PAMUKKALE ÜNİVERSİTESİ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

ZAMAN SKALASI ÜZERİNDE YÜKSEK MERTEBEDEN LİNEER OLMAYAN DİNAMİK SİSTEMLER İÇİN POZİTİF ÇÖZÜMLERİN VARLIĞI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Mustafa GÜNENDİ

Anabilim Dalı : Matematik

Tez Danışmanı: Doç. Dr. İsmail YASLAN

ARALIK 2011

YÜKSEK LİSANS TEZ ONAY FORMU

Pamukkale Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü 091441001 nolu öğrecisi Mustafa GÜNENDİ tarafından hazırlanan "**ZAMAN SKALASI ÜZERİNDE YÜKSEK MERTEBEDEN LİNEER OLMAYAN DİNAMİK SİSTEMLER İÇİN POZİTİF ÇÖZÜMLERİN VARLIĞI**" başlıklı tez tarafımızdan okunmuş, kapsamı ve niteliği açısından bir Yüksek Lisans tezi olarak kabul edilmiştir.

Tez Danışmanı : **(Jüri Başkanı)**	**Doç. Dr. İsmail YASLAN (PAÜ)**
Jüri Üyesi :	**Prof. Dr. Mehmet Ali SARIGÖL (PAÜ)**
Jüri Üyesi :	**Yrd. Doç. Dr. Can Murat DİKMEN (ZKÜ)**

Pamukkale Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun 11/01/2013 tarih ve ....01/16.... sayılı kararıyla onaylanmıştır.

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü
Prof. Dr. Nuri KOLSUZ

Bu tezin tasarımı, hazırlanması, yürütülmesi, araştırmalarının yapılması ve bulgularının analizlerinde bilimsel etiğe ve akademik kurallara özenle riayet edildiğini; bu çalışmanın doğrudan birincil ürünü olmayan bulguların, verilerin ve materyallerin bilimsel etiğe uygun olarak kaynak gösterildiğini ve alıntı yapılan çalışmalara atfedildiğine beyan ederim.

İmza :
Öğrenci Adı Soyadı : Mustafa GÜNENDİ

ÖNSÖZ

Bu çalışmada zaman skalası üzerinde ele alınan yüksek mertebeden lineer olmayan bir dinamik sistem için sabit nokta teoremlerini kullanarak koni üzerinde pozitif çözümlerinin varlığı için koşullar incelenmiştir. Bu tez çalışmasını hazırlarken değerli yardım ve katkılarıyla beni yönlendiren, anlayışını, emeğini ve zamanını esirgemeyen çok kıymetli hocam Sayın Doç. Dr. İsmail YASLAN'a ve bu süreçte hoşgörü ve sabırla beni destekleyen aileme teşekkürü bir borç bilirim.

Aralık 2011 Mustafa GÜNENDİ

İÇİNDEKİLER

ÖZET

ZAMAN SKALASI ÜZERİNDE YÜKSEK MERTEBEDEN LİNEER OLMAYAN DİNAMİK SİSTEMLER İÇİN POZİTİF ÇÖZÜMLERİN VARLIĞI

Bu tez üç ana bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde, ele alınan problem tanıtılmıştır. İkinci bölümde, zaman skalası ile ilgili temel tanım ve teoremler verilmiştir. Üçüncü bölümde, ilk olarak, yardımcı lineer sınır değer probleminin Green fonksiyonu yapılmış ve bu fonksiyonun özellikleri incelenmiştir. Sonra, lineer olmayan sistem, lineer olmayan integral denkleme indirgenmiştir ve Schauder sabit nokta teoremi yardımıyla lineer olmayan sistemin en az bir çözümünün varlığı için kriter elde edilmiştir. Ardından da, lineer olmayan sistemin en az bir pozitif çözümünün varlığı dört fonksiyonel sabit nokta teoremi yardımıyla, en az iki pozitif çözümünün varlığı Avery-Henderson sabit nokta teoremi yardımıyla ve en az üç pozitif çözümünün varlığı için yeterli koşullarda beş fonksiyonel sabit nokta teoremi yardımıyla ispatlanmıştır.

Anahtar Kelimeler: Zaman skalası, sabit nokta teoremleri, koni, pozitif çözümler.

SUMMARY

EXISTENCE OF POSITIVE SOLUTIONS FOR HIGHER ORDER NONLINEAR DYNAMICAL SYSTEMS ON TIME SCALES

This thesis consists of three chapters. In chapter 1, discussed problem is introduced. In chapter 2, some basic definitions and theorems on time scales are given. In chapter 3, firstly, a Green's function of the auxiliary linear boundary value problem is constructed and the properties of the Green's function is investigated. Then, nonlinear system is reduced to a nonlinear integral equation and we have obtained criteria for the existence of at least one solution for nonlinear system by using Schauder fixed point theorem. And then, we establish some sufficient conditions for the existence of at least one, two, and three positive solutions for nonlinear system by using four functional fixed point theorem, Avery-Henderson fixed point theorem and five functional fixed point theorem, respectively.

Key Words: Time scale, fixed point theorems, cone, positive solutions.

1. GİRİŞ

Bu tez çalışmasında zaman skalası üzerinde yüksek mertebeden lineer olmayan dinamik sistemler için pozitif çözümlerin varlığı incelenmiştir.

Son yıllarda birçok matematikçi zaman skalası üzerinde ikinci dereceden üç nokta sınır değer problemlerini konu alan çalışmalar yapmıştır.[1, 2, 12, 18, 20, 21]

Anderson ve Avery [3] makalesinde

$$\begin{cases} (-1)^n x^{(\Delta\nabla)^n}(t) = \lambda h(t) f(x(t)),\ t \in [a,c] \subset \mathbb{T},\ n \in \mathbb{N} \\ x^{(\Delta\nabla)^i}(a) = 0,\quad x^{(\Delta\nabla)^i}(c) = \beta x^{(\Delta\nabla)^i}(b),\ \ 0 \le i \le n-1 \end{cases}$$

sınır değer probleminin koni üzerinde en az bir pozitif çözümünün varlığı için koşullar elde etmiştir.

Ayrıca Sang ve Su [19],

$$\begin{cases} u^{\Delta^n}(t) + f(t, u(t)) = 0, & t \in (0,T) \\ u(0) = \alpha u(\eta),\ u(T) = \beta u(\eta),\ u^{\Delta^i}(0) = 0,\ i = 1,2,\ldots,n-2 & \end{cases}$$

üç nokta sınır değer probleminin en az bir çözümünün varlığı problemini incelemiştir.

Bunlara ek olarak Yaslan [22] makalesinde $\mathbb{T}$ bir zaman skalası , $t_1, t_2, t_3 \in \mathbb{T}$, $n \in \mathbb{N}$, $t_2 \in (t_1, \sigma(t_3))$, $\gamma > 0, \delta > 1$ ve $f_1 : [t_1, \sigma(t_3)] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sürekli fonksiyonlar olmak üzere,

$$\begin{cases} (-1)^n y_1^{\Delta^{2n}}(t) = f_1(t, y_1(\sigma(t)), y_2(\sigma(t))),\ t \in [t_1, t_3] \\ y_1^{\Delta^{2i+1}}(t_1) = 0,\ \gamma y_1^{\Delta^{2i}}(\sigma(t_3)) + \delta y_1^{\Delta^{2i+1}}(\sigma(t_3)) = y_1^{\Delta^{2i+1}}(t_2),\ 0 \le i \le n-1 \end{cases}$$

üç nokta sınır değer probleminin koni üzerinde en az bir, iki ve üç pozitif çözümünün var olması problemlerini incelemiştir.

Zaman skalası üzerinde ortaya koyulmuş sistemi açıklayalım.

$\mathbb{T}$ bir zaman skalası , $t_1, t_2, t_3 \in \mathbb{T}$, $n, m \in \mathbb{N}$, $t_2 \in (t_1, \sigma(t_3))$, $\gamma > 0, \delta > 1$ ve $f_{1,2} : [t_1, \sigma(t_3)] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sürekli fonksiyonlar olmak üzere,

$$\begin{cases} (-1)^n y_1^{\Delta^{2n}}(t) = f_1(t, y_1(\sigma(t)), y_2(\sigma(t))),\ t \in [t_1, t_3] \\ (-1)^m y_2^{\Delta^{2m}}(t) = f_2(t, y_1(\sigma(t)), y_2(\sigma(t))),\ t \in [t_1, t_3] \end{cases}$$

$$\begin{cases} y_1^{\Delta^{2i+1}}(t_1) = 0,\ \gamma y_1^{\Delta^{2i}}(\sigma(t_3)) + \delta y_1^{\Delta^{2i+1}}(\sigma(t_3)) = y_1^{\Delta^{2i+1}}(t_2),\ 0 \le i \le n-1 \\ y_2^{\Delta^{2j+1}}(t_1) = 0,\ \gamma y_2^{\Delta^{2j}}(\sigma(t_3)) + \delta y_2^{\Delta^{2j+1}}(\sigma(t_3)) = y_2^{\Delta^{2j+1}}(t_2),\ 0 \le j \le m-1 \end{cases}$$

sistemi için sabit nokta teoremlerini kullanarak, koni üzerinde en az bir, iki ve üç pozitif çözümün var olması için koşullar elde edeceğiz.

2. ZAMAN SKALASI İLE İLGİLİ TEMEL BİLGİLER

Tanım 2.1: Reel sayıların boştan farklı kapalı bir alt kümesine zaman skalası denir ve $\mathbb{T}$ ile gösterilir. Örnek olarak reel sayılar, tam sayılar, doğal sayılar ve Cantor kümesi birer zaman skalasıdır. Bunun yanında rasyonel sayılar, irrasyonel sayılar, karmaşık sayılar ve $(0,1)$ aralığı birer zaman skalası değildir.

Tanım 2.2: $\mathbb{T}$ bir zaman skalası olsun. $\forall t \in \mathbb{T}$ için $\sigma(t) = \inf\{s \in \mathbb{T} : s > t\}$ ile tanımlı $\sigma : \mathbb{T} \to \mathbb{T}$ operatörüne ileri sıçrama operatörü denir.

Tanım 2.3: $\mathbb{T}$ bir zaman skalası olsun. $\forall t \in \mathbb{T}$ için $\rho(t) = \sup\{s \in \mathbb{T} : s < t\}$ ile tanımlı $\rho : \mathbb{T} \to \mathbb{T}$ operatörüne geri sıçrama operatörü denir.

Tanım 2.4: Eğer $\mathbb{T}$ nin maksimum elemanı t_1 ise $\sigma(t_1) = t_1$ ve $\mathbb{T}$ nin minimum elemanı t_2 ise $\rho(t_2) = t_2$ olarak tanımlanır.

Tanım 2.5: Eğer $\sigma(t) > t$ ise t noktasına sağ-yayılmış nokta, $\rho(t) < t$ ise t noktasına sol-yayılmış nokta denir. Hem sağ-yayılmış hem de sol-yayılmış olan noktalara izole(ayrık) noktalar denir.

Tanım 2.6: Eğer $t < \sup \mathbb{T}$ ve $\sigma(t) = t$ ise t noktasına sağ-yoğun nokta , $t > \inf \mathbb{T}$ ve $\rho(t) = t$ ise t noktasına sol-yoğun nokta denir. Hem sağ-yoğun hem de sol-yoğun olan noktalara ise yoğun noktalar denir.

Örnek 2.1: Eğer $\mathbb{T} = \mathbb{R}$ ise $t \in \mathbb{T}$ için $\sigma(t) = \inf\{s \in \mathbb{T} : s > t\} = \inf(t, \infty) = t$ ve benzer şekilde $\rho(t) = t$ elde edilir. Öyleyse her $t \in \mathbb{T}$ noktası yoğun noktadır.

Örnek 2.2: $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$ ise $\forall t \in \mathbb{R}$ için $\sigma(t) = t + 1$ ve $\rho(t) = t - 1$ olduğundan $\mathbb{T}$ deki her nokta izole noktadır.

Örnek 2.3: $\mathbb{T}$ zaman skalasını $\mathbb{T} = \{0\} \cup \left\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\right\} \cup \{x \in \mathbb{R} : 2 \leq x \leq 3\} \cup \{4\} \cup \{5\}$ olarak alalım. Bu durumda

i) Her $t \in (2,3)$ noktası sağ yoğun ve sol yoğun noktadır.

ii) 2 noktası sağ yoğun ve sol yayılmış noktadır.

iii) 3 noktası sağ yayılmış ve sol yoğun noktadır.

iv) 4 noktası izole noktadır.

Tanım 2.7: $\forall t \in \mathbb{T}$ için $\mu(t) = \sigma(t) - t$ ile tanımlı $\mu : \mathbb{T} \to [0,\infty)$ fonksiyonuna graininess fonksiyonu denir.

Tanım 2.8: Eğer $\mathbb{T}$ sol-yayılmış maksimum m elemanına sahip ise $\mathbb{T}^{\kappa} = \mathbb{T} - \{m\}$ ile tanımlanır. Özetle;

$$\mathbb{T}^{\kappa} = \begin{cases} \mathbb{T} \setminus (\rho(\sup \mathbb{T}), \sup \mathbb{T}] & , \sup \mathbb{T} < \infty \\ \mathbb{T} & , \sup \mathbb{T} = \infty \end{cases}$$

şeklinde yazılabilir.

Eğer $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon ve $f^{\sigma} : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu $\forall t \in \mathbb{T}$ için $f^{\sigma}(t) = f(\sigma(t))$ ile tanımlanır.

Bir $\mathbb{T}$ zaman skalasında $[a,b]$ aralığı $[a,b] = \{t \in \mathbb{T} : a \le t \le b\}$ olarak tanımlanır.

Zaman skalasında süreklilik ve türev kavramlarını verebilmek için, öncelikle zaman skalasında komşuluk kavramına ihtiyacımız olacaktır.

Tanım 2.9: $U \subset \mathbb{T}$ olsun. Her $\varepsilon > 0$ için $U_{\varepsilon}(t) = \{s \in \mathbb{T} : |s - t| < \varepsilon\}$ kümesine t nin ε komşuluğu denir.

Tanım 2.10: $t_0 \in \mathbb{T}$ olsun. Verilen her $\varepsilon > 0$ ve her $t \in U(t_0)$ için, $|f(t) - f(t_0)| < \varepsilon$ olacak şekilde bir $U(t_0)$ komşuluğu bulunabiliyorsa $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ fonksiyonuna $t = t_0$ noktasında süreklidir denir.

Örnek 2.4: $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$, $f(t) = \begin{cases} |t| & , t < 0 \\ t + 1 & , t \ge 0 \end{cases}$ fonksiyonu verilsin.

a) $\mathbb{T} = \mathbb{R}$ ise f, $t = 0$ da süreklidir.

b) $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$ ise f, $\forall t \in \mathbb{Z}$ de süreklidir.

2.1 Zaman Skalasında Türev

Tanım 2.1.1: $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon ve $t \in \mathbb{T}^{\kappa}$ olsun. $\forall \varepsilon > 0$ sayısı verildiğinde t nin bir U komşuluğu vardır öyle ki $\forall s \in U$ için,

$$\left| f(\sigma(t)) - f(s) - f^{\Delta}(t)(\sigma(t) - s) \right| \le \varepsilon |\sigma(t) - s|$$

oluyorsa $f^{\Delta}(t)$ sayısına f 'nin t noktasındaki delta türevi denir.

Eğer f fonksiyonu tüm $\mathbb{T}^{\kappa}$ kümesi üzerinde delta türevlenebilir ise $f^{\Delta}(t)$, $\forall t \in \mathbb{T}^{\kappa}$ için mevcuttur. $f^{\Delta}:\mathbb{T}^{\kappa} \to \mathbb{R}$ fonksiyonuna ise f 'nin $\mathbb{T}^{\kappa}$ kümesindeki delta türev fonksiyonu denir.

Teorem 2.1.1: $f:\mathbb{T} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu ve $t \in \mathbb{T}^{\kappa}$ verilsin.

i) f, t de türevlenebilir ise f, t de süreklidir.

ii) f, t de sürekli ve t sağ-yayılmış ise f, t de türevlenebilirdir ve

$$f^{\Delta}(t) = \frac{f(\sigma(t)) - f(t)}{\mu(t)}$$

iii) t sağ-yoğun bir nokta olsun.

f, t de türevlenebilirdir $\Leftrightarrow \lim\limits_{s \to t} \dfrac{f(t)-f(s)}{t-s}$ limiti mevcuttur ve

$$f^{\Delta}(t) = \lim_{s \to t} \frac{f(t)-f(s)}{t-s}$$

olur.

iv) f, t de türevlenebilir ise, $f(\sigma(t)) = f(t) + \mu(t) f^{\Delta}(t)$ olur.

Örnek 2.1.1: $\mathbb{T}=\mathbb{R}$ ve $\mathbb{T}=\mathbb{Z}$ durumlarını inceleyelim.

i) $\mathbb{T}=\mathbb{R}$ ise Teorem 2.1.1. den $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $t \in \mathbb{R}$ de delta türevlenebilirdir.

t sağ-yoğun bir nokta olduğundan, $f'(t) = \lim\limits_{s \to t} \dfrac{f(t)-f(s)}{t-s}$ sonlu bir sayı olarak mevcuttur. Yani f türevlenebilirse $f^{\Delta}(t) = f'(t)$ dir.

ii) $\mathbb{T}=\mathbb{Z}$ iken Teorem 2.1.1. den $f:\mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ delta türevlenebilen t noktaları sağ-yayılmıştır.

$$f^{\Delta}(t) = \frac{f(\sigma(t)) - f(t)}{\mu(t)} = \frac{f(t+1)-f(t)}{t+1-t} = f(t+1) - f(t) = \Delta f(t)$$

Burada Δ alışılmış ileri fark operatörüdür.

Teorem 2.1.2: $f, g:\mathbb{T} \to \mathbb{R}$ **,** $t \in \mathbb{T}^{\kappa}$ noktasında türevlenebilir olsun. O halde,

i) $(f+g)^{\Delta}(t) = f^{\Delta}(t) + g^{\Delta}(t)$ dir.

ii) α gibi herhangi bir sabit için $\alpha f:\mathbb{T}\to\mathbb{R}$ fonksiyonu t noktasında türevlenebilir ve bu türev,

$$(\alpha f)^{\Delta}(t)=\alpha f^{\Delta}(t)$$

dir.

iii) $f,g:\mathbb{T}\to\mathbb{R}$ **,** $t\in\mathbb{T}^{\kappa}$ noktasında türevlenebilir ve bu türev,

$$(fg)^{\Delta}(t)=f^{\Delta}(t).g(t)+g^{\Delta}(t).f(\sigma(t))=f^{\Delta}(t).g(\sigma(t))+g^{\Delta}(t).f(t)$$

iv) $f(t)f(\sigma(t))\neq 0$ olmak üzere $\dfrac{1}{f}$, $t\in\mathbb{T}^{\kappa}$ noktasında türevlenebilir ve

$$\left(\frac{1}{f}\right)^{\Delta}(t)=-\frac{f^{\Delta}(t)}{f(t)f(\sigma(t))}$$

dır.

v) $g(t)g(\sigma(t))\neq 0$ olmak üzere $\dfrac{f}{g}$, $t\in\mathbb{T}^{\kappa}$ noktasında türevlenebilir ve

$$\left(\frac{f}{g}\right)^{\Delta}(t)=\frac{f^{\Delta}(t)g(t)-f(t)g^{\Delta}(t)}{g(t)g(\sigma(t))}$$

olur.

Önerme 2.1.1:[8] $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ monoton artan bir fonksiyon ise, $\forall t\in[a,b)$ için $f^{\Delta}(t)\geq 0$ olur.

Önerme 2.1.2:[8] $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ monoton azalan bir fonksiyon ise, $\forall t\in[a,b)$ için $f^{\Delta}(t)\leq 0$ olur.

Teorem 2.1.3: Eğer $f:\mathbb{T}\to\mathbb{R}$ fonksiyonu $[a,b]$ üzerinde sürekli ve $[a,b)$ üzerinde $\Delta-$türevlenebilir olsun. $f(a)=f(b)$ ise $\exists\xi,\tau\in[a,b]$ vardır ki

$$f^{\Delta}(\xi)\leq 0\leq f^{\Delta}(\tau)$$

eşitsizliği doğrudur.

İspat: $f(a)=f(b)$ olduğundan ve $f(t)$ sürekli bir fonksiyon olduğundan ya $f(t)$ sabit bir fonksiyondur yada $f(t)$ en az bir noktada ekstremuma sahiptir. O halde $f(t)$ nin $[a,b)$ içinde minimum m ve maksimum M değerine sahip olduğu noktalar vardır. Eğer $f(t)$ sabit ise $\forall t\in[a,b)$ için $f^{\Delta}(t)=0$ dır.

Eğer $f(t)$ fonksiyonu bir ξ noktasında maksimum M değerine ve τ noktasında minimum m değerine sahip ise $\Delta-$türev tanımından

$$f^{\Delta}(\xi)\leq 0 \text{ ve } f^{\Delta}(\tau)\geq 0$$

elde edilir. O halde $f^{\Delta}(\xi)\leq 0\leq f^{\Delta}(\tau)$ dır.

Teorem 2.1.4: (Ortalama Değer Teoremi) $f:\mathbb{T}\to\mathbb{R}$ fonksiyonu $[a,b]$ üzerinde sürekli ve $[a,b)$ üzerinde $\Delta-$türevlenebilir olsun. $f(a)=f(b)$ ise $\exists\mu,\zeta\in[a,b)$ vardır ki

$$f^{\Delta}(\mu)\leq\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\leq f^{\Delta}(\zeta)$$

eşitsizliği doğrudur.

İspat: $[a,b]$ de $h(t)=f(t)-f(a)-\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}(t-a)$ fonksiyonunu tanımlayalım. $h(t)$, $[a,b]$ de sürekli, $[a,b)$ de $\Delta-$türevlenebilir ve $h(a)=0=h(b)$ elde edilir. O halde Teorem 2.1.3. den dolayı $\exists\mu,\zeta\in[a,b)$ vardır ki

$$h^{\Delta}(\mu)\leq 0\leq h^{\Delta}(\zeta)$$

elde edilir. O halde

$$f^{\Delta}(\mu)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\leq 0\leq f^{\Delta}(\zeta)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

olur. Buradan da

$$f^{\Delta}(\mu)\leq\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\leq f^{\Delta}(\zeta)$$

eşitsizliği doğrudur.

Sonuç 2.1.1: Eğer $f:\mathbb{T}\to\mathbb{R}$ fonksiyonu $[a,b]\cap\mathbb{T}^k$ üzerinde $\Delta-$türevlenebilir ve her $t\in[a,b]\cap\mathbb{T}^k$ için $f^{\Delta}(t)=0$ ise f fonksiyonu sabittir.

2.2 Zaman Skalasında Yüksek Mertebeden Türev

Tanım 2.2.1: $f:\mathbb{T}\to\mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. $f^{\Delta}:\mathbb{T}^k\to\mathbb{R}$ fonksiyonu $\mathbb{T}^{k^2}=\left(\mathbb{T}^k\right)^k$ da $\Delta-$türevlenebilir ise, f fonksiyonu ikinci mertebeden türevlenebilirdir denir ve

$$f^{\Delta\Delta}=\left(f^{\Delta}\right)^{\Delta}:\mathbb{T}^{k^2}\to\mathbb{R}$$

olur. Benzer şekilde, f nin n. mertebeden $\Delta-$türevleri $f^{\Delta^n}:\mathbb{T}^{k^n}\to\mathbb{R}$ ile tanımlanır. Her $t\in\mathbb{T}$ için

$$\sigma^2(t)=\sigma(\sigma(t)) \text{ ve } \rho^2(t)=\rho(\rho(t))$$

ile tanımlanır ve buna göre $n\in\mathbb{N}$ için $\sigma^n(t)$ ve $\rho^n(t)$ benzer şekilde ifade edilir.

Ayrıca, $\rho^0(t)=\sigma^0(t)=t$, $f^{\Delta^0}=f$ ve $\mathbb{T}^{k^0}=\mathbb{T}$ olarak tanımlıdır.

Örnek 2.2.1: $\mathbb{T}$ herhangi bir zaman skalası olsun. $f:\mathbb{T}\to\mathbb{R}$, her $t\in\mathbb{T}$ için $f(t)=t$ alalım. $f^{\Delta}(t)=1$ olduğunu biliyoruz. O halde her $t\in\mathbb{T}^{k^2}$ sağ yoğun ise

$$f^{\Delta\Delta}(t)=\left(f^{\Delta}\right)^{\Delta}(t)=\lim_{s\to t}\frac{f^{\Delta}(t)-f^{\Delta}(s)}{t-s}=\lim_{s\to t}\frac{1-1}{t-s}=0$$

ve her $t\in\mathbb{T}^{k^2}$ sağ yayılmış ise

$$f^{\Delta\Delta}(t)=\left(f^{\Delta}\right)^{\Delta}(t)=\frac{f^{\Delta}(\sigma(t))-f^{\Delta}(t)}{\sigma(t)-s}=\frac{1-1}{\sigma(t)-s}=0$$

olduğu görülür.

2.3 Zaman Skalasında İntegral

Tanım 2.3.1: $f:\mathbb{T}\to\mathbb{R}$ fonksiyonu verilsin. Eğer $F:\mathbb{T}\to\mathbb{R}$ fonksiyonu $\mathbb{T}^k$ üzerinde $\Delta-$türevlenebilir ve her $t\in\mathbb{T}^k$ için $F^{\Delta}(t)=f(t)$ ise, F fonksiyonuna f nin $\Delta-$anti türevi veya ilkeli denir.

Tanım 2.3.2: Eğer $f:\mathbb{T}\to\mathbb{R}$ fonksiyonunun $\Delta-$anti türevi varsa, f ye $\Delta-$integrallenebilir fonksiyon denir. Bu durumda a ve b, $\mathbb{T}$ içinde herhangi noktalar olmak üzere f nin a dan b ye Δ integrali

$$\int_a^b f(t)\Delta t=F(b)-F(a)$$

olarak tanımlanır.

Teorem 2.3.1: $f:\mathbb{T}\to\mathbb{R}$ ve $g:\mathbb{T}\to\mathbb{R}$ fonksiyonları $\Delta-$integrallenebilir olsunlar. Bu durumda her $a,b,c\in\mathbb{T}$ için aşağıdaki ifadeler doğrudur.

1. $\int_a^b\left[f(t)+g(t)\right]\Delta t=\int_a^b f(t)\Delta t+\int_a^b g(t)\Delta t$

2. Her k sabiti için $\int_a^b kf(t)\Delta t=k\int_a^b f(t)\Delta t$ olur.

3. $\int_a^a f(t)\Delta t = 0$

4. $\int_a^b f(t)\Delta t = -\int_b^a f(t)\Delta t$

5. $\int_a^b f(t)\Delta t = \int_a^c f(t)\Delta t + \int_c^b f(t)\Delta t$

6. $\int_a^b f(\sigma(t))g^{\Delta}(t)\Delta t = f(t)g(t)\Big|_a^b - \int_a^b f^{\Delta}(t)g(t)\Delta t$

7. $\int_a^b f(t)g^{\Delta}(t)\Delta t = f(t)g(t)\Big|_a^b - \int_a^b f^{\Delta}(t)g(\sigma(t))\Delta t$

Teorem 2.3.2:[8] $f:\mathbb{T}\to\mathbb{R}$ fonksiyonu $\Delta-$integrallenebilir olsun. Bu durumda $t\in\mathbb{T}^k$ için

$$\int_t^{\sigma(t)} f(s)\Delta s = [\sigma(t)-t]f(t)$$

eşitliği doğrudur.

Teorem 2.3.3:[8] $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. Eğer her $t\in[a,b]$ için $f^{\Delta}(t)\geq 0$ ise f fonksiyonu artandır.

Teorem 2.3.4:[8] $\mathbb{T}$ bir zaman skalası olsun. a ve b $\mathbb{T}$ içinde $a<b$ olacak şekilde iki nokta ve $f(t)$ ve $g(t)$ fonksiyonları $\mathbb{T}$ de $\Delta-$integrallenebilir olsunlar. Her $t\in[a,b]$ için

1. $f(t)\geq 0$ ise $\int_a^b f(t)\Delta t\geq 0$

2. $f(t)\leq g(t)$ ise $\int_a^b f(t)\Delta t\leq \int_a^b g(t)\Delta t$

3. $|f(t)|\leq g(t)$ ise $\left|\int_a^b f(t)\Delta t\right|\leq \int_a^b g(t)\Delta t$

4. $\left|\int_a^b f(t)\Delta t\right|\leq \int_a^b |f(t)|\Delta t\leq \left(\sup_{a\leq t\leq\rho(t)}|f(t)|\right)(b-a)$

ifadeleri doğrudur.

Teorem 2.3.5:[8] $\mathbb{T}$ bir zaman skalası olsun. $a,b\in\mathbb{T}$ ve $a<b$ olsun. Eğer $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ fonksiyonu $[a,b]$ üzerinde sürekli ise aşağıdaki eşitlikler doğrudur.

1. $\int_a^b f(t)\Delta t=\int_a^{\rho(b)} f(t)\Delta t+[b-\rho(b)]f(\rho(b))$

2. $\int_a^b f(t)\Delta t=[\sigma(a)-a]f(a)+\int_{\sigma(a)}^b f(t)\Delta t$

Örnek 2.3.1:[8] $\mathbb{T}$ bir zaman skalası olmak üzere $a,b\in\mathbb{T}$ ve $f:\mathbb{T}\to\mathbb{R}$ sağ-yoğun sürekli fonksiyon olsun.

1. Eğer $\mathbb{T}=\mathbb{R}$ ise $\int_a^b f(t)\Delta t=\int_a^b f(t)dt$ olur. Burada eşitliğin sağındaki integral analizden bilinen Riemann integralidir.

2. Eğer $\mathbb{T}=\mathbb{Z}$ ise $\int_a^b f(t)\Delta t=\begin{cases}\sum_{t=a}^{b-1} f(t) & a<b\\ 0 & a=b\\ -\sum_{t=b}^{a-1} f(t) & a>b\end{cases}$ sağlanır.

3. Eğer $[a,b]$ aralığı sadece izole noktaları içeriyorsa

$$\int_a^b f(t)\Delta t=\begin{cases}\sum_{t\in[a,b)} f(t)\mu(t) & a<b\\ 0 & a=b\\ -\sum_{t\in[b,a)} f(t)\mu(t) & a>b\end{cases}$$

sağlanır.

Örnek 2.3.2:[10] $\mathbb{T}=\mathbb{Z}$ için $a\neq 0$ olmak üzere $\int a^t\Delta t$ belirsiz integralini inceleyelim.

$$\left(\frac{a^t}{a-1}\right)^{\Delta}=\Delta\left(\frac{a^t}{a-1}\right)=\frac{a^{t+1}-a^t}{a-1}=a^t$$

olduğundan

$$\int a^t\Delta t=\frac{a^t}{a-1}+c \quad (c=sabit)$$

elde edilir.

Örnek 2.3.3:[10] $\mathbb{T}=[-1,1]\cup[3,4]$ olsun. $\int_{-1}^{t} s\Delta s$ integralinin değerini hesaplayalım. $t\leq 1$ ise $\int_{-1}^{t} s\Delta s=\int_{-1}^{t} sds=\frac{t^2}{2}-\frac{1}{2}$

$t=3$ ise $\int_{-1}^{t} s\Delta s=\int_{-1}^{1} s\Delta s+\int_{1}^{3} s\Delta s=0+(\sigma(1)-1)f(1)=(3-1)1=2$

$t>3$ ise $\int_{-1}^{t} s\Delta s=\int_{-1}^{3} s\Delta s+\int_{3}^{t} s\Delta s=2+\int_{3}^{t} sds=2+\left.\frac{s^2}{2}\right|_{3}^{t}$

$$=\frac{t^2}{2}-\frac{9}{2}+2=\frac{t^2}{2}-\frac{5}{2}$$

elde edilir.

3. ZAMAN SKALASINDA YÜKSEK MERTEBEDEN LİNEER OLMAYAN DİNAMİK SİSTEM İÇİN POZİTİF ÇÖZÜMLERİN VARLIĞI

Bu bölümde $\mathbb{T}$ bir zaman skalası, $t_1,t_2,t_3\in\mathbb{T}$, $n,m\in\mathbb{N}$, $t_2\in(t_1,\sigma(t_3))$, $\gamma>0$, $\delta>1$ ve $f_{1,2}:[t_1,\sigma(t_3)]\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ sürekli fonksiyonlar olmak üzere,

$$\begin{cases}(-1)^n y_1^{\Delta^{2n}}(t)=f_1\big(t,y_1(\sigma(t)),y_2(\sigma(t))\big),\ t\in[t_1,t_3]\\ (-1)^m y_2^{\Delta^{2m}}(t)=f_2\big(t,y_1(\sigma(t)),y_2(\sigma(t))\big),\ t\in[t_1,t_3]\end{cases}\tag{3.1}$$

$$\begin{cases}y_1^{\Delta^{2i+1}}(t_1)=0,\ \gamma y_1^{\Delta^{2i}}(\sigma(t_3))+\delta y_1^{\Delta^{2i+1}}(\sigma(t_3))=y_1^{\Delta^{2i+1}}(t_2),\ 0\le i\le n-1\\ y_2^{\Delta^{2j+1}}(t_1)=0,\ \gamma y_2^{\Delta^{2j}}(\sigma(t_3))+\delta y_2^{\Delta^{2j+1}}(\sigma(t_3))=y_2^{\Delta^{2j+1}}(t_2),\ 0\le j\le m-1\end{cases}\tag{3.2}$$

sistemi ele alınacaktır. Öncelikle sistemin Green fonksiyonu ile ilgili özellikler ortaya koyulacak ve Schauder Sabit Nokta Teoremi [17] teoremi yardımı ile (3.1)-(3.2) sisteminin çözümünün varlığı gösterilecektir. Sonra ise (3.1)-(3.2) sisteminin pozitif çözümlerinin varlığı incelenecektir. Bu bölümde $\sigma(t_3)$ sağ yoğun olarak kabul edilecektir. Bunun sonucu olarak $j>1$ için $\sigma^j(t_3)=\sigma(t_3)$ olacaktır.

3.1 Green Fonksiyonu ve Özellikleri

$y(t)=(y_1(t),y_2(t))$ fonksiyonunun (3.1)-(3.2) sisteminin bir çözümü olması için gerek ve yeter koşul $y:[t_1,\sigma(t_3)]\times[t_1,\sigma(t_3)]\to\mathbb{R}$ ile tanımlanan sürekli fonksiyonun $t\in[t_1,t_3]$ için (3.1) denklemlerini ve (3.2) sınır koşullarını sağlamasıdır.

Ele alınan (3.1)-(3.2) sisteminin $y(t)=(y_1(t),y_2(t))$ şeklinde bir çözümünün var olduğunu bulmak ve çözümün şeklini tayin edebilmek için

$$\begin{cases}(-1)^n y^{\Delta^{2n}}(t)=0,\ t\in[t_1,t_3] & (3.3)\\ y^{\Delta^{2i+1}}(t_1)=0,\ \gamma y^{\Delta^{2i}}(\sigma(t_3))+\delta y^{\Delta^{2i+1}}(\sigma(t_3))=y^{\Delta^{2i+1}}(t_2),\ 0\le i\le n-1 & (3.4)\end{cases}$$

homojen sınır değer probleminin Green fonksiyonuna ihtiyaç vardır.

Özellik 3.1.1:[21]
$$\begin{cases} -y^{\Delta^2}(t)=0, \quad t\in[t_1,t_3] & (3.5) \\ y^{\Delta}(t_1)=0, \gamma y(\sigma(t_3))+\delta y^{\Delta}(\sigma(t_3))=y^{\Delta}(t_2) & (3.6) \end{cases}$$

sınır değer probleminin Green fonksiyonu

$$H(t,s)=\begin{cases} \sigma(t_3)-t+\dfrac{\delta-1}{\gamma}, & \sigma(s)\le t, \\ \sigma(t_3)-\sigma(s)+\dfrac{\delta-1}{\gamma}, & t\le s, \end{cases}$$

ve

$$K(t,s)=\begin{cases} \sigma(t_3)-t+\dfrac{\delta}{\gamma}, & \sigma(s)\le t, \\ \sigma(t_3)-\sigma(s)+\dfrac{\delta}{\gamma}, & t\le s, \end{cases}$$

olmak üzere

$$G(t,s)=\begin{cases} H(t,s), & t_1\le s\le t_2 \\ K(t,s), & t_2< s\le t_3 \end{cases} \qquad (3.7)$$

şeklinde tanımlıdır.

Özellik 3.1.2: [22] $G(t,s)$ (3.5)-(3.6) probleminin Green fonksiyonu ve $G_1(t,s):=G(t,s)$ olmak üzere (3.3)-(3.4) probleminin Green fonksiyonu $2\le j\le n$ için

$$G_j(t,s)=\int_{t_1}^{\sigma(t_3)} G_{j-1}(t,r)G(r,s)\Delta r \qquad (3.8)$$

olur.

Lemma 3.1.1: [22] $\gamma>0,\ \delta>1$ olsun. (3.7) Green fonksiyonu $(t,s)\in[t_1,\sigma(t_3)]\times[t_1,t_3]$ için

$$G(t,s)\ge\frac{t-t_1}{\sigma(t_3)-t_1}G(\sigma(t_3),s) \qquad (3.9)$$

eşitsizliğini sağlar.

Lemma 3.1.2: [22] $\gamma>0,\ \delta>1$ olsun. (3.7) Green fonksiyonu $(t,s)\in[t_1,\sigma(t_3)]\times[t_1,t_3]$ için

$$0<G(t,s)\le G(\sigma(s),s) \qquad (3.10)$$

özelliğini sağlar.

Sonuç 3.1.1. Lemma 3.1.2. ye göre $\|G(.,s)\| = G(\sigma(s),s)$ olduğu söylenebilir.

Lemma 3.1.3:[21] $\gamma > 0,\ \delta > 1$ ve $s \in [t_1, t_3]$ olsun.

$$k = \frac{\delta - 1}{\gamma(\sigma(t_3) - \sigma(t_1)) + \delta - 1} \quad (3.11)$$

ve $\|.\|$ normu $\|x\| = \max_{t \in [t_1, \sigma(t_3)]} |x(t)|$ ile tanımlı olmak üzere

$$\min_{t \in [t_2, \sigma(t_3)]} G(t,s) \geq k \|G(.,s)\| \quad (3.12)$$

sağlanır.

Lemma 3.1.4: $\forall (t,s) \in [t_1, \sigma(t_3)] \times [t_1, t_3]$ için (3.8) Green fonksiyonu süreklidir.

İspat: $\forall t_1^*, t_2^* \in [t_1, t_3]$ olsun. $\forall \varepsilon > 0$ için $\exists \delta^*(\varepsilon) > 0$ vardır öyleki $|t_1^* - t_2^*| < \delta^*$ olduğunda $|G_n(t_1^*, s) - G_n(t_2^*, s)| < \varepsilon$ olduğunu göstereceğiz.

İspatı n üzerinden tümevarım ile yapalım.

$n = 1$ için,

1. $t_1 \leq s \leq t_2$ ve $t_1^*, t_2^* \leq s$ olsun. O halde,

$$\begin{aligned}
|G_1(t_1^*, s) - G_1(t_2^*, s)| &= |G(t_1^*, s) - G(t_2^*, s)| \\
&= \left| \left(\sigma(t_3) - \sigma(s) + \frac{\delta - 1}{\gamma} \right) - \left(\sigma(t_3) - \sigma(s) + \frac{\delta - 1}{\gamma} \right) \right| \\
&= 0 < \delta^* \leq \varepsilon
\end{aligned}$$

olur.

2. $t_1 \leq s \leq t_2$ ve $t_1^* \leq s \leq \sigma(s) \leq t_2^*$ olsun. Bu durumda,

$$\begin{aligned}
|G_1(t_1^*, s) - G_1(t_2^*, s)| &= |G(t_1^*, s) - G(t_2^*, s)| \\
&= \left| \left(\sigma(t_3) - \sigma(s) + \frac{\delta - 1}{\gamma} \right) - \left(\sigma(t_3) - t_2^* + \frac{\delta - 1}{\gamma} \right) \right| \\
&= |t_2^* - \sigma(s)| \leq |t_2^* - t_1^*| < \delta^* \leq \varepsilon
\end{aligned}$$

elde edilir.

3. $t_1 \leq s \leq t_2$ ve $t_2^* \leq s \leq \sigma(s) \leq t_1^*$ olsun. O halde,

$$|G_1(t_1^*, s) - G_1(t_2^*, s)| = |G(t_1^*, s) - G(t_2^*, s)|$$

$$= \left| \left(\sigma(t_3) - t_1^* + \frac{\delta - 1}{\gamma} \right) - \left(\sigma(t_3) - \sigma(s) + \frac{\delta - 1}{\gamma} \right) \right|$$
$$= \left| \sigma(s) - t_1^* \right| = \left| t_1^* - \sigma(s) \right| \le \left| t_1^* - t_2^* \right| < \delta^* \le \varepsilon$$

olur.

4. $t_1 \le s \le t_2$ ve $t_1^*, t_2^* \ge \sigma(s)$ olsun. Bu durumda,

$$\left| G_1(t_1^*, s) - G_1(t_2^*, s) \right| = \left| G(t_1^*, s) - G(t_2^*, s) \right|$$
$$= \left| \left(\sigma(t_3) - t_1^* + \frac{\delta - 1}{\gamma} \right) - \left(\sigma(t_3) - t_2^* + \frac{\delta - 1}{\gamma} \right) \right|$$
$$= \left| t_2^* - t_1^* \right| = \left| t_1^* - t_2^* \right| < \delta^* \le \varepsilon$$

elde edilir.

5. $t_2 < s \le t_3$ ve $t_1^*, t_2^* \le s$ olsun. O halde,

$$\left| G_1(t_1^*, s) - G_1(t_2^*, s) \right| = \left| G(t_1^*, s) - G(t_2^*, s) \right|$$
$$= \left| \left(\sigma(t_3) - \sigma(s) + \frac{\delta}{\gamma} \right) - \left(\sigma(t_3) - \sigma(s) + \frac{\delta}{\gamma} \right) \right|$$
$$= 0 < \delta^* \le \varepsilon$$

olur.

6. $t_2 < s \le t_3$ ve $t_1^* \le s \le \sigma(s) \le t_2^*$ olsun. Bu durumda,

$$\left| G_1(t_1^*, s) - G_1(t_2^*, s) \right| = \left| G(t_1^*, s) - G(t_2^*, s) \right|$$
$$= \left| \left(\sigma(t_3) - \sigma(s) + \frac{\delta}{\gamma} \right) - \left(\sigma(t_3) - t_2^* + \frac{\delta}{\gamma} \right) \right|$$
$$= \left| t_2^* - \sigma(s) \right| \le \left| t_2^* - t_1^* \right| < \delta^* \le \varepsilon$$

elde edilir.

7. $t_2 < s \le t_3$ ve $t_2^* \le s \le \sigma(s) \le t_1^*$ olsun. O halde,

$$\left| G_1(t_1^*, s) - G_1(t_2^*, s) \right| = \left| G(t_1^*, s) - G(t_2^*, s) \right|$$
$$= \left| \left(\sigma(t_3) - t_1^* + \frac{\delta}{\gamma} \right) - \left(\sigma(t_3) - \sigma(s) + \frac{\delta}{\gamma} \right) \right|$$
$$= \left| \sigma(s) - t_1^* \right| = \left| t_1^* - \sigma(s) \right| \le \left| t_1^* - t_2^* \right| < \delta^* \le \varepsilon$$

olur.

8. $t_2 < s \le t_3$ ve $t_1^*, t_2^* \ge \sigma(s)$ olsun. Bu durumda,

$$\begin{aligned}\left|G_1\left(t_1^*, s\right) - G_1\left(t_2^*, s\right)\right| &= \left|G\left(t_1^*, s\right) - G\left(t_2^*, s\right)\right| \\ &= \left|\left(\sigma(t_3) - t_1^* + \frac{\delta}{\gamma}\right) - \left(\sigma(t_3) - t_2^* + \frac{\delta}{\gamma}\right)\right| \\ &= \left|t_2^* - t_1^*\right| < \delta^* \le \varepsilon\end{aligned}$$

elde edilir. Böylelikle $G_1(t,s) = G(t,s)$ in sürekli olduğu görülür.

$n = k$ için $\left|G_k\left(t_1^*, s\right) - G_k\left(t_2^*, s\right)\right| \le \varepsilon^* = \dfrac{\varepsilon}{G(\sigma(s), s)(\sigma(t_3) - t_1)}$ olduğunu kabul edelim.

$n = k+1$ için

$$\begin{aligned}\left|G_{k+1}\left(t_1^*, s\right) - G_{k+1}\left(t_2^*, s\right)\right| &\le \int_{t_1}^{\sigma(t_3)} \left|G_k\left(t_1^*, r\right) - G_k\left(t_2^*, r\right)\right| \left|G(r,s)\right| \Delta r \\ &\le \varepsilon^* \int_{t_1}^{\sigma(t_3)} \left|G(r,s)\right| \Delta r \\ &\le \varepsilon^* G(\sigma(s), s)(\sigma(t_3) - t_1) = \varepsilon\end{aligned}$$

olduğundan $G_{k+1}(t,s)$ süreklidir.

Sonuç olarak $\forall (t,s) \in [t_1, \sigma(t_3)] \times [t_1, t_3]$ için (3.8) Green fonksiyonunun sürekli olduğu tümevarım yöntemiyle ispatlanmış olur.

Lemma 3.1.5: $G_n(t,s)$ Green fonksiyonu artmayandır.

İspat: $\forall t_1^*, t_2^* \in [t_1, t_3]$ için $t_1^* < t_2^*$ olduğunda $G_n\left(t_1^*, s\right) \ge G_n\left(t_2^*, s\right)$ olduğunu göstermeliyiz. İspatı n üzerinden tümevarım ile yapacağız.

$n = 1$ için $G_1(t,s) = G(t,s)$ Green fonksiyonu için $t_1^* < t_2^*$ olmak üzere,

(i) $s \in [t_1, t_2]$ ve $\sigma(s) \le t \le \sigma(t_3)$ için

$$\begin{aligned}G\left(t_1^*, s\right) &= \sigma(t_3) - t_1^* + \frac{\delta - 1}{\gamma} \\ &> \sigma(t_3) - t_2^* + \frac{\delta - 1}{\gamma} \\ &= G\left(t_2^*, s\right)\end{aligned}$$

olur.

(ii) $s \in [t_1, t_2]$ ve $t_1 \le t \le s$ için

$$G\left(t_1^*, s\right) = \sigma(t_3) - \sigma(s) + \frac{\delta - 1}{\gamma} = G\left(t_2^*, s\right)$$

olur.

(iii) $s \in (t_2, t_3]$ ve $\sigma(s) \le t \le \sigma(t_3)$ için

$$\begin{aligned} G\left(t_1^*, s\right) &= \sigma(t_3) - t_1^* + \frac{\delta}{\gamma} \\ &> \sigma(t_3) - t_2^* + \frac{\delta}{\gamma} \\ &= G\left(t_2^*, s\right) \end{aligned}$$

bulunur.

(iv) $s \in (t_2, t_3]$ ve $t_1 \le t \le s$ için

$$G\left(t_1^*, s\right) = \sigma(t_3) - \sigma(s) + \frac{\delta}{\gamma} = G\left(t_2^*, s\right)$$

bulunur. O halde $G_1(t,s) = G(t,s)$ Green fonksiyonu artmayandır.

$n = k$ için $G_k(t,s)$ artmayan olsun. Yani $\forall t_1^*, t_2^* \in [t_1, t_3]$ için $t_1^* < t_2^*$ olduğunda

$$G_k\left(t_1^*, s\right) \ge G_k\left(t_2^*, s\right) \qquad (3.13)$$

olsun.

$n = k+1$ için $G_{k+1}(t,s)$ Green fonksiyonunun artmayan olduğunu gösterelim. $\forall t_1^*, t_2^* \in [t_1, t_3]$ için $t_1^* < t_2^*$ olduğunda

$$\begin{aligned} G_{k+1}\left(t_1^*, s\right) &= \int_{t_1}^{\sigma(t_3)} G_k\left(t_1^*, r\right) G(r,s) \Delta r \\ &\ge \int_{t_1}^{\sigma(t_3)} G_k\left(t_2^*, r\right) G(r,s) \Delta r \\ &= G_{k+1}\left(t_2^*, s\right) \end{aligned}$$

elde edilir.

O halde $G_n(t,s)$ Green fonksiyonu artmayandır.

Lemma 3.1.6: [22] $\gamma > 0,\ \delta > 1$, $k = \dfrac{\delta - 1}{\gamma\left(\sigma\left(t_3\right) - \sigma\left(t_1\right)\right) + \delta - 1}$ alalım. Bu durumda

$$L = \int_{t_1}^{\sigma(t_3)} \left\|G\left(.,s\right)\right\| \Delta s > 0 \qquad (3.14)$$

ve

$$M = \int_{t_2}^{\sigma(t_3)} \left\|G\left(.,s\right)\right\| \Delta s > 0 \qquad (3.15)$$

olmak üzere $G_n\left(t,s\right)$ Green fonksiyonu

$$0 \le G_n\left(t,s\right) \le L^{n-1} \left\|G\left(.,s\right)\right\|, \quad \left(t,s\right) \in \left[t_1, \sigma\left(t_3\right)\right] \times \left[t_1, t_3\right] \qquad (3.16)$$

ve

$$G_n\left(t,s\right) \ge k^n M^{n-1} \left\|G\left(.,s\right)\right\|, \quad \left(t,s\right) \in \left[t_2, \sigma\left(t_3\right)\right] \times \left[t_1, t_3\right] \qquad (3.17)$$

eşitsizliklerini sağlar.

Tezin bundan sonraki bölümünde

$$k^* M^* = \min\left\{k^n M^{n-1}, k^m M^{m-1}\right\} \qquad (3.18)$$

ve

$$L^* = \max\left\{L^{n-1}, L^{n-1}\right\} \qquad (3.19)$$

olduğunu kabul edeceğiz.

Lemma 3.1.7: $\dfrac{k^n M^{n-1}}{L^{n-1}} < 1$ dir.

İspat: İspatı n üzerinden tümevarım yardımıyla yapalım.

$n = 2$ için $k = \dfrac{\delta - 1}{\gamma\left(\sigma\left(t_3\right) - \sigma\left(t_1\right)\right) + \delta - 1} < 1$ ve $\dfrac{M}{L} < 1$ olduğundan $\dfrac{k^2 M}{L} < 1$ olduğu görülür.

$n = s$ için $\dfrac{k^s M^{s-1}}{L^{s-1}} < 1$ olduğunu kabul edelim.

$n = s + 1$ için

$$\frac{k^{s+1} M^s}{L^s} = \frac{kM}{L} \cdot \frac{k^s M^{s-1}}{L^{s-1}} < 1$$

elde edilir.

Bu lemmaya göre $\frac{k^* M^*}{L^*} < 1$ olduğu da söylenebilir.

3.2 Herhangi Bir Çözümün Varlığı

Teorem 3.2.1: (Schauder Sabit Nokta Teoremi) [17] E bir Banach uzayı ve $A : E \to E$ tamamen sürekli bir operatör olsun. $K \subset E$ sınırlı, kapalı ve konveks bir küme olmak üzere $A(K) \subset K$ ise bu durumda A operatörünün K içinde en az bir sabit noktası vardır.

Tanım 3.2.1: Eğer bir dönüşüm sürekli ve kompakt ise bu dönüşüme tamamen süreklidir denir.

Tanım 3.2.2: Eğer bir kümenin elemanlarının her dizisinden yakınsak bir alt dizi seçilebiliyorsa bu kümeye pre kompakt küme denir. Yakınsadığı değer, küme içinde ise bu kümeye kompakt küme denir.

Tanım 3.2.3: Eğer bir dönüşüm her sınırlı kümeyi pre kompakt bir kümeye dönüştürüyorsa bu dönüşüme kompakt dönüşüm denir.

Tanım 3.2.4: M , $C[a,b]$ içinde bir küme olsun.

- $\forall x \in M$, $\forall t \in [a,b]$ için $|x(t)| \le c$ olacak şekilde bir c sayısı varsa M kümesine ait fonksiyonlara aynı dereceden sınırlı fonksiyonlar denir.
- $\varepsilon > 0$ verilsin. $\forall t_1, t_2 \in [a,b]$ ve $\forall x \in M$ için $|t_1 - t_2| < \delta$ eşitsizliği sağlandığında $|x(t_1) - x(t_2)| < \varepsilon$ olacak şekilde bir $\delta > 0$ sayısı bulunabiliyorsa M kümesine ait fonksiyonlara aynı dereceden sürekli fonksiyonlar denir.

Teorem 3.2.2: (Arzela-Ascoli Teoremi) [13] Bir $M \subset C[a,b]$ kümesinin sürekli fonksiyonlar ailesinin pre kompakt olması için gerek ve yeter koşul M ye ait fonksiyonların aynı dereceden sınırlı ve aynı dereceden sürekli olmasıdır.

$E = C[t_1, \sigma(t_3)]$ uzayı $\|y\|_0 = \max_{t \in [t_1, \sigma(t_3)]} |y(t)|$ normu ile birlikte bir Banach uzayıdır. $B = E \times E$ ve $(y_1, y_2) \in B$ için $\|(y_1, y_2)\| = \|y_1\|_0 + \|y_2\|_0$ normu alınırsa B bu norm ile birlikte bir Banach uzayı olacaktır. Biz bu çalışmada Banach uzayı olarak $B = E \times E$ Banach uzayını alacağız.

Teorem 3.2.3: $\gamma > 0,\ \delta > 1$ olsun. $t \in [t_1, \sigma(t_3)]$ için

$$N \ge \max_{\|y\| \le R} \left\{ \left| f_1\left(t, y_1^\sigma, y_2^\sigma\right) \right|, \left| f_2\left(t, y_1^\sigma, y_2^\sigma\right) \right| \right\}$$

olacak şekilde $NL^n + NL^m \leq R$ eşitsizliğini sağlayan $R > 0$ varsa ele alınan sistem en az bir çözüme sahiptir.

İspat: $S := \{ y = (y_1, y_2) \in B : \|y\| \leq R \}$ olsun. S, B nin kapalı, sınırlı ve konveks bir alt kümesidir. (3.1)-(3.2) sistemini çözmek

$$y(t) = \left(\int_{t_1}^{\sigma(t_3)} G_n(t,s) f_1(s, y_1^\sigma, y_2^\sigma) \Delta s, \int_{t_1}^{\sigma(t_3)} G_m(t,s) f_2(s, y_1^\sigma, y_2^\sigma) \Delta s \right)$$

integral denklemini çözmeye denktir. Bundan dolayı, $A : S \to B$, $t \in [t_1, \sigma(t_3)]$ için

$$\begin{aligned} Ay(t) = A(y_1, y_2)(t) &:= \left(\int_{t_1}^{\sigma(t_3)} G_n(t,s) f_1(s, y_1^\sigma, y_2^\sigma) \Delta s, \int_{t_1}^{\sigma(t_3)} G_m(t,s) f_2(s, y_1^\sigma, y_2^\sigma) \Delta s \right) \\ &= \left(A_n(y_1, y_2)(t), A_m(y_1, y_2)(t) \right) \end{aligned}$$

ile tanımlanan operatörün sabit noktasını bulmaya denktir.

$A : S \to B$ sürekli olduğunu gösterelim. Bunun için $\forall \varepsilon > 0$ için $\exists \delta > 0$ vardır öyleki $\|(y_1, y_2) - (y_{1_0}, y_{2_0})\| < \delta$ olduğunda $\|A(y_1, y_2) - A(y_{1_0}, y_{2_0})\| < \varepsilon$ olacak şekilde $\delta > 0$ sayısının varlığını göstereceğiz.

f_1 ve f_2 fonksiyonları sürekli olduklarından $\forall \varepsilon' = \dfrac{\varepsilon}{L^n + L^m}$ için $\exists \delta > 0$ vardır öyleki $\|(y_1, y_2) - (y_{1_0}, y_{2_0})\| < \delta$ iken $\left| f_1(t, y_1^\sigma, y_2^\sigma) - f_1(t, y_{1_0}^\sigma, y_{2_0}^\sigma) \right| \leq \varepsilon'$ ve $\left| f_2(t, y_1^\sigma, y_2^\sigma) - f_2(t, y_{1_0}^\sigma, y_{2_0}^\sigma) \right| \leq \varepsilon'$ olacak şekilde $\delta > 0$ sayısı vardır. Bu durumda

$$\begin{aligned} \|A(y_1, y_2) - A(y_{1_0}, y_{2_0})\| &= \max_{t \in [t_1, \sigma(t_3)]} \left| \int_{t_1}^{\sigma(t_3)} G_n(t,s) \left[f_1(s, y_1^\sigma, y_2^\sigma) - f_1(s, y_{1_0}^\sigma, y_{2_0}^\sigma) \right] \Delta s \right| \\ &\quad + \max_{t \in [t_1, \sigma(t_3)]} \left| \int_{t_1}^{\sigma(t_3)} G_m(t,s) \left[f_2(s, y_1^\sigma, y_2^\sigma) - f_2(s, y_{1_0}^\sigma, y_{2_0}^\sigma) \right] \Delta s \right| \\ &\leq \int_{t_1}^{\sigma(t_3)} \max_{t \in [t_1, \sigma(t_3)]} |G_n(t,s)| \left| f_1(s, y_1^\sigma, y_2^\sigma) - f_1(s, y_{1_0}^\sigma, y_{2_0}^\sigma) \right| \Delta s \\ &\quad + \int_{t_1}^{\sigma(t_3)} \max_{t \in [t_1, \sigma(t_3)]} |G_m(t,s)| \left| f_2(s, y_1^\sigma, y_2^\sigma) - f_2(s, y_{1_0}^\sigma, y_{2_0}^\sigma) \right| \Delta s \\ &\leq \varepsilon' \left(L^{n-1} \int_{t_1}^{\sigma(t_3)} \|G(.,s)\| \Delta s + L^{m-1} \int_{t_1}^{\sigma(t_3)} \|G(.,s)\| \Delta s \right) \end{aligned}$$

$$= \varepsilon'\left(L^n + L^m\right) = \varepsilon$$

olduğundan $A : S \to B$ operatörü süreklidir.

Şimdi A operatörünün kompakt olduğunu gösterelim. Bunun için herhangi sınırlı $S \subset B$ kümesini ele alalım. $A(S)$ kümesinin B de pre kompakt olduğunu göstermeliyiz. Bunun için Arzela-Ascoli Teoreminden yararlanacağız.

$y = (y_1, y_2) \in S$ alalım. Bu durumda,

$$\begin{aligned}
\left\|A(y_1,y_2)(t)\right\| &= \left\|A_n(y_1,y_2)(t)\right\|_0 + \left\|A_m(y_1,y_2)(t)\right\|_0 \\
&= \max_{t\in[t_1,\sigma(t_3)]}\left|\int_{t_1}^{\sigma(t_3)} G_n(t,s) f_1\left(s, y_1^\sigma, y_2^\sigma\right)\Delta s\right| + \max_{t\in[t_1,\sigma(t_3)]}\left|\int_{t_1}^{\sigma(t_3)} G_m(t,s) f_2\left(s, y_1^\sigma, y_2^\sigma\right)\Delta s\right| \\
&\le \max_{t\in[t_1,\sigma(t_3)]}\int_{t_1}^{\sigma(t_3)} \left|G_n(t,s)\right|\left|f_1\left(s, y_1^\sigma, y_2^\sigma\right)\right|\Delta s + \max_{t\in[t_1,\sigma(t_3)]}\int_{t_1}^{\sigma(t_3)} \left|G_m(t,s)\right|\left|f_2\left(s, y_1^\sigma, y_2^\sigma\right)\right|\Delta s \\
&\le NL^{n-1}\int_{t_1}^{\sigma(t_3)} \left\|G(.,s)\right\|\Delta s + NL^{m-1}\int_{t_1}^{\sigma(t_3)} \left\|G(.,s)\right\|\Delta s \\
&= NL^n + NL^m \le R
\end{aligned}$$

olur. Böylece $A(S)$ ye ait fonksiyonlar aynı dereceden sınırlıdır ve $A(S) \subset S$ elde edilmiş olur.

$y = (y_1, y_2) \in S$ alalım. $\forall \varepsilon > 0$ sayısı için öyle $\delta > 0$ bulunabilir ki $\left|t_1^* - t_2^*\right| < \delta$ için $\left\|A(y_1,y_2)(t_1^*) - A(y_1,y_2)(t_2^*)\right\| \le \varepsilon$ olduğunu gösterelim.

f_1 ve f_2 fonksiyonları sürekli olduklarından kapalı bölgede sınırlıdırlar. O halde,

$$\max_{\substack{s\in[t_1,\sigma(t_3)] \\ |(y_1,y_2)|<R}}\left|f_1\left(s, y_1^\sigma, y_2^\sigma\right)\right| = c_1, \quad \max_{\substack{s\in[t_1,\sigma(t_3)] \\ |(y_1,y_2)|<R}}\left|f_2\left(s, y_1^\sigma, y_2^\sigma\right)\right| = c_2 \text{ ve } c^* = \max\{c_1, c_2\}$$

olarak tanımlanabilir. Aynı zamanda $G_n(t,s)$ Green fonksiyonu sürekli olduğundan verilen şartlar altında

$$\left|G_n\left(t_1^*, s\right) - G_n\left(t_2^*, s\right)\right| < \varepsilon' = \frac{\varepsilon}{2c^*\left(\sigma(t_3) - t_1\right)}$$

alınabilir. Bu durumda,

$$\left\|A(y_1,y_2)(t_1^*)-A(y_1,y_2)(t_2^*)\right\| = \max_{t\in[t_1,\sigma(t_3)]}\left|\int_{t_1}^{\sigma(t_3)}\left[G_n(t_1^*,s)-G_n(t_2^*,s)\right]f_1(s,y_1^\sigma,y_2^\sigma)\Delta s\right|$$

$$+\max_{t\in[t_1,\sigma(t_3)]}\left|\int_{t_1}^{\sigma(t_3)}\left[G_m(t_1^*,s)-G_m(t_2^*,s)\right]f_2(s,y_1^\sigma,y_2^\sigma)\Delta s\right|$$

$$\leq \max_{t\in[t_1,\sigma(t_3)]}\int_{t_1}^{\sigma(t_3)}\left|G_n(t_1^*,s)-G_n(t_2^*,s)\right|\left|f_1(s,y_1^\sigma,y_2^\sigma)\right|\Delta s$$

$$+\max_{t\in[t_1,\sigma(t_3)]}\int_{t_1}^{\sigma(t_3)}\left|G_m(t_1^*,s)-G_m(t_2^*,s)\right|\left|f_2(s,y_1^\sigma,y_2^\sigma)\right|\Delta s$$

$$\leq 2\varepsilon' c^*\left(\sigma(t_3)-t_1\right)=\varepsilon$$

elde edilir. Böylece $A(S)$ ye ait fonksiyonlar aynı dereceden süreklidir. O halde Arzela-Ascoli teoremine göre A operatörünün tamamen sürekli olduğu görülmüş olur.

Schauder Sabit Nokta Teoreminden dolayı A operatörü S de en az bir sabit noktaya sahiptir. Bu da (3.1)-(3.2) sisteminin en az bir çözüme sahip olması demektir.

3.3 Pozitif Çözümlerin Varlığı

Bu bölümde $f_{1,2}:\left[t_1,\sigma(t_3)\right]\times[0,\infty)\times[0,\infty)\to[0,\infty)$ olmak üzere tanımlanan (3.1)-(3.2) sisteminin pozitif çözümlerinin varlığı incelenecektir.

(3.1)-(3.2) sisteminin en az bir pozitif çözümünün varlığı dört fonksiyonel sabit nokta teoremi [7] yardımıyla, en az iki pozitif çözümünün varlığı Avery-Henderson Sabit Nokta Teoremi [6] yardımıyla, en az üç pozitif çözümün varlığı da beş fonksiyonel sabit nokta teoremi [5] yardımıyla gösterilecektir.

3.3.1 En Az Bir Pozitif Çözümün Varlığı

(3.1)-(3.2) sisteminin en az bir pozitif çözümünün varlığı dört fonksiyonel sabit nokta teoremi yardımıyla göstereceğiz. Bu kısımda kullanmak üzere

$$P=\left\{(y_1,y_2)\in B: y_1(t)\geq 0,\ y_2(t)\geq 0,\ y_1,y_2 \text{ artmayan}\right\}\subset B \qquad (3.20)$$

konisini tanımlayalım. $A:P\to B$ operatörünü de

$$Ay(t)=A(y_1,y_2)(t):=\left(\int_{t_1}^{\sigma(t_3)}G_n(t,s)f_1(s,y_1^\sigma,y_2^\sigma)\Delta s,\ \int_{t_1}^{\sigma(t_3)}G_m(t,s)f_2(s,y_1^\sigma,y_2^\sigma)\Delta s\right)$$

$$=\left(A_n(y_1,y_2)(t),A_m(y_1,y_2)(t)\right)$$

şeklinde oluşturalım.

Lemma 3.3.1: $A: P \to P$ bir operatördür.

İspat: $\forall (y_1, y_2) \in P$ için $A_n(y_1, y_2)(t) \geq 0$ ve $A_m(y_1, y_2)(t) \geq 0$ dır. Diğer taraftan $\forall t_1^*, t_2^* \in [t_1, t_3]$ için $t_1^* < t_2^*$ olduğunda Lemma 3.1.5. de göz önüne alınırsa,

$$\begin{aligned} A_n(y_1, y_2)(t_1^*) &= \int_{t_1}^{\sigma(t_3)} G_n(t_1^*, s) f_1(s, y_1^\sigma, y_2^\sigma) \Delta s \\ &\geq \int_{t_1}^{\sigma(t_3)} G_n(t_2^*, s) f_1(s, y_1^\sigma, y_2^\sigma) \Delta s \\ &= A_n(y_1, y_2)(t_2^*) \end{aligned}$$

olur. Bu da $A_n(y_1, y_2)$ nin artmayan olması demektir. Benzer şekilde $A_m(y_1, y_2)$ nin de artmayan olduğu görülebilir. Bu durumda $A(y_1, y_2) \in P$ olduğu görülmüş olur. Yani $A: P \to P$ demektir.

Şimdi dört fonksiyonel sabit nokta teoreminin ifadesini verelim. Bunun öncesinde teoremde kullanacak olduğumuz bir tanımı verelim.

Tanım 3.3.1: α ve ψ, P üzerinde negatif olmayan, sürekli, konkav fonksiyoneller, β, θ, P üzerinde negatif olmayan, sürekli, konveks fonksiyoneller olsun. r, η, v ve R pozitif sayıları için,

$$\left.\begin{aligned} &Q(\alpha, \beta, r, R) = \{x \in P : r \leq \alpha(x), \beta(x) \leq R\}, \\ &U(\psi, \eta) = \{x \in Q(\alpha, \beta, r, R) : \eta \leq \psi(x)\}, \\ &V(\theta, v) = \{x \in Q(\alpha, \beta, r, R) : \theta(x) \leq v\} \end{aligned}\right\} \qquad (3.21)$$

kümeleri tanımlıdır.

Teorem 3.3.1: **[7]** (Dört Fonksiyonel Sabit Nokta Teoremi)

P, B Banach uzayında bir koni, α ve ψ , P üzerinde negatif olmayan, sürekli, konkav fonksiyoneller, β ve θ, P üzerinde negatif olmayan, sürekli, konveks fonksiyoneller olsun. r, η, v ve R negatif olmayan sabitler olmak üzere

$$A: Q(\alpha, \beta, r, R) \to P$$

tamamen sürekli operatör ve $Q(\alpha, \beta, r, R)$ sınırlı bir küme olsun. Eğer;

(i) $\{x \in U(\psi, \eta) : \beta(x) < R\} \cap \{x \in V(\theta, v) : r < \alpha(x)\} \neq \varnothing$

(ii) $\forall x \in Q(\alpha,\beta,r,R)$ için $\alpha(x)=r$ ve $v<\theta(A(x))$ olduğunda $\alpha(A(x))\geq r$ dir.

(iii) $\forall x \in V(\theta,v)$ için $\alpha(x)=r$ olduğunda $\alpha(A(x))\geq r$ dir.

(iv) $\forall x \in Q(\alpha,\beta,r,R)$ için $\beta(x)=r$ ve $\psi(A(x))<\eta$ olduğunda $\beta(A(x))\leq R$ dir.

(v) $\forall x \in V(\psi,\eta)$ için $\beta(x)=R$ olduğunda $\beta(A(x))\leq R$ dir.

şartları sağlanıyorsa ele alınan operatörün $Q(\alpha,\beta,r,R)$ de en az bir sabit noktası vardır.

Tezin bu bölümünde kullanılmak üzere olmak üzere α ve ψ negatif olmayan, sürekli, konkav fonksiyonelleri;

$$\alpha(y_1,y_2)=\psi(y_1,y_2)=\min_{t\in[t_1,\sigma(t_3)]} y_1(t)+\min_{t\in[t_1,\sigma(t_3)]} y_2(t)$$

şeklinde ve β ve θ negatif olmayan, sürekli, konveks fonksiyonelleri;

$$\theta(y_1,y_2)=\beta(y_1,y_2)=\max_{t\in[t_1,\sigma(t_3)]} y_1(t)+\max_{t\in[t_1,\sigma(t_3)]} y_2(t)$$

şeklinde tanımlı olduklarını kabul edeceğiz.

Teorem 3.3.2: $\gamma>0,\ \delta>1$ olduğunu kabul edelim. $r,\ R,\ \mu,\ \tau$ sabitleri $\mu>1,\ R>1,\ r,\tau\in(0,1)$ ve $\mu\geq R$ olacak şekilde varolsun. Aynı zamanda $r=\dfrac{k^*M^*}{L^*}\mu$ ve $R=\dfrac{L^*}{k^*M^*}\tau$ sağlansın. Eğer f_1 ve f_2 fonksiyonları;

(i) $t\in[t_1,\sigma(t_3)]$ için $r\leq y_1(t)+y_2(t)\leq\mu$ iken $f_1(t,y_1^\sigma,y_2^\sigma)\geq\dfrac{r}{2k^nM^n}$ ve $f_2(t,y_1^\sigma,y_2^\sigma)\geq\dfrac{r}{2k^mM^m}$ dır.

(ii) $t\in[t_1,\sigma(t_3)]$ için $\tau\leq y_1(t)+y_2(t)\leq R$ iken $f_1(t,y_1^\sigma,y_2^\sigma)\leq\dfrac{R}{2L^n}$ ve $f_2(t,y_1^\sigma,y_2^\sigma)\leq\dfrac{R}{2L^m}$ dır.

şartları sağlanıyorsa ele alınan (3.1)-(3.2) sistemi en az bir pozitif çözüme sahiptir.

Bu çözüm $(y_1,y_2)\in P$ olmak üzere,

$$\min_{t\in[t_1,\sigma(t_3)]} y_1(t)+\min_{t\in[t_1,\sigma(t_3)]} y_2(t)\geq r \text{ ve } \max_{t\in[t_1,\sigma(t_3)]} y_1(t)+\max_{t\in[t_1,\sigma(t_3)]} y_2(t)\leq R$$

eşitsizliklerini sağlar.

İspat: Önce $Q(\alpha,\beta,r,R)=\{(y_1,y_2)\in P : r\le\alpha(y_1,y_2),\ \beta(y_1,y_2)\le R\}\subset P$ kümesinin sınırlı olduğunu gösterelim. $\forall(y_1,y_2)\in Q(\alpha,\beta,r,R)$ için

$$\begin{aligned}\|(y_1,y_2)\| &= \|y_1\|_0+\|y_2\|_0\\ &= \max_{t\in[t_1,\sigma(t_3)]}|y_1(t)|+\max_{t\in[t_1,\sigma(t_3)]}|y_2(t)|\\ &= \beta(y_1,y_2)\le R\end{aligned}$$

olduğundan $Q(\alpha,\beta,r,R)$ kümesi sınırlıdır. Aynı zamanda Lemma 3.3.1. den $A:Q(\alpha,\beta,r,R)\to P$ olduğu söylenebilir.

Şimdi $A:Q(\alpha,\beta,r,R)\to P$ operatörünün tamamen sürekli olduğunu gösterelim. Bunun için operatörün sürekli ve kompakt olduğunu göstermeliyiz. A operatörünün sürekli olduğunu Teorem 3.2.3. ün ispatından görebiliriz. O halde A operatörünün kompakt olduğunu gösterelim. Yani A nın her sınırlı kümeyi pre kompakt bir kümeye dönüştürdüğünü görmeliyiz. $Q(\alpha,\beta,r,R)$ kümesi sınırlı olduğundan $A(Q(\alpha,\beta,r,R))$ görüntü kümesinin pre kompakt olduğunu göstermemiz yeterlidir. Bunun için Arzela-Ascoli Teoreminden yararlanacağız.

$\forall(y_1,y_2)\in Q(\alpha,\beta,r,R)$ için,

$$r\le\min_{t\in[t_1,\sigma(t_3)]}y_1(t)+\min_{t\in[t_1,\sigma(t_3)]}y_2(t)\Rightarrow y_1(t)+y_2(t)\ge r$$

dır. Aynı zamanda,

$$\max_{t\in[t_1,\sigma(t_3)]}y_1(t)+\max_{t\in[t_1,\sigma(t_3)]}y_2(t)\le R\Rightarrow y_1(t)+y_2(t)\le R$$

olduğu söylenebilir. O halde,

$$\begin{aligned}r\le y_1(t)+y_2(t)\le R &\Rightarrow \frac{\mu}{R}\tau\le y_1(t)+y_2(t)\le R\\ &\Rightarrow \tau\le y_1(t)+y_2(t)\le R\end{aligned}$$

olduğunu söyleyebiliriz. Bununla birlikte,

$$\|A(y_1,y_2)(t)\|=\|(A_n(y_1,y_2)(t),A_m(y_1,y_2)(t))\|$$

$$=\max_{t\in[t_1,\sigma(t_3)]}\left|\int_{t_1}^{\sigma(t_3)}G_n(t,s)f_1(s,y_1^\sigma,y_2^\sigma)\Delta s\right|+\max_{t\in[t_1,\sigma(t_3)]}\left|\int_{t_1}^{\sigma(t_3)}G_m(t,s)f_2(s,y_1^\sigma,y_2^\sigma)\Delta s\right|$$

$$\leq \max_{t\in[t_1,\sigma(t_3)]} \int_{t_1}^{\sigma(t_3)} \left|G_n(t,s)\right|\left|f_1\left(s,y_1^\sigma,y_2^\sigma\right)\right|\Delta s + \max_{t\in[t_1,\sigma(t_3)]} \int_{t_1}^{\sigma(t_3)} \left|G_m(t,s)\right|\left|f_2\left(s,y_1^\sigma,y_2^\sigma\right)\right|\Delta s$$

$$\leq \frac{R}{2L^n} L^{n-1} \int_{t_1}^{\sigma(t_3)} \left\|G(.,s)\right\|\Delta s + \frac{R}{2L^m} L^{m-1} \int_{t_1}^{\sigma(t_3)} \left\|G(.,s)\right\|\Delta s$$

$$= \frac{R}{2} + \frac{R}{2} = R$$

olduğundan $A\left(Q(\alpha,\beta,r,R)\right)$ ye ait fonksiyonlar aynı dereceden sınırlıdır.

$\forall(y_1,y_2)\in Q(\alpha,\beta,r,R)$ alalım. $\forall\varepsilon>0$ sayısı için öyle $\delta>0$ bulunabilir ki $\left|t_1^*-t_2^*\right|<\delta^*$ için $\left\|A(y_1,y_2)(t_1^*)-A(y_1,y_2)(t_2^*)\right\|\leq\varepsilon$ olduğunu gösterelim.

f_1 ve f_2 fonksiyonları sürekli olduklarından kapalı bölgede sınırlıdırlar. O halde,

$$\max_{\substack{s\in[t_1,\sigma(t_3)]\\ \|(y_1,y_2)\|<R}} \left|f_1\left(s,y_1^\sigma,y_2^\sigma\right)\right| = c_1 \ , \ \max_{\substack{s\in[t_1,\sigma(t_3)]\\ \|(y_1,y_2)\|<R}} \left|f_2\left(s,y_1^\sigma,y_2^\sigma\right)\right| = c_2 \ \text{ ve } \ c^* = \max\{c_1,c_2\}$$

olarak tanımlanabilir. Aynı zamanda $G_n(t,s)$ Green fonksiyonu sürekli olduğundan verilen şartlar altında

$$\left|G_n(t_1^*,s)-G_n(t_2^*,s)\right| < \varepsilon' = \frac{\varepsilon}{2c^*\left(\sigma(t_3)-t_1\right)}$$

alınabilir.

$$\left\|A(y_1,y_2)(t_1^*)-A(y_1,y_2)(t_2^*)\right\| = \max_{t\in[t_1,\sigma(t_3)]}\left|\int_{t_1}^{\sigma(t_3)} \left[G_n(t_1^*,s)-G_n(t_2^*,s)\right] f_1\left(s,y_1^\sigma,y_2^\sigma\right)\Delta s\right|$$

$$+ \max_{t\in[t_1,\sigma(t_3)]}\left|\int_{t_1}^{\sigma(t_3)} \left[G_m(t_1^*,s)-G_m(t_2^*,s)\right] f_2\left(s,y_1^\sigma,y_2^\sigma\right)\Delta s\right|$$

$$\leq \max_{t\in[t_1,\sigma(t_3)]} \int_{t_1}^{\sigma(t_3)} \left|G_n(t_1^*,s)-G_n(t_2^*,s)\right|\left|f_1\left(s,y_1^\sigma,y_2^\sigma\right)\right|\Delta s$$

$$+ \max_{t\in[t_1,\sigma(t_3)]} \int_{t_1}^{\sigma(t_3)} \left|G_m(t_1^*,s)-G_m(t_2^*,s)\right|\left|f_2\left(s,y_1^\sigma,y_2^\sigma\right)\right|\Delta s$$

$$\leq 2\varepsilon' c^*\left(\sigma(t_3)-t_1\right) = \varepsilon$$

elde edilir. Böylece $A\left(Q(\alpha,\beta,r,R)\right)$ ye ait fonksiyonlar aynı dereceden süreklidir.

Bu durumda $A:Q(\alpha,\beta,r,R)\to P$ kompakt operatördür. Böylece $A:Q(\alpha,\beta,r,R)\to P$ operatörünün tamamen sürekli operatör olduğu gösterilmiş olur.

Şimdi dört fonksiyonel sabit nokta teoreminin şartlarının sağlandığını görelim.

i) $T_1=\{(y_1,y_2)\in U(\psi,\tau):\beta(y_1,y_2)<R\}$ ve $T_2=\{(y_1,y_2)\in V(\theta,\mu):\alpha(y_1,y_2)>r\}$ olmak üzere $T_1\cap T_2\neq\varnothing$ olduğunu gösterelim.

$$\alpha\left(\frac{\mu\tau}{2},\frac{\mu\tau}{2}\right)=\min_{t\in[t_1,\sigma(t_3)]}\frac{\mu\tau}{2}+\min_{t\in[t_1,\sigma(t_3)]}\frac{\mu\tau}{2}=\frac{\mu\tau}{2}+\frac{\mu\tau}{2}=\mu\tau=rR>r$$

ve

$$\beta\left(\frac{\mu\tau}{2},\frac{\mu\tau}{2}\right)=\max_{t\in[t_1,\sigma(t_3)]}\frac{\mu\tau}{2}+\max_{t\in[t_1,\sigma(t_3)]}\frac{\mu\tau}{2}=\frac{\mu\tau}{2}+\frac{\mu\tau}{2}=\mu\tau=\mu\frac{rR}{\mu}=rR<R$$

olduğundan $\left(\frac{\mu\tau}{2},\frac{\mu\tau}{2}\right)\in Q(\alpha,\beta,r,R)$ dir. Bununla birlikte

$$\psi\left(\frac{\mu\tau}{2},\frac{\mu\tau}{2}\right)=\min_{t\in[t_1,\sigma(t_3)]}\frac{\mu\tau}{2}+\min_{t\in[t_1,\sigma(t_3)]}\frac{\mu\tau}{2}=\frac{\mu\tau}{2}+\frac{\mu\tau}{2}=\mu\tau>\tau$$

olduğundan $\left(\frac{\mu\tau}{2},\frac{\mu\tau}{2}\right)\in T_1$, aynı zamanda,

$$\theta\left(\frac{\mu\tau}{2},\frac{\mu\tau}{2}\right)=\max_{t\in[t_1,\sigma(t_3)]}\frac{\mu\tau}{2}+\max_{t\in[t_1,\sigma(t_3)]}\frac{\mu\tau}{2}=\frac{\mu\tau}{2}+\frac{\mu\tau}{2}=\mu\tau<\mu$$

olduğundan da $\left(\frac{\mu\tau}{2},\frac{\mu\tau}{2}\right)\in T_2$ dir. Bu da $T_1\cap T_2\neq\varnothing$ olduğunu gösterir.

ii) $\alpha(y_1,y_2)=r$ ve $\theta(A(y_1,y_2))>\mu$ olacak şekilde $\forall(y_1,y_2)\in Q(\alpha,\beta,r,R)$ için $\alpha(A(y_1,y_2))\geq r$ olduğunu gösterelim.

$$\begin{aligned}\mu<\theta(A(y_1,y_2))&=\max_{t\in[t_1,\sigma(t_3)]}\int_{t_1}^{\sigma(t_3)}G_n(t,s)f_1(s,y_1^\sigma,y_2^\sigma)\Delta s\\&\quad+\max_{t\in[t_1,\sigma(t_3)]}\int_{t_1}^{\sigma(t_3)}G_m(t,s)f_2(s,y_1^\sigma,y_2^\sigma)\Delta s\\&=\int_{t_1}^{\sigma(t_3)}G_n(t_1,s)f_1(s,y_1^\sigma,y_2^\sigma)\Delta s+\int_{t_1}^{\sigma(t_3)}G_m(t_1,s)f_2(s,y_1^\sigma,y_2^\sigma)\Delta s\\&\leq\int_{t_1}^{\sigma(t_3)}L^{n-1}\|G(.,s)\|f_1(s,y_1^\sigma,y_2^\sigma)\Delta s+\int_{t_1}^{\sigma(t_3)}L^{m-1}\|G(.,s)\|f_2(s,y_1^\sigma,y_2^\sigma)\Delta s\end{aligned}$$

$$= L^{n-1}\left(\int_{t_1}^{\sigma(t_3)} \|G(.,s)\| f_1\left(s, y_1^\sigma, y_2^\sigma\right)\Delta s\right) + L^{m-1}\left(\int_{t_1}^{\sigma(t_3)} \|G(.,s)\| f_2\left(s, y_1^\sigma, y_2^\sigma\right)\Delta s\right)$$

$$\leq L^*\left(\int_{t_1}^{\sigma(t_3)} \|G(.,s)\| f_1\left(s, y_1^\sigma, y_2^\sigma\right)\Delta s + \int_{t_1}^{\sigma(t_3)} \|G(.,s)\| f_2\left(s, y_1^\sigma, y_2^\sigma\right)\Delta s\right)$$

$$\Rightarrow \left(\int_{t_1}^{\sigma(t_3)} \|G(.,s)\| f_1\left(s, y_1^\sigma, y_2^\sigma\right)\Delta s + \int_{t_1}^{\sigma(t_3)} \|G(.,s)\| f_2\left(s, y_1^\sigma, y_2^\sigma\right)\Delta s\right) > \frac{\mu}{L^*} \tag{3.22}$$

olur. Bu durumda,

$$\alpha\left(A\left(y_1, y_2\right)\right) = \min_{t\in[t_1,\sigma(t_3)]} \int_{t_1}^{\sigma(t_3)} G_n(t,s) f_1\left(s, y_1^\sigma, y_2^\sigma\right)\Delta s + \min_{t\in[t_1,\sigma(t_3)]} \int_{t_1}^{\sigma(t_3)} G_m(t,s) f_2\left(s, y_1^\sigma, y_2^\sigma\right)\Delta s$$

$$= \int_{t_1}^{\sigma(t_3)} G_n\left(\sigma(t_3), s\right) f_1\left(s, y_1^\sigma, y_2^\sigma\right)\Delta s + \int_{t_1}^{\sigma(t_3)} G_m\left(\sigma(t_3), s\right) f_2\left(s, y_1^\sigma, y_2^\sigma\right)\Delta s$$

$$\geq \int_{t_1}^{\sigma(t_3)} k^n M^{n-1} \|G(.,s)\| f_1\left(s, y_1^\sigma, y_2^\sigma\right)\Delta s + \int_{t_1}^{\sigma(t_3)} k^m M^{m-1} \|G(.,s)\| f_2\left(s, y_1^\sigma, y_2^\sigma\right)\Delta s$$

$$= k^n M^{n-1} \int_{t_1}^{\sigma(t_3)} \|G(.,s)\| f_1\left(s, y_1^\sigma, y_2^\sigma\right)\Delta s + k^m M^{m-1} \int_{t_1}^{\sigma(t_3)} \|G(.,s)\| f_2\left(s, y_1^\sigma, y_2^\sigma\right)\Delta s$$

$$\geq k^* M^*\left(\int_{t_1}^{\sigma(t_3)} \|G(.,s)\| f_1\left(s, y_1^\sigma, y_2^\sigma\right)\Delta s + \int_{t_1}^{\sigma(t_3)} L^{m-1} \|G(.,s)\| f_2\left(s, y_1^\sigma, y_2^\sigma\right)\Delta s\right)$$

$$\geq k^* M^* \frac{\mu}{L^*} = r$$

$\Rightarrow \alpha\left(A\left(y_1, y_2\right)\right) \geq r$ elde edilir.

iii) $\alpha\left(y_1, y_2\right) = r$ olacak şekilde $\forall\left(y_1, y_2\right) \in V(\theta, \mu)$ için $\alpha\left(A\left(y_1, y_2\right)\right) \geq r$ olduğunu gösterelim.

$$\alpha\left(y_1, y_2\right) = r \Rightarrow \min_{t\in[t_1,\sigma(t_3)]} y_1(t) + \min_{t\in[t_1,\sigma(t_3)]} y_2(t) = r \Rightarrow r \leq y_1(t) + y_2(t),\ \forall t \in \left[t_1, \sigma(t_3)\right]$$

ve

$$\theta\left(y_1, y_2\right) \leq \mu \Rightarrow \max_{t\in[t_1,\sigma(t_3)]} y_1(t) + \max_{t\in[t_1,\sigma(t_3)]} y_2(t) \leq \mu \Rightarrow y_1(t) + y_2(t) \leq \mu,\ \forall t \in \left[t_1, \sigma(t_3)\right]$$

olduğundan $t \in \left[t_1, \sigma(t_3)\right]$ için $r \leq y_1(t) + y_2(t) \leq \mu$ elde edilir. Bu durumda,

$$\alpha\left(A\left(y_1, y_2\right)\right) = \min_{t\in[t_1,\sigma(t_3)]} \int_{t_1}^{\sigma(t_3)} G_n(t,s) f_1\left(s, y_1^\sigma, y_2^\sigma\right)\Delta s + \min_{t\in[t_1,\sigma(t_3)]} \int_{t_1}^{\sigma(t_3)} G_m(t,s) f_2\left(s, y_1^\sigma, y_2^\sigma\right)\Delta s$$

$$= \int_{t_1}^{\sigma(t_3)} G_n\left(\sigma(t_3), s\right) f_1\left(s, y_1^\sigma, y_2^\sigma\right)\Delta s + \int_{t_1}^{\sigma(t_3)} G_m\left(\sigma(t_3), s\right) f_2\left(s, y_1^\sigma, y_2^\sigma\right)\Delta s$$

$$\geq \int_{t_2}^{\sigma(t_3)} G_n\left(\sigma(t_3),s\right) f_1\left(s,y_1^\sigma,y_2^\sigma\right)\Delta s+\int_{t_2}^{\sigma(t_3)} G_m\left(\sigma(t_3),s\right) f_2\left(s,y_1^\sigma,y_2^\sigma\right)\Delta s$$

$$\geq \int_{t_2}^{\sigma(t_3)} k^n M^{n-1}\left\|G(.,s)\right\| f_1\left(s,y_1^\sigma,y_2^\sigma\right)\Delta s+\int_{t_2}^{\sigma(t_3)} k^m M^{m-1}\left\|G(.,s)\right\| f_2\left(s,y_1^\sigma,y_2^\sigma\right)\Delta s$$

$$=k^n M^{n-1}\int_{t_2}^{\sigma(t_3)} \left\|G(.,s)\right\| f_1\left(s,y_1^\sigma,y_2^\sigma\right)\Delta s+k^m M^{m-1}\int_{t_2}^{\sigma(t_3)} \left\|G(.,s)\right\| f_2\left(s,y_1^\sigma,y_2^\sigma\right)\Delta s$$

$$\geq k^n M^{n-1}\int_{t_2}^{\sigma(t_3)} \left\|G(.,s)\right\| \frac{r}{2k^n M^n}\Delta s+k^m M^{m-1}\int_{t_2}^{\sigma(t_3)} \left\|G(.,s)\right\| \frac{r}{2k^m M^m}\Delta s$$

$$=k^n M^{n-1}\frac{r}{2k^n M^n}\int_{t_2}^{\sigma(t_3)} \left\|G(.,s)\right\|\Delta s+k^m M^{m-1}\frac{r}{2k^m M^m}\int_{t_2}^{\sigma(t_3)} \left\|G(.,s)\right\|\Delta s$$

$$=k^n M^{n-1}\frac{r}{2k^n M^n}M+k^m M^{m-1}\frac{r}{2k^m M^m}M$$

$$=\frac{r}{2}+\frac{r}{2}=r$$

$\Rightarrow \alpha\left(A\left(y_1,y_2\right)\right)\geq r$ elde edilir.

iv) $\beta\left(y_1,y_2\right)=R$ ve $\psi\left(y_1,y_2\right)<\tau$ olacak şekilde $\forall\left(y_1,y_2\right)\in Q\left(\alpha,\beta,r,R\right)$ için $\beta\left(A\left(y_1,y_2\right)\right)\leq R$ olduğunu gösterelim.

$$\tau>\psi\left(A\left(y_1,y_2\right)\right)=\min_{t\in\left[t_1,\sigma(t_3)\right]}\int_{t_1}^{\sigma(t_3)} G_n(t,s) f_1\left(s,y_1^\sigma,y_2^\sigma\right)\Delta s$$

$$+\min_{t\in\left[t_1,\sigma(t_3)\right]}\int_{t_1}^{\sigma(t_3)} G_m(t,s) f_2\left(s,y_1^\sigma,y_2^\sigma\right)\Delta s$$

$$=\int_{t_1}^{\sigma(t_3)} G_n\left(\sigma(t_3),s\right) f_1\left(s,y_1^\sigma,y_2^\sigma\right)\Delta s$$

$$+\int_{t_1}^{\sigma(t_3)} G_m\left(\sigma(t_3),s\right) f_2\left(s,y_1^\sigma,y_2^\sigma\right)\Delta s$$

$$\geq \int_{t_1}^{\sigma(t_3)} k^n M^{n-1}\left\|G(.,s)\right\| f_1\left(s,y_1^\sigma,y_2^\sigma\right)\Delta s$$

$$+\int_{t_1}^{\sigma(t_3)} k^m M^{m-1}\left\|G(.,s)\right\| f_2\left(s,y_1^\sigma,y_2^\sigma\right)\Delta s$$

$$= k^n M^{n-1} \int_{t_1}^{\sigma(t_3)} \|G(.,s)\| f_1\left(s, y_1^\sigma, y_2^\sigma\right)\Delta s$$

$$+ k^m M^{m-1} \int_{t_1}^{\sigma(t_3)} \|G(.,s)\| f_2\left(s, y_1^\sigma, y_2^\sigma\right)\Delta s$$

$$\geq k^* M^* \left(\int_{t_1}^{\sigma(t_3)} \|G(.,s)\| f_1\left(s, y_1^\sigma, y_2^\sigma\right)\Delta s + \int_{t_1}^{\sigma(t_3)} \|G(.,s)\| f_2\left(s, y_1^\sigma, y_2^\sigma\right)\Delta s \right)$$

$$\Rightarrow \int_{t_1}^{\sigma(t_3)} \|G(.,s)\| f_1\left(s, y_1^\sigma, y_2^\sigma\right)\Delta s + \int_{t_1}^{\sigma(t_3)} \|G(.,s)\| f_2\left(s, y_1^\sigma, y_2^\sigma\right)\Delta s < \frac{\tau}{k^* M^*} \tag{3.23}$$

olur. Bu durumda,

$$\beta\left(A(y_1, y_2)\right) = \max_{t\in[t_1,\sigma(t_3)]} \int_{t_1}^{\sigma(t_3)} G_n(t,s) f_1\left(s, y_1^\sigma, y_2^\sigma\right)\Delta s + \max_{t\in[t_1,\sigma(t_3)]} \int_{t_1}^{\sigma(t_3)} G_m(t,s) f_2\left(s, y_1^\sigma, y_2^\sigma\right)\Delta s$$

$$= \int_{t_1}^{\sigma(t_3)} G_n(t_1,s) f_1\left(s, y_1^\sigma, y_2^\sigma\right)\Delta s + \int_{t_1}^{\sigma(t_3)} G_m(t_1,s) f_2\left(s, y_1^\sigma, y_2^\sigma\right)\Delta s$$

$$\leq \int_{t_1}^{\sigma(t_3)} L^{n-1} \|G(.,s)\| f_1\left(s, y_1^\sigma, y_2^\sigma\right)\Delta s + \int_{t_1}^{\sigma(t_3)} L^{m-1} \|G(.,s)\| f_2\left(s, y_1^\sigma, y_2^\sigma\right)\Delta s$$

$$= L^{n-1} \left(\int_{t_1}^{\sigma(t_3)} \|G(.,s)\| f_1\left(s, y_1^\sigma, y_2^\sigma\right)\Delta s \right) + L^{m-1} \left(\int_{t_1}^{\sigma(t_3)} \|G(.,s)\| f_2\left(s, y_1^\sigma, y_2^\sigma\right)\Delta s \right)$$

$$\leq L^* \left(\int_{t_1}^{\sigma(t_3)} \|G(.,s)\| f_1\left(s, y_1^\sigma, y_2^\sigma\right)\Delta s + \int_{t_1}^{\sigma(t_3)} \|G(.,s)\| f_2\left(s, y_1^\sigma, y_2^\sigma\right)\Delta s \right)$$

$$\leq L^* \frac{\tau}{k^* M^*} = R$$

$\Rightarrow \beta\left(A(y_1, y_2)\right) \leq R$ elde edilir.

v) $\beta(y_1, y_2) = R$ olacak şekilde $\forall (y_1, y_2) \in U(\psi, \tau)$ için $\beta\left(A(y_1, y_2)\right) \leq R$ olduğunu gösterelim.

$$\beta(y_1, y_2) = R \Rightarrow \max_{t\in[t_1,\sigma(t_3)]} y_1(t) + \max_{t\in[t_1,\sigma(t_3)]} y_2(t) = R \Rightarrow y_1(t) + y_2(t) \leq R, \forall t \in [t_1, \sigma(t_3)]$$

ve

$$\psi(y_1, y_2) \geq \tau \Rightarrow \min_{t\in[t_1,\sigma(t_3)]} y_1(t) + \min_{t\in[t_1,\sigma(t_3)]} y_2(t) \geq \tau \Rightarrow y_1(t) + y_2(t) \geq \tau, \forall t \in [t_1, \sigma(t_3)]$$

olduğundan $\forall t \in [t_1, \sigma(t_3)]$ için $\tau \leq y_1(t) + y_2(t) \leq R$ olur. Bu durumda,

$$\beta\left(A\left(y_1,y_2\right)\right)=\max_{t\in[t_1,\sigma(t_3)]}\int_{t_1}^{\sigma(t_3)} G_n\left(t,s\right)f_1\left(s,y_1^\sigma,y_2^\sigma\right)\Delta s+\max_{t\in[t_1,\sigma(t_3)]}\int_{t_1}^{\sigma(t_3)} G_m\left(t,s\right)f_2\left(s,y_1^\sigma,y_2^\sigma\right)\Delta s$$

$$=\int_{t_1}^{\sigma(t_3)} G_n\left(t_1,s\right)f_1\left(s,y_1^\sigma,y_2^\sigma\right)\Delta s+\int_{t_1}^{\sigma(t_3)} G_m\left(t_1,s\right)f_2\left(s,y_1^\sigma,y_2^\sigma\right)\Delta s$$

$$\le\int_{t_1}^{\sigma(t_3)} L^{n-1}\left\|G\left(.,s\right)\right\|f_1\left(s,y_1^\sigma,y_2^\sigma\right)\Delta s+\int_{t_1}^{\sigma(t_3)} L^{m-1}\left\|G\left(.,s\right)\right\|f_2\left(s,y_1^\sigma,y_2^\sigma\right)\Delta s$$

$$=L^{n-1}\int_{t_1}^{\sigma(t_3)} \left\|G\left(.,s\right)\right\|f_1\left(s,y_1^\sigma,y_2^\sigma\right)\Delta s+L^{m-1}\int_{t_1}^{\sigma(t_3)} \left\|G\left(.,s\right)\right\|f_2\left(s,y_1^\sigma,y_2^\sigma\right)\Delta s$$

$$\le L^{n-1}\int_{t_1}^{\sigma(t_3)} \left\|G\left(.,s\right)\right\|\frac{R}{2L^n}\Delta s+L^{m-1}\int_{t_1}^{\sigma(t_3)} \left\|G\left(.,s\right)\right\|\frac{R}{2L^m}\Delta s$$

$$=L^{n-1}\frac{R}{2L^n}\int_{t_1}^{\sigma(t_3)} \left\|G\left(.,s\right)\right\|\Delta s+L^{m-1}\frac{R}{2L^m}\int_{t_1}^{\sigma(t_3)} \left\|G\left(.,s\right)\right\|\Delta s$$

$$=L^{n-1}\frac{R}{2L^n}L+L^{m-1}\frac{R}{2L^m}L$$

$$=\frac{R}{2}+\frac{R}{2}=R$$

$\Rightarrow \beta\left(A\left(y_1,y_2\right)\right)\le R$ elde edilir.

O halde dört fonksiyonel sabit nokta teoreminin şartları sağlanır. Bu durumda ele alınan (3.1)-(3.2) sisteminin en az bir pozitif çözümü mevcuttur. Bu $\left(y_1,y_2\right)\in P$ çözümü

$$\min_{t\in[t_1,\sigma(t_3)]} y_1\left(t\right)+\min_{t\in[t_1,\sigma(t_3)]} y_2\left(t\right)\ge r \quad \text{ve} \quad \max_{t\in[t_1,\sigma(t_3)]} y_1\left(t\right)+\max_{t\in[t_1,\sigma(t_3)]} y_2\left(t\right)\le R$$

eşitsizliklerini sağlar.

Örnek 3.3.1. $\mathrm{T}=\left\{\left(\frac{2}{3}\right)^n : n\in \mathrm{N}_0\right\}\cup\left[2,3\right]$ zaman skalasını ele alalım. $n=1,\ m=2,\ t_1=\frac{2}{3},\ t_2=\gamma=1,\ t_3=3,\ \delta=2$ seçelim.

$$f_1\left(t,y_1\left(t\right),y_2\left(t\right)\right)=\frac{7.5\left(y_1\left(t\right)+y_2\left(t\right)\right)^2}{10\left(y_1\left(t\right)+y_2\left(t\right)\right)^2+1} \quad \text{ve} \quad f_2\left(t,y_1\left(t\right),y_2\left(t\right)\right)=0.1$$

fonksiyonları tanımlanırsa (3.1)-(3.2) sistemi,

$$\begin{cases} -y_1^{\Delta^2}(t) = \dfrac{7.5\left(y_1(t)+y_2(t)\right)^2}{10\left(y_1(t)+y_2(t)\right)^2+1}, & t \in \left[\dfrac{2}{3},3\right] \\ y_2^{\Delta^4}(t) = 0.1, & t \in \left[\dfrac{2}{3},3\right] \end{cases}$$

$$\begin{cases} y_1^{\Delta}\left(\dfrac{2}{3}\right) = 0,\ y_1(3) + 2y_1^{\Delta}(3) = y_1^{\Delta}(1) \\ y_2^{\Delta^{2j+1}}\left(\dfrac{2}{3}\right) = 0,\ y_2^{\Delta^{2j}}(3) + 2y_2^{\Delta^{2j+1}}(3) = y_2^{\Delta^{2j+1}}(1),\ 0 \le j \le 1 \end{cases}$$

halini alır. Burada seçilen sayılar ve (3.7) Green fonksiyonunun tanımı gereği $k = \dfrac{1}{3}$, $L = \dfrac{13}{2}$ ve $M = \dfrac{11}{2}$ bulunur. Seçilen $f_1\left(t, y_1(t), y_2(t)\right)$ ve $f_2\left(t, y_1(t), y_2(t)\right)$ fonksiyonları sürekli, $f_1\left(t, y_1(t), y_2(t)\right)$ fonksiyonu artandır. Şimdi Teorem 3.3.2. nin şartlarını inceleyelim.

$\mu = 10$, $r = \dfrac{20}{39}$, $\tau = 0.5$, $R = 9.75$ olarak seçilirse,

i) $\dfrac{20}{39} \le y_1(t) + y_2(t) \le 10$ alındığında $y_1(t) + y_2(t) = \dfrac{20}{39}$ için $f_1\left(t, y_1(t), y_2(t)\right) \approx 0.544337$ olacağından,

$$f_1\left(t, y_1(t), y_2(t)\right) \ge 0.54433 > \frac{r}{2kM} \approx 0.13986$$

ve

$$f_2\left(t, y_1(t), y_2(t)\right) = 0.1 > \frac{r}{2k^2M^2} \approx 0.074$$

eşitsizlikleri elde edilir. Bu da Teorem 3.3.2. nin *i*) şartının sağlanması demektir.

ii) $0.5 \le y_1(t) + y_2(t) \le 9.75$ alındığında $y_1(t) + y_2(t) = 9.75$ için $f_1\left(t, y_1(t), y_2(t)\right) \approx 0.74921$ olacağından,

$$f_1\left(t, y_1(t), y_2(t)\right) \le 0.74921 < \frac{R}{2L} \approx 0.75 \text{ ve } f_2\left(t, y_1(t), y_2(t)\right) = 0.1 < \frac{R}{2L^2} \approx 0.11538$$

eşitsizlikleri elde edilir. Bu da Teorem 3.3.2. nin *ii*) şartının sağlanması demektir.

Sonuç olarak Teorem 3.3.2. nin şartları sağlanır. O halde Teorem 3.3.2. nin sonucu gereği bu sistem en az bir pozitif çözüme sahiptir ve bu (y_1, y_2) çözümü

$$\min_{t\in\left[\frac{2}{3},3\right]} y_1(t) + \min_{t\in\left[\frac{2}{3},3\right]} y_2(t) \ge \frac{20}{39} \text{ ve } \max_{t\in\left[\frac{2}{3},3\right]} y_1(t) + \max_{t\in\left[\frac{2}{3},3\right]} y_2(t) \le 9.75$$

eşitsizliklerini sağlar.

3.3.2 En Az İki Pozitif Çözümün Varlığı

(3.1)-(3.2) sisteminin en az iki pozitif çözümünün varlığı Avery-Henderson Sabit Nokta Teoremi [6] yardımıyla göstereceğiz. Bu kısımda kullanmak üzere P konisini, $C^* = \min\left\{\frac{k^n M^{n-1}}{L^{n-1}}, \frac{k^m M^{m-1}}{L^{m-1}}\right\}$ olmak üzere

$$P = \left\{(y_1, y_2) \in B : y_1(t) \geq 0, y_2(t) \geq 0, \min_{t\in[t_2,\sigma(t_3)]} y_1(t) + \min_{t\in[t_2,\sigma(t_3)]} y_2(t) \geq C^* \left\|(y_1, y_2)\right\|\right\} \quad (3.24)$$

şeklinde tanımlayacağız. P konisi üzerinde $P(v,r)$ kümesi,

$$P(v,r) = \{(y_1, y_2) \in P : v(y_1, y_2)(t) < r\}$$

ile tanımlı olacaktır.

$A : P \to B$ operatörünü

$$Ay(t) = A(y_1,y_2)(t) := \left(\int_{t_1}^{\sigma(t_3)} G_n(t,s) f_1(s, y_1^\sigma, y_2^\sigma)\Delta s, \int_{t_1}^{\sigma(t_3)} G_m(t,s) f_2(s, y_1^\sigma, y_2^\sigma)\Delta s\right)$$
$$= (A_n(y_1,y_2)(t), A_m(y_1,y_2)(t))$$

şeklinde oluşturacağız.

Teorem 3.3.3: [6] (Avery-Henderson Sabit Nokta Teoremi)

P, E Banach uzayı üzerinde bir koni, η ve ϕ, P üzerinde, negatif olmayan, artan, sürekli fonksiyoneller ve ξ, P üzerinde $\xi(0) = 0$ olacak şekilde negatif olmayan sürekli fonksiyonel olsun. Bu fonksiyoneller r ve M pozitif sayıları ve $\forall u \in \overline{P(\phi, r)}$ için

$$\phi(u) \leq \xi(u) \leq \eta(u) \text{ ve } \|u\| \leq M\phi(u)$$

şartlarını sağlasınlar. $p < q < r$ pozitif sayıları, $\forall u \in \partial P(\xi, q)$ *ve* $0 \leq \lambda \leq 1$ için $\xi(\lambda u) \leq \lambda \xi(u)$ şartı sağlanacak şekilde varolsun. Eğer $A : \overline{P(\phi, r)} \to P$ tamamen sürekli operatörü

(i) $\forall u \in \partial P(\phi, r)$ için $\phi(Au) > r$ dir,

(ii) $\forall u \in \partial P(\xi, q)$ için $\xi(Au) < q$ dur,

(iii) $\forall u \in \partial P(\eta, p)$ için $P(\eta, p) \neq \varnothing$ ve $\eta(Au) > p$ dır,

şartlarını sağlıyorsa, A operatörünün,

$$\xi(u_1) < q \text{ ve } p < \mu(u_1)$$

ile

$$\phi(u_2) < r \text{ ve } q < \theta(u_2)$$

olacak şekilde en az iki u_1 ve u_2 sabit noktaları vardır.

Teorem 3.3.4: $\gamma > 0,\ \delta > 1$ olsun. f_1 ve f_2 fonksiyonları $0 < p < q < r$ olmak üzere

(i) $t \in [t_2, \sigma(t_3)]$ ve $r \le y_1(t) + y_2(t) \le \frac{1}{C^*} r$ için

$$f_1(t, y_1^\sigma, y_2^\sigma) > \frac{r}{2k^n M^n} \text{ ve } f_2(t, y_1^\sigma, y_2^\sigma) > \frac{r}{2k^m M^m};$$

(ii) $t \in [t_1, \sigma(t_3)]$ ve $0 \le y_1(t) + y_2(t) \le \frac{1}{C^*} q$ için

$$f_1(t, y_1^\sigma, y_2^\sigma) < \frac{q}{2L^n} \text{ ve } f_2(t, y_1^\sigma, y_2^\sigma) < \frac{q}{2L^m};$$

(iii) $t \in [t_2, \sigma(t_3)]$ ve $C^* p \le y_1(t) + y_2(t) \le p$ için

$$f_1(t, y_1^\sigma, y_2^\sigma) > \frac{p}{2k^n M^n} \text{ ve } f_2(t, y_1^\sigma, y_2^\sigma) > \frac{p}{2k^m M^m};$$

şartlarını sağlıyorsa (3.1)-(3.2) sisteminin en az iki pozitif çözümü vardır. Bu çözümler $(y_1, y_2) \in P$ ve $(y_3, y_4) \in P$ olmak üzere

$$\max_{t \in [t_1, \sigma(t_3)]} y_1(t) + \max_{t \in [t_1, \sigma(t_3)]} y_2(t) > p \text{ ve } \max_{t \in [t_2, \sigma(t_3)]} y_1(t) + \max_{t \in [t_2, \sigma(t_3)]} y_2(t) < q$$

ile

$$\max_{t \in [t_2, \sigma(t_3)]} y_3(t) + \max_{t \in [t_2, \sigma(t_3)]} y_4(t) > q \text{ ve } \min_{t \in [t_2, \sigma(t_3)]} y_3(t) + \min_{t \in [t_2, \sigma(t_3)]} y_4(t) < r$$

eşitsizliklerini sağlarlar.

İspat: $\phi,\ \xi,\ \eta$ negatif olmayan, artan, sürekli fonksiyonellerini P konisi üzerinde

$$\left.\begin{aligned}
\phi(y_1, y_2) &:= \min_{t \in [t_2, \sigma(t_3)]} y_1(t) + \min_{t \in [t_2, \sigma(t_3)]} y_2(t) \\
\xi(y_1, y_2) &:= \max_{t \in [t_2, \sigma(t_3)]} y_1(t) + \max_{t \in [t_2, \sigma(t_3)]} y_2(t) \\
\eta(y_1, y_2) &:= \max_{t \in [t_1, \sigma(t_3)]} y_1(t) + \max_{t \in [t_1, \sigma(t_3)]} y_2(t)
\end{aligned}\right\} \quad (3.25)$$

şeklinde tanımlayalım.

$(y_1, y_2) \in P$ olsun. Bu durumda $t \in [t_1, \sigma(t_3)]$ için $A_n(y_1, y_2)(t) \ge 0$ ve $A_m(y_1, y_2)(t) \ge 0$ dır. Diğer taraftan,

$$\min_{t \in [t_2, \sigma(t_3)]} A_n(y_1, y_2)(t) + \min_{t \in [t_2, \sigma(t_3)]} A_m(y_1, y_2)(t)$$

$$= \min_{t \in [t_2, \sigma(t_3)]} \int_{t_1}^{\sigma(t_3)} G_n(t,s) f_1(s, y_1^\sigma, y_2^\sigma) \Delta s + \min_{t \in [t_2, \sigma(t_3)]} \int_{t_1}^{\sigma(t_3)} G_m(t,s) f_2(s, y_1^\sigma, y_2^\sigma) \Delta s$$

$$= \int_{t_1}^{\sigma(t_3)} \min_{t \in [t_2, \sigma(t_3)]} G_n(t,s) f_1(s, y_1^\sigma, y_2^\sigma) \Delta s$$

$$+\int_{t_1}^{\sigma(t_3)} \min_{t\in[t_2,\sigma(t_3)]} G_m(t,s) f_2(s,y_1^\sigma,y_2^\sigma)\Delta s$$

$$\geq \frac{k^n M^{n-1}}{L^{n-1}} \int_{t_1}^{\sigma(t_3)} \max_{t\in[t_1,\sigma(t_3)]} |G_n(t,s)| f_1(s,y_1^\sigma,y_2^\sigma)\Delta s$$

$$+\frac{k^m M^{m-1}}{L^{m-1}} \int_{t_1}^{\sigma(t_3)} \max_{t\in[t_1,\sigma(t_3)]} |G_m(t,s)| f_2(s,y_1^\sigma,y_2^\sigma)\Delta s$$

$$\geq C^* \left(\int_{t_1}^{\sigma(t_3)} \max_{t\in[t_1,\sigma(t_3)]} |G_n(t,s)| f_1(s,y_1^\sigma,y_2^\sigma)\Delta s + \int_{t_1}^{\sigma(t_3)} \max_{t\in[t_1,\sigma(t_3)]} |G_m(t,s)| f_2(s,y_1^\sigma,y_2^\sigma)\Delta s \right)$$

$$= C^* \|A(y_1,y_2)\|$$

elde edilir. O halde $A(y_1,y_2)\in P$ olur. Bu da bize $A(P)\subset P$ olduğunu verir. Aynı zamanda A operatörünün tamamen sürekli olduğu Teorem 3.3.2. dekine benzer şekilde yapılabilir.

$(y_1,y_2)\in P$ için (3.25) ten

$$\phi(y_1,y_2)\leq \xi(y_1,y_2)\leq \eta(y_1,y_2)$$

olduğu açıktır. Diğer yandan

$$\|(y_1,y_2)\| \leq \frac{1}{C^*}\left(\min_{t\in[t_2,\sigma(t_3)]} y_1(t) + \min_{t\in[t_2,\sigma(t_3)]} y_2(t)\right)$$

$$= \frac{1}{C^*}\phi(y_1,y_2)$$

olduğu görülür.

$\xi(0,0)=0$ dır ve $\forall (y_1,y_2)\in P$, $\lambda\in[0,1]$ için

$$\begin{aligned}\xi(\lambda(y_1,y_2)) &= \xi((\lambda y_1,\lambda y_2)) \\ &= \max_{t\in[t_2,\sigma(t_3)]}(\lambda y_1)(t) + \max_{t\in[t_2,\sigma(t_3)]}(\lambda y_2)(t) \\ &= \max_{t\in[t_2,\sigma(t_3)]}\lambda y_1(t) + \max_{t\in[t_2,\sigma(t_3)]}\lambda y_2(t) \\ &= \lambda\left(\max_{t\in[t_2,\sigma(t_3)]} y_1(t) + \max_{t\in[t_2,\sigma(t_3)]} y_2(t)\right) \\ &= \lambda(\xi(y_1,y_2))\end{aligned}$$

elde edilir.

Şimdi Avery-Henderson Sabit Nokta Teoreminin diğer şartlarının sağlandığını görelim.

(i) $\forall (y_1,y_2)\in \partial P(\phi,r)$ ve $\forall t\in[t_2,\sigma(t_3)]$ için

$$r = \min_{t\in[t_2,\sigma(t_3)]} y_1(t) + \min_{t\in[t_2,\sigma(t_3)]} y_2(t) \leq \|(y_1,y_2)\| \leq \frac{1}{C^*} r$$

$$\Rightarrow r \leq y_1(t) + y_2(t) \leq \frac{1}{C^*} r$$

olur. O halde,

$$\phi\left(A\left(y_1,y_2\right)\right)=\phi\left(A_n\left(y_1,y_2\right)(t),A_m\left(y_1,y_2\right)(t)\right)$$

$$=\min_{t\in\left[t_2,\sigma(t_3)\right]}\int_{t_1}^{\sigma(t_3)}G_n\left(t,s\right)f_1\left(s,y_1^{\sigma},y_2^{\sigma}\right)\Delta s$$

$$+\min_{t\in\left[t_2,\sigma(t_3)\right]}\int_{t_1}^{\sigma(t_3)}G_m\left(t,s\right)f_2\left(s,y_1^{\sigma},y_2^{\sigma}\right)\Delta s$$

$$\geq\min_{t\in\left[t_2,\sigma(t_3)\right]}\int_{t_2}^{\sigma(t_3)}G_n\left(t,s\right)f_1\left(s,y_1^{\sigma},y_2^{\sigma}\right)\Delta s$$

$$+\min_{t\in\left[t_2,\sigma(t_3)\right]}\int_{t_2}^{\sigma(t_3)}G_m\left(t,s\right)f_2\left(s,y_1^{\sigma},y_2^{\sigma}\right)\Delta s$$

$$\geq\int_{t_2}^{\sigma(t_3)}k^nM^{n-1}\left\|G\left(.,s\right)\right\|f_1\left(s,y_1^{\sigma},y_2^{\sigma}\right)\Delta s$$

$$+\int_{t_2}^{\sigma(t_3)}k^mM^{m-1}\left\|G\left(.,s\right)\right\|f_2\left(s,y_1^{\sigma},y_2^{\sigma}\right)\Delta s$$

$$>k^nM^{n-1}\int_{t_2}^{\sigma(t_3)}\left\|G\left(.,s\right)\right\|\frac{r}{2k^nM^n}\Delta s+k^mM^{m-1}\int_{t_2}^{\sigma(t_3)}\left\|G\left(.,s\right)\right\|\frac{r}{2k^mM^m}\Delta s$$

$$=\frac{r}{2}+\frac{r}{2}=r$$

$\Rightarrow\phi\left(A\left(y_1,y_2\right)\right)>r$ bulunur.

(ii) $\forall\left(y_1,y_2\right)\in\partial P\left(\xi,q\right)$ ve $t\in\left[t_1,\sigma\left(t_3\right)\right]$ için

$$0\leq y_1\left(t\right)+y_2\left(t\right)\leq\left\|\left(y_1,y_2\right)\right\|\leq\frac{1}{C^*}q$$

$$\Rightarrow 0\leq y_1\left(t\right)+y_2\left(t\right)\leq\frac{1}{C^*}q$$

bulunur. Bu durumda;

$$\xi\left(A\left(y_1,y_2\right)\right)=\xi\left(A_n\left(y_1,y_2\right)(t),A_m\left(y_1,y_2\right)(t)\right)$$

$$=\max_{t\in\left[t_2,\sigma(t_3)\right]}\int_{t_1}^{\sigma(t_3)}G_n\left(t,s\right)f_1\left(s,y_1^{\sigma},y_2^{\sigma}\right)\Delta s$$

$$+\max_{t\in\left[t_2,\sigma(t_3)\right]}\int_{t_1}^{\sigma(t_3)}G_m\left(t,s\right)f_2\left(s,y_1^{\sigma},y_2^{\sigma}\right)\Delta s$$

$$\leq \int_{t_1}^{\sigma(t_3)} L^{n-1}\left\|G(.,s)\right\| f_1\left(s, y_1^\sigma, y_2^\sigma\right)\Delta s$$

$$+\int_{t_1}^{\sigma(t_3)} L^{m-1}\left\|G(.,s)\right\| f_2\left(s, y_1^\sigma, y_2^\sigma\right)\Delta s$$

$$< L^{n-1}\int_{t_1}^{\sigma(t_3)} \left\|G(.,s)\right\| \frac{q}{2L^n}\Delta s + L^{m-1}\int_{t_1}^{\sigma(t_3)} \left\|G(.,s)\right\| \frac{q}{2L^m}\Delta s$$

$$= \frac{q}{2}+\frac{q}{2} = q$$

$\Rightarrow \xi\left(A\left(y_1, y_2\right)\right) < q$ elde edilir.

(iii) $$P(\eta, p) = \left\{\left(y_1, y_2\right)\in P : \eta\left(y_1, y_2\right)(t) = \max_{t\in[t_1,\sigma(t_3)]} y_1(t) + \max_{t\in[t_1,\sigma(t_3)]} y_2(t) < p\right\}$$

kümesi için $p > 0$ ve $(0,0)\in P$ alındığında $(0,0)\in P(\eta, p)$ olduğu aşikardır.

$\forall\left(y_1, y_2\right)\in \partial P(\eta, p)$ ve $t\in\left[t_2, \sigma\left(t_3\right)\right]$ için

$$p = \left\|\left(y_1, y_2\right)\right\| \geq y_1(t) + y_2(t) \geq C^* p$$

$$\Rightarrow C^* p \leq y_1(t) + y_2(t) \leq p$$

olur. Dolayısıyla

$$\eta\left(A\left(y_1, y_2\right)\right) = \eta\left(A_n\left(y_1, y_2\right)(t), A_m\left(y_1, y_2\right)(t)\right)$$

$$= \max_{t\in[t_1,\sigma(t_3)]}\int_{t_1}^{\sigma(t_3)} G_n(t,s) f_1\left(s, y_1^\sigma, y_2^\sigma\right)\Delta s + \max_{t\in[t_1,\sigma(t_3)]}\int_{t_1}^{\sigma(t_3)} G_m(t,s) f_2\left(s, y_1^\sigma, y_2^\sigma\right)\Delta s$$

$$\geq \max_{t\in[t_1,\sigma(t_3)]}\int_{t_2}^{\sigma(t_3)} G_n(t,s) f_1\left(s, y_1^\sigma, y_2^\sigma\right)\Delta s + \max_{t\in[t_1,\sigma(t_3)]}\int_{t_2}^{\sigma(t_3)} G_m(t,s) f_2\left(s, y_1^\sigma, y_2^\sigma\right)\Delta s$$

$$\geq \int_{t_2}^{\sigma(t_3)} k^n M^{n-1}\left\|G(.,s)\right\| f_1\left(s, y_1^\sigma, y_2^\sigma\right)\Delta s + \int_{t_2}^{\sigma(t_3)} k^m M^{m-1}\left\|G(.,s)\right\| f_2\left(s, y_1^\sigma, y_2^\sigma\right)\Delta s$$

$$> k^n M^{n-1}\int_{t_2}^{\sigma(t_3)} \left\|G(.,s)\right\| \frac{p}{2k^n M^n}\Delta s + k^m M^{m-1}\int_{t_2}^{\sigma(t_3)} \left\|G(.,s)\right\| \frac{p}{2k^m M^m}\Delta s$$

$$= \frac{p}{2}+\frac{p}{2} = p$$

$\Rightarrow \eta\left(A\left(y_1, y_2\right)\right) > p$ bulunur.

Sonuç olarak Avery-Henderson Sabit Nokta Teoreminin şartları sağlanır. O halde ele alınan (3.1)-(3.2) sistemi en az iki pozitif çözüme sahiptir. Bu çözümler $\left(y_1, y_2\right)\in P$ ve $\left(y_3, y_4\right)\in P$ olmak üzere

$$\max_{t\in[t_1,\sigma(t_3)]} y_1(t) + \max_{t\in[t_1,\sigma(t_3)]} y_2(t) > p \quad \text{ve} \quad \max_{t\in[t_2,\sigma(t_3)]} y_1(t) + \max_{t\in[t_2,\sigma(t_3)]} y_2(t) < q$$

ile

$$\max_{t\in[t_2,\sigma(t_3)]} y_3(t)+\max_{t\in[t_2,\sigma(t_3)]} y_4(t)>q \text{ ve } \min_{t\in[t_2,\sigma(t_3)]} y_3(t)+\min_{t\in[t_2,\sigma(t_3)]} y_4(t)<r$$

eşitsizliklerini sağlarlar.

3.3.3 En Az Üç Pozitif Çözümün Varlığı

Bu bölümde ele alınan (3.1)-(3.2) sisteminin en az üç pozitif çözümünün varlığını inceleyeceğiz. Bunun için beş fonksiyonel sabit nokta teoremini kullanacağız.

Bu bölümde üzerinde çalışacağımız koni (3.20) ile tanımlanan koni olacaktır. Teoremde kullanılacak $A:P\to B$ operatörünü de

$$\begin{aligned} Ay(t)=A(y_1,y_2)(t) &:= \left(\int_{t_1}^{\sigma(t_3)} G_n(t,s)f_1\left(s,y_1^\sigma,y_2^\sigma\right)\Delta s, \int_{t_1}^{\sigma(t_3)} G_m(t,s)f_2\left(s,y_1^\sigma,y_2^\sigma\right)\Delta s\right) \\ &= \left(A_n(y_1,y_2)(t), A_m(y_1,y_2)(t)\right) \end{aligned}$$

ile tanımlı olacaktır.

Şimdi beş fonksiyonel sabit nokta teoreminin ifadesini verelim. Önce teoremde kullanılacak olan bir tanım verelim.

Tanım 3.3.2: α ve ψ, P üzerinde negatif olmayan, sürekli, konkav fonksiyoneller, ζ, β ve θ, P üzerinde negatif olmayan, sürekli, konveks fonksiyoneller olsunlar. h, a, b, d ve c pozitif sayıları için;

$$P(\zeta,c)=\{x\in P:\zeta(x)<c\},$$

$$P(\zeta,\alpha,a,c)=\{x\in P: a\le\alpha(x),\ \zeta(x)\le c\},$$

$$Q(\zeta,\beta,d,c)=\{x\in P:\beta(x)\le d,\ \zeta(x)\le c\},$$

$$P(\zeta,\theta,\alpha,a,b,c)=\{x\in P: a\le\alpha(x),\ \theta(x)\le b,\ \zeta(x)\le c\},$$

$$Q(\zeta,\beta,\psi,h,d,c)=\{x\in P: h\le\psi(x),\ \beta(x)\le d,\ \zeta(x)\le c\}$$

kümeleri tanımlıdır.

Teorem 3.3.5: [5] (Beş Fonksiyonel Sabit Nokta Teoremi)

P, E Banach uzayı üzerinde bir koni, α ve ψ, P üzerinde negatif olmayan, sürekli, konkav fonksiyoneller, ζ, β ve θ P üzerinde negatif olmayan, sürekli, konveks fonksiyoneller olsunlar. c *ve* M negatif olmayan iki sabit sayı olmak üzere $\forall x\in\overline{P(\zeta,c)}$ için $\alpha(x)\le\beta(x)$, $\|x\|\le M\zeta(x)$ eşitsizlikleri sağlansın.

$0<a<b$ olacak şekilde h,a,k,b sabit sayıları için eğer

$$A:\overline{P(\zeta,c)}\rightarrow\overline{P(\zeta,c)}$$

tamamen sürekli operatörü,

(i) $\{x\in P(\zeta,\theta,\alpha,b,k,c):\alpha(x)>b\}\neq\emptyset$ ve $\forall x\in P(\zeta,\theta,\alpha,b,k,c)$ için $\alpha(A(x))>b$ dir,

(ii) $\{x\in Q(\zeta,\beta,\psi,h,a,c):\beta(x)<a\}\neq\emptyset$ ve $\forall x\in Q(\zeta,\beta,\psi,h,a,c)$ için $\beta(A(x))<a$ dır,

(iii) $\forall x\in P(\zeta,\alpha,b,c)$ için $\theta(A(x))>k$ iken $\alpha(A(x))>b$ dir,

(iv) $\forall x\in Q(\zeta,\beta,a,c)$ için $\psi(A(x))<h$ iken $\beta(A(x))<a$ dır,

şartlarını sağlıyorsa ele alınan operatörün en az üç sabit noktası vardır. Bu $x_1,x_2,x_3\in\overline{P(\zeta,c)}$ sabit noktaları

$$\beta(x_1)<a,\ \alpha(x_2)>b,\ \beta(x_3)>a,\ \alpha(x_3)<b$$

eşitsizliklerini sağlarlar.

Tezin bu bölümünde kullanmak üzere olacak şekilde α ve ψ negatif olmayan, sürekli, konkav fonksiyonelleri

$$\alpha(y_1,y_2)=\psi(y_1,y_2)=\min_{t\in[t_1,\sigma(t_3)]}y_1(t)+\min_{t\in[t_1,\sigma(t_3)]}y_2(t)$$

şeklinde ve γ, β ve θ negatif olmayan, sürekli, konveks fonksiyonelleri de

$$\zeta(y_1,y_2)=\beta(y_1,y_2)=\theta(y_1,y_2)=\max_{t\in[t_1,\sigma(t_3)]}y_1(t)+\max_{t\in[t_1,\sigma(t_3)]}y_2(t)$$

ile tanımlı kabul edilecektir.

Teorem 3.3.6: $\gamma>0,\ \delta>1$ olsun. $0<a<b<c$ sayıları $0<a<b<\frac{L^*}{k^*M^*}b<c$ olacak şekilde varolsun. Eğer f_1 ve f_2 fonksiyonları,

i) $t\in[t_1,\sigma(t_3)]$ için $b\leq y_1(t)+y_2(t)\leq\frac{L^*}{k^*M^*}b$ olduğunda

$$f_1(t,y_1^\sigma,y_2^\sigma)>\frac{b}{2k^nM^n}\ \text{ve}\ f_2(t,y_1^\sigma,y_2^\sigma)>\frac{b}{2k^mM^m}$$

dır,

ii) $t\in[t_1,\sigma(t_3)]$ için $\frac{k^*M^*}{L^*}a\leq y_1(t)+y_2(t)\leq a$ olduğunda

$$f_1(t,y_1^\sigma,y_2^\sigma)<\frac{a}{2L^n}\ \text{ve}\ f_2(t,y_1^\sigma,y_2^\sigma)<\frac{a}{2L^m}$$

dir,

iii) $t\in[t_1,\sigma(t_3)]$ için $0\le y_1(t)+y_2(t)\le c$ olduğunda

$$f_1\left(t,y_1^\sigma,y_2^\sigma\right)<\frac{c}{2L^n} \text{ ve } f_2\left(t,y_1^\sigma,y_2^\sigma\right)<\frac{c}{2L^m}$$

dir,

şartlarını sağlıyorsa ele alınan (3.1)-(3.2) sisteminin en az üç pozitif çözümü mevcuttur. Bu üç çözüm $(x_1,x_2),(y_1,y_2),(z_1,z_2)\in\overline{P(\zeta,c)}$ için

$$\max_{t\in[t_1,\sigma(t_3)]}x_1(t)+\max_{t\in[t_1,\sigma(t_3)]}x_2(t)<a \text{ olduğunda } \min_{t\in[t_1,\sigma(t_3)]}y_1(t)+\min_{t\in[t_1,\sigma(t_3)]}y_2(t)>b$$

ve

$$\min_{t\in[t_1,\sigma(t_3)]}z_1(t)+\min_{t\in[t_1,\sigma(t_3)]}z_2(t)<b \text{ olduğunda } \max_{t\in[t_1,\sigma(t_3)]}z_1(t)+\max_{t\in[t_1,\sigma(t_3)]}z_2(t)>a$$

eşitsizliklerini sağlarlar.

İspat: $\forall(y_1,y_2)\in\overline{P(\zeta,c)}$ için

$$\alpha(y_1,y_2)=\min_{t\in[t_1,\sigma(t_3)]}y_1(t)+\min_{t\in[t_1,\sigma(t_3)]}y_2(t)<\max_{t\in[t_1,\sigma(t_3)]}y_1(t)+\max_{t\in[t_1,\sigma(t_3)]}y_2(t)=\beta(y_1,y_2)$$

$$\Rightarrow\alpha(y_1,y_2)<\beta(y_1,y_2)$$

ve

$$\begin{aligned}\|(y_1,y_2)\|&=\|y_1\|_0+\|y_2\|_0\\&=\max_{t\in[t_1,\sigma(t_3)]}|y_1(t)|+\max_{t\in[t_1,\sigma(t_3)]}|y_2(t)|\\&=\zeta(y_1,y_2)\end{aligned}$$

$$\Rightarrow\|(y_1,y_2)\|=\zeta(y_1,y_2)$$

olduğu görülebilir. Şimdi $A:\overline{P(\zeta,c)}\to\overline{P(\zeta,c)}$ olduğunu görelim. $(y_1,y_2)\in\overline{P(\zeta,c)}$ ve $\forall t\in[t_1,\sigma(t_3)]$ için

$$\begin{aligned}\zeta(y_1,y_2)\le c&\Rightarrow\max_{t\in[t_1,\sigma(t_3)]}y_1(t)+\max_{t\in[t_1,\sigma(t_3)]}y_2(t)\le c\\&\Rightarrow 0<y_1(t)+y_2(t)\le c\end{aligned}$$

olur. O halde,

$$\begin{aligned}\zeta\left(A(y_1,y_2)\right)&=\max_{t\in[t_1,\sigma(t_3)]}\int_{t_1}^{\sigma(t_3)}G_n(t,s)f_1\left(s,y_1^\sigma,y_2^\sigma\right)\Delta s+\max_{t\in[t_1,\sigma(t_3)]}\int_{t_1}^{\sigma(t_3)}G_m(t,s)f_2\left(s,y_1^\sigma,y_2^\sigma\right)\Delta s\\&=\int_{t_1}^{\sigma(t_3)}G_n(t_1,s)f_1\left(s,y_1^\sigma,y_2^\sigma\right)\Delta s+\int_{t_1}^{\sigma(t_3)}G_m(t_1,s)f_2\left(s,y_1^\sigma,y_2^\sigma\right)\Delta s\end{aligned}$$

$$\leq \int_{t_1}^{\sigma(t_3)} L^{n-1}\left\|G(.,s)\right\| f_1\left(s,y_1^\sigma,y_2^\sigma\right)\Delta s+\int_{t_1}^{\sigma(t_3)} L^{m-1}\left\|G(.,s)\right\| f_2\left(s,y_1^\sigma,y_2^\sigma\right)\Delta s$$

$$=L^{n-1}\int_{t_1}^{\sigma(t_3)} \left\|G(.,s)\right\| f_1\left(s,y_1^\sigma,y_2^\sigma\right)\Delta s+L^{m-1}\int_{t_1}^{\sigma(t_3)} \left\|G(.,s)\right\| f_2\left(s,y_1^\sigma,y_2^\sigma\right)\Delta s$$

$$\leq L^{n-1}\int_{t_1}^{\sigma(t_3)} \left\|G(.,s)\right\| \frac{c}{2L^n}\Delta s+L^{m-1}\int_{t_1}^{\sigma(t_3)} \left\|G(.,s)\right\| \frac{c}{2L^m}\Delta s$$

$$=L^{n-1}\frac{c}{2L^n}\int_{t_1}^{\sigma(t_3)} \left\|G(.,s)\right\|\Delta s+L^{m-1}\frac{c}{2L^m}\int_{t_1}^{\sigma(t_3)} \left\|G(.,s)\right\|\Delta s$$

$$=\frac{c}{2}+\frac{c}{2}=c$$

$$\Rightarrow \zeta\left(A\left(y_1,y_2\right)\right)\leq c$$

bulunur. O halde $A\left(y_1,y_2\right)\in\overline{P\left(\gamma,c\right)}$ olduğu elde edilir. Bu da $A:\overline{P\left(\zeta,c\right)}\rightarrow\overline{P\left(\zeta,c\right)}$ olması demektir. Aynı zamanda $A:\overline{P\left(\zeta,c\right)}\rightarrow\overline{P\left(\zeta,c\right)}$ operatörünün tamamen sürekli olduğu Teorem 3.3.2. ispatındakine benzer şekilde görülebilir.

Şimdi beş fonksiyonel sabit nokta teoreminin diğer şartlarının da sağlandığını görelim.

i) $0<\varepsilon_1<\frac{L^*}{k^*M^*}b-b$ olacak şekilde $\left(y_1',y_2'\right)=\left(\frac{b+\varepsilon_1}{2},\frac{b+\varepsilon_1}{2}\right)\in P$ seçilirse

$$\alpha\left(y_1',y_2'\right)=\min_{t\in\left[t_1,\sigma(t_3)\right]} y_1'(t)+\min_{t\in\left[t_1,\sigma(t_3)\right]} y_2'(t)=\frac{b+\varepsilon_1}{2}+\frac{b+\varepsilon_1}{2}=b+\varepsilon_1>b\,,$$

$$\theta\left(y_1',y_2'\right)=\max_{t\in\left[t_1,\sigma(t_3)\right]} y_1'(t)+\max_{t\in\left[t_1,\sigma(t_3)\right]} y_2'(t)=\frac{b+\varepsilon_1}{2}+\frac{b+\varepsilon_1}{2}=b+\varepsilon_1<\frac{L^*}{k^*M^*}b$$

ve

$$\zeta\left(y_1',y_2'\right)=\max_{t\in\left[t_1,\sigma(t_3)\right]} y_1'(t)+\max_{t\in\left[t_1,\sigma(t_3)\right]} y_2'(t)=\frac{b+\varepsilon_1}{2}+\frac{b+\varepsilon_1}{2}=b+\varepsilon_1<\frac{L^*}{k^*M^*}b<c$$

olur. O halde

$$\left\{\left(y_1,y_2\right)\in P\left(\zeta,\theta,\alpha,b,\frac{L^*}{k^*M^*}b,c\right):\alpha\left(y_1,y_2\right)>b\right\}\neq\varnothing$$

elde edilir. Diğer taraftan $\left(y_1,y_2\right)\in P\left(\zeta,\theta,\alpha,b,\frac{L^*}{k^*M^*}b,c\right)$ ve $\forall t\in\left[t_1,\sigma\left(t_3\right)\right]$ için

$$\alpha\left(y_1,y_2\right)=\min_{t\in\left[t_1,\sigma(t_3)\right]} y_1(t)+\min_{t\in\left[t_1,\sigma(t_3)\right]} y_2(t)\geq b\Rightarrow y_1(t)+y_2(t)\geq b$$

ve

$$\theta(y_1,y_2)=\max_{t\in[t_1,\sigma(t_3)]} y_1(t)+\max_{t\in[t_1,\sigma(t_3)]} y_2(t)\le \frac{L^*}{k^*M^*}b \Rightarrow y_1(t)+y_2(t)\le \frac{L^*}{k^*M^*}b$$

olur. Yani $b\le y_1(t)+y_2(t)\le \frac{L^*}{k^*M^*}b$ elde edilir. O halde

$$\alpha\left(A(y_1,y_2)\right)=\min_{t\in[t_1,\sigma(t_3)]}\int_{t_1}^{\sigma(t_3)} G_n(t,s)f_1\left(s,y_1^\sigma,y_2^\sigma\right)\Delta s+\min_{t\in[t_1,\sigma(t_3)]}\int_{t_1}^{\sigma(t_3)} G_m(t,s)f_2\left(s,y_1^\sigma,y_2^\sigma\right)\Delta s$$

$$=\int_{t_1}^{\sigma(t_3)} G_n\left(\sigma(t_3),s\right)f_1\left(s,y_1^\sigma,y_2^\sigma\right)\Delta s+\int_{t_1}^{\sigma(t_3)} G_m\left(\sigma(t_3),s\right)f_2\left(s,y_1^\sigma,y_2^\sigma\right)\Delta s$$

$$\ge\int_{t_2}^{\sigma(t_3)} G_n\left(\sigma(t_3),s\right)f_1\left(s,y_1^\sigma,y_2^\sigma\right)\Delta s+\int_{t_2}^{\sigma(t_3)} G_m\left(\sigma(t_3),s\right)f_2\left(s,y_1^\sigma,y_2^\sigma\right)\Delta s$$

$$\ge k^nM^{n-1}\int_{t_2}^{\sigma(t_3)}\left\|G(.,s)\right\|f_1\left(s,y_1^\sigma,y_2^\sigma\right)\Delta s+k^mM^{m-1}\int_{t_2}^{\sigma(t_3)}\left\|G(.,s)\right\|f_2\left(s,y_1^\sigma,y_2^\sigma\right)\Delta s$$

$$>k^nM^{n-1}\int_{t_2}^{\sigma(t_3)}\left\|G(.,s)\right\|\frac{b}{2k^nM^n}\Delta s+k^mM^{m-1}\int_{t_2}^{\sigma(t_3)}\left\|G(.,s)\right\|\frac{b}{2k^mM^m}\Delta s$$

$$=k^nM^{n-1}\frac{b}{2k^nM^n}\int_{t_2}^{\sigma(t_3)}\left\|G(.,s)\right\|\Delta s+k^mM^{m-1}\frac{b}{2k^mM^m}\int_{t_2}^{\sigma(t_3)}\left\|G(.,s)\right\|\Delta s$$

$$=\frac{b}{2}+\frac{b}{2}=b$$

$\Rightarrow \alpha\left(A(y_1,y_2)\right)>b$ olduğu görülür.

ii) $0<\varepsilon_2<a-\frac{k^*M^*}{L^*}a$ olacak şekilde $\left(y_1'',y_2''\right)=\left(\frac{a-\varepsilon_2}{2},\frac{a-\varepsilon_2}{2}\right)\in P$ seçilirse

$$\beta\left(y_1'',y_2''\right)=\max_{t\in[t_1,\sigma(t_3)]} y_1''(t)+\max_{t\in[t_1,\sigma(t_3)]} y_2''(t)=\frac{a-\varepsilon_2}{2}+\frac{a-\varepsilon_2}{2}=a-\varepsilon_2<a,$$

$$\psi\left(y_1'',y_2''\right)=\min_{t\in[t_1,\sigma(t_3)]} y_1''(t)+\min_{t\in[t_1,\sigma(t_3)]} y_2''(t)=\frac{a-\varepsilon_2}{2}+\frac{a-\varepsilon_2}{2}=a-\varepsilon_2>\frac{k^*M^*}{L^*}a$$

ve

$$\zeta\left(y_1'',y_2''\right)=\max_{t\in[t_1,\sigma(t_3)]} y_1''(t)+\max_{t\in[t_1,\sigma(t_3)]} y_2''(t)=\frac{a-\varepsilon_2}{2}+\frac{a-\varepsilon_2}{2}=a-\varepsilon_2<c$$

olur. O halde $\left\{(y_1,y_2)\in Q\left(\zeta,\beta,\psi,\frac{k^*M^*}{L^*}a,a,c\right):\beta(y_1,y_2)<a\right\}\ne\varnothing$ bulunur.

Bunun yanında $(y_1,y_2)\in Q\left(\zeta,\beta,\psi,\frac{k^*M^*}{L^*}a,a,c\right)$ ve $\forall t\in\left[t_1,\sigma(t_3)\right]$ için

$$\psi(y_1,y_2)=\min_{t\in[t_1,\sigma(t_3)]} y_1(t)+\min_{t\in[t_1,\sigma(t_3)]} y_2(t)\geq \frac{k^*M^*}{L^*}a \Rightarrow y_1(t)+y_2(t)\geq \frac{k^*M^*}{L^*}a$$

ve

$$\beta(y_1,y_2)=\max_{t\in[t_1,\sigma(t_3)]} y_1(t)+\max_{t\in[t_1,\sigma(t_3)]} y_2(t)\leq a \Rightarrow y_1(t)+y_2(t)\leq a$$

olur. Yani $\frac{k^*M^*}{L^*}a \leq y_1(t)+y_2(t)\leq a$ elde edilir. O halde,

$$\beta(A(y_1,y_2))=\max_{t\in[t_1,\sigma(t_3)]}\int_{t_1}^{\sigma(t_3)} G_n(t,s)f_1(s,y_1^\sigma,y_2^\sigma)\Delta s+\max_{t\in[t_1,\sigma(t_3)]}\int_{t_1}^{\sigma(t_3)} G_m(t,s)f_2(s,y_1^\sigma,y_2^\sigma)\Delta s$$

$$\begin{aligned}
&=\int_{t_1}^{\sigma(t_3)} G_n(t_1,s)f_1(s,y_1^\sigma,y_2^\sigma)\Delta s+\int_{t_1}^{\sigma(t_3)} G_m(t_1,s)f_2(s,y_1^\sigma,y_2^\sigma)\Delta s\\
&\leq \int_{t_1}^{\sigma(t_3)} L^{n-1}\|G(.,s)\| f_1(s,y_1^\sigma,y_2^\sigma)\Delta s+\int_{t_1}^{\sigma(t_3)} L^{m-1}\|G(.,s)\| f_2(s,y_1^\sigma,y_2^\sigma)\Delta s\\
&=L^{n-1}\int_{t_1}^{\sigma(t_3)} \|G(.,s)\| f_1(s,y_1^\sigma,y_2^\sigma)\Delta s+L^{m-1}\int_{t_1}^{\sigma(t_3)} \|G(.,s)\| f_2(s,y_1^\sigma,y_2^\sigma)\Delta s\\
&<L^{n-1}\int_{t_1}^{\sigma(t_3)} \|G(.,s)\| \frac{a}{2L^n}\Delta s+L^{m-1}\int_{t_1}^{\sigma(t_3)} \|G(.,s)\| \frac{a}{2L^m}\Delta s\\
&=L^{n-1}\frac{a}{2L^n}\int_{t_1}^{\sigma(t_3)} \|G(.,s)\|\Delta s+L^{m-1}\frac{a}{2L^m}\int_{t_1}^{\sigma(t_3)} \|G(.,s)\|\Delta s\\
&=\frac{a}{2}+\frac{a}{2}=a
\end{aligned}$$

$\Rightarrow \beta(A(y_1,y_2))<a$ olduğu görülür.

iii) $(y_1,y_2)\in P(\zeta,\alpha,b,c)$ için $\theta(A(y_1,y_2))>\frac{L^*}{k^*M^*}b$ olduğunda $\alpha(A(y_1,y_2))>b$ olduğunu görelim.

$$\begin{aligned}
\frac{L^*}{k^*M^*}b<\theta(A(y_1,y_2))&=\max_{t\in[t_1,\sigma(t_3)]}\int_{t_1}^{\sigma(t_3)} G_n(t,s)f_1(s,y_1^\sigma,y_2^\sigma)\Delta s+\max_{t\in[t_1,\sigma(t_3)]}\int_{t_1}^{\sigma(t_3)} G_m(t,s)f_2(s,y_1^\sigma,y_2^\sigma)\Delta s\\
&=\int_{t_1}^{\sigma(t_3)} G_n(t_1,s)f_1(s,y_1^\sigma,y_2^\sigma)\Delta s+\int_{t_1}^{\sigma(t_3)} G_m(t_1,s)f_2(s,y_1^\sigma,y_2^\sigma)\Delta s\\
&\leq \int_{t_1}^{\sigma(t_3)} L^{n-1}\|G(.,s)\| f_1(s,y_1^\sigma,y_2^\sigma)\Delta s+\int_{t_1}^{\sigma(t_3)} L^{m-1}\|G(.,s)\| f_2(s,y_1^\sigma,y_2^\sigma)\Delta s
\end{aligned}$$

$$= L^{n-1}\int_{t_1}^{\sigma(t_3)} \left\|G(.,s)\right\| f_1\left(s,y_1^\sigma,y_2^\sigma\right)\Delta s + L^{m-1}\int_{t_1}^{\sigma(t_3)} \left\|G(.,s)\right\| f_2\left(s,y_1^\sigma,y_2^\sigma\right)\Delta s$$

$$\leq L^*\left(\int_{t_1}^{\sigma(t_3)} \left\|G(.,s)\right\| f_1\left(s,y_1^\sigma,y_2^\sigma\right)\Delta s + \int_{t_1}^{\sigma(t_3)} \left\|G(.,s)\right\| f_2\left(s,y_1^\sigma,y_2^\sigma\right)\Delta s\right)$$

$$\Rightarrow \left(\int_{t_1}^{\sigma(t_3)} \left\|G(.,s)\right\| f_1\left(s,y_1^\sigma,y_2^\sigma\right)\Delta s + \int_{t_1}^{\sigma(t_3)} \left\|G(.,s)\right\| f_2\left(s,y_1^\sigma,y_2^\sigma\right)\Delta s\right) > \frac{b}{k^*M^*}$$

elde edilir. Buradan,

$$\alpha\left(A(y_1,y_2)\right) = \min_{t\in[t_1,\sigma(t_3)]}\int_{t_1}^{\sigma(t_3)} G_n(t,s) f_1\left(s,y_1^\sigma,y_2^\sigma\right)\Delta s + \min_{t\in[t_1,\sigma(t_3)]}\int_{t_1}^{\sigma(t_3)} G_m(t,s) f_2\left(s,y_1^\sigma,y_2^\sigma\right)\Delta s$$

$$= \int_{t_1}^{\sigma(t_3)} G_n\left(\sigma(t_3),s\right) f_1\left(s,y_1^\sigma,y_2^\sigma\right)\Delta s + \int_{t_1}^{\sigma(t_3)} G_m\left(\sigma(t_3),s\right) f_2\left(s,y_1^\sigma,y_2^\sigma\right)\Delta s$$

$$\geq \int_{t_1}^{\sigma(t_3)} k^n M^{n-1}\left\|G(.,s)\right\| f_1\left(s,y_1^\sigma,y_2^\sigma\right)\Delta s + \int_{t_1}^{\sigma(t_3)} k^m M^{m-1}\left\|G(.,s)\right\| f_2\left(s,y_1^\sigma,y_2^\sigma\right)\Delta s$$

$$\geq k^n M^{n-1}\int_{t_1}^{\sigma(t_3)} \left\|G(.,s)\right\| f_1\left(s,y_1^\sigma,y_2^\sigma\right)\Delta s + k^m M^{m-1}\int_{t_1}^{\sigma(t_3)} \left\|G(.,s)\right\| f_2\left(s,y_1^\sigma,y_2^\sigma\right)\Delta s$$

$$\geq k^*M^*\left(\int_{t_1}^{\sigma(t_3)} \left\|G(.,s)\right\| f_1\left(s,y_1^\sigma,y_2^\sigma\right)\Delta s + \int_{t_1}^{\sigma(t_3)} \left\|G(.,s)\right\| f_2\left(s,y_1^\sigma,y_2^\sigma\right)\Delta s\right)$$

$$> k^*M^*\frac{b}{k^*M^*} = b$$

$$\Rightarrow \alpha\left(A(y_1,y_2)\right) > b$$

olarak bulunur.

iv) $(y_1,y_2)\in Q(\zeta,\beta,a,c)$ için $\psi\left(A(y_1,y_2)\right) < \frac{k^*M^*}{L^*}a$ olduğunda $\beta\left(A(y_1,y_2)\right) < a$ olduğunu görelim

$$\frac{k^*M^*}{L^*}a > \psi\left(A(y_1,y_2)\right) = \min_{t\in[t_1,\sigma(t_3)]}\int_{t_1}^{\sigma(t_3)} G_n(t,s) f_1\left(s,y_1^\sigma,y_2^\sigma\right)\Delta s$$

$$+ \min_{t\in[t_1,\sigma(t_3)]}\int_{t_1}^{\sigma(t_3)} G_m(t,s) f_2\left(s,y_1^\sigma,y_2^\sigma\right)\Delta s$$

$$= \int_{t_1}^{\sigma(t_3)} G_n\left(\sigma(t_3),s\right) f_1\left(s,y_1^\sigma,y_2^\sigma\right)\Delta s$$

$$+ \int_{t_1}^{\sigma(t_3)} G_m\left(\sigma(t_3),s\right) f_2\left(s,y_1^\sigma,y_2^\sigma\right)\Delta s$$

$$\geq \int_{t_1}^{\sigma(t_3)} k^n M^{n-1} \left\|G(.,s)\right\| f_1\left(s, y_1^\sigma, y_2^\sigma\right)\Delta s$$

$$+ \int_{t_1}^{\sigma(t_3)} k^m M^{m-1} \left\|G(.,s)\right\| f_2\left(s, y_1^\sigma, y_2^\sigma\right)\Delta s$$

$$= k^n M^{n-1} \int_{t_1}^{\sigma(t_3)} \left\|G(.,s)\right\| f_1\left(s, y_1^\sigma, y_2^\sigma\right)\Delta s$$

$$+ k^m M^{m-1} \int_{t_1}^{\sigma(t_3)} \left\|G(.,s)\right\| f_2\left(s, y_1^\sigma, y_2^\sigma\right)\Delta s$$

$$\geq k^* M^* \left(\int_{t_1}^{\sigma(t_3)} \left\|G(.,s)\right\| f_1\left(s, y_1^\sigma, y_2^\sigma\right)\Delta s + \int_{t_1}^{\sigma(t_3)} \left\|G(.,s)\right\| f_2\left(s, y_1^\sigma, y_2^\sigma\right)\Delta s \right)$$

$$\Rightarrow \left(\int_{t_1}^{\sigma(t_3)} \left\|G(.,s)\right\| f_1\left(s, y_1^\sigma, y_2^\sigma\right)\Delta s + \int_{t_1}^{\sigma(t_3)} \left\|G(.,s)\right\| f_2\left(s, y_1^\sigma, y_2^\sigma\right)\Delta s \right) < \frac{a}{L^*}$$

bulunur. Buradan,

$$\beta\left(A\left(y_1, y_2\right)\right) = \max_{t\in\left[t_1, \sigma(t_3)\right]} \int_{t_1}^{\sigma(t_3)} G_n\left(t,s\right) f_1\left(s, y_1^\sigma, y_2^\sigma\right)\Delta s$$

$$+ \max_{t\in\left[t_1, \sigma(t_3)\right]} \int_{t_1}^{\sigma(t_3)} G_m\left(t,s\right) f_2\left(s, y_1^\sigma, y_2^\sigma\right)\Delta s$$

$$= \int_{t_1}^{\sigma(t_3)} G_n\left(t_1,s\right) f_1\left(s, y_1^\sigma, y_2^\sigma\right)\Delta s + \int_{t_1}^{\sigma(t_3)} G_m\left(t_1,s\right) f_2\left(s, y_1^\sigma, y_2^\sigma\right)\Delta s$$

$$\leq \int_{t_1}^{\sigma(t_3)} L^{n-1} \left\|G(.,s)\right\| f_1\left(s, y_1^\sigma, y_2^\sigma\right)\Delta s + \int_{t_1}^{\sigma(t_3)} L^{m-1} \left\|G(.,s)\right\| f_2\left(s, y_1^\sigma, y_2^\sigma\right)\Delta s$$

$$= L^{n-1} \int_{t_1}^{\sigma(t_3)} \left\|G(.,s)\right\| f_1\left(s, y_1^\sigma, y_2^\sigma\right)\Delta s + L^{m-1} \int_{t_1}^{\sigma(t_3)} \left\|G(.,s)\right\| f_2\left(s, y_1^\sigma, y_2^\sigma\right)\Delta s$$

$$\leq L^* \left(\int_{t_1}^{\sigma(t_3)} \left\|G(.,s)\right\| f_1\left(s, y_1^\sigma, y_2^\sigma\right)\Delta s + \int_{t_1}^{\sigma(t_3)} \left\|G(.,s)\right\| f_2\left(s, y_1^\sigma, y_2^\sigma\right)\Delta s \right)$$

$$< L^* \frac{a}{L^*} = a$$

$$\Rightarrow \beta\left(A\left(y_1, y_2\right)\right) < a$$

elde edilir.

Böylelikle beş fonksiyonel sabit nokta teoreminin şartlarının sağlandığı görülür. Bu durumda (3.1)-(3.2) sisteminin en az üç pozitif çözümü mevcuttur. Bu üç çözüm $\left(x_1, x_2\right), \left(y_1, y_2\right), \left(z_1, z_2\right) \in \overline{P\left(\zeta, c\right)}$ için

$$\max_{t\in[t_1,\sigma(t_3)]} x_1(t)+\max_{t\in[t_1,\sigma(t_3)]} x_2(t)<a \text{ olduğunda } \min_{t\in[t_1,\sigma(t_3)]} y_1(t)+\min_{t\in[t_1,\sigma(t_3)]} y_2(t)>b$$

ve

$$\min_{t\in[t_1,\sigma(t_3)]} z_1(t)+\min_{t\in[t_1,\sigma(t_3)]} z_2(t)<b \text{ olduğunda } \max_{t\in[t_1,\sigma(t_3)]} z_1(t)+\max_{t\in[t_1,\sigma(t_3)]} z_2(t)>a$$

eşitsizliklerini sağlarlar.

Örnek 3.3.2: $\mathbb{T}=\left\{\left(\frac{2}{3}\right)^n : n\in\mathbb{N}_0\right\}\cup[2,3]$ zaman skalasını ele alalım. $n=1,\ m=1,$ $t_1=\frac{2}{3},\ t_2=\gamma=1,\ t_3=3,\ \delta=2$ seçelim.

$$f_1(t,y_1(t),y_2(t))=f_2(t,y_1(t),y_2(t))=\frac{1004(y_1(t)+y_2(t))^2}{(y_1(t)+y_2(t))^2+1}$$

fonksiyonları tanımlanırsa (3.1)-(3.2) sistemi,

$$\begin{cases} -y_1^{\Delta^2}(t)=\dfrac{1004(y_1(t)+y_2(t))^2}{(y_1(t)+y_2(t))^2+1},\ t\in\left[\dfrac{2}{3},3\right] \\ -y_2^{\Delta^2}(t)=\dfrac{1004(y_1(t)+y_2(t))^2}{(y_1(t)+y_2(t))^2+1},\ t\in\left[\dfrac{2}{3},3\right] \end{cases}$$

$$\begin{cases} y_1^{\Delta}\left(\dfrac{2}{3}\right)=0,\ y_1(3)+2y_1^{\Delta}(3)=y_1^{\Delta}(1) \\ y_2^{\Delta}\left(\dfrac{2}{3}\right)=0,\ y_2(3)+2y_2^{\Delta}(3)=y_2^{\Delta}(1) \end{cases}$$

halini alır. Burada seçilen sayılar ve (3.7) Green fonksiyonunun tanımı gereği $k=\frac{1}{3},\ L=\frac{13}{2}$ ve $M=\frac{11}{2}$ bulunur. Seçilen $f_1(t,y_1(t),y_2(t))$ ve $f_2(t,y_1(t),y_2(t))$ fonksiyonları sürekli ve artandır. Şimdi Teorem 3.3.6. nın şartlarını inceleyelim.

$a=87.10^{-5},\ b=3.10^{-4},\ c=13052$ olarak seçilirse,

i) $3.10^{-4}\le y_1(t)+y_2(t)\le 9.10^{-4}$ alındığında $y_1(t)+y_2(t)=3.10^{-4}$ için $f_1(t,y_1(t),y_2(t))=f_2(t,y_1(t),y_2(t))=9.035999187.10^{-5}$ olacağından,

$$f_1(t,y_1(t),y_2(t))=f_2(t,y_1(t),y_2(t))\ge 9.035999187.10^{-5}>\frac{b}{2kM}=8.181818182.10^{-5}$$

eşitsizlikleri elde edilir. Bu da Teorem 3.3.6. nın *i*) şartının sağlanması demektir.

$ii)$ $0 \leq y_1(t) + y_2(t) \leq 7.10^{-5}$ alındığında $y_1(t) + y_2(t) = 7.10^{-5}$ için $f_1(t, y_1(t), y_2(t)) = f_2(t, y_1(t), y_2(t)) = 4.919599976.10^{-6}$ olacağından,

$$f_1(t, y_1(t), y_2(t)) = f_2(t, y_1(t), y_2(t)) \leq 4.919599976.10^{-6} < \frac{a}{2L} = 5.384615385.10^{-6}$$

eşitsizlikleri elde edilir. Bu da Teorem 3.3.6. nın $ii)$ şartının sağlanması demektir.

$iii)$ $0 \leq y_1(t) + y_2(t) \leq 13052$ alındığında $y_1(t) + y_2(t) = 13052$ için $f_1(t, y_1(t), y_2(t)) = f_2(t, y_1(t), y_2(t)) \approx 1003.9$ olacağından,

$$f_1(t, y_1(t), y_2(t)) = f_2(t, y_1(t), y_2(t)) \leq 1003.9 < \frac{c}{2L} = 1506$$

eşitsizlikleri elde edilir. Bu da Teorem 3.3.6. nın $iii)$ şartının sağlanması demektir.

Sonuç olarak Teorem 3.3.6. nın şartları sağlanır. O halde Teorem 3.3.6. nın sonucu gereği bu sistem en az üç pozitif çözüme sahiptir ve bu (x_1, x_2), (y_1, y_2), (z_1, z_2) çözümleri,

$$\max_{t \in \left[\frac{2}{3}, 3\right]} x_1(t) + \max_{t \in \left[\frac{2}{3}, 3\right]} x_2(t) < 7.10^{-5} \text{ olduğunda } \min_{t \in \left[\frac{2}{3}, 3\right]} y_1(t) + \min_{t \in \left[\frac{2}{3}, 3\right]} y_2(t) > 3.10^{-4}$$

ve

$$\min_{t \in \left[\frac{2}{3}, 3\right]} z_1(t) + \min_{t \in \left[\frac{2}{3}, 3\right]} z_2(t) < 3.10^{-4} \text{ olduğunda } \max_{t \in \left[\frac{2}{3}, 3\right]} z_1(t) + \max_{t \in \left[\frac{2}{3}, 3\right]} z_2(t) > 7.10^{-5}$$

eşitsizliklerini sağlarlar.

4. SONUÇ

Bu tez çalışmasında zaman skalası üzerinde yüksek mertebeden lineer olmayan bir dinamik sistem ele alınmıştır. Bu sistemin önce, Schauder sabit nokta teoremi yardımıyla en az bir çözümünün varlığı incelenmiştir, ardından da koni üzerinde dört fonksiyonel sabit nokta teoremi ile en az bir pozitif çözümünün varlığı, Avery-Henderson sabit nokta teoremi ile en az iki pozitif çözümünün varlığı, beş fonksiyonel sabit nokta teoremi ile de en az üç pozitif çözümünün varlığı için yeterli koşullar incelenmiştir.

KAYNAKLAR

[1] **Anderson, D. R.,** 2002. Solutions to Second Order Three-Point Problems on Time Scales, *J. Difference Equ. Appl.* 8, 673-688.

[2] **Anderson, D. R.,** 2004. Nonlinear Triple-Point Problems on Time Scales, *Electron. J. Differential Equations,* 47, 1-12.

[3] **Anderson, D. R., Avery, R. I.,** 2004. An Even Order Three-Point Boundary Value Problem on Time Scales, *J. Math. Anal. Appl.,* 291, 514-525.

[4] **Aşcı, E.,** 2007. Zaman Skalasında İkinci Mertebeden Lineer Olmayan Sınır Değer Problemleri, *Pamukkale Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Yüksek Lisans Tezi.*

[5] **Avery, R.,** 1999. A Generalization of The Leggett-Williams Fixed Point Theorem, *Mathematical Sciences Research Hot-Line,* 3, 9-14.

[6] **Avery, R. I., Henderson, J.,** 2001. Two Positive Fixed Points of Nonlinear Operators on Ordered Banach Spaces, *Comm. Appl. Nonlinear Analysis,* 8, 27-36.

[7] **Avery, R. I., Henderson, J., O'Regan, D.,** 2008. Four Functionals Fixed Point Theorem, *Mathematical and Computer Modelling,* 48, 1081-1089.

[8] **Bohner, M., Peterson, A.,** 2001. *Dynamic Equations on Time Scales: An Introductions With Applications,* Birkhauser, Boston.

[9] **Bohner, M., Peterson, A. (Eds.),** 2003. *Dynamic Equations on Time Scales,* Birkhauser, Boston.

[10] **Çetin, E.,** 2007. Zaman Skalasında Yüksek Mertebeli Sınır Değer Problemleri, *Ege Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Yüksek Lisans Tezi.*

[11] **Çetin, E., Topal, S. G.,** 2010. Existence of Mutiple Positive Solution For The System of Higher Order Boundary Value Problems on Time Scales, *Mathematical and Computer Modelling.*

[12] **DaCunha, J. J., Davis, J. M., Singh, P. K.,** 2004. Existence Results for Singular Three Point Boundary Value Problems on Time Scales, *J. Math. Anal. Appl.,* 295, 378-391.

[13] **Deimling, K.,** 1985. *Nonlinear Functional Analysis,* Springer-Verlag, New York.

[14] **Erbe, L., Peterson, A.,** 2000. Positive Solutions for a Nonlinear Differential Equation on a Measure Chain, *Mathematical and Computer Modelling,* 32, 571-585.

[15] **Hilger, S.,** 1988. Ein Maskettenkalkül mit Adwendug Auf Zentrunsmannigfaltigkeiten, *Phd Thesis, Universtat Würzburg.*

[16] **Jiang, W.,** 2008. Multiple Positive Solution for n the order m-point Boundary Value Problems with All Derivatives, *Nonlinear Analysis,* 68, 1064-1072

[17] **Krasnosel'skii, M.,** 1964. Positive Solutions of Operator Equations, *Noordhoff, Groningen.*

[18] **Peterson, A. C., Raffoul, Y. N., Tisdel, C. C.,** 2004. Three Point Boundary Value Problems on Time Scales, *J. Difference Appl.,* 10, 843-849.

[19] **Sang, Y., Su, H.,** 2007. Several Sufficient Conditions of Solvability for a Nonlinear Higher Order Three Point Boundary Value Problems on Time Scales, *Appl. Math. Comput.,* 190, 566-575.

[20] **Sun, H. R., Li, W. T.,** 2004. Positive Solutions for Nonlinear Three Point Boundary Value Problems on Time Scales, *J. Math. Anal. Appl.,* 299, 508-524.

[21] **Yaslan, İ.,** 2007. Existence of Positive Solutions For Nonlinear Three Point Problems on Time Scales, *J. Comput. Appl. Math.,* 206, 888-897.

[22] **Yaslan, İ.,** 2009. Existence Results for An Even-Order Boundary Value Problem on Time Scales, *Nonlinear Analysis.,* 70, 483-491.

ÖZGEÇMİŞ

Adı : Mustafa

Soyadı : GÜNENDİ

Doğum Yeri : ACIPAYAM

Doğum Tarihi : 10.02.1987

Yüksek Lisans : Pamukkale Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Bölümü Analiz ve Fonksiyonlar Teorisi Anabilim Dalı 2011

Lisans : Afyon Kocatepe Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü 2005-2006
Pamukkale Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü 2006-2009

Lise : Serinhisar Hakkı Gökçetin Ç.P.L.

İlköğretim : Serinhisar Yavuz Yıldırım Ekiz İ.Ö.O.

Yabancı Dil : İngilizce

Bildiği Programlar: Fortran, C#, Matlab, SPSS

Başarılar : Pamukkale Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü Bölüm İkinciliği 2009

Adres : Yenice Mah. Şehit Hasan Karakılınç Cad. No:39
Serinhisar/DENİZLİ