PAMUKKALE ÜNİVERSİTESİ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

DEĞİŞKEN KATSAYILI LİNEER FARK DENKLEMLERİ İÇİN ÇÖZÜM YÖNTEMLERİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Erdem BAYAR

Anabilim Dalı : Matematik

Programı : Uygulamalı Matematik

Tez Danışmanı: Doç. Dr. Ayşegül DAŞCIOĞLU

Aralık 2012

YÜKSEK LİSANS TEZ ONAY FORMU

Pamukkale Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü 091441042 nolu öğrecisi ERDEM BAYAR tarafından hazırlanan "**DEĞİŞKEN KATSAYILI LİNEER FARK DENKLEMLERİ İÇİN ÇÖZÜM YÖNTEMLERİ**" başlıklı tez tarafımızdan okunmuş, kapsamı ve niteliği açısından bir Yüksek Lisans tezi olarak kabul edilmiştir.

Tez Danışmanı : **(Jüri Başkanı)**	**Doç. Dr. Ayşegül DAŞCIOĞLU**	**(PAÜ)**	
Jüri Üyesi :	**Doç. Dr. İsmail YASLAN**	**(PAÜ)**	
Jüri Üyesi :	**Doç. Dr. Suna SALTAN**	**(SDÜ)**	S.saltan

Pamukkale Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun 26/12/2017 tarih ve ....31/19....sayılı kararıyla onaylanmıştır.

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü
Prof. Dr. Nuri KOLSUZ

Bu tezin tasarımı, hazırlanması, yürütülmesi, araştırmalarının yapılması ve bulgularının analizlerinde bilimsel etiğe ve akademik kurallara özenle riayet edildiğini; bu çalışmanın doğrudan birincil ürünü olmayan bulguların, verilerin ve materyallerin bilimsel etiğe uygun olarak kaynak gösterildiğini ve alıntı yapılan çalışmalara atfedildiğine beyan ederim.

İmza :

Öğrenci Adı Soyadı : Erdem Bayar

ÖNSÖZ

Bu çalışma, Pamukkale Üniversitesi Matematik Anabilim Dalı Öğretim Üyesi Doç. Dr. Ayşegül DAŞCIOĞLU yönetiminde yapılarak Pamukkale Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü'ne Pamukkale Üniversitesi Bilimsel Araştırma Projeleri Koordinasyon Birimi (PAUBAP) desteğiyle Yüksek Lisans Tezi olarak sunulmuştur.

Yüksek lisans tez konusunu bana teklif eden, çalışmalarım boyunca karşılaştığım zor durumlarda yardımlarını esirgemeyen, katkılarıyla beni yönlendiren ve tezimi büyük bir sabır ve titizlikle yöneten saygıdeğer hocam Doç. Dr. Ayşegül DAŞCIOĞLU'na teşekkür eder ve saygılarımı sunarım.

Aralık 2012

Erdem BAYAR

İÇİNDEKİLER

TABLO LİSTESİ

SEMBOL LİSTESİ

$\mathbb{N}$: Doğal Sayılar
$\mathbb{Z}$: Tam Sayılar
$\mathbb{R}$: Reel Sayılar
Δ : İleri Fark Operatörü
∇ : Geri Fark Operatörü
E : Kaydırma Operatörü
δ : Merkezi Fark Operatörü
L : Laplace Operatörü
Z : Z dönüşüm Operatörü
Γ : Gama Fonksiyonu
$\sum$: Belirsiz Toplam
$\sum_{a}^{b}$: a'dan b'ye toplam sembolü
$\prod_{a}^{b}$: a'dan b'ye çarpım sembolü

ÖZET

DEĞİŞKEN KATSAYILI LİNEER FARK DENKLEMLERİ İÇİN ÇÖZÜM YÖNTEMLERİ

Bu çalışmada değişken katsayılı lineer fark denklemlerinin analitik çözüm yöntemleri üzerinde durulmuştur.

Birinci bölümde fark denklemleri üzerine günümüze kadar yapılan araştırmalardan ve kullanım alanlarından bahsedilmiştir.

İkinci bölümde fark denklemleri için temel kavramlar verilip fark denklemlerinin çözümleri ve sınıflandırılması üzerinde durulmuştur.

Üçüncü bölümde ise sabit katsayılı lineer fark denklemlerinin analitik çözümleri verilmiştir.

Son olarak dördüncü bölümde değişken katsayılı lineer fark denklemlerinin analitik çözüm yöntemleri verilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Lineer Fark Denklemi, Fonksiyonel Fark Denklemi, Fark Denklemleri İçin Analitik Çözüm Yöntemleri.

SUMMARY

SOLUTION METHODS FOR LINEAR DIFFERENCE EQUATIONS WITH VARIABLE COEFFICIENTS

In this study analytical solution methods of linear difference equations with variable coefficicients are emphasized.

In the first chapter, prior searchs on difference equations and usage areas of difference equations are mentioned.

In the second chapter, basic consepts for difference equations are given, and solutions and classifications of difference equations are emphasized.

In the third chapter, the analytical solutions of linear difference equations with constant coefficients are given.

Finally, in the fourth section, the analytical solution methods of linear difference equations with variable coefficients are given.

Key Words: Linear Difference Equations, Functional Difference Equations, Analytical Solution Methods for Difference Equations.

1.GİRİŞ

Fark denklemleri; mühendislik, kimya, fizik, biyoloji ve ekonomi gibi birçok bilim alanında kullanılmaktadır. Fark denklemleri teorisi, diferansiyel denklemlerin teorisine çok büyük benzerlik göstermektedir. Fark denklemlerinin incelenmesi, diferansiyel denklemlere kıyasla daha yeni bir kavramdır. 20. yy.'da, genetik ve radyasyondaki kuantum gibi bilimin çeşitli dallarındaki gelişmeler, tüm doğa olaylarının, süreklilik ifadeleri dışında ifadelere ihtiyaç duyulduğunu göstermiştir. Diferansiyel denklemlerde karşılaşılan süreksizlik durumları, fark denklemleri ile kaldırılmak istenmektedir (Çatal, 2004).

Matematiksel hesaplamalarda bize verilen bir değerler kümesinin özyinelemeli bir fonksiyonun değerini hesaplamamıza olanak sağlayan denklemler vardır. Bu tarz denklemler fark denklemleri ya da rekürans denklemleri olarak adlandırılır. Bu denklemler hem matematikte hem de onun istatistiksel uygulamalarında, bilgisayar, elektrik ve devre analizi, dinamik sistemler, ekonomi, biyoloji gibi alanlarda karşımıza çıkar.

Ardışık tekrar işlemi bir önceki adımda bulunan değerin bir sonraki adımda kullanılarak yeni bir değer elde edilmesidir. Fark denklemlerinde ise ardışık tekrar işlemleri kullanılarak istenilen bir terimin değeri bulunabilir. Ayrıca sadece kesikli (süreksiz) değerler kümesinde değişen bazı değişkenlere sahip problemler ardışık tekrar işlemlerinin de yardımıyla fark denklemlerini içeren matematik modellerle ifade edilebilir. Örneğin ekonomide böyle bir değişken zamandır. Ekonomistler bu kesikli zaman aralıkları üzerinde periyot analizi denen ulusal gelir davranışı ve diğer ekonomik değişkenleri inceler (Goldberg, 1960). Ekonomide yine örümcek ağı modeli ve Samuelson'un çoğaltan hızlandıran modellerinin çözümünde fark denklemleri kullanılır (Ersel, 1981).

Sosyolojik araştırmalarda bir ülkedeki sosyal demografiyi[1], sosyal bulaşıcı hastalıkların yayılması, söylentilerin yayılması ve kamuoyunda yaşanan hızlı değişimleri birinci mertebeden lineer olmayan fark denklemlerinin çözümleri ile

[1] Bir ülkede bulunan nüfusun yapısını, durumunu ve dinamik özelliklerini inceleyen bilim dalı.

bulunur. Ayrıca birinci mertebeden lineer fark denklemlerinin sosyolojik araştırmalarda birçok modellemesi de mevcuttur (Huckfeldt, 1982).

Elektrikli otomobilin modellenmesinde de fark denklemleri kullanılır. Bunun için içinde akümülatör-filtre, tahrik motoru ve taşıt direnci olmak üzere oluşturulan otomobil simülasyon modelinde her kısma ilişkin sistem simülasyon programı elde edilmesi için ayrı ayrı fark denklemleri oluşturulur. Bulunan bu fark denklemlerinin uygun sırayla yazılmasıyla sistem simülasyon programı hiçbir nümerik yöntem kullanılmadan doğrudan programlanabilir. Bu denklemlerle gerçeklenen programlarda herhangi bir kararlılık sorunu ile karşılaşılmaz. Ayrıca denklemler fark denklemleri şeklinde düzenlenmiş olduğundan herhangi bir kontrol algoritması altında sistemin kararlılığını da incelemek mümkün olur. Bu program ile bir elektrikli otomobilin tasarımında motor gücü seçimi, seçilen motorla çeşitli yol ve yük koşullarında elde edilebilecek hız ve ivme profilleri belirlenebilir. Ayrıca çeşitli kontrol algoritmalarının taşıt performansı üzerindeki etkileri ve enerji tüketimi gibi konuların irdelenmesi de mümkündür (Kurtulan ve diğ., 1995).

Fark denklemlerinin en basit ifade edilmesi M.Ö. 2000 yıllarında görülmektedir. Bu kavram ilk defa bir denklemin kökünü bulma çalışması olarak Babillerde görülmüştür (Kelly, 2003).

M.Ö. 600-0 yılları arasında Arşimet[2], Öklid[3] ve Pisagor[4]'u görmekteyiz. M.S. 0-400 yıllarında Heron[5], Theon[6] ve Diophantus[7] fark denklemine katkıda bulunmuştur. 400-1200 yılları arasında Avrupa'da büyük başarılara imza atılmamış olup bu dönemdeki başarılar çoğunlukla Ortadoğu'dan gelmiştir. Bu dönemde Hintli matematikçi Brahmagupta[8] ikinci dereceden bir denklemi çözmek için kurallar geliştirmiş ve bu kurallarda ardışık tekrar yöntemini kullanmıştır. Bu dönemde ayrıca Al-Karaji[9],Ömer Hayyam[10], Bhaskara[11] ve Al-Samawal[12]'ın çalışmalarını görüyoruz (Kulenovic ve diğ., 2000).

---

[2] Arşimet (MÖ 287-MÖ 212) Yunan matematikçi, fizikçi, astronom, filozof ve mühendis.
[3] Öklid (MÖ 325-MÖ 265) İskenderiyeli matematikçi.
[4] Pisagor (MÖ 569-MÖ 475) İyonyalı matematikçi ve filozof.
[5] Heron (10-15) Yunan matematikçi ve mekanik uzmanı.
[6] Theon (70-135) Yunan bilgin ve matematikçi.
[7] Diophantus (200-284) Yunan matematikçi.
[8] Brahmagupta (598-670) Hintli matematikçi ve astronom.
[9] Abū Bakr ibn Muhammad ibn al Husayn al-Karaji (953-1029) Persli matematikçi ve mühendis.
[10] Gıyaseddin Eb'ul Feth Ömer İbni İbrahim'el Hayyam (1048-1122) Persli matematikçi, şair, filozof.
[11] II. Bhāskara (1114-1185) Hintli matematikçi.
[12] Ibn Yahya al-Maghribi Al-Samawal (1130-1180) Arap matematikçi, astronom ve fizikçi.

1200-1600 yılları arasında fark denklemleri ve ardışık tekrar bağıntılarına Fibonacci[13], Nasir Al-Tusi[14], Yang Hui[15], Al-Banna[16], Al-Farisi[17] ve Shih-Chieh[18] tarafından önemli katkılar yapılmış. Ayrıca 1202 yılında Fibonacci biyolojide ilk matematiksel modelini (tavşan problemi olarak bilinen) oluşturmuştur. Bu problemde çiftlikteki tavşanlar doğdukları ilk iki ay yavru yapmazlar. Üçüncü aydan itibaren her çift her ay bir çift yavru yapar. Buna göre bu çiftlikte bir çift tavşanla başlanırsa kaç ay sonra kaç çift tavşan elde edileceği sorusunun cevabına ulaşılmak istenmiştir. Fibonacci bu çalışmasında

$$F(n+2) = F(n+1) + F(n)$$

fark denklemini oluşturmuştur (Elaydi, 2005). Bu fark denklemini ise Alfred Binet[19] tarafından çözülmüş olup buna Binet formülü adı verilmiştir (Weisstein, 1999).

1600-1700 yıllarında Jacob[20], Moivre[21], Newton[22] ve Pascal[23] fark denklemi üzerinde çalışmalar yapmıştır. Bu kişiler arasında en önemli çalışmayı ise Newton, günümüzde "Newton metodu" olarak bilinen kök bulma formülünü (nümerik analizde yer alan)

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

şeklindeki fark denklemiyle ifade etmiştir (Kulenovic ve diğ., 2000).

1700-1750 yılları arasında Riccati[24], Cotes[25] ve Simson[26]'ı görmekteyiz. Bu dönemde Riccati analiz ve özellikle diferansiyel denklemler üzerinde çalışmıştır. Günümüzde de

$$x_{n+1} = \frac{a + bx_n}{c + dx_n}$$

[13] Leonardo Pisano Fibonacci (1170-1250) İtalyan matematikçi.
[14] Nasîrüddin Tûsî (1201-1274) Farslı matematikçi.
[15] Yang Hui (1238-1298) Çinli matematikçi
[16] Al-Marrakushi ibn Al-Banna (1256-1321) Farslı matematikçi.
[17] Kamal al-Din Abu'l Hasan Muhammad Al-Farisi (1260-1320) Persli matematikçi.
[18] Chu Shih-Chieh (1260-1320) Çinli matematikçi.
[19] Alfred Binet (1857-1911) Fransız psikoloji uzmanı.
[20] Jacob (Jacques) Bernoulli (1655-1705) İsviçreli matematikçi.
[21] Abraham de Moivre (1667-1754) Fransız matematikçi.
[22] Sir Isaac Newton (1643-1727) İngiliz fizikçi, matematikçi, astronom, filozof ve ilahiyatçı.
[23] Blaise Pascal (1623-1662) Fransız fizikçi, matematikçi, yazar ve filozof.
[24] Jacopo Francesco Riccati (1676-1754) İtalyan matematikçi.
[25] Roger Cotes (1682-1716) İngiliz matematikçi.
[26] Robert Simson (1687-1768) İskoç matematikçi.

şeklinde ifade edilen fark denklemi onun adı ile özdeşleşerek Riccati fark denklemi olarak anılmaktadır.

1751-1800 yıllarında ise Euler[27], Johann Bernouilli[28], Monge[29] ve Laplace[30]'ın çalışmalarını görmekteyiz. 1755 yılında Euler "Institutiones calculi differentialis" adlı yayınında sonlu farkın analizi ile ilgili çalışmalarına yer vermiş olup ilk defa Δ fark operatörünü kullanmıştır. 1801-1825 yılları arasında bu konuda Babagge[31], Bessel[32], Farey[33], Gompertz[34], Gauss[35] ve Legendre[36]'ın çalışmalarını görüyoruz. Bu yıllardaki önemli buluşlardan biri ise 1755 yılında bulunan Δ fark sembolünün artık Babagge tarafından

$$\Delta f(x_1) = f(x_2) - f(x_1), \quad x_1 \neq x_2$$

şeklindeki bir özel halinin oluşturulmasıdır. Bu bağıntı bir polinom şeklinde yazılabilen herhangi bir fonksiyonun nümerik değerini hesaplamada kullanılmaktadır (Kulenovic ve diğ., 2000).

1826-1850 yıllarında popülasyon çalışmaları ile ilgili temel matematiksel model oluşturulmuştur. Bu model popülasyon büyüklüğünün kendisinden önceki neslin popülasyon büyüklüğü ile orantılı olması ile ilgili olarak ortaya konulmuştur. Bu durum matematiksel olarak

$$p_{t+1} = rp_t$$

şeklinde ifade edilir. Burada t; periyod zamanı, p_t; t zamanındaki popülasyon büyüklüğünü, p_{t+1}; bir sonraki zaman dilimindeki popülasyon büyüklüğünü ve r büyüme oranını verir. Verhulst[37], 1846 yılında popülasyonun büyümesinin sadece popülasyon hacmine bağlı olmadığını, aynı zamanda bu hacmin popülasyonunun üst limitinden ne kadar uzak olduğunun da önemini vurguladı. Ayrıca Verhulst önceki nüfus ve yeni bir dönem nüfus büyüklüğünü orantılı yapmak için

---

27 Leonhard Euler (1707-1783) İsviçreli matematikçi ve fizikçi.
28 Johann III Bernouilli (1744-1807) İsviçreli matematikçi.
29 Gaspard Monge (1746-1818) Fransız matematikçi.
30 Pierre-Simon Laplace (1749-1827) Fransız matematikçi ve astronom.
31 Charles Babbage (1791-1871) İngiliz matematikçi, filozof, mühendis.
32 Friedrich Wilhelm Bessel (1784-1846) Alman matematikçi ve gökbilimci.
33 John Farey (1766-1826) İngiliz jeolog, yazar ve matematikçi.
34 Benjamin Gompertz (1779-1865) İngiliz matematikçi ve aktüer.
35 Carl Friedrich Gauss (1777-1855) Alman fizikçi ve matematikçi.
36 Adrien-Marie Legendre (1752-1833) Fransız matematikçi.
37 Pierre François Verhulst (1804-1849) Belçikalı matematikçi.

$$p_{t+1} = rp_t\left(k - p_t\right)/K$$

lojistik fark denklemini öne sürmüştür (Kulenovic ve diğ., 2000).

Artık 1850 yıllarından sonra herhangi bir canlı türünün gelecekteki durumuyla ilgili tahminler yapılırken; bu türün önceki mevcudu ve bunun değişimine neden olan beslenme, üreme, ölüm gibi faktörler göz önüne alındığından fark denklemlerinden yararlanılmaya başlanmıştır.

1851-1875 yıllarında Heine[38], Casorati[39]ve Riemann[40] fark denklemlerine katkıda bulunmuştur. Bu dönemde Casorati, diferansiyel denklemlerle fark denklemlerinin önemli ortak özelliklere sahip olduğunun farkına varmıştır. Ayrıca Casorati, lineer fark denklemleri için Casorati formülünü geliştirmiş ve *n.* mertebeden fark denklemi, homojen fark denklemi ve Casorati matrisi üzerinde yaptığı çalışmalar fark denklemleri teorisinde önemli yer tutmuştur. 1876-1900 yılları arasında Hermite[41], Christoffel[42], Routh[43], Laguerre[44], Lucas[45], Gegenbauer[46], Poincare[47], Markov[48], Chebychev[49] ve Peano[50] fark denklemine katkıda bulunmuştur (Kulenovic ve diğ., 2000).

1901-1925 yılları arasında ardışık denklemler bazı matematiksel mucizeler oluşturmaya başlamıştır. Bunlar düzlem doldurma eğrileri ya da fraktallarla başlar. Bu eğriler hiçbir boşluk bırakmadan düzlem dolduran eğrilerdir. Bunun gibi eğriler ilk 1890 yılında Peano tarafından keşfedildi. Fark denklemlerini düzlem doldurma eğrileri ile kullanan diğer matematikçiler Hilbert[51] ve Van Koch[52] olmuştur. Düzlem doldurma eğrilerinin ve fraktalların birçok uygulaması vardır. Bunlardan biri de adi diferansiyel denklemlerin yaklaşık çözümleri için kapalı ve açık yinelemeli yöntemler ailesinin önemli bir türü olan Runge-Kutta yöntemleridir. Bu yöntem

---

[38] Heinrich Eduard Heine (1821-1881) Alman matematikçi.
[39] Felice Casorati (1835-1890) İtalyan matematikçi.
[40] George Friedrich Bernhard Riemann (1826-1866) Alman matematikçi.
[41] Charles Hermite (1822-1901) Fransız matematikçi.
[42] Elwin Bruno Christoffel (1829-1900) Alman matematikçi ve fizikçi.
[43] Edward John Routh (1831-1907) İngiliz matematikçi.
[44] Edmond Nicolas Laguerre (1834-1886) Fransız matematikçi.
[45] François Édouard Anatole Lucas (1842-1891) Fransız matematikçi.
[46] Leopold Bernhard Gegenbauer (1849-1903) Avusturyalı matematikçi.
[47] Jules Henri Poincaré (1854-1912) Fransız matematikçi, teorik fizikçi, mühendis ve filozof.
[48] Andreyevich Markov (1856-1922) Rus matematikçi.
[49] Pafnuty Lvovich Chebyshev (1821-1894) Rus matematikçi.
[50] Giuseppe Peano (1858-1932) İtalyan matematikçi.
[51] David Hilbert (1862-1943) Alman matematikçi.
[52] Niels Fabian Van Koch (1870-1924) İsveçli matematikçi.

1900'lü yıllarda Runge[53] ve Kutta[54] adlı matematikçiler tarafından geliştirilmiştir. Böylece artık fark denklemleri kullanılarak diferansiyel denklemlerin nümerik çözüm yöntemlerine geçilmiş oldu. 1926-1950 yılları arasında Julia[55] ve Fatou[56] tarafından fark denklemleri ve ardışık yöntemleri kompleks fonksiyonlar üzerinde başlanmış ve bu iki matematikçi temel yinelemeli süreç üzerinde çalışmalar yapmıştır. Bu dönemden sonra bilgisayar çalışmalarının başlaması ile birlikte bugünkü fraktal geometrinin temelini Mandelbrot[57] atmıştır (Kulenovic ve diğ., 2000).

Bu zamana kadar yapılan araştırmalardaki bilgiler 1950'li yıllardan sonraki matematikçilerin lineer olmayan sabit katsayılı fark denklemleri için bir zemin oluşturmuştur. Bu çalışmalardan bazıları 1995-2000 yılları arasında Ladas tarafından yapılmıştır. Daha sonra 1999-2004 yılları arasında Amleh ve diğ. (1999), Komsala ve diğ. (2000), DeVault ve diğ. (2001), Kulenoviç ve diğ. (2001), Aboutaleb ve diğ. (2001), Yan ve diğ. (2002-2003), Al-Saris ve DeVault (2003), El-Owaidy ve diğ. (2003), Fan ve diğ. (2004), El-Owaidy ve diğ. (2004), He ve diğ. (2004) fark denklemleri üzerinde çalışıldığı görülmektedir.

[53] Carl David Tolmé Runge (1856-1927) Alman fizikçi, matematikçi.
[54] Martin Wilhelm Kutta (1867-1944) Alman matematikçi.
[55] Gaston Maurice Julia (1893-1978) Fransız matematikçi.
[56] Pierre Joseph Louis Fatou (1878-1929) Fransız matematikçi.
[57] Benoît B. Mandelbrot (1924-2010) Fransız Amerikan matematikçi.

2. TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde ayrık matematik, fark denklemlerinin çözümünde bize kolaylık sağlayan opeatörler ve özellikleri, fark denklemlerinin sınıflandırılması ve çözümleri üzerinde durulmuştur.

2.1 Ayrık Matematik İle İlgili Bazı Kavramlar

Ayrık matematik veya bazen diğer adıyla kullanılan sonlu matematik, matematiğin ayrık yapılarıyla ilgilenen süreklilik içermeyen konularını kapsayan matematik dalıdır. Tezimizde ayrık matematik ile bilgiler Lakshmikantham ve Trigiante (2002) kaynağından yararlanılarak sunulmuştur.

Şimdi $n_0 \in \mathbb{Z}$ alalım. Bu durumda

$$N_{n_0}^{\pm} = \{n_0,\, n_0 \pm 1,\, n_0 \pm 2, \ldots,\, n_0 \pm n, \ldots\}$$

ayrık noktalar kümesini tanımlayalım. $N_{n_0}^{\pm}$ kümesi üzerinde tanımlı f_n ve $f(n)$ şeklinde gösterilebilen fonksiyonları bazen $\mathbb{R}$'de bazen de $\mathbb{C}$'de kabul edeceğiz. Bununla beraber $N_{n_0}^{\pm}$ ile birebir tekabül eden başka ayrık noktalar kümesi de tanım kümesi olarak alınabilir. Biz bu tezimizde

$$D_{x_0}^{+} = \{x_0,\, x_{0+1},\, x_{0+2},\, \ldots,\, x_{0+n},\, \ldots\}$$
$$D_{x_0,h}^{+} = \{x_0,\, x_0 + h,\, x_0 + 2h,\, \ldots,\, x_0 + nh,\, \ldots\}$$

ayrık nokta kümeleri üzerinde çalışacağız. Burada $x_0 \in \mathbb{R}$'dir. Bu kümelerde fonksiyonun ilk değere bağlılığı gösterilmek istendiğinde $D_{x_0,h}^{+}$ kullanılabilir. $D_{x_0,h}^{+}$ kümesinin kullanılmasının avantajı h parametresine de bağlılık göstermesidir. Burada h parametresine *adım uzunluğu* denir. İlerleyen bölümlerde genellikle h uzunluğu 1 olarak alınmıştır.

2.2 Bazı Operatörler ve Özellikleri

Bu bölümde fark denklemlerinin çözümlerini bulmamızda bize yardımcı olacak operatörler ve özellikleri Goldberg (1960), Levy ve Lessman (1961), Kelly ve Peterson (2001) ve Elaydi (2005) kaynakları yardımıyla tanımlanmıştır.

Tanım (Δ operatörü): f reel ya da kompleks değerli bir fonksiyon olmak üzere, Δ operatörü

$$\Delta f(x) = f(x+h) - f(x)$$

şeklinde tanımlanır. Burada h herhangi bir sabit, x ise bağımsız bir değişkendir.
Özel olarak $f(x) = x$ alınırsa $\Delta x = (x+h) - x = h$ ya da $h = \Delta x$ dir. Bu yüzden h'a *fonksiyon aralığı* da denir.
$x \in D^{+}_{x_0,h}$ ayrık küme üzerinde tanımlı ise Δ operatörü, $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere $\Delta f(x_n) = f(x_n + h) - f(x_n)$ ya da kısaca $\Delta f_n = f_{n+1} - f_n$ olarak da verilebilir.

Yüksek mertebeden ileri farklar her birinin bir öncekine Δ operatörünün uygulanmasıyla elde edilir.

$$\Delta^2 f(x) = \Delta[\Delta f(x)] = \Delta[f(x+h) - f(x)] = f(x+2h) - 2f(x+h) + f(x)$$
$$\Delta^2 f_n = \Delta[\Delta f_n] = \Delta[f_{n+1} - f_n] = f_{n+2} - 2f_{n+1} + f_n$$

burada Δ^2 ikinci dereceden fark operatörü olarak adlandırılır. Bu fark işlemleri devam edildiğinde genel olarak f'in $(n-1)$. farkının farkına f'in n. farkı denir ve

$$\Delta^n f(x) = \Delta\left(\Delta^{n-1} f(x)\right)$$

olarak gösterilir.

Sonuç: $f(x)$ fonksiyonunun m. dereceden farkı $(a-b)^m$'nin Binom açılımına benzer biçimde

$$\Delta^m f(x) = \sum_{k=0}^{m} (-1)^k \binom{m}{k} f(x + (m-k)h)$$

formülüyle bulunur.

Teorem (Δ operatörünün özellikleri):

1. Dağılma özelliği:

$$\Delta[f(x) + g(x)] = \Delta f(x) + \Delta g(x)$$
$$\Delta(f_n + g_n) = \Delta(f_n) + \Delta(g_n)$$

2. Bir sabitle bir fonksiyonun çarpımının farkı: a bir sabit olmak üzere

$$\Delta\left[af(x)\right] = a\Delta\left[f(x)\right]$$
$$\Delta\left[af_n\right] = a\Delta f_n$$

3 İki fonksiyonun çarpımının farkı:

$$\Delta\left[f(x)g(x)\right] = \Delta\left[f(x)\right]g(x+h) + f(x)\Delta\left[g(x)\right]$$
$$\Delta(f_n g_n) = \Delta(f_n)g_{n+1} + f_n\Delta(g_n)$$

4. İki fonksiyonun bölümünün farkı:

$$\Delta\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{\Delta\left[f(x)\right]g(x) - f(x)\Delta\left[g(x)\right]}{g(x+h)g(x)}$$
$$\Delta\frac{f_n}{g_n} = \frac{\Delta(f_n)g_n - f_n\Delta(g_n)}{g_{n+1}g_n}$$

5. *r.* ve *s.* dereceden farkların çarpımı:

$$\Delta^r\left(\Delta^s f(x)\right) = \Delta^{r+s} f(x) \quad r,s \in \mathbb{N}$$
$$\Delta^r\left(\Delta^s f_n\right) = \Delta^{r+s} f_n$$

Teorem: a sabit olmak üzere bazı temel fonksiyonları $h=1$ için

1. $\Delta a^x = (a-1)a^x$

2. $\Delta \sin ax = 2\sin\frac{a}{2}\cos a\left(x+\frac{1}{2}\right)$

3. $\Delta \cos ax = -2\sin\frac{a}{2}\sin a\left(x+\frac{1}{2}\right)$

4. $\Delta \log ax = \log\left(1+\frac{1}{x}\right)$

olarak ifade edilir.

Tanım (I operatörü): $If(x) = f(x)$ şeklinde tanımlı operatöre I birim operatörü denir.

Tanım (E operatörü): E kaydırma (öteleme) operatörü x sürekli değişken ve ayrık noktalar kümesi üzerinde sırasıyla

$$Ef(x) = f(x+h), \quad Ef_n = f_{n+1}$$

şeklinde tanımlanır. İkinci mertebeden E operatörü

$$E^2 f(x) = \mathrm{E}\left[\mathrm{E}f(x)\right] = E\left[f(x+h)\right] = f(x+2h)$$

şeklinde bulunur. Bu işlemlere devam edildiğinde

$$E^m f(x) = f(x+mh), \quad E^m f_n = f_{n+m}$$

denklemi elde edilir. Burada $m \in \mathbb{Q}$ olmak üzere E^m m. dereceden E operatörünü tanımlar.

E operatörünün özellikleri: a sabit olmak üzere

1. $E\left[f(x)+g(x)\right] = Ef(x)+Eg(x)$
2. $E\left[af(x)\right] = aEf(x)$
3. $E^r\left(E^s f(x)\right) = E^{r+s} f(x)$
4. $E^0 f(x) = f(x)$

olarak ifade edilir.

Teorem (Δ ve E operatörleri arasındaki ilişki): Δ ve E operatörlerinin tanımlarından yararlanarak

$$\Delta f(x) = f(x+h) - f(x) = Ef(x) - f(x) = (E-1) f(x) \quad \Rightarrow \quad \Delta = E-1$$

Δ ve E arasındaki 1. dereceden bir bağıntı bulunur. Bu işlemden yararlanarak

$$\Delta^m f(x) = (E-I)^m f(x) = \sum_{k=0}^{m} (-1)^k \binom{m}{k} E^{m-k} f(x)$$

m. dereceden Δ ve E operatörleri arasındaki ilişkiyi görmüş oluruz. Benzer şekilde $E = I + \Delta$ olduğu görülür. Buradan

$$E^m = (\Delta + I)^m = \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} \Delta^{m-k}$$

yazılabilir.

Tanım (∇ operatörü): Geri fark operatörü ∇,

$$\nabla f(x) = f(x) - f(x-h), \quad \nabla f_n = f_n - f_{n-1}$$

olarak tanımlanır. Ayrıca

$$\nabla f(x) = \Delta \mathrm{E}^{-1}\left[f(x)\right] = \left(1-E^{-1}\right) f(x)$$

şeklinde gösterilebilir.

Tanım (δ operatörü): Merkezi fark operatörü δ,

$$\delta f(x) = f\left(x+\frac{h}{2}\right) - f\left(x-\frac{h}{2}\right), \quad \delta f_n = f_{n+\frac{1}{2}} - f_{n-\frac{1}{2}}$$

şeklinde tanımlanır. Ayrıca

$$\delta = E^{1/2} - E^{-1/2} = \Delta E^{-1/2} = \nabla E^{1/2}$$

şeklinde tanımlanabilir.

Tanım (ρ operatörü): E kaydırma operatörü ve $x \in \mathbb{R}$ olmak üzere

$$\rho = xE \quad \Rightarrow \quad \rho f(x) = xf(x+1)$$

olarak tanımlanır. Buradan ikinci derece ρ operatörü

$$\rho^2 = xE(xE) \quad \Rightarrow \quad \rho^2 f(x) = x(x+1)f(x+2)$$

şeklinde bulunur. Ardı ardına ρ operatörünün $f(x)$ fonksiyonuna uygulanması sonucu $m \in \mathbb{N}$ olmak üzere *m.* derece ρ operatörü

$$\rho^m f(x) = x(x+1)\ldots(x+m-1)f(x+m)$$

olarak bulunur. $f(x) \equiv 1$ durumunda

$$\begin{gathered}\rho = x, \\ \rho^2 = x(x+1), \\ \vdots \\ \rho^m = x(x+1)\ldots(x+m-1)\end{gathered}$$

elde edilir. Ayrıca bu ifadelerden yararlanarak

$$\begin{gathered}x = \rho, \\ x^2 = \rho(\rho-1), \\ \vdots \\ x^m = \rho(\rho-1)\ldots(\rho+m-1)\end{gathered}$$

şeklinde eşitlikler elde edilebilir. Bu denklemler bize verilen *m.* mertebeden değişken katsayılı bir fark denkleminin çözümünde kolaylık sağlayacaktır.

ρ operatörünün özellikleri: *a* bir sabit ve $r, s \in \mathbb{N}$ olmak üzere

1. $\rho + a = a + \rho$
2. $a\rho = \rho a$
3. $\rho(a+\rho) = a\rho + \rho^2$
4. $\rho^r.\rho^s = \rho^{r+s} = \rho^s.\rho^r$

özellikleri mevcuttur.

Tanım (π operatörü): ρ ve E operatörü tanımından

$$\rho = xE = x(1+\Delta) = x + x\Delta$$

eşitliğinde $x\Delta = \pi$ operatörü olarak tanımlanır.

π operatörünün özellikleri: a bir sabit ve $r, s \in \mathbb{N}$ olmak üzere

1. $\pi + a = a + \pi$
2. $a\pi = \pi a$
3. $\pi^r \pi^s = \pi^{r+s}$

özellikleri mevcuttur.

ρ ile π arasındaki bağıntılar: $r, s, n \in \mathbb{N}$ olmak üzere

1. $\rho - \pi = x$
2. $\pi\rho - \rho\pi = \rho$
3. $\rho^r \pi^s = (\pi - r)^s \rho^r$ ve $\pi^s \rho^r = \rho^r (\pi + r)^s$
4. $f(\pi)\rho^r = \rho^r f(\pi + r)$ ve $\rho^r f(\pi) = f(\pi - r)\rho^r$
5. $\phi(\pi).\rho^n = \rho^n.\phi(n)$

bağıntıları vardır.

ρ^{-1} operatörü: E operatörü tarafından ρ'nun negatif kuvveti olan ρ^{-1} operatörü

$$\rho^{-1} = \frac{1}{x-1}$$

olarak tanımlanır. Daha sonra $\rho.\rho^{-1} = 1$ tanımını kullanarak

$$\begin{aligned}
\rho\left[\rho^{-1} f(x)\right] &= f(x) \\
xE\left[\rho^{-1} f(x)\right] &= f(x) \\
E\left[\rho^{-1} f(x)\right] &= f(x)/x \\
\rho^{-1} f(x) &= E^{-1}\left[f(x)/x\right] \\
\rho^{-1} f(x) &= (x-1)^{-1} f(x-1)
\end{aligned}$$

elde edilir. Bu son eşitlikte $f(x) = 1$ alınırsa istenilen bulunur. Bu eşitliği genellenirse

$$\rho^{-m} = 1/(x-m)(x-m+1)\ldots(x-1)$$

elde edilir.

Tanım (Faktöriyel polinomu): $x \in \mathbb{R}$ ve h adım uzunluğu olsun x'in r. faktöriyeli

$$x^{(r)} = x(x-h)\ldots(x-(r-1)h), \quad r \in \mathbb{Z}$$

şeklinde verilir. Bundan sonraki çalışmalarda genelikle $h = 1$ alınacaktır.

Faktöriyel polinomunun özellikleri:

1. $r = 0 \Rightarrow x^{(0)} = 1$

2. $r < 0 \Rightarrow x^{(r)} = \dfrac{1}{(x+h)(x+2h)\ldots(x+rh)} = \dfrac{1}{(x+rh)^{(r)}}$

   Burada $h \to 0;\quad x^{(r)} \to x^r,\quad x^{(-r)} \to x^{-r}$'dir.

3. $\Delta x^{(r)} = r x^{(r-1)} h$

4. $\Delta^n x^{(r)} = r(r-1)\ldots(r-n+1)x^{(r-n)}$

5. $x.x^{(r)} = x^{(r+1)} + r.x^{(r)}$

6. $x \in \mathbb{Z}^+$ ve $x \geq r$ için $x^{(r)} = \dfrac{x!}{(x-r)!}$

7. $x = r$ ve $h = 1$ için $r^{(r)} = r!$

şeklindedir.

Tanım (Gama fonksiyonu): Gama fonksiyonu matematikte faktöriyel fonksiyonunun karmaşık sayılar ve tam sayı olmayan reel sayılar için genellenmesi olan bir fonksiyondur. Γ simgesiyle gösterilir.

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t}\, dt$$

şeklinde tanımlanır.

Γ fonksiyonun özellikleri:

1. $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x),\quad x > 0$

2. $\Gamma(1) = 1,\quad \Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$

3. $n \in \mathbb{N}$ için $\Gamma(n+1) = n!$

4. $n \in \mathbb{N}$ için $\Gamma(-n) \to \infty$

5. $\Gamma\left(\dfrac{1}{2} + n\right) = \dfrac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2^n}\sqrt{\pi} = \dfrac{(2n-1)!!}{2^n}\sqrt{\pi}$

6. $\Gamma\left(\dfrac{1}{2} - n\right) = \dfrac{(-1)^n 2^n}{1.3.5\ldots(2n-1)}\sqrt{\pi} = \dfrac{(-1)^n 2^n}{(2n-1)!!}\sqrt{\pi}$

7. $\Gamma(nx) = (2\pi)^{(1-n)/2} n^{nx-1/2} \prod_{j=0}^{n-1} \Gamma\left(x + \dfrac{j}{n}\right)$

8. $\Gamma(x)=\dfrac{\Gamma(x+m)}{x(x+1)(x+2)\ldots(x+m-1)}$

9. $\Gamma(x)\Gamma(1-x)=\dfrac{\pi}{\sin \pi x}, \quad 0<x<1$

10. $x\notin\mathbb{Z}\ \ \Gamma(x+1)=x^{(r)}\Gamma(x-r+1)$

11. $\Gamma(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n!n^x}{x(x+1)\ldots(x+n)}=\dfrac{1}{x}\prod\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(1+1/n)^x}{1+x/n}$ (Euler tanımı)

12. $\Gamma(x)=\dfrac{e^{-\gamma x}}{x}\prod\limits_{n=1}^{\infty}(1+x/n)^{-1}e^{x/n}\ \left[\gamma=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{k}-\ln(n)\right)\right]$ (Weierstrass tanımı)

Tanım (Δ^{-1} operatörü): $n\geq n_0$ için $\Delta F_n=f_n$ olsun. Bu durumda $n\geq n_0$ için $\Delta^{-1}f_n=F_n+c$ şeklinde tanımlanan Δ^{-1} operatörüne ters fark operatörü ve F_n fonksiyonuna da f_n'nin ters farkı denir; burada c bir keyfi sabittir.

Bununla birlikte, Δ ve Δ^{-1} operatörleri arasında

$$\Delta\Delta^{-1}=I \text{ iken } \Delta^{-1}\Delta\neq I$$

ilişkisi vardır. Yani f_n için

$$\Delta^{-1}\Delta f_n=f_n+c$$
$$\Delta\Delta^{-1}f_n=f_n$$

olup c keyfi sabittir.

Uyarı: Δ^{-1} operatörü

$$\Delta^{-1}=\sum_{i=n_0}^{n-1}$$

şeklinde tanımlanabilir. Bu yüzden f_n'nin $n\geq n_0$ için ters farkı aynı zamanda bir belirli toplam olarak da ifade edilebilir ve $\Delta^{-1}f_n$ veya $\sum\limits_{i=n_0}^{n-1}f_i$ şeklinde gösterilir.

Δ^{-1} operatörünün özellikleri:

1. $\Delta^{-1}f_n=\sum\limits_{i=n_0}^{n-1}f_i+c$

2. $\Delta^{-2}f_n=\sum\limits_{m=n_0}^{n-1}\sum\limits_{i=n_0}^{m-1}f_i+c_1n+c_2$

3. $\Delta^{-1}(f_ng_n)=f_{n-1}\Delta^{-1}g_n-\Delta^{-1}\left(\Delta f_{n-1}\Delta^{-1}g_n\right)$

4. $\Delta^{-1}\left[af_n + bg_n\right] = a\Delta^{-1} f_n + b\Delta^{-1} g_n$

5. $\Delta^{-m} 0 = c_1 n^{m-1} + c_2 n^{m-2} + \ldots + c_m$

6. $\Delta^{-m} 1 = \dfrac{n^m}{m!} + c_1 n^{m-1} + c_2 n^{m-2} + \ldots + c_m$

Şimdi x sürekli değişkenin durumunu inceleyelim ve

$$\Delta F(x) = f(x) \tag{2.1}$$

denklemini ele alalım. Burada f reel değerli bilinen bir fonksiyondur. Aynı noktalar kümesinde tanımlanan $F(x)$ fonksiyonu bilinmeyen fonksiyondur. $f(x) \equiv \Delta^{-1} F(x)$ (2.1) denkleminin özel çözümünü verir. Bu çözüm

$$F(x) = f(x) + C(x)$$

şeklindedir. Burada $C(x)$, (2.1)'in çözümü olan keyfi birim periyodik fonksiyondur.

Tanım (Belirsiz Toplam): $f(x)$'in belirsiz toplamı $\sum f(x)$ olarak ifade edilir. Herhangi bir fonksiyon için belirsiz toplam f'in tanım kümesindeki tüm x'ler için

$$\Delta\left(\sum f(x)\right) = f(x)$$

olarak ifade edilir. Fark denklemlerini daha kolay çözmek için Δ^{-1} operatörü yardımıyla

$$\Delta^{-1} f(x) = \sum f(x) + C(x)$$

yazabiliriz.

Bu belirsiz toplam diferansiyel hesaplamalardaki belirsiz integralle aynı rolü oynar:

$$\frac{d}{dx}\left(\int f(x)\,dx\right) = f(x).$$

Belirsiz integral tek değildir. Örneğin $\int \cos x dx = \sin x + c$ olup burada c herhangi bir sabittir. Aynı zamanda belirsiz toplam da tek değildir. Bunu aşağıdaki örnekte görebiliriz.

Örnek: 6^x'in belirsiz toplamını bulalım.

$\Delta 6^x = 5.6^x$ olduğundan, $\Delta\left(6^x/5\right) = 6^x$ yazılabilir. Bu $6^x/5$, 6^x'in belirsiz toplamıdır. Şimdi $C(x)$, 6^x'in benzer tanım kümesinde $\Delta C(x) = 0$ olmak üzere bir fonksiyon olsun. Buradan

$$\Delta\left(\frac{6^x}{5}+C(x)\right)=\Delta\left(\frac{6^x}{5}\right)=6^x$$

olur. Bu yüzden $6^x/5+C(x)$, 6^x 'in belirsiz toplamı olur. Dahası eğer $f(x)$, 6^x 'in herhangi bir belirsiz toplamı ise

$$\Delta\left(f(x)-\frac{6^x}{5}\right)=\Delta f(x)-\Delta\frac{6^x}{5}=6^x-6^x=0$$

olur $\Delta C(x)=0$ olması durumuyla benzer $C(x)$'ler için $f(x)=6^x/5+C(x)$ olur. Benzer yol izlenirse 6^x 'in bütün belirsiz toplamları

$$\sum 6^x=\frac{6^x}{5}+C(x)$$

şeklindedir. Burada $C(x)$, $\Delta C(x)=0$ olması şartıyla 6^x 'in benzer tanım kümesindeki herhangi bir fonksiyondur.

Teorem: Eğer $F(x)$, $f(x)$'in belirsiz toplamı ise bu durumda $f(x)$'in tüm belirsiz toplamı

$$\sum f(x)=F(x)+C(x)$$

şeklindedir. Burada $C(x)$, f 'in tanım kümesindedir ve $\Delta C(x)=0$ 'dır.

Şimdi burada $C(x)$ ne tür bir fonksiyon olmalıdır? Bu sorunun cevabı $f(x)$'in tanım kümesine dayanır. Şimdi öncelikle tamsayılar kümesi üzerinde bu durumu düşünelim. Bu durumda $x=1,2,3,\ldots$ için

$$\Delta C(x)=C(x+1)-C(x)=0$$

olur. Bu yüzden $C(x)$ sabit bir fonksiyondur. Bu durumda kolayca

$$\sum 6^x=\frac{6^x}{5}+c$$

yazılabilir. Burada *c* herhangi bir sabittir. Diğer yandan *f* reel sayılar kümesinde tanımlı olması durumunda denklem

$$\Delta C(x)=C(x+1)-C(x)=0$$

olup tüm *x* reel değerleri için $C(x+1)=C(x)$ olduğu söylenebilir. Bu ise $C(x)$'in birim periyotlu periyodik fonksiyon olduğu anlamına gelir.

Teorem (Belirsiz toplam özellikleri): a sabit olmak üzere aşağıdaki ifadeler mevcuttur:

1. $\sum\left(f(x)+g(x)\right)=\sum f(x)+\sum g(x)$

2. $\sum af(x)=a\sum f(x)$

3. $\sum\left(f(x)\Delta g(x)\right)=f(x)g(x)-\sum Eg(x)\Delta f(x)$

4. $\sum\left(Ef(x)\Delta g(x)\right)=f(x)g(x)-\sum g(x)\Delta f(x).$

Teorem (Belirsiz toplamın bazı fonksiyonlara uygulanması): $\Delta C(x)=0$ ve $h=1$ için aşağıdakiler geçerlidir.

1. $\sum a^x=\frac{a^x}{a-1}+C(x), \quad (a\neq 1)$

2. $\sum \sin ax=-\frac{\cos a\left(x-\frac{1}{2}\right)}{2\sin\frac{a}{2}}+C(x), \quad (a\neq 2n\pi)$

3. $\sum \cos ax=\frac{\sin a\left(x-\frac{1}{2}\right)}{2\sin\frac{a}{2}}+C(x), \quad (a\neq 2n\pi)$

4. $\sum \log x=\log\Gamma(x)+C(x), \quad (x>0)$

5. $\sum x^{(a)}=\frac{x^{(a+1)}}{a+1}+C(x), \quad (a\neq -1)$

6. $\sum\binom{x}{a}=\binom{x}{a+1}+C(x)$

7. $\sum\binom{a+x}{x}=\binom{a+x}{x-1}+C(x)$

2.3 Fark Denklemi ve Sınıflandırılması

Bu bölümde Elaydi (2005) kaynağı yardımıyla fark denklemi tanımı ve sınıflandırılması üzerinde durulmuştur.

Tanım (Fark denklemi): x sürekli bir değişken olmak üzere genel olarak fark denklemi

$$G\left(x, f(x), f(x+h), ..., f(x+mh)\right)=0 \tag{2.2}$$

olarak tanımlanmakla birlikte $h=1$ için

$$G\big(x, f(x), f(x+1), \ldots, f(x+m)\big) = 0 \tag{2.3}$$

şeklinde tanımlanır ve buna *fonksiyonel fark denklemi* denir. $h=1$ ve $n\in\mathbb{N}$ olmak üzere x_n ayrık noktaları üzerinde tanımlı fark denklemi ise

$$F\left(n, f_n, f_{n+1}, \ldots, f_{n+m}\right) = 0 \tag{2.4}$$

olarak tanımlanır ve bu denkleme *skaler fark denklemi* de denir.

Tanım (mertebe): Bir fark denkleminde bilinmeyen fonksiyonun mevcut en büyük ve en küçük argümentlerinin farkına o denklemin *mertebesi* denir.

Tanım (lineer fark denklemi): x sürekli değişken ve $n \geq n_0$ için $p_i(x)$ ve $g(x)$ reel değerli fonksiyonlar olmak üzere ve $p_m(x) \neq 0$ olması şartıyla

$$p_0(x)\, f(x+m) + p_1(x)\, f(x+m-1) + \ldots + p_m(x)\, f(x) = g(x) \tag{2.5}$$

fark denklemine *m. mertebeden lineer fark denklemi* denir.

Ayrıca $n\in\mathbb{N}$, x_n ayrık noktaları kümesi için $p_0, p_1, p_2, \ldots, p_m$ katsayılar ve $g(n)$, $n \geq n_0$ için tanımlı reel değerli fonksiyonlar, $[n_0, \infty)$ kümesi üzerinde $p_m \neq 0$ olmak üzere

$$p_0(n)\, f_{n+m} + p_1(n)\, f_{n+m-1} + \ldots + p_m(n)\, f_n = g(n) \tag{2.6}$$

biçimindeki fark denklemine de *m. mertebeden lineer fark denklemi* denir.

(2.5) ve (2.6) denklemlerinde kaynak fonksiyonun $g(x)=0$ ve $g(n)=0$ olması durumunda (2.5) ve (2.6) denklemlerine *m. mertebeden lineer homojen fark denklemi,* $g(x)\neq 0$ ve $g(n)\neq 0$ olması durumunda ise (2.5) ve (2.6) denklemlerine *m. mertebeden lineer homojen olmayan fark denklemi* denir.

$p_i(x)$ ve $p_i(n)$ fonksiyonlarının sabit fonksiyonlar olması halinde (2.5) ve (2.6) denklemlerine *m. mertebeden sabit katsayılı fark denklemi,* $p_i(x)$ ve $p_i(n)$ fonksiyonlarından en az biri değişken içeren fonksiyon olması durumunda ise (2.5) ve (2.6) denklemlerine *m. mertebeden değişken katsayılı fark denklemi* denir.

2.4 Fark Denkleminin Çözümleri

Bu bölümde fark denkleminin çözümü ve çözümlerin hangi şartlarda geçerli olacağı Kelly ve Peterson (2001), Elaydi (2005), Bereketoğlu ve Kutay (2011), Akyol (2011) kaynakları yardımıyla verilmiştir.

Herhangi bir küme üzerinde tanımlı fark denklemini yine bu kümeler üzerindeki bir özdeşliğe indirgeyen f fonksiyonuna yani bu kümeler üzerindeki bir fark denklemini her noktada doğru yapan f fonksiyonlarına bu *fark denkleminin çözümü* denir.

Tanım (Genel ve Özel Çözüm): *m.* mertebeden (2.3) ve (2.4) fark denklemlerinin sırasıyla

$$f(x)=\varphi\big(x,C_1(x),C_2(x),\ldots,C_m(x)\big),\quad f_n=\varphi\big(n,c_1,c_2,\ldots,c_m\big)$$

şeklinde *m* tane $C_1(x),C_2(x),\ldots,C_m(x)$ birim periyodik fonksiyon ve $c_1,c_2,\ldots,c_m$ keyfi sabit içeren çözümüne *genel çözüm*, genel çözümden elde edilen çözümlere ise *özel çözüm* denir.

Tanım (Lineer bağımlı ve bağımsızlık): $f_n^1, f_n^2,\ldots f_n^r$ fonksiyonları $n\geq n_0$ için tanımlı olsunlar. Her $n\geq n_0$ için

$$c_1 f_n^1 + c_2 f_n^2 + \ldots + c_r f_n^r = 0$$

olacak biçimde hepsi birden sıfır olmayan $c_1,c_2,\ldots,c_r$ sabitleri var ise, bu durumda $\left\{f_n^1, f_n^2,\ldots f_n^r\right\}$ cümlesine $[n_0,\infty)$ üzerinde *lineer bağımlıdır* denir. Bu eşitlik $\forall n\geq n_0$ için sadece ve sadece $c_1=c_2=\ldots=c_r=0$ durumunda sağlanıyorsa, $\left\{f_n^1, f_n^2,\ldots f_n^r\right\}$ cümlesine $[n_0,\infty)$ üzerinde *lineer bağımsızdır* denir.

Tanım (Casorati[58] matrisi): $f_1(x),\ f_2(x),\ldots,\ f_m(x)$ verilen fonksiyonlar olmak üzere, Casorati matrisi[59]

[58] Felice Casorati (1835-1890) İtalyan matematikçi
[59] Diferansiyel denklemler için kullanılan Wronskian matrisi için kesikli değerler içerme şartıyla aynı işlevi görür.

$$W(x)=\begin{bmatrix} f_1(x) & f_2(x) & \cdots & f_m(x) \\ f_1(x+1) & f_2(x+1) & \cdots & f_m(x+1) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ f_1(x+m-1) & f_2(x+m-1) & \cdots & f_m(x+m-1) \end{bmatrix},$$

olarak tanımlanır. Bu matrisin determinantı

$$w(x)=\det W(x)$$

şeklinde tanımlanır ve bu determinant *Casoratyan* olarak adlandırılır. Aynı zamanda $w(x)$ ifadesi kolaylık sağlaması bakımından

$$w(x)=\det\begin{bmatrix} f_1(x) & f_2(x) & \cdots & f_m(x) \\ \Delta f_1(x) & \Delta f_2(x) & \cdots & \Delta f_m(x) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \Delta^{m-1} f_1(x) & \Delta^{m-1} f_2(x) & \cdots & \Delta^{m-1} f_m(x) \end{bmatrix}$$

olarak da ifade edilebilir.

Aynı zamanda ayrık noktalar kümesinde Casorati matrisi

$$W(n)=\begin{bmatrix} f_n^1 & f_n^2 & \cdots & f_n^m \\ f_{n+1}^1 & f_{n+1}^2 & \cdots & f_{n+1}^m \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ f_{n+m-1}^1 & f_{n+m-1}^2 & \cdots & f_{n+m-1}^m \end{bmatrix},$$

şeklinde tanımlanır. Bu matrisin determinantı

$$w(n)=\det\begin{bmatrix} f_n^1 & f_n^2 & \cdots & f_n^m \\ \Delta f_n^1 & \Delta f_n^2 & \cdots & \Delta f_n^m \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \Delta^{m-1} f_n^1 & \Delta^{m-1} f_n^2 & \cdots & \Delta^{m-1} f_n^m \end{bmatrix}$$

şeklinde ifade edilir.

Teorem: (2.6) denkleminin homojen kısmının çözümleri $f_n^1, f_n^2, \dots f_n^m$ olsun. O zaman aşağıdaki ifadeler denktir:

1. $\left\{ f_n^1, f_n^2, \dots f_n^m \right\}$ kümesi ayrık değerler için lineer bağımsızdır.
2. Bazı *n*'ler için $w(n)=0$'dır.
3. Tüm *n*'ler için $w(n)=0$'dır.

Tanım (Temel Çözüm Kümesi): *m.* mertebeden fark denkleminin homojen kısmının m lineer bağımsız çözümünün kümesine *temel çözüm kümesi* denir.

Lemma (Abel[60] lemması): $f_n^1, f_n^2, \dots f_n^m$ fonksiyonları (2.6) denkleminin homojen kısmının çözümleri ve $w(n)$ onların Casoratyanı olsun. Bu durumda $n \geq n_0$ için

$$w(n) = (-1)^{m(n-n_0)} \left(\prod_{i=n_0}^{n-1} p_m(i) \right) w(n_0)$$

dır.

Teorem: (2.6) denkleminin homojen kısmının $f_n^1, f_n^2, \dots f_n^m$ çözümlerinin bir temel çözüm kümesi oluşturması için gerek ve yeter koşul herhangi bir $n_0 \in \mathbb{N}$ sayısına karşılık $w(n_0) \neq 0$ olmasıdır.

Teorem: (2.6) *m.* mertebeden lineer fark denkleminin homojen kısmının çözümlerinin herhangi bir lineer kombinasyonu da bir çözümdür.

Tanım (Tamamlayıcı çözüm): (2.6) denkleminin temel çözüm kümesi $\{f_n^1, f_n^2, \dots f_n^m\}$ olsun. O zaman (2.6) denkleminin homojen kısmının çözümü $f_n^h = \sum_{i=1}^{m} c_i f_n^i$ 'dir. Burada c_i 'ler keyfi sabitlerdir. Bu çözüme *tamamlayıcı çözüm* de denir.

Teorem: (2.5) sabit katsayılı *m.* mertebeden lineer homojen olmayan fark denkleminin genel çözümü; homojen kısmın genel çözümü ile homojen olmayan denklemi sağlayan bir özel çözümün toplamından oluşur. Yani $f_h(x)$ homojen kısmın genel çözümü, $f_ö(x)$ homojen olmayan denklemin özel çözümü olmak üzere

$$f(x) = f_h(x) + f_ö(x)$$

şeklinde yazılır.

Tanım (Başlangıç değer problemi): *m.* mertebeden fark denkleminin bir özel çözümünü bulmak için o çözüme ilişkin

$$f_{n_0+i} = a_i, \quad 0 \leq i \leq m-1 \tag{2.7}$$

ya da

$$\Delta^i f_{n_0} = a_i, \quad 0 \leq i \leq m-1 \tag{2.8}$$

biçiminde ilk m tane ardışık değerin belirtilmesi gereklidir; burada $n_0 \in \mathbb{N}$ ve

[60] Niels Henrik Abel (5 Ağustos 1802 - 6 Nisan 1829) Norveçli matematikçi.

$a_0, a_1, \dots, a_{m-1}$ reel sabitlerdir. (2.7) ve (2.8) koşullarına *başlangıç koşulları* adı verilir. $m.$ mertebeden bir fark denklemi ve (2.7) ya da (2.8) başlangıç koşullarından meydana gelen probleme *başlangıç değer problemi* denir.

Bazı fark denklemlerinin birçok çözümü olmasına rağmen bazılarının hiçbir çözümü yoktur. Fark denklemleri sınıflandırılırken her zaman en az bir çözüm olabileceği ve hatta bazı şartlar altında yalnız ve yalnız tek çözüm olduğunu bulmak önemlidir. Bu sonuçları ifade eden teoremler varlık ve teklik teoremi olarak bilinir. Biz hem sürekli değişkenler hem de ayrık noktalar kümesi için varlık ve teklik teoremlerini ayrı ayrı inceleyeceğiz.

Teorem (ayrık noktalar kümesi için varlık ve teklik): $p_0, p_1, p_2, \dots, p_m$ katsayıları ile $g(n)$, $n \geq n_0$ için tanımlı reel değerli fonksiyonlar ve $[n_0, \infty)$ üzerinde $p_m \neq 0$ olsun. Bu durumda

$$p_0(n)\, f_{n+m} + p_1(n)\, f_{n+m-1} + \dots + p_m(n)\, f_n = g(n) \tag{2.6}$$

$$f_{n_0} = a_0, \quad f_{n_0+1} = a_1, \dots, f_{n_0+m-1} = a_{m-1} \tag{2.7}$$

başlangıç değer problemi $n \geq n_0$ için tanımlı olan bir tek f_n çözümüne sahiptir.

İspat: (2.7) koşulları yardımıyla (2.6)'dan önce $n = n_0$ için f_{n_0+m} değeri, akabinde $n = n_0 + 1$ için f_{n_0+m+1} değeri ve bu işleme benzer şekilde devam edilerek $f_{n_0+m+2}, f_{n_0+m+3}, \dots,$ değerleri hesaplanır. Buradan (2.6) ve (2.7) probleminin çözümü

$$f_{n_0}, f_{n_0+1}, \dots, f_{n_0+m-1}, f_{n_0+m}, f_{n_0+m+1}, f_{n_0+m+2}, \dots$$

şeklinde bulunur. Böylece çözümün varlığı kanıtlanmış olur. Çözümün tekliği için f_n den farklı bir f_n^k çözümü daha var olsun. Bu f_n^k çözümünün benzer şekilde (2.6) ve (2.7) yardımıyla hesaplandığı zaman her $n \geq n_0$ için f_n çözümüne özdeş olduğu görülür. O halde çözüm tektir.

Şimdi (2.5) denkleminde denklemin her yanı $p_0(x)$ fonksiyonuna bölünürse

$$f(x+m) + q_1(x)\, f(x+m-1) + \dots + q_m(x)\, f(x) = g'(x) \tag{2.9}$$

elde edilir. Bu denklemde $q_m(x) \neq 0$ olduğunu varsayalım.

(2.9) denkleminde aranan $f(x)$ fonksiyonunun $x, x+1, \ldots, x+m$ noktalarındaki değerleri bulunduğundan bu denklemin çözümü, uzunluğu m sayısından küçük olmayan aralıkta tanımlanması gerekir.

Bir x_0 sayısı verildiğini varsayalım. O zaman $[x_0, x_0+m]$ aralığına *başlangıç aralığı* denir. $[x_0, x_0+m]$ başlangıç aralığını E_{x_0} ile gösterelim.

Teorem (sürekli değişkenler kümesi için varlık ve teklik): Başlangıcı E_{x_0} aralığında tanımlanmış sürekli $\varphi(x)$ başlangıç fonksiyonunun verildiğini ve bu fonksiyonun

$$\varphi(x_0+m)+q_1(x_0)\varphi(x_0+m-1)+\ldots+q_m(x_0)\varphi(x_0)=g'(x_0) \qquad (2.10)$$

eşitliğini sağladığını varsayalım. (2.9) denklemindeki $q_1(x), q_2(x), \ldots, q_m(x)$ ve $g'(x)$ fonksiyonlarının $[x_0, X]$, $X > x_0+m$ aralığında sürekli fonksiyonlar olduklarını varsayalım. O zaman (2.9) denkleminin E_{x_0} başlangıç aralığında $\varphi(x)$ fonksiyonu ile çakışan $[x_0, X]$ aralığında (2.9) denklemini sağlayan sürekli çözümü vardır ve tektir.

İspat: (2.9) denkleminden

$$f(x+m)=-q_1(x)f(x+m-1)-\ldots-q_m(x)f(x)+g'(x) \qquad (2.11)$$

denklemini buluruz. (2.11) denklemini $x_0 \le x \le x_0+1$ aralığında ele alırsak

$$f(x+m)=-q_1(x)\varphi(x+m-1)-\ldots-q_m(x)\varphi(x)+g'(x) \qquad (2.12)$$

buluruz. (2.12) formülü (2.9) denkleminin $[x_0+m, x_0+m+1]$ aralığında sürekli olan çözümü belirler. Çözümün x_0+m noktasında sürekli olması (2.10) şartındandır.

Burada kullandığımız yöntemle (2.9) denkleminin $[x_0+m, x_0+m+k]$ aralığında sürekli çözümün bulunduğunu varsayalım. O zaman $x_0+k \le x \le x_0+k+1$ aralığında (2.11) eşitliğinin sağ yanındaki ifadede tüm fonksiyonlar sürekli fonksiyon olur. Bu yüzden $x_0+k \le x \le x_0+k+1$ aralığında (2.11) denkleminden (2.9) denkleminin $[x_0+m+k, x_0+m+k+1]$ aralığında sürekli çözümü bulunur. Her bir aralıkta (2.11) denklemi ile bulunan ve $\varphi(x)$ başlangıç fonksiyonuyla çakışan çözüm tek olarak bulunduğundan bu yöntemle bulunan çözüm tek olur.

Bu teoremin ispatında kullanılan metoda *adımlar metodu* da denir. Bu metodla verilmiş başlangıç fonksiyona nazaran (2.9) denkleminin çözümü bulunabilir.

3. SABİT KATSAYILI LİNEER FARK DENKLEMLERİ İÇİN ANALİTİK ÇÖZÜM YÖNTEMLERİ

Bu bölümde sırasıyla sürekli değişkenler kümesi ve ayrık noktalar kümesi üzerinde tanımlı

$$f(x+m)+p_1 f\left(x+m-1\right)+\ldots+p_m f\left(x\right)=g\left(x\right) \tag{3.1}$$

$$f_{n+m}+p_1 f_{n+m-1}+\ldots+p_m f_n=g\left(n\right) \tag{3.2}$$

m. mertebeden sabit katsayılı lineer fark denklemlerinin çözümleri üzerinde durulacaktır. Burada $p_m \neq 0$ ve $p_1, p_2, \ldots, p_m$ ’ler reel sabitlerdir.

3.1 Homojen Denklemler İçin Çözüm Yöntemleri

Bu bölümde

$$f(x+m)+p_1 f\left(x+m-1\right)+\ldots+p_m f\left(x\right)=0 \tag{3.3}$$

$$f_{n+m}+p_1 f_{n+m-1}+\ldots+p_m f_n=0 \tag{3.4}$$

m. mertebe sabit katsayılı homojen fark denkleminin çözüm yöntemleri Levy ve Lessman (1961), Kelly ve Peterson (2001) kaynakları yardımıyla verilecektir.

Şimdi (3.3) ve (3.4) denklemlerinin çözüm yöntemlerinde karşımıza çıktığında bize kolaylık sağlaması için birinci mertebeden sabit katsayılı homojen

$$f\left(x+1\right)-p_1 f\left(x\right)=0 \tag{3.5}$$

$$f_{n+1}-p_1 f_n=0 \tag{3.6}$$

denklemlerini ele alalım. (3.5) denklemini çözmek için denklemin her iki tarafını p_1^{x+1} ile böldüğümüzde

$$\frac{f\left(x+1\right)}{p_1^{x+1}}-\frac{f\left(x\right)}{p_1^{x}}=0$$

elde edilir ki bu denklemin çözümü

$$\Delta\left(\frac{f(x)}{p_1^x}\right)=0 \quad \Rightarrow \quad f(x)=p_1^x C(x) \tag{3.7}$$

olup burada $C(x)$ birim periyodik fonksiyondur. Ayrık noktalar kümesinde tanımlı (3.6) denkleminin çözümü için denklemin her iki tarafını p_1^{n+1} ile böldüğümüzde

$$\frac{f_{n+1}}{p_1^{n+1}}-\frac{f_n}{p_1^n}=0$$

elde edilir ki bu denklemin çözümü

$$\Delta\left(\frac{f_n}{p_1^n}\right)=0 \quad \Rightarrow \quad f_n=p_1^n c \tag{3.8}$$

olup burada *c* keyfi sabittir.

3.1.1 Karakteristik denklem yardımıyla çözüm

(3.4) denkleminin genel çözümü lineer bağımsız *m* tane çözümün bulunmasına indirgenebilir. Bunun için (3.4) denkleminin λ^m şeklinde bir çözümü aranırsa bu çözüm (3.4)'ü sağladığından

$$\lambda^m+p_1\lambda^{m-1}+\ldots+p_m=0 \tag{3.9}$$

denklemi bulunur. Bu denkleme *karakteristik denklem* ve onun köklerine de *karakteristik kökler* adı verilir. (3.4) denkleminin çözümleri karakteristik köklere bağlı olarak hesaplandıkları için aşağıdaki durumların incelenmesi yeterlidir.

Durum 1: (3.9) karakteristik denkleminin *m* tane $\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_m$ kökü reel ve birbirinden farklı ise, bu durumda $\left\{\lambda_1^n,\lambda_2^n,\ldots,\lambda_m^n\right\}$ cümlesi (3.4) denkleminin bir temel çözüm kümesi olup (3.4)'ün genel çözümü

$$f_n=\sum_{i=1}^{m}c_i\lambda_i^n$$

dir. Burada $c_1,c_2,\ldots,c_m$ keyfi sabitlerdir.

Durum 2: (3.9) karakteristik denkleminin $\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_r$ kökleri reel ve sırası ile $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_r$ katlı olsunlar; burada $\sum_{i=1}^{r}\alpha_i=m$'dir. Bu durumda (3.4) denklemi E operatörü cinsinden

$$(E-\lambda_1)^{\alpha_1}(E-\lambda_2)^{\alpha_2}\ldots(E-\lambda_r)^{\alpha_r}f_n=0 \tag{3.10}$$

şeklinde yazılabilir. Herhangi bir $i \in [1, r]$ için $(E - \lambda_i)^{\alpha_i} f_n = 0$ denkleminin temel çözüm kümesi

$$\varphi_i = \left\{ \lambda_i^n, n\lambda_i^n, \ldots, n^{p_i - 1}\lambda_i^n \right\}$$

dir. Dolayısıyla (3.10)'un temel çözüm kümesi $\varphi = \bigcup_{i=1}^{r} \varphi_i$ olup genel çözüm

$$f_n = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i^n \left(c_i^0 + nc_i^1 + n^2 c_i^2 + \ldots + n^{\alpha_{i-1}} c_i^{\alpha_{i-1}} \right) \tag{3.11}$$

olur.

Durum 3: Modülü r ve açısı θ $(-\pi < \theta < \pi)$ olan her bir farklı eşlenik kompleks kök çifti için çözüm iki tane keyfi sabit içeren $c_1 r^n \cos(n\theta + c_2)$'dir. Burada c_1 ve c_2'ler keyfi sabitlerdir.

Durum 4: (3.9) karakteristik denkleminin bir $\lambda = \alpha + i\beta$ kompleks kökü $(2p \le m)$ şartıyla p katlı olsun. Bu durumda (3.4)'ün $2p$ tane keyfi sabit içeren reel değerli bağımsız çözümü

$$r^n \left[c_1 \cos n\theta + c_2 \sin n\theta + \; n\left(c_3 \cos n\theta + c_4 \sin n\theta \right) + \ldots + n^{p-1} \left(c_{2p-1} \cos n\theta + c_{2p} \sin n\theta \right) \right]$$

şeklindedir.

Örnek: $f_{n+3} - 7 f_{n+2} + 16 f_{n+1} - 12 f_n = 0$ denklemini çözünüz.

Denklemin karakteristik denklemi

$$\lambda^3 - 7\lambda^2 + 16\lambda - 12 = 0$$

ya da düzenlenirse

$$(\lambda - 2)^2 (\lambda - 3) = 0$$

olarak bulunur. Bu denklemin kökleri $\lambda_1 = 2,\ \lambda_2 = 2,\ \lambda_3 = 3$ olup bir tane farklı ve iki tane katlı reel kökü bulunmaktadır. Bu durumda çözüm

$$f_n = c_1 2^n + c_2 n 2^n + c_3 3^n$$

olarak bulunur. Burada c_1, c_2, c_3'ler keyfi sabitlerdir.

Örnek: $f_{n+2} + 4 f_n = 0$ denklemini çözünüz.

Bu denklemin karakteristik denklemi $\lambda^2 + 4 = 0$ olup karakteristik kökleri $\lambda_1 = 2i$, $\lambda_2 = 2i$ olarak bulunur. O halde $a = 0, b = 2$ olup buradan $r = \sqrt{a^2 + b^2}$

formülünden $r=2$ olarak bulunur. Buradan $\cos\theta = a/r$ ve $\sin\theta = b/r$ formüllerinden $\theta = \pi/2$ olur. Böylece çözüm

$$f_n = c_1 2^n \cos\frac{n\pi}{2} + c_2 2^n \sin\frac{n\pi}{2}$$

olur.

3.1.2 *E* operatörü yardımıyla çözüm

E operatörü yardımıyla

$$f(x+m) + p_1 f(x+m-1) + \ldots + p_m f(x) = 0$$

denklemi

$$\begin{aligned} \left(E^m + p_1 E^{m-1} + \ldots + p_m\right) f(x) = 0 \\ \left(E-\lambda_1\right)^{\alpha_1} \ldots \left(E-\lambda_r\right)^{\alpha_r} f(x) = 0 \end{aligned} \tag{3.12}$$

formunda yazılabilir. Burada $\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_r = m$ 'dir. Ayrıca $p_m \neq 0$ olduğu için herbir karakteristik kök sıfırdan farklı olduğuna dikkat edelim. Şimdi

$$\left(E-\lambda_1\right)^{\alpha_1} f(x) = 0 \tag{3.13}$$

denklemini çözelim:

$\alpha_1 = 1$ ise $f(x+1) = \lambda_1 f(x)$ şeklinde (3.5) benzeri birinci mertebeden denklem elde edilir ki bu denklemin çözümü (3.7) şeklinde bulunur. Yani $f(x) = \lambda_1^x C(x)$ olur.

$\alpha_1 > 1$ iken $v(x) = 1, x, x^2, \ldots, x^{\alpha_1 - 1}$ olmak üzere $f(x) = \lambda_1^x v(x)$ ifadesi (3.13) denklemini sağlar. Yani;

$$\begin{aligned} \left(E-\lambda_1\right)^{\alpha_1} \lambda_1^x v(x) &= \sum_{i=0}^{\alpha_1} \binom{\alpha_1}{i} \left(-\lambda_1\right)^{\alpha_1 - i} E^i \lambda_1^x v(x) = \sum_{i=0}^{\alpha_1} \binom{\alpha_1}{i} \left(-\lambda_1\right)^{\alpha_1 - i} \lambda_1^{x+i} E^i v(x) \\ &= \lambda_1^{\alpha_1 + x} \sum_{i=0}^{\alpha_1} \binom{\alpha_1}{i} (-1)^{\alpha_1 - i} E^i v(x) = \lambda_1^{\alpha_1 + x} \left(E-1\right)^{\alpha_1} v(x) \\ &= \lambda_1^{\alpha_1 + x} \Delta^{\alpha_1} v(x) = 0. \end{aligned}$$

Sonuç olarak α katlı bir denklemin temel çözüm kümesi λ, α katlı kök olmak üzere $\left\{\lambda^x, x\lambda^x, x^2\lambda^x, \ldots, x^{\alpha-1}\lambda^x\right\}$ şeklindedir.

Teorem: (3.12) fark denkleminin sırasıyla $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$ adet $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r$ karakteristik kökü olduğunu varsayalım. Bu durumda (3.12) fark denklemi m tane lineer bağımsız $\lambda_1^x, \ldots, x^{\alpha_1 - 1}\lambda_1^x, \lambda_2^x, \ldots, x^{\alpha_2 - 1}\lambda_2^x, \ldots, \lambda_r^x, \ldots, x^{\alpha_r - 1}\lambda_r^x$ çözüme sahiptir.

Örnek: $f_{n+3}-8f_{n+2}+21f_{n+1}-18f_n=0$ denklemini $f_0=1,\quad f_1=0,\quad f_2=1$ şartlarında çözünüz.

Bu denklem E operatörü yardımıyla

$$\left(E^3-8E^2+21E-18\right)f_n=0$$

formunda yazılabilir. Daha sonra bulunan bu denklem çarpanlara ayrılmış biçimde yazılır:

$$(E-3)^2(E-2)f_n=0.$$

Buradan

$$(E-3)^2 f_n=0 \quad\Rightarrow\quad f_n=(an+b)3^n$$
$$(E-2)f_n=0 \quad\Rightarrow\quad f_n=c2^n$$

şeklinde iki ayrı çözüm elde edilmiş olur ve bu iki çözümün toplamı olan

$$f_n=(an+b)3^n+c2^n$$

ifadesi soruda verilen denklemi sağlar. Başlangıç şartlarından yararlanılarak

$$f_n=\left(\frac{7n}{3}-9\right)3^n+2^n.10$$

çözümü elde edilir.

Örnek: $f(x+2)-7f(x+1)+10f(x)=0$ denklemini çözelim.

Bu denklem E operatörü yardımıyla

$$\left(E^2-7E+10\right)f(x)=0$$
$$(E-2)(E-5)f(x)=0$$

formunda yazılabilir. Bu denklemin çözümü ise

$$f(x)=C(x)2^x+D(x)5^x$$

olarak bulunur. Burada $C(x)$ ve $D(x)$ birim periyotlu periyodik fonksiyonlardır.

3.2 Homojen Olmayan Denklemler İçin Özel Çözüm Bulma

Bundan önceki çalışmalarımızda homojen fark denklemlerinin çözüm yöntemleri üzerinde duruldu. Bu bölümde ise denklemin homojen olmamasını gerektiren kaynak fonksiyonunun yapısına göre değişen yöntemleri Levy ve Lessman (1961), Spiegel (1971) kaynakları yardımıyla verip ve denklemin genel çözümleri araştırılacaktır.

Şimdi bu durumu birinci mertebe homojen olmayan denklemler için yani

$$f(x+1)+p_1 f(x)=g(x) \tag{3.14}$$

$$f_{n+1}+p_1 f_n = g(n) \tag{3.15}$$

denklemleri için çözümleri araştıralım. (3.14) denklemini çözmek için her iki tarafı p_1^{x+1} ile bölünürse

$$\frac{f(x+1)}{p_1^{x+1}}+\frac{f(x)}{p_1^{x}}=\frac{g(x)}{p_1^{x+1}}$$

olup fark ve ters fark tanımından

$$\Delta\left(\frac{f(x)}{p_1^{x}}\right)=\frac{g(x)}{p_1^{x+1}} \;\Rightarrow\; f(x)=p_1^{x}\sum\frac{g(x)}{p_1^{x+1}}+p_1^{x}C(x) \tag{3.16}$$

elde edilir. Burada $C(x)$ birim periyodik fonksiyondur. Şimdi (3.15) denklemini ele alalım bu denklemin çözümü için denklemin her iki tarafı p_1^{n+1} ile bölünürse

$$\frac{f_{n+1}}{p_1^{n+1}}+\frac{f_n}{p_1^{n}}=\frac{g(n)}{p_1^{n+1}}$$

olup fark ve ters fark tanımından

$$\Delta\left(\frac{f_n}{p_1^{n}}\right)=\frac{g(n)}{p_1^{n+1}} \;\Rightarrow\; f_n=p_1^{n}\sum_{i=1}^{n-1}\frac{g(i)}{p_1^{i+1}}+p_1^{n}c \tag{3.17}$$

olup burada c keyfi sabittir.

Şimdi

$$f_{n+1}-f_n=g_n$$

denklemini ele alalım. Bu denklemin çözümü $f_n=c+G(n)$ şeklindeyse o zaman $G(n)=\sum_{1}^{n-1}g_n$ olup c keyfi bir sabittir, bu durumda x sürekli değişkeni için

$$f(x+1)-f(x)=g(x)$$

şeklindeki denkleminin çözümü

$$f(x)=C(x)+G(x)$$

ile verilir, burada $C(x)$ keyfi birim periyodik fonksiyondur.

Ayrık değişken n yerine sürekli bağımsız değişken x durumu özel inceleme gerektirir. Ayrık değişken n durumunda toplam olarak kapalı formda ifade edilebilir iken bu yöntem ayrık değişken x durumunda uygulanamaz. x sadece tamsayı değerleri değil de her değer alabildiğinden birim miktarlar kadar arttırıldığında toplamın üst limiti olarak her zaman $x-1$'i sağlayan toplamın sabit alt limiti yoktur. Böylece

$$f(x+1)-f(x)=x$$

gibi bir denklemde çözümü hemen n durumuna benzer şekilde

$$f(x)=x(x-1)/2+C$$

olarak C birim periyodik olsa bile yazamayız. Bunun sebebi $G(x)=\sum_{1}^{x-1} g(x)$ şeklinde yazılamamasıdır. Ancak ilk bakışta iki durum çok benzer görülebilir. Bu durumda örneğin, izin verildiği ölçüde önceden uygulanan işlemi izleyebiliriz

$$f(x+1)-f(x)=x=[\![x]\!]+k$$

burada $[\![x]\!]$, x'in tam kısmı ve k ise $0\le k\le 1$ kesirli bölümüdür. Bu durumda

$$\begin{aligned} f(x)-f(x-1)&=x-1=[\![x]\!]-1+k \\ &\vdots \\ f(1+k)-f(k)&=k=0+k \end{aligned}$$

denklemleri elde edilir. Bu denklemler alt alta toplanırsa

$$\begin{aligned} f(x+1)-f(k)&=[\![x]\!]\left([\![x]\!]+1\right)/2+\left([\![x]\!]+1\right)k \\ &=(x-k)(x+1-k)/2+(x+1-k)k \\ &=x(x+1)/2+k/2-k^2/2 \\ &=\tfrac{1}{2}\left\{x(x+1)-k(k-1)\right\} \end{aligned}$$

elde edilir. $f(k)$, k'nın keyfi bir fonksiyonu olduğu zaman,

$$f(x+1)=x(x+1)/2+C(k)$$

yazabiliriz. Burada $C(k)$, k'nın keyfi bir fonksiyonudur. Bu yüzden

$$f(x)=x(x-1)/2+C(x)$$

keyfi sabit yerine x'in birim periyodiği olarak yazılabilir. Aslında, doğal olarak bu örnek sadece

$$f(x+1)-f(x)=P(x)$$

için bulduğumuz çözümün özel durumudur. Burada $P(x)$, x'in polinomları ise denklemin çözümleri Bernoulli fonksiyonları[61] cinsinden ifade edilir.

[61] $B_r(t)=\sum_{i=0}^{r}\binom{r}{i}B_i x^{r-i}$ ya da $B_r(x+1)-B_r(x)=r\,x^{r-1}$ şeklinde ifade edilir.

Örnek: $f(x+1)-f(x)=e^x$ denklemini çözelim.

$$\sum_{1}^{n-1} e^n = \left(e^n - e\right)\big/\left(e-1\right)$$

olduğundan çözüm

$$f(x)=B(x)+\left(e^x-e\right)\big/\left(e-1\right)=C(x)+e^x\big/\left(e-1\right)$$

burada $C(x)$ birim periyodiktir.

3.2.1 Belirsiz katsayılar yöntemi

Belirsiz katsayılar metodu için

$$f(x+m)+p_1 f(x+m-1)+\ldots+p_m f(x)=g(x) \tag{3.1}$$

fonksiyonel denklemini ele alalım. Bu şekildeki bir denklemin özel çözümü denklemdeki $g(x)$ kaynak fonksiyonu türünden bir deneme fonksiyonu yardımıyla belirlenir. Yani a ve λ herhangi bir sabit ve $k \in \mathbb{N}$ olmak üzere $g(x)$'in λ^x, $\sin ax$, $\cos ax$ ve x^k fonksiyonlarından biri ya da bu fonksiyonların lineer bir kombinasyonu olduğunda bu yöntem kullanılır. Bu yöntemde amaç $g(x)$ kaynak fonksiyonuna göre deneme fonksiyonunu seçmektir. Seçilen bu aday çözümler homojen kısımdaki lineer bağımsız çözümler ile karşılaştırılır. Benzerlik varsa benzerlik bozulana kadar aday çözüm x ile çarpılır. Böylece özel çözüm ile homojen kısmın çözümleri lineer bağımsız olur. Bunun gibi bazı basit $g(x)$ fonksiyonlarına karşılık kullanılacak deneme çözümleri a, b, ve $A, A_0, A_1, \ldots$'ler sabit olmak üzere Tablo 3.1'de verilmiştir.

Tablo 3.1. $g(x)$ fonksiyonuna göre alınacak deneme çözümleri

$g(x)$ fonksiyonu	Deneme çözümleri
x^k	$A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + \ldots + A_k x^k$
$x^k \lambda^x$	$\lambda^x \left(A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + \ldots + A_k x^k\right)$
λ^x	$A_0 \lambda^x$
$\sin ax$ ya da $\cos ax$	$A_0 \cos ax + A_1 \sin ax$
$\lambda^x P(x)$, $P(x)$ k.dereceden bir polinom	$\lambda^x \left(A_0 x^k + A_1 x^{k-1} + \ldots + A_k\right)$
$\lambda^x \sin ax$ ya da $\lambda^x \cos ax$	$\lambda^x \left(A_0 \cos ax + A_1 \sin ax\right)$

Örnek: $f_{n+2}-6f_{n+1}+8f_n=3n^2+2-5.3^n$ denklemini çözelim.

Denklemin homojen kısmının karakteristik denklemi

$$\lambda^2-6\lambda+8=0$$

olarak bulunur ve bu denklem iki tane farklı reel köke sahip iki sabit içerir o halde denklemin homojen kısmının çözümü

$$f_n^h=c_1 2^n+c_2 4^n$$

olarak bulunur. Belirsiz katsayılar tablosundan bu denklemin sağında kalan fonksiyonun

$$f_n^{ö}=A_1 n^2+A_2 n+A_3+A_4 3^n$$

şeklinde olacağı görülür. Bu ifadeyi çözüm kabul ederek yukarıdaki denklemde yerine yazalım.

$$f_{n+2}-6f_{n+1}+8f_n=3A_1 n^2+\left(3A_2-8A_1\right)n+3A_3-4A_2-2A_1-A_4 3^n$$

elde edilen bu denklemin sağ tarafını alıp asıl denklemde kaynak fonksiyona eşitleyelim.

$$3A_1 n^2+\left(3A_2-8A_1\right)n+3A_3-4A_2-2A_1-A_4 3^n=3n^2+2-5.3^n$$

eşitliğin sağlanabilmesi için katsayıların eşit olması gerekmektedir. Yani

$$3A_1=3, \qquad 3A_2-8_1=0, \qquad 3A_3-4A_2-2A_1=2, \qquad A_4=5$$
$$A_1=1, \qquad A_2=8/3 \qquad A_3=44/9$$

elde edilir. Bu katsayılar yardımıyla

$$f_n^{ö}=n^2+\frac{8}{3}n+\frac{44}{9}+5.3^n$$

özel çözüm bulunur. Bu durumda denklemimizin çözümü

$$f_n=c_1 2^n+c_2 4^n+n^2+\frac{8}{3}n+\frac{44}{9}+5.3^n$$

olarak bulunur.

3.2.2 Ters operatörler yöntemi

$$f(x+m)+p_1(x)\,f(x+m-1)+\ldots+p_m(x)\,f(x)=g(x) \tag{3.1}$$

denklemini E operatörü yardımıyla

$$\left(E-\lambda_1\right)^{\alpha_1}\left(E-\lambda_2\right)^{\alpha_2}\ldots\left(E-\lambda_k\right)^{\alpha_k}\ f(x)=g(x)$$

şeklinde yazabiliriz. $f(x)$'in sol tarafındaki operatör ifadesine $L(E)$ diyelim. Bu durumda denklemimiz

$$L(E)f(x)=g(x)$$

şekline dönüşür. Burada $f(x)$'i yalnız bırakmak için her iki tarafı $L(E)$'nin ters operatörü olarak tanımlanan $1/L(E)$ ile çarpalım ve

$$\frac{1}{L(E)}g(x)=L^{-1}(E)g(x)=f_{ö}(x)$$

şeklinde tanımlayalım. Şimdi $g(x)$ fonksiyonunun türüne göre çözümlerin nasıl bulunacağını inceleyelim:

Durum 1. λ sabit olmak üzere $g(x)=\lambda^x$ biçiminde ise

$$\frac{1}{L(E)}\lambda^x=\frac{\lambda^x}{L(\lambda)},\ L(\lambda)\neq 0$$

olarak ifade edilir.

Durum 2. λ sabit ve $h(x)$ herhangi bir fonksiyon olmak üzere $g(x)=\lambda^x h(x)$ biçiminde ise

$$\frac{1}{L(E)}\lambda^x h(x)=\lambda^x\frac{1}{L(\lambda E)}h(x),\ L(\lambda E)\neq 0$$

olur.

Durum 3. $P(x)$, q.dereceden bir polinom olmak üzere $g(x)=P(x)$ biçiminde ise $A_0, A_1, \ldots, A_q$ sabitler olmak üzere

$$\frac{1}{L(E)}P(x)=\frac{1}{L(1+\Delta)}P(x)=\left(A_0+A_1\Delta+\ldots+A_q\Delta^q+\ldots\right)P(x)$$

dir. Burada $\Delta^{q+1}P(x)$ terimi ve bu terimden sonrası $P(x)$ polinomu q. dereceden olduğundan sıfır olur.

Not: a sabit olmak üzere $g(x)$, $\sin ax$ ve $\cos ax$ biçiminde ise

$$\cos ax=\left(e^{iax}+e^{-iax}\right)/2,\ \ \sin ax=\left(e^{iax}-e^{-iax}\right)/2i$$

yazılıp Durum 1 uygulanabilir.

Sonuç: $\frac{1}{L(E)}\lambda^x P(x) = \lambda^x \frac{1}{L(\lambda E)} P(x) = \lambda^x \frac{1}{L(\lambda + \lambda\Delta)} P(x)$

$$= \lambda^x \left[\frac{1}{L(\lambda)} + A_1\Delta + \ldots + A_q\Delta^q + \ldots \right] P(x)$$

Sonuç: $L(\lambda)=0$ ise $L(E)=(E-\lambda)^k F(E)$ ve $F(\lambda)\neq 0$ olsun. Bu durumda

$$\frac{1}{L(E)}\lambda^x = \frac{\lambda^{x-k}x^k}{F(\lambda)k!}$$

yazılabilir.

Örnek: $f_{n+2} - 2f_{n+1} + 4f_n = 2.3^n - 4.7^n$ denklemini çözelim.

Bu denklemi E operatörü yardımıyla

$$\left(E^2 - 2E + 4\right) f_n = 2.3^n - 4.7^n$$

şeklinde yazabiliriz. Bu durumda

$$f_n^{ö} = \frac{1}{E^2 - 2E + 4}\left(2.3^n - 4.7^n\right) = 2.\frac{1}{E^2 - 2E + 4}3^n - 4.\frac{1}{E^2 - 2E + 4}7^n$$

$$= 2.\frac{3^n}{3^2 - 2.3 + 4} - 4.\frac{7^n}{7^2 - 2.7 + 4} = \frac{2}{7}.3^n - \frac{4}{39}.7^n$$

denklemin özel çözümünü bulmuş oluruz. Homojen kısmın çözümü için denklemin sol tarafının karakteristik kökleri $\lambda_1 = 1 + \sqrt{3}i$ ve $\lambda_2 = 1 - \sqrt{3}i$ olup $r = 2$ ve $\theta = \pi/3$ olarak bulunur ve homojen kısmın çözümü

$$f_n^h = 2^n \left(c_1 \cos\frac{n\pi}{3} + c_2 \sin\frac{n\pi}{3} \right)$$

elde edilir. O halde genel çözüm

$$f_n = 2^n \left(c_1 \cos\frac{n\pi}{3} + c_2 \sin\frac{n\pi}{3} \right) + \frac{2}{7}3^n - \frac{4}{39}7^n$$

olarak bulunur.

Örnek: $f(x+2) - 4f(x) = x^2 - 1$ denklemini çözelim.

Denklem E operatörü yardımıyla

$$\left(E^2 - 4\right) f(x) = x^2 - 1$$

şeklinde yazılabilir. Denklemin homojen kısmının çözümü

$$f_h(x) = C(x)2^x + D(x)(-2)^x$$

dir. Şimdi Ters operatörler yöntemiyle özel çözümü bulalım

$$\begin{aligned}
f_ö(x) &= \frac{1}{E^2-4}\left(x^2-1\right) = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{E-2}-\frac{1}{E+2}\right)\left(x^2-1\right) \\
&= \frac{1}{4}\left[-\frac{1}{1-\Delta}-\frac{1}{3(1+\Delta/3)}\right]\left(x^2-1\right) \\
&= \frac{1}{4}\left[-1-\Delta-\Delta^2-\ldots-\frac{1}{3}+\frac{\Delta}{9}-\frac{\Delta^2}{27}+\ldots\right]\left(x^2-1\right) \\
&= \frac{1}{4}\left[-\frac{4}{3}-\frac{8}{9}\Delta-\frac{28}{27}\Delta^2+\ldots\right]\left(x^2-1\right) \\
&= \frac{1}{4}\left[-\frac{4}{3}\left(x^2-1\right)-\frac{8}{9}(2x+1)-\frac{56}{27}\right] \\
&= -\frac{x^2}{3}-\frac{4x}{9}-\frac{11}{27}
\end{aligned}$$

O halde genel çözüm

$$f(x) = C(x).2^x + D(x).(-2)^x - \frac{x^2}{3}-\frac{4x}{9}-\frac{11}{27}$$

olarak bulunur. Burada $C(x)$ ve $D(x)$ birim periyodik fonksiyonlardır.

3.2.3 Parametrelerin değişimi metodu

Parametrelerin değişimi metodu (3.1) denklemini çözen genel bir yöntemdir. Eğer varsaydığımız (3.3) denkleminin m lineer bağımsız çözümleri bilinirse o halde bu metod (3.1) denkleminin terimleri m tane belirsiz toplam olan tüm çözümlerini verir. Burada biz genel yöntemin temsilcisi olduğundan $m=2$ için hesaplama yapacağız.

(3.3) denkleminde $m=2$ için iki lineer bağımsız çözümü u_1 ve u_2 olsun. Bu durumda $m=2$ için çözüm

$$f(x) = a_1(x)u_1(x) + a_2(x)u_2(x)$$

şeklinde olur. Burada $a_1(x)$ ve $a_2(x)$ tespit edilecek fonksiyonlardır. O zaman

$$\begin{aligned}
f(x+1) &= a_1(x+1)u_1(x+1) + a_2(x+1)u_2(x+1) \\
&= a_1(x)u_1(x+1) + a_2(x)u_2(x+1) + \Delta a_1(x)u_1(x+1) + \Delta a_2(x)u_2(x+1)
\end{aligned}$$

yazılabilir. Bu ifadede üçüncü ve dördüncü terimler elenecek şekilde $a_1(x)$ ve $a_2(x)$'leri seçeriz. Yani

$$u_1(x+1)\Delta a_1(x)+u_2(x+1)\Delta a_2(x)=0 \tag{3.18}$$

dır. Bir sonraki

$$\begin{aligned} f(x+2) &= a_1(x+1)u_1(x+2)+a_2(x+1)u_2(x+2) \\ &= a_1(x)u_1(x+2)+a_2(x)u_2(x+2)+\Delta a_1(x)u_1(x+2)+\Delta a_2(x)u_2(x+2) \end{aligned}$$

olarak elde edilir. Şimdi (3.3) denkleminde $m=2$ için bulunan eşitlikler yerine konulursa

$$\begin{aligned} f(x+2)+p_1(x)f(x+1)+p_2(x)f(x) = a_1(x) \\ \left[u_1(x+2)+p_1(x)u_1(x+1)+p_2(x)u_1(x)\right]+a_2(x) \\ \left[u_2(x+2)+p_1(x)u_2(x+1)+p_2(x)u_2(x)\right]+ \\ \left[u_1(x+2)\Delta a_1(x)+u_2(x+2)\Delta a_2(x)\right] \end{aligned}$$

elde edilir. u_1 ve u_2 (3.3) denklemini sağladığından ilk iki parantez içindeki terim sıfır olur. O halde

$$u_1(x+2)\Delta a_1(x)+u_2(x+2)\Delta a_2(x)=g(x) \tag{3.19}$$

olursa $f(x)$ (3.1) denklemini sağlar.

Özetle $\Delta a_1(x)$ ve $\Delta a_2(x)$, (3.18) ve (3.19) denklemlerini sağlarsa (3.1)'in $m=2$ için çözümü $f(x)=a_1(x)u_1(x)+a_2(x)u_2(x)$ olur. Katsayılar matrisi $W(x+1)$'in determinantı sıfırdan farklı olduğundan bu lineer denklem sisteminin tek çözümü vardır.

Şimdi *m.* mertebeden denklemin çözümünü aşağıdaki teoremle ifade edelim.

Teorem: (3.3) denkleminin lineer bağımsız çözümleri $f_1(x), f_2(x),\ldots, f_m(x)$ olsun. O halde

$$f(x)=a_1(x)f_1(x)+\ldots+a_m(x)f_m(x)$$

(3.1) denkleminin bir çözümüdür. $a_1,a_2,\ldots,a_m$'ler

$$W(x+1)\begin{bmatrix}\Delta a_1(x)\\ \vdots \\ \Delta a_m(x)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ \vdots \\ g(x)\end{bmatrix}$$

matris denklemini sağlar. Burada

$$W(x+1)=\begin{bmatrix} f_1(x+1) & f_2(x+1) & \cdots & f_m(x+1) \\ f_1(x+2) & f_2(x+2) & \cdots & f_m(x+2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_1(x+m) & f_2(x+m) & \cdots & f_m(x+m) \end{bmatrix}$$

dir. Bu sistemden $\Delta a_1, \Delta a_2, \ldots, \Delta a_m$ ’ler bulunur ve daha sonra bunların sırası ile ters farkı alınarak $a_1, a_2, \ldots, a_m$ ’ler elde edilir.

Örnek: $f(x+2)-7f(x+1)+6f(x)=x$ denkleminin parametrelerin değişimi metodunu kullanarak tüm çözümlerini bulalım.

Bu denklemin homojen kısmının çözümleri $u_1=1$ ve $u_2=6^x$ dir. Bu çözümler denklem (3.18) ve (3.19) de yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} \Delta a_1(x)+\Delta a_2(x)6^{x+1} &= 0 \\ \Delta a_1(x)+\Delta a_2(x)6^{x+2} &= x \end{aligned}$$

elde edilir. Buradan bu sistem çözülürse

$$\Delta a_1(x)=-\frac{x}{5} \text{ ve } \Delta a_2(x)=\frac{x}{30}6^{-x}$$

bunların ters farkları alınırsa sırasıyla

$$a_1(x)=\sum\left(-\frac{x}{5}\right)+C(x)=-\frac{1}{5}\frac{x^{(2)}}{2}+C(x)=-\frac{x(x-1)}{10}+C(x),$$

$$\begin{aligned} a_2(x) &= \frac{1}{30}\sum x\left(\frac{1}{6}\right)^x+D(x)=\frac{1}{30}\left[x\left(-\frac{6}{5}\right)\left(\frac{1}{6}\right)^x-\sum\left(-\frac{6}{5}\right)\left(\frac{1}{6}\right)^{x+1}\right]+D(x) \\ &= \frac{1}{30}\left[-\frac{6}{5}x\left(\frac{1}{6}\right)^x+\left(\frac{6}{5}\right)\frac{1}{6}\left(-\frac{6}{5}\right)\left(\frac{1}{6}\right)^x\right]+D(x) \\ &= -\frac{x}{25}\left(\frac{1}{6}\right)^x-\frac{1}{125}\left(\frac{1}{6}\right)^x+D(x) \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece çözüm

$$\begin{aligned} f(x) &= a_1(x)(1)+a_2(x)6^x=-\frac{x(x-1)}{10}+C(x)-\frac{x}{25}-\frac{1}{125}+D(x)6^x \\ &= C(x)+D(x)6^x-\frac{x^2}{10}+\frac{3x}{50}-\frac{1}{125}=F(x)+D(x)6^x-\frac{x^2}{10}+\frac{3x}{50} \end{aligned}$$

şeklinde bulunur.

Şimdi bu yöntemi ayrık noktalar kümesi üzerinde düşünelim. Yöntemde ilk olarak m. mertebeden lineer sabit katsayılı homojen olmayan

$$L(E)\,f_n = g(n) \tag{3.20}$$

denklemini ele alalım.

$$L(E)\,f_n = 0 \tag{3.21}$$

denklemi (3.20) denkleminin homojen kısmı olup genel çözümü

$$f_n^h = c_1u_1 + c_2u_2 + \ldots + c_mu_m \tag{3.22}$$

şeklindedir. Bu ifadede $c_1, c_2, \ldots, c_m$ keyfi sabitlerini (3.22) denklemini sağlayan ve n'in bir fonksiyonu olan $K_1, K_2, \ldots, K_m$ ile yer değiştirelim. O halde (3.22) denklemi

$$f_n^h = K_1u_1 + K_2u_2 + \ldots + K_mu_m \tag{3.23}$$

şeklinde olur. (3.23) denklemi (3.20)'nin çözümü olduğundan bunun yanında $m-1$ tane ek şart konulabilir. O zaman $K_1, K_2, \ldots, K_m$ fonksiyonlarının bulunması için m tane şart almış oluruz. Ayrıca $m-1$ tane almamızdaki sebep mümkün olduğunca $\Delta f_n, \Delta^2 f_n, \ldots$'leri kolaylaştırmak içindir. Takip edilen bu yollarla

$$\begin{aligned}
u_1\Delta K_1 + \quad u_2\Delta K_2 + \ldots + \quad u_m\Delta K_m &= 0 \\
(\Delta u_1)\Delta K_1 + (\Delta u_2)\Delta K_2 + \ldots + (\Delta u_m)\Delta K_m &= 0 \\
&\ \vdots \\
(\Delta^{n-2}u_1)\Delta K_1 + (\Delta^{n-2}u_2)\Delta K_2 + \ldots + (\Delta^{n-2}u_m)\Delta K_m &= 0 \\
(\Delta^{n-1}u_1)\Delta K_1 + (\Delta^{n-1}u_2)\Delta K_2 + \ldots + (\Delta^{n-1}u_m)\Delta K_m &= g(n)
\end{aligned}$$

sistemi elde edilir. Bu sistemden Casorati determinantı yardımıyla $\Delta K_1,\ \Delta K_2, \ldots, \Delta K_m$'ler daha sonra ise $K_1, K_2, \ldots, K_m$'ler bulunup (3.22) denkleminde yerine yazılır. Böylece çözüm tamamlanmış olur.

Örnek: $f_{n+2} - 5f_{n+1} + 6f_n = n^2$ denklemini parametrelerin değişimi metoduyla çözelim.

Bu denklemin homojen kısmının çözümleri $u_1 = 2^n$ ve $u_2 = 3^n$ olup çözümü $c_1 2^n + c_2 3^n$'dir. Şimdi varsayalım ki

$$f_n = K_1 2^n + K_2 3^n \tag{3.24}$$

homojen kısmın çözümü olsun. Şimdi K_1 ve K_2 fonksiyonlarını bulalım. Bu fonksiyonları bulmak için iki koşula ihtiyacımız vardır. Bunun için

$$\Delta f_n = K_1 2^n + 2.3^n K_2 + \Delta K_1 2^{n+1} + \Delta K_2 3^{n+1} \tag{3.25}$$

eşitliğini elde edelim. Bu eşitlikte K_1 ve K_2 için son iki terim sıfıra eşit olmalıdır. Yani

$$\Delta K_1 2^{n+1} + \Delta K_2 3^{n+1} = 0 \tag{3.26}$$

olur. Bu durumda (3.25) ifadesinden

$$\Delta f_n = K_1 2^n + 2.3^n K_2 \tag{3.27}$$

elde edilir. (3.27) ifadesinden

$$\Delta^2 f_n = K_1 2^n + K_2 4.3^n + 2^{n+1}\Delta K_1 + 2.3^{n+1}\Delta K_2 \tag{3.28}$$

elde edilir. Verilen denklemi E operatörü yardımıyla

$$\left(E^2 - 5E + 6\right) f_n = n^2$$

ya da $E = 1 + \Delta$ olduğundan

$$\left(\Delta^2 - 3\Delta + 2\right) f_n = n^2 \tag{3.29}$$

şeklinde yazabiliriz. (3.24), (3.27)'de ve (3.28), (3.29)'da yerine yazılırsa

$$2^{n+1}\Delta K_1 + 2.3^{n+1}\Delta K_2 = n^2 \tag{3.30}$$

elde edilir. Bu durumda (3.26) ve (3.30) denklemlerinden K_1 ve K_2'yi belirlenmelidir. Yani

$$\left.\begin{aligned} 2^{n+1}\Delta K_1 + 3^{n+1}\Delta K_2 &= 0 \\ 2^{n+1}\Delta K_1 + 2.3^{n+1}\Delta K_2 &= n^2 \end{aligned}\right\} \tag{3.31}$$

elde edilir. (3.31) çözülürse

$$\Delta K_1 = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 3^{n+1} \\ n^2 & 2.3^{n+1} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2^{n+1} & 3^{n+1} \\ 2^{n+1} & 2.3^{n+1} \end{vmatrix}} = -\frac{n^2}{2^{n+1}}, \quad \Delta K_2 = \frac{\begin{vmatrix} 2^{n+1} & 0 \\ 2^{n+1} & n^2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2^{n+1} & 3^{n+1} \\ 2^{n+1} & 2.3^{n+1} \end{vmatrix}} = \frac{n^2}{3^{n+1}}$$

bulunur. Buradan

$$K_1 = -\Delta^{-1}\left(\frac{n^2}{2^{n+1}}\right), \quad K_2 = \Delta^{-1}\left(\frac{n^2}{3^{n+1}}\right)$$

olup ters operatörler yardımıyla

$$K_1=-\frac{1}{\Delta}\left(\frac{n^2}{2^{n+1}}\right)=-\frac{1}{E-1}\left(\frac{1}{2}\right)^n\left(\frac{n^2}{2}\right)=-\left(\frac{1}{2}\right)^n\frac{1}{\frac{1}{2}E-1}\left(\frac{n^2}{2}\right)$$
$$=-\left(\frac{1}{2}\right)^n\frac{1}{E-2}n^2=\left(\frac{1}{2}\right)^n\frac{1}{1-\Delta}n^2=\left(\frac{1}{2}\right)^n\left(1+\Delta+\Delta^2+\ldots\right)n^2$$
$$=\left(\frac{1}{2}\right)^n\left(n^2+2n+1+2\right)=\left(\frac{1}{2}\right)^n\left(n^2+2n+3\right)$$

olur. Böylece hesaba c_1 keyfi sabiti eklenirse

$$K_1=\left(\frac{1}{2}\right)^n\left(n^2+2n+3\right)+c_1$$

elde edilir. Benzer şekilde

$$K_2=-\frac{1}{2.3^n}\left(n^2+n+1\right)+c_2$$

eşitliği elde edilir. Bulunan eşitlikler (3.24)'de yerine yazılırsa

$$f_n=c_1 2^n+c_2 3^n+\frac{1}{2}n^2+\frac{3}{2}n+\frac{5}{2}$$

olarak bulunur.

3.3 Üreten Fonksiyon Yardımıyla Çözüm

Bu bölümde Spiegel (1971) kaynağından yararlanarak (3.2) denklemi üreten fonksiyon yardımıyla çözülelecektir.

(3.2) denklemindeki f_n için üreten fonksiyon

$$G(x)=\sum_{n=0}^{\infty}f_n x^n$$

olarak tanımlanır. Bu fonksiyon yardımıyla sabit katsayılı fark denklemleri çözülebilir.

Örnek: $f_{n+2}-3f_{n+1}+2f_n=0$, $f_0=2$ $\quad f_1=3$ denklemini çözelim.

Şimdi bu denklemin bütün terimlerini x^n ile çarpıp n, 0'dan ∞'a toplamı alınırsa

$$\sum_{n=0}^{\infty}f_{n+2}x^n-3\sum_{n=0}^{\infty}f_{n+1}x^n+2\sum_{n=0}^{\infty}f_n x^n=0$$

elde edilir. Buradan f_n'ler için alt indisler düzenlenirse

$$\sum_{n=2}^{\infty} f_n x^{n-2} - 3\sum_{n=1}^{\infty} f_n x^{n-1} + 2\sum_{n=0}^{\infty} f_n x^n = 0$$

elde edilir. $G(x)$ fonksiyonunun tanımından bu seri

$$\frac{G(x) - f_0 - xf_1}{x^2} - 3\left(\frac{G(x) - f_0}{x}\right) + 2G(x) = 0$$

şeklinde yazılır. Buradan $f_0 = 2,\ f_1 = 3$ değerleri yerine yazılırsa

$$G(x) = \frac{2-3x}{1-3x+2x^2} = \frac{2-3x}{(1-x)(1-2x)} = \frac{1}{1-x} + \frac{1}{1-2x}$$

elde edilir. Bulunan $G(x)$ fonksiyonunu

$$G(x) = \frac{1}{1-x} + \frac{1}{1-2x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n + \sum_{n=0}^{\infty} (2x)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \left(1+2^n\right) x^n$$

seri şeklinde yazılırsa $G(x)$ üreten fonksiyonu tanımından

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \left(1+2^n\right) x^n$$

elde edilir. O halde $f_n = 1 + 2^n$ çözümü elde edilmiş olur.

3.4 Mertebe Düşürme Metoduyla Çözüm

Bu bölümde $\lambda_1,\ \lambda_2,\ \ldots,\ \lambda_r$ 'ler sabit olmak üzere

$$(E-\lambda_1)(E-\lambda_2)\ldots(E-\lambda_r)\, f_n = g(n)$$

şeklindeki denklemi Spiegel (1971) kaynağı yardımıyla mertebe düşürme metodu kullanarak çözülecektir. Şimdi bu denklemde

$$z_n = (E-\lambda_2)\ldots(E-\lambda_r)\, f_n$$

dönüşümü yapılırsa

$$(E-\lambda_1) z_n = g(n)$$

olup bu birinci mertebeden fark denkleminin çözümü (3.17)'den

$$z_n = \lambda_1^n \Delta^{-1}\left(\frac{g(n)}{\lambda_1^{n+1}}\right) = \lambda_1^n \sum_{i=1}^{n-1} \frac{g(i)}{\lambda_1^{i+1}} + c_1\lambda_1^n$$

elde edilir.

Örnek: $f_{n+2}-5f_{n+1}+6f_n=n^2$ denklemini mertebe düşürme metoduyla çözünüz.

Bu denklem $(E-3)(E-2)f_n=n^2$ şeklinde yazılabilir. Burada $z_n=(E-2)f_n$ dönüşümü yapılırsa

$$(E-3)z_n=n^2$$

elde edilir. Buradan bu denklemin çözümü

$$\begin{aligned}
z_n &= 3^n\Delta^{-1}\left(\frac{n^2}{3^{n+1}}\right)+c_1 3^n = 3^n\frac{1}{\Delta}\left(\frac{n^2}{3^{n+1}}\right)+c_1 3^n = 3^n\frac{1}{E-1}\left(\frac{n^2}{3^{n+1}}\right)+c_1 3^n\\
&= 3^n\frac{1}{E-1}\left(\frac{1}{3}\right)^n\left(\frac{n^2}{3}\right)+c_1 3^n = 3^n\left(\frac{1}{3}\right)^n\frac{1}{\frac{1}{3}E-1}\left(\frac{n^2}{3}\right)+c_1 3^n = \frac{1}{E-3}\left(n^2\right)+c_1 3^n\\
&= \left(-\frac{1}{2}\right)\frac{1}{1-\frac{\Delta}{2}}\left(n^2\right)+c_1 3^n = \left(-\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{\Delta}{2}+\frac{\Delta^2}{4}+\ldots\right)\left(n^2\right)+c_1 3^n\\
&= c_1 3^n-\frac{1}{2}\left(n^2+n+1\right)
\end{aligned}$$

şeklinde olup buradan

$$(E-2)f_n=c_1 3^n-\frac{1}{2}\left(n^2+n+1\right)$$

elde edilir. Bu denklemin çözümü aynı yöntemle

$$f_n=2^n\Delta^{-1}\left(\frac{c_1 3^n-\frac{1}{2}\left(n^2+n+1\right)}{3^{n+1}}\right)+c_2 2^n=\frac{1}{2}n^2+\frac{3}{2}n+\frac{5}{2}+c_2 2^n+c_3 3^n$$

elde edilir.

3.5 Laplace Dönüşümü İle Çözüm

Tanım: f, $t>0$ zaman değişkeninin tek değerli fonksiyonu ve s (reel veya kompleks) parametre olsun. $f(t)$'nin Laplace dönüşümü

$$F(s)=L\left\{f(t)\right\}=\int_0^\infty e^{-st}f(t)\,dt \tag{3.32}$$

integrali ile tanımlanır.

Şimdi $L\left\{f(t)\right\}=F(s)$ ve $L\left\{g(t)\right\}=G(s)$ olarak tanımlayalım.

a ve b sabit olmak üzere Laplace dönüşümünün özellikleri Tablo 3.2 ile bazı fonksiyonların Laplace dönüşümleri Tablo 3.3'de verilmiştir.

Tablo 3.2. Bazı fonksiyonların Laplace dönüşümleri

$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$	$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$
$t^n,\ n > -1$	$\Gamma(n+1)/s^{n+1}$
e^{at}	$1/s-a$
$a^t \quad a$ sbt, $n \le t < n+1,\quad n = 0,1,2,\ldots$	$1-e^{-s}/s\left(1-ae^{-s}\right)$
$\sin at$	$a/\left(s^2+a^2\right)$
$\cos at$	$s/\left(s^2+a^2\right)$
$H(t-a) = \begin{cases} 1, & t \ge a \\ 0, & t < a \end{cases}$	$e^{-as}/s \ \ (a \ge 0)$

Tablo 3.3. Laplace dönüşümünün özellikleri

$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$	$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$	
$af(t)+bg(t)$	$aF(s)+bG(s)$	(Lineerlik)
$e^{at}f(t)$	$F(s-a)$	(1. öteleme)
$f(t-a)H(t-a)$	$e^{-as}F(s),\quad a > 0$	(2. öteleme)
$f(at)$	$\frac{1}{a}F(\frac{s}{a})$	(Skaler değiştirme)
$t^n f(t),\quad n = 1,2,3,\ldots$	$(-1)^n F^{(n)}(s)$	
$\lim\limits_{t\to 0}\frac{f(t)}{t}$ mevcutsa, $\quad \frac{f(t)}{t}$	$\int_s^{\infty} F(u)\,du$	
$\int_0^t f(u)\,du$	$\frac{F(s)}{s}$	
$f^{(n)}(t),\quad n = 1,2,3,\ldots$	$s^n F(s) - s^{n-1}f(0) - s^{n-2}f'(0) - \ldots - f^{(n-1)}(0)$	
$f(t+T) = f(t),\quad T > 0$	$\frac{1}{1-e^{-sT}}\int_0^T e^{-st}f(t)\,dt$	
$f(t)*g(t) = \int_0^t f(u)g(t-u)\,du$	$F(s)G(s)$	

Örnek: $f_{n+2} - 3f_{n+1} + 2f_n = 0,\ \ f_0 = 0,\ \ f_1 = 1$ denklemini çözelim.

Bu denklem $n \le t < n+1,\ \ n = 0,1,2,\ldots$ şartıyla $f(t) = f_n$ şeklinde tanımlansın. Bu durumda denklem $f(t+2) - 3f(t+1) + 2f(t) = 0$ halini alır. Bu denklemi Laplace dönüşümü yardımıyla $f_0 = 0,\ \ f_1 = 1$ şartları altında düşünürsek

$$\begin{aligned}
L\{f(t+2)\} &= \int_0^\infty e^{-st} f(t+2)\,dt = \int_2^\infty e^{-s(\tau-2)} f(\tau)\,d\tau \quad (\tau = t+2) \\
&= e^{2s}\int_0^\infty e^{-s\tau} f(\tau)\,d\tau - e^{2s}\int_0^2 e^{-s\tau} f(\tau)\,d\tau \\
&= e^{2s} L\{f(t)\} - e^{2s}\int_0^1 e^{-s\tau} f_0\,d\tau - e^{2s}\int_1^2 e^{-s\tau} f_1\,d\tau \\
&= e^{2s} L\{f(t)\} - e^{2s}\left(\frac{e^{-s} - e^{-2s}}{s}\right) \\
&= e^{2s} L\{f(t)\} - \frac{e^{s}}{s}\left(1 - e^{-s}\right)
\end{aligned}$$

ve benzer şekilde

$$L\{f(t+1)\} = e^{s} L\{f(t)\}$$

elde edilir. O halde denklem

$$e^{2s} L\{f(t)\} - \frac{e^{s}}{s}\left(1 - e^{-s}\right) - 3e^{s} L\{f(t)\} + 2L\{f(t)\} = 0$$

ya da

$$L\{f(t)\} = \frac{1-e^{-s}}{s\left(1-2e^{-s}\right)}\,\frac{1-e^{-s}}{s\left(1-e^{-s}\right)} = \frac{1-e^{-s}}{s\left(1-2e^{-s}\right)} - \frac{1}{s} = L\left\{2^{[\![t]\!]}\right\} - L\{1\}$$

şeklinde olup n değişkenine geri dönülürse

$$f_n = 2^n - 1$$

olarak çözüm bulunur.

Eğer verilen denklem homojen olmayan denklem yani

$$f_{n+2} - 3f_{n+1} + 2f_n = 3^n,\ \ f_0 = 0,\ \ f_1 = 1$$

şeklinde olsaydı bu durumda çözüm

$$L\{f(t)\} = L\left\{2^{[\![t]\!]}\right\} - L\{1\} + \frac{L\left\{3^{[\![t]\!]}\right\}}{e^{2s} - 3e^{s} + 2}$$

olur. Sağ tarafın Laplace dönüşümü

$$\frac{\mathcal{L}\left\{3^{[\![t]\!]}\right\}}{e^{2s}-3e^{s}+2}=\frac{1-e^{-s}}{s\left(1-3e^{-s}\right)}\frac{1}{e^{3s}-3e^{s}+2}=\frac{1-e^{-s}}{s}\left(\frac{\frac{1}{2}}{1-e^{-s}}-\frac{1}{1-2e^{-s}}+\frac{\frac{1}{2}}{1-3e^{-s}}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\mathcal{L}\{1\}-\mathcal{L}\left\{2^{[\![t]\!]}\right\}+\frac{1}{2}\mathcal{L}\left\{3^{[\![t]\!]}\right\}$$

şeklinde hesaplanır. Bu durumda genel çözüm n değişkeni için

$$f_n=\frac{1}{2}3^{n}-\frac{1}{2},\quad n=0,1,2,\ldots$$

şeklinde bulunur.

4. DEĞİŞKEN KATSAYILI LİNEER FARK DENKLEMLERİ İÇİN ANALİTİK ÇÖZÜM YÖNTEMLERİ

Şimdiye kadar sabit katsayılı lineer fark denklemleri üzerinde duruldu. Bu bölümde ise x sürekli değişken olmak üzere

$$f(x+m)+p_1(x)\,f\,(x+m-1)+\ldots+p_m(x)\,f\,(x)=g(x) \tag{4.1}$$

fonksiyonel fark denklemini ve ayrık uzaydaki

$$f_{n+m}+p_1(n)\,f_{n+m-1}+\ldots+p_m(n)\,f_n=g(n) \tag{4.2}$$

değişken katsayılı lineer fark denklemlerinin çözümleri üzerinde durulacaktır.

4.1 Birinci Mertebeden Denklemler İçin Çözüm Yöntemleri

Bu bölümde birinci mertebeden değişken katsayılı lineer fark denklemlerinin genel çözümü, başlangıç değer probleminin çözümü ve birinci mertebeden değişken katsayılı bazı özel fark denklemleri Levy ve Lessman (1961), Kelly ve Peterson (2001), Bereketoğlu ve Kutay (2011) kaynakları yardımıyla verilecektir.

4.1.1 Genel çözüm bulma

a) Ayrık kümelerde çözüm

Birinci mertebeden değişken katsayılı lineer

$$f_{n+1}-p_n f_n=g_n \tag{4.3}$$

fark denklemini ele alalım. Burada p_n ve g_n'ler $n=1,2,\ldots$ değerleri için tanımlı bilinen fonksiyonlardır. Genel çözüm bir keyfi sabit içermektedir. Şimdi özel olarak $g_n=0$ durumunu ele alalım. O halde yeni denklemimiz

$$f_{n+1}-p_n f_n=0 \tag{4.4}$$

şeklinde olacaktır. Bu denklemde $n+1$ notasyonunu birer düşürerek

$$\begin{aligned} f_n &= p_{n-1} f_{n-1} \\ f_{n-1} &= p_{n-2} f_{n-2} \\ &\vdots \\ f_2 &= p_1 f_1 \end{aligned}$$

elde edilir. O halde bu denklem sisteminden

$$f_n = f_1.p_1.p_2 \cdots p_{n-2}.p_{n-1} = f_1 \prod_{r=1}^{n-1} p_r$$

ya da

$$f_n \Big/ \prod_{r=1}^{n-1} p_r = f_1 \tag{4.5}$$

elde edilir. Burada f_1'i keyfi sabit olarak düşünürsek (4.4) denkleminin çözümü

$$f_n = c \prod_{r=1}^{n-1} p_r$$

olur. Burada c keyfi sabittir. Bu çözüm (4.3) birinci mertebeden değişken katsayılı homojen kısmının genel çözümüdür.

Şimdi (4.3) homojen olmayan denklemini ele alalım ve bu denklemde her iki tarafı $\prod_{r=1}^{n} p_r$ ile bölelim. O halde

$$\left(f_{n+1} \Big/ \prod_{r=1}^{n} p_r \right) - \left(f_n \Big/ \prod_{r=1}^{n-1} p_r \right) = g_n \Big/ \prod_{r=1}^{n} p_r$$

$$\Delta \left(f_n \Big/ \prod_{r=1}^{n-1} p_r \right) = g_n \Big/ \prod_{r=1}^{n} p_r$$

elde edilir ve buradan

$$f_n = c \prod_{r=1}^{n-1} p_r + \left(\prod_{r=1}^{n-1} p_r \right) \sum_{1}^{n-1} \left(g_n \Big/ \prod_{r=1}^{n} p_r \right) \tag{4.6}$$

elde edilir. (4.6) ifadesi (4.3) birinci mertebeden değişken katsayılı homojen olmayan fark denkleminin genel çözümüdür.

b) Sürekli değişken kümesinde çözüm

Şimdi x sürekli değişken için

$$f(x+1) - p(x) f(x) = g(x) \tag{4.7}$$

denklemini ele alalım. $f(x) = u(x)v(x)$ dönüşümü yapalım. Burada $v(x)$ tespit edilmesi gereken fonksiyon ve $u(x)$ homojen kısmın sıfırdan farklı bir çözümü olsun. Bu durumda (4.7) denklemi

$$u(x+1)v(x+1) - p(x)u(x)v(x) = g(x) \tag{4.8}$$

şeklinde ifade edilir. $u(x)$ homojen kısmın çözümü olduğundan $u(x+1)=p(x)u(x)$ yazılabilir. Bulunan bu eşitlik (4.8)'de yerine yazılırsa

$$u(x+1)v(x+1)-u(x+1)v(x)=g(x)$$

$$u(x+1)\left[\Delta v(x)\right]=g(x)$$

$$v(x)=\sum\frac{g(x)}{Eu(x)}+C(x)$$

elde edilir. Tekrar $f(x)=u(x)v(x)$ dönüşümünden yararlanılarak

$$f(x)=u(x)\left[\sum\frac{g(x)}{Eu(x)}+C(x)\right] \tag{4.9}$$

yazılır. Burada $C(x)$ birim periyodik bir fonksiyon olup (4.8) denkleminin tüm çözümlerini temsil eder.

Gama fonksiyonu yardımıyla $p_1(x)$, $p_2(x)$ verilen polinomlar olmak üzere

$$f(x+1)\,p_1(x)=f(x)\,p_2(x)$$

şeklindeki birinci mertebe değişken katsayılı denklemler daha kolay bir şekilde çözülebilir. Biz şimdi bu denklemde gama fonksiyonunu daha kısa bir yöntemle anlatabilmek için $p_1(x)=1$, $p_2(x)=x$ seçelim

$$f(x+1)=xf(x).$$

Bu denklemin çözümü keyfi sabitlerin yerini tutan bir birim periyodik ve $f(x)$'in bir fonksiyonu ile birlikte

$$f(x)=C(x)\Gamma(x) \tag{4.10}$$

şeklindedir. Burada $C(x)$, $f(x)$'in başlangıçta tek bir birim aralığında belirtilen bir yolla belirlenir. Ayrık kümeler üzerinde bu durumu düşünülürse

$$f_{n+1}=nf_n$$

fark denkleminin çözümü $\Gamma(n)=(n-1)!$ özelliği yardımıyla c keyfi sabit olmak üzere

$$f_n=c(n-1)!$$

dir.

Örnek: a sabit olmak üzere $f_{n+1}^2 - a^n f_n^2 = a^{\frac{1}{2}n(n-1)}$ denklemini $n \geq 1$ olmak üzere çözelim.

Bu denklemi basitleştirmek için

$$f_n^2 = y_n$$

alalım. Bu durumda yeni denklemimiz

$$y_{n+1} - a^n y_n = a^{\frac{1}{2}n(n-1)}$$

olur. Bu denklemin her iki tarafını

$$\prod_{r=1}^{n} a^r = a^{\frac{1}{2}n(n+1)}$$

ile böldüğümüzde

$$\left[y_{n+1} \Big/ a^{\frac{1}{2}n(n+1)} \right] - \left[y_n \Big/ a^{\frac{1}{2}n(n-1)} \right] = a^{-n}$$

elde edilir ki bu denklemin çözümü

$$\Delta\left(y_n \Big/ a^{\frac{1}{2}n(n-1)} \right) = a^{-n}$$

$$y_n \Big/ a^{\frac{1}{2}n(n-1)} = \sum_{1}^{n-1} a^{-n} + c' = a^{-n+1} \big/ (a-1) + c$$

şeklinde olup c ve c' keyfi sabitlerdir. O halde tekrar $y_n = f_n^2$ değişimi yapıldığında

$$f_n^2 = a^{\frac{1}{2}n(n-1)} \left[a^{-n+1} \big/ (a-1) + c \right]$$

elde edilir.

Örnek: $(x+1) f(x+1) - xf(x) = x$ birinci mertebeden fark denklemini çözelim.

Denklemi Δ operatörü yardımıyla sol tarafın

$$\Delta\left[xf(x) \right] = x$$

tam fark şeklinde yazılabilmesi durumunda bu denklemin çözümünde belirsiz toplam tanımından yararlanarak

$$xf(x) = \sum x + C(x)$$

elde edilir. O halde bu denklemin çözümü

$$xf(x) = \frac{x(x-1)}{2} + C(x) \quad \Rightarrow \quad f(x) = (x-1)/2 + C(x)/x$$

olur. Burada $C(x)$ birim periyodik bir fonksiyondur.

4.1.2 Başlangıç değer probleminin çözümü

Bu kısımda birinci mertebeden lineer homojen olmayan

$$f_{n+1} = p_n f_n + g_n, \qquad n \geq n_0 \geq 0 \tag{4.11}$$

fark denklemi ve

$$f_{n_0} \tag{4.12}$$

başlangıç koşulundan meydana gelen başlangıç değer problemi üzerinde durulacaktır; burada p_n katsayısı ve g_n, $[n_0, \infty)$ üzerinde tanımlı reel değerli fonksiyonlar olup her $n \geq n_0$ için $p_n \neq 0$ 'dır.

Teorem: (4.11) denkleminin homojen kısmı ve (4.12) başlangıç koşulundan oluşan problemin tek çözümü

$$f_n = \left(\prod_{i=n_0}^{n-1} p_i \right) f_{n_0} \tag{4.13}$$

olup (4.11)-(4.12) başlangıç değer probleminin tek çözümü

$$f_n = \left(\prod_{i=n_0}^{n-1} p_i \right) f_{n_0} + \sum_{r=n_0}^{n-1} \left(\prod_{i=r+1}^{n-1} p_i \right) g_r \tag{4.14}$$

dir.

Örnek: $f_{n+1} = nf_n + n!3^n$, $f_1 = 1/2$ probleminin çözümü, (4.15)'den

$$\begin{aligned} f_n &= \frac{1}{2}\prod_{i=1}^{n-1} i + \sum_{r=1}^{n-1}\left(\prod_{i=r+1}^{n-1} i \right) r!3^r = \frac{1}{2}(n-1)! + \sum_{r=1}^{n-1}(n-1)!3^r \\ &= (n-1)!\left(\frac{1}{2} + \sum_{r=1}^{n-1} 3^r \right) = (n-1)!\left(-1 + \frac{3^n}{2} \right) \end{aligned}$$

dir.

4.1.3 Bazı fonksiyonel fark denklemlerin çözümü

Denklemin bilinen katsayı fonksiyonu *m.* dereceden bir polinom şeklinde ise lineer fark denklemleri Γ fonksiyonu yardımıyla çözülebilir. Bu konuda polinomların durumlarına göre çözümler verilecektir.

Şimdi

$$f(x+1) = p(x) f(x)$$

fark denklemini ele alalım.

Durum 1: α sabit olmak üzere $p(x)=x-\alpha$ biçiminde ise $z=x-\alpha$ dönüşümü yapılırsa denklem $f(z+\alpha)=u(z)$ olur. Bu durumda fark denklemi

$$u(z+1)=zu(z)$$

olur. Bu denklemin çözümünü (4.10)'dan $u(z)=C(z)\Gamma(z)$ yazabiliriz. O halde denklem $f(z+\alpha)=C(z)\Gamma(z)$ halini alır. $z=x-\alpha$ dönüşümüne tekrar dönülürse

$$f(x)=C(x)\Gamma(x-\alpha)$$

olup burada $C(x)$ keyfi birim periyodik fonksiyondur.

Durum 2: $p(x)=(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\ldots(x-\alpha_m)$ biçiminde ise çözüm

$$f(x)=C(x)\Gamma(x-\alpha_1)\Gamma(x-\alpha_2)\ldots\Gamma(x-\alpha_m)$$

şeklinde olur.

Durum 3: $p(x)$, *m*. dereceden herhangi bir fonksiyon yani $p(x)=\lambda.\prod_{i=1}^{m}(x-\alpha_i)$ şeklinde ise denkleminin çözümü

$$f(x)=C(x)\lambda^x\,\Gamma(x-\alpha_1)\Gamma(x-\alpha_2)\ldots\Gamma(x-\alpha_m)$$

şeklindedir.

Durum 4: $p(x)=\dfrac{p_1(x)}{p_2(x)}$ şeklinde $p_1(x)$ ve $p_2(x)$ polinomlarının bölümü şeklinde olsun. Bu durumda

$$p_1(x)=a\prod_{1}^{r}(x-\alpha_r),\quad p_2(x)=b\prod_{1}^{s}(x-\beta_s)$$

şeklinde r. ve s. dereceden polinomlar şeklinde yazılabilirler. O halde birinci mertebeden rasyonel katsayılı homojen fark denkleminin çözümü

$$f(x)=C(x)\left(\frac{a}{b}\right)^x\prod_{r=1}^{r}\Gamma(x-\alpha_r)\Big/\prod_{s=1}^{s}\Gamma(x-\beta_s)$$

olarak bulunur.

Örnek: $f(x+1)=\left(x-x^2\right)f(x)$ denklemini çözelim.

Denklem düzenlenirse

$$f(x+1)=x(1-x)\,f(x)=-x(x-1)\,f(x)$$

elde edilir. Buradan birinci mertebe fark denkleminin çözümünde Γ fonksiyonunun tanımı kullanılarak

$$f(x) = C(x)(-1)^x \Gamma(x)\Gamma(x-1) = C(x)(-1)^x (x-1)\Gamma^2(x-1)$$

çözümü elde edilir.

Örnek: $(x+1)f(x+1) - xf(x) = 0$ denklemini çözelim.

Bir önceki sonuca göre $p_1(x) = x,\ \ p_2(x) = x+1$ olup

$$f(x) = \frac{\Gamma(x)}{\Gamma(x+1)} = \frac{1}{x}$$

olarak bulunur.

4.2 İkinci Mertebede Denklemler İçin Çözüm Yöntemleri

$p(x)$, $q(x)$ ve $r(x)$ x'in fonksiyonları olmak üzere ikinci mertebeden değişken katsayılı homojen olmayan denklem

$$f(x+2) + p(x)f(x+1) + q(x)f(x) = r(x) \tag{4.15}$$

şeklindedir. Eğer (4.15)'de $r(x) = 0$ ise o zaman

$$f(x+2) + p(x)f(x+1) + q(x)f(x) = 0 \tag{4.16}$$

(4.16) denklemi (4.15) denkleminin ikinci mertebeden değişken katsayılı homojen denklem olarak isimlendirilir. (4.15)'in çözümü; $C(x)$ ve $D(x)$ birim periyodik fonksiyonlarını; $u(x)$ ve $v(x)$ homojen kısmın lineer bağımsız çözüm fonksiyonlarını; $s(x)$ ikinci yanlı eşitliğin çözümünü yani özel çözümü göstermek üzere

$$f(x) = C(x)u(x) + D(x)v(x) + s(x) \tag{4.17}$$

şeklindedir.

İkinci mertebeden bir fark denkleminin çözümünün genel ifadesinin (4.17) şeklinde olduğu bilinmektedir. Ancak ikinci mertebeden fark denkleminin bizi bu tarz bir çözüme götürecek bir genel çözüm metodu bulunmamaktadır. Biz bu bölümde ikinci mertebe denklemler için homojen kısmın tek çözümünün bilinmesi veya iki çözüm arasındaki fonksiyonel bağıntının bilinmesi gibi şartla göz önüne alınarak çözümlere ulaşmaya çalışacağız.

4.2.1 Birinci mertebeden türetilebilen denklemler

Birinci mertebe fark denklemi sınırlı terim içerir. Bu yüzden bu bölümde ikinci mertebe bir fark denkleminin çözümü bir dönüşümle Levy ve Lessman (1961) kaynağı yardımıyla birinci mertebeden türetilerek bulunacaktır. Şimdi

$$(x+A)z(x+2)-(Bx+C)z(x+1)+a(x+\lambda)z(x)=0 \tag{4.18}$$

şeklinde a,λ,μ sabit olmak üzere A, B ve C arasında

$$A=\mu+n, \qquad B=1+a, \qquad C=\mu+a\lambda+an \tag{4.19}$$

bir bağıntı olmak şartıyla ikinci mertebeden bir fark denkleminin çözümünü bulalım. Bunun için

$$f(x+1)=\frac{a(x+\lambda)}{x+\mu}f(x)$$

birinci mertebeden fark denklemini ele alalım. Bu denklemin çözümünü Durum 3'den

$$f(x)=a^x\,\Gamma(x+\lambda)/\Gamma(x+\mu)$$

olduğunu biliyoruz. Şimdi

$$f(x+1)=\frac{a(x+\lambda)}{x+\mu}f(x)$$

denkleminin her iki tarafına Δ^n operatörünü uygulayalım. Bu durumda

$$\Delta^n\left[(x+\mu)f(x+1)\right]=a\Delta^n\left[(x+\lambda)f(x)\right]$$

elde edilir. Bu denklem Leibniz teoremi[62] yardımıyla çözülebilir. Yani

$$(x+\mu)\Delta^n f(x+1)+n\Delta^{n-1}f(x+2)=a\left[(x+\lambda)\Delta^n f(x)+n\Delta^{n-1}f(x+1)\right]$$

elde edilir. Şimdi bu denklemde $z(x)=\Delta^{n-1}f(x)$ alınır;

$$(x+\mu)\Delta z(x+1)+nz(x+2)=a\left[(x+\lambda)\Delta z(x)+nz(x+1)\right]$$

ve düzenlenirse

---

[62] $\Delta^n\left[x_k y_k\right]=x_k\Delta^n y_k+\binom{n}{1}(\Delta x_k)(\Delta^{n-1}y_{k+1})+\binom{n}{2}(\Delta^2 x_k)(\Delta^{n-2}y_{k+2})+\ldots+\binom{n}{n}(\Delta^n x_k)(y_{k+n})$

$$(x+\mu)\left[z(x+2)-z(x+1)\right]+nz(x+2)-a(x+\lambda)z(x+1)$$
$$+a(x+\lambda)z(x)-anz(x+1)=0$$

elde edilerek buradan

$$(x+\mu+n)z(x+2)-(x+ax+\mu+a\lambda+an)z(x+1)+a(x+\lambda)z(x)=0 \tag{4.20}$$

elde edilir. Buradan (4.18) denkleminin çözümü

$$z(x)=\Delta^{n-1}\left[a^x\,\Gamma(x+\lambda)/\Gamma(x+\mu)\right] \tag{4.21}$$

olarak bulunur.

Sonuç: (4.18) şeklinde ikinci mertebeden bir denklem verildiğinde (4.19) yardımıyla ifade (4.20)'ye dönüştürülmelidir. Bu yöntemin sağlanabilmesi için x değişkenine bakılmaksızın $z(x+2)$, $z(x+1)$ ve $z(x)$ terimlerinin birbirine bağlı lineer katsayılarının toplamının $(1-a)$ ile bölümünün pozitif tamsayı olması gerekli ve yeterli koşuldur.

Örnek: $(x+1)z(x+2)-(3x+5)z(x+1)+2(x+1)z(x)=0$ denklemini çözelim.

Bu denklem (4.18) şeklinde olduğundan bu durumda $z(x)$ katsayısından $a=2,\ \lambda=1$ olarak bulunur. Daha sonra (4.21) eşitlikleri kullanılırsa

$$A=\mu+n=1,\quad B=3,\quad C=\mu+a\lambda+an=5$$

eşitliklerinden yararlanılırsa $\mu=-1,\ n=2$ olarak bulunur. Bu değerler (4.21)'de yerine yazılırsa çözümümüz

$$z(x)=\Delta\left[2^x\,\Gamma(x+1)/\Gamma(x-1)\right]=\Delta\left[2^x x(x-1)\right]=2^x x(x+3)$$

olarak bulunur.

4.2.2 Mertebe düşürme yöntemi

Bu bölümde ikinci mertebeden değişken katsayılı fark denklemini Levy ve Lessman (1961), Bereketoğlu ve Kutay (2011) yardımıyla ayrık noktalar ve sürekli değişkenler kümesinde mertebe düşürme metodununu kullanarak çözeceğiz.

a) Ayrık noktalarda mertebe düşürme yöntemi

a_0, a_1, a_2 katsayıları $n\geq n_0$ için tanımlı reel değerli fonksiyonlar ve $[n_0,\infty)$ üzerinde $a_0\neq 0,\ a_2\neq 0$ olmak üzere ikinci mertebeden değişken katsayılı lineer homojen

$$a_0(n)\, f_{n+2} + a_1(n)\, f_{n+1} + a_2(n)\, f_n = 0 \tag{4.22}$$

fark denklemini ele alalım. Bu denklemin aşikâr olmayan bir çözümü bilindiğinde bununla lineer bağımsız olacak ikinci bir çözüm bulunabilir. Bunun için Abel lemmasını $m = 2$ için tekrar ifade edelim:

Lemma: f_n^1 ve f_n^2 (4.22) homojen fark denkleminin $[n_0, \infty)$ üzerinde tanımlı iki çözümü ve $w(n)$ onların Casoratyanı olsun. Bu durumda $n \geq n_0$ için

$$w(n+1) = \frac{a_2(n)}{a_0(n)} w(n) \tag{4.23}$$

dir. Burada $w(n)$;

$$w(n) = \begin{vmatrix} f_n^1 & f_n^2 \\ f_{n+1}^1 & f_{n+1}^2 \end{vmatrix}$$

olup f_n^1, $[n_0, \infty)$ üzerinde (4.22)'nin aşikâr olmayan bir çözümü ve f_n^2'de aynı denklemin diğer bir çözümü olsun. Açık olarak

$$\Delta \frac{f_n^2}{f_n^1} = \frac{f_n^1 \Delta f_n^2 - f_n^2 \Delta f_n^1}{f_n^1 f_{n+1}^1} = \frac{w(n)}{f_n^1 f_{n+1}^1}$$

yazılabilir ve her iki tarafa Δ^{-1} uygulanırsa

$$f_n^2 = f_n^1 \sum_{i=n_0}^{n-1} \frac{w(i)}{f_i^1 f_{i+1}^1} \tag{4.24}$$

olur. Böylece aşağıdaki teorem elde edilir:

Teorem: f_n^1, (4.22) denkleminin her $n \geq n_0$ için sıfırdan farklı bir çözümü olsun. $a_0(n)$ ve $a_2(n)$ katsayıları $[n_0, \infty)$ üzerinde sıfırdan farklı ise, o zaman (4.24) ifadesi (4.22) denkleminin ikinci bağımsız çözümüdür; burada $w(n)$, (4.23)'ün aşikâr olmayan çözümüdür.

Örnek: $f_{n+2} - f_{n+1} - \dfrac{1}{n+1} f_n = 0$ denklemini $n \geq 0$ için çözelim.

Bu denklemin bir çözümü $f_n^1 = n+1$ olsun. Abel lemmasından

$$w(n+1) = -\frac{1}{n+1} w(n)$$

yazılabilir. Bu denklemin çözümü Γ fonksiyonu yardımıyla

$$w(n)=\frac{(-1)^n}{n!}$$

şeklindedir. (4.24)'den

$$f_n^2=(n+1)\sum_{i=0}^{n-1}\frac{(-1)^i}{i!(i+1)(i+2)}=(n+1)\sum_{i=0}^{n-1}\frac{(-1)^i}{(i+2)!}$$

elde edilir. Böylece verilen denklemin genel çözümü

$$f_n=c_1(n+1)+c_2(n+1)\sum_{i=0}^{n-1}\frac{(-1)^i}{(i+2)!}$$

olup c_1 ve c_2 keyfi sabitlerdir.

b) Sürekli değişkenler kümesinde mertebe düşürme yöntemi

Eğer (4.16) denkleminin bir $u(x)$ çözümü biliniyorsa bu durumda içinde iki keyfi fonksiyon bulunduran (4.15)'in genel çözümü birinci mertebe denkleme indirgenerek bulunabilir. $u(x)$, denklem (4.16)'yı sağladığından

$$u(x+2)+p(x)u(x+1)+q(x)u(x)=0 \tag{4.25}$$

elde edilir. Daha sonra $F(x)$ yeni bir değişken olarak kabul edilirse

$$f(x)=u(x)F(x) \tag{4.26}$$

dönüşümü ile (4.15) denklemi

$$u(x+2)F(x+2)+p(x)u(x+1)F(x+1)+q(x)u(x)F(x)=r(x) \tag{4.27}$$

halini alır. (4.25) denklemi $F(x+1)$ ile çarpılıp (4.27)'den çıkarılırsa

$$u(x+2)\Delta F(x+1)-q(x)u(x)\Delta F(x)=r(x) \tag{4.28}$$

bulunur. Bu $\Delta F(x)$ bilinmeyenli birinci mertebeden fark denklemidir. Bu denklem çözülerek $\Delta F(x)$ ve ardından tersi alınarak $F(x)$ bulunur. Böylece $f(x)=u(x)F(x)$ çözümü de bulunmuş olur. Ayrıca (4.28)'de $F(x)=f(x)/u(x)$ yazılarak

$$u(x+2)\left[\frac{f(x+2)}{u(x+2)}-\frac{f(x+1)}{u(x+1)}\right]-q(x)u(x)\left[\frac{f(x+1)}{u(x+1)}-\frac{f(x)}{u(x)}\right]=r(x)$$

buradan

$$u(x+1)f(x+2)-u(x+2)f(x+1)-q(x)u(x)f(x+1)$$
$$+q(x)f(x)u(x+1)=r(x)u(x+1)$$

elde edilir ve E operatörü yardımıyla

$$\left[E-q(x)\right]\left[u(x)f(x+1)-u(x+1)f(x)\right]=u(x+1)r(x) \tag{4.29}$$

yazılabilir. Böylece tamamlayıcı denklemin $u(x)$ özel çözümü verildiğinde, (4.15) denkleminin (4.29) formundaki gibi sol kısmının çarpanlara ayrılmasına olanak sağlar. $u(x+1)$ farkı koruduğundan çarpanlara ayırma fonksiyonu olarak da adlandırılır. (4.29) içindeki katsayılar x'in fonksiyonları olduğundan (4.29)'un sol tarafındaki çarpanların yer değiştiremeyeceği unutulmamalıdır.

Örnek: $(x-1)f(x+2)+(2-3x)f(x+1)+2xf(x)=0$ denkleminin $x\geq 0$ için verilen bir çözümü $u(x)=x$ ise denklemin genel çözümünü bulunuz.

1. Yol: Bu denklemi (4.28) şekline çevirebilmek için $u(x+1)=x+1$ ile çarpalım. Bu durumda

$$(x-1)(x+1)f(x+2)-\left(3x^2+x-2\right)f(x+1)+2x(x+1)f(x)=0$$

elde edilir. Bu denklemin ortadaki terimi $-(x+2)(x-1)-2x^2$ şeklinde çarpanlarına ayrılır ve denklem düzenlenirse;

$$(x-1)\left[(x+1)f(x+2)-(x+2)f(x+1)\right]-2x\left[xf(x+1)-(x+1)f(x)\right]=0$$

elde edilir. Burada geçici olarak

$$xf(x+1)-(x+1)f(x)=z(x)$$

dönüşümü yapılırsa bu durumda denklem

$$z(x+1)-\frac{2x}{x-1}z(x)=0$$

olur ki bu denklemin çözümü Durum 4'den

$$z(x)=xf(x+1)-(x+1)f(x)=C(x)2^x(x-1)$$

elde edilir. Burada $C(x)$ periyodik bir fonksiyondur. Her iki taraf $x(x+1)$ ile bölünürse ve $C(x)=C(x+1)$ özelliği kullanılırsa

$$\Delta\left[f(x)/x\right]=C(x)2^x(x-1)/x(x+1)=C(x)2^x\left[\frac{2}{x+1}-\frac{1}{x}\right]$$
$$=\frac{C(x+1)2^{x+1}}{x+1}-\frac{C(x)2^x}{x}=\Delta\left(\frac{C(x)2^x}{x}\right)$$

elde edilir. Bu durumda çözüm

$$f(x)=2^xC(x)+xD(x)$$

olarak bulunur. Burada $C(x)$ ve $D(x)$ keyfi birim periyodik fonksiyonlardır.

2. Yol: Örneği daha kısa çözmek için verilen denklem

$$f(x+2)+\frac{(2-3x)}{(x-1)}f(x+1)+\frac{2x}{(x-1)}f(x)=0$$

haline getirilip $q(x)=2x/(x-1)$ olduğunu görüp (4.29) denkleminde yerine yazılırsa yine aynı çözüme kolaylıkla gidilebilir.

4.2.3 Tam hale gelebilen denklemler

Bu bölümde Levy ve Lessman (1961) kaynağı yardımıyla (4.16) denkleminin bir $u(x)$ çözümü bilinmemesi durumunda bir toplam çarpanı (summating factor) elde edip (4.15) denklemini bu toplam çarpanı ile çarpılması sonucunda tam hale getirileceğiz. Eğer (4.15) denklemini

$$\Delta\left[b(x)E-q(x)b(x+1)\right]f(x)=r(x)b(x+1) \tag{4.30}$$

şeklinde yazabileceğimiz bazı $b(x)$ fonksiyonlarını biliniyorsa $b(x+1)$ orjinal denklem için bir toplam çarpanı (summatinf or integrating factor) olur.

Bir önceki bölümden biliyoruz ki eğer homojen kısmın bir $u(x)$ çözümünü biliyorsak $f(x)=u(x)F(x)$ dönüşümü ile ikinci mertebe bir denklem (4.29) formunda $\Delta F(x)$'in birinci mertebe bir denklemine indirgenir. Bu durum $u(x)$'in bilinmediği durumlarda bize (4.16) denkleminin çözümüne doğru bir yol gösterir.
Şimdi $b(x)$ ve $c(x)$ henüz x'in tanımlanmamış fonksiyonları olmak üzere

$$F(x)=b(x)f(x+1)+c(x)f(x)=\left[b(x)E+c(x)\right]f(x) \tag{4.31}$$

olsun. Buradan $x\to x+1$ için

$$F(x+1)=b(x+1)f(x+2)+c(x+1)f(x+1)$$

elde edilir. Şimdi

$$
\begin{aligned}
F(x+1)+Q(x)F(x) &= b(x+1)\,f(x+2) \\
&+\left[b(x)Q(x)+c(x+1)\right] f(x+1)+Q(x)c(x)\,f(x)
\end{aligned}
\tag{4.32}
$$

denklemini oluşturalım. Burada $Q(x)$ de x’in tanımlanmamış fonksiyonudur. Şimdi (4.15)’in sol tarafını (4.32)’nin sağ tarafına orantılı yazmaya çalışırsak bu durumda

$$b(x+1)=\frac{b(x)Q(x)+c(x+1)}{p(x)}=\frac{Q(x)c(x)}{q(x)}$$

elde edilir. Buradan

$$b(x)Q(x)+c(x+1)=b(x+1)\,p(x) \tag{4.33}$$

$$c(x)Q(x)=b(x+1)q(x) \tag{4.34}$$

eşitlikleri elde edilir. (4.32) ve (4.15) denklemlerinden

$$\left[E+Q(x)\right]F(x)=r(x)b(x+1) \tag{4.35}$$

yazılır veya (4.31)’deki $F(x)$ ifadesi yardımıyla

$$\left[E+Q(x)\right]\left[b(x)E+c(x)\right] f(x)=r(x)b(x+1)$$

denklemini elde ederiz. Bu denklem aslında (4.34) ve (4.35) eşitlikleri yardımı ile de görüleceği üzere (4.15) orjinal denkleminin her iki tarafının $b(x+1)$ ile çarpılmış halidir. $b(x)$’i belirlerken (4.33) ve (4.34) eşitliklerini birlikte kullanacağımıza dikkat etmeliyiz.

(4.34) denkleminde $c(x)$ çekilip $c(x+1)$ türetilip (4.33) denkleminde yerine yazılırsa

$$q(x+1)b(x+2)-p(x)Q(x+1)b(x+1)+Q(x)Q(x+1)b(x)=0 \tag{4.36}$$

şeklinde denklem elde edilir. Burada $p(x)$ ve $q(x)$ x’in verilen fonksiyonlarıdır ve $b(x)$ ve $Q(x)$ henüz tanımlanmamıştır. Böylece eğer $Q(x)$ keyfi seçilirse $b(x)$’i bulmak için ikinci mertebeden bir denklem çözmemiz gerekir. Diğer yandan, $b(x)$’i keyfi seçersek $Q(x)$’e göre denklem ilk bakışta birinci mertebeden görünür. Dolayısıyla aslında tam çözüm bir keyfi sabit içermelidir, ama kolayca görüleceği üzere bu çözüme ulaşmak için tekrar ikinci mertebe lineer denklem çözmek gerekir Çünkü (4.36) denkleminde

$$Q(x) = R(x)/R(x+1)$$

yazılırsa

$$b(x+2)q(x)R(x+2) - b(x+1)p(x)R(x) + b(x)R(x) = 0$$

elde edilir. Bu denkleme hangi taraftan bakarsak bakalım ikinci mertebe lineer denklem çözmekten kurtulamayız. Aynı zamanda, çözümleri birbirine bağımlı ve birinin çözümü diğerinin çarpanlarına ayırma fonksiyonu olan lineer denklem kümelerinin varlığını göstererek çözüm ihtimalini genişlettik.

Şimdiye kadar $b(x)$ ve $Q(x)$ fonksiyonları keyfiydi. Şimdi $Q(x)$ fonksiyonunun çeşitli seçeneklerini tartışalım. Daha sonra $b(x)$'e götüren denklemi araştıralım. Bu denklemin sonucunu da $f(x)$'in orjinal denklemi (4.15) ile çarpalım. Böylece (4.35) denklemi elde edilir.

Durum 1: $Q(x) = -q(x)$ özel seçimi ile (4.34) eşitliğinden $b(x+1) = -c(x)$ elde edilir. Bu eşitlikler (4.33)'de yerine yazılırsa

$$b(x+2) + p(x)b(x+1) + q(x)b(x) = 0$$

denklemi bulunur. Bu denklem (4.16) tamamlayıcı denklemidir. Yani $b(x)$'in homojen kısmın çözümü olduğu görülür.

Durum 2: Eğer (4.15) denkleminin sol kısmını tam fark yapan bir çarpan bulmak istersek yani $\Delta = E - 1$ çarpanının görünmesini istersek o zaman $Q(x) = -1$ almalıyız. Bu durumda (4.34)'den

$$b(x+1)q(x) = -c(x)$$

olup bu eşitlik (4.33)'de yerine konulursa

$$q(x+1)b(x+2) + p(x)b(x+1) + b(x) = 0 \qquad (4.37)$$

elde edilir. Bu $b(x)$ için ikinci mertebe bir denklemdir. (4.37)'ye (4.15)'in *adjoint denklemi* denir. (4.37) denklemi farklı bir şekilde

$$b(x+2) + \frac{p(x)}{q(x+1)}b(x+1) + \frac{1}{q(x+1)}b(x) = 0$$

yazılabilir. Yine bu adjoint denklemin $B(x+1)$ gibi toplam çarpanı vardır ve buradaki $B(x)$;

$$B(x+2)+B(x+1)\,p(x)q(x+2)/q(x+1)+B(x)q(x+2)=0 \tag{4.38}$$

denklemini sağlar (4.38) denklemindeki $B(x)$'in $C(x+1)$ gibi toplam çarpanı vardır. Burada $C(x)$

$$C(x+2)+C(x+1)\frac{p(x)q(x+2)}{q(x+1)q(x+2)}+\frac{C(x)}{q(x+3)}=0 \tag{4.39}$$

denklemi sağlar ve böyle devam eder.

Kümenin bir önceki için toplam çarpanını sunan her bir denklemin çözümü kümeyi sağlar. Eğer bu denklemlerden herhangi birisi kapalı bir şekilde çözülebilirse bu durumda kümenin her elemanı çözülebilir. $B(x)=q(x)\,f(x)$ ifadesinin (4.38) denklemini sağladığına dikkat edelim. Bu ifadeyi (4.38)'de yazarak

$$q(x+2)\,f(x+2)+p(x)q(x+2)\,f(x+1)+q(x+2)\,f(x)=0$$

elde ederiz. Elbette ki bu (4.15) denklemidir. Aynı argüman ile

$$C(x)=b(x)/q(x+1)$$

alırsak ve yine sonraki aşamada

$$D(x)\ =\ q(x+2)B(x)=q(x+2)q(x)\,f(x)$$

yazılabilir. Bu şekilde toplam çarpanı bulup adjoint denkleme ulaşabilmek için toplam çarpanları elde edilmiş olur.

Sonuç: $f(x+2)+p(x)\,f(x+1)+q(x)\,f(x)=r(x)$

denkleminin tam olması için gerek ve yeter koşul

$$p(x-1)\ +q(x)+1=0$$

olmasıdır. Bu önermenin bir sonucu olarak, eğer bir denklem tam ise (4.37) denkleminin bir çözümünün $b(x)=1$ olması gerektiği söylenebilir. Yani bu koşul dayatıldığı zaman denklemin yeterli olduğun doğrudan görülebilir. $q(x)$ genel denklemde yerine konulursa

$$f(x+2)+p(x)\,f(x+1)-(1+p(x-1))\,f(x)=r(x)$$

elde edilir. Yani,

$$f(x+2)-f(x+1)+f(x+1)-f(x)+p(x)f(x+1)-p(x-1)f(x)=r(x)$$

veya

$$\Delta\{f(x+1)+f(x)+p(x-1)f(x)\}=r(x)$$

elde edilir.

Bu düşünce $m.$ mertebeden

$$f(x+m)+p_1(x)f(x+m-1)+\ldots+p_m(x)f(x)=g(x)$$

genel lineer fark denklemine uzatılabilir. Burada $m.$ mertebeden değişken katsayılı lineer fark denklemi $m.$ mertebeden başka bir adjoint denklemin çözümünden elde edilen bir fonksiyon ile çarpılarak $(m-1).$ mertebe ifadenin tam farkı olarak yazılabilir. Genel durumda da, ikinci mertebede denklemlerde olduğu gibi adjoint denklemler kümesi mevcuttur. Eğer bu denklemlerden herhangi birinin çözümü kapalı formda elde edilebilirse o zaman ayrıca bu kümenin her bir elamanı için bu şekilde bir çözüm yazılabilir.

Örnek: $2x(x-1)f(x+2)-(x-1)(x+2)f(x+1)+xf(x)=0$ denklemini çözelim.

Bu denklemde $f(x+2)$'nin yalnız kalması için denklem $1/2x(x-1)$ ile çarpılırsa

$$f(x+2)-\frac{(x+2)}{2x}f(x+1)+\frac{1}{2(x-1)}f(x)=0$$

şeklinde denklem elde edilir. Burada

$$p(x)=-\frac{(x+2)}{2x},\quad q(x)=\frac{1}{2(x-1)}$$

dir. (4.37) denklemi yardımıyla bu denklemin adjoint denklemi

$$b(x+2)-(x+2)b(x+1)+2xb(x)=0$$

elde edilir. Burada $b(x)=a^x u(x)$ alınırsa ($B(x)=a^x$)

$$a^2u(x+2)-a(x+2)u(x+1)+2xu(x)=0$$

elde edilir. Burada $a=2$ alınırsa

$$4u(x+2)-2(x+2)u(x+1)+2xu(x)=0$$

olur. $u(x)=1$ bir çözümdür. Buradan adjoint denklemin çözümü $b(x)=2^x$ ve orijinal denklemin toplam çarpanı ise $b(x+1)=2^{x+1}$ olarak bulunur. Buradan (4.30)'dan

$$\Delta\left[2^{x} f(x+1)-\frac{2^{x}}{(x-1)} f(x)\right]=0$$

elde edilir. Bu denklemin çözümü

$$f(x+1)-\frac{f(x)}{(x-1)}=C(x)2^{-x}$$

şeklindedir. Burada $C(x)$ birim periyodik fonksiyondur. Bu son denklemde her iki taraf $(x-1)\Gamma(x-1)$ ile çarpılırsa

$$\Delta\left[\Gamma(x-1) f(x)\right]=C(x)\Gamma(x)2^{-x}$$

elde edilir. Burada

$$\Gamma(x-1) f(x)=C(x)\sum_{[\![x]\!]=0}^{[\![x]\!]-1}\Gamma\left(k+[\![x]\!]\right).2^{-k-[\![x]\!]}+D(x), \qquad 0\le k<1$$

olup $C(x)$ ve $D(x)$ keyfi birim periyotlu fonksiyonlardır.

4.2.4 Homojen kısmın çözümleri arasında fonksiyonel bağıntı mevcutsa

Bu bölümde

$$f(x+2)+p(x) f(x+1)+q(x) f(x)=0 \tag{4.25}$$

ikinci mertebe lineer fark denkleminin çözümleri arasında fonksiyonel bağıntı olması durumunda çözümün nasıl bulunacağı Levy ve Lessman (1961) kaynağı baz alınarak verilecektir.

Şimdi $u(x)$ bilinmeyen çözüm ve $v(x)$, x'e ve $u(x)$'e bağlı olarak bilinen diğer çözüm olsun. Yani

$$v(x)=g\left[x,u(x),u(x-1),\ldots,u(x-m)\right].$$

Burada $x\to x+m$ yazılırsa

$$v(x+m)=g\left[x+m,u(x+m),u(x+m-1),\ldots,u(x)\right] \tag{4.40}$$

elde edilir. $u(x)$ ve $v(x)$ verilen denklemin çözümleri olduklarından

$$u(x+2)+p(x)u(x+1)+q(x)u(x)=0 \tag{4.41}$$

$$v(x+2)+p(x)v(x+1)+q(x)v(x)=0 \tag{4.42}$$

yazılabilir. (4.42) denkleminde $x\to x+m$ alınırsa

$$v(x+m+2)+p(x+m)v(x+m+1)+q(x+m)v(x+m)=0$$

elde edilir. Bu denklemi ise (4.40) yardımıyla

$$g\left[x+m+2,u(x+m+2),\ldots,u(x+2)\right]+p(x+m)g\left[x+m+1,\right.$$
$$\left.u(x+m+1),\ldots,u(x+1)\right]+q(x+m)g\left[x+m,u(x+m),\ldots,u(x)\right]=0 \quad (4.43)$$

şeklinde yazılabilir. (4.41) denklemi $u(x+2)$'nin $u(x)$ ve $u(x+1)$ cinsinden ifade edilebilmesini sağlar. Burada $x \to x+m$ yazılır ve $m \geq 0$ için ardışık yerine koyma ile $u(x+m+2)$ ifadeleri de $u(x+1)$ ve $u(x)$ cinsinden ifade edilebilir. Buna göre (4.43) denkleminin ifadesi

$$G\left[x,u(x),u(x+1)\right]=0$$

olur. Böylece $u(x)$'in belirleneceği birinci mertebeden bir fark denklemi elde edilir. Eğer bu nedenle sınırlı terimler çözülebiliyorsa bu yüzden de orijinal denklem (4.16) ve böylece teorik olarak

$$f(x+2)+p(x)f(x+1)+q(x)f(x)=r(x) \quad (4.44)$$

tipinde denklem çözülecekti. Bunu dört özel durumda inceleyelim:

Durum 1: $\phi(x)$ bilinen bir fonksiyon olmak üzere çözümlerden biri diğerinin $\phi(x)$ katı olsun. Bu durumda çözümler $u(x)$ ve $\phi(x)u(x)$ olur. O halde

$$u(x+2)+p(x)u(x+1)+q(x)u(x)=0 \quad (4.45)$$

$$\phi(x+2)u(x+2)+p(x)\phi(x+1)u(x+1)+q(x)\phi(x)u(x)=0 \quad (4.46)$$

elde edilir. (4.46)'da $u(x+2)$ terimi yok edilerek yani (4.45) denklemi $\phi(x+2)$ ile çarpılıp (4.46)'dan çıkarıldığında

$$p(x)\left[\phi(x+2)-\phi(x+1)\right]u(x+1)+q(x)\left[\phi(x+2)-\phi(x)\right]u(x)=0 \quad (4.47)$$

şeklinde birinci mertebeden denklem elde ederiz ve buradan $u(x)$'i bulabiliriz.

Örnek: $nf_{n+2}-(n+2)(n^2+3n+1)f_{n+1}+(n+1)^3(n+2)f_n=0$ denkleminin çözümlerinden biri diğerinin $n!$ katıdır. Bu denklemi çözelim.

Verilen bu denklem (4.47) şeklinde yazılırsa

$$-\frac{(n+2)(n^2+3n+1)}{n}\left[(n+2)!-(n+1)!\right]u_{n+1}+\frac{(n+1)^3(n+2)}{n}\left[(n+2)!-n!\right]u_n=0$$

elde edilir. Bu denklem düzenlenirse

$$(n^2+3n+1)(n^2+2n+1)u_{n+1}-(n+1)^3(n^2+3n+1)u_n=0$$

ve sadeleştirilirse

$$u_{n+1}-(n+1)u_n=0$$

elde edilir. Bu birinci mertebeden denklemin çözümü $u_n=n!$ olarak bulunur. O halde denklemin çözümü

$$f_n=cn!+d(n!)^2$$

olup c ve d keyfi sabitlerdir.

Durum 2: Çözümlerden biri diğerinin karesi olsun. Bu durumda çözümler $u(x)$ ve $\left[u(x)\right]^2$ olur. O halde

$$u(x+2)+p(x)u(x+1)+q(x)u(x)=0$$
$$\left[u(x+2)\right]^2+p(x)\left[u(x+1)\right]^2+q(x)\left[u(x)\right]^2=0$$

elde edilir. Burada $u(x)$ özel çözümdür. Böylece

$$\left[p(x)u(x+1)+q(x)u(x)\right]^2+p(x)u^2(x+1)+q(x)u^2(x)=0$$

veya açık olarak

$$p(x)\left[1+p(x)\right]\left[u(x+1)\right]^2+2p(x)q(x)u(x+1)u(x)+q(x)\left[1+q(x)\right]\left[u(x)\right]^2=0$$

elde edilir. Bu $u(x+1)/u(x)$ için çözülebilen cebirsel bir denklemdir ve çözümü

$$\frac{u(x+1)}{u(x)}=\frac{-p(x)q(x)\pm\sqrt{-p(x)q(x)\left(1+p(x)+q(x)\right)}}{p(x)\left[1+p(x)\right]} \tag{4.48}$$

olur. Yani bu denklem $u(x)$ için çözülebilen birinci mertebe bir denkleme indirgenmiş olur. Bu denklem çözülerek lineer bağımsız çözümler bulunmuş olur.

Örnek: $xf(x+2)-(x+2)(x^2+3x+1)f(x+1)+(x+1)^3(x+2)f(x)=0$

denkleminin çözümlerinden biri diğerinin karesidir. Şimdi bu denklemi çözelim.

Bu denklemde

$$p(x) = -(x+2)(x^2+3x+1)/x$$
$$q(x) = (x+1)^3(x+2)/x$$

olarak belirlenir. Bulunan bu eşitlikler (4.48)'de yerine yazılırsa

$$\frac{u(x+1)}{u(x)} = (x+1) \text{ ve } \frac{u(x+1)}{u(x)} = \frac{(x+1)(x^2+2x+2)}{(x^2+4x+2)}$$

denklemleri elde edilir. Bu ifadelerden ikincisi denklemi sağlamaz. O halde ilk denklemin çözümü

$$u(x) = \Gamma(x+1)$$

ve diğer çözüm

$$u(x) = \left[\Gamma(x+1)\right]^2$$

olur. O halde genel çözüm

$$f(x) = C(x)\Gamma(x+1) + D(x)\left[\Gamma(x+1)\right]^2$$

olarak bulunur. Burada $C(x)$ ve $D(x)$ birim periyodik fonksiyonlardır.

Durum 3: Çözümlerden biri diğerinin tersi olsun. Bu durumda çözümler $u(x)$ ve $1/u(x)$ olur. O halde

$$u(x+2) + p(x)u(x+1) + q(x)u(x) = 0$$
$$\frac{1}{u(x+2)} + \frac{p(x)}{u(x+1)} + \frac{q(x)}{u(x)} = 0$$

denklemleri elde edilir. Bu iki denklemden

$$\left[p(x)u(x+1) + q(x)u(x)\right]\left[\frac{p(x)}{u(x+1)} + \frac{q(x)}{u(x)}\right] = 1$$

bulunur ve düzenlenirse

$$p^2(x) + q^2(x) + p(x)q(x)\left[\frac{u(x)}{u(x+1)} + \frac{u(x+1)}{u(x)}\right] = 1 \qquad (4.49)$$

denklemine ulaşılır. Buradan $u(x+1)/u(x)$'in iki değerinden sadece biri orijinal fark denklemini sağlar.

Örnek: $(x+1)(x-1)\,f(x+2)-2(x^2+2)\,f(x+1)+(x+1)(x-1)\,f(x)=0$

denkleminin çözümleri arasında $u(x)$ ve $1/u(x)$ olduğu bilinmektedir. O halde bu denklemi çözelim.

Bu denklemde

$$p(x)=-2(x^2+2)\big/(x+1)(x-1)$$
$$q(x)=1$$

olup bu eşitlikler (4.49)'da yerine yazılırsa

$$\frac{u(x)}{u(x+1)}+\frac{u(x+1)}{u(x)}=\frac{2x^2+2}{x^2-1}$$

elde edilir. Burada $u(x)/u(x+1)=\Upsilon$ diyelim. Bu durumda

$$(x^2-1)\Upsilon^2-(2x^2+2)\Upsilon+x^2-1=0$$

olup bu denklemin çözümünden

$$\Upsilon_1=\frac{x+1}{x-1},\quad \Upsilon_2=\frac{x-1}{x+1}$$

elde edilir. O halde

$$\frac{u(x)}{u(x+1)}=\frac{x+1}{x-1}\quad\Rightarrow\quad u(x+1)=\frac{x-1}{x+1}u(x)$$

olup bu denklemden

$$u(x)=C(x)\frac{\Gamma(x-1)}{\Gamma(x+1)}\quad\Rightarrow\quad u(x)=C(x)x(x-1)$$

elde edilir. Çözümler arasındaki ilişki bilindiğinden dolayı çözüm

$$f(x)=x(x-1)C(x)+D(x)/x(x-1)$$

olarak elde edilir. Burada $C(x)$ ve $D(x)$ keyfi birim periyodik fonksiyonlardır.

Durum 4: Çözümlerden biri $u(x)$ ve diğeri $u(x-1)$ olsun. O halde

$$u(x+2)+p(x)u(x+1)+q(x)u(x)=0$$
$$u(x+1)+p(x)u(x)+q(x)u(x-1)=0$$

elde edilir. İkinci denklemden

$$u(x+2)+p(x+1)u(x+1)+q(x+1)u(x)=0$$

yazılabilir ve ilk denklemle birleştirilirse

$$\frac{u(x+1)}{u(x)} = -\frac{\Delta q(x)}{\Delta p(x)} \tag{4.50}$$

elde edilir. (4.50)'den $u(x)$'i yani denklemin genel çözümünü elde ederiz.

Örnek: $f(x+2) - 2(x+1) f(x+1) + x(x+1) f(x) = 0$ denkleminin çözümleri arasında $u(x)$ ve $u(x-1)$ gibi bir fonksiyonel bağıntı olduğu bilinmektedir. O halde bu denklemi çözelim.

Bu denklemde

$$p(x) = -2(x+1), \quad q(x) = x(x+1)$$

olup bu eşitlikler (4.50)'de yerine yazılırsa

$$\frac{u(x+1)}{u(x)} = \frac{1}{x+1} \quad \Rightarrow \quad u(x+1) = (x+1)u(x)$$

elde edilir. Bu denklemin bir çözümü

$$u(x) = C(x)\Gamma(x+1)$$

dir. Dolayısıyla genel çözüm

$$f(x) = C(x)\Gamma(x+1) + D(x)\Gamma(x)$$

olarak elde edilir. Burada $C(x)$ ve $D(x)$ keyfi birim periyodik fonksiyonlardır.

4.2.5 Belirli integraller yardımıyla çözüm

Bu bölümde ikinci mertebe değişken katsayılı fark denkleminin

$$f(z) = \int_{t_1}^{t_2} t^{z-1} g(t)\, dt$$

dönüşümü ile çözümü Levy ve Lessman (1961) kaynağı temel alınarak incelenecektir.

Önce bu yöntemi özel bir durum ile gösterelim. Amacımız

$$f(z+2) + (az+b) f(z+1) + (cz+d) f(z) = 0 \tag{4.51}$$

denkleminin özel çözümünü elde etmektir. Bu durumda özel çözümün içerisinde bağımsız değişkeni içeren belirli integral olacaktır. Şimdi

$$f(z+2) - (z-1) f(z+1) - zf(z) = 0 \tag{4.52}$$

denklemini dikkate alalım ve

$$f(z)=\int_{t_1}^{t_2} t^{z-1} g(t)\, dt$$

dönüşümünü yapalım. Bu dönüşümde t_1 ve t_2 belirlenmesi gereken sabit, $g(t)$ ise belirlenecek fonksiyondur. Bu dönüşüm (4.52) denkleminde yerine konulursa

$$\int_{t_1}^{t_2} t^{z+1} g(t)\, dt-(z-1)\int_{t_1}^{t_2} t^{z} g(t)\, dt-z\int_{t_1}^{t_2} t^{z-1} g(t)\, dt=0$$

ve buradan

$$\int_{t_1}^{t_2} t^{z-1}\left(t^2+t\right) g(t)\, dt-z\int_{t_1}^{t_2} t^{z-1}(t+1)\, g(t)\, dt=0$$

elde edilir. İkinci integralin kısmi integralinin alalım

$$z\int_{t_1}^{t_2} t^{z-1}(t+1)\, g(t)\, dt=\left[(t+1)\, g(t)\, t^z\right]_{t_1}^{t_2}-\int_{t_1}^{t_2} t^z \frac{d}{dt}\left[(t+1)\, g(t)\right] dt.$$

Bu denklem düzenlenirse

$$\int_{t_1}^{t_2} t^{z-1}\left[\left(t^2+t\right) g(t)+t.\frac{d}{dt}\left\{(t+1)\, g(t)\right\}\right] dt-\left[(t+1)\, g(t)\, t^z\right]_{t_1}^{t_2}=0$$

elde edilir. $g(t)$ ’yi belirlemek için bu denklemde

$$t(t+1)\, g(t)+t\frac{d}{dt}\left[(t+1)\, g(t)\right]=0 \tag{4.53}$$

$$\left[(t+1)\, g(t)\, t^z\right]_{t_1}^{t_2}=0 \tag{4.54}$$

olacak şekilde t_2 ve t_1 ’i seçeriz. Bu durumda

$$(t+1)\, g(t)=e^{-t} \text{ ya da } g(t)=e^{-t}\big/(t+1)$$

(4.53) denklemini sağlar ve böylece (4.54) denklemi

$$\left[e^{-t} t^z\right]_{t_1}^{t_2}=0$$

olur. $t_2=\infty$ ve $t_1=0$ ise z pozitif yarı düzlemde herhangi bir yerde olabilir. Böylece (4.52) denkleminin bir çözümü

$$f(z)=\int_0^{\infty} t^{z-1}\, e^{-t}\big/(t+1)\, dt \tag{4.55}$$

olur.

Doğrulama: (4.55) denklemi (4.52)'de yerine yazılırsa,

$$\int_0^\infty \frac{t^{z+1}e^{-t}-(z-1)t^z e^{-t}-zt^{z-1}e^{-t}}{t+1}dt=\int_0^\infty \frac{1}{(t+1)}\left[t^z(t+1)-zt^{z-1}(t+1)\right]e^{-t}dt$$
$$=\int_0^\infty e^{-t}\left(t^z-zt^{z-1}\right)dt=\Gamma(z+1)-\Gamma(z)=0$$

elde edilir.

Sonuç: (4.52) denklemi

$$\left[f(z+2)+f(z+1)\right]-z\left[f(z+1)+f(z)\right]=0$$

gibi yazılabilir. Böylece bu denklemin çözümü

$$f(z+1)+f(z)=C(z)\Gamma(z)$$

olur. Daha genel şekilde (4.51) fark denkleminin çözümünü bulmak için

$$f(z)=\int_{t_1}^{t_2} t^{z-1}g(t)\,dt \tag{4.56}$$

dönüşümü (4.51) fark denkleminde yerine yazılırsa

$$\int_{t_1}^{t_2}\left(t^{z+1}+bt^z+dt^{z-1}\right)g(t)\,dt+z\int_{t_1}^{t_2}\left(at^z+ct^{z-1}\right)g(t)\,dt=0 \tag{4.57}$$

elde ederiz. Şimdi

$$\begin{aligned} z\int_{t_1}^{t_2}\left(at^z+ct^{z-1}\right)g(t)\,dt &= z\int_{t_1}^{t_2} t^{z-1}(at+c)g(t)\,dt \\ &=\left[t^z(at+c)g(t)\right]_{t_1}^{t_2}-\int_{t_1}^{t_2} t^z\frac{d}{dt}\left[(at+c)g(t)\right]dt \end{aligned} \tag{4.58}$$

kısmi integrali alınıp (4.58) denklemi (4.57)'nin ikinci terimi yerine yazılırsa

$$\int_{t_1}^{t_2} t^{z-1}\left[\left(t^2+bt+d\right)g(t)-t\frac{d}{dt}\left\{(at+c)g(t)\right\}\right]dt+\left[t^z(at+c)g(t)\right]_{t_1}^{t_2}=0$$

elde edilir. Şimdi

$$\left(t^2+bt+d\right)g(t)-t\frac{d}{dt}\left[(at+c)g(t)\right]=0 \tag{4.59}$$

oluşturmak için

$$\left[t^z(at+c)g(t)\right]_{t_1}^{t_2}=0 \tag{4.60}$$

$g(t)$, t_1 ve t_2 'yi seçeriz. Bu durumda denklem (4.59) denklemi

$$\frac{d}{dt}\left\{(at+c)g(t)\right\}\Big/(at+c)g(t)=\left(t^2+bt+d\right)\Big/t(at+c)$$

halini alır. Bu denklem birinci mertebeden diferansiyel denklem olup

$$(at+c)\,g(t)=e^{\int (t^2+bt+d)/(at^2+ct)dt}$$

denkleminde işlem kolaylığı için integral içindeki ifadeyi

$$\left(t^2+bt+d\right)/\left(at^2+ct\right)=A+B/t+C/(at+c)$$

şeklinde basit kesirlere ayırabiliriz. Burada

$$A=1/a,\quad B=d/c,\quad C=\left(abc-c^2-a^2d\right)/ac$$

olur. Böylece

$$(at+c)\,g(t)=e^{t/a}.t^{d/c}\,(t+c/a)^{-\left(c^2+da^2-abc\right)/a^2c}$$

ve (4.54)'den

$$\left[e^{t/a}t^{d/c}\,(t+c/a)^{-\left(c^2+da^2-abc\right)/a^2c}\right]_{t_1}^{t_2}=0$$

bulunur. t_1 ve t_2 bu koşulu sağlayacak şekilde seçilirse o zaman

$$f(z)=\int_{t_1}^{t_2} t^{z-1+d/c}e^{t/a}\,(at+c)^{\frac{b-c-a}{a}-\frac{d}{c}}\,dt$$

ifadesi (4.51) denklemini sağlar. O halde bu denklem (4.51) denkleminin çözümüdür.

Örnek: $f(z+2)-2(z+1)\,f(z+1)+(z+1)\,f(z)=0$ denklemini çözelim.

Burada $a=-2,\ b=-2,\ c=1,\ d=1$'dir. Böylece

$$\left[e^{-t/2}.t^{z+1}.(t-1/2)^{1/2}\right]_{t_1}^{t_2}=0$$

olması gerekir. Böylece z düzlemin $z=-1$'in sağ tarafında kaldığından $t_2=\infty$ ve $t_1=1/2$ seçebiliriz ve çözüm

$$f(z)=\int_{\frac{1}{2}}^{\infty} t^z e^{-t/2}\left(t-\tfrac{1}{2}\right)^{-\frac{1}{2}}dt$$

olarak bulunur.

4.2.6 Başlangıç ve sınır değer problemlerinin çözümü

Bu bölümde Bereketoğlu ve Kutay (2011) kaynağı yardımıyla ikinci mertebeden lineer self-adjoint fark denklemleri kapsayan sınır değer problemleri ele alınacak ve çözümleri bulmak için Green fonksiyonu inşa edilecektir.

Tanım (Self-adjoint): İkinci mertebeden lineer self-adjoint fark denklemi

$$\Delta\left(p(n-1)\Delta f_{n-1}\right)+q(n)\,f_n=0 \tag{4.61}$$

olarak tanımlanır; burada $p(n)$ fonksiyonu $[a,b+1]\equiv\{a,a+1,\ldots,b+1\}$ aralığında ve pozitif değerli $q(n)$ fonksiyonu $[a+1,b+1]$ üzerinde tanımlıdır.

Bu denklem açık olarak

$$p(n)\,f_{n+1}+c(n)\,f_n+p(n-1)\,f_{n-1}=0,\quad n\in[a+1,b+1] \tag{4.62}$$

biçimindedir; burada

$$c(n)=q(n)-p(n)-p(n-1) \tag{4.63}$$

dir. Tersine olarak, $p(n)$ fonksiyonu $[a,b+1]$ üzerinde pozitif olduğu sürece (4.62) denklemi

$$q(n)=c(n)+p(n)+p(n-1) \tag{4.64}$$

olmak üzere (4.61) formunda yazılabilir. Genel olarak,

$$\alpha(n)\,f_{n+1}+\beta(n)\,f_n+\gamma(n)\,f_{n-1}=0 \tag{4.65}$$

denklemi, $n\in[a,b+1]$ için $\alpha(n)>0$ ve $n\in[a+1,b+1]$ için $\gamma(n)>0$ olmak üzere (4.61) self-adjoint formunda gösterilebilir. (4.65) denkleminin iki yanı pozitif bir $\delta(n)$ fonksiyonu ile çarpılırsa,

$$\delta(n)\alpha(n)\,f_{n+1}+\delta(n)\beta(n)\,f_n+\delta(n)\gamma(n)\,f_{n-1}=0$$

bulunur. Bu denklemin (4.62) self-adjoint formunda olması için

$$\delta(n)\alpha(n)=p(n) \text{ ve } \delta(n)\gamma(n)=p(n-1)$$

sağlanmalıdır. Buradan birinci mertebeden

$$\delta(n+1)=\frac{\alpha(n)}{\gamma(n+1)}\delta(n),\quad n\in[a,b]$$

fark denklemi ortaya çıkar. Bunun çözümünü ise Bölüm 4.1.1'den

$$\delta(n)=\mu\prod_{i=a}^{n-1}\frac{\alpha(i)}{\gamma(i+1)}$$

elde ederiz. Burada μ herhangi bir pozitif sabit olup sadelik için $\mu=1$ alınırsa

$$p(n)=\alpha(n)\prod_{i=a}^{n-1}\frac{\alpha(i)}{\gamma(i+1)}$$

ve (4.64)'den

$$q(n)=\delta(n)\beta(n)+p(n)+p(n-1)$$

olduğundan (4.65) denklemi (4.61) denklemine eşdeğerdir.

Örnek: $n\geq 2$ olmak üzere

$$(n-1)\,f_{n+1}+\left(\frac{n^2}{\Gamma(n-1)}-n\right)f_n+f_{n-1}=0$$

fark denklemini self-adjoint formda yazmak için

$$\delta(n)=\prod_{i=2}^{n-1}(i-1)=(n-2)!=\Gamma(n-1)$$

fonksiyonu hesaplanır. Buna göre yeni denklemin katsayıları

$$\begin{aligned}p(n)&=(n-1)\Gamma(n-1)=\Gamma(n),\\ q(n)&=\Gamma(n-1)\left(\frac{n^2}{\Gamma(n-1)}-n\right)+\Gamma(n)+\Gamma(n-1)\\ &=n^2-n\Gamma(n-1)+(n-1)\Gamma(n-1)+\Gamma(n-1)=n^2\end{aligned}$$

dir. Böylece verilen denklemin self-adjoint formu

$$\Delta\big(\Gamma(n-1)\big)\Delta f_{n-1}+n^2 f_n=0$$

olarak bulunur.

Öte yandan (4.62) denklemi f_{n+1} ve f_{n-1}'e göre tek olarak çözülebildiğinden, bu denklemin

$$f_{n_0}=A,\qquad f_{n_0+1}=B$$

başlangıç koşullarını sağlayan bir tek çözümü vardır ve bu çözüm $[a,b+2]\equiv\{a,a+1,\ldots,b+2\}$ üzerinde tanımlıdır; burada $n_0\in[a,b+1]$ olup A ve B sabitlerdir. Benzer iddia (4.65) denklemi yerine karşılık gelen homojen olmayan denklem için de doğrudur. Bununla birlikte,

$$\Delta^2 f_{n-1}+2f_n=0,\quad f_0=A,\quad f_2=B$$

sınır değer problemi $A=B=0$ için sonsuz sayıda çözüme sahip iken $A=0$ ve $B\neq 0$ halinde hiçbir çözüme sahip değildir.

Şimdi

$$S=\{[a,b+2]\ \text{üzerinde tanımlı reel değerli fonksiyonlar}\}$$

kümesi üzerinde tanımlı olan

$$Lf_n = \Delta\left(p(n-1)\Delta f_{n-1}\right) + q(n)\, f_n,\; n \in [a+1, b+1] \tag{4.66}$$

operatörünü göz önüne alalım. Buna göre (4.61) denklemi $Lf_n = 0$ şeklinde olur.

Şimdi homojen olmayan başlangıç değer problemlerini çözerken kullanacağımız Cauchy fonksiyonundan söz edelim.

Tanım (Cauchy fonksiyonu): $f_{n,s},\; a \le n \le b+2,\; a+1 \le s \le b+1$ fonksiyonu her bir sabit $s \in [a+1, b+1]$ için

$$Lf_{n,s} = 0, \quad f_{s,s} = 0, \quad f_{s+1,s} = \frac{1}{p(s)}$$

başlangıç değer problemini sağlıyorsa, o zaman $f_{n,s}$ fonksiyonuna (4.61) denkleminin *Cauchy fonksiyonu* denir.

Örnek: $\Delta\left(p(n-1)\Delta f_{n-1}\right) = 0$ fark denkleminin Cauchy fonksiyonunu bulalım. Cauchy fonksiyonunun tanımından

$$\Delta\left(p(n-1)\Delta f_{n-1,s}\right) = 0, \quad n \in [a+1, b+1]$$

yazılır. Buradan $n \in [a+1, b+2]$ için

$$p(n-1)\Delta f_{n-1,s} = \eta(s)$$

şeklinde $\eta(s)$ sabiti var demektir. Bu sabit $n = s+1$ için $\eta(s) = 1$ dir. Şimdi n yerine $n+1$ alınırsa,

$$\Delta f_{n,s} = \frac{1}{p(n)}$$

bulunur. İki taraf, $n \ge s$ olmak üzere, s den $n-1$'e kadar toplanırsa,

$$f_{n,s} - f_{s,s} = \sum_{i=s}^{n-1} \frac{1}{p(i)}$$

çıkar. $f_{s,s} = 0$ olduğundan Cauchy fonksiyonu $n \ge s$ için

$$f_{n,s} = \sum_{i=s}^{n-1} \frac{1}{p(i)}$$

biçiminde elde edilir. Özel olarak, $\Delta^2 f_{n-1} = 0$ fark denklemi için Cauchy fonksiyonu $f_{n,s} = n - s$'dir.

Teorem: Lineer bağımsız çözümleri u_n^1 ve u_n^2 olan (4.61) denkleminin Cauchy fonksiyonu

$$f_{n,s}=\begin{vmatrix} u_s^1 & u_s^2 \\ u_n^1 & u_n^2 \end{vmatrix} \Big/ p(s)\begin{vmatrix} u_s^1 & u_s^2 \\ u_{s+1}^1 & u_{s+1}^2 \end{vmatrix} \qquad a\le n\le b+2,\ \ a+1\le s\le b+1$$

dir.

Örnek: $\Delta\big(p(n-1)\Delta f_{n-1}\big)=0$ denkleminin çözümleri $u_n^1=1,\ \ u_n^2=\sum_{i=a}^{n-1}\frac{1}{p(i)}$

olduğuna göre Cauchy fonksiyonu

$$f_{n,s}=\begin{vmatrix} 1 & \sum_{i=a}^{s-1}\frac{1}{p(i)} \\ 1 & \sum_{i=a}^{n-1}\frac{1}{p(i)} \end{vmatrix} \Bigg/ p(s)\begin{vmatrix} 1 & \sum_{i=a}^{s-1}\frac{1}{p(i)} \\ 1 & \sum_{i=a}^{s}\frac{1}{p(i)} \end{vmatrix}=\sum_{i=s}^{n-1}\frac{1}{p(i)}$$

dir.

Teorem (Sabitlerin değişimi formülü):

$$Lf_n=g_n,\quad f_a=0,\ \ f_{a+1}=0,\quad n\in[a+1,b+1]$$

başlangıç değer probleminin çözümü

$$f_n=\sum_{s=a+1}^{n} f_{n,s}g_s,\ \ n\in[a,b+2]$$

dir. Burada $f_{n,s}$, $Lf_n=0$ için Cauchy fonksiyonudur.

Örnek: $\Delta^2 f_{n-1}=n,\quad f_0=f_1=0$ başlangıç değer problemini çözelim.

Sabitlerin değişimi formülü ve özel olarak $\Delta^2 f_{n-1}=0$ fark denklemi için Cauchy fonksiyonu $f_{n,s}=n-s$ olduğundan çözüm;

$$f_n=\sum_{s=1}^{n}(n-s)s=\frac{1}{6}\left(n^3-n\right)$$

olarak bulunur.

Sonuç: $Lf_n=g_n,\quad f_a=A,\quad f_{a+1}=B,\quad n\in[a+1,b+1]$ başlangıç değer probleminin çözümü

$$f_n=u_n+\sum_{s=a+1}^{n} f_{n,s}g_s$$

dir. Burada u_n fonksiyonu $Lu_n=0, \quad u_a=A, \quad u_{a+1}=B$ başlangıç değer probleminin çözümü olup $f_{n,s}$ ise $Lf_n=0$ denklemi için Cauchy fonksiyonudur.

Tanım (diskonjuge): $[a+1,b+1]$ üzerinde $\gamma_n>0$ olmak üzere

$$f_{n+1}+\beta(n)f_n+\gamma(n)f_{n-1}=0$$

denklemi verilsin. $n\in[a+1,b+1]$ için

$$r^2+\beta(n)r+\gamma(n)\leq 0 \tag{4.67}$$

olacak şekilde bir $r>0$ sayısı varsa, o zaman (4.67) denklemi $[a,b+2]$ üzerinde *diskonjuge*dir denir.

Örnek: $f_{n+1}-f_n+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{n^2}\right)f_{n-1}=0$ denklemi $[2,\infty)$ üzerinde diskonjugedir.

Gerçekten $h(r)=r^2-r+\frac{1}{4}-\frac{1}{n^2}$ olup $[1,\infty)$ boyunca $h\left(\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{n^2}<0$ 'dır.

Tanım (Lineer Sınır-Değer Problemi): $a\leq n_1<n_2\leq b+2$ olmak üzere, f_n $[a+1,b+1]$ üzerinde tanımlı bir fonksiyon, A ve B reel sabitler olmak üzere

$$Lf_n=g_n, \quad f_{n_1}=A, \quad f_{n_2}=B \quad n\in[a+1,b+1]$$

ile tanımlı probleme *sınır değer problemi* denir.

Lineer homojen sınır değer problemlerinin aşikâr olmayan çözümlere sahip olup olmaması durumu matematiksel fiziğin en önde gelen bir araştırma konusudur. Bu kısımda ise bir homojen problemin aşikâr olmayan çözümlere sahip olabildiğini lineer sınır-değer probleminde göstereceğiz.

Teorem: $Lf_n=0$ denklemi $[a,b+2]$ üzerinde diskonjuge ise o zaman

$$Lf_n=g_n, \quad f_{n_1}=A, \quad f_{n_2}=B, \quad n\in[a+1,b+1]$$

sınır-değer problemi bir tek çözüme sahiptir.

Sonuç: $Lf_n=0$ denklemi $[a,b+2]$ üzerinde diskonjuge ise o zaman homojen

$$Lf_n=0, \quad f_a=0, \quad f_{b+2}=0$$

sınır değer probleminin tek çözümü $f_n=0$ 'dır.

Sonuç: $Lf_n=0$ denklemi $[a,b+2]$ üzerinde diskonjuge ise o zaman

$$Lf_n = g_n, \quad f_a = 0, \quad f_{b+2} = 0$$

sınır değer problemi bir tek çözüme sahiptir.

Tanım (Green fonksiyonu): Aşağıdaki koşulları sağlayan $G(n,s)$ fonksiyonuna

$$Lf_n = 0, \quad f_a = 0, \quad f_{b+2} = 0$$

homojen sınır değer problemi için *Green fonksiyonu* denir:

i. $G(n,s)$, $a \le n \le b+2$, $a+1 \le s \le b+1$ üzerinde tanımlıdır.

ii. $LG(n,s) = \delta_{ns}$, $a+1 \le n \le b+1$, $a+1 \le s \le b+1$ dir; burada δ_{ns} Kronecker deltasıdır.

iii. $G(a,s) = G(b+2,s) = 0$, $a+1 \le s \le b+1$.

Teorem: $Lf_n = 0$ denklemi $[a,b+2]$ üzerinde diskonjuge ise o zaman $Lf_n = 0$, $f_a = 0$, $f_{b+2} = 0$ homojen sınır değer problemi için *i-iii* koşullarını sağlayan bir tek $G(n,s)$ Green fonksiyonu vardır.

Teorem: $Lf_n = 0$ denklemi $[a,b+2]$ üzerinde diskonjuge ise, o zaman

$$Lf_n = 0, \quad f_a = 0, \quad f_{b+2} = 0$$

şeklinde homojen sınır değer probleminin tek Green fonksiyonu

$$G(n,s) = \begin{cases} -\dfrac{f_{b+2,s} f_n^1}{f_{b+2}^1}, & n \le s \\ -\dfrac{f_{b+2,s} f_n^1}{f_{b+2}^1} + f_{n,s}, & s \le n \end{cases} \tag{4.68}$$

şeklindedir. Burada f_n^1, $Lf_n = 0$ denkleminin bir çözümüdür.

Örnek: $\Delta\big(p(n-1)\Delta f_{n-1}\big) = 0$, $f_a = 0$, $f_{b+2} = 0$ denkleminin Cauchy ve Green fonksiyonlarını bulalım.

$$\Delta\big(p(n-1)\Delta f_{n-1,s}\big) = 0 \quad \Rightarrow \quad p(n-1)\Delta f_{n-1,s} = \eta(s)$$

şeklinde bir $\eta(s)$ sabiti vardır. Bu sabit $n = s+1$ için $\eta(s) = 1$’dir. Şimdi $n \to n+1$ alınırsa $\Delta f_{n,s} = 1/p(n)$ bulunur. İki taraf $n \ge s$ olmak üzere s’den $n-1$’e kadar toplanırsa

$$f_{n,s} - f_{s,s} = \sum_{i=s}^{n-1} \frac{1}{p(i)}$$

çıkar. $f_{s,s}=0$ olduğundan Cauchy fonksiyonu $n \geq s$ için

$$f_{n,s}=\sum_{i=s}^{n-1}\frac{1}{p(i)}$$

elde edilir. Dolayısıyla bu çözüm $f_a=0,\ f_{a+1}=1$ başlangıç koşullarını sağlar. Bu durumda f_n^1 çözümü

$$f_n^1=\sum_{i=a}^{n-1}\frac{1}{p(i)}$$

şeklindedir. (4.68)'den $n \leq s$ için

$$G(n,s)=\frac{-f_{b+2,s}\,f_n^1}{f_{b+2}^1}=-\frac{\sum_{i=s}^{b+1}\frac{1}{p(i)}\sum_{i=a}^{n-1}\frac{1}{p(i)}}{\sum_{i=a}^{b+1}\frac{1}{p(i)}}$$

ve $n \geq s$ için

$$\begin{aligned}G(n,s)&=-\frac{f_{b+2,s}\,f_n^1}{f_{b+2}^1}+f_{n,s}=\left(\sum_{i=s}^{n-1}\frac{1}{p(i)}\sum_{i=a}^{b+1}\frac{1}{p(i)}-\sum_{i=a}^{n-1}\frac{1}{p(i)}\sum_{i=s}^{b+1}\frac{1}{p(i)}\right)\Bigg/\sum_{i=a}^{b+1}\frac{1}{p(i)}\\&=\frac{\sum_{i=s}^{n-1}\frac{1}{p(i)}\left(\sum_{i=a}^{n-1}\frac{1}{p(i)}+\sum_{i=n}^{b+1}\frac{1}{p(i)}\right)}{\sum_{i=a}^{b+1}\frac{1}{p(i)}}-\frac{\sum_{i=a}^{n-1}\frac{1}{p(i)}\left(\sum_{i=n}^{b+1}\frac{1}{p(i)}+\sum_{i=s}^{n-1}\frac{1}{p(i)}\right)}{\sum_{i=a}^{b+1}\frac{1}{p(i)}}\\&=-\left(\sum_{i=a}^{s-1}\frac{1}{p(i)}\sum_{i=n}^{b+1}\frac{1}{p(i)}\right)\Bigg/\sum_{i=a}^{b+1}\frac{1}{p(i)}\end{aligned}$$

elde edilir. Sonuç olarak Green fonksiyonu

$$G(n,s)=\begin{cases}-\dfrac{\sum_{i=s}^{b+1}\frac{1}{p(i)}\sum_{i=a}^{n-1}\frac{1}{p(i)}}{\sum_{i=a}^{b+1}\frac{1}{p(i)}}, & n\leq s\\[2ex] -\dfrac{\sum_{i=a}^{s-1}\frac{1}{p(i)}\sum_{i=n}^{b+1}\frac{1}{p(i)}}{\sum_{i=a}^{b+1}\frac{1}{p(i)}}, & s\leq n\end{cases}$$

şeklindedir.

Teorem: $Lf_n=0$ denklemi $[a,b+2]$ üzerinde diskonjuge ise, o zaman

$$Lf_n=g_n,\quad f_a=0,\quad f_{b+2}=0$$

homojen olmayan sınır değer probleminin tek çözümü

$$f_n = \sum_{s=a+1}^{b+1} G(n,s)\,g_s$$

dir. Burada $G(n,s)$; $Lf_n = 0,\quad f_a = 0,\quad f_{b+2} = 0$ homojen başlangıç değer probleminin Green fonksiyonu olup (4.68) ile bellidir.

Örnek: Green fonksiyonu yardımıyla $\Delta^2 f_{n-1} = 16,\quad f_0 = 0,\quad f_8 = 0$ sınır değer problemini çözelim.

Öncesinde özel olarak homojen

$$\Delta^2 f_{n-1} = 0,\quad f_a = 0,\quad f_{b+2} = 0$$

sınır değer probleminin Green fonksiyonu

$$G(n,s) = \begin{cases} -\dfrac{(n-a)(b+2-s)}{b+2-a}, & n \le s \\ -\dfrac{(s-a)(b+2-n)}{b+2-a}, & s \le n \end{cases}$$

olduğunu belirtelim.

Şimdi homojen $\Delta^2 f_{n-1} = 0,\quad f_0 = 0\ \ f_8 = 0$ için Green fonksiyonu özel olarak $a = 0$**,** $b + 2 = 8$ alınırsa

$$G(n,s) = \begin{cases} -\dfrac{n(8-s)}{8}, & n \le s \\ -\dfrac{s(8-n)}{8}, & s \le n \end{cases}$$

olur. Sorunun çözümü bir önceki teoremden

$$\begin{aligned} f_n &= \sum_{s=1}^{7} G(n,s)16 = 16\left(\sum_{s=1}^{n} G(n,s) + \sum_{s=n+1}^{7} G(n,s)\right) \\ &= \left(n^3 - 7n^2 - 8n\right) + \left(-n^3 + 15n^2 - 56n\right) = 8n^2 - 64n \end{aligned}$$

olarak bulunur.

Sonuç: $Lf_n = 0$ denklemi $[a, b+2]$ üzerinde diskonjuge olsun. Bu durumda homojen olmayan

$$Lf_n = g_n,\quad f_a = A,\quad f_{b+2} = B$$

sınır değer probleminin tek çözümü

$$f_n = u_n + \sum_{s=a+1}^{b+1} G(n,s)\,g_s$$

dir. Burada $G(n,s)$ (4.68)'deki gibi olup u_n fonksiyonu

$$Lu_n = 0, \quad u_a = A, \quad u_{b+2} = B$$

sınır değer probleminin bir çözümüdür.

Örnek: $\Delta^2 f_{n-1} = 16,\ \ f_0 = 2\ \ f_8 = 10$ sınır değer probleminin çözümü

$$f_n = u_n + 8n^2 - 64n$$

dir ve burada u_n

$$\Delta^2 u_{n-1} = 0, \ \ u_0 = 2, \quad u_8 = 10$$

probleminin çözümü olup $u_n = n+2$ şeklinde hesaplanır. O halde çözüm

$$f_n = 8n^2 - 63n + 2$$

olarak bulunur.

Tanım (öz değer ve öz fonksiyon): Bazen fark denklemlerindeki ve/veya sınır koşullarındaki katsayılar bir parametre kapsar ve böyle bir durumda aşikâr olmayan çözümler parametrenin sadece bazı değerleri için ortaya çıkabilir. İşte parametrenin bu özel değerlerine *öz değer* ve karşılık gelen aşikâr olmayan çözümlere de *öz fonksiyon* denir.

Tanım (Sturm-Liouville problemi[63])

İkinci mertebeden lineer self-adjoint

$$\Delta\left(p(n-1)\Delta f_{n-1}\right) + q(n)\, f_n + \lambda r(n)\, f_n = 0, \quad n \in [a+1, b+1] \tag{4.69}$$

fark denklemini ve

$$f_a = \alpha\, f_{a+1}, \quad f_{b+2} = \beta\, f_{b+1} \tag{4.70}$$

sınır koşullarını göz önüne alalım; burada λ bir parametre, $p(n)$ katsayısı $[a, b+1] = \{a, a+1, \ldots, b+1\}$ üzerinde tanımlı ve pozitif değerli, $q(n)$ katsayısı $n \in [a+1, b+1] = \{a+1, a+2, \ldots, b+1\}$ için tanımlı ve $r(n)$ ağırlık fonksiyonu $[a+1, b+1]$ üzerinde tanımlı ve pozitif değerlidir. Ayrıca α ve β verilmiş reel sabitlerdir. (4.69)-(4.70) sınır değer problemine bir *Sturm-Liouville problemi* denir.

---

[63] Bu problem ismini Fransız matematikçiler Jacques Charles François Sturm (1803–1855) ve Joseph Liouville (1809–1882) tarafından almıştır.

Örnek: $\Delta^2 f_{n-1} + \lambda f_n = 0$ denklemini $f_0 = 0,\ f_8 = 0$ şartları altında çözelim.

Şimdi Sturm-Liouville probleminin öz değer ve öz fonksiyonlarını bulalım. Bu denklem açık olarak

$$f_{n+1} + (\lambda - 2) f_n + f_{n-1} = 0$$

şeklindedir. Buna ilişkin karakteristik denklemi

$$m^2 + (\lambda - 2) m + 1 = 0$$

ve karakteristik kökleri

$$m_{1,2} = \frac{-(\lambda - 2) \pm \sqrt{\lambda^2 - 4\lambda}}{2}$$

dir. Burada $\lambda < 0,\ \lambda > 4,\ \lambda = 0,\ \lambda = 4$ ve $0 < \lambda < 4$ durumları ortaya çıkar. İlk iki duruma göre m_1 ve m_2 kökleri reel ve farklı olacağından denklemin genel çözümü

$$f_n = c_1 (m_1)^n + c_2 (m_2)^n$$

dir. Sınır koşulları uygulanırsa $c_1 = c_2 = 0$ ve dolayısıyla $f_n \equiv 0$ aşikâr çözümü bulunur. O halde $\lambda < 0$ ve $\lambda > 4$ gibi sayılar öz değer olamaz. Buradan $\lambda = 0$ ve $\lambda = 4$ öz değer olamaz. Geriye $|\lambda - 2| < 2$ durumu kalır. Buna göre

$$2 - \lambda = 2\cos\theta$$

seçilebilir ve dolayısıyla karakteristik kökler

$$m_{1,2} = \cos\theta \pm i\sin\theta = e^{\pm i\theta}$$

şeklini alır. Buradan genel çözüm

$$f_n = c_1 \cos n\theta + c_2 \sin n\theta$$

dır. Sınır koşulları uygulanırsa

$$c_1 = 0, \quad c_2 \sin 8\theta = 0$$

ve dolayısıyla

$$c_2 \neq 0 \text{ ve } \theta = \frac{k\pi}{8}, \ k = 1, 2, \ldots, 7$$

alınabilir. O halde verilen problemin öz değerleri

$$\lambda_k = 2 - 2\cos\frac{k\pi}{8}, \quad k = 1, 2, \ldots, 7$$

ve öz fonksiyonları

$$\phi_n^k = \sin\frac{k\pi n}{8}, \quad k = 1, 2, \ldots, 7, \quad n = 0, 1, \ldots, 8$$

dir. Bu örnekte, öz değerlerin basit oldukları ve ayrıca öz değerlerin sayısı ile $[1,7]=\{1,2,\ldots,7\}$ kümesindeki eleman sayısının aynı olduğu vurgulanabilir. Şimdi, bu özelliklerin ve daha fazlasının genel (4.69)-(4.70) Sturm-Liouville problemi için sağlandığını gösterelim.

Teorem: (4.69)-(4.70) Sturm-Liouville probleminin öz değerleri basittir. Yani λ sayısı (4.69)-(4.70) probleminin bir öz değeri ve ϕ_n^1 ile ϕ_n^2 ona karşılık gelen öz fonksiyonlar ise, o zaman ϕ_n^1 ve ϕ_n^2 fonksiyonları $[a,b+2]$ üzerinde lineer bağımlıdır.

Tanım (ortogonallik): Her biri $[a+1,b+1]$ üzerinde tanımlı olan $\{\phi_n^1,\phi_n^2,\ldots\}$ fonksiyonları kümesi

$$\sum_{i=a+1}^{b+1} r(i)\phi_i^{\eta}\phi_i^{\mu}=0,\quad \eta\neq\mu$$

oluyorsa, $[a+1,b+1]$ üzerinde $r(n)$ ağırlık fonksiyonuna göre o*rtogonaldir* denir. Burada $r(n)$, $[a+1,b+1]$ üzerinde tanımlı ve pozitif değerli bir fonksiyondur.

Teorem: $m=0,1,2,\ldots$ için λ_m, (4.69)-(4.70) Sturm-Liouville probleminin öz değerleri ve ϕ_n^m öz değerlere karşılık gelen öz fonksiyonlar olsun. Bu durumda $\{\phi_n^m, m=0,1,2,\ldots\}$ cümlesi $[a+1,b+1]$ üzerinde $r(n)$ ağırlık fonksiyonuna göre ortogonaldir.

Teorem: λ_1 ve λ_2, (4.69)-(4.70) Sturm-Liouville probleminin öz değerleri ve ϕ_n^1 ile ϕ_n^2 bu iki öz değerler karşılık gelen öz fonksiyonlar olsun. Bu durumda ϕ_n^1 ve ϕ_n^2, $[a,b+2]$ üzerinde ancak ve ancak $\lambda_1=\lambda_2$ olması halinde lineer bağımlıdır.

Teorem: (4.69)-(4.70) Sturm-Liouville problemininin bütün öz değerleri reeldir.

Teorem: (4.69), $f_a=0,\ f_{b+2}=0$ Sturm-Liouville problemi $\lambda_1<\lambda_2<\ldots<\lambda_k$ şeklinde $k=b-a+1$ tane öz değere sahiptir.

Örnek: $\Delta^2 f_{n-1}+2\lambda f_n=0,\ n\in[1,b+1]$ denklemini $f_0=f_{b+2}=0$ şartları altında çözelim.

Şimdi Sturm-Liouville probleminin öz değer ve öz fonksiyonlarını bulalım. Bu denklem açık olarak

$$f_{n+1} + (2\lambda - 2) f_n + f_{n-1} = 0$$

şeklindedir. Buna ilişkin karakteristik denklem

$$m^2 + (2\lambda - 2) m + 1 = 0$$

ve karakteristik kökler

$$m_{1,2} = \frac{-(2\lambda - 2) \pm \sqrt{4\lambda^2 - 8\lambda}}{2}$$

dir. Burada $\lambda < 0,\ \lambda > 2,\ \lambda = 0,\ \lambda = 2$ ve $0 < \lambda < 2$ durumları ortaya çıkar. İlk iki duruma göre m_1 ve m_2 kökleri reel ve farklı olacağından denklemin genel çözümü

$$f_n = c_1 (m_1)^n + c_2 (m_2)^n$$

dir. Sınır koşulları uygulanırsa $c_1 = c_2 = 0$ ve dolayısıyla $f_n \equiv 0$ aşikâr çözümü bulunur. O halde $\lambda < 0$ ve $\lambda > 2$ gibi sayılar öz değer olamaz. Buradan $\lambda = 0$ ve $\lambda = 2$ öz değer olamaz. Geriye $|2\lambda - 2| < 2$ durumu kalır. Buna göre

$$1 - \lambda = \cos\theta$$

seçilebilir ve dolayısıyla karakteristik kökler

$$m_{1,2} = \cos\theta \pm i\sin\theta = e^{\pm i\theta}$$

şeklini alır. Buradan genel çözüm

$$f_n = c_1 \cos n\theta + c_2 \sin n\theta$$

dır. Sınır koşulları uygulanırsa

$$c_1 = 0,\quad c_1 \cos(b+2)\theta + c_2 \sin(b+2)\theta = 0$$

ve dolayısıyla

$$c_2 \neq 0 \text{ ve } \theta = \frac{k\pi}{b+2},\ k = 1, 2, \ldots, b+1$$

alınabilir. O halde verilen problemin öz değerleri

$$\lambda_k = 1 - \cos\frac{k\pi}{b+2} = 2\sin^2\frac{k\pi}{2(b+2)},\quad k = 1, 2, \ldots, b+1$$

ve öz fonksiyonları

$$\phi_n^k = \sin\frac{k\pi n}{b+2},\quad k = 1, 2, \ldots, 7,\quad n = 0, 1, \ldots, b+2$$

dir.

4.3 *E* Operatörü ile Çarpanlara Ayrılabilen Denklemler

Bu bölümde Kelly ve Peterson (2001) kaynağından yararlanılarak m. mertebe fark denklemi E operatörü yardımıyla çarpanlara ayrılması üzerinde durulacaktır.
Şimdi

$$f(x+m) + p_1(x) f(x+m-1) + \ldots + p_m(x) f(x) = g(x) \tag{4.1}$$

denklemini ele alalım. Eğer bu denklem E operatörü yardımıyla

$$(a_1E+b_1)(a_2E+b_2)\ldots(a_mE+b_m) f(x) = g(x)$$

şeklinde çarpanlara ayrılabilirse genel çözüm her bir bağımlı değişken için m lineer fark denklemi çözülerek bulunabilir. Burada a_i ve b_i'ler sabit ya da x'in fonksiyonları olabilir. Bunun için

$$(a_2E+b_2)\ldots(a_mE+b_m) f(x) = z(x)$$

alınır ve daha sonra

$$(a_1E+b_1) z(x) = g(x)$$

elde edilir. Bu birinci mertebe denklem çözülerek $z(x)$ bulunur. Bu şekilde

$$(a_3E+b_3)\ldots(a_mE+b_m) f(x) = w(x)$$

olmak üzere

$$(a_2E+b_2) w(x) = z(x)$$

birinci mertebe denklem çözülür. Bu işlem sistematik olarak izlenirse sonunda $f(x)$ çözümüne ulaşılmış olur.

Örnek: $\left(E^2-(x+1)E-(x+1)\right) f(x) = 0$ denklemini çözelim.

Bu denklem çarpanlara ayrılırsa

$$(E+1)\left(E-(x+1)\right) f(x) = 0$$

elde edilir.

$$\left(E-(x+1)\right) f(x) = v(x)$$

dönüşümü yapılırsa

$$(E+1) v(x) = 0$$

olup, bu denklemin çözümü $v(x) = (-1)^x C(x)$ olur. O halde denklem

$$\left(E-\left(x+1\right)\right)f\left(x\right)=\left(-1\right)^{x}C\left(x\right)$$

halini alır. Bu denklemin homojen kısmının çözümü (4.10)'dan $D\left(x\right)\Gamma\left(x+1\right)$ olup birinci mertebeden değişken katsayılı homojen olmayan fark denkleminin analitik çözümü (4.9)'dan

$$f\left(x\right)=D\left(x\right)\Gamma\left(x+1\right)+C\left(x\right)\Gamma\left(x+1\right)\sum\frac{\left(-1\right)^{x}}{\Gamma\left(x+2\right)}$$

elde edilir. Burada $C\left(x\right)$ ve $D\left(x\right)$ periyodik fonksiyonlardır. Eğer x ayrık noktalar kümesi üzerinde olsaydı

$$f\left(x\right)=d.x!+c.x!\sum_{k=0}^{x-1}\frac{\left(-1\right)^{k}}{\left(k+1\right)!}$$

elde edilirdi ve burada c ve d keyfi sabitlerdir.

Örnek: $f_{n+2}-\left(n+2\right)f_{n+1}+nf_{n}=n$ denklemini çözelim.

Verilen denklemi E operatörü yardımıyla

$$\left[E^{2}-\left(n+2\right)E+n\right]f_{n}=n$$

şeklinde yazılabildiğinden dolayı operatör yardımıyla çarpanlara ayırıp çözülebilir. Bu son denklemde a_n ve b_n 'leri bulmak için verilen denklemi

$$\left(E-a_{n}\right)\left(E-b_{n}\right)f_{n}=n$$

şekline çevirelim. Bu denklemin sol tarafını açarsak

$$\begin{aligned}\left(E-a_{n}\right)\left(f_{n+1}-b_{n}f_{n}\right)&=f_{n+2}-b_{n+1}f_{n+1}-a_{n}\left(f_{n+1}-b_{n}f_{n}\right)\\&=f_{n+2}-\left(a_{n}+b_{n+1}\right)f_{n+1}+a_{n}b_{n}f_{n}\end{aligned}$$

elde edilir. Bu son bulduğumuz denklem soruda verilen denklemin çarpanlara ayrılmış haline eşitlenirse

$$a_{n}+b_{n+1}=n+2,\quad a_{n}b_{n}=n$$

eşitlikleri elde edilir. Buradan denklemimiz

$$\left(E-1\right)\left(E-n\right)f_{n}=n$$

şeklinde istenilen forma gelmiş olur. Bu denklemde

$$\left(E-n\right)f_{n}=z_{n}$$

alınırsa

$$\left(E-1\right)z_n = n \quad \Rightarrow \quad \Delta z_n = n$$
$$z_n = c_1 + \sum_{1}^{n-1} n = c_1 + \frac{n\left(n-1\right)}{2}$$

elde edilir. O halde z_n yerine yazılırsa denklem

$$\left(E-n\right) f_n = c_1 + \frac{n\left(n-1\right)}{2}$$

olarak bulunur. Buradan çözüm (4.6)'dan

$$f_n = \left(n-1\right)!\sum_{r=1}^{n-1}\left(\frac{\frac{1}{2}r\left(r-1\right)+c_1}{r!}\right)+c_2\left(n-1\right)!$$
$$= \frac{\left(n-1\right)!}{2}\sum_{r=1}^{n-1}\left(\frac{r\left(r-1\right)}{r!}\right)+c_1\left(n-1\right)!\sum_{r=1}^{n-1}\left(\frac{1}{r!}\right)+c_2\left(n-1\right)!$$

elde edilir.

4.4 ρ ve π Operatörleri Yardımıyla Çözüm

ρ ve π operatörlerinin tanımı ve arasındaki bağıntılar ikinci bölümde verilmişti.

m. mertebe fark denkleminin homojen kısmını ρ operatörü ile çözebilmemiz için

$$\rho = x \qquad \rho^2 = x\left(x+1\right) \qquad \rho^3 = x\left(x+1\right)\left(x+2\right) \qquad ,\ldots$$
$$x = \rho \qquad x^2 = \rho\left(\rho-1\right) \qquad x^3 = \rho\left(\rho-1\right)\left(\rho-2\right) \qquad ,\ldots$$

ρ operatörü tanımındaki bağıntılara ihtiyaç vardır. Ayrıca özel çözüm elde etmek için $g\left(x\right)$ fonksiyonunu da a_i'ler sabit olmak üzere ρ operatörü cinsinden

$$g\left(x\right) = a_0 + a_1\rho + a_2\rho^2 + a_3\rho^3 + \ldots$$
$$= a_0 + a_1 x + a_2 x\left(x+1\right) + a_3 x\left(x+1\right)\left(x+2\right) + \ldots$$

yazılarak çözüme gidilir. Bu polinomun katsayıları daha açık ifade edilebilir. Yani $x=0$ olduğunda $a_0 = g\left(0\right)$, $x=1$ olduğunda $a_1 = f\left(0\right) - f\left(-1\right) = \Delta f\left(-1\right)$, $x=-2$ olduğunda $a_2 = \Delta^2 f\left(-2\right)/2!$ olur. Bu şekilde devam edilerek kaynak fonksiyon

$$g\left(x\right) = g\left(0\right) + \sum_{n=1}^{m} \frac{\Delta^n g\left(-n\right)}{n!}\rho^n$$

$\phi\left(\rho\right)$ halinde yazılmış olur.

Şimdi m. mertebe

$$f(x+m) + p_1\left(x\right) f(x+m-1) + \ldots + p_m\left(x\right) f\left(x\right) = g(x) \tag{4.1}$$

fark denklemini Levy ve Lessman (1961) kaynağı yardımıyla ρ ve π operatörü özelliklerinden yararlanarak dört farklı durumda inceleyelim.

Durum 1: *m.* mertebe değişken katsayılı (4.1) fark denklemi $\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_m$ sabit olmak üzere

$$\left(\rho^m+\lambda_1\rho^{m-1}+\lambda_2\rho^{m-2}+\ldots+\lambda_m\right)f(x)=\phi(\rho) \tag{4.71}$$

polinom formunda yazılabilmesi durumunda genel çözüm bulunabilir. Eğer (4.71) denkleminin homojen kısmı $a_1,a_2,\ldots,a_m$ 'ler sabit olmak üzere

$$(\rho-a_1)(\rho-a_2)\ldots(\rho-a_m)f(x)=0 \tag{4.72}$$

şeklinde çarpanlarına ayrılabiliyorsa bu durumda (4.72) denkleminin çözümü

$$f(x)=\frac{1}{\Gamma(x)}\sum_{n=1}^{m}C_n(x)a_n{}^x$$

dir. Burada $C_n(x)$ birim periyotlu periyodik bir fonksiyondur.

Eğer (4.71) denkleminin homojen kısmı

$$(\rho-a)^m f(x)=0 \tag{4.73}$$

şeklinde katlı çarpanlara ayrılmış halde yazılabiliyorsa bu durumda (4.72) denkleminin çözümü

$$f(x)=\frac{a^x}{\Gamma(x)}\sum_{n=0}^{m-1}C_n(x)x^n$$

dir. Burada $C_n(x)$'ler periyodik fonksiyonlardır.

Örnek: $x(x+1)f(x+2)-5xf(x+1)+6f(x)=0$ denklemini çözelim.

ρ operatörünün özelliklerinden yararlanılarak bu denklem

$$\left(\rho^2-5\rho+6\right)f(x)=0 \text{ ya da } (\rho-3)(\rho-2)f(x)=0$$

şeklinde yazılabilir ve bu denklemin çözümü

$$f(x)=\frac{1}{\Gamma(x)}\left(C_1(x)3^x+C_2(x)2^x\right)$$

olarak bulunur. Burada $C_1(x)$ ve $C_2(x)$ birim periyotlu periyodik fonksiyonlardır.

Örnek: *a* sabit olmak üzere $x(x+1)f(x+2)-2axf(x+1)+a^2f(x)=0$ denklemini çözelim.

ρ operatörünün özelliklerinden yararlanılarak bu denklem

$$\left(\rho^2 - 2a\rho + a^2\right) f(x) = 0 \;\Rightarrow\; (\rho - a)^2 f(x) = 0$$

şeklinde yazılabilir ve bu denklemin çözümü

$$f(x) = a^x \left(xC_1(x) + C_2(x)\right) / \Gamma(x)$$

olarak bulunur. Burada $C_1(x)$ ve $C_2(x)$ birim periyotlu periyodik fonksiyonlardır.

Örnek: $xf(x+1) - 2f(x) = x^3 + 2x^2 - 2$ denklemini çözelim.

Bu denklemin sağ tarafını $x^3 + 2x^2 - 2 = a_0 + a_1 x + a_2 x(x+1) + a_3 x(x+1)(x+2)$ şeklinde yazıp x'e $0, -1, -2, -3$ değerleri verildiğinde $a_0 = -2$, $a_1 = -1$, $a_2 = -1$, $a_3 = 1$ olarak bulunur. O halde

$$x^3 + 2x^2 - 2 = \rho^3 - \rho^2 - \rho - 2 = (\rho - 2)\left(\rho^2 + \rho + 1\right)$$

yazılabilir. Bu durumda denklemi

$$(\rho - 2) f(x) = (\rho - 2)\left(\rho^2 + \rho + 1\right)$$

olarak ρ operatörü yardımıyla yazılmış olur. Bu denklemin sırasıyla homojen kısmının çözümü ve özel çözümü

$$f_h(x) = C(x) 2^x / \Gamma(x)$$
$$f_ö(x) = \left(\rho^2 + \rho + 1\right).1 = x(x+1) + x + 1 = (x+1)^2$$

olur. O halde verilen denklemin çözümü

$$f(x) = C(x) 2^x / \Gamma(x) + (x+1)^2$$

olarak bulunur. Burada $C(x)$ birim periyodik fonksiyondur.

Durum 2: *m.* mertebeden (4.1) denkleminin homojen kısmı

$$(\pi - a_1)(\pi - a_2)\ldots(\pi - a_m) f(x) = 0$$

şeklinde düzenlenebilirse çözümde eleme yöntemine gidilerek ilk önce

$$(\pi - a_m) f(x) = 0$$

çözülerek işlemler devam ettirilir. Yani

$$(\pi - a_m) f(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad x\Delta f(x) - a_m f(x) = 0$$
$$xf(x+1) = (x + a_m) f(x)$$

olup bu son denklemin çözümü

$$f(x) = C_m(x) \Gamma(x + a_m) / \Gamma(x)$$

olup genellenirse çözüm

$$f(x)=\frac{1}{\Gamma(x)}\sum_{r=1}^{m}C_r(x)\Gamma(x+a_r)$$

olur. Burada $C_r(x)$'ler birim periyodik fonksiyonlardır.

Durum 3: *m.* mertebeden (4.1) denkleminin homojen kısmı $\left[\rho+\phi(\pi)\right]f(x)=0$ şeklinde yazılabilirse bu durumda

$$f(x)=a_0+a_1\rho+a_2\rho^2+a_3\rho^3+\ldots$$

olmak üzere denklem

$$\begin{aligned}a_0\rho+a_1\rho^2+a_2\rho^3+\ldots+a_{n-1}\rho^n+\ldots+a_0\phi(0)+a_1\phi(1)\rho\\ +a_2\phi(2)\rho^2+a_3\phi(3)\rho^3+\ldots+a_n\phi(n)\rho^n+\ldots=0\end{aligned}$$

yazılabilir. Dolayısıyla $\phi(\pi)\rho^n=\rho^n\phi(n)$ özelliği yardımıyla da denklem düzenlenir ve ρ'nun katsayıları eşitlenirse

$$\begin{aligned}a_o\phi(0)&=0,\\ a_1\phi(1)+a_0&=0,\\ a_2\phi(2)+a_1&=0,\\ &\vdots\\ a_n\phi(n)+a_{n-1}&=0,\\ &\vdots\end{aligned}$$

elde edilir. Eğer bu eşitliklerde $\phi(n)$'nin herhangi bir değeri sıfırdan farklı ise bu durumda $a_0=a_1=a_2=\ldots=0$ olur ve bu durumda ρ'nun kuvvet serisinin çözümü olmaz. Eğer $\phi(n)$ $(n=0,1,2,3,\ldots,m)$ sıfırsa bu durumda ρ serisi ρ^{r+1} terimiyle başlar. Bu durumda çözüme ulaşılacaktır. Ancak bu sefer yakınsama problemi ortaya çıkacaktır. Örneğin $\phi(1)=0$ için $\left[\rho+\phi(\pi)\right]f(x)=0$ denkleminin çözümü

$$\begin{aligned}f(x)&=a_1\left[-\frac{\rho^2}{\phi(2)}+\frac{\rho^3}{\phi(2)\phi(3)}-\frac{\rho^4}{\phi(2)\phi(3)\phi(4)}+\ldots\right]\\ &=-a_1\left[\frac{x(x+1)}{\phi(2)}-\frac{x(x+1)(x+2)}{\phi(2)\phi(3)}+\frac{x(x+1)(x+2)(x+3)}{\phi(2)\phi(3)\phi(4)}-\ldots\right]\end{aligned}$$

olur. Bu parantezin iç kısmı bir geometrik seri olup bu serinin genel terimi

$$a_n=\frac{x(x+1)(x+2)\ldots(x+n)}{\phi(2)\phi(3)\ldots\phi(n+1)}$$

şeklindedir. Yakınsaklık için oran testi $n > N$ için

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{x+n+1}{\phi(n+2)} < 1$$

olmasını gerektirir. Bu oran ise n'e göre $\phi(n+2)$'nin derecesine bağlıdır. Açıkça, eğer $\phi(\pi)$'nin derecesi birden büyükse yakınsak çözüm kolayca elde edilir.

Örnek: $(x+1)f(x+2)-(2x+1-\lambda)f(x+1)+xf(x)=0$ denklemini çözelim.

Öncelikle bu denklemin her iki tarafı x ile çarpılıp daha sonra π ve ρ operatörlerinin

$$\rho^2 f(x) = x(x+1)f(x+2)$$
$$\rho f(x) = xf(x+1)$$
$$x = \rho - \pi$$

özelliklerinden yararlanılarak denklem

$$\left[\rho^2-(2\rho-2\pi+1-\lambda)\rho+(\rho-\pi)(\rho-\pi)\right]f(x)=0$$
$$\left[\rho^2-2\rho^2+2\pi\rho-\rho+\lambda\rho+\rho^2-\rho\pi-\pi\rho+\pi^2\right]f(x)=0$$
$$\left[\pi\rho-\rho+\lambda\rho-\rho\pi+\pi^2\right]f(x)=0$$

şeklinde bulunur. Bulunan son eşitlikte $\pi^s\rho^r = \rho^r(\pi+r)^s$ özelliği kullanılırsa

$$\pi\rho = \rho(\pi+1) = \rho\pi+\rho$$

yazılabilir. Bu durumda denklemimiz

$$\left[\pi\rho-\rho+\lambda\rho-\rho\pi+\pi^2\right]f(x)=0$$
$$\left[\rho\pi+\rho-\rho+\lambda\rho-\rho\pi+\pi^2\right]f(x)=0$$
$$\left(\lambda\rho+\pi^2\right)f(x)=0$$

halini alır. Şimdi geçici olarak

$$f(x) = a_0+a_1\rho+a_2\rho^2+a_3\rho^3+\ldots$$

alınıp denklemde yerine yazılırsa

$$\lambda a_0\rho+\lambda a_1\rho^2+\lambda a_2\rho^3+\ldots+\lambda a_{n-1}\rho^n+\ldots$$
$$+\pi^2a_0+a_1\pi^2\rho+a_2\pi^2\rho^2+a_3\pi^2\rho^3+\ldots+a_n\pi^2\rho^n=0$$

elde edilir. Buradan $\phi(\pi)\rho^n = \rho^n\phi(n)$ özelliği yardımıyla

$$\pi^2 a_0 = 0$$
$$\pi^2 \rho = 1^2 \rho$$
$$\vdots$$
$$\pi^2 \rho^n = n^2 \rho^n$$

elde edilir. Bu eşitlikler denklemde yerine yazılır ve ρ'nun katsayıları eşitlenirse

$$a_1 1^2 = -\lambda a_0$$
$$a_2 2^2 = -\lambda a_1$$
$$a_3 3^2 = -\lambda a_2$$
$$\vdots$$
$$a_n n^2 = -\lambda a_{n-1}$$

elde edilir. Bu eşitliklerden a_0 keyfi seçilmesi durumunda

$$a_1 = -\lambda a_0 / 1^2$$
$$a_2 = -\lambda^2 a_0 / 1^2 2^2$$
$$a_3 = -\lambda^3 a_0 / 1^2 2^2 3^2$$
$$\vdots$$
$$a_n = -\lambda^n a_0 / 1^2 2^2 \dots n^2$$

elde edilir. O halde çözüm

$$\begin{aligned} f(x) &= a_0 \left[1 - \lambda\rho/1^2 + \lambda^2 \rho^2 / 1^2 2^2 - \lambda^3 \rho^3 / 1^2 2^2 3^2 + \dots \right] \\ &= a_0 \left[1 - \lambda x / 1^2 + \lambda^2 x(x+1)/1^2 2^2 - \lambda^3 x(x+1)(x+2)/1^2 2^2 3^2 + \dots \right] \end{aligned}$$

dir.

Örnek: $(x+1) f(x+2) - (2x+3) f(x+1) + xf(x) = x^2$ denklemini çözelim.

Bu denklemin her iki tarafını x ile çarpılıp daha sonra denklemin her bir terimi

$$\rho^2 f(x) = x(x+1) f(x+2)$$
$$\rho f(x) = xf(x+1)$$
$$x = \rho - \pi$$

özellikleri yardımıyla düzenlenirse denklem

$$\left[\rho^2 - (2\rho - 2\pi + 3)\rho + (\rho - \pi)(\rho - \pi) \right] f(x) = (\rho - \pi)(\rho - \pi)(\rho - \pi)$$
$$\left[\rho^2 - 2\rho^2 + 2\pi\rho - 3\rho + \rho^2 - \rho\pi - \pi\rho + \pi^2 \right] f(x) = (\rho - \pi)(\rho - \pi)(\rho - \pi)$$

şeklinde olur. Bulunan eşitliğin sol ve sağ kısmı $\pi^s \rho^r = \rho^r (\pi + r)^s$ özelliği yardımıyla

$$\left[\pi\rho-\rho\pi-3\rho+\pi^2\right]f(x)=\left[\rho\pi+\rho-\rho\pi-3\rho+\pi^2\right]f(x)=\left[-2\rho+\pi^2\right]f(x)$$

$$\begin{aligned}(\rho-\pi)(\rho-\pi)(\rho-\pi)&=\left(\rho^3-\rho\pi\rho-\pi\rho^2+\pi^2\rho\right)\\&=\left[\rho^3-\rho^2(\pi+1)-\rho^2(\pi+2)+\rho(\pi+1)^2\right]\\&=\rho^3-3\rho^2+\rho\end{aligned}$$

elde edilir. Bulunan bu sonuçlar denklemde yerine yazılırsa

$$\left(-2\rho+\pi^2\right)f(x)=\rho^3-3\rho^2+\rho$$

elde edilir. Şimdi geçici olarak

$$f(x)=a_0+a_1\rho+a_2\rho^2+a_3\rho^3+\ldots$$

alıp denklemde yerine yazılırsa

$$\pi^2a_0+a_1\pi^2\rho-2a_0\rho+a_2\pi^2\rho^2-2a_1\rho^2+a_3\pi^3\rho^3-2a_2\rho^3+\ldots=\rho-3\rho^2+\rho^3$$

elde edilir. Buradan $\phi(\pi)\rho^n=\rho^n\phi(n)$ özelliği yardımıyla sol kısım

$$\begin{aligned}\pi^2a_0+a_1\rho-2a_0\rho+a_2 4\rho^2-2a_1\rho^2+a_3 27\rho^3-2a_2\rho^3+\ldots&=\rho-3\rho^2+\rho^3\\\pi^2a_0+(a_1-2a_0)\rho+(4a_2-2a_1)\rho^2+(27a_3-2a_2)\rho^3+\ldots&=\rho-3\rho^2+\rho^3\end{aligned}$$

şeklinde elde edilir. Bu denklemde her iki tarafın benzer terimlerinin katsayıları eşitlenirse $a_n\ (n=1,2,3,\ldots)$'ler a_0'a bağlı olarak

$$a_1=2a_0+1,\qquad a_2=(4a_0-1)/4,\qquad a_3=(4a_0+1)/18,\qquad a_4=(4a_0+1)/144$$

elde edilir. Burada a_0 tanımlı değildir. Bu eşitliklerde $a_3=0$ seçilirse a_3'den sonra gelecek bütün terimler sıfır olur. O halde $a_0=-1/4$ seçelim bu durumda $a_1=1/2$ ve $a_2=-1/2$ elde edilir. O halde genel çözüm

$$f(x)=-\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\rho-\frac{1}{2}\rho^2=-\frac{x^2}{2}-\frac{1}{4}$$

dür.

Durum 4: (4.1) denkleminin $(\rho-a)f(x)=\phi(\rho)$ şeklinde yazılabildiğini varsayalım. Ayrıca sağ taraf bir ρ operatör fonksiyonu tarafından 1'e uygulandığından x'in bir fonksiyonu olarak kabul edilebilir. Sembolik olarak yazılan $\phi(\rho)/(\rho-a).1$ özel çözümü, kalıcı bir şekilde yorumlanabiliyorsa işlemin çözümü mümkündür. Şimdi $\phi(\rho)/(\rho-a)$, ρ'nun artan ya da azalan kuvvetlerine göre genişletilebilir.

1. $\phi(\rho)/(\rho-a)=a_0\rho^r+a_1\rho^{r+1}+a_2\rho^{r+2}+\ldots$

$$=a_0x(x+1)\ldots(x+r-1)+a_1x(x+1)\ldots(x+r)$$
$$+a_2x(x+1)\ldots(x+r+1)+\ldots$$

böyle bir seri yakınsamayabilir çünkü bu seri m 'nin belli bir değerinden büyük tüm değerleri için

$$\left|a_{m+1}(x+r+m)/a_m\right|<1$$

oran testini gerektirir. Bunula birlikte eğer x negatif tamsayı olması koşuluyla sınırlı bir dizi olacaktir.

2. $\phi(\rho)/(\rho-a)=\chi(\rho)+a_1\rho^{-1}+a_2\rho^{-2}+\ldots$ burada $\chi(\rho)$ sonlu dereceli ρ 'nun bir polinomudur. Terimleri

$$\left(a_1\rho^{-1}+a_2\rho^{-2}+\ldots\right).1=a_1/(x-1)+a_2/(x-1)(x-2)+\ldots$$

ile verilen seriler x 'in negatif sayı olmaması şartıyla yakınsaktır.

4.5 Seriler Yardımıyla Çözüm

Bu bölümde $m.$ mertebe fark denklemini Levy ve Lessman (1961) Spiegel (1971), Kelly ve Peterson (2001 kaynaklarından yararlanarak üreten fonksiyon, faktöriyel serisi ve bir parametreli artan ya da azalan kuvvet serileri yardımıyla çözeceğiz.

4.5.1 Üreten fonksiyon yöntemi

Eğer

$$f_{n+m}+p_1(n)\,f_{n+m-1}+\ldots+p_m(n)\,f_n=g(n) \tag{4.2}$$

$m.$ mertebe fark denkleminin $p_1,p_2,\ldots,p_m$ katsayıları polinom ise (4.2) denkleminin çözümü için bir üreten fonksiyon

$$G(x)=\sum_{n=0}^{\infty}f_nx^n \tag{4.74}$$

şeklinde tanımlanır. Bu fonksiyon verilen denklemde yerine yazılarak çözüme gidilir.

Örnek: $(n+2)\,f_{n+2}-(n+3)\,f_{n+1}+2f_n=0$ denklemini üreten fonksiyon metoduyla çözelim.

Bu denklemi (4.74) üreten fonksiyonuna benzetmek için x^n ile çarpıp 0 'dan ∞ 'a toplamı alınırsa

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)\, f_{n+2}x^{n}-\sum_{n=0}^{\infty}(n+3)\, f_{n+1}x^{n}+2\sum_{n=0}^{\infty} f_{n}x^{n}=0$$

elde edilir. Bu son bulunan eşitlikte indis sınırlarını denklemdeki f_n fonksiyonlarının indisi n olacak şekilde ayarlanırsa

$$\sum_{n=2}^{\infty}nf_{n}x^{n-2}-\sum_{n=1}^{\infty}(n+2)\, f_{n}x^{n-1}+2\sum_{n=0}^{\infty} f_{n}x^{n}=0 \tag{4.75}$$

elde edilir. Ayrıca $G(x)$ fonksiyonunun birinci türevi alındığında

$$G'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}nf_{n}x^{n-1}$$

elde edilir. Şimdi (4.75) denkleminin ilk terimi

$$\sum_{n=2}^{\infty}nf_{n}x^{n-2}=\frac{1}{x}\left(G'(x)-f_{1}\right)$$

olup (4.75) denkleminin ikinci terimi

$$\sum_{n=1}^{\infty}(n+2)\, f_{n}x^{n-1}=\sum_{n=1}^{\infty}nf_{n}x^{n-1}+2\sum_{n=1}^{\infty} f_{n}x^{n-1}=G'(x)+\frac{2}{x}\left(G(x)-f_{0}\right)$$

şeklinde yazılabilir. Bulunan bu denklemleri (4.75) denkleminde yerine yazılırsa

$$\frac{1}{x}\left(G'(x)-f_{1}\right)-G'(x)-\frac{2}{x}\left(G(x)-f_{0}\right)+2G(x)=0$$

ya da

$$G'(x)-2G(x)=\frac{f_{1}-2f_{0}}{1-x}$$

şeklinde birinci mertebeden diferansiyel denklem elde edilir. Bulunan bu son denklemde özel olarak $f_1=2f_0$ alınıp denklem çözülürse

$$G(x)=e^{2x}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^{n}}{n!}x^{n}$$

elde edilir. Sol tarafın kuvvet serisi açılıp aynı kuvvetteki terimlerin katsayıları eşitlenirse

$$f_{n}=\frac{2^{n}}{n!},\quad (n=0,1,2,\dots)$$

olarak bulunur.

4.5.2 Faktöriyel serisi ile çözüm

Bu kısımda (4.2) formundaki fark denklemlerinin

$$f_{n}=\sum_{r=0}^{\infty}c_{r}n^{(r)} \tag{4.76}$$

faktöriyel serisi şeklindeki çözümü araştırılacaktır. Burada c_r katsayıları bilinmeyendir.

Örnek: $(n+1)\, f_{n+2} - (3n+2)\, f_{n+1} + (2n-1)\, f_n = 0$ denklemini çözelim.

Bu denklem

$$(n+1)\Delta^2 f_n - n\Delta f_n - 2 f_n = 0$$

şeklinde yazılabilir. Bu denklemin (4.76) faktöriyel seri çözümünün olduğunu düşünelim. Burada $r = -1, -2, -3, \dots$ için $c_r = 0$'dır. Faktöriyel fonksiyonun özeliklerinden biz bu eşitliği

$$\Delta f_n = \sum_{r=0}^{\infty} r c_r n^{(r-1)} \text{ ve } \Delta^2 f_n = \sum_{r=0}^{\infty} r(r-1) c_r n^{(r-2)}$$

şeklinde yazabiliriz. Bu eşitler denklemde yerine yazılarak

$$\sum_{r=0}^{\infty} r(r-1) c_r n n^{(r-2)} + \sum_{r=0}^{\infty} r(r-1) c_r n^{(r-2)} - \sum_{r=0}^{\infty} r c_r n n^{(r-1)} - \sum_{r=0}^{\infty} 2 c_r n^{(r)} = 0$$

elde edilir. Burada toplamın sınırları ihmal edilip faktöriyel fonksiyonunun

$$n.n^{(r)} = n^{(r+1)} + r.n^{(r)}$$

özelliği yardımıyla

$$\sum r(r-1) c_r \left[n^{(r-1)} + (r-2) n^{(r-2)} \right] + \sum r(r-1) c_r n^{(r-2)}$$
$$- \sum r c_r \left[n^{(r)} + (r-1) n^{(r-1)} \right] - \sum 2 c_r n^{(r)} = 0$$

elde edilir. Bu sıra ile $n^{(r)}$'nin katsayıları toplanırsa

$$\sum \left\{ (r+2)(r+1)^2 c_{r+2} - (r+2) c_r \right\} n^{(r)} = 0$$

elde edilir. Bu bir özdeşlik olduğu için her katsayısı sıfır olmalıdır. Bu denklemi $r = -1, -2, -3, \dots$ için $c_r = 0$ kullanılarak ve $r = 0, 1, 2, 3, \dots$ için $r + 2 \neq 0$ olması şartıyla $(r+2)$ ile bölerek

$$(r+1)^2 c_{r+2} - c_r = 0$$

elde edilir. Bu denklemde $r = 0, 1, 2, 3, \dots$ sırasıyla verilirse

$$1^2 c_2 - c_0 = 0$$
$$2^2 c_3 - c_1 = 0$$
$$3^2 c_4 - c_2 = 0$$
$$4^2 c_5 - c_3 = 0$$
$$\vdots$$

elde edilir. Buradan

$$c_2=\frac{c_0}{1^2},\quad c_3=\frac{c_2}{2^2},\quad c_4=\frac{c_2}{3^2}=\frac{c_0}{1^2 3^2},\quad c_5=\frac{c_3}{4^2}=\frac{c_1}{2^2 4^2},\quad \ldots$$

katsayıları elde edilir. Bu katsayılar seride yerine yazılırsa

$$f_n=c_0\left[1+\frac{n^{(2)}}{1^2}+\frac{n^{(4)}}{1^2.3^2}+\frac{n^{(6)}}{1^2.3^2.5^2}+\cdots\right]+c_1\left[n^{(1)}+\frac{n^{(3)}}{2^2.4^2}+\frac{n^{(5)}}{2^2.4^2.6^2}+\ldots\right]$$

çözümü elde edilir.

4.5.3 Bir parametreli artan veya azalan kuvvet serilerine açılım

Belirli koşullar altında

$$f(x+2)+p(x,\lambda)\,f(x+1)+q(x,\lambda)\,f(x)=0$$

formunda ikinci mertebeden lineer fark denklemini sağlayan

$$f(x)=f_0(x)+\lambda f_1(x)+\lambda^2 f_2(x)+\ldots$$

veya

$$f(x)=f_0(x)+\frac{1}{\lambda}f_1(x)+\frac{1}{\lambda^2}f_2(x)+\ldots$$

şeklinde çözümler bulmak mümkündür. Burada λ denklemde görülen bir parametredir.

Şimdi birkaç örnekle bu metodu anlatalım.

Örnek: $\Delta^2 f(x)-\lambda a^x f(x)=0$ denklemini ele alalım. Bu denklemde

$$f(x)=f_0(x)+\lambda f_1(x)+\lambda^2 f_2(x)+\ldots$$

yazılırsa

$$\Delta^2 f_0(x)+\lambda\Delta^2 f_1(x)+\lambda^2\Delta^2 f_2(x)+\ldots=\lambda a^x f_0(x)+\lambda^2 a^x f_1(x)+\ldots$$

elde edilir. Bu denklemde λ ’nın katsayıları eşitlenirse

$$\begin{aligned}
\Delta^2 f_0(x)&=0 &&\Rightarrow\quad f_0(x)=1\\
\Delta^2 f_1(x)&=a^x f_0(x) &&\Rightarrow\quad f_1(x)=a^x\big/(a-1)^2\\
\Delta^2 f_2(x)&=a^{2x}\big/(a-1)^2 &&\Rightarrow\quad f_2(x)=a^{2x}\big/(a-1)^2\left(a^2-1\right)^3
\end{aligned}$$

olur. Buradaki ikinci eşitliği anlaşılabilir olması için toplam sembolü yardımıyla

$$\Delta\left(\Delta f_1(x)\right)=a^x \quad \Rightarrow \quad \Delta f_1(x)=\sum a^x=\frac{a^x}{a-1}+C_1(x)$$

$$f_1(x)=\sum\frac{a^x}{a-1}+xC_1(x)=\frac{a^x}{(a-1)^2}+xC_1(x)+C_2(x)$$

yazılır. Benzer şekilde diğer denklemler de bulunup seride yerine yazılırsa

$$f(x)=1+\frac{\lambda a^x}{(a-1)^2}+\frac{\lambda^2 a^{2x}}{(a-1)^2\left(a^2-1\right)^2}+\ldots+\frac{\lambda^r a^{rx}}{(a-1)^2\left(a^2-1\right)^2\ldots\left(a^r-1\right)^2}+\ldots$$

elde edilir. Bu seri $|a|\geq 1$ olması şartıyla tüm x ve λ için yakınsaktır. Eğer $|a|<1$ ise $\left|\lambda a^x\right|<1$ olacak biçimde x'in öyle değerleri için bu seri yakınsar.

Örnek: $\Delta\left[(x+1)(x+2)\ldots(x+2a+1)\Delta f(x)\right]+\lambda(x+1)(x+2)\ldots(x+2a+1)=0$

ya da

$$(x+2a+2)\,f(x+2)-(2x+2a+3)\,f(x+1)+(x+1)(1+\lambda)\,f(x)=0$$

denklemlerini dikkate alalım. Burada a tamsayıdır.

$$f(x)=f_0(x)+\lambda f_1(x)+\lambda^2 f_2(x)+\ldots$$

yazılırsa buradan

$$\Delta\left[(x+1)(x+2)\ldots(x+2a+1)\Delta f_0(x)\right]=0$$

olup $f_0(x)=1$ elde edilir. Devam edilirse

$$\Delta\left[(x+1)(x+2)\ldots(x+2a+1)\Delta f_1(x)\right]=-(x+1)\ldots(x+2a+1)$$

denklemi için $f_1(x)=-x(x-1)/2(2a+2)$ elde edilir. Bu işlemlere devam edilirse

$$f(x)=1+\sum_{r=1}^{\infty}(-1)^r\lambda^r\,\frac{x(x-1)\ldots(x-2r+1)}{2.4\ldots 2a(2a+2)\ldots(2a+2r)}$$

olup bu seri $|\lambda|<1$ olması şartıyla tüm x ve n için yakınsaktır. Bu seri $J_a\left(x\sqrt{\lambda}\right)$ serisine yani

$$J_a\left(x\sqrt{\lambda}\right)=\frac{\lambda^{a/2}x^a}{2^a a!}\left[1-\frac{\lambda x^2}{2(2a+2)}+\frac{\lambda^2x^4}{2.4.(2a+2)(2a+4)}-\ldots\right]$$

serisine benzer olduğu hemen görülür.

4.6 Z Dönüşümü Yardımıyla Çözüm

Z dönüşümü lineer fark denklemlerini çözmek için alternatif metod sağlayan üreten fonksiyona benzer bir yöntemdir. Bu konu hakkında daha detaylı bilgi almak istenirse Kelly ve Peterson (2001) kaynağından yardım alınabilir.

Tanım (Z Dönüşümü): Bir f_n serisinin Z dönüşümü

$$F(z)=Z(f_n)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f_n}{z^n} \tag{4.77}$$

kompleks değişkenli $F(z)$ fonksiyonu tarafından tanımlanır. $|z|>R$ için $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f_n}{z^n}$ yakınsak olacak şekilde $R>0$ sayısı varsa Z *dönüşümü* vardır denir.

Tanım (üstel sınırlama): Eğer $n\geq 0$ için $M>0$ ve $c>1$ olacak şekilde öyle $|f_n|\leq Mc^n$ varsa f_n dizisine *üstel sınırlandırılmış* denir.

Teorem: Eğer f_n serisi üsten sınırlandırılmış ise f_n serisinin Z dönüşümü vardır.

Teorem: Eğer g_n serisi üstel sınırlandırılmışsa m. mertebeden sabit katsayılı

$$f_{n+m}+p_1 f_{n+m-1}+p_2 f_{n+m-2}+\dots p_m f_n=g_n$$

fark denkleminin her bir çözümü üstel sınırlıdır ve bu denklemin Z dönüşümü vardır.

Teorem (lineerlik): a ve b sabit olmak üzere z, $U(z)$ ve $V(z)$'nin alışılagelmiş bölge içinde

$$Z(au_n+bv_n)=aZ(u_n)+bZ(v_n)$$

dir. Burada $U(z)$ ve $V(z)$ sırasıyla u_n ve v_n'nin Z dönüşümleridir.

Teorem: Eğer $|z|>r$ için $F(z)=Z(f_n)$ ise o halde $|z|>r$ için

$$Z\left((n+m-1)^{(m)} f_n\right)=(-1)^m z^m\frac{d^mF}{dz^m}(z) \tag{4.78}$$

dir. $m=1$ için

$$Z(nf_n)=-zF'(z)$$

elde edilir.

Teorem: n pozitif tamsayısı için

$$Z\left(f_{n+m}\right)=z^{m}Z\left(f_{n}\right)-\sum_{i=0}^{m-1}f_{i}z^{m-i}$$

dir ve

$$u_{n}\left(m\right)=\begin{cases}0, & 0\leq n\leq m-1\\ 1, & m\leq n\end{cases}$$

olmak üzere

$$Z\left(f_{n-m}u_{n}\left(m\right)\right)=z^{-m}Z\left(f_{n}\right)$$

dir.

Teorem (Başlangıç değer ve son değer teoremi):

a. Eğer $|z|>r$ için $F(z)$ varsa bu durumda $f_{0}=\lim\limits_{z\to\infty}F(z)$ vardır.

b. Eğer $|z|>1$ için $F(z)$ varsa ve $(z-1)F(z)$, $z=1$'de analitikse bu durumda $\lim\limits_{n\to\infty}f_{n}=\lim\limits_{z\to 1}(z-1)F(z)$ dir.

Tanım (Konvolüsyon): $\{u_{k}\}$ ve $\{v_{k}\}$ iki dizi olmak üzere bu iki dizinin konvolüsyon çarpımı

$$\{u_{k}\}*\{v_{k}\}=\left\{\sum_{m=0}^{k}u_{k-m}v_{m}\right\}$$

şeklindedir.

Teorem (Konvolüsyon teoremi): Eğer $|z|>a$ için $U(z)$ ve $|z|>b$ için $V(z)$ varsa buradan $|z|>max\{a,b\}$ için $Z\left(u_{n}*v_{n}\right)=U(z).V(z)$ dir.

Tablo 4.1 Bazı fonksiyonların Z dönüşümleri

f_n	$Z(f_n)=F(z)$
1	$z/z-1$
a^n	$z/z-a$
n	$z/(z-1)^2$
n^2	$z(z+1)/(z-1)^3$
$n^{(m)}$	$m!z/(z-1)^{m+1}$
$\sin(an)$	$\dfrac{z\sin a}{z^2-2z\cos a+1}$
$\cos(an)$	$\dfrac{z^2-z\cos a}{z^2-2z\cos a+1}$
$\sinh(an)$	$\dfrac{z\sinh a}{z^2-2z\cosh a+1}$
$\cosh(an)$	$\dfrac{z^2-z\cosh a}{z^2-2z\cosh a+1}$
$\delta_n(m)=\begin{cases}1, & n=m\\ 0, & n\neq m\end{cases}$	$\dfrac{1}{z^m}$
$u_n(m)=\begin{cases}0, & 0\leq n\leq m-1\\ 1, & m\leq n\end{cases}$	$\dfrac{z^{1-m}}{z-1}$
nf_n	$-zF'(z)$
$\sum_{i=0}^{n} f_i$	$\dfrac{z}{z-1}F(z)$
$a^n f_n$	$F\left(\dfrac{z}{a}\right)$
$a\in\mathbb{Z}^+$ $\begin{pmatrix}n\\ a\end{pmatrix}$	$\dfrac{z}{(z-1)^{a+1}}$ $\lvert z\rvert>1$
$\begin{pmatrix}a\\ n\end{pmatrix}$	$\dfrac{(z+1)^a}{z^a}$ $\lvert z\rvert>1$

Örnek: $(n+1)\,f_{n+1}-(50-n)\,f_n=0 \quad f_0=1$ denklemini çözelim.

Bu denklemin her iki tarafını Z dönüşümünü alalım. Buradan

$$zZ(nf_n)-50F(z)-zF'(z)=0$$

elde edilir. Düzenlenirse (4.78) denklemi yardımıyla

$$-z^2F'(z)-zF'(z)=50F(z)$$

$$\frac{F'(z)}{F(z)}=\frac{-50}{z(z+1)}=\frac{-50}{z}+\frac{50}{z+1}$$

$$\ln F(z)=-50\ln z+50\ln(z+1)+\ln c$$

elde edilir. Buradan

$$F(z)=\left(\frac{z+1}{z}\right)^{50}.c$$

olur. Başlangıç koşulları uygulanırsa

$$\lim_{z\to\infty}F(z)=\lim_{z\to\infty}\left(\frac{z+1}{z}\right)^{50}=1 \quad\Rightarrow\quad c=1$$

elde edilir. Daha sonra ters dönüşüm alınırsa

$$f_n=\binom{50}{n}$$

elde edilir.

Örnek: $f_{n+2}+f_n=10.3^n, \quad f_0=0 \quad f_1=0$ denklemini çözelim.

(4.78) yardımıyla bu denklemin Z transformu

$$z^2Z(f_n)-f_0z^2-f_1z+Z(f_n)=\frac{10z}{z-3}$$

olup denklem düzenlenirse ve basit kesirlere ayrılırsa

$$Z(f_n)=\frac{10z}{(z-3)(z^2+1)}=z\left[\frac{A}{z-3}+\frac{Bz+C}{z^2+1}\right]=z\left[\frac{1}{z-3}+\frac{z+3}{z^2+1}\right]$$

$$=\frac{z}{z-3}-\frac{z^2}{z^2+1}-3\frac{z}{z^2+1}$$

$$=\frac{z}{z-3}-\frac{z^2-z\cos\frac{\pi}{2}}{z^2-2z\cos\frac{\pi}{2}+1}-3\frac{z\sin\frac{\pi}{2}}{z^2-2z\cos\frac{\pi}{2}+1}$$

elde edilir. Buradan ters dönüşüm ile denklemin çözümü

$$f_n=3^n-\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)-3\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)$$

elde edilir.

5. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu çalışmada yüksek mertebeden sabit ve özellikle değişken katsayılı lineer fark denklemleri üzerinde durulmuş olup bu denklemlerin çözümleri sürekli değişken ve ayrık noktalar kümesi olmak üzere iki ayrı küme üzerinde verilmeye çalışılmıştır. Fonksiyonel fark denklemleri ile fark denklemlerinin çözüm yollarının farklı olduğu gözlenmiş olup verilen denklemin türüne, mertebesine, çözümlerin bilinip bilinmemesine, homojen kısmın çarpanlarına ayrılıp ayrılmaması vb. durumlara özgü yöntemler verilmiştir.

Sabit katsayılı lineer fark denklemleri konusunda genel ve özel çözümü veren yöntemler verilmiştir. Bizi genel çözüme götüren yöntemler arasında kaynak fonksiyonu deneme fonksiyonu şeklinde yazılabiliyorsa belirsiz katsayılar yöntemi, kaynak fonksiyon ters operatörler yönteminde verilen durumlara uygun ise ters operatörler yöntemi, kaynak fonksiyonunun ters dönüşümü alınabilirse mertebe düşürme yöntemi tercihleri yapılabilir. Sabit katsayılı lineer fark denklemlerinin homojen kısmının çözümü bilindikten sonra özel çözüme bizi en kolay götürecek olan metod parametrelerin değişimi metodudur.

Değişken katsayılı lineer fark denklemleri konusunda ise daha çok denklemin yapısına göre özel çözüm yöntemleri, mertebesine göre ise genel çözüm yöntemleri verilmiştir. Birinci mertebeden fark denklemlerinde genel çözüm için denklemin sol tarafı tam fark şeklinde yazılıp daha sonra ters fark alınarak çözüme gidilir. İkinci merteden denklemlerde ise bizi genel çözüme direkt götürecek bir yöntem yoktur ancak toplam çarpan bulunması durumunda tam hale getirme yöntemi kullanılabililir. m. mertebeden değişken katsayılı fark denklemlerinde ise E operatörü yardımıyla, denklemin her iki tarafı ρ ve π'nin fonksiyonları şeklinde yazılabiliyorsa ρ ve π operatörü yardımıyla ve son olarak denklemin her iki kısmının Z dönüşümü alınabiliyorsa Z dönüşümü yardımıyla çözüme gidilir.

Fark denklemleri ile diferansiyel denklemler arasında benzerlik olduğuna tezimizin giriş kısmında değinilmişti. Fark denklemleri kullanılarak diferansiyel denklemlerdeki süreksizlik noktaları kaldırılabilmektedir. İleriki çalışmalarda çeşitli alanlarda ortaya çıkan problemlerin modellenerek lineer fark denklemlerine nasıl uyarlandığı ve de bunların çözüm yöntemleri üzerinde durulabilir. Bununla birlikte sosyal bilimler, davranış bilimleri veya iktisat alanında oluşturulan problemlerin birçoğu lineer olmayan fark denklemleriyle çözülebildiğinden lineer olmayan fark denklemleri üzerinde durulabilir. Her ne kadar bu tip problemler daha karmaşık çözümleri gerektirseler de bu çalışmanın devamı niteliğinde böyle problemler de ele alınabilir.

KAYNAKLAR

Abu-Saris R. M., DeVault R., 2003. Global stability of $y_{n+1} = A + y_n / y_{n-k}$, *Applied Mathematics Letters*, 16(2): 173-178.

Aboutaleb M. T., El-Sayed M. A., Hamza A. E., 2001. Stability of the recursive sequence $x_{n+1} = (\alpha - \beta x_n)/(\gamma + x_{n-1})$, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 261: 126-133.

Agarwal Ravi P., Wong Patricia J.Y., 1997. Advanced Topics in Difference Equations, Kluwer Academic Publichers, Netherlands.

Akyol S., 2011. Lineer fark denklemleri ve onların çözüm metodları üzerine, Yozgat, *Yüksek Lisans Tezi*, Bozok Üniversitesi.

Amleh A. M., Grove E. A., Ladas, G., 1999. On the Recursive Sequence $x_{n+1} = \alpha + x_{n-1}/x_n$, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 233: 790-798.

Bereketoğlu H., Kutay V., 2011. Fark Denklemleri, Gazi Kitabevi, Ankara.

Çatal, S., 2004. "Cebirsel Katsayılı Homojen Diferansiyel Denklemlerin Fark Denklemleri ile Çözümü", *Dokuz Eylül Üniversitesi Fen ve Mühendislik Dergisi*, 6(1): 129-138.

DeVault R., Kosmala R., Ladas G., Schultz S. W., 2001. Global Behavior of $y_{n+1} = p + y_{n-k}/qy_n + y_{n-k}$, *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications,* 47: 4743-4751.

El-Owaidy H. M., Ahmed A. M., Mousa M. S., 2003. On the recursive sequences $x_{n+1} = -\alpha x_{n-1}/\beta \pm x_n$, *Applied Mathematics and Computations*, 145: 747-753.

El-Owaidy H. M., Ahmed A. M., Mousa M., S., 2004. On asimptotic behavior of the difference equation $x_{n+1} = \alpha + x_{n-k}/x_n$, *Applied Mathematics and Computation*, 147: 163-167.

Elaydi S., 2005. An Introduction to Difference Equations third edition, Springer New York USA.

Ersel H., 1981. İktisatçılar için Matematik, Ankara Üniversitesi Basımevi, Ankara; 435-459.

Fan Y., Wang L., Li W., 2004. Global behavior of a higher order nonlinear difference equation, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 299: 113-126.

Goldberg S., 1960. Introduction to difference equations, John Wiley&Sons, New York.

He W. S., Li W. T., 2004. Attractivity In A Nonlinear Delay Difference Equation, *Appl. Math. E-Notes*, 4: 48-53.

Huckfeldt R. R., Kohfeld C. W., Likens T. W., 1982. Dynamic modeling: an introduction, Sage Publications Inc., 27,10-44., California.

Jagerman L. D., 2000. Difference Equations with applications to queues, Marcel Dekker Inc., NewYork.

Kelly W., 2003. "Theory of diference equations numerical methods and applications, 2nd ed., by V. Lakshmikantham and Donato Trigiante,Marcel Dekker, Inc., New York, 2002,"*Bulletin (New Series) of the american mathematical society*, 40(2): 259-262.

Kelly G. W., Peterson, C. A., 2001. Difference Equations: An Introduction with Applications, Academic Press, San Diego.

Komsala W. A., Kulenovic M. R. S., Ladas G., Teixeria C. T., 2000. On the Recursive Sequence $y_{n+1} = p + y_{n-1} / qy_n + y_{n-1}$, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 251: 571-586.

Kulenovic, M. R. S., Kalabusic, S., 2000. Projects For The History of Difference Equations and Recursive Relations, University of Rhode Island, http://hypatia.math.uri.edu/~kulenm/diffequaturi/m381f00fp/m381f00mp.htm.

Kulenovic M. R. S., Ladas G., Prokup N. R., 2001. A Rational Difference Equation, *Computers and Mathematics with Applications*, 41: 671-678.

Kurtulan S., Bir A., Kayral M., 1995. 3. Ulaştırma Kongresi: Elektrikli bir otomobilin modellenmesi ve bilgisayarda simülasyon TMMOB İnşaat Mühendisleri Odası, Maya Basım İstanbul; 145-153.

Lakshmikantham V., Trigiante D., 2002. Theory of Difference Equations: Numerical Methods and Applications second edition, Marcel Dekker, New York.

Levy H., Lessman F., 1961. Finite Difference Equations, The Macmillan Company, New York.

Spiegel R. Murray., 1971. Calculus of Finite Differences and Difference Equations Schaum's Outline Series, McGraw-Hill, New York.

Yan X. X., Li W. T., 2003. Global attractivity in a rational recursive sequence, *Applied Mathematics and computations*, 145: 1-12.

Yan X. X., Li W. T., Sun H. R., 2002. Global attractivity in a higher order nonlinear difference equation, *Applied Mathematics E-notes*, 2: 51-58.

Weisstein E., 1999. MathWorld, A Wolfram Web Resource, CRC Pres LLC, http://mathworld.wolfram.com/FibonacciNumber.html.

ÖZGEÇMİŞ

Ad Soyad	**:** Erdem BAYAR
Doğum Yeri ve Tarihi	**:** KARŞIYAKA 1987
Adres	**:** Sırakapılar Mah. 1521 Sk. N: 10 D: 1 Merkez/DENİZLİ
Lisans Üniversite	**:**Pamukkale Üniversitesi
Yayın Listesi:	**-**