\|f\| = \sup_{\substack{x\in X \\ x\neq 0}} \frac{|f(x)|}{\|x\|} = \sup_{\substack{x\in X \\ \|x\|=1}} |f(x)|$$

dir (Kreyszing, 1980).

Tanım 1.1.9: X ve Y metrik uzay ve $f: X \to Y$ dönüşümü verilmiş olsun. Eğer her sınırlı $Q \subset X$ kümesi için $f(Q)$ kümesi lokal kompakt, yani $f(Q)$'nun kapanışı Y de kompakt ise bu takdirde f ye kompakt dönüşüm adı verilir.

Teorem 1.1.10: X ve Y normlu uzay ve L: X → Y lineer operatör olsun. Bu durumda L nin kompakt olması için gerek ve yeter şart X' deki her sınırlı (x_n) dizisi için $(L(x_n))$ dizisinin Y de yakınsak bir alt diziye sahip olmasıdır (Şuhubi 2001).

Tanım 1.1.11 (Çarpım Uzayı): X ve Y, ω nın iki alt kümesi olsun. Bu durumda

$$M(X,Y) = \{a = (a_n) \in \omega : \forall x = (x_n) \in X \text{ için } \quad ax = (a_n x_n) \in Y\}$$

kümesine X ile Y nin çarpım uzayı denir (Malkowsky, Rakočević, Žıvkovič, 2002).

Herhangi iki x ve y dizileri için $xy = (x_k y_k)_{k=0}^{\infty}$ olsun. X ve Y ω nın keyfi alt kümeleri ve z herhangi bir dizi ise bu taktirde

$$z^{-1} * X = \{x \in \omega : xz \in X\} \qquad \text{ve} \qquad M(X,Y) = \bigcap_{x\in X} x^{-1} * Y$$

biçiminde tanımlanır.

Eğer özel olarak $Y = c_s$ alınırsa

$$X^{\beta} = M(X, c_s) = \left\{a = (a_n) \in \omega : \forall x \in X \text{ için } \left(\sum_{k=0}^{n} a_k x_k\right) \in c\right\}$$

$$= \left\{a = (a_n) \in \omega : \forall x \in X \quad \text{için } \sum_{k=0}^{\infty} a_k x_k \quad \text{yakınsaktır}\right\}$$

elde edilir. Buna X in β duali adı verilir. Eğer $X \supset \varphi$ bir BK uzayı ve $a \in \omega$ ise eşitliğin sağındaki seri yakınsak olmak üzere

$$\|a\|^* = \sup\left\{\left|\sum_{k=0}^{\infty} a_k x_k\right| : x \in X \text{ ve } \|x\| = 1\right\}$$

biçiminde tanımlanır. Eğer $a \in X^\beta$ ise bu norm mevcuttur (Wilansky,1984).

$k = 0,1,\dots$ olmak üzere $u_k \neq 0$ olan bütün u dizilerinin kümesini U ile gösterelim. $u \in U$ olmak üzere $\frac{1}{u} = \left(\frac{1}{u_k}\right)_{k=0}^{\infty}$ olsun.

$\Delta^+ : \omega \to \omega$ operatörü;

$$\Delta^+ x = ((\Delta^+ x)_k)_{k=0}^{\infty} = (x_k - x_{k+1})_{k=0}^{\infty}$$

biçiminde tanımlanır.

Tanım 1.1.12: $A = (a_{nk})$ reel veya kompleks terimli bir sonsuz matris ve $x = (x_k)$ herhangi bir dizi olsun. Eğer $\forall\, n = 0,1,2,\dots$ için

$$A_n(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_{nk} x_k$$

serileri yakınsak ise $A(x) = \big(A_n(x)\big)$ dizisine x dizisinin A matrisi ile elde edilen dönüşüm dizisi denir. Ayrıca $\forall x \in X$ için $A(x)$ dönüşüm dizisi mevcut ve Y uzayına ait ise A ya X uzayından Y uzayına bir matris dönüşümü denir ve bu tür matris dönüşümlerin kümesi (X, Y) ile gösterilir.

Tanım 1.1.13: X, ω nın bir alt kümesi olmak üzere $X_A = \{x \in \omega : A(x) \in X\}$ kümesine, A matrisinin X deki toplama alanı denir. Örneğin, eğer E her $n = 0,1,\dots$ için $e_{nk} = 1 \quad (0 \leq k \leq n)$ ve $e_{nk} = 0 \ (k > n)$ şeklinde tanımlanan matris ise, o zaman $cs = c_E$ ve $bs = (l_\infty)_E$ yani yakınsak ve sınırlı serilerin kümeleri olur.

$A = (a_{nk})$ sonsuz matrisini n. satır elemanlarının dizisini A_n $(n = 0,1,2,\dots)$ ile göstereceğiz, yani

$$A_n = (a_{nk})_{k=0}^{\infty} = (a_{n0}, a_{n1}, \dots, a_{nk}, \dots)$$

alacağız. Bu durumda

$$A_n(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_{nk} x_k$$

ve

$$\|A_n\|^* = \sup\{|A_n(x)| : x \in X, \|x\| = 1\} = \sup\left\{\left|\sum_{k=0}^{\infty} a_{nk} x_k\right| : x \in X, \|x\| = 1\right\}$$

olur. Üstelik $A \in (X, Y)$ denk olarak $\forall\, n$ için $A_n \in X^{\beta}$ ve $\forall\, x \in X$ için $A(x) \in Y$ yi ifade eder.

Teorem 1.1.14: X ve Y BK uzayı olsun. Bu taktirde $(X, Y) \subset B(X, Y)$ dir, yani $\forall\, A \in (X, Y)$ için $L_A(x)$=$A(x)$ $(x \in X)$ olacak şekilde $L_A \in B(X, Y)$ vardır. Ayrıca, $A \in (X, l_\infty)$ olması için gerek ve yeter şart

$$\|A\|^* = \sup_n \|A_n\|^* = \|L_A\| < \infty \tag{1.1}$$

olmasıdır.

Eğer $\left(b^{(k)}\right)_{k=0}^{\infty}$ X'in bir bazı, Y_1 ve Y FK uzayı olmak üzere Y_1, Y'nin kapalı bir alt uzayı ise bu takdirde, $A \in (X, Y_1)$ olması için gerek ve yeter şart

$$A \in (X, Y) \text{ ve } k = 0,1, \ldots \text{ için } A\left(b^{(k)}\right) \in Y_1 \tag{1.2}$$

olmasıdır (Malkowsky, Rakočević,1998).

Teorem1.1.15: T bir üçgensel matris olsun.

a-) X ve Y, ω'nın keyfi iki alt kümesi olmak üzere $A \in (X, Y_T)$ olması için gerek ve yeter şart $B = TA \in (X, Y)$ olmasıdır.

b-) Eğer X ve Y BK uzayı ve $A \in (X, Y_T)$ ise bu takdirde

$$\|L_A\| = \|L_B\|$$

dir (Malkowsky, Rakočević, 1999).

1.2 Hausdorff Kompaktsızlık Ölçüsü Tanımı

Tanım 1.2.1 (Hausdorff Kompaktsızlık Ölçüsü): (X,d) metrik uzay ve Q X in bir alt kümesi olsun.

a-) Eğer $\forall\varepsilon > 0$ için $Q \subset \bigcup_{i=1}^{n} B(x_i, r_i)$,$r_i < \varepsilon$ $(i = 1,2, \dots, n)$ olacak şekilde bir $n = n(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ sayısı bulunabiliyorsa, Q ya X de total sınırlıdır denir ve $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ kümesine ise Q'nun ε-neti (ağı) adı verilir.

Total sınırlı her küme sınırlıdır. Fakat tersi genel olarak doğru değildir (Maddox 1970).

b-) Eğer Q sınırlı ise

$$\chi(Q) = \inf\{\varepsilon > 0 : Q, X \text{ de sonlu } \varepsilon - \text{ ağına sahiptir } \}$$

sayısına Q kümesinin Hausdorff Kompaktsızlık Ölçüsü ve χ fonksiyonuna ise Hausdorff Kompaktsızlık Ölçüsü denir.

Q'yu örten yuvarların merkezlerinin Q'ya ait olmak zorunda olmadığına dikkat edilmelidir.

Q'nun kapanışını $\bar{Q}$ ile gösterelim. Bu durumda χ fonksiyonu aşağıdaki özelliklere sahiptir.

Lemma 1.2.2: (X, d) metrik uzay ve Q, Q_1, Q_2, X'in sınırlı alt kümeleri olsun. Bu taktirde

a-) $\chi(Q)=0$ olması için gerekli yeter şart Q nun total sınırlı olmasıdır.

b-) $Q_1 \subset Q_2$ ise $\chi(Q_1) \leq \chi(Q_2)$

c-) $\chi(Q)=\chi(\bar{Q})$

d-) $\chi(Q_1 \cup Q_2) = \text{maks}\{\chi(Q_1), \chi(Q_2)\}$

e-) $\chi(Q_1 \cap Q_2) \leq \min\{\chi(Q_1), \chi(Q_2)\}$

dir (Akhmerov, Kamenskii, Potapov, Rodkina, Sadovskii, 1992, Banás, Goebl, 1980, Rakočević, 1994).

Teorem 1.2.3: X normlu uzay ve Q, Q_1, Q_2, X'in sınırlı alt kümeleri olsun. Bu taktirde

a-) $\chi(Q_1 + Q_2) \leq \chi(Q_1) + \chi(Q_2)$

b-) $\forall\lambda \in \mathbb{C}$ için $\chi(\lambda Q)=|\lambda|\chi(Q)$

dır (Akhmerov, Kamenskii, Potapov, Rodkina, Sadovskii, 1992, Banás, Goebl, 1980, Rakočević, 1994).

Tanım 1.2.4: X ve Y normlu uzay ve $A \in B(X,Y)$ olsun. Bu durumda A'nın Hausdorff kompaktsızlık ölçüsü $\|A\|_\chi$ ile gösterilir. $K = \{x \in X: \|x\| \leq 1\}$ X de birim yuvar olacak şekilde

$$\|A\|_\chi = \chi(AK)$$

biçiminde tanımlanır. Ayrıca A'nın kompakt olması için gerekli yeter şart

$$\|A\|_\chi = 0$$

olmasıdır ve $\|A\|_\chi \leq \|A\|$ dır (Akhmerov, Kamenskii, Potapov, Rodkina, Sadovskii, 1992, Banás, Goebl, 1980, Rakočević, 1994).

Teorem 1.2.5: X, $\{e_1, e_2, \dots\}$ Schauder bazına sahip Banach uzayı ve Q, X'in sınırlı bir alt kümesi ve P_n ,$\{e_1, e_2, \dots\}$ kümesinin lineer gereni üzerine bir projektör dönüşümü olsun. Bu takdirde

$$\frac{1}{a} \limsup_{n\to\infty} \left(\sup_{x\in Q} \|(I - P_n)x\| \right) \leq \chi(Q) \leq \inf_{n} \sup_{x\in Q} \|(I - P_n)x\|$$

$$\leq \limsup_{n\to\infty} \left(\sup_{x\in Q} \|(I - P_n)x\| \right)$$

dir. Burada $a = \limsup_{n\to\infty} \|I - P_n\|$ dir (Akhmerov, Kamenskii, Potapov, Rodkina, Sadovskii, 1992, Banás, Goebl, 1980).

Burada ki a sayısını hesap edebiliriz :

$X = c_0$ ise $a = 1$ olduğunu gösterelim. $r = 0,1,2, \dots$ için $P_r: c_0 \to c_0$, $P_r(x) = (x_0, x_1, \dots, x_r, 0,0, \dots)$ olmak üzere

$$\|I-P_r\| = \sup_{\substack{x\neq\theta \\ x\in c_0}} \frac{\|(I-P_r)(x)\|}{\|x\|}$$

$$= \sup_{x\neq\theta} \frac{\|(0,0,\dots,x_{r+1},x_{r+2},\dots)\|}{\|x\|} = \sup_{x\neq\theta} \frac{\sup\limits_{n\geq r+1} |x_n|}{\sup\limits_{n\geq 0}|x_n|} \leq 1 \tag{1.3}$$

olduğu açıktır. Ayrıca $\forall\, x \in c_0$ için $\|(I-P_r)(x)\| \leq \|I-P_r\|\|x\|$ olduğuna göre $x=(x_k)=(0,\dots,x_{r+1},x_{r+2},\dots)\in c_0$ alınırsa

$$\frac{\|(I-P_r)(x)\|}{\|x\|} = 1$$

ve buradan

$$\|I-P_r\| \geq 1 \tag{1.4}$$

bulunur. (1.3) ve (1.4)'den

$$\|I-P_r\| = 1 \tag{1.5}$$

dır. Böylece $a=1$ elde edilir.

$X=c$ ise $a=2$ olduğunu gösterelim. $\{e,e_1,e_2,\dots\}$, c'nin Schauder bazı olduğundan $\forall\, x=(x_k)_{k=0}^{\infty}\in c$ için

$$x = le + \sum_{k=0}^{\infty}(x_k - l)e^{(k)}$$

olacak şekilde $l\in\mathbb{C}$ ve skalerlerin (x_k) dizisi mevcuttur. Eğer $r=0,1,2,\dots$ için $P_r\colon c\to c$ dönüşümünü

$$P_r(x) = le + \sum_{k=0}^{r}(x_k-l)e^{(k)} = (l,l,\dots) + \big((x_0-l),(x_1-l),\dots,(x_r-l),0,0,\dots\big)$$

$$= (x_0,x_1,\dots,x_r,l,l,\dots)$$

biçiminde tanımlarsak bu durumunda

$$(I-P_r)(x) = (0,0,\dots,0,x_{r+1}-l,x_{r+2}-l,\dots)$$

olacağından $\forall\, x \in c$ için

$$\|(I - P_r)(x)\| = \|x - P_r(x)\| \leq \|x\| + \|P_r(x)\| \leq 2\|x\|$$

ve

$$\|(I - P_r)(x)\| \leq \|I - P_r\|\|x\| \leq 2\|x\|$$

bulunur. Buradan

$$\|I - P_r\| \leq 2 \tag{1.6}$$

olur. Öte yandan özel olarak $x = (x_k) = (l, l, \ldots, \underbrace{l, -l}_{r+1}, l, \ldots) \in c$ alınırsa

$$\|(I - P_r)(x)\| = 2\|l\| = 2\|x\|$$

ve buradan

$$2\|x\| = \|(I - P_r)(x)\| \leq \|I - P_r\|\|x\|$$

yani

$$\|I - P_r\| \geq 2 \tag{1.7}$$

bulunur. (1.6) ve (1.7)'den

$$\|I - P_r\| = 2 \tag{1.8}$$

dir. Böylece $a = 2$ elde edilir.

2. $(\bar{N}, q)$ TOPLANABİLEN YA DA SINIRLI OLAN DİZİLERİN KÜMELERİ VE BU KÜMELERİN β-DUALLERİ

Bu kısımda $(\bar{N}, q)_0, (\bar{N}, q)$ ve $(\bar{N}, q)_\infty$ uzaylarının birçok özelliğini ifade eden Aljarrah ve Malkowsky, (1998) e ait olan teoremlerin ispatlarını vereceğiz.

$(q_k)_{k=0}^{\infty}$ pozitif bir dizi ve Q ise genel terimi $Q_n = \sum_{k=0}^{n} q_k \ (n = 0,1,\dots)$ olan diziyi göstersin. Ayrıca $\bar{N}_q$ matrisini

$$\left(\bar{N}_q\right)_{n,k} = \begin{cases} \dfrac{q_k}{Q_n} & (0 \leq k \leq n) \\ 0 & (k > n) \end{cases} \qquad (n = 0,1,\dots)$$

biçiminde tanımlayalım. Bu taktirde sıfıra $(\bar{N}, q)$ toplanabilen, toplanabilen ve $(\bar{N}, q)$ sınırlı dizilerin kümelerini sırasıyla

$$(\bar{N}, q)_0 = (c_0)_{\bar{N}_q}, \ (\bar{N}, q) = (c)_{\bar{N}_q} \ \text{ ve } \ (\bar{N}, q)_\infty = (l_\infty)_{\bar{N}_q}$$

ile gösterelim. Bu taktirde bu uzaylar BK uzayıdır. Şimdi bu bağlamda Aljarrah ve Malkowsky, (1998) e ait teoremi ifade ve ispat edelim.

Teorem 2.1: $(\bar{N}, q)_0, (\bar{N}, q)$ ve $(\bar{N}, q)_\infty$ kümelerinin her biri

$$\|x\|_{\bar{N}_q} = \sup_n \left| \frac{1}{Q_n} \sum_{k=0}^{n} q_k x_k \right|$$

şeklinde tanımlanan $\|\cdot\|_{\bar{N}_q}$ normuyla BK uzayıdır.

İspat: $(\bar{N}, q)_0$ kümesinin $\|\cdot\|_{\bar{N}_q}$ normuyla BK uzayı olduğunu gösterelim.

$x^n = (x_k^n) = (x_1^n, x_2^n, \dots)$ olmak üzere (x^k) $(\bar{N}, q)_0$ da bir Cauchy dizisi olsun. Bu taktirde

$$\|x^m - x^N\| = \sup_n \left| \frac{1}{Q_n} \sum_{k=0}^{n} q_k (x_k^m - x_k^N) \right| \to 0 \qquad (m, N \to \infty)$$

ve dolayısıyla

$$\forall\, n \;\; \text{için} \qquad \left| \frac{1}{Q_n} \sum_{k=0}^{n} q_k (x_k^m - x_k^N) \right| \to 0$$

olur. Buradan

$n = 0$ için $\quad |x_0^m - x_0^N| \to 0$

$n = 1$ için $\quad \left| \frac{1}{Q_1} \left(q_0 (x_0^m - x_0^N) + q_1 (x_1^m - x_1^N) \right) \right| \to 0$

$|x_1^m - x_1^N| \to 0$

……………………………………………………………...

olduğundan $\forall\, k$ için $|x_k^m - x_k^N| \to 0$ elde edilir ki bu ise $(x_k^m) = (x_k^1, x_k^2, \dots)$ dizisinin $\mathbb{C}$ de Cauchy dizisi olduğunu gösterir. $\mathbb{C}$ tam olduğundan, $\mathbb{C}$ de ki mutlak değer normuna göre

$$\lim_m x_k^m = x_k \in \mathbb{C}$$

olacak şekilde $x = (x_k)$ vardır. Şimdi $(\bar{N}, q)_o, \|\cdot\|_{\bar{N}_q}$ normuyla bir Banach uzayı olduğunu gösterelim. Bunun için $x^n \to x$ ve $x \in (\bar{N}, q)_0$ olduğunu gösterelim. Cauchy dizisi tanımından $\forall\, \varepsilon > 0$ için $\exists\, n_0 \in \mathbb{N}$ öyle ki $\forall\, m, \forall\, N > n_0$ için

$$\|x^m - x^N\| < \varepsilon$$

yani

$$\forall\, n \;\; \text{için} \qquad \left| \frac{1}{Q_n} \sum_{k=0}^{n} q_k (x_k^m - x_k^N) \right| < \varepsilon$$

dir. Burada $N \to \infty$ için m’yi sabit tutup limite geçilirse

$$\left|\frac{1}{Q_n}\sum_{k=0}^{n} q_k(x_k^m - x_k)\right| = \|x^m - x\| \le \varepsilon \qquad (m \ge n_0)$$

olur. Bu ise

$$x^m \to x$$

demektir. Buradan $x^m - x \in (\bar{N}, q)_0$ ve

$$\|x\| \le \|x - x^m\| + \|x^m\| < \infty$$

elde edilir. Dolayısıyla $x \in (\bar{N}, q)_0$ dır. Şimdi de $P_n: (\bar{N}, q)_0 \to \mathbb{C}$ fonksiyonelinin sınırlı olduğunu gösterelim. $T_n = \frac{1}{Q_n}\sum_{k=0}^{n} q_k x_k$ olsun. Bu taktirde

$$Q_n T_n - Q_{n-1} T_{n-1} = q_n x_n$$

ve

$$x_n = \frac{Q_n}{q_n} T_n - \frac{Q_{n-1}}{q_n} T_{n-1}$$

olur. $\forall\, x \in (\bar{N}, q)_0$ için

$$\|P_n(x)\| \le \frac{Q_n}{q_n}|T_n| + \frac{Q_{n-1}}{q_n}|T_{n-1}|$$

$$\le \underbrace{\left(\frac{Q_n}{q_n} + \frac{Q_{n-1}}{q_n}\right)}_{M_n} \cdot \|x\|_{\bar{N}_q}$$

olduğundan sınırlıdır. Lineer fonksiyonellerde süreklilik sınırlılığa denk olduğu için P_n fonksiyoneli aynı zamanda süreklidir. Koordinat fonksiyonelleri sürekli olan Banach uzayı BK uzayı olduğuna göre $(\bar{N}, q)_o$, $\|\cdot\|_{\bar{N}_q}$ normuyla bir BK uzayıdır.

$(\bar{N}, q)$ ve $(\bar{N}, q)_\infty$ kümeleri de benzer şekilde gösterilir.

Ayrıca ,eğer $Q_n \to \infty$ $(n \to \infty)$ ise bu durumda $(\bar{N}, q)_0$ AK özelliğe sahiptir ve üstelik $\forall\, x = (x_k)_{k=0}^{\infty} \in (\bar{N}, q)$ dizisi $l \in \mathbb{C}$ ve $x - le \in (\bar{N}, q)_0$ olmak üzere

$$x = le + \sum_{k=0}^{\infty} (x_k - l)e^{(k)}$$

biçiminde bir tek gösterime sahiptir.

Teorem 2.2:

$$\mathcal{N}_0 = \left(\frac{1}{q}\right)^{-1} * \left((Q^{-1} * l_1)_{\Delta^+} \cap (Q^{-1} * l_\infty)\right)$$

$$= \left\{a \in \omega: \sum_{k=0}^{\infty} Q_k \left|\frac{a_k}{q_k} - \frac{a_{k+1}}{q_{k+1}}\right| < \infty \text{ ve } \frac{Qa}{q} \in l_\infty\right\}$$

$$\mathcal{N} = \left(\frac{1}{q}\right)^{-1} * \left((Q^{-1} * l_1)_{\Delta^+} \cap (Q^{-1} * c)\right)$$

ve

$$\mathcal{N}_\infty = \left(\frac{1}{q}\right)^{-1} * \left((Q^{-1} * l_1)_{\Delta^+} \cap (Q^{-1} * c_0)\right)$$

olsun. Bu taktirde

$$(\bar{N}, q)_0^\beta = \mathcal{N}_0 \;,\; (\bar{N}, q)^\beta = \mathcal{N} \quad \text{ve} \quad (\bar{N}, q)_\infty^\beta = \mathcal{N}_\infty$$

olur.

İspat: Kısalık için

$$X_1 = \left(\frac{1}{q}\right)^{-1} * (Q^{-1} * l_1)_{\Delta^+}$$

olsun ve $\forall\, x \in \omega$ için

$$\tau_n = \tau_n(x) = \frac{1}{Q_n} \sum_{k=0}^{n} q_k x_k \qquad (n = 0,1, \dots)$$

biçiminde ifade edelim. Buradan x_k'yı çekip düzenlersek

$$x_k = \frac{1}{q_k}(Q_k\tau_k - Q_{k-1}\tau_{k-1}) \quad (k = 0,1,\dots) \tag{2.1}$$

olur. O halde (2.1)'den $\forall\, x \in \omega$ için

$$\sum_{k=0}^{n} a_k x_k = \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{q_k}\Delta(Q_k\tau_k) = \sum_{k=0}^{n-1}\left(Q_k\tau_k\Delta^+\left(\frac{a_k}{q_k}\right)\right) + \frac{a_nQ_n}{q_n}\tau_n \quad (n = 0,1,\dots) \tag{2.2}$$

dir. $a \in \mathcal{N}_0 = \left(\frac{1}{q}\right)^{-1} * \left((Q^{-1} * l_1)_{\Delta^+} \cap (Q^{-1} * l_\infty)\right)$ olsun. Bu taktirde

$$a \in X_1 = \left(\frac{1}{q}\right)^{-1} * (Q^{-1} * l_1)_{\Delta^+}$$

dir. Buradan

$$\frac{a}{q} \in (Q^{-1} * l_1)_{\Delta^+}$$

yazılabilir. Bu ise

$$\Delta^+\left(\frac{a}{q}\right) \in Q^{-1} * l_1$$

demektir. Buradan da

$$Q\Delta^+\left(\frac{a}{q}\right) \in l_1$$

elde edilir. $l_1 = c_0^\beta$ olduğundan

$$Q\Delta^+\left(\frac{a}{q}\right) \in c_0^\beta = M(c_0, c_s)$$

bulunur. Bu durumda $\forall\, \tau \in c_0$ için

$$\tau\left(Q\Delta^+\left(\frac{a}{q}\right)\right) \in c_s$$

olur. Öte yandan

$$a \in \left(\frac{Q}{q}\right)^{-1} * l_\infty$$

olur. Buradan

$$\frac{aQ}{q} \in l_\infty$$

yazılabilir. Bunun sonucunda $l_\infty = M(c_0, c_0)$ olduğundan $\forall\, \tau \in c_0$ için

$$\left(\frac{aQ}{q}\right)\tau \in c_0$$

elde edilir. $\tau = \tau(x) \in c_0$ olması denk olarak $x \in (\bar{N}, q)_0$ yi ifade ettiğine göre ve (2.2)'den $\forall\, x \in (\bar{N}, q)_0$ için $ax \in c_s$ bulunur. O halde $a \in M((\bar{N}, q)_0, c_s)$ yani $a \in (\bar{N}, q)_0^\beta$ olur. Dolayısıyla

$$\mathcal{N}_0 \subset (\bar{N}, q)_0^\beta \tag{2.3}$$

elde edilir.

Karşıt olarak $a \in (\bar{N}, q)_0^\beta$ olsun. Bu taktirde $\forall\, x \in (\bar{N}, q)_0$ için $ax \in c_s$ dir. O halde $\forall\, x \in (\bar{N}, q)_0$ için $ax \in c_0$ olur. Bu durumda $\forall\, \tau = \tau(x) \in c_0$ için

$$\left(\frac{a}{q}\right)\Delta(Q\tau) \in c_0$$

elde edilir. Öte yandan $\forall\, \tau \in c_0$ için

$$\frac{a_k}{q_k}\Delta(Q_k(-1)^k|\tau_k|) = (-1)\frac{a_k}{q_k}(Q_k|\tau_k| + Q_{k-1}|\tau_{k-1}|) \to 0$$

dır. Bu ise $\forall\, \tau \in c_0$ için

$$\left(\frac{aQ}{q}\right)\tau \in c_0$$

dır. $M(c_0, c_0) = l_\infty$ olduğundan

$$\frac{aQ}{q} \in l_\infty$$

dur. Buradan

$$\frac{a}{q} \in Q^{-1} * l_\infty$$

yani

$$a \in \left(\frac{1}{q}\right)^{-1} * (Q^{-1} * l_\infty)$$

yazılır. (2.2)'den $\forall\, \tau \in c_0$ için

$$Q\Delta^+ \left(\frac{a}{q}\right) \tau \in c_s$$

bulunur. $M(c_0, c_s) = c_0^\beta = l_1$ olduğundan

$$Q\Delta^+ \left(\frac{a}{q}\right) \in c_0^\beta = l_1$$

olur. Buradan da

$$\Delta^+ \left(\frac{a}{q}\right) \in (Q^{-1} * l_1)$$

bulunur. Öyleyse

$$\frac{a}{q} \in (Q^{-1} * l_1)_{\Delta^+}$$

dır. Bu ifade

$$a \in \left(\frac{1}{q}\right)^{-1} * (Q^{-1} * l_1)_{\Delta^+}$$

biçiminde yazılabilir. Yani $a \in X_1$ dir. Dolayısıyla $a \in \mathcal{N}_0$ olup,

$$(\overline{N}, q)_0^\beta \subset \mathcal{N}_0 \tag{2.4}$$

elde edilir. (2.3) ve (2.4)'den

$$(\overline{N}, q)_0^\beta = \mathcal{N}_0$$

olduğu görülür.

$(\bar{N},q)^{\beta} = \mathcal{N}$ ve $(\bar{N},q)^{\beta}_{\infty} = \mathcal{N}_{\infty}$ olduğu da benzer şekilde ispatlanır.

Önerme 2.3: $(\bar{N},q)^{\beta}_{0}, (\bar{N},q)^{\beta}$ ve $(\bar{N},q)^{\beta}_{\infty}$ uzaylarının her biri üzerinde

$$\|a\|^{*} = \sup_{n}\left(\sum_{k=0}^{n-1} Q_k \left|\frac{a_k}{q_k} - \frac{a_{k+1}}{q_{k+1}}\right| + \left|\frac{a_n Q_n}{q_n}\right|\right)$$

normu tanımlıdır.

İspat: Herhangi bir x dizisi

$$x^{[n]} = \sum_{k=0}^{n} x_k e^{(k)}$$

ve

$$\tau_k^{[n]} = \tau_k\left(x^{[n]}\right) = \frac{1}{Q_k}\sum_{j=0}^{k} q_j x_j^{[n]} \qquad (k,n = 0,1,\dots)$$

biçiminde tanımlansın $a \in \mathcal{N}_0$ ve n negatif olmayan bir tam sayıyı göstersin. Ayrıca $b^{[n]}$ dizisini

$$b_k^{[n]} = \begin{cases} Q_k \Delta^{+}\left(\dfrac{a}{q}\right)_k & (0 \le k \le n-1) \\ \dfrac{a_n Q_n}{q_n} & (k = n) \\ 0 & (k > n) \end{cases}$$

şeklinde tanımlayalım ve

$$\|a\|_{\mathcal{N}} = \sup_{n}\left\|b^{[n]}\right\|_1 = \sup_{n}\left(\sum_{k=0}^{\infty}\left|b_k^{[n]}\right|\right)$$

diyelim. Bu takdirde

$$\left|\sum_{k=0}^{\infty} a_k x_k^{[n]}\right| = \left|\sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{q_k}\Delta\left(Q\tau^{[n]}\right)k\right| \le \sum_{k=0}^{n-1}\left|Q_k \tau_k^{[n]}\Delta^{+}\left(\frac{a}{q}\right)_k\right| + \left|\frac{a_n Q_n}{q_n}\right|\left|\tau_n^{[n]}\right|$$

$$\leq \sup_k \left|\tau_k^{[n]}\right| \cdot \left(\sum_{k=0}^{n-1}\left|Q_k\Delta^+\left(\frac{a}{q}\right)_k\right| + \left|\frac{a_n Q_n}{q_n}\right|\right)$$

$$= \left\|x^{[n]}\right\|_{\bar{N}_q}\left\|b^{[n]}\right\|_1 \leq \|a\|_{\mathcal{N}}\left\|x^{[n]}\right\|_{\bar{N}_q}$$

yazılabilir. Burada her iki tarafının $\|x\| = 1$ şartını sağlayan X üzerinden supremumunu alırsak;

$$\|a\|^* \leq \|a\|_{\mathcal{N}} \tag{2.5}$$

elde edilir.

Karşıt olarak; n keyfi bir tamsayı olsun. $x^{(n)}$ dizisini

$$\tau_k\left(x^{(n)}\right) = \operatorname{sign}\left(b_k^{[n]}\right) \quad (k = 0,1,\dots)$$

biçiminde tanımlayalım. Bu durumda $k > n$ için $\tau_k\left(x^{(n)}\right) = 0$, yani $x^{(n)} \in (\bar{N}, q)_0$ ve $\left\|x^{(n)}\right\|_{\bar{N}_q} = \left\|\tau\left(x^{(n)}\right)\right\|_\infty = 1$ dir. Buradan

$$\left|\sum_{k=0}^{\infty} a_k x_k^{(n)}\right| = \left|\sum_{k=0}^{n} b_k^{[n]}\tau_k\left(x^{(n)}\right)\right| = \left|\sum_{k=0}^{n} b_k^{[n]} \cdot \operatorname{sign}\left(b_k^{[n]}\right)\right| = \sum_{k=0}^{n}\left|b_k^{[n]}\right| \leq \|a\|^*$$

olur. n keyfi olduğundan

$$\|a\|_{\mathcal{N}} \leq \|a\|^* \tag{2.6}$$

yazabiliriz. (2.5) ve (2.6) eşitsizliklerinden

$$\|a\|^* = \|a\|_{\mathcal{N}}$$

elde edilir ve bu ise ispatı tamamlar.

3. MATRİS DÖNÜŞÜMLERİ

Bu bölümde $(\bar{N},q)_0^{\beta}, (\bar{N},q)^{\beta}$ ve $(\bar{N},q)_{\infty}^{\beta}$ uzayları ile bilinen bazı uzaylar arasındaki matris dönüşümleri vereceğiz ve Malkowsky ve Rakočević e ait olan bazı teoremlerin ispatlarını ele alacağız.

Teorem 1.1.14 ve Önerme 2.3'den aşağıdaki sonuç verilebilir.

Sonuç 3.1: $q = (q_k)_{k=0}^{\infty}$ pozitif bir dizi ve $Q_n = \sum_{k=0}^{n} q_k \to \infty \quad (n \to \infty)$ olsun.

a-) $A \in ((\bar{N},q)_{\infty}, l_{\infty})$ olması için gerek ve yeter şart

$$M((\bar{N},q)_{\infty}, l_{\infty}) = \sup_{m,n}\left(\sum_{k=0}^{m-1} Q_k\left|\frac{a_{nk}}{q_k} - \frac{a_{n,k+1}}{q_{k+1}}\right| + \left|\frac{Q_m a_{nm}}{q_m}\right|\right) < \infty \tag{3.1}$$

ve

$$n = 0,1,\ldots \text{ için } \quad \frac{A_n Q}{q} \in c_0 \tag{3.2}$$

olmasıdır.

b-) $A \in \big((\bar{N},q), l_{\infty}\big)$ olması için gerek ve yeter şart (3.1) koşulunun sağlanması ve

$$n = 0,1,\ldots \text{ için } \quad \frac{A_n Q}{q} \in c \tag{3.3}$$

olmasıdır.

c-) $A \in ((\bar{N},q)_0, l_{\infty})$ olması için gerek ve yeter şart (3.1) koşulunun sağlanmasıdır.

d-) $A \in ((\bar{N},q)_0, c_0)$ olması için gerek ve yeter şart (3.1) koşulunun sağlanması ve

$$k = 0,1,\ldots \text{ için } \quad \lim_{n\to\infty} a_{nk} = 0 \tag{3.4}$$

olmasıdır.

e-) $A \in ((\bar{N},q)_0, c)$ olması için gerek ve yeter şart (3.1) koşulunun sağlanması ve

$$k = 0,1,\dots \text{ için} \qquad \lim_{n\to\infty} a_{nk} = l_k \tag{3.5}$$

olmasıdır.

f-) $A \in \big((\bar{N},q), c_0\big)$ olması için gerek ve yeter şart (3.1), (3.3) ve (3.4) koşullarının sağlanması ve

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{\infty} a_{nk} = 0 \tag{3.6}$$

olmasıdır.

g-) $A \in \big((\bar{N},q), c\big)$ olması için gerek ve yeter şart (3.1), (3.3) ve (3.5) koşullarının sağlanması ve

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{\infty} a_{nk} = l \tag{3.7}$$

olmasıdır.

İspat: β'da tanımlı $\|\cdot\|^*$ normu

$$\|a\|^* = \sup_n \left(\sum_{k=0}^{n-1} Q_k \left| \frac{a_k}{q_k} - \frac{a_{k+1}}{q_{k+1}} \right| + \left| \frac{a_n Q_n}{q_n} \right| \right) < \infty$$

idi. Bu durumda

$$\|A_n\|^* = \sup_n \left(\sum_{k=0}^{n-1} Q_k \left| \frac{a_{nk}}{q_k} - \frac{a_{n,k+1}}{q_{k+1}} \right| + \left| \frac{a_{nn} Q_n}{q_n} \right| \right) < \infty$$

ve buradan da

$$\sup \|A_n\|^* = \sup_{m,n} \left(\sum_{k=0}^{m-1} Q_k \left| \frac{a_{n,k}}{q_k} - \frac{a_{n,k+1}}{q_{k+1}} \right| + \left| \frac{a_{nm} Q_m}{q_m} \right| \right) < \infty$$

yazılabilir.

a-) $A \in ((\bar{N},q)_\infty, l_\infty)$ olsun. Teorem1.1.14 (1.1) den $\|A\|^* < \infty$ ve

$\sup_n \|A_n\|^* < \infty$ dur. $\|\cdot\|^*$ normunun yakınsak olmasından $A_n \in (\bar{N},q)_\infty^\beta = \mathcal{N}_\infty$ yazılır ve Teorem 2.2'den

$$\frac{A_n Q}{q} \in c_0$$

elde edilir.

Karşıt olarak $\sup_n \|A_n\|^* < \infty$ ve $\frac{A_n Q}{q} \in c_0$ olsun. Bu ise $A_n \in (\bar{N},q)_\infty^\beta$ olması demektir. $\sup_n \|A_n\|^* < \infty$ olduğuna göre $\|A\|^* < \infty$ olur ve Teorem1.1.14 (1.1)'den $A \in ((\bar{N},q)_\infty, l_\infty)$ elde edilir.

b-) $A \in \left((\bar{N},q), l_\infty\right)$ olsun. Bu taktirde Teorem1.1.14 (1.1)'den $\|A\|^* < \infty$ ve $\sup_n \|A_n\|^* < \infty$ dur. $\|\cdot\|^*$ normunun yakınsak olması nedeniyle $A_n \in (\bar{N},q)^\beta = \mathcal{N}$ yazılır ve Teorem 2.2'den

$$\frac{A_n Q}{q} \in c$$

elde edilir.

Karşıt olarak $\sup_n \|A_n\|^* < \infty$ ve $\frac{A_n Q}{q} \in c$ olsun. Bu ise $A_n \in (\bar{N},q)^\beta$ olması demektir. $\sup_n \|A_n\|^* < \infty$ olduğundan $\|A\|^* < \infty$ yazılır ve Teorem1.1.14 (1.1)'den $A \in \left((\bar{N},q), l_\infty\right)$ elde edilir.

c-) $A \in ((\bar{N},q)_0, l_\infty)$ olsun. Bu taktirde Teorem1.1.14 (1.1) den $\|A\|^* < \infty$, $\sup_n \|A_n\|^* < \infty$ elde edilir.

Karşıt olarak $\sup_n \|A_n\|^* < \infty$ olsun. Buradan $\frac{A_n Q}{q} \in l_\infty$ yazılabilir. Bu durumda Teorem 2.2'den $A_n \in (\bar{N},q)_0^\beta$ dır. Dolayısıyla Teorem1.1.14 (1.1)'den $A \in ((\bar{N},q)_0, l_\infty)$ elde edilir.

d-) $(\bar{N},q)_0$'ın bazı $e^{(k)}$ olduğundan

$$A\left(e^{(k)}\right) = \left(\sum_{l=0}^{\infty} a_{nl} e_l^{(k)}\right) = \left(a_{n0} e_0^{(k)} + a_{n1} e_1^{(k)} + \cdots + a_{nk} e_k^{(k)} + \cdots\right)$$

$$= (a_{nk})_{n=0}^{\infty}$$

olur. Öte yandan $c_0 \subset l_\infty$ olduğu açıktır. Bu taktirde Teorem1.1.14 (1.2)'ye göre $A \in ((\bar{N}, q)_0, c_0)$ olması için gerek ve yeter şart $A \in ((\bar{N}, q)_0, l_\infty)$ ve $A\left(e^{(k)}\right) \in c_0$ olmasıdır. Buradan (c) şıkkı nedeniyle (3.1) koşulu ve $A\left(e^{(k)}\right) \in c_0$ olması nedeniyle $A\left(e^{(k)}\right) = (a_{nk})_{n=0}^{\infty} \in c_0$ yani

$$k = 0,1, \ldots \quad \text{için} \qquad \lim_{n\to\infty} a_{nk} = 0$$

elde edilir.

e-) Açıktır ki $c \subset l_\infty$ dur. Bu taktirde Teorem1.1.14 (1.2) nedeniyle $A \in ((\bar{N}, q)_0, c)$ olması için gerek ve yeter şart $A \in ((\bar{N}, q)_0, l_\infty)$ ve $A\left(e^{(k)}\right) \in c$ olmasıdır. Buradan (c) şıkkı nedeniyle (3.1) koşulu ve $A\left(e^{(k)}\right) \in c$ olması nedeniyle $A\left(e^{(k)}\right) = (a_{nk})_{n=0}^{\infty} \in c$ yani

$$k = 0,1, \ldots \quad \text{için} \qquad \lim_{n\to\infty} a_{nk} = l_k$$

elde edilir.

f-) $(\bar{N}, q)$'nun bazı $\left(b^{(k)}\right) = \left(e, e^{(1)}, e^{(2)}, \ldots, e^{(k)}, \ldots\right)$ olduğundan $k = 1$ için

$$A\left(b^{(1)}\right) = A(e) = \left(\sum_{k=0}^{\infty} a_{nk} e_k\right) = \left(\sum_{k=0}^{\infty} a_{nk}\right)_{n=0}^{\infty}$$

ve $k > 1$ için (d) şıkkından

$$A\left(b^{(k)}\right) = (a_{nk})_{n=0}^{\infty}$$

dır. Bu taktirde $c_0 \subset l_\infty$ ve Teorem1.1.14 (1.2)'den $A \in \left((\bar{N}, q), c_0\right)$ olması için gerek ve yeter şart $A \in \left((\bar{N}, q), l_\infty\right)$ ve $A\left(b^{(k)}\right) \in c_0$ olmasıdır. O halde (b) şıkkından (3.1) ve (3.3) koşulları sağlanır. Öte yandan $k > 1$ için $A\left(b^{(k)}\right) \in c_0$ ise $A\left(b^{(k)}\right) = (a_{nk})_{n=0}^{\infty} \in c_0$ yani

$$k = 0,1,\dots \quad \text{için} \qquad \lim_{n\to\infty} a_{nk} = 0$$

ve $k = 1$ için

$$A\left(b^{(k)}\right) = \left(\sum_{k=0}^{\infty} a_{nk}\right)_{n=0}^{\infty} \in c_0$$

yani

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{\infty} a_{nk} = 0$$

elde edilir.

g-) $c \subset l_\infty$ ve Teorem1.1.14 (1.2)'den $A \in \left((\bar{N},q),c\right)$ olması için gerek ve yeter şart $A \in \left((\bar{N},q),l_\infty\right)$ ve $A\left(b^{(k)}\right) \in c$ olmasıdır. O halde (b) şıkkından (3.1) ve (3.3) koşulları sağlanır. Öte yandan $k > 1$ için $A\left(b^{(k)}\right) \in c$ ise $A\left(b^{(k)}\right) = (a_{nk})_{n=0}^{\infty} \in c$ yani

$$k = 0,1,\dots \quad \text{için} \qquad \lim_{n\to\infty} a_{nk} = l_k$$

ve $k = 1$ için

$$A\left(b^{(k)}\right) = \left(\sum_{k=0}^{\infty} a_{nk}\right)_{n=0}^{\infty} \in c$$

yani

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{\infty} a_{nk} = l$$

elde edilir.

Teorem 1.1.15 ve Teorem 2.1. den aşağıdaki sonuç verilebilir.

Sonuç 3.2: X BK uzayı, $(p_k)_{k=0}^{\infty}$ pozitif bir dizi ve $P_n = \sum_{k=0}^{n} p_k \quad (n = o, 1, \dots)$ olsun.

a-) $A \in (X,(\bar{N},p)_\infty)$ olması için gerek ve yeter şart

$$M(X,(\bar{N},p)_\infty) = \sup_m \left\| \frac{1}{P_m} \sum_{n=0}^{m} p_n A_n \right\|^* < \infty \qquad (3.8)$$

olmasıdır.

b-) Eğer $\left(b^{(k)}\right)_{k=0}^{\infty}$ X'in bir bazı ise bu durumda $A \in (X,(\bar{N},p)_0)$ olması için gerek ve yeter şart (3.8) koşulunun sağlanması ve $k = 0,1,\dots$ için

$$\lim_{m\to\infty} \left(\frac{1}{P_m} \sum_{n=0}^{m} p_n A_n\left(b^{(k)}\right) \right) = 0 \qquad (3.9)$$

olmasıdır.

c-) $A \in \left(X,(\bar{N},p)\right)$ olması için gerek ve yeter şart (3.8) koşulunun sağlanması ve $k = 0,1,\dots$ için

$$\lim_{m\to\infty} \left(\frac{1}{P_m} \sum_{n=0}^{m} p_n A_n\left(b^{(k)}\right) \right) = l_k \qquad (3.10)$$

olmasıdır.

İspat:

a-) Teorem 1.1.15 nedeniyle $A \in (X,(\bar{N},p)_\infty) = \left(X,(l_\infty)_{\bar{N}_p}\right)$ olması için gerek ve yeter şart $B = \bar{N}A \in (X,l_\infty)$ olmasıdır. Öte yandan

$$b_{nk} = \sum_{i=0}^{\infty} \bar{N}_{ni} a_{ik} = \frac{1}{P_n} \sum_{i=0}^{n} p_i a_{ik} = \frac{1}{P_n} \sum_{i=0}^{n} p_i A_i \in (X,l_\infty)$$

dır. Teorem1.1.14 (1.1) e göre

$$\frac{1}{P_m} \sum_{n=0}^{m} p_n A_n \in (X,l_\infty)$$

ise

$$\left\| \frac{1}{P_m} \sum_{n=0}^{m} p_n A_n \right\|^{*} < \infty$$

dir. Bu durumda

$$\sup_m \left\| \frac{1}{P_m} \sum_{n=0}^{m} p_n A_n \right\|^{*} < \infty$$

elde edilir.

b-) Açıktır ki $(\overline{N},p)_0 \subset (\overline{N},p)_\infty$ dur. Teorem1.1.14 (1.2) den $A \in (X,(\overline{N},p)_0)$ olması için gerek ve yeter şart $A \in (X,(\overline{N},p)_\infty)$ ve $A\big(b^{(k)}\big) \in (\overline{N},p)_0$ olmasıdır. Buradan (3.8) koşulu sağlanır. Öte yandan $A\big(b^{(k)}\big) \in (\overline{N},p)_0$ ise

$$\frac{1}{P_m} \sum_{n=0}^{m} p_n A_n\big(b^{(k)}\big) \to 0$$

yani $k = 0,1, \dots$ için

$$\lim_{m\to\infty} \frac{1}{P_m} \sum_{n=0}^{m} p_n A_n\big(b^{(k)}\big) = 0$$

elde edilir.

c-) Açıktır ki $(\overline{N},p) \subset (\overline{N},p)_\infty$ dur. Teorem1.1.14 (1.2) den $A \in \big(X,(\overline{N},p)\big)$ olması için gerek ve yeter şart $A \in (X,(\overline{N},p)_\infty)$ ve $A\big(b^{(k)}\big) \in (\overline{N},p)$ olmasıdır. Buradan (3.8) koşulu sağlanır. Öte yandan $A\big(b^{(k)}\big) \in (\overline{N},p)$ ise

$$\frac{1}{P_m} \sum_{n=0}^{m} p_n A_n\big(b^{(k)}\big) \to l_k$$

yani $k = 0,1, \dots$ için

$$\lim_{m\to\infty} \frac{1}{P_m} \sum_{n=0}^{m} p_n A_n\big(b^{(k)}\big) = l_k$$

elde edilir.

Uyarı 3.3:

a-) Eğer $X = l_r$ $(1 \leq r < \infty)$ ve Y; $(\bar{N}, p)_\infty, (\bar{N}, p)$ ve $(\bar{N}, p)_0$ uzaylarının herhangi biri ise bu durumda $A \in (X, Y)$ olması için (3.8)'deki $\|\cdot\|^*$ normuyla l_s üzerindeki doğal norm ve $r = 1$ için $s = \infty$, $1 < r < \infty$ için $s = \frac{r}{(r-1)}$ olacak şekilde yer değiştirerek sırasıyla Sonuç 3.2 takip edilebilir. Yani;

$$M(l_r, (\bar{N}, p)_\infty) = \begin{cases} \sup_{m,k} \left| \frac{1}{P_m} \sum_{n=0}^{m} p_n a_{nk} \right| & (r = 1) \\ \sup_m \left(\sum_{k=0}^{\infty} \left| \frac{1}{P_m} \sum_{n=0}^{m} p_n a_{nk} \right|^s \right)^{1/s} & (1 < r < \infty) \end{cases}$$

ve (3.9) ile (3.10) koşullarındaki $A_n(b^{(k)})$ terimi a_{nk} terimi ile değiştirmek yeterlidir.

b-) Aşağıdaki koşulları göz önüne alalım:

$M((\bar{N}, q)_\infty, (\bar{N}, p)_\infty)$

$$= \sup_{m,n} \left(\sum_{k=0}^{n-1} Q_k \left| \frac{1}{P_m} \sum_{l=0}^{m} p_l \left(\frac{\Delta^+ A_l}{q} \right)_k \right| + \left| \frac{Q_n}{q_n P_m} \sum_{l=0}^{m} p_l a_{ln} \right| \right) < \infty \tag{3.11}$$

$$\left(\frac{a_{nk} Q_k}{q_k} \right)_{k=0}^{\infty} \in c_0 \qquad (n = 0,1, \dots) \tag{3.12}$$

$$\left(\frac{a_{nk} Q_k}{q_k} \right)_{k=0}^{\infty} \in c \qquad (n = 0,1, \dots) \tag{3.13}$$

$$\lim_{m \to \infty} \left(\frac{1}{P_m} \sum_{n=0}^{m} p_n a_{nk} \right) = 0 \qquad (k = 0,1, \dots) \tag{3.14}$$

$$\lim_{m \to \infty} \left(\frac{1}{P_m} \sum_{n=0}^{m} p_n a_{nk} \right) = l_k \qquad (k = 0,1, \dots) \tag{3.15}$$

$$\lim_{m \to \infty} \left(\frac{1}{P_m} \sum_{n=0}^{m} p_n \left(\sum_{k=0}^{\infty} a_{nk} \right) \right) = 0 \qquad (k = 0,1, \dots) \tag{3.16}$$

$$\lim_{m\to\infty}\left(\frac{1}{P_m}\sum_{n=0}^{m} p_n\left(\sum_{k=0}^{\infty} a_{nk}\right)\right)=l_k \quad (k=0,1,\dots) \tag{3.17}$$

Bu taktirde;

$A\in((\bar{N},q)_\infty,(\bar{N},p)_\infty)$ olması için gerek ve yeter şart (3.11) ve (3.12) koşullarının sağlanmasıdır.

$A\in\left((\bar{N},q),(\bar{N},p)_\infty\right)$ olması için gerek ve yeter şart (3.11) ve (3.13) koşullarının sağlanmasıdır.

$A\in((\bar{N},q)_0,(\bar{N},p)_\infty)$ olması için gerek ve yeter şart (3.11) koşulunun sağlanmasıdır.

$A\in((\bar{N},q)_0,(\bar{N},p)_0)$ olması için gerek ve yeter şart (3.11) ve (3.14) koşullarının sağlanmasıdır.

$A\in\left((\bar{N},q)_0,(\bar{N},p)\right)$ olması için gerek ve yeter şart (3.11) ve (3.15) koşullarının sağlanmasıdır.

$A\in\left((\bar{N},q),(\bar{N},p)_0\right)$ olması için gerek ve yeter şart (3.11), (3.13),(3.14) ve (3.16) koşullarının sağlanmasıdır.

$A\in\left((\bar{N},q),(\bar{N},p)\right)$ olması için gerek ve yeter şart (3.11), (3.13), (3.15) ve (3.17) koşullarının sağlanmasıdır.

4. KOMPAKTSIZLIK ÖLÇÜSÜ VE DÖNÜŞÜMLER

Bu bölümde bazı matris dönüşümlerinin kompakt operatör olması için gerek ve yeter şartları elde etmek amacıyla Hausdorff kompaktsızlık ölçüsünün uygulamalarını inceleyeceğiz. Bu konuda Akhmerov, Kamenskii, Potapov, Rodkina, Sadovskii, (1992), Banás, Goebl, (1980), Rakočević, (1994) tarafından verilen sonuçları ele alacağız.

Teorem 4.1: A matrisi Sonuç 3.1 şartlarını sağlasın. Ayrıca $n > r$ olacak şekildeki her n ve r tamsayıları için

$$\|A\|^{(r)} = \sup_{n>r} \sup_{m} \left(\sum_{k=0}^{m-1} Q_k \left| \frac{a_{nk}}{q_k} - \frac{a_{n,k+1}}{q_{k+1}} \right| + \left| \frac{Q_m a_{nm}}{q_m} \right| \right) \tag{4.1}$$

alalım.

a-) Eğer $X = (\overline{N}, q)_0$ ya da $X = (\overline{N}, q)$ ve $A \in (X, c_0)$ ise bu taktirde

$$\|L_A\|_\chi = \lim_{r\to\infty} \|A\|^{(r)} \tag{4.2}$$

dir.

b-) Eğer $X = (\overline{N}, q)_0$ ya da $X = (\overline{N}, q)$ ve $A \in (X, c)$ ise bu taktirde

$$\frac{1}{2} \cdot \lim_{r\to\infty} \|A\|^{(r)} \leq \|L_A\|_\chi \leq \lim_{r\to\infty} \|A\|^{(r)} \tag{4.3}$$

dir.

c-) Eğer $X = (\overline{N}, q)_0$, $X = (\overline{N}, q)$ ya da $X = (\overline{N}, q)_\infty$ ve $A \in (X, l_\infty)$ ise bu taktirde

$$0 \leq \|L_A\|_\chi \leq \lim_{r\to\infty} \|A\|^{(r)} \tag{4.4}$$

dir.

İspat: Açıktır ki $\|A\|^{(r)}$ eşitliğinde r büyüdükçe supremum küçülür. $\|A\|^{(r)}$ azalan dizi ve alttan sınırlı olduğundan yakınsaktır yani limiti vardır. Bu nedenle $(4.2), (4.3), (4.4)$'deki limitler mevcuttur.

a-) $K = \{x \in X: \|x\| \leq 1\}$ olsun. Önce $r = 0,1,2, \dots$ için $P_r: c_0 \to c_0$,

$P_r(x) = (x_0, x_1, \dots, x_r, 0,0, \dots)$ olmak üzere

$$\|L_A\|_\chi = \chi(AK) = \lim_{r\to\infty}\left[\sup_{x\in K}\|(I - P_r)Ax\|\right] \tag{4.5}$$

dir. Bu ise Teorem 1.2.5, Teorem 1.1.14 ve yakınsak dizilerde $\lim\sup x_n = \lim\inf x_n = \lim x_n$ olmasından elde edilir. Şimdi

$A(r) = (\tilde{a}_{nk})$ sonsuz matrisini

$$\tilde{a}_{nk} = \begin{cases} 0, & 0 \leq n \leq r \\ a_{nk}, & n > r \end{cases}$$

biçiminde tanımlayalım. Bu durumda Sonuç 3.1'den

$$\|A\|^{(r)} = \left\|A_{(r)}\right\|_{(X,c_0)} = \sup_{\|x\|=1}\left\|A_{(r)}(x)\right\| = \sup_{x\in K}\|(I - P_r)Ax\|$$

yani

$$\|A\|^{(r)} = \sup_{x\in K}\|(I - P_r)Ax\| \tag{4.6}$$

bulunur. Böylece (4.5) ve (4.6)'dan (4.2) elde edilir.

b-) Hatırlayalım ki; $\forall\, x = (x_k)_{k=0}^\infty$ dizisinin $l \in \mathbb{C}$, $x - le \in (\overline{N}, q)_0$ olacak şekilde

$$x = le + \sum_{k=0}^\infty (x_k - l)e^{(k)}$$

biçiminde bir tek gösterimi vardır.

$$P_r(x) = le + \sum_{k=0}^r (x_k - l)e^{(k)} \qquad r = 0,1, \dots$$

olacak şekilde $P_r: c \to c$ tanımlayalım. Teorem 1.2.5'den $\|I - P_r\| = 2, r = 0,1,2, \dots$

ve (4.6)'dan (4.3) elde edilir.

c-) $P_r(x) = (x_0, x_1, \ldots, x_r, 0,0, \ldots)$, $x = (x_k) \in l_\infty$ $r = 0,1, \ldots$ olacak şekilde $P_r: l_\infty \to l_\infty$ projektör dönüşümünü tanımlayalım. Bu taktirde

$$AK \subset P_r(AK) + (I - P_r)(AK)$$

yazabiliriz. Gerçekten $y \in AK$ ise $y = A(x)$ olacak şekilde $x \in K$ vardır. Öte yandan $x \in K$ için

$$P_r Ax = (A_0(x), \ldots, A_r(x), 0, \ldots) \text{ ve } (I - P_r)Ax = (0,0, \ldots, A_{r+1}(x), \ldots)$$

olduğuna göre

$$P_r Ax + (I - P_r)Ax = A(x) = y$$

dir. Bu ise

$$y \in P_r(AK) + (I - P_r)(AK)$$

olmasıdır. χ ölçüsünün özelliklerinden ise

$$\chi(AK) \le \chi\big(P_r(AK)\big) + \chi\big((I - P_r)(AK)\big) = \chi\big((I - P_r)(AK)\big)$$
$$\le \sup_{y \in (I - P_r)AK} \|(I - P_r)y\|$$

olur. Öte yandan $y \in (I - P_r)AK \Leftrightarrow y = (I - P_r)Ax$, olacak şekilde $x \in K$ vardır. Buna göre

$$\sup_{y \in (I - P_r)AK} \|(I - P_r)y\| = \sup_{x \in K} \|(I - P_r).(I - P_r)Ax\| = \sup_{x \in K} \|(I - P_r)Ax\|$$

yazılabilir ve buradan

$$\|A\|_\chi = \chi(AK) \le \sup_{x \in K} \|(I - P_r)Ax\|$$

elde edilir. Burada $\chi\big(P_r(AK)\big) = 0$ dır. $\chi\big(P_r(AK)\big) = 0$ olması için gerek ve yeter şart $P_r(AK)$ nın total sınırlı olmasıdır. $P_r(AK)$ nın total sınırlı olduğunu gösterelim. AK sınırlı, $P_r: l_\infty \to l_\infty$ projektör dönüşümdür. İnfimum özelliğinden $\forall\, \delta > 0$ için $\varepsilon < 0 + \delta$ ve $P_r(AK) \subset \bigcup_{i=1}^{n} B(x_i, r_i)$, $r_i < \varepsilon$ olacak şekilde $\varepsilon > 0$ vardır. O halde $\forall\, \delta > 0$ için $r_i < \delta$ ve $P_r(AK) \subset \bigcup_{i=1}^{n} B(x_i, r_i)$ olacak şekilde sonlu $n \in \mathbb{N}$ bulunur ki bu da $P_r(AK)$ nın total sınırlı olması demektir. Bu taktirde Teorem 1.1.14 ve Teorem 1.2.5'ten (4.4) elde edilir.

Teoremin sonucu olarak aşağıdaki sonuç verilebilir.

Sonuç 4.2: A matrisi Teorem 4.1 in şartlarını sağlasın. Eğer $X = (\bar{N}, q)_0$ veya $X = (\bar{N}, q)$ için $A \in (X, c_0)$ ya da eğer $X = (\bar{N}, q)_0$ veya $X = (\bar{N}, q)$ için $A \in (X, c)$ ise bu taktirde L_A kompakt olması için gerek ve yeter şart

$$\lim_{r\to\infty} \|A\|^{(r)} = 0 \tag{4.7}$$

olmasıdır. Ayrıca $X = (\bar{N}, q)_0$, $X = (\bar{N}, q)$ veya $X = (\bar{N}, q)_\infty$ için $A \in (X, l_\infty)$ olsun. Eğer $\lim_{r\to\infty} \|A\|^{(r)} = 0$ ise bu durumda L_A kompakttır.

İspat: (Yeterlilik). $X = (\bar{N}, q)_0$ veya $X = (\bar{N}, q)$ için $A \in (X, c_0)$ ve $\lim_{r\to\infty} \|A\|^{(r)} = 0$ olsun. Bu durumda Teorem 4.1 nedeniyle

$$\|L_A\|_\chi = \lim_{r\to\infty} \|A\|^{(r)} = 0$$

elde edilir. Şu halde Tanım 1.2.4'den L_A kompakttır.

(Gereklilik). L_A kompakt olsun. Aynı teorem ve tanımdan $\lim_{r\to\infty} \|A\|^{(r)} = 0$ elde edilir.

Eğer $X = (\bar{N}, q)_0$, $X = (\bar{N}, q)$ veya $X = (\bar{N}, q)_\infty$ için $A \in (X, l_\infty)$ ise benzer olarak L_A nın kompakt olduğu görülür.

Dikkat edelim ki, $X = (\bar{N}, q)_0$, $X = (\bar{N}, q)$ veya $X = (\bar{N}, q)_\infty$ için $A \in (X, l_\infty)$ olduğunda L_A nın kompaktlığı için

$$\lim_{r\to\infty} \|A\|^{(r)} = 0$$

yeter şart olup gerek şart değildir. Bunu görmek için aşağıdaki örneği inceleyelim.

Örnek 4.3: $n = 0,1,...$ için $A_n = e^{(0)}$ biçiminde tanımlanan $A = (a_{nk})$ matrisini göz önüne alalım ve $n = 0,1,...$ için $q_n = 2^n$ olsun. Bu durumda

$$M((\overline{N},q)_\infty, l_\infty) = \sup_n \left[\sum_{k=0}^{n-1} Q_k \left| \frac{a_{nk}}{q_k} - \frac{a_{n,k+1}}{q_{k+1}} \right| + \left| \frac{Q_n a_{nn}}{q_n} \right| \right]$$

$$= \sup_n \left[\sum_{k=0}^{n-1} Q_k \left| \frac{e_k^{(0)}}{2^k} - \frac{e_{k+1}^{(0)}}{2^{k+1}} \right| + \left| \frac{Q_n}{q_n} \right| \right]$$

$$= \sup_n \left[Q_0 \left| \frac{1}{2^0} - \frac{0}{2^1} \right| + Q_1 \left| \frac{0}{2^1} - \frac{0}{2^2} \right| + \cdots + \left| \frac{2^0 + 2^1 + \cdots + 2^n}{2^n} \right| \right]$$

$$= \sup_n \left[1 + 0 + 0 + \cdots + 0 + \left(\frac{2.2^n - 1}{2^n} \right) \right]$$

$$= \sup_n \left[1 + \left(2 - \frac{1}{2^n} \right) \right] < 3$$

ve Sonuç 3.1'den $A \in ((\overline{N},q)_\infty, l_\infty)$ dur. Ayrıca $\forall\, r$ için

$$\|A\|^{(r)} = \sup_{n>r} \left[1 + \left(2 - \frac{1}{2^n} \right) \right] = 3 - \frac{1}{2^{r+1}}$$

olduğundan

$$\lim_{r\to\infty} \|A\|^{(r)} = 3 > 0$$

dır. Buna rağmen $\forall\, x \in (\overline{N},q)_\infty$ için

$$L_A(x) = A(x) = \left(\sum_{k=0}^{\infty} a_{nk} x_k \right) = (a_{n0} x_0) = (x_0) = x_0 e$$

dönüşümü Teorem 1.1.10'dan kompakttır.

Şimdi de Lemma ile devam edelim.

Lemma 4.4: Kabul edelim ki $q_k > 0$ $(k = 0,1,...)$ ve $Q_n = \sum_{k=0}^{n} q_k \to \infty$ $(n \to \infty)$ olsun.$\forall\, x \in \omega$ için

$$\tau_n(x) = \frac{1}{Qn}\sum_{k=0}^{n} q_k x_k$$

şeklinde ifade edelim. $r \geq 0$ ve $B^{(r,0)}: (\bar{N}, q)_0 \to (\bar{N}, q)_0$ ile $B^{(r)}: (\bar{N}, q) \to (\bar{N}, q)$ operatörleri

$$B^{(r,0)}(x) = \sum_{k=r+1}^{\infty} x_k e^{(k)} \qquad (x \in (\bar{N}, q)_0) \tag{4.8}$$

ve $l = \lim_{n\to\infty} \tau_n(x)$ olacak şekilde

$$B^{(r)}(x) = \sum_{k=r+1}^{\infty} (x_k - l)e^{(k)} \qquad \big(x \in (\bar{N}, q)\big) \tag{4.9}$$

olarak tanımlansın. Bu taktirde

$$\left\|B^{(r,0)}\right\| = 1 + \frac{Q_r}{Q_{r+1}} \tag{4.10}$$

ve

$$\left\|B^{(r)}\right\| = 2 \tag{4.11}$$

dir.

İspat: İlk olarak (4.10) eşitliğini gösterelim. $x \in (\bar{N}, q)_0$ olsun. $0 \leq n \leq r$ için

$$\tau_n\left(B^{(r,0)}(x)\right) = 0$$

ve $n \geq r + 1$ için

$$\left|\tau_n\left(B^{(r,0)}(x)\right)\right| = \left|\frac{1}{Q_n}\sum_{k=r+1}^{n} q_k x_k\right| = \left|\frac{1}{Q_n}\sum_{k=0}^{n} q_k x_k - \frac{Q_r}{Q_n}\left(\frac{1}{Q_r}\sum_{k=0}^{r} q_k x_k\right)\right|$$

$$= \left|\tau_n(x) - \frac{Q_r}{Q_n}\tau_r(x)\right| \leq \left(1 + \frac{Q_r}{Q_{r+1}}\right)\|x\|_{(\bar{N},q)_\infty}$$

olup Teorem 2.1'den

$$\left\|B^{(r,0)}(x)\right\|_{(\bar{N},q)_\infty} \leq \left(1+\frac{Q_r}{Q_{r+1}}\right)\|x\|_{(\bar{N},q)_\infty}$$

ve böylece

$$\left\|B^{(r,0)}\right\| \leq 1+\frac{Q_r}{Q_{r+1}} \tag{4.12}$$

elde edilir. x dizisini

$$x_k = \begin{cases} -1 & (0 \leq k \leq r) \\ \dfrac{Q_r + Q_{r+1}}{q_{r+1}} & (k = r+1) \\ -\dfrac{Q_r + Q_{r+1}}{q_{r+2}} & (k = r+2) \\ 0 & (k \geq r+3) \end{cases}$$

biçiminde tanımlayalım. Bu taktirde $0 \leq n \leq r$ için

$$\tau_n(x) = \frac{1}{Q_n}\sum_{k=0}^{n} q_k x_k = \frac{1}{Q_n}(q_0x_0 + q_1x_1 + \cdots + q_rx_r)$$

$$= \frac{1}{Q_n}\left(-\sum_{k=0}^{r} q_k\right) = -1\,,$$

$$\tau_{r+1}(x) = \frac{1}{Q_{r+1}}\sum_{k=0}^{r+1} q_k x_k = \frac{1}{Q_{r+1}}(q_0x_0 + q_1x_1 + \cdots + q_rx_r + q_{r+1}x_{r+1})$$

$$= \frac{1}{Q_{r+1}}\left(-Q_r + q_{r+1}\left(\frac{Q_r + Q_{r+1}}{q_{r+1}}\right)\right)$$

$$= \frac{1}{Q_{r+1}}(-Q_r + Q_r + Q_{r+1}) = 1$$

ve $n \geq r+2$ için

$$\tau_n(x) = \frac{1}{Q_n}\sum_{k=0}^{n} q_k x_k = \frac{1}{Q_n}(-Q_r + Q_r + Q_{r+1} + q_{r+2}x_{r+2} + q_{r+3}x_{r+3} + \cdots)$$

$$= \frac{1}{Q_n}\left(Q_{r+1} + q_{r+2}\left(-\frac{Q_r + Q_{r+1}}{q_{r+2}}\right) + q_{r+3}.0 + \cdots\right)$$

$$= \frac{1}{Q_n}(Q_{r+1} - Q_r - Q_{r+1} + 0 + 0 + \cdots) = -\frac{Q_r}{Q_n}$$

bulunur. $n \to \infty$ için $Q_n \to \infty$ ve Teorem 2.1'den

$$x \in (\bar{N}, q)_0 \quad \text{ve} \quad \|x\|_{(\bar{N},q)_\infty} = 1$$

dir. Ayrıca

$$\tau_{r+1}\left(B^{(r,0)}(x)\right) = \frac{1}{Q_{r+1}} \sum_{k=r+1}^{r+1} q_k x_k = \frac{1}{Q_{r+1}} q_{r+1} x_{r+1} = \frac{1}{Q_{r+1}} q_{r+1} \left(\frac{Q_r + Q_{r+1}}{q_{r+1}}\right)$$

$$= \frac{1}{Q_{r+1}}(Q_r + Q_{r+1}) = 1 + \frac{Q_r}{Q_{r+1}}$$

ve $n \neq r+1$ için

$$\tau_n\left(B^{(r,0)}(x)\right) = \frac{1}{Q_n} \sum_{k=r+1}^{n} q_k x_k = \frac{1}{Q_n}(q_{r+1}x_{r+1} + q_{r+2}x_{r+2} + q_{r+3}x_{r+3} + \cdots)$$

$$= \frac{1}{Q_n}\left(q_{r+1}\left(\frac{Q_r + Q_{r+1}}{q_{r+1}}\right) + q_{r+2}\left(-\frac{Q_r + Q_{r+1}}{q_{r+2}}\right) + q_{r+3}.0 + \cdots\right)$$

$$= \frac{1}{Q_n}(Q_r + Q_{r+1} - Q_r - Q_{r+1}) = 0$$

dır. Böylece Teorem 2.1'den

$$\left\|B^{(r,0)}(x)\right\|_{(\bar{N},q)_\infty} = 1 + \frac{Q_r}{Q_{r+1}} = \left(1 + \frac{Q_r}{Q_{r+1}}\right)\|x\|_{(\bar{N},q)_\infty}$$

ve

$$\left\|B^{(r,0)}(x)\right\|_{(\bar{N},q)_\infty} = \left\|B^{(r,0)}\right\|_{(\bar{N},q)_\infty}\|x\|_{(\bar{N},q)_\infty} \leq \left\|B^{(r,0)}\right\|$$

olur. Bu durumda

$$\left\|B^{(r,0)}\right\| \geq 1 + \frac{Q_r}{Q_{r+1}} \tag{4.13}$$

dir. (4.12) ve (4.13)’den (4.10) eşitliği elde edilir. Şimdi (4.11) eşitliğini gösterelim. $x \in (\bar{N}, q)$ olsun. $0 \le n \le r$ için

$$\tau_n\left(B^{(r)}(x)\right) = 0$$

ve $n \ge r+1$ için

$$\left|\tau_n\left(B^{(r)}(x)\right)\right| = \left|\frac{1}{Q_n}\sum_{k=r+1}^{n} q_k(x_k - l)\right| = \left|\frac{1}{Q_n}\sum_{k=r+1}^{n} q_k x_k - \frac{1}{Q_n}\sum_{k=r+1}^{n} q_k l\right|$$

$$= \left|\frac{1}{Q_n}\sum_{k=0}^{n} q_k x_k - \frac{1}{Q_n}\sum_{k=0}^{r} q_k x_k - l\left(\frac{Q_n - Q_r}{Q_n}\right)\right|$$

$$= \left|\frac{1}{Q_n}\sum_{k=0}^{n} q_k x_k - \frac{Q_r}{Q_n}\cdot\frac{1}{Q_r}\sum_{k=0}^{r} q_k x_k - l\left(1 - \frac{Q_r}{Q_n}\right)\right|$$

$$= \left|\tau_n(x) - \frac{Q_r}{Q_n}\tau_r(x) - l + \frac{Q_r}{Q_n} l\right|$$

$$\le \left|1 + \frac{Q_r}{Q_n}\right| \|x\|_{(\bar{N},q)_\infty} + \left|1 - \frac{Q_r}{Q_n}\right| |l|$$

dir. $|l| = \lim_{n\to\infty}|\tau_n(x)| \le \|x\|_{(\bar{N},q)_\infty}$ ve Teorem 2.1’den $n \ge r+1$ için

$$\left|\tau_n\left(B^{(r)}(x)\right)\right| \le \left\|B^{(r)}(x)\right\|_{(\bar{N},q)_\infty} \le 2\|x\|_{(\bar{N},q)_\infty}$$

olur. X üzerinden supremum alırsak

$$\sup_{x\neq\theta}\frac{\left\|B^{(r)}(x)\right\|_{(\bar{N},q)_\infty}}{\|x\|_{(\bar{N},q)_\infty}} \le 2$$

yani

$$\left\|B^{(r)}\right\| \le 2 \tag{4.14}$$

elde edilir. x dizisini

$$x_k = \begin{cases} -1 & (0 \leq k \leq r) \\ 2\dfrac{Q_{r+1}}{q_{r+1}} - 1 & (k = r+1) \\ -1 & (k \geq r+2) \end{cases}$$

biçiminde tanımlayalım. Bu taktirde $0 \leq n \leq r$ için

$$\tau_n(x) = \frac{1}{Q_n}\sum_{k=0}^{n} q_k x_k = \frac{1}{Q_n}(q_0x_0 + q_1x_1 + \cdots + q_rx_r)$$

$$= \frac{1}{Q_n}\left(-\sum_{k=0}^{r} q_k\right) = -1\,,$$

$$\tau_{r+1}(x) = \frac{1}{Q_{r+1}}\sum_{k=0}^{r+1} q_k x_k = \frac{1}{Q_{r+1}}(q_0x_0 + q_1x_1 + \cdots + q_rx_r + q_{r+1}x_{r+1})$$

$$= \frac{1}{Q_{r+1}}\left(-Q_r + q_{r+1}\left(\frac{2Q_{r+1} - q_{r+1}}{q_{r+1}}\right)\right)$$

$$= \frac{1}{Q_{r+1}}(-Q_r + 2Q_{r+1} - q_{r+1}) = \frac{1}{Q_{r+1}}(2Q_{r+1} - Q_{r+1})$$

$$= \frac{Q_{r+1}}{Q_{r+1}} = 1$$

ve $n \geq r+2$ için

$$\tau_n(x) = \frac{1}{Q_n}\sum_{k=0}^{n} q_k x_k = \frac{1}{Q_n}\left(-Q_r + 2Q_{r+1} - q_{r+1} + \left(-\sum_{k=r+2}^{n} q_k\right)\right)$$

$$= \frac{1}{Q_n}\left(-Q_r + 2Q_{r+1} - \sum_{k=r+1}^{n} q_k\right) = \frac{1}{Q_n}(-Q_n + 2Q_{r+1})$$

$$= -1 + 2\frac{Q_{r+1}}{Q_n} \leq 1$$

bulunur. Böylece Teorem 2.1'den

$$\|x\|_{(\bar{N},q)_\infty} = 1 \quad \text{ve} \quad l = \lim_{n\to\infty} \tau_n(x) = -1$$

yani $x \in (\bar{N}, q)$ dir. Ayrıca $0 \le n \le r$ için

$$\tau_n\left(B^{(r)}(x)\right) = 0$$

$n = r + 1$ için

$$\tau_{r+1}\left(B^{(r)}(x)\right) = \frac{1}{Q_{r+1}} \sum_{k=r+1}^{r+1} q_k(x_k - l) = \frac{1}{Q_{r+1}} q_{r+1}\left(2\frac{Q_{r+1}}{q_{r+1}} - 1 - (-1)\right)$$

$$= \frac{q_{r+1}}{Q_{r+1}}\left(2\frac{Q_{r+1}}{q_{r+1}}\right) = 2$$

ve $n \ge r + 2$ için

$$\tau_n\left(B^{(r)}(x)\right) = \frac{1}{Q_n} \sum_{k=r+1}^{n} q_k(x_k - l) = \frac{1}{Q_n}\left(2Q_{r+1} + q_{r+2}\left(-1 - (-1)\right) + \cdots\right)$$

$$= 2\frac{Q_{r+1}}{Q_n} \le 2$$

dir. Bu ise Teorem 2.1'den

$$\left\|B^{(r)}\right\| \ge 2 \tag{4.15}$$

demektir. Bu durumda (4.14) ve (4.15)'den (4.11) eşitliği elde edilir.

Kompaktsızlık ölçüsü ve Sonuç 3.2'den aşağıdaki teorem verilebilir.

Teorem 4.5: A matrisi Sonuç 3.2 şartlarını sağlasın. X BK uzayı ve $m \to \infty$ için $P_m \to \infty$ olsun. Ayrıca $m > r$ olacak şekildeki her m ve r tamsayıları için

$$\|A\|_{(\bar{N},p)_\infty}^{(r)} = \sup_{m>r} \left\| \frac{1}{P_m} \sum_{n=0}^{m} p_n A_n \right\|^* \tag{4.16}$$

alalım.

a-) Eğer X Schauder bazına sahip ve $A \in (X, (\bar{N}, p)_0)$ ise bu taktirde

$b = \lim_{n\to\infty} \sup \left(2 - \frac{p_n}{P_n}\right)$ olacak şekilde

$$\frac{1}{b} \cdot \lim_{r\to\infty} \|A\|_{(\bar{N},p)_\infty}^{(r)} \le \|L_A\|_\chi \le \lim_{r\to\infty} \|A\|_{(\bar{N},p)_\infty}^{(r)} \tag{4.17}$$

dir.

b-) Eğer X Schauder bazına sahip ve $A \in \big(X, (\bar{N}, p)\big)$ ise bu taktirde

$$\frac{1}{2} \cdot \lim_{r\to\infty} \|A\|_{(\bar{N},p)_\infty}^{(r)} \le \|L_A\|_\chi \le \lim_{r\to\infty} \|A\|_{(\bar{N},p)_\infty}^{(r)} \tag{4.18}$$

dir.

c-) Eğer $A \in (X, (\bar{N}, p)_\infty)$ ise bu taktirde

$$0 \le \|L_A\|_\chi \le \lim_{r\to\infty} \|A\|_{(\bar{N},p)_\infty}^{(r)} \tag{4.19}$$

dur.

İspat: Açıktır ki $\|A\|_{(\bar{N},p)_\infty}^{(r)}$ eşitliğinde r büyüdükçe supremum küçülür. $\|A\|_{(\bar{N},p)_\infty}^{(r)}$ azalan ve alttan sınırlı olduğundan yakınsaktır yani limiti vardır. Bu nedenle $(4.17), (4.18), (4.19)$'daki limitler mevcuttur.

a-) $K = \{x \in X : \|x\| \le 1\}$ alalım. Kabul edelim ki $A \in (X, (\bar{N}, p)_0)$ olsun. $B^{(r,0)} : (\bar{N}, p)_0 \to (\bar{N}, p)_0$ projektör dönüşümü Lemma 4.4'de ki gibi tanımlansın. Bu taktirde (4.10)'dan $\|B^{(r,o)}\| = 2 - {p_r}/{P_r}$ dir. Şimdi (4.17) eşitsizliğini gösterelim.

Teorem 1.2.5 ve 2.1'den

$$b = \lim_{n\to\infty} \sup \left(2 - \frac{p_n}{P_n}\right) = \lim_{r\to\infty} \sup \|B^{(r,0)}\|$$

olacak şekilde

$$\frac{1}{b} \lim_{r\to\infty} \sup \left(\sup_{x\in K} \|B^{(r,0)}Ax\|\right) \le \chi(AK) \le \lim_{r\to\infty} \sup \left(\sup_{x\in X} \|B^{(r,0)}Ax\|\right) \tag{4.20}$$

dir. Ayrıca Teorem 4.1'den

$$\sup_{x\in K}\left\|B^{(r,0)}Ax\right\| = \|A\|_{(\bar{N},p)_\infty}^{(r)}$$

ve yakınsak dizilerde $\limsup x_n = \liminf x_n = \lim x_n$ olmasından (4.17) eşitsizliği elde edilir.

b-) Hatırlayalım ki $(\bar{N},p)$, $e, e^{(k)}, k = 0,1,\ldots$ Schauder bazına sahiptir ve $\forall\, x = (x_k)_{k=0}^{\infty} \in (\bar{N},p)$ dizisinin $l \in \mathbb{C}$,$x - le \in (\bar{N},p)_0$ olacak şekilde

$$x = le + \sum_{k=0}^{\infty}(x_k - l)e^{(k)}$$

biçiminde bir tek gösterimi vardır. $B^{(r)}: (\bar{N},p) \to (\bar{N},p)$ projektör dönüşümünü

$$B^{(r)}(x) = \sum_{k=r+1}^{\infty}(x_k - l)e^{(k)}$$

biçiminde tanımlayalım. Bu durumda (4.11)'den $\left\|B^{(r)}\right\| = 2$ dir. Şimdi (4.18)'in ispatı da (4.17)'ye benzer olarak verilir.

c-) $P_r(x) = (x_0, x_1, \ldots, x_r, 0,0,\ldots)$, $x = (x_i) \in (\bar{N},p)_\infty$ $r = 1,2,\ldots$ olacak şekilde $P_r: (\bar{N},p)_\infty \to (\bar{N},p)_\infty$ projektör dönüşümünü tanımlayalım. Açıktır ki

$$AK \subset P_r(AK) + (I - P_r)(AK)$$

dır. χ ölçüsünün özelliklerinden

$$\chi(AK) \le \chi\big(P_r(AK)\big) + \chi\big((I - P_r)(AK)\big) = \chi\big((I - P_r)(AK)\big) \qquad (4.21)$$

$$\le \sup_{x\in K}\|(I - P_r)Ax\| = \|A\|_{(\bar{N},p)_\infty}^{(r)}$$

bulunur. Buradan (4.19) elde edilir.

Şimdi bu teoremin bir sonucunu verelim.

Sonuç 4.6: X BK uzayı olsun. A matrisi ve $\|A\|_{(\bar{N},p)}^{(r)}$ Teorem 4.5 şartlarını sağlasın. Eğer X Schauder bazına sahip ve $A \in (X, (\bar{N},p)_0)$ ya da $A \in \big(X, (\bar{N},p)\big)$ ise bu taktirde L_A kompakt olması için gerek ve yeter şart

$$\lim_{r\to\infty} \|A\|_{(\bar{N},p)}^{(r)} = 0 \tag{4.22}$$

olmasıdır. Ayrıca $A \in (X,(\bar{N},p)_\infty)$ olsun. Eğer $\lim_{r\to\infty} \|A\|_{(\bar{N},p)}^{(r)} = 0$ ise bu durumda L_A kompakttır.

İspat: (Yeterlilik). $A \in (X,(\bar{N},p)_0)$ ve $\lim_{r\to\infty} \|A\|_{(\bar{N},p)}^{(r)} = 0$ olsun. Bu durumda Teorem 4.5'den $\|L_A\|_\chi = 0$ dır. Şu halde Tanım 1.2.4'den L_A kompakttır.

(Gereklilik). L_A kompakt olsun. Aynı tanım ve teoremden $\lim_{r\to\infty} \|A\|_{(\bar{N},p)}^{(r)} = 0$ elde edilir.

Eğer $A \in (X,(\bar{N},p)_\infty)$ ise benzer olarak L_A nın kompakt olduğu görülür.

Dikkat edelim ki $A \in (X,(\bar{N},p)_\infty)$ olduğunda L_A nın kompaktlığı için

$$\lim_{r\to\infty} \|A\|_{(\bar{N},p)}^{(r)} = 0$$

yeter şart olup gerek şart değildir.

Uyarı 3.3'den aşağıdaki sonuçlar verilebilir.

Sonuç 4.7:

a-) Eğer $A \in (l^u,(\bar{N},p)_0)$ $(1 < u < \infty)$ ya da $A \in \big(l^u,(\bar{N},p)\big)$ $(1 < u < \infty)$ ise bu taktirde L_A kompakt olması için gerek ve yeter şart

$$\lim_{r\to\infty}\left[\sup_{m>r}\left(\sum_{k=0}^{\infty}\left|\frac{1}{P_m}\sum_{n=0}^{m} p_n a_{nk}\right|^{v}\right)^{1/v}\right] = 0, \quad v = \frac{u}{(u-1)} \tag{4.23}$$

olmasıdır.

b-) Eğer $A \in (l^1,(\bar{N},p)_0)$ ya da $A \in \big(l^1,(\bar{N},p)\big)$ ise bu taktirde L_A kompakt olması için gerek ve yeter şart

$$\lim_{r\to\infty}\left(\sup_{m>r,k}\left|\frac{1}{P_m}\sum_{n=0}^{m} p_n a_{nk}\right|\right) = 0 \tag{4.24}$$

olmasıdır.

c-) $A \in (l^u,(\bar{N},p)_\infty)$ $(1 < u < \infty)$ olsun. Eğer

$$\lim_{r\to\infty}\left[\sup_{m>r}\left(\sum_{k=0}^{\infty}\left|\frac{1}{P_m}\sum_{n=0}^{m}p_n a_{nk}\right|^{v}\right)^{1/v}\right]=0,\quad v=\frac{u}{(u-1)} \tag{4.25}$$

ise bu durumda L_A kompakttır.

d-) $A\in(l^1,(\overline{N},p)_\infty)$ olsun. Eğer

$$\lim_{r\to\infty}\left(\sup_{m>r,k}\left|\frac{1}{P_m}\sum_{n=0}^{m}p_n a_{nk}\right|\right)=0 \tag{4.26}$$

ise bu durumda L_A kompakttır.

İspat:

a-) (Yeterlilik). $A\in(l^u,(\overline{N},p)_0)$ $(1<u<\infty)$ olsun ve (4.23) sağlansın. Uyarı 3.3 (a) şıkkı, Sonuç 3.2 ve Teorem 4.5'den

$$\|A\|_{(\overline{N},p)_\infty}^{(r)}=\sup_{m>r}\left(\sum_{k=0}^{\infty}\left|\frac{1}{P_m}\sum_{n=0}^{m}p_n a_{nk}\right|^{v}\right)^{1/v}$$

dir. Dolayısıyla

$$\lim_{r\to\infty}\|A\|_{(\overline{N},p)_\infty}^{(r)}=0$$

olur. (4.17)'den $\|L_A\|_\chi=0$ elde edilir. Tanım 1.2.4'den L_A kompakttır.

(Gereklilik). L_A kompakt olsun. Benzer şekilde (4.23) elde edilir.

b-) Bu şıkta da (a) şıkkına benzer olarak ispatlanabilir.

c-) $A\in(l^u,(\overline{N},p)_\infty)$ $(1<u<\infty)$ olsun ve (4.25) sağlansın. Bu ise

$$\lim_{r\to\infty}\|A\|_{(\overline{N},p)_\infty}^{(r)}=0$$

demektir. (4.19)'dan $\|L_A\|_\chi=0$ elde edilir. Tanım 1.2.4'den L_A kompakttır.

d-) Bu şıkta da (c) şıkkına benzer olarak ispatlanabilir.

Sonuç 3.6, Teorem 1.1.15 ve Uyarı 3.3 (b)'den aşağıdaki sonuç verilebilir.

Sonuç 4.8: Eğer $X=(\bar{N},q)_0$ veya $X=(\bar{N},q)$ için $A\in(X,(\bar{N},p)_0)$ ya da eğer $X=(\bar{N},q)_0$ veya $X=(\bar{N},q)$ için $A\in\big(X,(\bar{N},p)\big)$ ise bu taktirde L_A kompakt olması için gerek ve yeter şart

$$\lim_{r\to\infty}\left[\sup_{m>r,n}\left(\sum_{k=0}^{n-1}Q_k\left|\frac{1}{P_m}\sum_{l=0}^{m}p_l\left(\frac{\Delta^+A_l}{q}\right)_k\right|+\left|\frac{Q_n}{q_nP_m}\sum_{l=0}^{m}p_la_{ln}\right|\right)\right]=0 \quad (4.27)$$

olmasıdır. Ayrıca $X=(\bar{N},q)_0, X=(\bar{N},q)$ veya $X=(\bar{N},q)_\infty$ için $A\in(X,(\bar{N},p)_\infty)$ olsun. Eğer

$$\lim_{r\to\infty}\left[\sup_{m>r,n}\left(\sum_{k=0}^{n-1}Q_k\left|\frac{1}{P_m}\sum_{l=0}^{m}p_l\left(\frac{\Delta^+A_l}{q}\right)_k\right|+\left|\frac{Q_n}{q_nP_m}\sum_{l=0}^{m}p_la_{ln}\right|\right)\right]=0$$

ise bu durumda L_A kompakttır.

İspat: Teorem 1.1.15, Uyarı 3.3 (b) şıkkı, Teorem 4.5 ve Sonuç 4.6'dan

$$\|A\|_{(\bar{N},p)}^{(r)}=\sup_{m>r,n}\left(\sum_{k=0}^{n-1}Q_k\left|\frac{1}{P_m}\sum_{l=0}^{m}p_l\left(\frac{\Delta^+A_l}{q}\right)_k\right|+\left|\frac{Q_n}{q_nP_m}\sum_{l=0}^{m}p_la_{ln}\right|\right)$$

dır. Bu durumda

$$\lim_{r\to\infty}\|A\|_{(\bar{N},p)}^{(r)}=0$$

olur. Böylece Sonuç 4.6'dan ispat tamamlanır.

KAYNAKLAR

Akhmerov, R. R., Kamenskii, M. I., Potapov, A. S., Rodkina, A. E., Sadovskii, B. N. (1992) *Measures of Noncompactness and Condensing Operators, Operator Theory*: Advences and Applications, **55** Birkhauser Verlag, Basel

Aljarrah, A. M., Malkowsky, E., (1998) *BK Spaces, Bases and Linear Operators*, Suppl. Rend. Circ. Mat. Palermo II, **52**: 177-191

Banás, J., Goebl, K., (1980) *Measures of Noncompactness in Banach Spaces,* Lecture Notes in Pure and Applied Mathematics **60**, Marcel Dekker, New York and Basel

Hardy, G. H., (1973) *Divergent Series*, Oxford University Press

Malkowsky, E., (1996) *Linear Operators in Certain BK Spaces*, Bolyai Soc. Math. Stud. **5**: 259-273

Malkowsky, E., Parashar, S. D., (1997) *Matrix Transformations in Spaces of Bounded and Convergent Difference Sequences of Order m.* Analysis **17**: 87-97

Malkowsky, E., Rakočević, V., (1998) *The Measure of Noncompactness of Linear Operators Between Certain Sequence Spaces,* Acta Sci. Math (Szeged), **64**: 151- 170

Malkowsky, E., Rakočević, V., (1999) *The Measure of Noncompactness of Linear Operators Between Spaces of* m^{th} *Order Difference Sequences,* Studia Sci. Math. Hungar, **35**: 381-395

Rakočević, V., (1994) *Funkcionalna Analiza*, Naučna Knjiga, Beograd

Wilansky, A., (1984) *Summability Through Functional Analysis*, North-Holland Mathematics Studies, **85**

VESİKALIK FOTO

ÖZGEÇMİŞ

Ad Soyad: İnci Birgin

Doğum Yeri ve Tarihi: Alaşehir – 05.03.1986

Adres: Cumhuriyet Mah. 331 Sok. No:1 Gündüz Sitesi A Blok Salihli/MANİSA

Lisans Üniversite: Ondokuz Mayıs Üniversitesi