PAMUKKALE ÜNİVERSİTESİ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

KOMPLEKS UZAY FORMLARINDA MEKANİK SİSTEMLER

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Fulya Özge ÇAĞLAR

Anabilim Dalı : **Matematik**
Programı : **Geometri**

Tez Danışmanı : **Doç. Dr. Mehmet TEKKOYUN**

ARALIK 2011

YÜKSEK LİSANS TEZ ONAY FORMU

Pamukkale Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü 091441013 nolu öğrencisi Fulya Özge ÇAĞLAR tarafından hazırlanan "**KOMPLEKS UZAY FORMLARINDA MEKANİK SİSTEMLER**" başlıklı tez tarafımızdan okunmuş, kapsamı ve niteliği açısından bir Yüksek Lisans tezi olarak kabul edilmiştir.

Tez Danışmanı : **Doç. Dr. Mehmet TEKKOYUN (PAÜ)**
(Jüri Başkanı)

Jüri Üyesi : **Yrd.Doç.Dr. Erdal ÖZÜSAĞLAM (ASÜ)**

Jüri Üyesi : **Yrd.Doç.Dr. İsmet AYHAN (PAÜ)**

Pamukkale Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun 28/12/2011.. tarih ve ...35/15..... sayılı kararıyla onaylanmıştır.

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü
Prof. Dr. Nuri KOLSUZ

Bu tezin tasarımı, hazırlanması, yürütülmesi, araştırmalarının yapılması ve bulgularının analizlerinde bilimsel etiğe ve akademik kurallara özenle riayet edildiğini; bu çalışmanın doğrudan birincil ürünü olmayan bulguların, verilerin ve materyallerin bilimsel etiğe uygun olarak kaynak gösterildiğini ve alıntı yapılan çalışmalara atfedildiğini beyan ederim.

İmza :
Öğrenci Adı Soyadı : Fulya Özge ÇAĞLAR

ÖNSÖZ

Bu tez çalışması, Pamukkale Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı Yüksek Lisans programında yapılmıştır. Bu çalışmada sabit J-kesitsel eğrilikli tanjant, Kähler, para-Kähler ve $\theta-$Kähler manifoldlarda Lagrange ve Hamilton mekanik sistemleri incelenmiştir. Tez hazırlanırken Pamukkale Üniversitesi kütüphanesi, Bilkent Üniversitesi kütüphanesi ve ODTÜ kütüphanesinden yararlanılmıştır. Bu çalışmanın hazırlanmasında bana destek olan aileme, çalışma esnasında benden yardımlarını esirgemeyen tez danışmanım, değerli hocam Doç. Dr. Mehmet TEKKOYUN' a teşekkürlerimi sunmayı bir borç bilirim.

ARALIK 2011 Fulya Özge ÇAĞLAR

İÇİNDEKİLER

Sayfa

KISALTMALAR

PAÜ	: Pamukkale Üniversitesi
FBE	: Fen Bilimleri Enstitüsü
SJ-KETM	: Sabit J-Kesitsel Eğrilikli Tanjant Manifoldları
SJ*-KEKoM	: Sabit J*-Kesitsel Eğrilikli Kotanjant Manifoldları
SJ-KEKM	: Sabit J-Kesitsel Eğrilikli Kähler Manifoldları
SJ*-KEKM	: Sabit J*-Kesitsel Eğrilikli Kähler Manifoldları
SJ-KEPKM	: Sabit J-Kesitsel Eğrilikli Para-Kähler Manifoldları
SJ*-KEPKM	: Sabit J*-Kesitsel Eğrilikli Para-Kähler Manifoldları
SJ-KE $\theta-$KM	: Sabit J-Kesitsel Eğrilikli $\theta-$Kähler Manifoldları
SJ*-KE $\theta-$KM	: Sabit J*-Kesitsel Eğrilikli $\theta-$Kähler Manifoldları

SEMBOL LİSTESİ

EveM	:	C^{∞} − manifoldlar
π	:	Örten submersiyon
(E, π, M)	:	Lifli manifold
TM	:	M manifoldunun tanjant demeti
$\pi_M^{-1}(p)$	:	M'nin p üzerindeki lifi
$(\varphi_*)_p$	:	φ'nin $p \in M$ deki türev dönüşümü
J, J^*	:	M üzerinde hemen hemen yapılar
(x^i, y^i)	:	Reel lokal koordinatlar
$C^{\infty}(M, R)$	:	Reel fonksiyonların cümlesi
V	:	Liouville vektör alanı
m_i	:	M manifoldu üzerinde m parçacıklı bir sistemin kütlesi
T, P	:	M manifoldu üzerindeki bir sistemin kinetik ve potan siyel enerjisi
L	:	Lagrange fonksiyonu
$\frac{d}{dt}(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}) - \frac{\partial L}{\partial q} = 0$	:	Euler-Lagrange denklemleri
$\frac{dq}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p}, \frac{dp}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q}$	:	Hamilton denklemleri
$i_{X_L}\Phi_L = dE_L$ $i_X \Phi = dH$	:	Lagrangian formalizim Hamiltonian formalizm

X_L	:	Euler-Lagrange vektör alanı
d_J	:	Diferensiyel operatörü
Φ_L	:	M manifoldunun TM tanjant demeti üzerinde kapalı $2-$formu
$i_X\Phi_L$	:	M manifoldu üzerinde her bir X_L vektör alanı ile bir Φ_L $2-$for munun iç çarpımı
$\chi(TM)$	:	TM üzerindeki vektör alanlarının cümlesi
$(\chi(TM))^*$	:	TM üzerindeki $1-$formların cümlesi
E_L	:	Lagrange fonksiyonuna bağlı enerji fonksiyonu
(TM, Φ_L, X_L)	:	Lagrange sistem
λ_M	:	Liouville form
H	:	Hamilton enerji veya Hamilton fonksiyon
Φ	:	Kähler form
(M, Φ)	:	Simplektik Kähler manifold
X_H	:	Hamilton vektör alanı
(T^*M, Φ, X_H)	:	Hamilton sistem

ÖZET

KOMPLEKS UZAY FORMLARINDA MEKANİK SİSTEMLER

Bu çalışma altı bölümden oluşmaktadır.

1. Bölümde, analitik ve klasik mekaniğin gelişim sürecinden bahsedilmiş, aynı zamanda günümüze kadar yapılan çalışmalar ve sağladıkları faydalar anlatılmıştır.

2. Bölümde, tezin daha iyi anlaşılması için gerekli temel kavram ve tanımlar verilmiştir.

3. Bölümde, sabit $J-$kesitsel eğrilikli tanjant manifoldları tanımlanmış, bu manifoldlar üzerinde Lagrange ve Hamilton mekanik sistemleri elde edilmiştir. Ayrıca elde edilen mekanik sistemler ve denklemler için geometrik-fiziksel yorumlar yapılmıştır.

4. Bölümde, sabit $J-$kesitsel eğrilikli Kähler manifoldları tanımlanmış, bu manifoldlar üzerinde Lagrange ve Hamilton mekanik sistemleri ile denklemler üretilmiştir. Elde edilen mekanik denklemler için geometrik ve fiziksel yorumlar sunulmuştur.

5. Bölümde, sabit $J-$kesitsel eğrilikli para-Kähler manifoldları tanımlanmış, bu manifoldlar üzerinde Lagrange ve Hamilton mekanik sistemlerine ait denklemler elde edilmiştir. Ayrıca mekanik sistemlere özgü denklemler için geometrik ve fiziksel yorumlar verilmiştir.

6. Bölümde, sabit $J-$kesitsel eğrilikli $\theta-$Kähler manifoldları tanımlanmış, bu manifoldlar üzerinde Lagrange, Hamilton mekanik sistemleri ve hareket denklemleri ortaya çıkarılmıştır. Sonra elde edilen mekanik sistemler ve denklemler geometrik-fiziksel olarak yorumlanmıştır.

SUMMARY

MECHANICAL SYSTEMS ON COMPLEX SPACE FORMS

This study consists of six sections.

In the first section, the development process of analytical and classical mechanics have been mentioned and also explained to the present studies and the benefits they provide.

In the second section, basic concepts and definitions have been given to be understand better the thesis.

In the three section, tangent manifolds of constant J-sectional curvature have been defined and on this manifolds, Lagrange and Hamilton mechanical systems and equations have been achieved. Also, for the obtained mechanical systems and equations geometric-physical interpretations have been made.

In the fourth section, Kähler manifolds of constant J-sectional curvature have been defined, on this manifolds, Lagrange and Hamilton mechanical systems and equations have been derived. For the obtained mechanical equations, geometric-physical interpretations have been presented.

In the fifth section, para-Kähler manifolds of constant J-sectional curvature have been defined, on this manifolds the equations about Lagrange and Hamilton mechanical systems have been obtained. Also for equations about mechanical systems, geometric and physical interpretations have been given.

In the sixth section, $\theta-$Kähler manifolds of constant J-sectional curvature have been defined, on this manifolds, Lagrange, Hamilton systems and motion equations have been obtained. Then, the obtained mechanical systems and equations have been interpreted to be geometrically-physically.

1 TARİHÇE

İnsanoğlu çağlar boyunca doğayı anlamaya çalışmıştır. Bunu başarmak için matematik ve fizik insanoğlunun en büyük anahtarı olmuştur. Bu bağlamda matematiğin amacı, doğayı denklemler yardımıyla modellemek; fiziğin amacı ise doğanın genel analizini yapmaktır. Açıkçası fizik, maddeyi ve maddenin uzay-zaman içinde enerji ve kuvvetini de içine alacak şekilde durumunu inceler. Fizik kendi içinde klasik fizik ve modern fizik olarak dallara ayrılır. Klasik fizik, klasik mekanik; modern fizik ise kuantum ve rölativistik mekanik ilkeleriyle çalışmaktadır. Klasik mekanik, cisimlerin hareketleri ve onlara etki eden kuvvetlerle ilgilenir. Kuantum mekaniği, mikro düzeyde cisim veya parçacıkların hareketini, rölativistik mekanik ise makro düzeyde ışık hızına yakın hızlarda hareket eden sistemlerle ilgilenmektedir. Mekanik, cisimlerin konumlarının zamanla değişmesi veya yapıların bozulmadan kalmasıyla ilgili problemleri incelemektedir. Mekanik; kinematik, statik ve dinamik olmak üzere üçe ayrılır. Kinematik, cisimlerin konumunun hareketini; statik, cismin dengede olması için gerekli koşulları; dinamik ise cismin konum değişikliğinin sebepleri bilindiğinde cismin hareket ve özelliklerinin nasıl bulunacağını incelemektedir.

Fiziğin dalı olan mekanik 17.yy. da Tycho Brahe, Kepler ve Galileo gibi bilim adamları tarafından çalışılmıştır. Bu alanın 18.yy. daki öncüleri ise Isaac Newton, Leibnitz, Euler, Lagrange ve Hamilton'dur. 18.yy.' ın ikinci yarısında Lagrange sayesinde temel olarak, bir mekanik sistemin hareket ve denge durumlarına izin veren prensiplerle, denklemlerin uygun bir sistem tarafından açıklanabileceği gösterilmiştir. Her ne kadar bu denklemler farklı sistemlere uygulansa da benzer formlardır ve birbiriyle ilişkilidir. Bu formlar genel denklemler tarafından açıklandığı sürece, herhangi bir denge problemi ve özel bir sistemin hareketi, bir mekanik sistemin denge ve hareket problemi şeklinde iki genel problem olarak yorumlanabilir. Bu problemlerin çözümü iki genel denklemin çözümüne benzer olarak, herhangi bir sistemin hareketi ve denge durumunu açıklar. Bu yüzden özel bir sistem için bu koşulların belirlenmesi bu denklemlerin özel bir sorunu ve bu sorunun çözümüdür.

Maupertuis (1740), prensiplerin kısalmış haliyle mekaniğin Newton prensiplerini birbiriyle tam olarak bağlantılı şekilde açıklamıştır. Ona göre durumların kesin kombinasyonlarında doğanın kanunları geçerlidir. Maupertuis, sonraki prensiplerin bilinen örneklerinden korunum prensibi ve yer çekimi merkezinin maksimum uzaklık prensibinden bahsetmiştir. Bernoulli'nin prensiplerinden beri kuvvetin merkeze olan uzaklığının tamamlayıcı etkisiyle orantılı olduğu varsayılmamıştı. Maupertuis'in bu yeni prensibi daha az geneldir ama Maupertuis'in prensiplerinde önemli ve yeni bir şey vardır. Bu, bir tek genel matematiksel ifadenin maksimum ya da minimum olma şartı olarak denge durumunun açıklanması fikridir.

Euler'in metodunda (1744) iki farklı sonuç vardır. "Dünyada hiçbir şey tam olarak tahmin edilemez; çünkü maksimum ya da minimum, bazı durumlarda ortaya çıkmayabilir." demiştir. Euler, ikinci olarak da merkezi kuvvetten izole edilmiş cisimden bahsetmiştir. Euler, kesinlikle hareket kanunlarını bulmayla ilgilenmemiştir, bunun yerine bir maksimum ya da minimum için araştırmalara dayanan farklı bir metodla, bu kanunları Newtonsal yolla karşılaştırmayı istemiştir. Açıktır ki, Euler'in ispatı Newton metodundan bağımsız değildir ama belli koşul için Euler tarafından geliştirilmiş bir hipoteze dönüştürülmüştür. Euler'in bakış açısından analitik değişmezin bir sınıfı, bir formudur. Aslında bu bakış açısının yeni bir noktası olarak bir gösterimin bu formun arkasında olduğu görülür, yani potansiyel enerjinin gösterimi kapalıdır, tarihsel olarak bu potansiyel enerjinin matematiksel ifadesi, fiziksel gösterimle ilişkisinden önce gelir.

Buna karşın, genç Lagrange, mekaniğin temelleri ve en az etki prensibi ile ilgilenmiştir. Lagrange, 1761'de mekaniğin uygulamalarıyla ve maksimum ve minimum problemlerinin sonuçlarını tanıtmıştır. Lagrange'ın 1762'de Euler'e yazdığı bir mektupta 1761'de yazdığı tezinin geniş bir anlatımı vardır. Bu tezinde mekaniğin farklı ve yeni bir analitik temeli ve bunun nasıl mümkün olduğunu anlatmıştır. Paris akademisinde 1762'de yeni düşüncesini tanıtmış, Ay'ın dengesiyle ilgili bir sorunun cevabını yazmıştır. 15 yıldan fazla bir süre sonra (1780) daha özenli bir özet ve benzer düzenin daha genel bir versiyonunu hazırlamıştır. Sonunda analitik mekanik olarak bilinen sistemin farkına varmıştır.

Lagrange düşüncesinin iki temel kaynağı vardır. İlki merkezi kuvvet tarafından aktive edilen nesneleri, herhangi bir sistemin dengesi için, harekete geçiren hızın, Beurnoulli prensibidir. İkincisi ise, dinamik için d'Alambert prensibidir. D'Alambert prensibi harekete geçiren hızın, Bernoulli prensibinin dengeli özel bir versiyonuna dayanır ve dengeye ilişkin problemleri herhangi bir dinamik probleme indirgemek için bir metottur. Dolayısıyla hareketin dış nedenlerini açıklayabiliyorsak, denge durumunda incelenen sistemin gerçek hareketini belirleyebiliriz.

1797 den önce mekanikte hassas hesaplı Lagrange'ın çalışmaları teoride çoğunlukla mekaniğin amaçlarının hassas olmayan hesap temelleriyle ilişkilidir. Analitik mekanikte, 1761, 1764 ve 1780'de esas olarak varyasyonun Lagrange çalışmaları, varyasyonun hassas tipi değildir ama karşılıklı olarak bağımsız da değildir.

Mekanik, 19.yy. da ise pek çok araştırmacının katkısıyla neredeyse kusursuz bir sistematik yapıya kavuşmuştur. Newton yasaları üzerine kurulan yapı, klasik mekanik veya Newton mekaniği, 19. yy. da geliştirilen yapı ise, analitik mekanik veya analitik dinamik olarak isimlendirilmektedir. 20.yy da ise Plank, Einstein, Bohr, Heisenberg, Schödinger, Born, Neumann, Dirac, Pauli bu alana önemli katkılar sağlamışlardır. 1970'lerde madde sisteminin hareket ve denge problemleri, genel olarak güç analizi için Newtonsal metodla çözülüyordu, Varignon (Blay 1992), Bernoulli, Herman ve Euler diferensiyel hesabın analitik dilini bu metodla kullanmış, mekanik sistem incelemelerini bir geometrik diyagram üstüne kurmuşlardır. Sonuçta özel ve tam bir sistem tanımlamışlardır. Bu sistemde cismin bir genel sisteminin hareketi ve denge durumunun mümkün olması, özel karakterlerden bağımsızdır. Esasen Newton-olmayan prensipler çalışılmış ve geliştirilmiştir. Hareket ettiren hız ve en az etki prensipleri genellikle 'varyasyonel prensipler' olarak bilinir [37] .

Klasik mekanik içinse literatürde Ostrogradsky'nin 1948 deki (Wittaker 1959) çalışmasının önemli bir yeri vardır. Dedecker'e göre (1979) bu sistemleri ilk kez çalışan J.Jacobi'dir. Aynı zamanda Todhunter, 'History of the calculus of variations' kitabında bahsedilen Jacobi'nin çalışmasını takip ederek 1858'de bu konuyu düşünmüştür. Bu nedenle bu teoriler Jacobi- Ostrogradsky genelleştirilmiş klasik mekaniği veya genelleştirilmiş klasik mekanik (ve alan teorisi) olarak adlandırılır.

Sonraki yıllarda alan teorisi ve mekanikte yüksek derecede türevlerle çalışılmaya başlanmıştır. Bopp (1940) ve Podolsky (1942) fizikte genelleştirmenin bu çeşidiyle ilgilenmişlerdir. Örneğin, Podolsky ikinci dereceden türevlerle elektromanyetik teoriyle ilgilenmiştir.

Daha sonraki yıllarda alan teorileri ve genelleştirilmiş mekanik olarak adlandırılan geometrik formülüzasyonuyla yayımlanan makalelerin sayısı kesin olarak artmıştır. Bu çalışmaların önemli rolü, bu formalizmin iyi işlenmiş sonuçlarını elde etmeye yardımcı olmasıdır. Bu çalışmaların sonucu olarak ortaya çıkan jet demetler ilk olarak 1950'li yıllarda Ehresmann tarafından çalışılmıştır. Örneğin Lagrange mekaniği, yüksek dereceden tanjant demetlerdeki formalizmi geliştirmiştir. Genellikle standart durumlarda kullanılan bir genelleştirme olan böyle bir mekaniğin, bazı geometrik yapılar üzerine kurulduğunu gösterebiliriz.

Lagrange mekanik sistemi için Klein (1962) bir bakış açısı geliştirmiştir. Klein'in Lagrange formalizmi hemen hemen tanjant geometrinin gelişimine ((Clark & Bruckheimer (1960) ve özel dış türev hesaplarına katkı sağlamıştır. Bu bakış açısı, yüksek dereceden tanjant demetlere genişletilmiştir. Bunun avantajı kotanjant demetin simplektik formunu açıklamayı mümkün kılmasıdır, genellikle standart regüler Lagrangian için kullanılır.

Diferensiyel geometriyle mekanik iç içedir. Bu birliktelik sadece matematiğin düzenli formülasyonu değil, aynı zamanda fiziksel yorumu daha iyi anlamaya yarayan bir araçtır. Literatürde simplektik mekanik sisteminde takip edilen sonuçlar ['Bibles': Abraham & Marsden(1978), Arnold (1974) ve Godbillon (1969)] sırasıyla Lagrange ve Hamilton sistemini kullanarak elde edilir. Bu formalizimler verilen bir diferensiyellenebilir manifoldun, tanjant ve kotanjant demetlerine ilişkin olarak, kanonik geometrik yapılar tarafından karekterize edilir [36] .

Geometrik formülüzasyonun kullanılan çeşitleri Marmo'nun (1985) kitabında da açıklanmıştır. Buradaki bakış açısı konunun daha güçlü ve özel bir açıklamasını verir. Aslında Lagrange teoride hemen hemen tanjant geometri, Hamilton teorisinde simplektik geometrinin rolüne sahiptir [2] .

Newton dinamiğinin eksikliği vektörel olması ve toplam kuvvetin bilinmesini zorunlu kılmasıdır. Bu eksikliği gideren yani skaler büyüklüklerle çalışılan, kuvvet vektörünü doğrudan içermeyen ilke ve yöntemlerin tümü analitik dinamik olarak adlandırılmaktadır. Sonuçları Newton dinamiği ile aynı olmasına rağmen çok daha kullanışlıdır.

Crampin, 1981 yılında Euler Lagrange denklemlerinin diferensiyel geometrisi ve Lagrange dinamiğinin ters problemi üzerine çalışmalar yapmıştır [1]. 1986 yılında, De Leon ve Rodrigues hemen hemen tanjant geometri ve yüksek dereceden mekanik sistemler çalışmasında, hemen hemen tanjant geometrinin çatısında yüksek mertebeden mekanik sistemlerin bazı sonuçlarını [29], 1987 yılında ise ikinci mertebeden diferensiyel denklemler ve korunumsuz Lagrange mekaniği çalışmasında, Lagrange teorinin geometrik formülüzasyonunu incelemiştir [28]. 1989 yılında De Leon ve Lacomba' nın, Lagrange alt manifoldları ve yüksek mertebeden mekanik sistemler çalışması, yüksek dereceden Lagrange ve Hamilton sistemleri (zamana bağlı ve zamandan bağımsız) simplektik yüksek mertebeden tanjant demetlerinin Lagrange alt manifoldları açısından önem taşımaktadır[20]. 1990'lı yıllarda ise De Andres, De Leon, Rodrigues, regüler Lagrangian ile ilgili yüksek dereceli tanjant demetlerinde konneksiyonları ve yüksek mertebeden diferensiyel denklemler için Lagrange dinamiğinin ters problemini çalışmışlardır [26]. 1991 yılında, De Leon, Chinea, Marrero zamandan bağımsız Lagrangianlar için kısıtlama algoritması çalışmasında, hareket denklemlerini çözmeye yarayan zamandan bağımsız Lagrange sistemleri için bir kısıtlama algoritması geliştirmeyi amaçlamıştır [24]. 1991 yılının diğer önemli çalışmalarına örnek olarak De Leon, Mello ile Rodrigues'in zamana bağlı dejenere Lagrangianların kısıtlanması çalışması [25] ve De Leon, Rodrigues'in yüksek dereceden diferensiyel denklemler için Lagrange dinamiğinin ters problemine geometrik bir yaklaşım çalışması verilebilir [23]. 1994 yılında Özer'in bağlantılı integre edilebilir Hamilton sistemleri makalesi [27] ve 1996 yılında Civelek'in Lagrange liftleri ve vektör demetlerinde Hamilton denklemleri makalesi dikkat çeken çalışmalar arasındadır [22]. 2000 yılına gelindiğinde ise Shiriaev, Pogromsky, Ludvigsen, Egeland, ters sarkacın pasifliği tabanlı kontrolün küresel özellikleri çalışmasında, Lagrange ve Hamilton sistemlerinin belli bir hedef pozisyonunun istikrar problemini ele almışlardır [30]. 2000 yılının güzel çalışmalarından biri de Adak, Dereli, Ryder'ın gravitasyonel nötrino salınımı probleminin Riemann-Cartan uzay-zamanında Hamilton düşüncesini çalıştığı, uzay-zaman torsiyon tarafından indüklenen nötrino salınımları makalesidir [21]. 2002 yılının dikkat çekici çalışmalarından biri Tekkoyun' un genelleştirilmiş Kähler manifoldlara Euler-Lagrange ve Hamilton denklemlerinin yüksek mertebeden liftleri adlı doktora tezidir [35]. 2003 yılında yapılan çalışmalardan biri ise Aycan' ın genelleştirilmiş jet demetleri üzerinde Euler-Lagrange ve Hamilton denklemlerinin liftleri adlı doktora tezidir [41]. 2004 yılında yapılan araştırmalardan bazıları ise Sert'in Riemansal olmayan uzay-zaman geometrilerinde kütle çekim teorileri, Dahl′in Lagrangian altmanifoldlarında Hamilton-Jacobi denkleminin çözümleri üstüne olan çalışmalarıdır. Analitik mekanik alanında birçok çalışması olan Tekkoyun' un çalışmalarından bazıları 2005 yılında "on para-Euler Lagrange and para-Hamiltonian equations" [4], G. Cabar ile olan "complex Hamiltonian equations and Hamiltonian energy" [40], A. Görgülü ile olan "higher order complex Lagrangian and Hamiltonian mechanical systems" [5], 2009 yılında "lifting structures: a geometrical-dynamical meaning" [44] dir.

Analitik dinamik, Lagrange ve Hamilton denklemlerinden oluşmaktadır. Lagrange denklemleri, mekaniğin skaler büyüklüklerle kurulması açısından önem taşır. Lagrange yöntemi, mekanik problemlerin çözümünde başarılıdır; ancak en büyük önemi çok güçlü bir yöntem olan Hamiltonian yöntemlerin temelini oluşturuyor olmasıdır. Hamilton denklemleri fizikte günümüzde büyük önem teşkil etmektedir. Kolay integre edilebilir yöntemler için uygun olması ve kuantum mekaniğinde de başarıyla kullanılması, fizikte kullanılma nedenlerinden bazılarıdır.

Klasik mekanik, günümüzde gökdelenlerden uçaklara kadar pek çok sistemin yıkılmadan, parçalanmadan kalabilmesi için gerekli koşulların bulunmasında önemli rol oynar. Dünya etrafında dolanan uyduların yerleştirilmesinde, gezegenlere uzay gemilerinin gönderilmesinde kullanılan bilgiler arasında, klasik mekaniğin sonuçları önemli yer tutar. Bu yönleriyle klasik mekanik oldukça önemlidir.

Kuantum mekaniği ve klasik mekanikte sıkça kullanılan Hamilton sistemler, uygulamalı bilimler için çok önemlidir. Bu konuda çok fazla çalışma yapılmıştır ve hala yapılmaya devam edilmektedir.

Modern diferensiyel geometride iyi bilindiği gibi klasik mekaniğin Lagrange ve Hamilton formalizminin farklı tiplerini elde etmede önemli rol oynar. Üstelik, uygun alanlarda birçok çalışma görmek mümkündür. Bildiğimiz gibi Lagrange ve Hamilton sistemleri verilen konfigürasyon manifoldunun hız ve momentum faz uzayları olan tanjant ve kotanjant demetlerde tanımlı uygun bir X vektör alanı tarafından karakterize edilir. Bu karakterizasyonda; Q, m boyutlu bir konfigürasyon manifoldu ve sistemin kinetik enerjisi T ve potansiyel enerjisi P olmak üzere $L = T - P$ olan $L : TQ \to R$ bir regüler Lagrange fonksiyonu olup

$$i_\xi \phi_L = dE_L, \tag{1.1}$$

olacak biçimde TQ üzerinde bir tek ξ vektör alanı vardır. Burada $V = J\xi$ Liouville vektör alanı $\phi_L = -dd_J L$ bir simplektik form ve $E_L = V(L) - L$ olup, L ye bağlı enerjidir. Euler-Lagrange vektör alanı olarak adlandırılan ξ bir semispraydir, çünkü onun integral eğrileri Euler-Lagrange denkleminin çözümleridir $\frac{d}{dt}(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}) - \frac{\partial L}{\partial q} = 0$. (TQ, ϕ_L, L) üçlüsü TQ tanjant demeti üzerinde Lagrangian sistem olarak adlandırılır.

$H = T + P$ olup $H : T^*Q \to R$ bir regüler Hamilton fonksiyonu ise T^*Q üzerinde

$$i_{X_H} \phi = dH \tag{1.2}$$

olacak biçimde tek bir X_H vektör alanı vardır. Burada $\lambda = J^*(\omega)$ olmak üzere $\phi = -d\lambda$ bir kanonik simplektik form ve H, Hamilton fonksiyonudur. Hamilton vektör alanı olarak adlandırılan X_H' ın yörüngeleri, Hamilton denkleminin çözümleridir, $\frac{dq}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p}, \frac{dp}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q}$. (T^*Q, ϕ, H) üçlüsü, ϕ simplektik formuyla donatılmış T^*Q kotanjant demeti üzerinde bir Hamiltonian sistem olarak adlandırılır [4],[5],[6] .

Bugüne kadar yapılan çalışmalardan görülür ki, Lagrange ve Hamilton sistemlerinin reel, kompleks ve parakompleks, zamana bağlı ya da zamandan bağımsız analogları üretilmiştir ama sabit $J-$ kesitsel eğrilikli Lagrange ve Hamilton sistemleri hakkında bahsedilmemiştir. Bunun için, bu tezde dinamik sistemlere ilişkin fiziksel çıkarımlar, diferensiyel geometriyle ilgili veriler ve sabit $J-$ kesitsel eğrilikli reel, kompleks, para-kompleks ve $\theta-$Kähler manifoldların bir modelinde bu Euler Lagrange ve Hamilton denklemleri çalışılmıştır.

Bu tezde bütün manifoldlar ve geometrik nesneler Einstein toplamına uygun olarak kullanılmıştır ve C^∞ dur . Aynı zamanda, R, $F(M)$, $\chi(M)$ ve $\Lambda^1(M)$ sırasıyla reel sayıların cümlesini, M deki fonksiyonların cümlesini, vektör alanlarının cümlesini ve 1-formların cümlesini göstermektedir.

Vektör alanı: E^n n -boyutlu Öklid uzayı ve E^n nin $p \in E^n$ noktasındaki tanjant uzayı $T_{E^n}(P)$ olsun. Buna göre bir $X : E^n \to \bigcup\limits_{p\in E^n} T_{E^n}(P)$ fonksiyonu için $\pi \circ X : E^n \to E^n$ olacak şekilde bir $\pi : \bigcup\limits_{p\in E^n} T_{E^n}(P) \to E^n$ fonksiyonu mevcutsa X' e E^n üzerinde bir vektör alanı adı verilir [33].

İntegral eğrisi : E^{n+1}, $(n+1)$ boyutlu bir Öklid uzayı ve E^{n+1}' de parametrik bir eğri $\alpha : I \to E^{n+1}$ olsun. Yani, $t \to \alpha(t) = (\alpha_1(t), ..., \alpha_{n+1}(t))$ dir. E^{n+1} üzerinde bir vektör alanı X olmak üzere $\forall t \in I$ için $\dfrac{d\alpha}{dt} = X(\alpha(t))$ ise α eğrisine X vektör alanının bir integral eğrisi denir [33] .

1-form: E^n n -boyutlu Öklid uzayı ve E^n' nin $p \in E^n$ noktasındaki kotanjant uzayı $T^*_{E^n}(P)$ olsun. Buna göre bir $\omega : E^n \to \bigcup\limits_{p\in E^n} T^*_{E^n}(P)$ fonksiyonu için $\pi \circ \omega : E^n \to E^n$ olacak şekilde bir $\pi : \bigcup\limits_{p\in E^n} T^*_{E^n}(P) \to E^n$ fonksiyonu mevcutsa ω' ya E^n üzerinde bir 1-form adı verilir [33] .

Harita: M bir n-boyutlu topolojik manifold ve U da E^n' nin bir açık alt cümlesi olsun. O zaman topolojik manifold tanımı gereğince U bir Ψ homeomorfizmiyle M' nin bir W açık alt cümlesine eşlenebilir. $\Psi : U \subset E^n \to W \subset M$, olmak üzere (Ψ, W) ikilisine M' de bir koordinat komşuluğu veya harita denir [33] .

Atlas: M, bir topolojik n-manifold ve M' nin bir açık örtüsü $\{W_\alpha\}$ olsun. W_α açık cümlelerinin α indislerinin cümlesi A olmak üzere $\{W_\alpha\}$ örtüsü için $\{W_\alpha\}_{\alpha\in A}$ yazılır. E^n, n-boyutlu Öklid uzayı olmak üzere, E^nde W_α ya Ψ_α homeomorfizmi altında homeomorf olan açık cümle U_α olsun. Böylece ortaya çıkan (Ψ_α, W_α) haritalarının $\{(\Psi_\alpha, W_\alpha)\}_{\alpha\in A}$ koleksiyonuna bir atlas (koordinat komşuluğu sistemi) denir [33] .

Tensör alanı: M bir manifold olmak üzere, M nin her x noktasında $K(x) \in T^r_s(T \times M)$ şeklinde belli bir tensör karşılık getiren K dönüşümüne M manifoldu üzerinde (r, s) tipinden bir tensör alanı adı verilir. M manifoldunun x noktasını içeren bir haritası (U, x^i) olsun. Bu durumda M üzerindeki bir (r, s) tipinden K tensör alanı lokal olarak;

$$K = K^{i_1,\dots,i_r}_{j_1,\dots,j_s} \frac{\partial}{\partial x^{i_1}} \otimes ... \otimes \frac{\partial}{\partial x^{i_r}} \otimes dx^{j_1} \otimes ...dx^{j_s}$$

dir. Burada $K^{i_1,\dots,i_r}_{j_1,\dots,j_s} : U \subset M \to R$ tanımlı fonksiyondur. Bunlara K nın bileşenleri denir [2] .

Lineer dönüşüm: V ve U bir F cismi üzerinde birer vektör uzayı ve $f : V \to U$ bir fonksiyon olsun. $\forall\ v_1, v_2 \in V$ ve $\forall a \in F$ için,

(1) $f(v_1 + v_2) = f(v_1) + f(v_2)$

(2) $f(av_1) = a.f(v_1)$

şartları sağlanırsa f' ye V' den U' ya lineer dönüşüm(doğrusal dönüşüm, vektör uzayı homomorfizması yada lineer transformasyon) denir [39].

Grup homomorfizmi: $(G,.),(H,*)$ iki grup olsun. $f: G \to H$ fonksiyonu $\forall a,b \in G$ için $f(a.b) = f(a) * f(b)$ oluyorsa f' ye bir grup homomorfizmi denir [39].

İzomorfizm: Eğer f grup homomorfizmi $1:1$ ve örtense izomorfizm adını alır [39].

Endomorfizm: Eğer f grup homomorfizminde $G = H$ ise f endomorfizm adını alır [39].

Diffeomorfizm: E^n n-boyutlu bir Öklid uzayı olmak üzere, E^n' in iki açık alt cümlesi U ve V olsun. Bir $\Psi: U \to V$ fonksiyonu için aşağıdaki önermeler doğruysa Ψ' ye C^k sınıfından bir diffeomorfizm ve U ile V' ye de k. dereceden diffeomorfiktirler denir.

(D1) $\Psi \in C^k(U;V)$

(D2) $\Psi^{-1}: V \to U$ var ve $\Psi^{-1} \in C^k(V;U)$ [33].

Baz: V bir vektör uzayı olmak üzere, $\forall v \in V$ vektörü bir $S = (u_1, u_2, ...u_n)$ vektör kümesindeki vektörlerin tek bir lineer bileşimi olarak yazılabiliyorsa S kümesi V' nin bir bazıdır. Eğer V' nin n-elemanlı bir bazı varsa V' ye sonlu n-boyutlu veya n-boyutludur denir [39].

Ortogonal: V bir iç çarpım uzayı olsun. Eğer $<u,v>= 0$ ise u,v ye ortogonaldir (dik) ve $u,v \in V$ vektörlerine de ortogonal vektörler denir [38].

Türev dönüşümü: M ve N, C^∞-manifoldlar, $\varphi: M \to N$, $C^\infty-$dönüşüm, $p \in M$ ve $v_p \in T_pM$ tanjant vektörüne p noktasında teğet olan bir eğri $\alpha: I \subset R \to M$ olsun. $(\varphi_*)p: T_pM \to T_{\varphi(p)}N$ ile tanımlanan dönüşüme φ' nin $p \in M$ noktasındaki türev dönüşümü denir [33] .

Regülerlik: E^n ve E^m, $m-$ ve n -boyutlu birer Öklid uzayı olmak üzere, bir $F: E^n \to E^m$ dönüşümünün $\forall p \in E^n$ noktasındaki $(F_*)p$ türev dönüşümü 1:1 ise bu $(F_*)p$ türev dönüşümüne regülerdir denir [33] .

Bilineer form: V bir reel vektör uzayı olsun. $<,>: V \times V \to R$ dönüşümü $\forall a,b \in R$, $\forall u,v \in V$ için,

(1) $<au+bv,w>= a<u,w>+b<v,w>$

(2) $<u,av+bw>= a<u,v>+b<u,w>$ oluyorsa $<,>$ dönüşümüne bir V vektör uzayı üzerinde bir bilineer form denir [18].

Dejenerelik ve non-dejenerelik: V bir m-boyutlu reel vektör uzayı ve $g: V \times V \to R$ bir simetrik bilineer dönüşüm olsun. Eğer bir $w \neq 0$ vektörü için , $g(w,v) = 0$ ise g' ye dejeneredir denir.

Eğer $\forall v \in V$ için $g(w,v) = 0$ olması $w = 0$ olmasını gerektiriyor ise g' ye non-dejenere'dir denir [9] .

Lineer fonksiyonel: V bir K cismi üzerinde bir vektör uzayı olsun. Eğer $\forall u, v \in V$ ve $\forall a, b \in K$ için $\phi(au + bv) = a\phi(u) + b\phi(v)$ oluyorsa $\phi : V \to K$ dönüşümüne bir lineer fonksiyonel denir [39] .

Dual uzay: V bir vektör uzayı olsun. Bir V vektör uzayından K cismine tanımlanan lineer fonksiyonellerin kümesi; ϕ ve σ, V de lineer fonksiyoneller ve $\forall k \in K$ olmak üzere $(\phi + \sigma)(v) = \phi(v) + \sigma(v)$ ve $(k\phi)v = k\phi(v)$ şeklinde tanımlanan toplama ve skaler çarpım özellikleriyle K üzerinde yine bir vektör uzayı oluşturur. Bu uzaya V' nin dual uzayı denir ve V^* ile gösterilir [38].

Dual baz: V bir vektör uzayı ve K bir cisim olmak üzere, $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$ kümesi V' nin bir bazı olsun. $\phi_1, \phi_2, ..., \phi_n \in V^*$, $\phi_i(v_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} i = j & ,1 \\ i \neq j & ,0 \end{cases}$ şeklinde tanımlanan lineer fonksiyoneller olsunlar. Bu durumda $\{\phi_1, \phi_2, ..., \phi_n\}$ kümesi, V^*' ın bir bazıdır. Bu $\{\phi_i\}$ bazı $\{v_i\}$ ye dual olan baz veya dual baz olarak adlandırılır [38].

Topoloji: X boş olmayan bir cümle olsun. X' in alt cümlelerinin bir koleksiyonu τ olsun. Bu koleksiyon aşağıdaki önermeleri doğrularsa X üzerinde bir topoloji adını alır.

(T1) $X, \emptyset \in \tau$

(T2) $\forall A_1, A_2 \in \tau \Rightarrow A_1 \cap A_2 \in \tau$

(T3) $A_i \in \tau$, $i \in I$, $\underset{i\in I}{\cup} A_i \in \tau$.

Burada I bir indeks cümlesidir [33] .

Topolojik uzay: Boş olmayan bir X cümlesi ve üzerindeki bir τ topolojisinden oluşan (X, τ) ikilisine bir topolojik uzay denir [33] .

Hausdorff uzayı: X bir topolojik uzay olsun. X' in P ve Q gibi farklı noktaları için, X' de sırasıyla, P ve Q noktalarını içine alan A_P ve A_Q açık alt cümleleri $A_P \cap A_Q = \emptyset$ olacak biçimde bulunabiliyorsa X topolojik uzayına bir Hausdorff uzayı denir [33] .

Topolojik manifold: M bir topolojik uzay olsun. M için aşağıdaki önermeler doğruysa M' ye bir topolojik n-manifold denir.

(M1) M bir Hausdorff uzayıdır.

(M2) M' nin her bir açık alt cümlesi E^n' e veya E^n' in bir açık alt cümlesine homeomorftur.

(M3) M sayılabilir çoklukta açık cümlelerle örtülebilir [33] .

Diferensiyellenebilir yapı: Bir topolojik n-manifold M ve M' nin bir atlası $S = \{(\Psi_\alpha, W_\alpha)\}_{\alpha \in A}$ olsun. Eğer S atlası için, $W_\alpha \cap W_\beta \neq \emptyset$ olmak üzere, $\forall \alpha, \beta \in A$' ya karşılık $\Phi_{\alpha\beta}$ ve $\Phi_{\beta\alpha}$ fonksiyonlar C^k-sınıfından diferensiyellenebilir iseler S' ye C^k-sınıfından diferensiyellenebilirdir denir. S atlası M üzerinde C^k-sınıfından olduğu zaman S' ye M üzerinde C^k-sınıfından diferensiyellenebilir yapı adı verilir [33] .

Diferensiyellenebilir manifold: M bir topolojik n-manifold olsun. M üzerinde C^k- sınıfından diferensiyellenebilir yapı tanımlanabilirse M' ye C^k- sınınfından bir diferensiyellenebilir manifold denir [10], [18], [33].

Tanjant manifold: M bir manifold olmak üzere**,** $TM = \underset{p\in M}{\cup} T_p(M)$ $C^\infty-$manifolduna M' nin bir tanjant manifoldu denir [2].

Tanjant demet: M bir manifold ve TM tanjant manifold olsun. $\pi_M : TM \to M$ doğal projeksiyon olmak üzere (TM, π_M, M)' ye M manifoldunun bir tanjant demeti denir [2].

Kotanjant demet: M bir manifold olsun. $\pi_M : T^*M \to M$ doğal projeksiyon olmak üzere (T^*M, π_M, M)' ye M manifoldunun kotanjant demeti denir [2].

Rank: Bir matrisin sütun sayısının boyutuna matrisin rankı denir [38].

Kovaryant tensör alanı: Diferensiyellenebilir bir M^n manifoldu için s.mertebeden bir kovaryant tensör alanı (kısaca bir $(0,s)$-tensör alanı) $D : \chi(M^n) \times \chi(M^n) \times ... \times \chi(M^n) \to C^\infty(M^n, R)$ şeklinde tanımlanan çok lineer bir dönüşümdür [10].

2-form: M bir manifold olmak üzere α, M üzerinde k. dereceden bir diferensiyellenebilir form olsun. α' yı $(0,k)$ tipinden anti-simetrik bir tensör alanı olarak düşünebiliriz.

$$\alpha = \sum_{i_1 \leq ... \leq i_k} a_{i_1,...,i_k}\, dx^{i_1} \wedge ... \wedge dx^{i_k} = \frac{1}{k!} a_{i_1,...,i_k} dx^{i_1} \wedge ... \wedge dx^{i_k}$$

Burada α, $k-$ formdur. Eğer $k = 2$ alınırsa 2-form elde edilmiş olur [2], [18].

Hemen hemen tanjant yapı : m-reel boyutlu bir manifold M ve M' nin tanjant demeti TM olsun. TM üzerinde $J^2 = 0$ eşitliğini sağlayan ve $rankJ = m$ ile verilen TM üzerindeki $(1,1)$ tipinden bir J tensör alanına bir hemen hemen tanjant yapı denir [2] .

Riemann manifoldu : M bir $C^\infty-$ manifold ve reel değerli $C^\infty-$ fonksiyonların halkası $C^\infty(M, R)$ olmak üzere $g : \chi(M) \times \chi(M) \to C^\infty(M, R)$ şeklinde bir iç çarpım tanımlıysa M' ye bir Riemann manifoldu denir. Burada g, M üzerinde bir iç çarpımdır. Metrik tensör, Riemann metriği veya diferensiyellenebilir metrik olarak da adlandırılır [32] .

Semi-Riemann manifoldu: M bir $C^\infty-$ manifold olsun. M üzerinde vektör alanlarının cümlesi $\chi(M)$ ve reel değerli $C^\infty-$ fonksiyonların halkası da $C^\infty(M, R)$ olmak üzere $<,> : \chi(M) \times \chi(M) \to C^\infty(M, R)$ fonksiyonu

1) 2-lineer

2) simetrik

3) $\forall X \in \chi(M)$ için $<X,Y>=0 \Longleftrightarrow Y=0 \in \chi(M)$ şartlarının sağlıyorsa $<,>$, semi-Riemann metriği ve M' ye de semi-Riemann manifoldu denir [32] .

Levi-Civita konneksiyonu: Bir M semi-Riemann manifoldu üzerinde $\forall X,Y,Z \in \chi(M)$ için

(i) $[X,Y]=\nabla_X Y-\nabla_Y X$

(ii) $Xg(Y,Z)=g(\nabla_X Y,Z)+g(Y,\nabla_X Z)$ olacak şekilde bir tek ∇ konneksiyonu vardır. ∇' ya M' nin Levi-Civita konneksiyonu denir [16], [19].

Riemann eğrilik tensörü: Bir $n-$boyutlu Riemann manifoldu M ve Levi-Civita konneksiyonu ∇ olsun. $\forall X,Y,Z \in \chi(M)$ için,

$$
\begin{gathered}
R:\chi(M)\times\chi(M)\times\chi(M)\rightarrow\chi(M)\\
(X,Y,Z)\rightarrow R(X,Y,Z)=\nabla_X\nabla_Y Z-\nabla_Y\nabla_X Z-\nabla_{[X,Y]}Z
\end{gathered}
$$

şeklinde tanımlanan R fonksiyonu M üzerinde $(1,3)$ tipinden tensördür. $R(X,Y)Z$ veya $R(X,Y,Z)$ ile gösterilen bu tensöre M' nin Riemann eğrilik tensörü denir [10],[16] .

Riemann-Christoffel eğrilik tensörü: M bir semi-Riemann manifoldu olsun.

$$
\begin{gathered}
K:\chi(M)\times\chi(M)\times\chi(M)\times\chi(M)\rightarrow C^{\infty}(M,R)\\
(X,Y,Z,W)\rightarrow K(X,Y,Z,W)=\ <X,R(Z,W)Y>
\end{gathered}
$$

olarak tanımlanan 4. mertebeden kovaryant tensöre, M üzerinde Riemann-Christoffel Eğrilik Tensörü denir [16] .

Konfigürasyon manifoldu: Klasik mekanikte, dış sınırlamalar yardımıyla fiziksel bir sisteme uygun durumların gerçekleşebildiği uzaya bir konfigürasyon uzayı denir. Tipik bir sistemin konfigürasyon uzayı bir manifold yapısına sahiptir, bundan dolayı konfigürasyon manifoldu olarak adlandırılır [3].

Hız faz uzayı: M bir konfigürasyon manifoldu olsun. $\pi_M : TM \rightarrow M$ doğal projeksiyon olmak üzere (TM,π_M,M)' ye M manifoldunun tanjant demeti denir. Bir $p\in M$ için $\pi_M^{-1}(p)$ lifi T_pM tanjant uzayıdır. TM tanjant uzayı hız faz uzayıdır [35].

Momentum faz uzayı: M bir konfigürasyon manifoldu olsun. $\pi_M : T^*M \rightarrow M$ doğal projeksiyon olmak üzere (T^*M,π_M,M)' ye M manifoldunun kotanjant demeti denir. Bir $p\in M$ için $\pi_M^{-1}(p)$ lifi T^*pM kotanjant uzayıdır. T^*M kotanjant uzayı momentum faz uzayıdır [35].

Hemen hemen simplektik manifold: $2m-$ reel boyutlu bir M manifoldunun herhangi bir p noktasında ϕ antisimetrik 2-formu regüler yani $boyM = rank\phi$ ise ϕ 2-formuna bir hemen hemen simplektik yapı denir. (M,ϕ) ikilisine bir hemen hemen simplektik manifold denir [2].

Simplektik manifold: $2m-$ reel boyutlu bir M manifoldunun üzerinde ϕ hemen hemen simplektik yapı kapalı yani $d\phi = 0$ ise ϕ 2-formuna simplektik yapı denir. (M, ϕ) ikilisine bir simplektik manifold denir [2].

Hemen hemen kompleks yapı : $m-$reel boyutlu bir manifold M ve M' nin tanjant demeti TM olsun. TM üzerinde $J^2 = -I$ eşitliğini sağlayan ve $rankJ = m$ ile verilen TM üzerindeki bir $(1,1)$ tipinden J tensör alanına bir hemen hemen kompleks yapı denir [35].

Hemen hemen kompleks manifold: Üzerinde hemen hemen kompleks yapı tanımlanan manifolda bir hemen hemen kompleks manifold denir [35].

Holomorfik fonksiyon: D, C^n nin bir açık alt kümesi olsun. f, D üzerinde kompleks değerli bir fonksiyon olmak üzere D' nin her bir $p = z_0$ noktasında $\underset{\Delta z \to 0}{lim} \dfrac{f(z_0^\alpha + \Delta z^\alpha) - f(z_0^\alpha)}{\Delta z^\alpha}$ $(\Delta z^\alpha = \Delta x^\alpha + i\Delta y^\alpha)$ her $\alpha(= 1, 2, ..., n)$ için limit var ve bu limit $\Delta z^\alpha \to 0$' a yaklaştığında $\dfrac{\Delta y^\alpha}{\Delta x^\alpha}$ yönüne bağlı değilse, f fonksiyonu p noktasında holomorfiktir. Her $p \in D$ için bu şart sağlanıyorsa f fonksiyonuna holomorfiktir denir [35].

Holomorfik dönüşüm: M ve M' iki kompleks manifold, $\phi : M \to M'$ sürekli bir dönüşüm ve $p \in M$ olmak üzere $\phi(p)$ nin bir V komşuluğu üzerinde tanımlanan holomorfik fonksiyon f olsun. Bu durumda $p \to \phi(p)$ ile tanımlanan ϕ sürekli dönüşümünün ϕ^* dual dönüşümü 1-formları 1-formlara dönüştürüyorsa ϕ diferensiyellenebilir dönüşümüne bir holomorfik dönüşüm denir [35].

Kompleks manifold: M, $2n$-boyutlu Hausdorff uzayının bir $\{U_\mu\}_{\mu\in\wedge}$ açık örtüsü için $\varphi_\mu : U_\mu \overset{\text{hom}}{\to} D\mu \subset C^n$ ve $u_\lambda \cap u_\mu \neq \oslash$ olmak üzere $\varphi_\lambda(u_\lambda \cap u_\mu)$ nin her bir p noktasında $f_{\mu\alpha} = \varphi_\mu(\varphi_\lambda^{-1}(p))$ fonksiyonları holomorfikse bu durumda M' ye bir kompleks manifold denir [35].

Hermit metriği: Bir J hemen hemen kompleks yapısıyla bir hemen hemen kompleks manifold M ve g, M üzerinde tanımlı Riemann metriği olsun. Bu durumda $g(Z, W) = g(JZ, JW), \forall Z, W \in \chi(M)$ olmak üzere g Riemann metriğine M üzerinde Hermit metriği denir [34].

Hermit manifoldu: Bir Hermit metriğiyle bir M hemen hemen kompleks manifolda bir hemen hemen Hermit manifoldu denir [34].

Kähler form: Bir J hemen hemen kompleks yapıyla bir hemen hemen Hermit manifoldu M olsun. M üzerinde tanımlı herhangi bir g Hermit metriğiyle ϕ 2-form arasında $\forall X, Y \in \chi(M)$ için $\phi(X, Y) = g(X, JY)$ şeklinde bir bağıntı varsa bu durumda ϕ ye M üzerinde bir Kähler form adı verilir [5],[34].

Kähler metriği : M bir hemen hemen kompleks manifold olsun. M üzerinde ϕ Kähler formu kapalı yani $d\phi = 0$ ise M üzerinde tanımlanan bir Hermit metriğine Kähler metriği denir [34].

Hemen hemen Kähler manifoldu: Bir Kähler metriğiyle hemen hemen kompleks manifolda bir hemen hemen Kähler manifoldu denir [34] .

Kähler manifoldu : Bir kompleks manifold üzerinde bir Kähler metriği tanımlanabiliyorsa bu kompleks manifolda bir Kähler manifoldu denir [34] .

Hemen hemen parakompleks yapı : $m-$reel boyutlu bir manifold M ve M' nin tanjant demeti TM olsun. TM üzerinde $J^2 = I$ eşitliğini sağlayan ve $rankJ = m$ ile verilen TM üzerindeki bir $(1,1)$ tipinden J tensör alanına bir hemen hemen parakompleks yapı denir [4].

Hemen hemen çarpım manifoldu: M $m-$ boyutlu diferensiyellenebilir manifold olsun. M' de $F^2 = 0$ olmak üzere F bir $(1,1)$ tipinde tensör alanı ve

M hemen hemen çarpım yapısıyla donatılmışsa M' ye bir hemen hemen çarpım manifoldu denir [2].

Diferensiyellenebilir dönüşüm: E^n ve E^m sırasıyla n -ve $m-$ boyutlu Öklid uzayları olmak üzere $F : E^n \to E^m$ fonksiyonu verilmiş olsun. F fonksiyonunun koordinat fonksiyonu olan $f_i : E^n \to R$ fonksiyonları diferensiyellenebilirse $F = (f_1, ..., f_m)$ fonksiyonu da diferensiyellenebilirdir. Bu durumda $F : E^n \to E^m$ fonksiyonuna bir diferensiyellenebilir dönüşüm denir [39].

Submersiyon: M ve N sırasıyla $m-$ ve $n-$ boyutlu manifoldlar olmak üzere, $F : M \to N$ diferensiyellenebilir dönüşüm olsun. $m \geq n$ ve $rankF = n$ oluyorsa M' nin her noktasında F' ye bir submersiyondur denir [2].

Demet: E manifoldu total uzay, M manifoldu baz uzay ve p de projeksiyon olmak üzere $p : E \to M$ bir örten submersiyonsa (E, p, M) üçlüsüne bir demet adı verilir [14].

Lif: E ve M C^∞ manifoldlar, $\pi : E \to M$ bir C^∞ dönüşüm olsun. Eğer π örten submersiyon ise (E, π, M) üçlüsüne bir lifli manifold denir. Bir (E, π, M) lifli manifoldunda E' ye total uzay, M' ye taban uzayı, π' ye projeksiyon ve her bir $p \in M$ noktası için E' nin $\pi^{-1}(p) = E_p$ altcümlesine de p üzerindeki lif denir [14], [35].

Semispray: J, $m-$reel boyutlu bir M manifoldunun TM tanjant demeti üzerinde bir hemen hemen yapı olsun. TM üzerinde lokal koordinatlar (q^i, v^i), $1 \leq i \leq m$ ve $\xi = v^i \dfrac{\partial}{\partial q^i} + \xi^i \dfrac{\partial}{\partial v^i}$, $\dot{q}^i = v^i$, $\dot{v}^i = \xi^i$ vektör alanına M üzerinde bir semispray (ikinci mertebeden lineer homojen diferensiyel denklem) denir [2] .

Liouville vektör alanı: J bir hemen hemen yapı ve ξ bir semispray olmak üzere $V = J\xi$ ile verilen V vektör alanına Liouville vektör alanı denir [2] .

Kinetik enerji : m-reel boyutlu bir manifold M ve M nin tanjant demeti TM olsun. M manifoldu üzerinde lokal koordinatlar (q^i), $1 \leq i \leq m$ ve TM üzerinde lokal koordinatlar (q^i, v^i) olsun. m_i, M üzerinde m parçacıklı sistemin kütlesi olmak üzere $T = \frac{1}{2} m_i (\dot{q}^i)^2 = \frac{1}{2} m_i (v^i)^2$ ile verilen $T : TM \to R$ dönüşümüne sistemin kinetik enerjisi denir [7], [35] .

Potansiyel enerji : m-reel boyutlu bir manifold M ve M manifoldu üzerinde lokal koordinatlar (q^i), $1 \leq i \leq m$ olsun. m_i, M üzerinde m parçacıklı sistemin kütlesi g, yer çekimi ivmesi ve h, sistemin orjine uzaklığı olmak üzere $P = m_i gh$ ile verilen $P : M \to R$ dönüşümüne sistemin potansiyel enerjisi denir [7], [35] .

Kanonik projeksiyon: TM tanjant demetinden M manifoldu üzerine sürekli ve örten $\underset{z \to \tau_M(z)=p}{\tau_M : TM \to M}$ dönüşümüne kanonik projeksiyon denir [19] .

Lagrangian fonksiyonu: m-reel boyutlu bir manifold M, M nin tanjant demeti TM, $\tau_M : TM \to M$ kanonik projeksiyon olsun. $T = \frac{1}{2}m_i(\dot{q}^i)^2 = \frac{1}{2}m_i(v^i)^2$ ve $P = m_i gh$ sırasıyla sistemin kinetik ve potansiyel enerjisi olmak üzere $L = T - P\circ\, \tau_M$ ile verilen $L : TM \to R$ dönüşümüne Lagrangian fonksiyonu denir [35] .

Enerji fonksiyonu : V Liouville vektör alanı ve L Lagrangian fonksiyonu olmak üzere TM üzerinde $E_L = V(L) - L$ fonksiyonuna L ye bağlı Enerji fonksiyonu denir [35].

Dikey türev: Bir M manifoldu üzerinde her bir X vektör alanı için, X ile bir ω p-formunun $i_X\omega$ iç çarpımı veya dikey türevi aşağıdaki gibi tanımlanır.

(1) $i_X\omega = 0, p = 0$

(2) $i_X\omega = \omega(X), p = 1$

(3) $i_X\omega = \omega(Y_1, ..., Y_{P-1}), Y_1, ..., Y_{P-1} \in \chi(M)$ bu durumda $i_X\omega \in \wedge^{p-1}(M)$ olur [2] .

Euler-Lagrange vektör alanı: m-reel boyutlu bir M manifoldunun TM tanjant demeti üzerinde $\phi_L = -dd_J L$ kapalı 2-form ve $\chi(TM)$, TM üzerindeki vektör alanlarının cümlesi ve $(\chi(TM))^*$, TM üzerindeki 1-formların cümlesi olsun. Bu durumda; $TM_\phi : \chi(TM) \to (\chi(TM))^*$ izomorfizmi için $i_{X_L}\phi_L = dE_L$ eşitliğini sağlayan bir tek X_L vektör alanı vardır ki bu vektör alanına Euler-Lagrange vektör alanı denir [2] .

Lagrange sistem : TM tanjant demet, ϕ_L kapalı 2-form, X_L Euler-Lagrange vektör alanı, E_L L ye bağlı enerji fonksiyonu olmak üzere (TM, ϕ_L, X_L) veya (TM, ϕ_L, E_L) üçlüsüne Lagrange sistem adı verilir [2] .

Euler-Lagrange denklemleri: m-reel boyutlu bir M manifoldunun TM tanjant demeti üzerinde lokal koordinatlar (q^i, v^i), $1 \leq i \leq m$,olsun. L Lagrange fonksiyonu E_L L' ye bağlı enerji fonksiyonu ve X_L Euler-Lagrange vektör alanı olmak üzere $i_{X_L}\phi_L = dE_L$ eşitliğinden elde edilen bu denklemlere Euler-Lagrange denklemleri denir [2]. Tanjant demeti üzerindeki hemen hemen tanjant yapı için Euler-Lagrange denklemi $\frac{d}{dt}(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}) - \frac{\partial L}{\partial q} = 0$ dir.

Dual hemen hemen tanjant yapı: m-reel boyutlu bir manifold M ve M nin kotanjant demeti T^*M olsun. T^*M üzerinde $J^{*2} = 0$ eşitliğini sağlayan ve

$rank\ J^* = m$ ile verilen T^*M üzerindeki $(1,1)$ tipinden J^* tensör alanına T^*M üzerinde hemen hemen tanjant yapı denir [35] .

Liouville form: m-reel boyutlu bir manifold M ve M nin kotanjant demeti T^*M olsun. T^*M üzerinde J^* hemen hemen tanjant yapı ve ω, 1-form olsun. M manifoldu üzerinde lokal koordinatlar (q^i), $1 \leq i \leq m$ ve T^*M üzerinde lokal koordinatlar (q^i, p_i) olmak üzere ω 1-formu için T^*M üzerinde lokal olarak $\lambda_M = J^*(\omega)$ ile ifade edilen λ_M ye Liouville form adı verilir [2] .

Hamilton fonksiyonu : (M, ϕ) simplektik manifold olsun. $H : M \to R$ ile verilen ve L ye karşılık gelen H enerji fonksiyonuna Hamilton fonksiyonu denir [2] .

Hamilton vektör alanı: (M, ϕ) simplektik manifold ve $H : M \to R$, M üzerinde bir Hamilton enerji olsun. $\chi(M)$, M üzerinde vektör alanların cümlesi ve $(\chi(TM))^*$, M üzerindeki 1-formların cümlesi olsun. Bu durumda $M_\phi : \chi(M) \to (\chi(M))^*$ izomorfizm dönüşümü $i_{X_H}\phi = dH$ biçiminde tanımlanmak üzere M üzerinde bir tek X_H vektör alanı vardır ki bu vektör alanına H Hamilton enerjiyle Hamilton vektör alanı denir [2] .

Hamilton sistem: M bir manifold, ϕ kapalı 2-form, X_H Hamilton vektör alanı olmak üzere (M, ϕ, X_H) veya (M, ϕ, H) üçlüsüne Hamilton sistem denir [35].

Hamilton denklemleri : (M, ϕ), $2m$-reel boyutlu simplektik manifold ve M üzerinde lokal koordinatlar $(q^i, p_i), 1 \leq i \leq m$ olsun. H Hamilton fonksiyon X_H Hamilton vektör alanı olmak üzere $i_{X_H}\phi = dH$ eşitliğinden $\dfrac{dq^i}{dt} = \dfrac{\partial H}{\partial p_i}, \dfrac{dp_i}{dt} = -\dfrac{\partial H}{\partial q_i}$ şeklinde elde edilen denklemlere Hamilton denklemleri adı verilir [2].

Einstein toplam kuralı: $\sum_{j=1}^{n} a_j x^j$ ifadesindeki gibi bir indis (bir kez üstte bir kez altta olmak üzere) iki kez tekrarlanırsa $\sum$ işaretini kaldırıp sadece $a_j x^j$ yazarak, indise alması mümkün değerleri vermek suretiyle elde edilen, bütün terimlerin toplanması kabulüne Einstein toplam kuralı adı verilir [10].

Kesitsel eğrilik: Bir p noktasında M manifoldunun lineer bağımsız u^i ve v^i tanjant vektörleri tarafından gerilen (u, v) yüzeyine teğet bir Riemann manifoldunun iki boyutlu jeodezik alt manifoldunun Gauss eğriliği, kesitsel eğrilik olarak adlandırılır ve K ile gösterilir. $p \in M$ için u^i ve v^i ortogonal birim vektörler olmak üzere (u, v) yüzeyinde kesitsel eğrilik ;

$$K = \frac{R_{hijk} u^h v^i u^j v^k}{(g^{hk} g^{ij} - g^{hj} g^{ik}) u^h v^i u^j v^k}$$

dir [15].

Sabit eğrilik: p noktasında K kesitsel eğriliği, (u, v) yüzeyinden bağımsızsa $R_{hijk} = K(g^{hk} g^{ij} - g^{hj} g^{ik})$ için M manifoldu, p de sabit eğriliklidir denir.

n boyutlu bir bağlantılı Riemann manifoldunun $K(p)$ kesitsel eğriliği $n > 2$ için her bir p noktasında bütün yüzeylerden bağımsızdır, o zaman $K(p)$ mutlak sabittir ve bu yüzden M manifoldu sabit eğriliklidir [15].

Uzay form: M manifoldunun kesitsel eğriliği, (u, v) yüzeyinin bütün noktalarında sabitse sabit eğrilikli bir manifold veya bir uzay form olarak adlandırılır [15].

Kompleks uzay form: c sabit holomorfik kesitsel eğrilikli n-boyutlu bir Kähler manifolduna bir kompleks uzay formu denir [12].

Kähler uzay form: M Hermit manifoldunun holomorfik kesitsel eğriliği (u, v) yüzeyinin bütün noktalarında sabitse sabit holomorfik kesitsel eğrilikli bir manifold veya bir Kähler uzay form olarak adlandırılır [12].

Parakompleks uzay form: c sabit para-holomorfik kesitsel eğrilikli n-boyutlu bir para-kähler manifolduna bir parakompleks uzay formu denir [8].

Para-kähler uzay form: M para-Hermit manifoldunun kesitsel eğriliği (u, v) yüzeyinin bütün noktalarında sabitse sabit para-holomorfik kesitsel eğrilikli bir manifold veya bir para-Kähler uzay formu olarak adlandırılır [8].

İzometrik dönüşüm: K kesitsel eğriliği 0 ise $R_{hijk} = 0$ dır ve M manifoldu üzerinde lokal koordinat sistemi $(x^{1'}, x^{2'}, ..., x^{n'})$ olmak üzere $g^{ij'}$ metrik tensörünün bütün bileşenleri sabittir. Dolayısıyla M nin her koordinat komşuluğu, Öklid uzayınının belli bir tanım kümesi üzerinde, izometrik bir dönüşüm tanımlar denir. Tersine M nin her bir koordinat komşuluğu, Öklid uzayının belli bir tanım kümesi üzerinde izometrik bir dönüşüm tanımlıyorsa $R_{hijk} = 0$ sağlanır [15].

Kesitsel eğrilik: (M, g) Semi-Riemann manifoldu ve $boyM \geq 2$ olsun. T_pM tanjant uzayının iki boyutlu alt uzayı Π olmak üzere $v, w \in \Pi$ tanjant vektörleri için Al alan fonksiyonu $Al(v, w) = g(v, v)g(w, w) - g(v, w)^2$ biçiminde tanımlandığında $Al(v, w) \neq 0$, non-dejeneredir. Bu durumda $K = \dfrac{g(R(v, w)w, v)}{Al(v, w)^2}$ ile tanımlanan K' ya Π' nin kesitsel eğriliği denir ve $K(\Pi)$ ile gösterilir [17].

3 SABİT J-KESİTSEL EĞRİLİKLİ TANJANT MANİFOLDLARI

Tanım 1: M, $J^2 = 0$ olmak üzere $(1,1)$ tipinde bir tensör alanı olan bir $J \neq \mp I$ bir hemen hemen tanjant yapısıyla donatılmış olan bir manifold olsun. (M, J) ve (M, J, g) sırasıyla bir hemen hemen çarpım manifoldu ve hemen hemen tanjant manifoldudur. Burada g, M de bir semi-Riemann metriği ve J anti-simetriktir, yani;

$$g(JX, Y) = 0, \forall X, Y \in \chi(M) \tag{3.1}$$

dir.

Dolayısıyla, J Levi-Civita konneksiyonu paralel yani $(\nabla_J = 0)$ ise, (M, J, g) hemen hemen tanjant manifolduna bir tanjant manifoldu denir. (M, J, g) bir tanjant manifoldu ve eğrilik $(0,4)$ tensör alanı

$$R(X, Y, Z, V) = g(R(X, Y)Z, V); \forall X, Y, Z, V \in \chi(M) \tag{3.2}$$

ile gösterilsin.

Bu durumda g'nin ∇ Levi-Civita konneksiyonuna bağlı $(1,3)$ tensör alanı Riemann eğriliği $R = [\nabla, \nabla] - \nabla_{[\ ,\ ]}$ ile verilir. Dolayısıyla Riemann eğrilik tensör alanı için aşağıdaki bağıntıyı yazabiliriz.

$$\begin{gathered} R(X, Y, Z, V) = -R(Y, X, Z, V) = -R(X, Y, V, Z) = R(JX, JY, Z, V) \\ \text{ve } \sum_{\sigma} R(X, Y, Z, V) = 0. \end{gathered} \tag{3.3}$$

Burada σ bütün dairesel permütasyonların üzerine toplamayı gösterir.

Bildiğimiz gibi $(0,4)$ tensör alanı

$$R_0(X, Y, Z, V) = \frac{1}{4} \left\{ g(X, Z)g(Y, V) - g(X, V)g(Y, Z) \right\}, \tag{3.4}$$

ile tanımlanır. Burada $\forall X, Y, Z, V \in \chi(M)$ dır. Her $p \in M$ için, S' ye kısıtlanmış g non- dejenere ise $S \subset T_pM$ alt uzayına non-dejenere denir. $\{u, v\}$, $\Pi \subset T_pM$ düzleminin bir bazıysa, Π non-dejeneredir, ancak ve ancak $g(u, u)g(v, v) - [g(u, v)]^2 \neq 0$ dır. Bu durumda $\Pi = span\{u, v\}$' nin kesitsel eğriliği aşağıdaki eşitlikle verilir.

$$k(\Pi) = \frac{R(u, v, u, v)}{g(u, u)g(v, v) - [g(u, v)]^2}. \tag{3.5}$$

Herhangi $X \in \chi(M)$ için (3.1) den, X ve JX ortogonaldir. J ile invaryant olan bir düzleme bir J düzlem denir. Herhangi $p \in M$ için, $u \in T_pM$ vektörü $g(u, u) = 0$ şartını sağladığından izotropiktir. Eğer $u \in T_pM$

izotropik değilse, $\{u, Ju\}$ tarafından gerilen $J-$düzleminin $H(u)$ kesitsel eğriliği u tarafından tanımlanan $J-$kesitsel eğriliği olarak adlandırılır. $H(u)$ sabit ise (M, J, g)' ye sabit $J-$kesitsel eğrilikli manifold veya bir uzay form denir.

Teorem 1: (M, J, g) her bir $p \in M$ için bir tanjant manifold olsun. $u \in T_pM$ için $H(u) = c_p$ olacak şekilde $c_p \in R$ vardır, öyle ki $g(u,u)g(Ju,Ju) \neq 0$ şartı sağlanır. Dolayısıyla bu R Riemann- Christoffel tensörü $R = cR_0$ eşitliğini sağlar. Burada c, $p \to c_p$ şeklinde tanımlanan fonksiyondur,tersi de mümkündür.

Tanım 2: Bir (M, J, g) tanjant manifoldu Teorem 1 in şartlarını sağlıyorsa c sabit diffeomorfik kesitsel eğrilikli olarak adlandırılır.

Teorem 2: (M, J, g), $boyM > 2$ olmak üzere bir tanjant manifold olsun. Bu durumda aşağıdaki özellikler denktir:

1) M, $c = 0$ olmak üzere sabit diffeomorfik kesitsel eğrilikli bir uzaydır.

2) R Riemann- Christoffel tensörü aşağıdaki ifadeye sahiptir:

$$R(X, Y, Z, V) = 0, \forall X, Y, Z, V \in \chi(M). \tag{3.6}$$

Bu bölümde $c = 0$, diffeomorfik kesitsel eğrilikli, $2n \geq 2$ boyutlu uzay formlarının bir modeli olan $(\mathbf{R}_n^{2n}, g, J)$ üzerinde mekanik sistemler kurulacaktır. Bunun için gerekli bazı temel yapıları verelim.

$\mathbf{R}_n^{2n}$' in herhangi bir p noktasının bir U komşuluğunda (x^i, y^i) reel bir koordinat sistemi olsun. Sırasıyla $\{\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial y^i}\}$ ve $\{dx^i, dy^i\}$, $T_p(\mathbf{R}_n^{2n})$ tanjant uzayının ve $T_p^*(\mathbf{R}_n^{2n})$ kotanjant uzayının doğal bazları olsun.

$(\mathbf{R}_n^{2n}, g, J)$ uzayı, $2n \geq 2$ boyutlu uzay formlarının bir modelidir ve $c = 0$ olmak üzere diffeomorfik kesitsel eğriliklidir. Burada g metriği;

$$g = dx^i \otimes dy^i, \tag{3.7}$$

ve J hemen hemen tanjant yapısı

$$J = \frac{\partial}{\partial y^i} \otimes dx^i, \tag{3.8}$$

şeklindedir. Dolayısıyla,

$$J(\frac{\partial}{\partial x^i}) = \frac{\partial}{\partial y^i}, \ J(\frac{\partial}{\partial y^i}) = 0. \tag{3.9}$$

olur. $\mathbf{R}_n^{2n}$ manifoldunun herhangi bir p noktasında $T_p^*(\mathbf{R}_n^{2n})$ kotanjant uzayının J^* dual endomorfizmi $J^{*2} = 0$ eşitliğini sağlar ve aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$J^*(dx^i) = dy^i, J^*(dy^i) = 0. \tag{3.10}$$

3.1 SJ-KETM Üzerinde Lagrangian Mekanik Sistemler

Bu kısımda, $(\mathbf{R}_n^{2n}, g, J)$ uzay formu üzerinde Euler-Lagrange denklemlerini elde edeceğiz.

$\mathbf{R}_n^{2n}$' in koordinatları (x^i, y^i) ile hemen hemen tanjant yapısı da J ile verilsin. Özel bir vektör alanı olan semisprayi de aşağıdaki gibi kuralım:

$$\xi = X^i \frac{\partial}{\partial x^i} + Y^i \frac{\partial}{\partial y^i}, \;\; X^i = \dot{x}^i = y^i, \;\; Y^i = \dot{y}^i. \tag{3.11}$$

$(\mathbf{R}_n^{2n}, g, J)$ reel uzay formunda Liouville vektör alanı, $V = J\xi$ tarafından belirlenen vektör alanıdır ve aşağıdaki formülle hesaplanır:

$$V = J\xi = X^i \frac{\partial}{\partial y^i}. \tag{3.12}$$

$(\mathbf{R}_n^{2n}, g, J)$ reel uzay formunda mekanik sistemin, L ye ilişkin enerji fonksiyonunun $E_L = V(L) - L$ ile bulunduğunu biliyoruz.

i_j operatörü

$$i_j : \wedge^2 \mathbf{R}_n^{2n} \to \wedge^1 \mathbf{R}_n^{2n} \tag{3.13}$$

şeklinde tanımlıdır ve J ile iç çarpım operatörü olarak adlandırır.

$$d_J = \frac{\partial}{\partial y^i} dx^i : \mathcal{F}(\mathbf{R}_n^{2n}) \to \wedge^1 \mathbf{R}_n^{2n}. \tag{3.14}$$

ile verilen d_J dış dikey türevi aşağıdaki gibi Lie türevi olarak da tanımlanır:

$$d_J = [i_J, d] = i_J d - d i_J. \tag{3.15}$$

Burada d bilinen dış türevdir. (3.9) tarafından belirlenen J hemen hemen tanjant yapısı için, bu kapalı form $\Phi_L = -dd_J L$ ile elde edilen kapalı 2-formdur.

$(\mathbf{R}_n^{2n}, g, J)$ uzay formunda Φ_L kapalı formu simplektik yapıdır. Dolayısıyla aşağıdaki denklem elde edilir:

$$\Phi_L = -\frac{\partial^2 L}{\partial x^j \partial y^i} dx^j \wedge dx^i - \frac{\partial^2 L}{\partial y^j \partial y^i} dy^j \wedge dx^i.$$

(1.1)' de verilen $i_\xi \Phi_L = dE_L$ dinamik denklemin sol tarafı aşağıdaki gibi hesaplanır:

$$\Phi_L(\xi) = -X^i \frac{\partial^2 L}{\partial x^j \partial y^i} \delta_j^i dx^i + X^i \frac{\partial^2 L}{\partial x^j \partial yi} dx^j + X^i \frac{\partial^2 L}{\partial y^j \partial yi} dy^j - Y^i \frac{\partial^2 L}{\partial y^j \partial y^i} \delta_j^i dx^j. \tag{3.17}$$

E_L enerji fonksiyonu hesaplandığında ;

$$E_L = X^I \frac{\partial L}{\partial y^i} - L, \tag{3.18}$$

elde edillir ve dolayısıyla diferensiyeli aşağıdaki gibi bulunur:

$$dE_L = X^i \frac{\partial^2 L}{\partial x^j \partial y^i} dx^j - \frac{\partial L}{\partial x^j} dx^j + X^i \frac{\partial^2 L}{\partial y^j \partial y^i} dy^j - \frac{\partial L}{\partial y^j} dy^j. \tag{3.19}$$

$i_\xi \Phi_L = dE_L$ dinamik denklemi göz önüne alındığında aşağıdaki ifadenin elde edileceği görülür:

$$-\left[X^j \frac{\partial^2 L}{\partial x^j \partial y^i} + Y^j \frac{\partial^2 L}{\partial y^j \partial y^i} \right] dx^j + \frac{\partial L}{\partial x^j} dx^j = 0. \tag{3.20}$$

(3.11)' de kurulan ξ vektör alanı yardımıyla (3.20) denklemi aşağıdaki ifadeye dönüşür:

$$-\xi(\frac{\partial L}{\partial y^j}) dx^j + \frac{\partial L}{\partial x^j} dx^j = 0. \tag{3.21}$$

$\alpha : I \subset R \to \mathbf{R}_n^{2n}$ eğrisi ξ' nın integral eğrisiyse, bu durumda aşağıda verilen denklem elde edilir:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\frac{\partial L}{\partial y^j}) - \frac{\partial L}{\partial x^j} = 0. \tag{3.22}$$

Elde edilen bu denklemlere Euler-Lagrange denklemleri denir. Bu Euler-Lagrange denklemlerinin çözümleri $(\mathbf{R}_n^{2n}, g, J)$ uzay formu üzerindeki ξ semisprayinin yörüngeleridir. Sonuç olarak $(\mathbf{R}_n^{2n}, \Phi_L, \xi)$ üçlüsünün, $(\mathbf{R}_n^{2n}, g, J)$ sabit $J-$kesitsel eğrilikli tanjant manifoldlarda mekanik sistem olduğu görülür.

Yukarıda yapılan işlemler aşağıdaki önerme ile modellenebilir.

Önerme 1: J, $(\mathbf{R}_n^{2n}, g, J)$ sabit $J-$kesitsel eğrilikli reel uzayda hemen hemen tanjant yapısı olsun. Aynı zamanda (f_1, f_2), $\mathbf{R}_n^{2n\prime}$ in doğal bazı olsun. Dolayısıyla aşağıdaki bağıntı yazılabilir.

$$J(f_2) - f_1 = 0 \Longleftrightarrow \dot{f}_{2,L} - f_{1,L} = 0,$$

Burada

$$f_{1,L} = \frac{\partial L}{\partial x^j},\ f_{2,L} = \frac{\partial L}{\partial y^j}, \dot{f}_{2,L} = \frac{\partial}{\partial t}(\frac{\partial L}{\partial y^j})$$

dır.

3.2 SJ*-KEKoM Üzerinde Hamiltonian Mekanik Sistemler

Bu kısımda $((\mathbf{R}_n^{2n})^*, g, J^*)$ sabit J^*-kesitsel eğrilikli kotanjant manifoldlarda Hamilton denklemleri elde edilecektir.

J^*, (3.10) tarafından verilen bir hemen hemen tanjant yapısı olsun. $\omega = (x^i dx^i + y^i dy^i)$ ile verilsin. $J^*(\omega) = x^i dy^i$ eşitliğiyle hesaplanan λ Liouville formu $(\mathbf{R}_n^{2n})^*$' de 1-formdur. $\Phi = -d\lambda$ kapalı form olduğundan $(\mathbf{R}_n^{2n})^*$' de bir simplektik yapıdır. Farzedelim ki H Hamilton enerjiye bağlı X_H Hamilton vektör alanı

$$X_H = X^i \frac{\partial}{\partial x^i} + Y^i \frac{\partial}{\partial y^i}. \tag{3.23}$$

eşitliğiyle verilsin. $(\mathbf{R}_n^{2n})^*$' de bu Φ kapalı formu için aşağıdaki eşitlik yazılır:

$$\Phi = -d\lambda = dy^i \wedge dx^i. \tag{3.24}$$

İşleme devam edilirse, aşağıdaki denklem elde edilir:

$$i_{X_H}\Phi = \Phi(X_H) = -X^i dy^i + Y^i dx^i. \tag{3.25}$$

Şimdi ise H Hamilton fonksiyonunun diferensiyelini hesaplayalım:

$$dH = \frac{\partial H}{\partial x^i} dx^i + \frac{\partial H}{\partial y^i} dy^i. \tag{3.26}$$

(3.25), (3.26) denklemlerini $i_{X_H}\Phi = dH$ dinamik denklem gereği eşitlersek; sabit J^*-kesitsel eğrilikli uzay formunda Hamilton vektör alanı aşağıdaki gibi elde edilir:

$$X_H = -\frac{\partial H}{\partial y^i}\frac{\partial}{\partial x^i} + \frac{\partial H}{\partial x^i}\frac{\partial}{\partial y^i}. \tag{3.27}$$

X_H Hamilton vektör alanının integral eğrisi

$$\alpha : I \subset \mathbf{R} \to (\mathbf{R}_n^{2n})^* \tag{3.28}$$

olsun. Bu durumda,

$$X_H(\alpha(t)) = \dot{\alpha},\ \ t \in I \tag{3.29}$$

dir.

Lokal koordinatlarda

$$\alpha(t) = (x^i(t), y^i(t)), \tag{3.30}$$

dir ve diferensiyeli

$$\dot{\alpha}(t) = \frac{dx^i}{dt}\frac{\partial}{\partial x^i} + \frac{dy^i}{dt}\frac{\partial}{\partial y^i} \tag{3.31}$$

şeklindedir.

Yukarıdaki (3.27), (3.29) ve (3.31) denklemleri göz önüne alınırsa Hamilton denklemleri olarak adlandırılan denklemleri aşağıdaki gibi elde ederiz:

$$\frac{dx^i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial y^i}, \frac{dy^i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial x^i}. \tag{3.32}$$

Sonuç olarak, $(\mathbf{R}_n^{2n}, g, J)$ tanjant manifoldunun duali olan $((\mathbf{R}_n^{2n})^*, g, J^*)$ üzerinde $((\mathbf{R}_n^{2n})^*, \Phi, X_H)$ sistemi de bir Hamiltonian mekanik sistem olarak adlandırılır.

3.3 SJ-KETM ve SJ*-KEKoM Üzerinde Mekanik Değerlendirmeler

Bu çalışmadan öğrendik ki, genelleştirilmiş klasik mekanik ve alan teorisindeki Lagrange ve Hamilton formalizmleri sabit J ve J^* $-$kesitsel eğrilikli tanjant ve kotanjant uzaylarının modelleri olan $(\mathbf{R}_n^{2n}, g, J)$ ve $\left((\mathbf{R}_n^{2n})^*, g, J^*\right)$ de aslına uygun bir biçimde karakterize edilir. Böylece $\mathbf{R}_n^{2n}$' de ξ semisprayin yörüngeleri $(\mathbf{R}_n^{2n}, \Phi_L, X_H)$ mekanik sisteminde (3.22) tarafından verilen Euler-Lagrange denklemlerinin çözümleridirler. Aynı zamanda $((\mathbf{R}_n^{2n})^*, \Phi, X_H)$ mekanik sisteminde (3.32) tarafından belirlenen Hamilton denklemlerinin çözümleri $(\mathbf{R}_n^{2n})^*$' de X_H Hamilton vektör alanının yörüngeleridir.

4 SABİT J-KESİTSEL EĞRİLİKLİ KÄHLER MANİFOLDLARI

Tanım 1: M, $J^2 = -I$ olmak üzere $(1,1)$ tipinde bir tensör alanı olan bir $J \neq \mp I$ bir hemen hemen kompleks yapısıyla donatılmış olan bir manifold olsun. (M, J) ve (M, J, g) sırasıyla bir hemen hemen kompleks manifoldu ve hemen hemen Hermitian manifoldudur [17] . Burada g, M' de bir semi-Riemann metriği ve J anti-simetriktir, yani;

$$g(JX, Y) + g(X, JY) = 0, \forall X, Y \in \chi(M) \tag{4.1}$$

dir.

Dolayısıyla, J Levi-Civita konneksiyonu paralel yani $(\nabla_J = 0)$ ise, (M, J, g) hemen hemen Hermitian manifolduna bir Kähler manifoldu denir [13] . (M, J, g) bir Kähler manifoldu ve eğrilik $(0,4)$ tensör alanı

$$R(X, Y, Z, V) = g(R(X, Y)Z, V); \forall X, Y, Z, V \in \chi(M) \tag{4.2}$$

ile verilsin. Bu taktirde g'nin ∇ Levi-Civita konneksiyonuna bağlı $(1,3)$ tensör alanı Riemann eğriliği olan $R = [\nabla, \nabla] - \nabla_{[\;,\;]}$ ile verilir. Böylece, Riemann eğrilik tensör alanı aşağıda verilen şekilde yazılır.

$$\begin{gathered} R(X, Y, Z, V) = -R(Y, X, Z, V) = -R(X, Y, V, Z) = R(JX, JY, Z, V) \\ \text{ve } \sum_{\sigma} R(X, Y, Z, V) = 0. \end{gathered} \tag{4.3}$$

Buradaki σ bütün dairesel permütasyonların üzerine toplamayı gösterir.

Bildiğimiz gibi $(0,4)$ tensör alanı aşağıda gösterilen şekilde tanımlanır:

$$R_0(X, Y, Z, V) = \frac{1}{4} \left\{ \begin{array}{c} g(X, Z)g(Y, V) - g(X, V)g(Y, Z) - g(X, JZ)g(Y, JV) \\ +g(X, JV)g(Y, JZ) - 2g(X, JY)g(Z, JV) \end{array} \right\}. \tag{4.4}$$

Burada $\forall X, Y, Z, V \in \chi(M)$ dır. Her $p \in M$ için, S' ye kısıtlanmış g non- dejenere ise $S \subset T_pM$ alt uzayına non-dejenere denir. $\{u, v\}$, $\Pi \subset T_pM$ düzleminin bir bazıysa, Π non-dejeneredir, ancak ve ancak
$g(u, u)g(v, v) - [g(u, v)]^2 \neq 0$ dır. Bu durumda $\Pi = span\{u, v\}$' nin kesitsel eğriliği,

$$k(\Pi) = \frac{R(u, v, u, v)}{g(u, u)g(v, v) - [g(u, v)]^2} \tag{4.5}$$

ile verilir.

Herhangi $X \in \chi(M)$ için (4.1) den, X ve JX ortogonaldir. J ile invaryant olan bir düzleme bir J düzlem denir. Herhangi $p \in M$ için, $u \in T_pM$ vektörü $g(u, u) = 0$ şartını sağladığından izotropiktir. Eğer $u \in T_pM$

izotropik değilse,$\{u, Ju\}$ tarafından gerilen $J-$düzleminin $H(u)$ kesitsel eğriliği u tarafından tanımlanan $J-$kesitsel eğriliği olarak adlandırılır. $H(u)$ sabit ise (M, J, g)' ye sabit $J-$kesitsel eğrilikli Kähler manifold veya bir Kähler uzay form denir [12] .

Teorem 1: (M, J, g) her bir $p \in M$ için bir Kähler manifold olsun. $u \in T_pM$ için $H(u) = c_p$ olacak şekilde $c_p \in R$ vardır, öyle ki $g(u, u)g(Ju, Ju) \neq 0$ şartı sağlanır. Dolayısıyla bu R Riemann- Christoffel tensörü $R = cR_0$ eşitliğini sağlar. Burada c, $p \to c_p$ şeklinde tanımlanan fonksiyondur,tersi de mümkündür.

Tanım 2: Bir (M, J, g) Kähler manifoldu Teorem 1 in şartlarını sağlıyorsa c sabit holomorfik kesitsel eğrilikli olarak adlandırılır.

Teorem 2: (M, J, g), $boyM > 2$ olmak üzere bir Kähler manifold olsun. Bu durumda aşağıdaki özellikler denktir:

1) M, $c = 0$ olmak üzere sabit holomorfik kesitsel eğrilikli bir uzaydır.

2) R Riemann- Christoffel tensörü aşağıdaki ifadeye sahiptir:

$$R(X, Y, Z, V) = 0, \forall X, Y, Z, V \in \chi(M). \tag{4.6}$$

Bu bölümde $c = 0$, holomorfik kesitsel eğrilikli, $2n \geq 2$ boyutlu Kähler uzay formlarının bir modeli olan $(\mathbf{R}^{2n}_n, g, J)$ üzerinde mekanik sistemler kurulacaktır. Bunun için gerekli bazı temel kavramları sunalım.

$\mathbf{R}^{2n}_n$ in herhangi bir p noktasının bir U komşuluğunda (x^i, y^i) reel bir koordinat sistemi olsun. Sırasıyla $\{\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial y^i}\}$ ve $\{dx^i, dy^i\}$, $T_p(\mathbf{R}^{2n}_n)$ tanjant uzayının ve $T^*_p(\mathbf{R}^{2n}_n)$ kotanjant uzayının doğal bazları olsun.

$(\mathbf{R}^{2n}_n, g, J)$ uzayı, $2n \geq 2$ boyutlu Kähler uzay formlarının bir modelidir ve $c = 0$ için holomorfik kesitsel eğriliklidir. Burada g metriktir.

$$g = dx^i \otimes dx^i - dy^i \otimes dy^i, \tag{4.7}$$

ve J hemen hemen kompleks yapısı

$$J = \frac{\partial}{\partial y^i} \otimes dx^i - \frac{\partial}{\partial x^i} \otimes dy^i, \tag{4.8}$$

şeklindedir. Dolayısıyla, aşağıda belirtilen eşitlikler sağlanır.

$$J(\frac{\partial}{\partial x^i}) = \frac{\partial}{\partial y^i}, \ J(\frac{\partial}{\partial y^i}) = -\frac{\partial}{\partial x^i}. \tag{4.9}$$

$\mathbf{R}^{2n}_n$ manifoldunun herhangi bir p noktasında $T^*_p(\mathbf{R}^{2n}_n)$ kotanjant uzayının J^* dual endomorfizmi $J^{*2} = -I$ eşitliğini sağlar ve

$$J^*(dx^i) = dy^i, \ J^*(dy^i) = -dx^i, \tag{4.10}$$

şeklinde tanımlanır.

4.1 SJ-KEKM Üzerinde Lagrangian Mekanik Sistemler

Bu kısımda, $(\mathbf{R}_n^{2n}, g, J)$ Kähler uzay formu üzerinde Euler-Lagrange denklemleri elde edilecektir.

$\mathbf{R}_n^{2n}$' in koordinatları (x^i, y^i) ile hemen hemen kompleks yapısı da J ile verilsin. Özel bir vektör alanı olan semisprayi de aşağıdaki gibi oluşturalım.

$$\xi = X^i \frac{\partial}{\partial x^i} + Y^i \frac{\partial}{\partial y^i}, \; X^i = \dot{x}^i = y^i, \; Y^i = \dot{y}^i. \tag{4.11}$$

$(\mathbf{R}_n^{2n}, g, J)$ Kähler uzay formunda Liouville vektör alanı, $V = J\xi$ tarafından belirlenen vektör alanıdır ve bu vektör alanı aşağıda gösterilen formülle hesaplanır:

$$V = J\xi = X^i \frac{\partial}{\partial y^i} - Y^i \frac{\partial}{\partial x^i}. \tag{4.12}$$

$(\mathbf{R}_n^{2n}, g, J)$ Kähler uzay formunda mekanik sistemin, L' ye ilişkin enerji fonksiyonunun $E_L = V(L) - L$ ile verildiğini biliyoruz.

i_J operatörü

$$i_J : \wedge^2 \mathbf{R}_n^{2n} \to \wedge^1 \mathbf{R}_n^{2n} \tag{4.13}$$

şeklinde tanımlıdır ve J tarafından verilen kontraksiyon operatörü olarak adlandırılır.

$$d_J = \frac{\partial}{\partial y^i} dx^i - \frac{\partial}{\partial x^i} dy^i : \mathcal{F}(\mathbf{R}_n^{2n}) \to \wedge^1 \mathbf{R}_n^{2n}, \tag{4.14}$$

ile verilen d_J dış dikey türevi aşağıdaki gibi Lie türevi olarak da tanımlanır:

$$d_J = [i_J, d] = i_J d - d i_J. \tag{4.15}$$

Burada d bilinen dış türevdir. (4.9) tarafından belirlenen J hemen hemen kompleks yapısı için, bu kapalı Kähler form $\Phi_L = -dd_J L$ ile elde edilen kapalı2-formdur.

$(\mathbf{R}_n^{2n}, g, J)$ Kähler uzay formunda Φ_L kapalı Kähler formu simplektik yapıdır ve

$$\begin{aligned} \Phi_L \;\; = \;\; & -\frac{\partial^2 L}{\partial x^j \partial y^i} dx^j \wedge dx^i - \frac{\partial^2 L}{\partial y^j \partial y^i} dy^j \wedge dx^i \\ & + \frac{\partial^2 L}{\partial x^j \partial x^i} dx^j \wedge dy^i + \frac{\partial^2 L}{\partial y^j \partial x^i} dy^j \wedge dy^i \end{aligned} \tag{4.16}$$

şeklinde bulunur.

(1.1)' de verilen $i_\xi \Phi_L = dE_L$ dinamik denklemin sol tarafı

$$\begin{aligned} \Phi_L(\xi) = & -X^i \frac{\partial^2 L}{\partial x^j \partial y^i} \delta^i_j dx^i + X^i \frac{\partial^2 L}{\partial x^j \partial yi} dx^j + X^i \frac{\partial^2 L}{\partial y^j \partial yi} dy^j + X^i \frac{\partial^2 L}{\partial x^j \partial x^i} \delta^i_j dy^i \\ & -Y^i \frac{\partial^2 L}{\partial y^j \partial y^i} \delta^i_j dx^j - Y^i \frac{\partial^2 L}{\partial x^j \partial x^i} dx^j + Y^i \frac{\partial^2 L}{\partial y^j \partial x^i} \delta^i_j dy^i - Y^i \frac{\partial^2 L}{\partial y^j \partial x^i} dy^j \end{aligned} \tag{4.17}$$

şeklinde hesaplanır.

E_L enerji fonksiyonu hesaplandığında, aşağıdaki gibi elde edilir:

$$E_L = X^i \frac{\partial L}{\partial y^i} - Y^i \frac{\partial L}{\partial x^i} - L, \tag{4.18}$$

Şimdi bu enerji fonksiyonunun diferensiyelini bulalım.

$$\begin{aligned} dE_L = X^i \frac{\partial^2 L}{\partial x^j \partial y^i} dx^j - Y^i \frac{\partial^2 L}{\partial x^j \partial x^i} dx^j - \frac{\partial L}{\partial x^j} dx^j \\ + X^i \frac{\partial^2 L}{\partial y^j \partial y^i} dy^j - Y^i \frac{\partial^2 L}{\partial y^j \partial x^i} dy^j - \frac{\partial L}{\partial y^j} dy^j. \end{aligned} \tag{4.19}$$

$i_\xi \Phi_L = dE_L$ dinamik denklemi kullanılarak,

$$\begin{aligned} -X^i \frac{\partial^2 L}{\partial x^j \partial x^i} dx^j - Y^i \frac{\partial^2 L}{\partial y^j \partial x^i} dx^j + \frac{\partial L}{\partial x^j} dx^j \\ +X^i \frac{\partial^2 L}{\partial x^j \partial y^i} dy^j + Y^i \frac{\partial^2 L}{\partial y^j \partial y^i} dy^j + \frac{\partial L}{\partial y^j} dy^j = 0, \end{aligned} \tag{4.20}$$

ifadesi elde edilir.

(4.11)' de kurulan ξ vektör alanı (4.20) denkleminde göz önüne alınırsa aşağıdaki ifade bulunur:

$$-\xi(\frac{\partial L}{\partial y^i}) dx^j + \frac{\partial L}{\partial x^j} dx^j + \xi(\frac{\partial L}{\partial x^i}) dy^j + \frac{\partial L}{\partial y^j} dy^j = 0. \tag{4.21}$$

$\alpha : I \subset R \to \mathbf{R}_n^{2n}$ eğrisi ξ' nın integral eğrisiyse, bu durumda aşağıda verilen denklem sistemi elde edilir.

$$\frac{\partial}{\partial t}(\frac{\partial L}{\partial x^j}) + \frac{\partial L}{\partial y^j} = 0, \frac{\partial}{\partial t}(\frac{\partial L}{\partial y^j}) - \frac{\partial L}{\partial x^j} = 0. \tag{4.22}$$

Elde edilen bu denklemlere Euler-Lagrange denklemleri denir. Bu Euler-Lagrange denklemlerinin çözümleri $(\mathbf{R}_n^{2n}, g, J)$ Kähler uzay formu üzerindeki ξ semisprayinin yörüngeleridir. Sonuç olarak $(\mathbf{R}_n^{2n}, \Phi_L, \xi)$ üçlüsünün, $(\mathbf{R}_n^{2n}, g, J)$ sabit $J-$kesitsel eğrilikli Kähler manifoldlarda mekanik sistem olduğu görülür.

Yukarıda yapılan işlemleri aşağıdaki önerme ile modelleyebiliriz:

Önerme 1: J, $(\mathbf{R}_n^{2n}, g, J)$ sabit $J-$kesitsel eğrikli Kähler uzay formda hemen hemen kompleks yapısı olsun. Aynı zamanda (f_1, f_2), $\mathbf{R}_n^{2n\prime}$ in doğal bazı olsun. Dolaysıyıla aşağıdaki bağıntıyı yazarız.

$$\begin{aligned} J(f_1) - f_2 = 0 \Longleftrightarrow \dot{f}_{1,L} + f_{2,L} = 0, \\ J(f_2) + f_1 = 0 \Longleftrightarrow \dot{f}_{2,L} - f_{1,L} = 0, \end{aligned}$$

Burada $f_{1,L} = \dfrac{\partial L}{\partial x^j}$, $f_{2,L} = \dfrac{\partial L}{\partial y^j}$, $\dot{f}_{1,L} = \dfrac{\partial}{\partial t}(\dfrac{\partial L}{\partial x^j})$, $\dot{f}_{2,L} = \dfrac{\partial}{\partial t}(\dfrac{\partial L}{\partial y^j})$ dır.

4.2 SJ*-KEKM Üzerinde Hamiltonian Mekanik Sistemler

Bu kısımda $((\mathbf{R}_n^{2n})^*, g, J^*)$ sabit J^*-kesitsel eğrilikli Kähler manifoldlarda Hamilton denklemleri elde edeceğiz.

J^*, (4.10) tarafından verilen bir hemen hemen kompleks yapı olsun. $\omega = \frac{1}{2}(x^i dx^i + y^i dy^i)$ ile verilsin. $J^*(\omega) = \dfrac{1}{2}(x^i dy^i - y^i dx^i)$ eşitliğiyle hesaplanan λ Liouville formu $(\mathbf{R}_n^{2n})^*$' de 1-formdur. $\Phi = -d\lambda$ Kähler form kapalı olduğundan $(\mathbf{R}_n^{2n})^*$' de bir simplektik yapıdır. Kabul edelim ki H Hamilton enerjiye bağlı X_H Hamilton vektör alanı aşağıdaki eşitlikle verilsin.

$$X_H = X^i \frac{\partial}{\partial x^i} + Y^i \frac{\partial}{\partial y^i}. \tag{4.23}$$

$(\mathbf{R}_n^{2n})^*$' de Φ kapalı Kähler formu aşağıdaki gibi hesaplanır:

$$\Phi = -d\lambda = dy^i \wedge dx^i. \tag{4.24}$$

İşleme devam edilirse, aşağıdaki denklem elde edilir:

$$i_{X_H}\Phi = \Phi(X_H) = -X^i dy^i + Y^i dx^i. \tag{4.25}$$

Şimdi ise H Hamilton fonksiyonunun diferansiyelini hesaplayalım:

$$dH = \frac{\partial H}{\partial x^i} dx^i + \frac{\partial H}{\partial y^i} dy^i. \tag{4.26}$$

(4.25) ve (4.26) denklemlerini $i_{X_H}\Phi = dH$ dinamik denklem gereği eşitlersek; sabit J^*-kesitsel eğrilikli Kähler uzay formunda Hamilton vektör alanı aşağıdaki gibi elde edilir:

$$X_H = -\frac{\partial H}{\partial y^i}\frac{\partial}{\partial x^i} + \frac{\partial H}{\partial x^i}\frac{\partial}{\partial y^i}. \tag{4.27}$$

X_H Hamilton vektör alanının integral eğrisinin,

$$\alpha : I \subset \mathbf{R} \to (\mathbf{R}_n^{2n})^* \tag{4.28}$$

eğrisi olduğunu kabul edersek, tanım gereği

$$X_H(\alpha(t)) = \dot{\alpha},\ t \in I \tag{4.29}$$

olduğundan, lokal koordinatlarda

$$\alpha(t) = (x^i(t), y^i(t)), \tag{4.30}$$

olur. Bu durumda $\dot{\alpha}(t)$ aşağıdaki şekilde bulunur:

$$\dot{\alpha}(t) = \frac{dx^i}{dt}\frac{\partial}{\partial x^i} + \frac{dy^i}{dt}\frac{\partial}{\partial y^i}. \tag{4.31}$$

(4.27), (4.29) ve (4.31) denklemleri göz önüne alınırsa Hamilton denklemleri olarak adlandırılan denklemler aşağıdaki şekilde elde edilir:

$$\frac{dx^i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial y^i}, \frac{dy^i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial x^i}. \tag{4.32}$$

Sonuç olarak, $(\mathbf{R}_n^{2n}, g, J)$ Kähler uzay formunun duali olan $(\mathbf{R}_n^{2n})^*, g, J^*)$ üzerinde $((\mathbf{R}_n^{2n})^*, \Phi, X_H)$ sistemi de bir Hamiltonian mekanik sistem olarak adlandırılır.

4.3 SJ-KEKM ve SJ*-KEKM Üzerinde Mekanik Değerlendirmeler

Bu bölümdeki çalışmadan anladık ki, genelleştirilmiş klasik mekanik ve alan teorisindeki Lagrange ve Hamilton formalizmleri sabit J ve J^*-kesitsel eğrilikli Kähler uzay formlarının modelleri olan $(\mathbf{R}_n^{2n}, g, J)$ ve $((\mathbf{R}_n^{2n})^*, g, J^*)$ de aslına uygun olarak karakterize edilir. Böylece $\mathbf{R}_n^{2n}$' de ξ semisprayin yörüngeleri $(\mathbf{R}_n^{2n}, \Phi_L, X_H)$ mekanik sisteminde (4.22) tarafından verilen Euler-Lagrange denklemlerinin çözümleridir. Aynı zamanda $((\mathbf{R}_n^{2n})^*, \Phi, X_H)$ mekanik sisteminde (4.32) tarafından belirlenen Hamilton denklemlerinin çözümleri $(\mathbf{R}_n^{2n})^*$' de X_H Hamilton vektör alanının yörüngeleridir.

5 SABİT J-KESİTSEL EĞRİLİKLİ PARA-KÄHLER MANİFOLDLARI

Tanım 1: M, $J^2 = I$ olmak üzere $(1,1)$ tipinde bir tensör alanı olan bir $J \neq \mp I$ bir hemen hemen parakompleks yapısıyla donatılmış olan bir manifold olsun. (M, J) ve (M, J, g) sırasıyla bir hemen hemen parakompleks manifoldu ve hemen hemen para-Hermitian manifoldudur. Burada g, M' de bir semi-Riemann metriği ve J anti simetriktir, yani;

$$g(JX, Y) + g(X, JY) = 0, \forall X, Y \in \chi(M) \tag{5.1}$$

dir.

Dolayısıyla, J Levi-Civita konneksiyonu paralel yani $(\nabla_J = 0)$ ise, (M, J, g) hemen hemen para-Hermitian manifolduna bir para-Kähler manifoldu denir [4] . (M, J, g) bir para-Kähler manifoldu ve eğrilik $(0,4)$ tensör alanı aşağıda belirtilen biçimde gösterilir:

$$R(X, Y, Z, V) = g(R(X, Y)Z, V); \forall X, Y, Z, V \in \chi(M). \tag{5.2}$$

Bundan dolayı, g'nin ∇ Levi-Civita konneksiyonuna bağlı $(1,3)$ tensör alanı Riemann eğriliği $R = [\nabla, \nabla] - \nabla_{[\ ,\ ]}$ ile verildiğinde σ bütün dairesel permütasyonların toplamını göstermek üzere Riemann eğrilik tensör alanı aşağıdaki şekilde yazılır:

$$\begin{gathered} R(X, Y, Z, V) = -R(Y, X, Z, V) = -R(X, Y, V, Z) = R(JX, JY, Z, V) \\ \text{ve } \sum_{\sigma} R(X, Y, Z, V) = 0. \end{gathered} \tag{5.3}$$

Bilindiği gibi $(0,4)$ tensör alanı

$$R_0(X, Y, Z, V) = \frac{1}{4} \left\{ \begin{array}{c} g(X, Z)g(Y, V) - g(X, V)g(Y, Z) - g(X, JZ)g(Y, JV) \\ +g(X, JV)g(Y, JZ) - 2g(X, JY)g(Z, JV) \end{array} \right\}, \tag{5.4}$$

ile tanımlanır. Burada $\forall X, Y, Z, V \in \chi(M)$ dır. Her $p \in M$ için, S ye kısıtlanmış g non- dejenere ise $S \subset T_pM$ alt uzayına non-dejenere denir. $\{u, v\}$, $\Pi \subset T_pM$ düzleminin bir bazıysa, Π non-dejeneredir, ancak ve ancak $g(u, u)g(v, v) - [g(u, v)]^2 \neq 0$ dır. Bu durumda $\Pi = span\{u, v\}$' nin kesitsel eğriliği aşağıdaki eşitlikle verilir:

$$k(\Pi) = \frac{R(u, v, u, v)}{g(u, u)g(v, v) - [g(u, v)]^2} \tag{5.5}$$

Herhangi $X \in \chi(M)$ için (5.1)' den, X ve JX ortogonaldir. J ile invaryant olan bir düzleme bir J düzlem denir. Herhangi $p \in M$ için, $u \in T_pM$ vektörü $g(u,u) = 0$ şartını sağladığından izotropiktir. Eğer $u \in T_pM$ izotropik değilse, $\{u, Ju\}$ tarafından gerilen $J-$düzleminin $H(u)$ kesitsel eğriliği u tarafından tanımlanan $J-$kesitsel eğriliği olarak adlandırılır. $H(u)$ sabit ise (M, J, g)' ye sabit $J-$kesitsel eğrilikli para-Kähler manifold veya bir para-Kähler uzay form denir [8] .

Teorem 1: Kabul edelim ki (M, J, g) her bir $p \in M$ için bir para-Kähler manifold olsun. $u \in T_pM$ için $H(u) = c_p$ olacak şekilde $c_p \in R$ vardır, öyle ki $g(u,u)g(Ju,Ju) \neq 0$ şartı sağlanır. Dolayısıyla bu R Riemann- Christoffel tensörü $R = cR_0$ eşitliğini sağlar. Burada c, $p \to c_p$ şeklinde tanımlanan fonksiyondur, tersi de mümkündür.

Tanım 2: Bir (M, J, g) para-Kähler manifoldu Teorem 1 in şartlarını sağlıyorsa c sabit paraholomorfik kesitsel eğrilikli olarak adlandırılır.

Teorem 2: (M, J, g), $boyM > 2$ olmak üzere bir para-Kähler manifold olsun. Bu durumda aşağıdaki özellikler denktir:

1) M, $c = 0$ olmak üzere sabit paraholomorfik kesitsel eğrilikli bir uzaydır.

2) R Riemann- Christoffel tensörü aşağıdaki ifadeye sahiptir:

$$R(X, Y, Z, V) = 0, \forall X, Y, Z, V \in \chi(M). \tag{5.6}$$

Bu bölümde $c = 0$, paraholomorfik kesitsel eğrilikli, $2n \geq 2$ boyutlu para-Kähler uzay formlarının bir modeli olan $(\mathbf{R}_n^{2n}, g, J)$ üzerinde mekanik sistemler kurulacaktır. Bunun için gerekli bazı temel yapılar şunlardır:

$\mathbf{R}_n^{2n}$' in herhangi bir p noktasının bir U komşuluğunda (x^i, y^i) reel bir koordinat sistemi olsun. Sırasıyla $\{\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial y^i}\}$ ve $\{dx^i, dy^i\}$, $T_p(\mathbf{R}_n^{2n})$ tanjant uzayının ve $T_p^*(\mathbf{R}_n^{2n})$ kotanjant uzayının doğal bazları olduğunda $(\mathbf{R}_n^{2n}, g, J)$ uzayı, $2n \geq 2$ boyutlu para-Kähler uzay formlarının bir modeli olur. Aynı zamanda $c = 0$ olduğundan paraholomorfik kesitsel eğriliklidir. Burada g metriktir ve aşağıdaki şekilde gösterilir:

$$g = dx^i \otimes dx^i - dy^i \otimes dy^i. \tag{5.7}$$

J hemen hemen parakompleks yapısı da

$$J = \frac{\partial}{\partial y^i} \otimes dx^i + \frac{\partial}{\partial x^i} \otimes dy^i \tag{5.8}$$

şeklindedir. Bu durumda

$$J(\frac{\partial}{\partial x^i}) = \frac{\partial}{\partial y^i}, \ J(\frac{\partial}{\partial y^i}) = \frac{\partial}{\partial x^i}, \tag{5.9}$$

olduğu görülür. $\mathbf{R}_n^{2n}$ manifoldunun herhangi bir p noktasında $T_p^*(\mathbf{R}_n^{2n})$ kotanjant uzayının J^* dual endomorfizmi $J^{*2} = I$ eşitliğini sağlar ve

$$J^*(dx^i) = dy^i, \ \ J^*(dy^i) = dx^i, \tag{5.10}$$

şeklinde tanımlanır.

5.1 SJ-KEPKM Üzerinde Lagrangian Mekanik Sistemler

Bu kısımda, $(\mathbf{R}_n^{2n}, g, J)$ para-Kähler uzay formu üzerinde Euler-Lagrange denklemlerini elde edilecektir.

$\mathbf{R}_n^{2n}$' in koordinatları (x^i, y^i) ile hemen hemen parakompleks yapısı da J ile verildiğinde özel bir vektör alanı olan semisprayi de aşağıdaki gibi kurulur:

$$\xi = X^i \frac{\partial}{\partial x^i} + Y^i \frac{\partial}{\partial y^i}, \ \ X^i = \dot{x}^i = y^i, \ \ Y^i = \dot{y}^i. \tag{5.11}$$

$(\mathbf{R}_n^{2n}, g, J)$ para-Kähler uzay formunda Liouville vektör alanı, $V = J\xi$ tarafından belirlenen vektör alanıdır ve aşağıdaki formülle hesaplanır:

$$V = J\xi = X^i \frac{\partial}{\partial y^i} + Y^i \frac{\partial}{\partial x^i}. \tag{5.12}$$

$(\mathbf{R}_n^{2n}, g, J)$ para-Kähler uzay formunda mekanik sistemin, L ye ilişkin enerji fonksiyonunun $E_L = V(L) - L$ ile hesaplandığını biliyoruz.

i_j operatörü

$$i_j : \wedge^2 \mathbf{R}_n^{2n} \to \wedge^1 \mathbf{R}_n^{2n} \tag{5.13}$$

şeklinde tanımlıdır ve J ile iç çarpım olarak adlandırılır. d_J dış dikey türevi, J parakompleks yapısı olmak üzere

$$d_J = \frac{\partial}{\partial y^i} dx^i + \frac{\partial}{\partial x^i} dy^i : \mathcal{F}(\mathbf{R}_n^{2n}) \to \wedge^1 \mathbf{R}_n^{2n}. \tag{5.14}$$

şeklinde verilir ve Lie türevi olarak da aşağıdaki gibi tanımlanabilir:

$$d_J = [i_J, d] = i_J d - d i_J. \tag{5.15}$$

Burada d bilinen dış türevdir. (5.9) tarafından belirlenen J hemen hemen parakompleks yapısı için, bu kapalı para-Kähler form $\Phi_L = -dd_J L$ ile elde edilen kapalı 2-formdur.

$(\mathbf{R}_n^{2n}, g, J)$ para-Kähler uzay formunda Φ_L kapalı para-Kähler formu simplektik yapı olduğundan aşağıdaki denklem elde edilir:

$$\begin{aligned} \Phi_L \ \ = \ \ & -\frac{\partial^2 L}{\partial x^j \partial y^i} dx^j \wedge dx^i - \frac{\partial^2 L}{\partial y^j \partial y^i} dy^j \wedge dx^i \\ & -\frac{\partial^2 L}{\partial x^j \partial x^i} dx^j \wedge dy^i - \frac{\partial^2 L}{\partial y^j \partial x^i} dy^j \wedge dy^i. \end{aligned} \tag{5.16}$$

(1.1)' de verilen $i_\xi \Phi_L = dE_L$ dinamik denklemin sol tarafı hesaplandığında,

$$\begin{aligned}\Phi_L(\xi) = &-X^i \frac{\partial^2 L}{\partial x^j \partial y^i}\delta^i_j dx^i + X^i \frac{\partial^2 L}{\partial x^j \partial y^i} dx^j + X^i \frac{\partial^2 L}{\partial y^j \partial y^i} dy^j - X^i \frac{\partial^2 L}{\partial x^j \partial x^i}\delta^i_j dy^i \\ &-Y^i \frac{\partial^2 L}{\partial y^j \partial y^i}\delta^i_j dx^j + Y^i \frac{\partial^2 L}{\partial x^j \partial x^i} dx^j - Y^i \frac{\partial^2 L}{\partial y^j \partial x^i}\delta^i_j dy^i + Y^i \frac{\partial^2 L}{\partial y^j \partial x^i} dy^j,\end{aligned} \tag{5.17}$$

bulunur.

E_L enerji fonksiyonu hesaplandığında aşağıdaki gibi elde edilir:

$$E_L = X^i \frac{\partial L}{\partial y^i} + Y^i \frac{\partial L}{\partial x^i} - L. \tag{5.18}$$

Bu E_L enerji fonksiyonunun diferensiyeli alınırsa aşağıdaki denklem karşımıza çıkar:

$$\begin{aligned} dE_L = &X^i \frac{\partial^2 L}{\partial x^j \partial y^i} dx^j + Y^i \frac{\partial^2 L}{\partial x^j \partial x^i} dx^j - \frac{\partial L}{\partial x^j} dx^j \\ &+ X^i \frac{\partial^2 L}{\partial y^j \partial y^i} dy^j + Y^i \frac{\partial^2 L}{\partial y^j \partial x^i} dy^j - \frac{\partial L}{\partial y^j} dy^j.\end{aligned} \tag{5.19}$$

$i_\xi \Phi_L = dE_L$ dinamik denkleminden aşağıdaki ifadenin elde edileceği aşikardır:

$$\begin{aligned} &-\left[X^j \frac{\partial^2 L}{\partial x^j \partial y^i} + Y^j \frac{\partial^2 L}{\partial y^j \partial y^i}\right] dx^j + \frac{\partial L}{\partial x^j} dx^j \\ &-\left[X^j \frac{\partial^2 L}{\partial x^j \partial x^i} + Y^j \frac{\partial^2 L}{\partial y^j \partial x^i}\right] dy^j + \frac{\partial L}{\partial y^j} dy^j = 0.\end{aligned} \tag{5.20}$$

(5.11)' de kurulan ξ vektör alanı yardımıyla (5.20) denkleminde göz önüne alındığında,

$$-\xi(\frac{\partial L}{\partial y^i})dx^j + \frac{\partial L}{\partial x^j}dx^j - \xi(\frac{\partial L}{\partial x^i})dy^j + \frac{\partial L}{\partial y^j}dy^j = 0, \tag{5.21}$$

ifadesi elde edilir.

$\alpha : I \subset R \to \mathbf{R}^{2n}_n$ eğrisi ξ nın integral eğrisiyse, bu durumda

$$\frac{\partial}{\partial t}(\frac{\partial L}{\partial x^j}) - \frac{\partial L}{\partial y^j} = 0, \frac{\partial}{\partial t}(\frac{\partial L}{\partial y^j}) - \frac{\partial L}{\partial x^j} = 0. \tag{5.22}$$

denklemlerinin bulunacağı açıktır.

Elde edilen bu denklemlere Euler-Lagrange denklemleri denir. Bu Euler-Lagrange denklemlerinin çözümleri $(\mathbf{R}^{2n}_n, g, J)$ para-Kähler uzay formu üzerindeki ξ semisprayinin yörüngeleridir. Sonuçta $(\mathbf{R}^{2n}_n, \Phi_L, \xi)$ üçlüsü, $(\mathbf{R}^{2n}_n, g, J)$ sabit $J-$kesitsel eğrilikli para-Kähler formlarda mekanik sistemdir. Aşağıdaki önerme bu bölümde yaptığımız işlemlerin bir modellemesidir.

Önerme 1: J, $(\mathbf{R}^{2n}_n, g, J)$ sabit $J-$kesitsel eğrikli para- Kähler uzayda hemen hemen parakompleks yapısı olsun. Aynı zamanda (f_1, f_2), $\mathbf{R}^{2n\prime}_n$ in doğal bazı olarak kabul edersek aşağıdaki bağıntı yazılır.

$$J(f_1) - f_2 = 0 \Longleftrightarrow \quad \dot{f}_{1,L} - f_{2,L} = 0,$$
$$J(f_2) - f_1 = 0 \Longleftrightarrow \quad \dot{f}_{2,L} - f_{1,L} = 0,$$

Burada $f_{1,L} = \dfrac{\partial L}{\partial x^j}$, $f_{2,L} = \dfrac{\partial L}{\partial y^j}$, $\dot{f}_{1,L} = \dfrac{\partial}{\partial t}(\dfrac{\partial L}{\partial x^j})$, $\dot{f}_{2,L} = \dfrac{\partial}{\partial t}(\dfrac{\partial L}{\partial y^j})$ dır.

5.2 SJ*-KEPKM Üzerinde Hamiltonian Mekanik Sistemler

$((\mathbf{R}_n^{2n})^*, g, J^*)$ sabit J^*-kesitsel eğrilikli para-Kähler formlarda Hamilton denklemleri bu kısımda elde edilecektir.

J^*, (5.10) tarafından verilen bir hemen hemen parakompleks yapısı olsun. $\omega = \dfrac{1}{2}(-x^i dy^i + y^i dx^i)$ ile verilirse $J^*(\omega) = \dfrac{1}{2}(-x^i dx^i + y^i dy^i)$ eşitliğiyle hesaplanan λ Liouville formu elde edilir ve bu form $(\mathbf{R}_n^{2n})^*$' de Liouville 1-formdur. $\Phi = -d\lambda$ para-Kähler form kapalı olduğundan $(\mathbf{R}_n^{2n})^*$' de bir para-simplektik yapıdır. H Hamilton enerjiye bağlı X_H Hamilton vektör alanının aşağıdaki gibi olduğunu varsayalım:

$$X_H = X^i \frac{\partial}{\partial x^i} + Y^i \frac{\partial}{\partial y^i}. \tag{5.23}$$

$(\mathbf{R}_n^{2n})^*$' de bu Φ kapalı para-Kähler formu

$$\Phi = -d\lambda = dx^i \wedge dy^i, \tag{5.24}$$

olarak bulunur. İşleme devam edildiğinde aşağıdaki denklem elde edilir:

$$i_{X_H}\Phi = \Phi(X_H) = X^i dy^i - Y^i dx^i. \tag{5.25}$$

H Hamilton fonksiyonunun diferansiyelini hesaplayacak olursak aşağıdaki eşitiği elde ederiz:

$$dH = \frac{\partial H}{\partial x^i} dx^i + \frac{\partial H}{\partial y^i} dy^i. \tag{5.26}$$

(5.25) ve (5.26) denklemlerini $i_{X_H}\Phi = dH$ dinamik denklemini göz önüne alarak eşitlersek; sabit J^*-kesitsel eğrilikli para-Kähler uzay formunda Hamilton vektör alanı,

$$X_H = \frac{\partial H}{\partial y^i}\frac{\partial}{\partial x^i} - \frac{\partial H}{\partial x^i}\frac{\partial}{\partial y^i} \tag{5.27}$$

şeklinde karşımıza çıkar.

X_H Hamilton vektör alanının integral eğrisini

$$\alpha : I \subset \mathbf{R} \to (\mathbf{R}_n^{2n})^* \tag{5.28}$$

şeklinde düşünelim. Bilindiği gibi

$$X_H(\alpha(t)) = \dot{\alpha}, \ t \in I \tag{5.29}$$

dir ve lokal koordinatlarda

$$\alpha(t) = (x^i(t), y^i(t)), \tag{5.30}$$

şeklindedir. Bu durumda α' nın diferensiyeli,

$$\dot{\alpha}(t) = \frac{dx^i}{dt}\frac{\partial}{\partial x^i} + \frac{dy^i}{dt}\frac{\partial}{\partial y^i} \tag{5.31}$$

bulunur.

Yukarıdaki (5.27), (5.29) ve (5.31) denklemleri kullanıldığında Hamilton denklemleri olarak adlandırılan denklemlerin aşağıdaki gibi olduğu görülür:

$$\frac{dx^i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial y^i}, \frac{dy^i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x^i}. \tag{5.32}$$

Sonuçta, $(\mathbf{R}_n^{2n}, g, J)$ para-Kähler manifoldunun duali olan $((\mathbf{R}_n^{2n})^*, g, J^*)$ üzerinde $((\mathbf{R}_n^{2n})^*, \Phi, X_H)$ sistemi de bir Hamiltonian mekanik sistem olarak adlandırılır.

5.3 SJ-KEPKM ve SJ*-KEPKM Üzerinde Mekanik Değerlendirmeler

Bu bölümdeki çalışmadan çıkan sonuç, genelleştirilmiş klasik mekanik ve alan teorisindeki Lagrange ve Hamilton formalizmleri, sabit J ve J $^*-$kesitsel eğrilikli para-Kähler uzay formların modelleri olan $(\mathbf{R}_n^{2n}, g, J)$ ve $\left((\mathbf{R}_n^{2n})^*, g, J^*\right)$ de aslına uygun bir biçimde karakterize edildiğidir. Böylece $\mathbf{R}_n^{2n}$' de ξ semisprayin yörüngeleri $(\mathbf{R}_n^{2n}, \Phi_L, X_H)$ mekanik sisteminde (5.22) tarafından verilen Euler-Lagrange denklemlerinin çözümleri olduğunu görürüz. Aynı zamanda $((\mathbf{R}_n^{2n})^*, \Phi, X_H)$ mekanik sisteminde (5.32) tarafından belirlenen Hamilton denklemlerinin çözümleri $(\mathbf{R}_n^{2n})^*$ de X_H Hamilton vektör alanının yörüngeleridir.

6 SABİT J-KESİTSEL EĞRİLİKLİ *theta* KÄHLER MANİFOLDLARI

Tanım 1: M, $J_\theta{}^2 = \theta I$ ve $\theta = \mp 1$ ($\theta = 1$ ise parakompleks, $\theta = -1$ ise kompleks) olmak üzere $(1,1)$ tipinde bir tensör alanı olan bir $J_\theta \neq \mp I$ bir hemen hemen $\theta-$ yapısıyla donatılmış olan bir genelleştirilmiş manifold olsun. (M, J_θ) ve (M, J_θ, g) sırasıyla bir hemen hemen $\theta-$ manifoldu ve hemen hemen $\theta-$Hermitian manifolddur. Burada g, M' de bir semi-Riemann metriği ve J_θ anti simetriktir, yani;

$$g(J_\theta X, Y) + g(X, J_\theta Y) = 0, \forall X, Y \in \chi(M) \tag{6.1}$$

olur.

Dolayısıyla, J_θ Levi-Civita konneksiyonu paralel yani ($\nabla_{J_\theta} = 0$) ise, (M, J_θ, g) hemen hemen $\theta-$Hermitian manifolduna bir $\theta-$ Kähler manifoldu denir. (M, J_θ, g) bir $\theta-$Kähler manifoldu ve eğrilik $(0,4)$ tensör alanı aşağıdaki şekilde gösterililir:

$$R(X, Y, Z, V) = g(R(X, Y)Z, V); \forall X, Y, Z, V \in \chi(M). \tag{6.2}$$

Böylece, g' nin ∇ Levi-Civita konneksiyonuna bağlı $(1,3)$ tensör alanı Riemann eğriliği $R = [\nabla, \nabla]$ -$\nabla_{[\ ,\ ]}$ ile verilir. Dolayısıyla, burada σ bütün dairesel permütasyonların üzerine toplamayı göstermek üzere Riemann eğrilik tensör alanı aşağıdaki bağıntıyla verilebilir:

$$\begin{gathered} R(X, Y, Z, V) = -R(Y, X, Z, V) = -R(X, Y, V, Z) = R(J_\theta X, J_\theta Y, Z, V) \\ \text{ve } \sum_\sigma R(X, Y, Z, V) = 0. \end{gathered} \tag{6.3}$$

Bilindiği gibi $(0,4)$ tensör alanı

$$R_0(X, Y, Z, V) = \frac{1}{4} \left\{ \begin{array}{c} g(X, Z)g(Y, V) - g(X, V)g(Y, Z) - g(X, J_\theta Z)g(Y, J_\theta V) \\ +g(X, J_\theta V)g(Y, J_\theta Z) - 2g(X, J_\theta Y)g(Z, J_\theta V) \end{array} \right\}, \tag{6.4}$$

şeklindedir. Burada $\forall X, Y, Z, V \in \chi(M)$ dır. Her $p \in M$ için, S' ye kısıtlanmış g non- dejenere ise $S \subset T_pM$ alt uzayına non-dejenere denir. $\{u, v\}$, $\Pi \subset T_pM$ düzleminin bir bazıysa, Π non-dejeneredir, ancak ve ancak $g(u, u)g(v, v) - [g(u, v)]^2 \neq 0$ dır. Bu durumda $\Pi = span\{u, v\}$ nin kesitsel eğriliği aşağıdaki eşitlikle verilir.

$$k(\Pi) = \frac{R(u, v, u, v)}{g(u, u)g(v, v) - [g(u, v)]^2} \tag{6.5}$$

Herhangi $X \in \chi(M)$ için (6.1)' den, X ve $J_\theta X$ ortogonaldir. J_θ ile invaryant olan bir düzleme bir J_θ düzlem denir. Herhangi $p \in M$ için,

$u \in T_pM$ vektörü $g(u,u) = 0$ şartını sağladığından izotropiktir. Eğer $u \in T_pM$ izotropik değilse,$\{u, J_\theta u\}$ tarafından gerilen J_θ-düzleminin $H(u)$ kesitsel eğriliği u tarafından tanımlanan J_θ-kesitsel eğriliği olarak adlandırılır. $H(u)$ sabit ise (M, J_θ, g)' ye sabit J_θ-kesitsel eğrilikli $\theta-$Kähler manifold veya bir $\theta-$Kähler uzay form denir.

Teorem 1: (M, J_θ, g) her bir $p \in M$ için bir $\theta-$Kähler uzay formu olsun. $u \in T_pM$ için $H(u) = c_p$ olacak şekilde $c_p \in R$ vardır, öyle ki $g(u,u)g(J_\theta u, J_\theta u) \neq 0$ şartı sağlanır. Dolayısıyla bu R Riemann- Christoffel tensörü $R = cR_0$ eşitliğini sağlar. Burada c, $p \to c_p$ şeklinde tanımlanan fonksiyondur,tersi de mümkündür.

Tanım 2: Bir (M, J_θ, g) $\theta-$Kähler uzay formu **Teorem 1** in şartlarını sağlıyorsa c sabit $\theta-$holomorfik kesitsel eğrilikli olarak adlandırılır [11] .

Teorem 2: (M, J_θ, g), $boyM > 2$ olmak üzere bir $\theta-$Kähler uzay formu olsun. Bu durumda aşağıdaki özellikler denktir:

1) M, $c = 0$ olmak üzere sabit $\theta-$holomorfik kesitsel eğrilikli bir uzaydır.

2) R Riemann- Christoffel tensörü aşağıdaki ifadeye sahiptir:

$$R(X, Y, Z, V) = 0, \forall X, Y, Z, V \in \chi(M). \tag{6.6}$$

Bu bölümde $c = 0$, $\theta-$holomorfik kesitsel eğrilikli, $2n \geq 2$ boyutlu $\theta-$Kähler uzay formlarının bir modeli olan $(\mathbf{R}_n^{2n}, g, J_\theta)$ üzerinde mekanik sistemler kurulacaktır. Bunun için gerekli bazı temel yapıları verelim.

$\mathbf{R}_n^{2n}$' in herhangi bir p noktasının bir U komşuluğunda (x^i, y^i) reel bir koordinat sistemi olsun. Sırasıyla $\{\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial y^i}\}$ ve $\{dx^i, dy^i\}$, $T_p(\mathbf{R}_n^{2n})$ tanjant uzayının ve $T_p^*(\mathbf{R}_n^{2n})$ kotanjant uzayının doğal bazları olduğunu varsayalım.

$(\mathbf{R}_n^{2n}, g, J_\theta)$ uzayı, $c = 0$ olmak üzere $\theta-$holomorfik kesitsel eğriliklidir ve $2n \geq 2$ boyutlu $\theta-$Kähler uzay formlarının bir modelidir. Burada g metriği aşağıdaki şekildedir:

$$g = dx^i \otimes dx^i - \theta dy^i \otimes \theta dy^i. \tag{6.7}$$

J_θ hemen hemen $\theta-$ yapısı

$$J_\theta = \frac{\partial}{\partial y^i} \otimes dx^i + \theta \frac{\partial}{\partial x^i} \otimes dy^i \tag{6.8}$$

eşitliğiyle verilir ve dolayısıyla,

$$J_\theta(\frac{\partial}{\partial x^i}) = \frac{\partial}{\partial y^i}, \; J_\theta(\frac{\partial}{\partial y^i}) = \theta \frac{\partial}{\partial x^i}, \tag{6.9}$$

olduğu görülür. $\mathbf{R}_n^{2n}$ manifoldunun herhangi bir p noktasında $T_p^*(\mathbf{R}_n^{2n})$ kotanjant uzayının J_θ^* dual endomorfizmi $J_\theta^{*2} = I$ eşitliğini sağlar ve

$$J_\theta^*(dx^i) = dy^i, J_\theta^*(dy^i) = \theta dx^i, \tag{6.10}$$

olarak tanımlanır.

6.1 SJ-KE $\theta-$KM Üzerinde Lagrangian Mekanik Sistemler

$(\mathbf{R}^{2n}_n, g, J_\theta)$ $\theta-$Kähler uzay formu üzerinde Euler-Lagrange denklemleri bu kısımda elde edilecektir.

$\mathbf{R}^{2n}_n$' in koordinatları (x^i, y^i) ile, hemen hemen $\theta-$ yapısı da J_θ ile verildiğinde özel bir vektör alanı olan semisprayi de aşağıdaki gibi kurulabilir:

$$\xi = X^i \frac{\partial}{\partial x^i} + Y^i \frac{\partial}{\partial y^i},\ X^i = \dot{x}^i = y^i,\ Y^i = \dot{y}^i. \tag{6.11}$$

$V = J_\theta \xi$ tarafından belirlenen vektör alanı $(\mathbf{R}^{2n}_n, g, J_\theta)$, $\theta-$Kähler uzay formunda Liouville vektör alanıdır ve aşağıdaki formülle hesaplanır:

$$V = J_\theta \xi = X^i \frac{\partial}{\partial y^i} + \theta Y^i \frac{\partial}{\partial x^i}. \tag{6.12}$$

$(\mathbf{R}^{2n}_n, g, J_\theta)$, $\theta-$Kähler uzay formunda mekanik sistemin, L ye ilişkin enerji fonksiyonunun da $E_L = V(L) - L$ ile hesaplandığını biliyoruz.

J_θ ile iç çarpım operatörü olarak adlandırılan i_{J_θ} aşağıdaki şekilde verilir:

$$i_{J_\theta} : \wedge^2 \mathbf{R}^{2n}_n \to \wedge^1 \mathbf{R}^{2n}_n. \tag{6.13}$$

$$d_{J_\theta} = \frac{\partial}{\partial y^i} dx^i + \theta \frac{\partial}{\partial x^i} dy^i : \mathcal{F}(M) \to \wedge^1 M \tag{6.14}$$

ile verilen d_{J_θ} dış dikey türevi aşağıdaki gibi Lie türevi olarak da tanımlanır:

$$d_{J_\theta} = [i_{J_\theta}, d] = i_{J_\theta} d - d i_{J_\theta}. \tag{6.15}$$

Burada d bilinen dış türevdir.(6.9) tarafından belirlenen J_θ hemen hemen çarpım yapısı için , bu kapalı $\theta-$Kähler form $\Phi_L = -d d_{J_\theta} L$ ile elde edilen kapalı 2-formdur.

$(\mathbf{R}^{2n}_n, g, J_\theta)$, $\theta-$Kähler uzay formunda Φ_L kapalı $\theta-$Kähler formu simplektik yapıdır. Kolay bir hesap ile;

$$\begin{aligned} \Phi_L \ = \ & -\frac{\partial^2 L}{\partial x^j \partial y^i} dx^j \wedge dx^i - \frac{\partial^2 L}{\partial y^j \partial y^i} dy^j \wedge dx^i \\ & -\theta \frac{\partial^2 L}{\partial x^j \partial x^i} dx^j \wedge dy^i - \theta \frac{\partial^2 L}{\partial y^j \partial x^i} dy^j \wedge dy^i \end{aligned} \tag{6.16}$$

eşitliği elde edilir.

(1.1)' de verilen $i_\xi \Phi_L = dE_L$ dinamik denklemin sol tarafı hesaplandığında aşağıdaki eşitlik karşımıza çıkar:

$$\Phi_L(\xi) = -X^i\frac{\partial^2 L}{\partial x^j \partial y^i}\delta^i_j dx^i + X^i\frac{\partial^2 L}{\partial x^j \partial yi}dx^j + X^i\frac{\partial^2 L}{\partial y^j \partial yi}dy^j - \theta X^i\frac{\partial^2 L}{\partial x^j \partial x^i}\delta^i_j dy^i$$
$$- Y^i\frac{\partial^2 L}{\partial y^j \partial y^i}\delta^i_j dx^j + \theta Y^i\frac{\partial^2 L}{\partial x^j \partial x^i}dx^j - \theta Y^i\frac{\partial^2 L}{\partial y^j \partial x^i}\delta^i_j dy^i + \theta Y^i\frac{\partial^2 L}{\partial y^j \partial x^i}dy^j. \tag{6.17}$$

E_L enerji fonksiyonu hesaplandığında, aşağıdaki eşitlik bulunur:

$$E_L = X^i\frac{\partial L}{\partial y^i} + \theta Y^i\frac{\partial L}{\partial x^i} - L. \tag{6.18}$$

Bu eşitliğin diferensiyelinin aşağıdaki şekilde olduğu görülür:

$$\begin{aligned} dE_L = {} & X^{\dot{I}}\frac{\partial^2 L}{\partial x^j \partial y^i}dx^j + \theta Y^i\frac{\partial^2 L}{\partial x^j \partial x^i}dx^j - \frac{\partial L}{\partial x^j}dx^j \\ & + X^{\dot{I}}\frac{\partial^2 L}{\partial y^j \partial y^i}dy^j + \theta Y^i\frac{\partial^2 L}{\partial y^j \partial x^i}dy^j - \frac{\partial L}{\partial y^j}dy^j. \end{aligned} \tag{6.19}$$

$i_\xi\Phi_L = dE_L$ dinamik denklemi dikkate alınırsa,

$$\begin{aligned} & -\left[X^j\frac{\partial^2 L}{\partial x^j \partial y^i} + Y^j\frac{\partial^2 L}{\partial y^j \partial y^i}\right]dx^j + \frac{\partial L}{\partial x^j}dx^j \\ & -\theta\left[X^j\frac{\partial^2 L}{\partial x^j \partial x^i} + Y^j\frac{\partial^2 L}{\partial y^j \partial x^i}\right]dy^j + \frac{\partial L}{\partial y^j}dy^j = 0, \end{aligned} \tag{6.20}$$

eşitliğinin elde edileceği açıktır.

(6.11)' de kurulan ξ vektör alanı (6.20)' de kullanıldığında,

$$-\xi(\frac{\partial L}{\partial y^i})dx^j + \frac{\partial L}{\partial x^j}dx^j - \theta\xi(\frac{\partial L}{\partial x^i})dy^j + \frac{\partial L}{\partial y^j}dy^j = 0 \tag{6.21}$$

eşitliği karşımıza çıkar.

$\alpha : I \subset R \to \mathbf{R}^{2n}_n$ eğrisi ξ' nın integral eğrisiyse, bu durumda,

$$\theta\frac{\partial}{\partial t}(\frac{\partial L}{\partial x^j}) - \frac{\partial L}{\partial y^j} = 0, \frac{\partial}{\partial t}(\frac{\partial L}{\partial y^j}) - \frac{\partial L}{\partial x^j} = 0 \tag{6.22}$$

denklemleri elde edilir. Elde edilen bu denklemlere Euler-Lagrange denklemleri denir. Bu Euler-Lagrange denklemlerinin çözümleri $(\mathbf{R}^{2n}_n, g, J_\theta)$, $\theta-$Kähler uzay formu üzerindeki ξ semisprayinin yörüngeleridir. Nihai olarak $(\mathbf{R}^{2n}_n, \Phi_L, \xi)$ üçlüsünün, $(\mathbf{R}^{2n}_n, g, J_\theta)$ sabit J_θ-kesitsel eğrilikli $\theta-$Kähler uzay formlarda mekanik sistem olduğu görülür.

Bu bölümde yapılan çalışmalar aşağıdaki önerme ile modellenebilir.

Önerme 1: Kabul edelim ki J_θ, $(\mathbf{R}^{2n}_n, g, J_\theta)$ sabit J_θ-kesitsel eğrikli $\theta-$Kähler uzay formunda hemen hemen çarpım yapısı ve (f_1, f_2) , $\mathbf{R}^{2n\prime}_n$in doğal bazı olsun. Bu durumda aşağıdaki bağıntıyı yazabiliriz.

$$J_\theta(f_1) - f_2 = 0 \Longleftrightarrow \quad \theta\dot{f}_{1,L} - f_{2,L} = 0,$$
$$J_\theta(f_2) - \theta f_1 = 0 \Longleftrightarrow \quad \dot{f}_{2,L} - f_{1,L} = 0,$$

Burada $f_{1,L} = \dfrac{\partial L}{\partial x^j}$, $f_{2,L} = \dfrac{\partial L}{\partial y^j}$, $\dot{f}_{1,L} = \dfrac{\partial}{\partial t}(\dfrac{\partial L}{\partial x^j})$, $\dot{f}_{2,L} = \dfrac{\partial}{\partial t}(\dfrac{\partial L}{\partial y^j})$ dır.

6.2 SJ*-KE $\theta-$KM Üzerinde Hamiltonian Mekanik Sistemler

Burada $((\mathbf{R}_n^{2n})^*, g, J_\theta^*)$ sabit J_θ^*-kesitsel eğrilikli $\theta-$Kähler uzay formlarda Hamilton denklemleri elde edilecektir.

J_θ^* ' nın (6.10) tarafından verilen bir hemen hemen $\theta-$ yapısı olduğunu düşünelim. $\omega = \dfrac{1}{2}(-\theta x^i dx^i + y^i dy^i)$ ile verildiğinde, $(\mathbf{R}_n^{2n})^*$' de 1-form olan λ Liouville formu $J_\theta^*(\omega) = \dfrac{1}{2}(-\theta x^i dy^i + y^i \theta dx^i)$ eşitliğiyle hesaplanır. $\Phi = -d\lambda$, $\theta-$Kähler formu kapalı olduğundan $(\mathbf{R}_n^{2n})^*$ de bir (para)simplektik yapıdır. H Hamilton enerjiye bağlı X_H Hamilton vektör alanının aşağıdaki eşitlikle verildiğini kabul edelim:

$$X_H = X^i \frac{\partial}{\partial x^i} + Y^i \frac{\partial}{\partial y^i}. \tag{6.23}$$

$(\mathbf{R}_n^{2n})^*$' de Φ kapalı $\theta-$Kähler formu

$$\Phi = -d\lambda = \theta dx^i \wedge dy^i, \tag{6.24}$$

olarak hesaplanır, işleme devam edilirse, aşağıdaki denklem elde edilir:

$$i_{X_H}\Phi = \Phi(X_H) = \theta X^i dy^i - \theta Y^i dx^i. \tag{6.25}$$

H Hamilton fonksiyonunun diferansiyelini hesaplayacak olursak aşağıdaki denklemi elde ederiz:

$$dH = \frac{\partial H}{\partial x^i} dx^i + \frac{\partial H}{\partial y^i} dy^i. \tag{6.26}$$

(6.25) ve (6.26) denklemlerini $i_{X_H}\Phi = dH$ dinamik denklemi gereği eşitlendiğinde, sabit J_θ^*-kesitsel eğrilikli $\theta-$Kähler uzay formunda Hamilton vektör alanı,

$$X_H = \frac{1}{\theta}\frac{\partial H}{\partial y^i}\frac{\partial}{\partial x^i} - \frac{1}{\theta}\frac{\partial H}{\partial x^i}\frac{\partial}{\partial y^i}, \tag{6.27}$$

şeklinde elde edilir.

X_H Hamilton vektör alanının integral eğrisinin

$$\alpha : I \subset \mathbf{R} \to (\mathbf{R}_n^{2n})^* \tag{6.28}$$

olduğunu kabul edelim. Tanım gereği;

$$X_H(\alpha(t)) = \dot{\alpha}, \; t \in I \tag{6.29}$$

eşitliğinin bilindiğini göz önüne aldığımızda lokal koordinatlarda

$$\alpha(t) = (x^i(t), y^i(t)), \tag{6.30}$$

dir ve diferensiyeli için aşağıdaki eşitlik karşımıza çıkar.

$$\dot{\alpha}(t) = \frac{dx^i}{dt}\frac{\partial}{\partial x^i} + \frac{dy^i}{dt}\frac{\partial}{\partial y^i}. \tag{6.31}$$

(6.27), (6.29) ve (6.31) denklemleri dikkate alınırsa Hamilton denklemleri olarak adlandırılan denklemleri bulmuş oluruz:

$$\frac{dx^i}{dt} = \frac{1}{\theta}\frac{\partial H}{\partial y^i}, \frac{dy^i}{dt} = -\frac{1}{\theta}\frac{\partial H}{\partial x^i}. \tag{6.32}$$

Nihayetinde, $(\mathbf{R}_n^{2n}, g, J_\theta)$ $\theta-$Kähler uzay formunun duali olan $((\mathbf{R}_n^{2n})^*, g, J^*)$ üzerinde $((\mathbf{R}_n^{2n})^*, \Phi, X_H)$ sistemi de bir Hamiltonian mekanik sistem olarak adlandırılır.

6.3 SJ-KE $\theta-$KM ve SJ*-KE $\theta-$KM Üzerinde Mekanik Değerlendirmeler

Genelleştirilmiş klasik mekanik ve alan teorisindeki Lagrange ve Hamilton formalizmleri sabit J_θ ve J_θ^*-kesitsel eğrilikli $\theta-$Kähler uzay formlarının modelleri olan $(\mathbf{R}_n^{2n}, g, J_\theta)$ ve $\left((\mathbf{R}_n^{2n})^*, g, J_\theta^*\right)$ de aslına uygun bir biçimde karakterize edildiği bu bölümde görülmüştür. Böylece $\mathbf{R}_n^{2n}$' de ξ semisprayin yörüngeleri $(\mathbf{R}_n^{2n}, \Phi_L, X_H)$ mekanik sisteminde (6.22) tarafından verilen Euler-Lagrange denklemlerinin çözümleridir. Aynı zamanda (6.32) tarafından belirlenen Hamilton denklemlerinin çözümleri $((\mathbf{R}_n^{2n})^*, \Phi, X_H)$ mekanik sisteminde $(\mathbf{R}_n^{2n})^*$' de X_H Hamilton vektör alanının yörüngeleridir.

7 GENEL DEĞERLENDİRME

Bu tezde sabit J ve J^*-kesitsel eğrilikli tanjant, Kähler, para-Kähler ve $\theta-$Kähler uzay formlarda karmaşık mekanik sistemlerin çözümünde etkili olan Euler-Lagrange ve Hamilton denklemleri elde edilmiştir.

Bu metot aracılığı ile, bir fiziksel sistemin yapısını kuran enerji fonksiyonu kavramıyla, sistemin çözümü bulunabilmektedir. Euler-Lagrange ve Hamilton denklemleri sayesinde, böyle bir sistem için doğru ve tam bir sonuç bulunmuştur. Klasik analitik mekanikte Euler-Lagrange ve Hamilton denklemleri, enerji temel düşüncesine dayandığı için sistemlerin tam çözümlerinin bulunmasında başarılı bir yol sağlamış olmaktayız.

KAYNAKLAR

[1] **Crampin M.**, On the differential geometry of Euler-Lagrange equations, and the inverse problem of Lagrangian dynamics, J. Phys. A-Math. and Gen., Vol: 14, Issue: 10, (1981) 2567-2575.

[2] **De Leon M.**, **Rodrigues P.R.**, Methods of differential geometry in analytical mechanics, North-Hol. Math. St.,152, Elsevier Sc. Pub. Com., Inc., Amsterdam, 1989.

[3] **Crampin M.**, Lagrangian submanifolds and the Euler-Lagrange equations in the higher-order mechanics, Letters in Mathematical Physics, Vol.: 19, Issue: 1, (1990)53-58.

[4] **Tekkoyun, M.**, On para-Euler Lagrange and para- Hamiltonian equations,Physics Letters A, Vol. 340, (2005) 7-11.

[5] **Tekkoyun, M.**, **Görgülü A.**, Higher order complex Lagrangian and Hamiltonian mechanics systems , Physics Letters A, Vol.357, (2006) 261-269.

[6] **Tekkoyun, M.**, A note on constrained complex Hamiltonian mechanics differential geometry-dynamical systems (DGDS), Vol.8, No.1 , (2006) 262-267.

[7] **Tekkoyun M.**, **Cabar G.**, Complex Lagrangians and Hamiltonians, Journal of Arts and Sciences, Çankaya Üniv., Fen-Ed.Fak., Issue 8/December 2007 .

[8] **Bejan, C. L**, **Ferrara, M.**,Para-Kähler manifolds of quasi-constant-p sectional curvature.

[9] **Hacısalihoğlu, H.**, **Ekmekçi, N.**, Tensör geometri, Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi, Ankara 2003.

[10] **Yıldırım, H.**, Chen eşitsizlikleri ve bazı uzay formlarına uygulamaları, İstanbul Üniv., Fen Bil. Enst., Haziran 2006.

[11] **Mihai, A.**, Shape operator A_H for slant submanifolds in generalized complex space forms, Turk J Math, 27(2003), 509-523.

[12] **Wali, A.R.**, On totally real maximal spacelike submanifolds of an indefinite complex space form, Mathematics Applied in Science and Tecnology, Volume 1, Number 1 (2009), pp. 1-7.

[13] **Romeo, A.**, Differantial geometry of complex hypersurfaces in indefinite complex space forms, Proceeding of The Third International Workshop on Diff. Geom. 3(1999) 1-15.

[14] **Turgut, A.**, Tanjant manifold üzerinde metrikler, konneksiyonlar, ve eğriler, Gazi Üniv.,Fen Bil. Enst.,Yüksek Lisans Tezi (1989).

[15] **Hsuing, C.C.**, Almost complex and complex structure, Series in Pure Mathematics, Volume 20.

[16] **Köse, E.,T.**, Afin geometri ve afin konneksiyonlar üzerine, Erciyes Üniv.,Fen Bil. Enst.,Yüksek Lisans Tezi (2006).

[17] **Erman, S.**, Kompleks uzay formlarında holomorfik helisler, Ankara Üniv.,Fen Bil. Enst.,Yüksek Lisans Tezi (2009).

[18] **Külahçı, M.**, Semi-Riemann geometride integral formülleri, Fırat Üniv.,Fen Bil. Enst.,Doktora Tezi (2008).

[19] **Ayhan, İ.**, Semi-Riemann manifoldların tanjant ve kotanjant demetlerinin geometrisi üzerine, Süleyman Demirel Üniv.,Fen Bil. Enst.,Doktora Tezi (2006).

[20] **De Leon, M.**, **Lacomba, E.**, Lagrangian submanifolds and higher order mechanical systems, J. Phys. A. Math. Gen. 22 (1989) 3809-3820.

[21] **Adak, M.**, **Dereli, T.**, **Ryder, L., H.**, Neutrino oscillations induced by space-time torsion.

[22] **Civelek, Ş.**, The lifts of Lagrange and Hamilton equations to the extended vector bundles, Mathematical& Computational Applications, Vol 1., No. 1. pp. 21-28, 1996.

[23] **De Leon, M.**, Rodrigues, P., R., The inverse problem of Lagrangian dynamics for higher-order differantial equations. A geometrical approach, December 18, 1991.

[24] **Chinea, D.**, **De Leon, M.**, **Marrero, J.,C.**, The constraint algorithm for time-dependent Lagrangians, November 22, 1991.

[25] **De Leon, M.**, **Mello, M., H.**, Rodrigues, P., R., Reduction of degenerate non-autonomous Lagrangians, December 10, 1991.

[26] **De Andres, L., C.**, **De Leon, M.**, **Rodrigues, P., R.**, Connections on tangent bundles of higher order associated to regular Lagrangians, Geometriae Dedicata 39: 17-28, 1991.

[27] **Özer, M., N.**, Related integrable Hamiltonian systems, Department of Applied Mathemetical Studies, Doctor of Philosophy, January 1994.

[28] **De Leon, M.**, **Rodrigues, P., R.**, Second-order differantial equations and non-conservative Lagrangian systems, J. Phys. A. Math. Gen. 20 (1987) 5393-5396.

[29] **De Leon, M.**, **Rodrigues, P., R.**, Almost tangent geometry and higher order mechanical systems, Differantial Gometry and its applications, Proceeding of the conference, August 24-30, 1986, Brno, Czechoslovakia.

[30] **Shiriaev, A.**, **Pogromsky, A.**, **Ludvigsen, H.**, **Egeland, O.**, On global properties of passivity-based control of an inverted pendulum, International Journal of Robust and Nonlinear Control, 2000; 10: 283-300.

[31] **Cruceanu V.**, **Gadea P.M.**, Muñooz Masqué J., Para-Hermitian and para-Kähler manifolds, Supported by the commission of the European Communities' Action for Cooperation in Sciences and Technology with Central Eastern European Countries n. ERB3510PL920841.

[32] **Hacısalihoğlu, H.**, Diferansiyel geometri, Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi, Ankara 2000, II. cilt, 3. baskı.

[33] **Hacısalihoğlu, H.**, Diferansiyel geometri, Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi, Ankara 2000, I. cilt, 4. baskı.

[34] **Yano, K.**, **Kon, M.**, Structures on manifolds, Volume 3, Singapore 1984.

[35] **Tekkoyun, M.**, Genişletilmiş Kahler manifoldlara Euler-Lagrange ve Hamilton denklemlerinin yüksek mertebeden liftleri, Osmangazi Üniv., Fen Bil. Enst.,Doktora Tezi (2002).

[36] **De Leon, M.**, Rodrigues, Generalized classical mechanics and field theory, North-Holland Math. Stud., 112, Elsevier Sci. Pub. Comp., Inc., New York 1985.

[37] **Panza, M.**, The origins of analiytic mechanics in the 18th century, A History of Analysis, H. N. Jankhe (Ed.), 2003, pp 137-153.

[38] **Hacısalihoğlu, H.**, Lineer cebir, Ankara Üniv., Fen Fak.,Ankara 1974, Cilt 2.

[39] **Hacısalihoğlu, H.**, Lineer cebir, Gazi Üniv. Fen-Ed. Fak., Yayın no:7, Ankara 1975, 3. baskı.

[40] **Tekkoyun, M.**, **Cabar, G.**, Complex Hamiltonian equations and Hamiltonian energy, Rend. Istit. Mat. Univ. Trieste, Vol. 38, 53-64 (2006).

[41] **Aycan, C.**, Genelleştirilmiş jet demetleri üzerinde Euler-Lagrange ve Hamilton denklemlerinin liftleri, Osmangazi Üniv.,Fen Bil. Enst.,Doktora Tezi (2003).

[42] **Tekkoyun, M.**, Lifting structures: A geometrical-dynamical meaning, VDM Verlag Dr. Müller Aktiengesellschaft & Co. KG, Dudweiler Landstr. 99, 66123 Saarbrücken, Germany (2009).

ÖZGEÇMİŞ

.

Adı Soyadı	:	Fulya Özge ÇAĞLAR
Doğum Tarihi	:	27.08.1987
Doğum Yeri	:	Ankara
Adres	:	Dikmen Cad. Tur-tas Sitesi A3 Blok D-41 ANKARA
Lisans Üniversite	:	PAÜ