PAMUKKALE ÜNİVERSİTESİ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

AĞIRLIKLI ORTAMALI DİZİ UZAYLARI ARASINDAKİ MATRİS DÖNÜŞÜMLERİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Aslı ÇAKIR

Anabilim Dalı: Matematik

Programı: Matematik

Tez Danışmanı: Prof. Dr. Mehmet Sarıgöl

EYLÜL 2011

YÜKSEK LİSANS TEZ ONAY FORMU

Pamukkale Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü 081441002 nolu öğrecisi Aslı ÇAKIR tarafından hazırlanan "**AĞIRLIKLI ORTALAMALI DİZİ UZAYLARI ARASINDAKİ MATRİS DÖNÜŞÜMLERİ**" başlıklı tez tarafımızdan okunmuş, kapsamı ve niteliği açısından bir Yüksek Lisans tezi olarak kabul edilmiştir.

Tez Danışmanı : **(Jüri Başkanı)**	**Prof. Dr. Nuri KOLSUZ (PAÜ)**	
Jüri Üyesi :	**Prof. Dr. Sadulla JAFAROV**	
Jüri Üyesi : **(Danışman)**	**Prof. Dr. Mehmet Ali SARIGÖL**	

Pamukkale Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun 19/10/2011. tarih ve 28/10...... sayılı kararıyla onaylanmıştır.

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü
Prof. Dr. Nuri KOLSUZ

Bu tezin tasarımı, hazırlanması, yürütülmesi, araştırmalarının yapılması ve bulgularının analizlerinde bilimsel etiğe ve akademik kurallara özenle riayet edildiğini; bu çalışmanın doğrudan birincil ürünü olmayan bulguların, verilerin ve materyallerin bilimsel etiğe uygun olarak kaynak gösterildiğini ve alıntı yapılan çalışmalara atfedildiğine beyan ederim.

İmza :

Öğrenci Adı Soyadı : Aslı ÇAKIR

ÖNSÖZ

Yüksek lisans öğrenimim ve tez çalışmalarım boyunca gösterdiği sabır, destek ve her türlü yardımı için çok değerli sayın hocam Prof. Dr. Mehmet Ali SARIGÖL'e en içten dileklerimle teşekkür ederim.

Eylül 2011 Aslı Çakır

İÇİNDEKİLER

ÖZET

AĞIRLIKLI ORTALAMALI DİZİ UZAYLARI ARASINDAKİ MATRİS DÖNÜŞÜMLERİ

Üç bölümden oluşan bu tezde, Z uzayları ile β dualleri ve bu uzaylar üzerindeki bazı matris dönüşümleri incelenmiştir.

Birinci bölümde sonraki bölümler dikkate alınarak bazı temel kavram ve teoremler ifade edilmiştir.

İkinci bölümde Z uzaylarının duallerinin belirlenmesinde önemli rol oynayan teoremler ifade ve ispat edilmiştir.

Üçüncü bölümde $\left(\mathbf{Z(u,v;X),Y}\right)$, $\left(\mathbf{Z(u,v;l_p),l_\infty}\right)$, $\left(\mathbf{Z(u,v;c_0),l_\infty}\right)$, $\left(\mathbf{Z(u,v;c),l_\infty}\right)$, $\left(\mathbf{Z(u,v;l_p),l_1}\right)$, $\left(\mathbf{Z(u,v;c),l_1}\right)$, $\left(\mathbf{Z(u,v;l_\infty),c_0}\right)$, $\left(\mathbf{Z(u,v;l_\infty),c}\right)$ matris dönüşümlerini karakterize eden teorem ve sonuçlar ele alınmıştır.

Anahtar Kelimeler: FK uzayı, BK uzayı, Matris dönüşümleri

SUMMARY

MATRİX TRANSFORMATİONS BETWEEN SEQUENCE SPACES OF GENERALİZED WEİGHTED MEANS

In this thesis consisting of three chapters, the spaces Z, their β duals and matrix transformations on the spaces Z are studied.

In the first chapter, by considering subsequent chapters, some basic concepts and theorems are stated.

In the second chapter, theorems which have an important role in determination of duals of the spaces Z are stated and proved.

In the third chapter, the theorems and the results which charaterize the matrix transformations $(\mathbf{Z(u,v;X),Y})$, $(\mathbf{Z(u,v;l_p),l_\infty})$, $(\mathbf{Z(u,v;c_0),l_\infty})$, $(\mathbf{Z(u,v;c),l_\infty})$, $(\mathbf{Z(u,v;l_p),l_1})$, $(\mathbf{Z(u,v;c),l_1})$, $(\mathbf{Z(u,v;l_\infty),c_0})$, $(\mathbf{Z(u,v;l_\infty),c})$ are investigated.

Key words: FK space, BK space, Matrix transformation

1. TEMEL TANIM VE TEOREMLER

Bu bölümde daha sonraki bölümlerde kullanacağımız temel tanım ve teoremler verilmiştir.

Tanım 1.1 (Çalışmada geçerli bazı sembol ve gösterimler)**:**

w : Reel veya kompleks terimli bütün dizilerin kümesi.

c_0 : $c_0 = \{x = (x_n) \in w : \lim_n x_n = 0\}$

c : $c = \{x = (x_n) \in w : \lim_n x_n \ \ mevcut\}$

l_∞ : $l_\infty = \left\{x = (x_n) \in w : \sup_n |x_n| < \infty\right\}$

c_s : Kısmi toplamlar dizisi yakınsak olan reel veya kompleks terimli dizilerin kümesi, yani

$$c_s = \left\{x = (x_n) \in w : \left(\sum_{k=0}^{n} x_k\right) \in c\right\}$$

b_s : Kısmi toplamlar dizisi sınırlı olan reel veya kompleks terimli dizilerin kümesi, yani

$$b_s = \left\{x = (x_n) \in w : \left(\sum_{k=0}^{n} x_k\right) \in l_\infty\right\}$$

bv : Reel veya kompleks terimli sınırlı salınımlı dizilerin kümesi, yani

$$bv = \left\{ x = (x_k) \in w : \sum_{k=1}^{\infty} |x_k - x_{k-1}| < \infty \right\}$$

l_p : $1 \leq p < \infty$ olmak üzere terimlerinin p. kuvveti mutlak yakınsak seri oluşturan dizilerin kümesi, yani

$$l_p = \left\{ x = (x_k) \in w : \sum_{k=0}^{\infty} |x_k|^p < \infty , 1 \leq p < \infty \right\}$$

$e^{(k)}$: $e_n^{(k)} = \begin{cases} 1 & , n = k \\ 0 & , n \neq k \end{cases}$ ve $e^{(k)} = \left(e_n^{(k)}\right)$

dizisidir.

Tanım 1.2 (Vektör Uzayı)**:**

L boştan farklı bir kümeyi, K reel veya kompleks sayıların cismini göstersin. $\forall x, y, z \in L$ ve $\alpha, \beta \in K$ olmak üzere

$$+ : L \times L \to L \qquad \text{ve} \qquad \cdot : K \times L \to L$$

fonksiyonları için,

i) $x + y \in L$ (Kapalılık)

ii) $x + (y + z) = (x + y) + z$ (Birleşme)

iii) $x + \theta = \theta + x$ olacak şekilde $\theta \in L$ vardır. (Birim Eleman)

iv) $x + (-x) = (-x) + x = \theta$ olacak şekilde $-x \in L$ vardır. (Ters Eleman)

v) $x + y = y + x$ (Değişme)

vi) $\alpha . x \in L$ (Skalerle Çarpmada Kapalılık)

vii) $\alpha .(x + y) = \alpha . x + \alpha . y$

viii) $(\alpha + \beta). x = \alpha . x + \beta . x$

ix) $(\alpha . \beta). x = \alpha .(\beta . x)$

x) $1 \in K$ birim eleman olmak üzere $1.x = x$

şartları sağlanıyorsa L'ye bir **vektör uzayı** veya **Lineer Uzay** denir.

Tanım 1.3 (Metrik Uzay)**:**

X boştan farklı bir küme olsun. Eğer,

$$d : X \times X \to IR$$

fonksiyonu

i) $d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$

ii) $d(x,y) = d(y,x)$

iii) $d(x,z) =\leq d(x,y) + d(y,z)$

şartlarını sağlıyorsa d fonksiyonuna bir metrik ve (X,d) ikilisine de metrik uzay denir.

Tanım 1.4 (Normlu Uzay)**:**

X, K cismi üzerinde bir lineer uzay olsun. Eğer, $\|\,.\,\| : X \to \mathbb{R}$ fonksiyonu için,

i) $\forall x \in X$, $x \neq \theta$ için $\|x\| > 0$, $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = \theta$

ii) $\forall \lambda \in K$, $\forall x \in X$ için $\|\lambda x\| = |\lambda| . \|x\|$

iii) $\forall x, y \in X$ için $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

şartları sağlanıyorsa $\|\,.\,\|$ fonksiyonuna X üzerinde bir norm, X uzayına da normlu uzay denir. (ii) ve (iii) şartlarını sağlayan $\|.\|$ fonksiyonuna X üzerinde bir yarınorm, X uzayına ise yarınormlu uzay denir.

Tanım 1.5 (Banach Uzayı)**:**

$(X, \|\,.\,\|)$ normlu uzay olsun. Eğer X 'de alınan her Cauchy dizisi X içindeki bir noktaya yakınsıyorsa bu taktirde $(X, \|\,.\,\|)$ uzayına tam normlu uzay veya Banach Uzayı denir.

Teorem 1.1 (Banach-Steinhause Teoremi)**:**

X bir Frechet uzayı yani tam lineer metrik uzay olsun. Eğer (f_n), X üzerinde tanımlı sürekli lineer fonksiyonellerin noktasal yakınsak bir dizisi ise bu taktirde,

$$f(x) = \lim_n f_n(x)$$

ile tanımlı $f : X \to \mathbb{C}$ fonksiyonu süreklidir (Wilansky 1964).

Tanım 1.6 (Konveks Küme)**:**

X bir lineer uzay, $E \subset X$ olsun.

$\lambda + \beta = 1, \lambda \geq 0, \beta \geq 0$ ve $\forall x, y \in E$ için $\lambda x + \beta y \in E$ ise E'ye konvekstir denir.

Tanım 1.7 (Sınırlı Lineer Operatör)**:**

X ve Y iki normlu uzay, $T : X \to Y$ bir lineer operatör olsun. Eğer $\forall x \in X$ için $\|Tx\| \leq c\|x\|$ olacak şekilde bir $c > 0$ reel sayısı varsa T'ye sınırlı, lineer operatör denir. Bu eşitsizliği sağlayan c sayılarının en büyük alt sınırına yani,

$$\|T\| = \inf\{c : \forall x \in X \; için \; \|T(x)\|\} \leq c\|x\|$$

sayısına T'nin normu denir. Bu norm aynı zamanda

$$\|T\| = \sup_{x \in X} \frac{\|Tx\|}{\|x\|}$$

eşitliği ile de verilebilir. (Kreyszig, 1989)

$B(X,Y)$: X normlu uzayından Y normlu uzayı içine olan bütün sınırlı lineer dönüşümlerin kümesidir.

Tanım 1.8 (Schauder Bazı)**:**

X lineer metrik uzay olsun. Eğer, $\forall x \in X$ için, $x = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n b_n$ olacak şekilde skalerlerin bir tek $(\lambda_n)_{n=0}^{\infty}$ dizisi bulunabiliyorsa, $(b_n)_{n=0}^{\infty}$ dizisine X lineer metrik uzayında **Schauder bazı** denir.

Tanım 1.9 (FK Uzayı)**:**

Koordinat fonksiyonelleri sürekli olan w nın tam, lineer alt metrik uzayına **FK Uzayı** denir. Burada alt lineer uzay X ise koordinat fonksiyonelleri

$$P_n : X \to C \quad (n = 0,1,\ldots)$$
$$x \to P_n(x) = x_n \quad (\forall x \in X, \forall n)$$

biçiminde tanımlanır. (Malkowsky ve Rakočević 2004)

Ayrıca normlanmış FK Uzayına da **BK Uzayı** denir.

Örneğin l_p $(1 \leq p < \infty)$ uzayı

$$\|x\|_p = \left(\sum_{k=0}^{\infty} |x_k|^p \right)^{1/p}$$

normu ile birlikte bir BK Uzayıdır.

c_0, c, l_∞ uzayları da $\|x\|_\infty = \sup_k |x_k|$ ile birlikte BK Uzayıdır. Aynı şekilde bv uzayı da $\|x\|_{bv} = \sum_{k=0}^{\infty} |x_k - x_{k-1}|$ normu ile birlikte BK Uzayıdır.

Tanım 1.10:

x ve y iki dizi, X de w nın keyfi bir alt kümesi olsun. Bu durumda

$$xy = (x_k y_k)_{k=0}^{\infty} \qquad \text{ve} \qquad y^{-1} * X = \{a \in w : ya \in X\}$$

biçiminde tanımlanır.

Tanım 1.11 (Çarpım Uzayı)**:**

X ve Y, w'nın iki alt kümesi olsun.

$$M(X,Y) = \left\{ a = (a_n) \in w : \forall x = (x_n) \text{ } için \text{ } ax = (a_n x_n) \in Y \right\}$$

kümesine X ile Y nin çarpım uzayı denir. (Malkowsky, Rakočević, Žıvković, 2002)

Bu durumda,

$$x = (x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots) \text{ , } a = (a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots)$$

olmak üzere,

$$ax = (a_1x_1, a_2x_2, ..., a_nx_n, ...) \in Y$$

şartını sağlayan a_n terimlerinden oluşan (a_n) dizisi çarpım uzayının elemanı olur.

Tanım 1.12:

Her k için $u_k \neq 0$ olmak üzere bütün u dizilerinin kümesine U diyelim. Bu durumda her $u \in U$ için,

$$\frac{1}{u} = \left(\frac{1}{u_k}\right)_{k=0}^{\infty}$$

şeklinde alacağız.

Tanım 1.13:

$A = (a_{nk})_{n,k=0}^{\infty}$ kompleks sayıların sonsuz bir matrisi ve $x = (x_k)$ kompleks terimli herhangi bir dizi olsun. Eğer her $n = 0,1,2,\ldots$ için

$$A_n(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_{nk}x_k$$

serisi yakınsak ise bu durumda $A(x) = \left(A_n(x)\right)_{n=0}^{\infty}$ dizisine $x = (x_k)$ dizisinin A matrisi ile elde edilen dönüşüm dizisi denir. Ayrıca $\forall x \in X$ için $A(x)$ dönüm dizisi mevcut ve bir Y uzayına ait ise A'ya X uzayından Y uzayına bir matris dönüşümü denir ve (X,Y) ile gösterilir. Burada X ve Y, w'nın iki alt kümesidir.

Tanım 1.14:

X, w'nın bir alt kümesi olsun.

$$X_A = \{x \in w : A(x) \in X\}$$

kümesine A matrisinin X deki **toplama alanı** denir.

$\Delta_{x_k} = x_k - x_{k-1}$ ve $\Delta^{+}{}_{x_k} = x_k - x_{k+1}$

tanımlayalım. Burada uygunluk için indislerden biri negatif olduğunda terim sıfır alınacaktır.

$$e_{nk} = \begin{cases} 1 \ , & 0 \le k \le n \\ 0 \ , & k > n \end{cases} \quad (n = 0,1,2,\ldots)$$

olmak üzere $E = (e_{nk})$ sonsuz matrisini gösterecektir.

Bilinir ki lokal konveks metriklenebilen uzay yarınormların bir $p = (p_n)$ dizisiyle tanımlanan topolojiye sahiptir öyle ki $x \to 0$ ancak ve yalnız her p_n için $p_n(x) \to 0$ dır (Wilansky, 1984).

Teorem 1.2:

(Y, q) bir FK uzayı ve A bir sonsuz matris olsun. Bu taktirde $Y_A = \{x : A(x) \in Y\}$, $\mathrm{p} \cup \mathrm{h} \cup \mathrm{qoA}$ ya göre FK uzayıdır. Burada

$$p_n(x) = |x_n|, \quad h_n(x) = \sup_m \left| \sum_{k=1}^{m} a_{nk} x_k \right| \ (k = 1,2,\ldots)$$

dır. (Wilansky 1984).

Teorem 1.3:

Eğer X, Y'nin kapalı alt uzayı ise bu taktirde $\mathrm{X_A}$, $\mathrm{Y_A}$'nın kapalı alt uzayıdır . (Wilansky 1984).

$u, v \in U$ olsun. Bu durumda,

$$Z = Z(u, v; X) = v^{-1} * (u^{-1} * X)_E = \{z \in w : x = \left(u_n \sum_{k=0}^{n} v_k z_k \right)_{n=0}^{\infty} \in X\}$$

kümesini tanımlayalım. Bu kümeyi yukarıda ifade ettiğimiz kavramlar cinsinden de verebiliriz, yani

$$\begin{aligned} a \in (u^{-1} * X)_E &\Leftrightarrow E(a) \in u^{-1} * X \\ &\Leftrightarrow E(a) u \in X \end{aligned}$$

yazabiliriz. Ayrıca

$$E(a)=\left(\sum_{k=0}^{n} e_{nk}a_k\right)=\left(\sum_{k=0}^{n} a_k\right)$$

olduğu göz önüne alınırsa,

$$E(a)u=\left(u_n\sum_{k=0}^{n} a_k\right)\in X$$

elde edilir. Şu halde,

$$z\in v^{-1}*\left(u^{-1}*X\right)_E \Leftrightarrow zv\in\left(u^{-1}*X\right)_E \Leftrightarrow E(zv)\in\left(u^{-1}*X\right)\Leftrightarrow\left(u_k\sum_{k=0}^{n} z_k v_k\right)\in X$$

olur.

$Z=Z(u,v;X)$ kümesinde u,v,X için bazı özel dizi ve uzaylar seçilerek birçok uzay elde edilebilir.

ÖRNEK 1.1 :

i) $u=v=e$, $X=C$ veya $X=l_\infty$ ise $Z=cs$ veya $Z=bs$ olur.

ii) $v=q$ pozitif bir dizi ise $u=1/Q$, $Q_n=\sum_{k=0}^{n} q_k$, $n=0,1,2,...$ ve

$X=c_0$, $X=c$ veya $X=l_\infty$ olduğunda sırasıyla $Z=(\overline{N},q)_0$, $Z=(\overline{N},q)$ ve

$Z=(\overline{N},q)_\infty$ ağırlıklı ortalamalı kümeler sıfıra yakınsak, yakınsak veya sınırlıdır.

(Jarrah ve Malkowsky, 1990)

iii) $v=e$, $u=\left(\frac{1}{n+1}\right)_{n=0}^{\infty}$ ve $X=l_p$, $(1\le p\le\infty)$

olduğunda $Z=X_p$ Cesàro dizi uzayının mutlak olmayan tipi elde edilir.

(Ng ve Lee, 1978)

Tanım 1.15 (Normal Küme)**:**

X, w nın alt kümesi olsun. Eğer $x \in X$ verildiğinde, $|y_k| \leq |x_k|$ $(k = 0,1,...)$ eşitsizliğini sağlayan $\forall y \in w$ için $y \in X$ oluyorsa, X 'e **normal küme** denir.

Şimdi ileriki bölümlerde sıkça kullanacağımız çarpım uzayının bazı temel özelliklerini veren bazı lemmaları ifade ve ispat edelim.

Lemma 1.1 :

i) $\widetilde{X} \subset X$ için $M(X,Y) \subset M(\widetilde{X},Y)$

ii) $Y \subset \widetilde{Y}$ için $M(X,Y) \subset M(X,\widetilde{Y})$

iii) $M(u^{-1} * X, Y) = (1/u)^{-1} * M(X,Y)$

İspat:

i) $\widetilde{X} \subset X$ olsun. Eğer $a \in M(X,Y)$ ise $\forall x \in X$ için $ax \in Y$ olur. Böylece, $\forall x \in \widetilde{X} \subset X$ için $a \in M(\widetilde{X},Y)$ elde edilir.

ii) $Y \subset \widetilde{Y}$ olsun. Eğer $a \in M(X,Y)$ ise $\forall x \in X$ için $ax \in Y$ olur. $Y \subset \widetilde{Y}$ olduğundan $ax \in \widetilde{Y}$ olur. Buradan da $a \in M(X,\widetilde{Y})$ olduğu sonucuna varılır. Dolayısıyla, $M(X,Y) \subset M(X,\widetilde{Y})$ elde edilir.

iii) $b = \dfrac{a}{u}$ ve $x = uz$ alalım. O zaman,

$$az = \left(\frac{a}{u}\right)(uz) = bx \text{ ve } z \in u^{-1} * X \Leftrightarrow x \in X$$

elde edilir. Böylece,

$$a \in M(u^{-1} * X, Y) \Leftrightarrow b \in M(X,Y) \Leftrightarrow \frac{a}{u} \in M(X,Y)$$

olur. Buradan da,

$$a \in \left(\frac{1}{u}\right)^{-1} * M(X,Y)$$

elde edilir.

Lemma 1.2:

i) $M(c_0,c_0)=l_\infty$

ii) $M(c,c)=c$

iii) $M(l_\infty,c_0)=c_0$

iv) $M(l_p,c_0)=l_\infty \quad (1\le p<\infty)$

İspat:

i) $M(c_0,c)=l_\infty$ ve $M(l_\infty,c)=c_0$ olduğunu biliyoruz. $c_0\subset c$ olduğundan Lemma 1.1 gereğince,

$$M(c_0,c_0)\subset M(c_0,c)=l_\infty \tag{1.1}$$

$$M(l_\infty,c_0)\subset M(l_\infty,c)=c_0$$

Eğer $a\in l_\infty$ ise, $\forall x\in c_0$ için $ax\in c_0$ elde edilir. Bu da $a\in M(l_\infty,c_0)$ olması demektir. $c_0\subset l_\infty$ olduğundan Yine Lemma 1.1(i) gereğince $M(l_\infty,c_0)\subset M(c_0,c_0)$ olur. Dolayısıyla $a\in M(c_0,c_0)$ elde edilir. Yani

$$l_\infty\subset M(c_0,c_0) \tag{1.2}$$

(1.1) ve (1.2)'den

$$M(c_0,c_0)=l_\infty$$

elde edilir.

ii) Eğer $a\in c$ ise, $\forall x\in c$ için $ax\in c$, yani $a\in M(c,c)$ olur. Böylece $c\subset M(c,c)$ olur. Tersini göstermek için aksini kabul edelim. Yani $a\in M(c,c)$ fakat $a\notin c$ olsun. Bu durumda $e\in c$ olduğundan, $ae=a\in c$ elde edilir. Bu ise $a\notin c$ ile çelişir. Buradan $M(c,c)\subset c$ elde edilir.

iii) (i)'den $M(l_\infty,c_0)\subset c_0$ olduğu görülür. Tersini gösterelim.

$a \in c_0$ ise $\forall x \in l_\infty$ için $ax \in c_0$ olur. Bu da $a \in M(l_\infty, c_0)$ olması demektir. Buradan $M(l_\infty, c_0) = c_0$ elde edilir.

iv) $M(l_p, c_0) = l_\infty$ $(1 \leq p < \infty)$ olduğunu gösterelim. (i)'den $l_p \subset c_0$ olduğundan $l_\infty = M(c_0, c_0) \subset M(l_p, c_0)$ olur. Tersini göstermek için aksini kabül edelim yani $a \in M(l_p, c_0)$ fakat $a \notin l_\infty$ olsun. Bu durumda

$$\left| a_{k_{(j)}} \right| > (j+1)^2 , \forall j = 0,1,2,...$$

olacak şekilde bir $\left(a_{k_{(j)}}\right)_{j=0}^{\infty}$ alt dizisi vardır. Şimdi x dizisini şöyle tanımlayalım

$$x_{k_{(j)}} = \frac{1}{a_{k_{(j)}}} \text{ ve } \quad k \neq k(j) \text{ , } \forall j \text{ için } \quad x_k = 0$$

olsun. Bu durumda

$$\sum |x_k|^p = \sum_{j=0}^{\infty} \left| \frac{1}{a_{k_{(j)}}} \right|^p \leq \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{(j+1)^{2p}} < \infty$$

Yani $x \in l_p$ fakat $\forall j$ için $a_{k_{(j)}} x_{k_{(j)}} = 1$ olduğundan $ax \notin c_0$ bulunur. Bu ise $a \notin M(l_p, c_0)$ demektir. Bu da hipotez ile çelişir. Şu halde $M(l_p, c_0) \subset l_\infty$ yani, $M(l_p, c_0) = l_\infty$ dır.

Tanım 1.16 :

$k > n$ için $t_{nk} = 0$ ve $t_{nn} \neq 0$ $(n = 0,1,2,\ldots)$ biçiminde tanımlanan $T = (t_{nk})$ matrisine üçgensel matris denir.

Lemma 1.3 : $u \in U, T$ üçgensel matris ve $X, Y \subset w$ olsun. Bu durumda,

a) $A \in \left(u^{-1} * X, Y\right) \Leftrightarrow B \in (X, Y)$, $\forall n, \forall k$ *için* $b_{nk} = \dfrac{a_{nk}}{u_k}$

b) $A \in (X, Y_T) \Leftrightarrow C \in (X, Y)$, $C = TA$ ve $\forall n$, $\forall k$ için $c_{nk} = \sum_{j=0}^{n} t_{nj} a_{jk}$

(Malkowsky ve Savaş 2004, Malkowsky 1996)

Lemma 1.4: X bir BK uzayı olsun. O zaman,

a) $A\in(X,l_\infty) \Leftrightarrow \|A\|_X^* = \sup\|A_n\|_X^* < \infty$

b) $A\in(X,l_1) \Leftrightarrow \sup\limits_{\substack{N\subset N_0 \\ N sonlu}} \left\|\sum\limits_{n\in N} A_n\right\|_X^* < \infty$

(Malkowsky 1987 ve Malkowsky ve Rakočević 1998)

Teorem 1.4 : $X \supset \phi$ bir FK uzayı $a\in w$ olsun. Eğer $\forall x\in X$ için $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k x_k$ serisi yakınsak ise,

$$f_a : X \to \mathbb{C} \quad , \quad x \to f_a(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x_k$$

şeklinde tanımlanan lineer fonksiyoneli süreklidir. (Malkowsky ve Rakočević, 2004)

Teorem 1.5 : (X, p) lokal konveks FK uzayı olsun.

a) $(Z,h), \forall z\in Z$ için $h(z) = p\big(uE(vz)\big)$ ile birlikte bir FK uzayıdır.

b) Eğer Y, X in kapalı alt uzayı ise $Z(u,v;Y)$ de $Z(u,v;X)$ in kapalı alt uzayıdır.

İspat:

a) $D(u)$ ve $D(v)$, $d_{nn}(u) = u_n$ ve $d_{nn}(v) = v_n$ $(n = 1,2,\ldots)$ olacak şekilde köşegen matrisleri olsun. Eğer $T = D(u).D(v)$ dersek bu taktirde matris çarpımları nedeniyle $T(z) = uE(vz)$ olur. Böylece $Z = X_T$ alırsak Teorem 1.2'den dolayı $h = poT$ ye yani $(poT)(z) = P(T(z)) = p(uE(vz))$ ye göre FK uzayı olur.

b) Teorem 1.3'ten dolayı (b) sağlanır.

2. Z UZAYLARI ve BU UZAYLARIN β DUALLERİ

Bu bölümde Z uzayları ile duallerini inceleyeceğiz. Bu bağlamda duallerin belirlenmesinde önemli rol oynayan lemmalar ile temel teoremlerin ispatları üzerine duracağız.

$M(X,Y)$ çarpım uzayında $Y = cs$ alınırsa,

$$\begin{aligned} X^{\beta} = M(X,cs) &= \left\{ a = (a_n) \in w : \forall x \in X \text{ } için \left(\sum_{k=0}^{n} a_k x_k \right) \in c \right\} \\ &= \left\{ a = (a_n) \in w : \forall x \in X \text{ } için \sum_{k=0}^{\infty} a_k x_k \text{ } yakınsar \right\} \end{aligned}$$

elde edilir. Bu kümeye X in β duali denir. Dolayısıyla X'in β duali çarpım uzayının özel bir durumudur.

Eğer X BK uzayı ve $a \in w$ ise bu taktirde supremum mevcut olmak üzere

$$\|a\|_X^* = \|a\|^* = \sup\left\{ \left| \sum_{k=0}^{\infty} a_k x_k \right| : \|x\| = 1 \right\}$$

şeklinde tanımlanır. $a \in X^{\beta}$ olması durumunda bu norm mevcuttur. (Malkowsky ve Rakočević 2004)

$A = (a_{nk})$ sonsuz matrisi verilsin. $n.$ satır elemanlarının dizisine A_n $(n = 0,1,\ldots)$ yani,

$$A_n = (a_{nk})_{k=0}^{\infty} = (a_{n0}, a_{n1}, \ldots, a_{nk}, \ldots)$$

diyelim. Bu durumda her n için,

$$A_n(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_{nk} x_k$$

yakınsak olmak üzere

$$\|A_n\|_X^* = \|A_n\|^* = \sup\{|A_n(x)| : x \in X, \|x\| = 1\} = \sup\left\{\left|\sum_{k=0}^{\infty} a_{nk} x_k\right| : x \in X, \|x\| = 1\right\}$$

olur.

Lemma 2.1 :

$X \subset w$ ve $Y = X_E$ olsun. $Y_1 = (X^{\beta})_{\Delta^+}$, $Y_2 = M(X,c)$, $Y_3 = M(X,c_0)$ diyelim. Bu taktirde,

$$Y_1 \cap Y_2 \subset Y^{\beta} \tag{2.1}$$

dır. Eğer X normal bir küme ise

$$Y^{\beta} = Y_1 \cap Y_3 \tag{2.2}$$

dır. $a \in Y^{\beta}$ ise

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k y_k = \sum_{k=0}^{\infty} (\Delta^+ a_k) E_k(y) \quad , \forall y \in Y \tag{2.3}$$

dır.

İspat: $Y = X_E$ olsun. $y = \Delta x$ diyelim. Bu durumda $x \in X \Leftrightarrow y \in Y$ dir ve üstelik

$$\sum_{k=0}^{n} a_k y_k = \sum_{k=0}^{n} a_k \Delta x_k = \sum_{k=0}^{n-1} (\Delta^+ a_k) x_k + a_n x_n \quad (n = 0,1,...) \tag{2.4}$$

eşitliği sağlanır. Şimdi

$$Y_1 \cap Y_2 \subset Y^{\beta}$$

olduğunu gösterelim. $a\in Y_1\cap Y_2$ alalım. Bu durumda $a\in Y_1=(X^{\beta})_{\Delta^+}$ olur ve dolayısıyla $\Delta^+ a\in X^{\beta}$ elde edilir. Buradan da $\forall x\in X$,$\forall y\in Y$ için $(\Delta^+ a)x=(\Delta^+ a)E(y)\in cs$ olur. Diğer taraftan $a\in Y_2=M(X,c)$ olduğundan $\forall x\in X, \forall y\in Y$ için $ax=aE(y)\in c$ olur. (2.4)'den ise $\forall y\in Y$ için $ay\in cs$ bulunur. Demek ki $a\in Y^{\beta}$ olur. Buradan ise $Y_1\cap Y_2\subset Y^{\beta}$ elde edilir.

Eğer X normal bir küme ise $Y^{\beta}=Y_1\cap Y_3$ olduğunu gösterelim.

$c_0\subset c$ olduğu göz önüne alınırsa $M(X,c_0)\subset M(X,c)$ yani $Y_3\subset Y_2$ olur. $Y_3\subset Y_2$ ve $Y_1\cap Y_2\subset Y^{\beta}$ olduğundan, $Y_1\cap Y_3\subset Y^{\beta}$ elde edilir.

Şimdi tersini gösterelim. Yani $Y^{\beta}\subset Y_1\cap Y_3$ olduğunu gösterelim. X normal bir küme, $a\in Y^{\beta}$ olsun. Bu durumda,

$$\forall y\in Y \text{ için } ay\in cs$$

olur, buradan da

$$\forall y\in Y \text{ için } ay\in c_0$$

elde edilir. $y=\Delta x$ olduğuna göre $\forall x\in X$ için, $a\Delta x\in c_0$ olur. X normal bir küme olduğundan

$$a_k\Delta\left((-1)^k x_k\right)=(-1)^k a_k\left(|x_k|+|x_{k-1}|\right)\xrightarrow{k\to\infty}0$$

ve dolayısıyla $\forall x\in X$ için $ax\in c_0$ bulunur. Şu halde $a\in Y_3$ elde edilir. Böylece (2.4) göz önüne alınırsa

$$\forall x\in X\ ,\forall y\in Y \text{ için } (\Delta^+ a)E(y)=(\Delta^+ a)x\in cs$$

elde edilir. Bu ise

$$\Delta^+ a\in Y^{\beta} \text{ yani } a\in\left(X^{\beta}\right)_{\Delta^+}=Y_1$$

demektir. Şu halde $Y^{\beta}\subset Y_1\cap Y_3$ bulunur.

Yani $Y^{\beta}=Y_1\cap Y_3$ elde edilir. Ayrıca $a\in Y^{\beta}$ olduğunda, $\forall y\in Y$ için,

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k y_k = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\Delta^+ a_k\right) E_k(y)$$

eşitliği (2.4) nedeniyle doğrudur.

Teorem 2.1 : $u,v\in U,\ X\subset w$ olsun. Bu taktirde $Z = Z(u,v;X)$ için,

$$Z^{\beta} \supset \left\{ a\in w : \frac{1}{u}\Delta^+\left(\frac{a}{v}\right)\in X^{\beta}\ ve\ \frac{a}{uv}\in M(X,c) \right\} \tag{2.5}$$

Eğer X normal bir küme ise,

$$Z^{\beta} = \left\{ a\in w : \frac{1}{u}\Delta^+\left(\frac{a}{v}\right)\in X^{\beta}\ ve\ \frac{a}{uv}\in M(X,c_0) \right\} \tag{2.6}$$

ve bu durumda $a\in Z^{\beta}$ ise $\forall z\in Z$ için

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k z_k = \sum_{k=0}^{\infty} \Delta^+\left(\frac{a_k}{v_k}\right) E_k(vz) \tag{2.7}$$

eşitliği sağlanır.

İspat: Önce kümelerin içindeki şartları inceleyelim. Lemma-1 (iii) den yararlanırsak,

$$\frac{a}{uv}\in M(X,c) \Leftrightarrow \frac{a}{v}\in\left(\left(\frac{1}{u}\right)^{-1} * M(x,c)\right)$$

$$\Leftrightarrow a\in\left\{\left(\frac{1}{v}\right)^{-1} * \left(\left(\frac{1}{u}\right)^{-1} * M(X,c)\right)\right\}$$

ve,

$$\frac{1}{u}\Delta^+\left(\frac{a}{v}\right)\in X^{\beta} \Leftrightarrow \Delta^+\left(\frac{a}{v}\right)\in\left(\left(\frac{1}{u}\right)^{-1} * X^{\beta}\right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{a}{v}\in\left(\left(\frac{1}{u}\right)^{-1} * X^{\beta}\right)_E$$

$$\Leftrightarrow a \in \left[\left(\frac{1}{v}\right)^{-1} * \left(\left(\frac{1}{u}\right)^{-1} * X^{\beta}\right)_E\right]$$

elde ederiz. Ayrıca Lemma-3’de X yerine $u^{-1} * X$ alınırsa,

$$\left[\left(u^{-1} * X_E\right)\right]^{\beta} \supset \left[\left(u^{-1} * X\right)^{\beta}\right]_{\Delta^+} \cap M\left(\left(u^{-1} * X\right), c\right) = \left[\left(u^{-1} * X\right)^{\beta}\right]_{\Delta^+} \cap \left[\left(\frac{1}{u}\right)^{-1} * M(X,c)\right]$$

yazabiliriz. Z ve Z^{β} uzaylarının tanımlarından ve Lemma 1.1 (iii)’den faydalanarak,

$$Z^{\beta} = M(Z, cs) = M\left(v^{-1} * \left(u^{-1} * X\right), cs\right)$$

$$= \left(\frac{1}{v}\right)^{-1} * M(u^{-1} * X, cs)$$

$$= \left(\frac{1}{v}\right)^{-1} * \left[\left(u^{-1} * X_E\right)\right]^{\beta}$$

yazabiliriz. Buradan da,

$$Z^{\beta} = \left(\frac{1}{v}\right)^{-1} * \left[\left(u^{-1} * X\right)_E\right]^{\beta} \supset \left[\left(\frac{1}{v}\right)^{-1} * \left(\left(\frac{1}{u}\right)^{-1} * X^{\beta}\right)_E\right] \cap \left[\left(\frac{1}{v}\right)^{-1} * \left(\left(\frac{1}{u}\right)^{-1} * M(X,c)\right)\right]$$

elde edilir. Bu da (2.5)’i ispatlar. Benzer şekilde (2.6) ispatlanır.

(2.7)’nin sağlandığını gösterelim. $x = uE(vz)$ alırsak, $z = \frac{1}{v}\Delta\left(\frac{x}{u}\right)$ elde ederiz ve $x \in X \Leftrightarrow z \in Z$ olur. Öte yandan

$$x_k = u_k \sum_{i=0}^{k} v_i z_i$$

yazılabilir. $z = \frac{1}{v}\Delta\left(\frac{x}{u}\right)$ eşitliğinden de yararlanarak,

$$\frac{x_k}{u_k} - \frac{x_{k-1}}{u_{k-1}} = v_k z_k$$

bağıntısı elde edilir. Buradan da,

$$z_k = \frac{1}{v_k}\left(\frac{x_k}{u_k} - \frac{x_{k-1}}{u_{k-1}}\right)$$

Yani $x \in X \Leftrightarrow z \in Z$ elde ederiz. Şu halde

$$\sum_{k=0}^{m} a_k z_k = \sum_{k=0}^{m} a_k \frac{1}{v_k}\left(\frac{x_k}{u_k} - \frac{x_{k-1}}{u_{k-1}}\right) = \sum_{k=0}^{m} \frac{a_k}{v_k}\frac{x_k}{u_k} - \sum_{k=0}^{m} \frac{a_k}{v_k}\frac{x_{k-1}}{u_{k-1}}$$

$$= \sum_{k=0}^{m} \frac{a_k}{v_k}\frac{x_k}{u_k} - \sum_{k=0}^{m-1} \frac{a_{k+1}}{v_{k+1}}\frac{x_k}{u_k}$$

$$= \sum_{k=0}^{m-1} \frac{x_k}{u_k}\left(\frac{a_k}{v_k} - \frac{a_{k+1}}{v_{k+1}}\right) + \frac{a_m x_m}{v_m u_m}$$

$$= \sum_{k=0}^{m-1} \frac{x_k}{u_k}\Delta^{+}\left(\frac{a_k}{v_k}\right) + \frac{a_m x_m}{u_m v_m} \quad (m = 0,1,...) \qquad (2.8)$$

yazılabilir. Buradan da (2.7)'nin doğruluğu görülür.

Sonuç 2.1: $u,v \in U$, $p = 1$ için $q = \infty$ olsun. $1 < p < \infty$ için $q = \dfrac{p}{p-1}$ ve $p = \infty$ için $q = 1$ olsun. Bu taktirde,

i) $$\left(Z(u,v;l_p)\right)^{\beta} = \left\{a \in w : \frac{1}{u}\Delta^{+}\left(\frac{a}{v}\right) \in l_q \ ve\ \frac{a}{uv} \in l_\infty\right\} \quad (p \neq \infty)$$

ii) $$\left(Z(u,v;l_\infty)\right)^{\beta} = \left\{a \in w : \frac{1}{u}\Delta^{+}\left(\frac{a}{v}\right) \in l_1 \ ve\ \frac{a}{uv} \in c_0\right\}$$

iii) $$\left(Z(u,v;c_0)\right)^{\beta} = \left\{a \in w : \frac{1}{u}\Delta^{+}\left(\frac{a}{v}\right) \in l_1 \ ve\ \frac{a}{uv} \in l_\infty\right\}$$

iv) $$\left(Z(u,v;c)\right)^{\beta} = \left\{a \in w : \frac{1}{u}\Delta^{+}\left(\frac{a}{v}\right) \in l_1 \ ve\ \frac{a}{uv} \in c\right\}$$

İspat: (i), (ii) ve (iii) nin doğruluğunu ispatlamak için Teorem 2.1 ve Lemma 1.2'den yararlanacağız. Teorem 2.1'e göre X normal bir küme, $Z(u,v;X)$ olmak üzere,

$$Z^{\beta} = \left\{a \in w : \frac{1}{u}\Delta^{+}\left(\frac{a}{v}\right) \in X^{\beta} \ ve\ \frac{a}{uv} \in M(X,c_0)\right\}$$

olduğunu biliyoruz. Öte yandan l_p, l_∞ ve c_0 normal kümeler ve $1 < p < \infty$ için $l_p^{\ \beta} = l_q$ ve $c_0^{\ \beta} = c^{\beta} = l_\infty^{\ \beta} = l_1$ dir. Lemma 1.2 den dolayı ise

$$M(l_p, c_0) = l_\infty \ , M(l_\infty, c_0) = c_0 \ , M(c_0, c_0) = l_\infty$$

olduğunu biliyoruz. Böylece Teorem 2.1 de X yerine sırasıyla l_p, l_∞ ve c_0 alınmasıyla (i), (ii) ve (iii) nin doğruluğu görülmüş olur.

(iv) nin doğruluğunu göstermek için Teorem 2.1 deki

$$Z^\beta \supset \left\{ a \in w : \frac{1}{u} \Delta^+ \left(\frac{a}{v} \right) \in X^\beta \ ve \ \frac{a}{uv} \in M(X, c) \right\} \qquad (2.5)$$

şartından yararlanırsak,

$$\left(Z(u, v; c) \right)^\beta \supset \left\{ a \in w : \frac{1}{u} \Delta^+ \left(\frac{a}{v} \right) \in l_1 \ ve \ \frac{a}{uv} \in c \right\}$$

olur. Herhangi bir X uzayının β duali $X^\beta = M(X, cs)$ şeklinde olduğuna göre Lemma 1.1 (i) $\widetilde{X} \subset X$ için $M(X, Y) \subset M(\widetilde{X}, Y)$ şartından ve $c_0 \subset c$ olmasından faydalanarak,

$$\left(Z(u, v; c) \right)^\beta \subset \left(Z(u, v; c_0) \right)^\beta \subset \left\{ a \in w : \frac{1}{u} \Delta^+ \left(\frac{a}{v} \right) \in l_1 \right\}$$

yazabiliriz. Ayrıca Teorem 2.1 deki

$$\sum_{k=0}^{m} a_k z_k = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{x_k}{u_k} \Delta^+ \left(\frac{a_k}{v_k} \right) + \frac{a_m x_m}{u_m v_m} \quad (m = 0, 1, ...) \qquad (2.8)$$

şartında $k \to \infty$ için limite geçersek elde edilen seri yakınsak olur. Burada (x_k) dizisi c yi taradığından sağ taraftaki ilk toplam da limite geçildiğinde yakınsak bir seri olur.

Yakınsak iki serinin farkı da yakınsak olduğundan

$$\frac{a}{uv} \in c$$

elde edilir. Buradan (iv) nin ispatı tamamlanır.

Sonuç 2.1 göz önüne alınarak aşağıdaki örnek verilebilir.

Örnek 2.1:

i) $bs^{\beta} = bv_0 = bv \cap c_0$

(Wilansky, 1984)

ii) $cs^{\beta} = bv, \; bv \subset c$

(Wilansky, 1984)

iii) $$(\overline{N},q)_0{}^{\beta} = \left\{ a \in w : \sum_{k=0}^{\infty} Q_k \left| \frac{a_k}{q_k} - \frac{a_{k+1}}{q_{k+1}} \right| < \infty \quad ve \quad \frac{Qa}{q} \in l_\infty \right\}$$

$$(\overline{N},q)^{\beta} = \left\{ a \in w : \sum_{k=0}^{\infty} Q_k \left| \frac{a_k}{q_k} - \frac{a_{k+1}}{q_{k+1}} \right| < \infty \quad ve \quad \frac{Qa}{q} \in c \right\}$$

$$(\overline{N},q)_\infty{}^{\beta} = \left\{ a \in w : \sum_{k=0}^{\infty} Q_k \left| \frac{a_k}{q_k} - \frac{a_{k+1}}{q_{k+1}} \right| < \infty \quad ve \quad \frac{Qa}{q} \in c_0 \right\}$$

(Jarrah, 1990)

iv) $$X_1{}^{\beta} = \left\{ a \in w : \sup_k (k+1)\left| a_k - a_{k+1} \right| < \infty \; ve \; \big((n+1)a_n\big) \in l_\infty \right\}$$

$1 < p < \infty$, $q = \dfrac{p}{p-1}$

olmak üzere,

$$X_p{}^{\beta} = \left\{ a \in w : \sum_{k=0}^{\infty} (k+1)^q \left| a_k - a_{k+1} \right|^q < \infty \; ve \; \big((n+1)a_n\big) \in l_\infty \right\}$$

(Ng ve Lee, 1978)

$$X_\infty{}^{\beta} = \left\{ a \in w : \sum_{k=0}^{\infty} (k+1)\left| a_k - a_{k+1} \right| < \infty \; ve \; \big((n+1)a_n\big) \in c_0 \right\}$$

dır. Dikkat edilmelidir ki

$$(\overline{N},q)_0{}^{\beta}, (\overline{N},q)^{\beta}, (\overline{N},q)_\infty{}^{\beta}$$

dual uzayları üzerindeki norm,

$$\|a\|_{\beta}{}' = \|a\|^{*} = \sup_{n} = \left(\sum_{k=0}^{n-1} Q_k \left| \frac{a_k}{q_k} - \frac{a_{k+1}}{q_{k+1}} \right| + \left| \frac{a_n Q_n}{q_n} \right| \right)$$

dır (Malkowsky ve Rakočević 2004).

3. Z UZAYLARI ARASINDAKİ MATRİS DÖNÜŞÜMLERİ

Bu bölümde $(Z(u,v;X),Y)$, $(Z(u,v;l_p),l_\infty)$, $(Z(u,v;c_0),l_\infty)$, $(Z(u,v;c),l_\infty)$, $(Z(u,v;l_p),l_1)$, $(Z(u,v;c),l_1)$, $(Z(u,v;l_\infty),c_0)$, $(Z(u,v;l_\infty),c)$ matris dönüşümlerini karakterize eden teorem ve sonuçların ispatları üzerinde duracağız.

Öncelikle faydalandığımız bir lemmanın ifade ve ispatını verelim.

Lemma 3.1 : X normal bir dizi uzayı olsun.

$$A\in(X_E,Y) \Leftrightarrow \forall n=0,1,...\, için\ A_n \in M(X,c_0) \text{ ve}$$

$$b_{nk}=\Delta k^{+} a_{nk} \text{ olmak üzere } B\in(X,Y) \text{ dir.}$$

İspat: $A\in(X_E,Y)$ olduğunu kabül edelim. O zaman $A_n \in (X_E)^\beta$ olur. Lemma 2.1 gereğince,

$$(X_E)^\beta = (X^\beta)_{\Delta^+} \cap M(X,c_0)$$

olduğundan $A_n \in M(X,c_0)$ olur. $x=E(z)$ alalım. Lemma 2.1 e göre $a\in Y^\beta$ ise, $\forall y\in Y$ için,

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k y_k = \sum_{k=0}^{\infty}(\Delta^+ a_k)E_k(y)$$

eşitliği doğrudur. $A_n \in (X_E)^\beta$ olduğundan,

$$A_n(z)=\sum_{k=0}^{\infty} a_{nk} z_k = \sum_{k=0}^{\infty}(\Delta^+ a_{nk})E_k(z)=\sum_{k=0}^{\infty}(\Delta^+ a_{nk})x_k = B_n(x)$$

olur. Buradan da $\forall z \in X_E$, $\forall x \in X$ ve $n = 0,1,\ldots$ için,

$$A_n(z) = B_n(x)$$

elde edilir. Böylece $\forall n$ için, $B_n \in X^\beta$ ve $\forall x \in X$ için, $B(x) \in Y$ elde edilir. Yani $B \in (X,Y)$ bulunur.

Tersine $A_n \in M(X,c_0)$ ve $b_{nk} = \Delta_k^{\ +} a_{nk}$ olmak üzere $B \in (X,Y)$ şartları sağlansın. O zaman $B_n \in X^\beta$ ve dolayısıyla $\forall n$ için $A_n \in (X^\beta)_{\Delta^+}$ olur. Lemma 2.1 e göre

$$(X_E)^\beta = (X^\beta)_{\Delta^+} \cap M(X,c_0)$$

dır. Buradan da $A_n \in (X_E)^\beta$ elde edilir. Tekrar Lemma 2.1 e göre $a \in Y^\beta$ ise, $\forall y \in Y$ için,

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k y_k = \sum_{k=0}^{\infty} (\Delta^+ a_k) E_k(y)$$

eşitliği doğrudur. $A_n \in (X_E)^\beta$ olduğuna göre

$$A_n(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_{nk} z_k = \sum_{k=0}^{\infty} (\Delta^+ a_{nk}) E_k(z) = \sum_{k=0}^{\infty} (\Delta^+ a_{nk}) x_k = B_n(x)$$

elde edilir. Hipotezden $B \in (X,Y)$ olduğunda $\forall z \in X_E$ için $A(z) \in Y$ bulunur. Bu da $A \in (X_E, Y)$ olması demektir. Böylece ispat tamamlanır.

Teorem 3.1 : $X, Y \subset w$, X normal bir küme ve $u, v \in U$ olsun. O zaman,

$$A \in \left(Z(u,v;X),Y\right) \Leftrightarrow A_n \in \left(\frac{1}{uv}\right)^{-1} * M(X,c_0) \quad , \quad \forall n = 0,1,\ldots \tag{3.1}$$

ve

$$B \in (X,Y)\,,\, b_{nk} = \frac{1}{u_k} \Delta_k^{\ +} \left(\frac{a_{nk}}{v_k}\right) \,,\; n,k = 0,1,\ldots \tag{3.2}$$

İspat: Lemma 1.3'e göre, $c_{nk}^{'} = \dfrac{a_{nk}}{v_k}$ olmak üzere

$$A \in \left(Z(u,v;X),Y\right) \Leftrightarrow C^{'} \in \left((u^{-1} * X),Y\right)$$

Ayrıca Lemma 3.1 ya göre, $\forall n$ için,

ve

$$C^{''} \in \left(u^{-1} * X, Y\right),\ c_{nk}^{''} = \Delta_k^{+} c_{nk}^{'}$$

olur. Sonuç olarak Lemma 1.3'e göre,

$$C^{''} \in \left(u^{-1} * X, Y\right) \Leftrightarrow B \in (X,Y) \text{ öyle ki } b_{nk} = \frac{c_{nk}^{''}}{u_k}$$

olur. Böylece

$$A \in \left(Z(u,v;X),Y\right) \Leftrightarrow \frac{c_n^{'}}{u} = \frac{A_n}{(uv)} \in M(X,c_0)$$

elde edilir. Bu da $\forall n$ için,

$$A_n \in \left(\frac{1}{uv}\right)^{-1} * M(X,c_0)$$

ve

$$b_{nk} = \frac{1}{u_k} \Delta^{+} \frac{a_{nk}}{v_k}$$

olmak üzere $B \in (X,Y)$ olması demektir. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Bu teoremlerin bazı sonuçlarını verelim. $p = 1$ için $q = \infty$, $1 < p < \infty$ için $q = \dfrac{p}{p-1}$ ve $p = \infty$ için $q = 1$ alalım. N, $\mathbb{N}_0$'ın sonlu alt kümesi olmak üzere k ve N üzerinden supremumu $\sup_{k,N}$ ve N üzerinden supremumu $\sup_N$ ile gösterelim.

$$K\left((u,v;p),\infty\right)=\sup_n\left\|\frac{1}{u}\Delta_k^{+}\left(\frac{A_n}{v}\right)\right\|_q=\begin{cases}\sup_{n,k}\left|\dfrac{1}{u_k}\left(\dfrac{a_{nk}}{v_k}-\dfrac{a_{n,k+1}}{v_{k+1}}\right)\right| & , \quad p=1\\ \sup_n\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\left|\dfrac{1}{u_k}\left(\dfrac{a_{nk}}{v_k}-\dfrac{a_{n,k+1}}{v_{k+1}}\right)\right|^q & , \quad 1<p<\infty\\ \sup_n\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\left|\dfrac{1}{u_k}\left(\dfrac{a_{nk}}{v_k}-\dfrac{a_{n,k+1}}{v_{k+1}}\right)\right| & , \quad p=\infty\end{cases}$$

ve

$$K\left((u,v;p),1\right)=\sup_N\left\|\frac{1}{u}\sum_{n\in N}\Delta_k^{+}\left(\frac{A_n}{v}\right)\right\|_q=\begin{cases}\sup_{k,N}\left|\dfrac{1}{u_k}\displaystyle\sum_{n\in N}\left(\dfrac{a_{nk}}{v_k}-\dfrac{a_{n,k+1}}{v_{k+1}}\right)\right| & , \quad p=1\\ \sup_N\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\left|\dfrac{1}{u_k}\sum_{n\in N}\left(\dfrac{a_{nk}}{v_k}-\dfrac{a_{n,k+1}}{v_{k+1}}\right)\right|^q & , \quad 1<p<\infty\\ \sup_N\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\left|\dfrac{1}{u_k}\sum_{n\in N}\left(\dfrac{a_{nk}}{v_k}-\dfrac{a_{n,k+1}}{v_{k+1}}\right)\right| & , \quad p=\infty\end{cases}$$

olsun. Bu durumda aşağıdaki sonuçlar ifade edilebilir.

Sonuç 3.1 : $u,v\in U$ olsun.

a)

$$A\in\left(Z(u,v;l_p),l_\infty\right)\Leftrightarrow\begin{cases}\sup_k\left|\dfrac{a_{nk}}{u_kv_k}\right|<\infty \quad (\forall n\ için), 1\leq p<\infty\\ \lim_{k\to\infty}\dfrac{a_{nk}}{u_kv_k}=0 \quad (\forall n\ için),\ p=\infty\end{cases} \tag{3.3}$$

ve

$$K((u,v;p),\infty)<\infty \tag{3.4}$$

$$A\in\left(Z(u,v;c_0),l_\infty\right)\Leftrightarrow\sup_k\left|\frac{a_{nk}}{u_kv_k}\right|<\infty \quad (\forall n\ \ için) \tag{3.5}$$

ve

$$K\big((u,v;\infty),\infty < \infty\big) \tag{3.6}$$

$A \in \big(Z(u,v;c);l_\infty\big) \Leftrightarrow$ (3.6) şartı sağlanır.

$$\lim_{k\to\infty} \frac{a_{nk}}{u_k v_k} = \alpha_n \quad (\forall n \ için) \tag{3.7}$$

ve

$$\sup_n |\alpha_n| < \infty \tag{3.8}$$

b) $A \in \big(Z(u,v;l_p),l_1\big) \Leftrightarrow$ (3.3) sağlanır.

ve

$$K\big((u,v;p),1\big) < \infty \tag{3.9}$$

$A \in \big(Z(u,v;c_0),l_1\big) \Leftrightarrow$ (3.5) sağlanır.

ve

$$K\big((u,v;\infty),1\big) < \infty \tag{3.10}$$

$A \in \big(Z(u,v;c);l_1\big) \Leftrightarrow$ (3.10) ve (3.7) sağlanır.

ve

$$\sum_{n=0}^{\infty} |\alpha_n| < \infty \tag{3.11}$$

İspat:

a) Teorem 3.1'de $X = l_p$ ve $Y = l_\infty$ alalım. Bu durumda

$$A \in \big(Z(u,v;l_p),l_\infty\big) \Leftrightarrow A_n \in \left(\frac{1}{uv}\right)^{-1} * M(l_p,c_0) \quad , \quad \forall n = 0,1,\ldots \tag{3.12}$$

ve $B \in (l_p,l_\infty)$ olmak üzere

$$b_{nk} = \frac{1}{u_k} \Delta_k^{+}\left(\frac{a_{nk}}{v_k}\right), \ n,k = 0,1,\ldots \tag{3.13}$$

olur. $M(l_p,c_0)=l_\infty$ olduğuna göre (3.12)'nin sağ tarafı $A\in\left(Z(u,v;l_p),l_\infty\right)$ için $A_n\in\left(\frac{1}{uv}\right)^{-1}*M(l_p,c_0)$ olur. $M(l_p,c_0)=l_\infty$ olduğundan,

$\forall n$ için $\left(\frac{a_{nk}}{u_kv_k}\right)_{k=0}^{\infty}\in l_\infty$ $(1\le p<\infty)$ önermesine yani $\forall n$ için $\sup_k\left|\frac{a_{nk}}{u_kv_k}\right|<\infty$ denktir. Lemma 1.4(a) ya göre X bir BK uzayı olduğunda,

$$A\in(X,l_\infty)\Leftrightarrow\|A\|_X^*=\sup\|A_n\|_X^*<\infty$$

ve $l_p{}^\beta=l_q$ $(1\le p<\infty)$ olduğundan $\|\,.\,\|^*=\|\,.\,\|_q$ olur. Dolayısıyla,

$$B\in(l_p,l_\infty)\Leftrightarrow\|B\|_{l_p}^*=\sup_n\|B_n\|_{l_p}^*<\infty$$

$$\Leftrightarrow\left\|\frac{1}{u}\Delta_k{}^+\left(\frac{A_n}{v}\right)\right\|_{l_p}^*=\sup_n\left\|\frac{1}{u}\Delta_k{}^+\left(\frac{A_n}{v}\right)\right\|_q$$

$$=\sup_n\sum_{k=0}^{\infty}\left|\frac{1}{u_k}\Delta_k{}^+\left(\frac{a_{nk}}{v_k}\right)\right|^q<\infty$$

elde edilir. Bu da (3.13)'ün (3.4)'e denk olduğunu gösterir.

Eğer $p=\infty$ ise (3.12) $A\in\left(Z(u,v;l_\infty),l_\infty\right)$ için

$$A_n\in\left(\frac{1}{uv}\right)^{-1}*M(l_\infty,c_0) \tag{3.14}$$

e dönüşür. Lemma 1.2'den $M(l_\infty,c_0)=c_0$ olduğundan (3.14) $\forall n$ için $\left(\frac{a_{nk}}{u_kv_k}\right)_{k=0}^{\infty}\in c_0$ indirgenir. Bu da $\lim_{k\to\infty}\frac{a_{nk}}{u_kv_k}=0$ yani (3.3)'deki şarta denktir. Böylece Sonuç 3.1 (a)'nın ispatı tamamlanır.

(3.4) un sağlandığını göstermek için Teorem 3 ve Lemma 1.4(a) dan yararlanacağız. Teorem 3.1 deki (3.2) şartında $X = l_p$ ve $Y = l_\infty$ alalım. Bu durumda $b_{nk} = \frac{1}{u_k} \Delta_k^+ \left(\frac{a_{nk}}{v_k} \right)$ olur.

(3.5)'in sağlandığını göstermek için Teorem 3.1'deki (3.1) şartında $X = c_0$ ve $Y = l_\infty$ alalım. $A \in \left(Z(u,v;c_0), l_\infty \right)$ için $A_n \in \left(\frac{1}{uv} \right)^{-1} * M(c_0, c_0)$ olur. $M(c_0, c_0) = l_\infty$ olduğundan $\forall n$ için $\left(\frac{a_{nk}}{u_k v_k} \right)_{k=0}^{\infty} \in l_\infty$ elde edilir. Yani $\sup_k \left| \frac{a_{nk}}{u_k v_k} \right| < \infty$ olur. Böylece (3.5) şartının sağlandığı görülmüş olur.

(3.6) şartının sağlandığını görmek için Teorem 3.1'deki (3.2) şartında $X = c_0$ ve $Y = l_\infty$ alalım ve tekrar Lemma 1.4(a)'dan yararlanalım. $c_0^{\beta} = l_1$ olduğundan $\| \,.\, \|^* = \| \,.\, \|_1$ olur. Bu durumda,

$$B \in (c_0, l_\infty) \Leftrightarrow \left\| \frac{1}{u} \Delta_k^+ \left(\frac{A_n}{v} \right) \right\|^* = \sup_n \left\| \frac{1}{u} \Delta_k^+ \left(\frac{A_n}{v} \right) \right\|_1$$

$$= \sup_n \sum_{k=0}^{\infty} \left| \frac{1}{u_k} \left(\frac{a_{nk}}{v_k} - \frac{a_{n,k+1}}{v_{k+11}} \right) \right| < \infty$$

Bu da (3.6)'nın sağlandığını gösterir.

(3.7)'nin sağlandığını göstermek için $X = c$ ve $Y = l_\infty$ alalım. $A \in \left(Z(u,v;c), l_\infty \right)$ olduğundan $A_n \in \left(Z(u,v;c), l_\infty \right)^{\infty} \subset \left(\frac{1}{uv} \right)^{-1} * c$ olur. Bu da (3.7)'nin sağlandığını gösterir. Ayrıca $\left(Z(u,v;c), l_\infty \right) \subset \left(Z(u,v;c_0), l_\infty \right)$ olduğundan (3.6)'nın sağlandığı açıktır.

(3.8)'in sağlandığını gösterelim. $A \in \left(Z(u,v;c_0), l_\infty \right)$ olduğunda Teorem 3.1 nedeniyle

$B \in (c_0, l_\infty)$ olur. Ayrıca $(c_0, l_\infty) = (l_\infty, l_\infty)$ dır.

$z \in Z(u,v;c)$ alalım. Bu durumda $x = uE(vz) \in c$ olur ve $l \in \mathbb{C}$ için $\lim_{k\to\infty} x_k = l$ mevcuttur. Buradan $A_n(z) = B_n(x) + l\alpha_n$ elde edilir. $A(z) \in l_\infty$, $B(x) \in l_\infty$ olduğundan $(\alpha_n)_{n=0}^{\infty} \in l_\infty$ olur. Bu da $\sup_n |\alpha_n| < \infty$ olması demektir. Buradan (3.8)'in sağlandığı görülmüş olur.

b) Teorem 3.1'de $X = c_0$ ve $Y = l_1$ alalım. N, N_0'ın sonlu bir alt kümesi olsun. Lemma 1.4(a)'dan yararlanarak,

$$B \in (c_0, l_1) \Leftrightarrow \sup_N \left\| \sum_{n\in N} B_n \right\|_{c_0}^{*} < \infty$$

$$\Leftrightarrow \sup_N \left\| \sum_{n\in N} \frac{1}{u_k} \Delta_k^{+} \left(\frac{a_{nk}}{v_k} \right) \right\|_{c_0}^{*} < \infty$$

$$\Leftrightarrow \sup_N \sum_{k=0}^{\infty} \left| \frac{1}{u_k} \sum_{n\in N} \left(\frac{a_{nk}}{v_k} - \frac{a_{n,k+1}}{v_{k+1}} \right) \right| < \infty$$

Bu da (3.9)'un sağlandığını gösterir. (3.10)'un sağlandığı da benzer şekilde gösterilebilir.

(3.11)'in sağlandığını gösterelim.

$z \in Z(u,v;c) = v^{-1} * (u^{-1} * c)_E$ alalım.

$$z \in v^{-1} * (u^{-1} * c)_E \Leftrightarrow zv \in (u^{-1} * c)_E$$

$$\Leftrightarrow E(zv) \in u^{-1} * c$$

$$\Leftrightarrow uE(zv) \in c$$

Dolayısıyla $x = uE(vz) \in c$ olur. Bu durumda, $l \in \mathbb{C}$ için $\lim_{k\to\infty} x_k = l$ limiti mevcuttur.

Teorem 2.1'deki (2.8) eşitliğinden yararlanalım.

$$\sum_{k=0}^{m} a_k z_k = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{x_k}{u_k} \Delta^+ \left(\frac{a_k}{v_k} \right) + \frac{a_m x_m}{u_m v_m}$$

$$= \sum_{k=0}^{m-1} \frac{1}{u_k} \Delta^+ \left(\frac{a_k}{v_k} \right) x_k + \frac{a_m}{u_m v_m} x_m$$

Burada $k \to \infty$ için limite geçilirse,

$$A_n(z) = B_n(x) + l\alpha_n$$

yazılabilir. $A(z) \in l_1$ ve $B(x) \in l_1$ olduğundan $(\alpha_n)_{n=0}^{\infty} \in l_1$ olur. Bu da $\sum_{n=0}^{\infty} |\alpha_n| < \infty$ olması demektir. (3.11) şartı sağlanmış olur.

Tersini göstermek için şartların sağlandığını kabül edelim. (3.6), (3.7) veya (3.10) şartları Sonuç 2.1 (iv) nedeniyle $A_n \in (Z(u,v;c))^{\beta}$ olması anlamına gelir. (3.7) nedeniyle $A_n(z) = B_n(x) + l\alpha_n$ elde edilir. (3.6) veya (3.10) nedeniyle $B \in (c,Y)$ olur. (3.8) veya (3.11) nedeniyle $(\alpha_n)_{n=0}^{\infty} \in Y$ olur. Dolayısıyla $\forall z \in Z(u,v;c)$ için $A(z) \in Y$ olur. Bu da $A \in (Z(u,v;c),Y)$ olduğunu gösterir.

Uyarı 3.1: $(\overline{N},q)_0{}^{\beta}$, $(\overline{N},q)^{\beta}$ veya $(\overline{N},q)_{\infty}{}^{\beta}$ uzaylarının herhangi birinde

$$\|a\|^* = \|a\|_{\beta}' = \sup_n \left(\sum_{k=0}^{n-1} Q_k \left| \frac{a_k}{q_k} - \frac{a_{k+1}}{q_{k+1}} \right| + \left| \frac{a_n Q_n}{q_n} \right| \right)$$

olduğunu biliyoruz. Lemma 1.4 (a) gereğince,

$A \in \left((\overline{N},q)_0, l_{\infty}\right)$, $A \in \left((\overline{N},q), l_{\infty}\right)$ veya $A \in \left((\overline{N},q)_{\infty}, l_{\infty}\right)$ olması için gerekli şartlar sırasıyla,

$$K'\left((\overline{N},q)_{\infty}, \infty\right) = \sup_{m,n} \left(\sum_{k=0}^{m-1} Q_k \left| \frac{a_{nk}}{q_k} - \frac{a_{n,k+1}}{q_{k+1}} \right| + \left| \frac{a_{nm} Q_m}{q_m} \right| \right) < \infty \tag{3.12}$$

ve

$$\frac{A_n Q}{q} \in l_{\infty} \tag{3.13}$$

(3.12) şartı

ve

$$\frac{A_n Q}{q} \in c \qquad (3.14)$$

(3.12) şartı

ve

$$\frac{A_n Q}{q} \in c_0 \qquad (3.15)$$

dır. Bu şartlar ise Sonuç 2(a)'da verilen şartlara denktir.

İspat: $A \in \left((\overline{N},q)_0, l_\infty\right)$ ve $A \in \left((\overline{N},q)_\infty, l_\infty\right)$ olması durumunda $\|\,.\,\|_\beta^{'}$ ve $\|\,.\,\|_\beta$ normlarının

$$\|a\|_\beta = \sum_{k=0}^{\infty} Q_k \left| \frac{a_k}{q_k} - \frac{a_{k+1}}{q_{k+1}} \right|$$

normu ile tanımlandığını ve $(\overline{N},q)_0^{\ \beta}$ ve $(\overline{N},q)_\infty^{\ \beta}$ üzerinde bu normların denk olduğunu göstermeliyiz. Öncelikle

$$\forall a \in (\overline{N},q)_0^{\ \beta} \supset (\overline{N},q)_\infty^{\ \beta} \text{ için } \|a\|_\beta \leq \|a\|_\beta^{'} = \|a\|^*$$

olduğu açıktır. Eşitsizliğin tersini kanıtlamak için, $(\overline{N},q)_0$ veya $(\overline{N},q)_\infty$ uzaylarını X ile gösterelim. $a \in X$ alalım. Bu durumda

$$f_a : X \to \mathbb{C} \qquad x \to f_a(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x_k$$

dönüşümü (Malkowsky ve Rakočević 2004)'dan dolayı sürekli lineer fonksiyoneldir. Dolayısıyla, $\forall x \in X$ için,

$$|f_a(x)| \leq \|f_a\| . \|x\| \qquad (3.16)$$

olur. Şimdi n negatif olmayan keyfi bir tam sayı olsun. $\forall k$ için $b_k = Q_k\left(\frac{a_k}{q_k} - \frac{a_{k+1}}{q_{k+1}}\right)$

alalım ve

$x^{\langle n\rangle}$ dizisini

$$x_k^{\langle n\rangle} = \begin{cases} \frac{1}{q_k}\Delta\left(Q_k \operatorname{sgn}(b_k)\right), & 0 \le k \le n \\ -\frac{1}{q_{n+1}}Q_n \operatorname{sgn}(b_n), & k = n+1 \\ 0, & k > n \end{cases}$$

şeklinde tanımlayalım. Bu taktirde

$$(\overline{N},q)_0 = \left\{x = (x_k) : \frac{1}{Q_n}\sum_{k=0}^{n} q_k x_k \to 0\right\}$$

olduğu göz önüne alınırsa, $0 \le k \le n$ için $\tau_k^{\langle n\rangle} = \frac{1}{Q_k}\sum_{j=0}^{k} q_j x_j^{\langle k\rangle} = \operatorname{sgn}(b_k)$ ve,

$k > n$ için $\tau_k^{\langle n\rangle} = 0$ olur. Dolayısıyla $x^{\langle n\rangle} \in X$ ve

$$\left\|x^{\langle n\rangle}\right\| = \sup_k\left|\tau_k^{\langle n\rangle}\right| = \sup_{k\le n}\left|\operatorname{sgn}(b_k)\right| \le 1$$

olur. Üstelik (2.8), (3.16) ve $\|\,.\,\|^*$ normunun tanımına göre,

$$\left|f_a(x^{\langle n\rangle})\right| = \left|\sum_{k=0}^{n+1} a_k x_k^{\langle n\rangle}\right| = \left|\sum_{k=0}^{n} b_k \tau_k^{\langle n\rangle} + \frac{a_{n+1}Q_{n+1}}{q_{n+1}}\tau_{n+1}^{\langle n\rangle}\right|$$

$$= \sum_{k=0}^{n}|b_k|$$

$$\le \|a\|^*$$

olur. Öte yandan, $\sum_{k=0}^{n} b_k = \sum_{k=0}^{n}\left|Q_k\left(\frac{a_k}{q_k} - \frac{a_{k+1}}{q_{k+1}}\right)\right|$ kısmi toplamında $n \to \infty$ için limite

geçilirse,

$$\sum_{k=0}^{\infty} b_k = \sum_{k=0}^{\infty}\left|Q_k\left(\frac{a_k}{q_k}-\frac{a_{k+1}}{q_{k+1}}\right)\right| \le \|a\|^*$$

olduğu görülür. Bu ise, $\|a\|_\beta \le \|a\|^* = \|a\|_\beta^{'}$ demektir. Dolayısıyla,

$$\|a\|_\beta = \|a\|^* = \|a\|_\beta^{'}$$

eşitliği elde edilir. Eğer (3.12) ve (3.14) sağlanırsa,

$$K\left((\overline{N},q)_\infty,\infty\right) = \sup_n \sum_{k=0}^{\infty} Q_k\left|\frac{a_{nk}}{q_k}-\frac{a_{n,k+1}}{q_{k+1}}\right| \le K^{'}\left((\overline{N},q)_\infty,\infty\right) < \infty$$

elde edilir. (3.7) ve (3.14)'den yararlanırsak,

$$\sup_n\left|\frac{\alpha_n Q_n}{q_n}\right| \le \sup_{m,n}\left|\frac{a_{mn}Q_n}{q_n}\right| \le K^{'}\left((\overline{N},q)_\infty,\infty\right) < \infty$$

elde ederiz.

Tersine $A \in \left((\overline{N},q),l_\infty\right)$ için Sonuç 3.1 (a)'daki şartların sağlandığını kabül edelim. Öncelikle $\forall m,n$ için,

$$\sum_{k=0}^{m-1} Q_k\left|\frac{a_{nk}}{q_k}-\frac{a_{n,k+1}}{q_{k+1}}\right| \le \sum_{k=0}^{\infty} Q_k\left|\frac{a_{nk}}{q_k}-\frac{a_{n,k+1}}{q_{k+1}}\right|$$

olur. Buradan,

$$\sup_{m,n}\sum_{k=0}^{m-1} Q_k\left|\frac{a_{nk}}{q_k}-\frac{a_{n,k+1}}{q_{k+1}}\right| \le K\left((\overline{N},q)_\infty,\infty\right) < \infty \qquad (3.17)$$

Bunun dışında Sonuç 2.1 (iv) ve Teorem 1.2'ye göre her sabit n için,

$$f_{A_n} : (\overline{N},q) \to \mathbb{C} \qquad x \to f_{A_n}(x) = A_n(x)$$

şeklinde tanımlanan dönüşüm Teorem 1.2'den dolayı sürekli lineer fonksiyoneldir. Bu durumda, $\forall x \in (\overline{N},q)$ için,

$$\left|f_{A_n}(x)\right| \le \left\|f_{A_n}\right\| . \|x\|$$

olur. m keyfi negatif olmayan bir tam sayı olsun. Şimdi

$$x^{\langle m\rangle} = \left(Q_m \operatorname{sgn} \frac{a_{nm}}{q_m}\right) e^{(m)}$$

koyalım. Bu taktirde,

$$\left| f_{A_n}(x^{\langle m\rangle}) \right| = \left| \frac{a_{nm} Q_m}{q_m} \right| \le \left\| f_{A_n} \right\|$$

olur. Sonuç 3.1 (a) gereğince $\left(f_{A_n}\right)_{n=0}^{\infty}$ dizisi noktasal sınırlıdır ve dolayısıyla düzgün sınırlıdır. (Wilansky 1964) Düzgün sınırlılık prensibi gereğince, $\forall m, n$ için öyle bir M sabiti vardır ki

$$\left| \frac{a_{mn} Q_m}{q_m} \right| \le M$$

olacak şekilde bir M sabiti vardır. Böylece bu eşitsizlik ve (3.17) nedeniyle (3.12) elde edilir.

Uyarı 3.2: $u, v, r, s \in U$ olsun. X l_p $(1 \le p \le \infty)$, c_0 ve c uzaylarından herhangi biri olsun. $Z = Z(u, v; X)$ ve $Y = Z(r, s; l_\infty)$ veya $Y = Z(r, s; l_1)$ olduğunda $A \in (Z, Y)$ olması için Sonuç 3.1'deki şartlarda sırasıyla $K((u, v; p), \infty)$ veya $K((u, v; p), 1)$ $(1 \le p \le \infty)$ tanımındaki a_{nk}'nın $c_{nk} = r_n \sum_{j=0}^{n} a_{jk} s_j$ $(n, k = 0, 1, \ldots)$ terimlerinin alınması, (3.8) veya (3.11) şartlarında α_n yerine $\beta_n = r_n \sum_{j=0}^{n} \alpha_j s_j$ alınmasıyla elde edilir. Bu aslında Sonuç 3.1 ve Lemma 1.3 (b)'nin direkt sonucudur.

Sonuç 3.2: $u, v \in U$ olsun.

$$A \in \left(Z(u, v; l_\infty), c_0\right) \Leftrightarrow \lim_{k \to \infty} \frac{a_{nk}}{u_k v_k} = 0 \quad (\forall n = 0, 1, \ldots) \tag{3.18}$$

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{u_k} \left(\frac{a_{nk}}{v_k} - \frac{a_{n,k+1}}{v_{k+1}} \right) = 0 \quad (\forall k = 0, 1, \ldots) \tag{3.19}$$

ve

$$\sum_{k:=0}^{\infty}\left|\frac{1}{u_k}\left(\frac{a_{nk}}{v_k}-\frac{a_{n,k+1}}{v_{k+1}}\right)\right| \text{ düzgün yakınsaktır.} \qquad (3.20)$$

$A\in\left(Z(u,v;l_\infty),c\right) \Leftrightarrow$ (3.18) ve (3.20) sağlanır.

$$\text{ve } \lim_{n\to\infty}\frac{1}{u_k}\left(\frac{a_{nk}}{v_k}-\frac{a_{n,k+1}}{v_{k+1}}\right)=\beta_k \quad (\forall k=0,1,\ldots) \qquad (3.21)$$

İspat: $Y=c_0$ veya $Y=c$ alalım. Teorem 3.1 gereğince,

$A\in Z\left((u,v;l_\infty),Y\right) \Leftrightarrow$ (3.18) sağlanır.

ve $b_{nk}=\dfrac{1}{u_k}\Delta^{+}\left(\dfrac{a_{nk}}{v_k}\right)$ $(n,k=0,1,\ldots)$ olmak üzere,

$B\in(l_\infty,Y)$'dir.

$B\in(l_\infty,Y) \Leftrightarrow$ (3.19) ve (3.20) ya da (3.21) ve (3.20) sağlanır.

Uyarı 3.3: $u,v,r,s\in U$ olsun.

$$A\in\left(Z(u,v;l_\infty),Z(r,s;c_0)\right) \text{ veya } A\in\left(Z(u,v;l_\infty),Z(r,s;c)\right)$$

olması için Sonuç 3.2'deki (3.19), (3.21) şartlarında a_{nk}'nın yerine $c_{nk}=r_n\sum_{j=0}^{n}a_{jk}s_j$ $(n,k=0,1,\ldots)$ teriminin alınmasıyla gerek şartlar elde edilir.

Sonuç 3.3: $u,v\in U$ olsun.

$$A\in\left(Z(u,v;l_1),l_p\right) \quad (1<p<\infty) \Leftrightarrow \sup_k\left|\frac{a_{nk}}{u_kv_k}\right|<\infty \quad (\forall n=0,1,\ldots) \qquad (3.22)$$

ve

$$\sup_k\sum_{n=0}^{\infty}\left|\frac{1}{u_k}\left(\frac{a_{nk}}{v_k}-\frac{a_{n,k+1}}{v_{k+1}}\right)\right|^p<\infty \qquad (3.23)$$

İspat:

Bu teorem 3.1'in bir sonucudur.

Uyarı 3.4 : $u, v, r, s \in U$ olsun. $A \in \big(Z(u,v;l_1), Z(r,s;l_p)\big)$ $(1 < p < \infty)$ olması için sonuç 3.3'de a_{nk} yerine $c_{nk} = r_n \sum_{j=0}^{n} a_{jk} s_j$ $(n,k = 0,1,\ldots)$ alınmasıyla gerek şartlar elde edilir.

KAYNAKLAR

Jarrah, A. M., and Malkowsky, E., 1990: BK spaces, bases and linear operators, Rendiconti del Cir. Mat. Di Palermo II, 52 : 177-191

Kreyszig, E., 1989: Introductory Functional Analysis with Applications. John Wiley & Sons Inc, New York, Chishester, Brisbane, Toronto, 688s

Malkowsky, E., 1987: Klassen von Matrixabbildungen in paranormierten FK-Räumen, Analysis 7 : 275-292

Malkowsky, E., 1996: Linear operators in certain BK spaces, Bolyai Soc. Math. Studies 5 : 241-250

Malkowsky, E., Rakočević, V., 1998: The measure of noncompactness of linear operators between certain sequence spaces, Acta Sci. Math. (Szeged) 64: 151-170

Malkowsky, E., Rakočević, V., 2001: Measure of noncompactness of linear operators between spaces of sequences that are $(\overline{N}, q)$ summable or bounded, Czech Math. J. 51 : 505-522

Ng, P.-N., Lee, P.-Y., 1978**:** Cesàro sequence spaces of non-absolute type, Commentationes Mathematicae XX : 429-433

Wilansky, A., 1964: Functional Analysis, Biaisdell Publishing Company

Wilansky, A.,1984: Summability through functional analysis, North-Holland Math Studies 85

ÖZGEÇMİŞ

Ad Soyad: Aslı Çakır

Doğum Yeri ve Tarihi: 01.01.1985 / Manisa

Adres: Ata2 Sitesi Bahçelievler mah. Aslanağzı sok. Aslan apt. No:2/6

Çengelköy/Üsküdar/İSTANBUL

Lisans Üniversite: Pamukkale Üniversitesi