

**T.C.
PAMUKKALE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI**

**BURGERS DENKLEMİNİN ÇEŞİTLİ SONLU FARK
ŞEMALARI İLE ÇÖZÜMLERİ**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

EREN DİNÇER

DENİZLİ, OCAK - 2015

T.C.
PAMUKKALE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI
UYGULAMALI MATEMATİK



BURGERS DENKLEMİNİN ÇEŞİTLİ SONLU FARK
ŞEMALARI İLE ÇÖZÜMLERİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

EREN DİNÇER

DENİZLİ, OCAK - 2015

KABUL VE ONAY SAYFASI

Eren DİNÇER tarafından hazırlanan "BURGERS DENKLEMİNİN ÇEŞİTLİ SONLU FARK ŞEMALARI İLE ÇÖZÜMLERİ" adlı tez çalışmasının savunma sınavı 23.01.2015 tarihinde yapılmış olup aşağıda verilen jüri tarafından oy birliği ile Pamukkale Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı Uygulamalı Matematik Yüksek Lisans Tezi olarak kabul edilmiştir.

Jüri Üyeleri

İmza

Danışman
Doç. Dr. Murat SARI

Üye
Prof. Dr. Şeref MİRASYEDİOĞLU
Başkent Üniversitesi

Üye
Prof. Dr. Uğur YÜCEL
Pamukkale Üniversitesi


.....

.....

.....

Pamukkale Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun
04/02/2015. tarih ve ...05/12... sayılı kararıyla onaylanmıştır..


.....

Prof. Dr. Orhan KARABULUT

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

Bu tezin tasarımı, hazırlanması, yürütülmesi, araştırmalarının yapılması ve bulgularının analizlerinde bilimsel etiğe ve akademik kurallara özenle riayet edildiğini; bu çalışmanın doğrudan birincil ürünü olmayan bulguların, verilerin ve materyallerin bilimsel etiğe uygun olarak kaynak gösterildiğini ve alıntı yapılan çalışmalara atfedildiğine beyan ederim.

EREN DİNÇER



ÖZET

BURGERS DENKLEMİNİN ÇEŞİTLİ SONLU FARK ŞEMALARI İLE ÇÖZÜMLERİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

EREN DİNÇER

PAMUKKALE ÜNİVERSİTESİ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

UYGULAMALI MATEMATİK

(TEZ DANIŞMANI: DOÇ. DR. MURAT SARI)

DENİZLİ, OCAK - 2015

Bu çalışma çok geniş bir alandaki problemleri temsil eden ve keskin davranışa sahip olan Burgers denklemini çözmede, yüksek mertebeden sonlu fark yöntemlerinin geniş bir yelpazesine yer verir. Bunu gerçekleştirmek için ihtiyaç duyulan bilgisayar yazılımları MATLAB ve MAPLE ortamında üretilmiştir. Elde edilen nümerik sonuçların literatürle çok iyi bir uyum içinde olduğu ve hatta mevcut çalışmanın, literatürdeki bazı sonuçlardan daha da hassas olduğu gözlemlenmiştir.

ANAHTAR KELİMELEER: Burgers denklemi, Yüksek mertebeden sonlu fark yöntemleri, Süreksiz çözüm, Keskin davranış, Nümerik çözüm

ABSTRACT

SOLUTION OF BURGERS EQUATION USING VARIOUS FINITE DIFFERENCE SCHEMES

MSC THESIS

EREN DİNÇER

PAMUKKALE UNIVERSITY INSTITUTE OF SCIENCE

MATHEMATICS

APPLIED MATHEMATICS

(SUPERVISOR: ASSOC. PROF. DR. MURAT SARI)

DENİZLİ, JANUARY 2015

This work analyses a broad range of high order finite difference schemes in solving Burgers equation representing a large field of scientific problems and having a steep behaviour. To achieve this aim, computer codes have been produced in MATLAB and MAPLE. The obtained numerical results are in a very good agreement with the literature and yet the present study is seen to be more accurate than the literature in some cases.

KEYWORDS: Burgers equation, High order finite difference schemes, Discontinuous solution, Steep behaviour, Numerical solution

İÇİNDEKİLER

Sayfa

ÖZET.....	i
ABSTRACT	ii
İÇİNDEKİLER	iii
ŞEKİL LİSTESİ.....	iv
TABLO LİSTESİ	vii
SEMBOLLER VE KISALTMALAR LİSTESİ.....	viii
ÖNSÖZ.....	ix
1. GİRİŞ.....	1
2. BURGERS DENKLEMİNİN SONLU FARK FORMÜLASYONLARI	4
2.1 Burgers Denklemi.....	4
2.2 Yüksek Mertebeden Sonlu Fark Yöntemleri (SF6, SF8)	7
2.3 Yüksek Mertebeden Kompakt Sonlu Fark Yöntemleri	12
2.4 Lax-Wendroff Yöntemi	17
2.5 MacCormack Açık Yöntemi	18
2.6 Yüksek Mertebeden Upwind Kompakt Sonlu Fark Yöntemi	19
2.6.1 Beşinci Mertebeden Upwind Kompakt Sonlu Fark Yöntemi	20
2.7 Parçalı (Splitted) Burgers Denklemi	23
3. NÜMERİK YÖNTEMLERİN UYGULANMASI.....	25
3.1 Test Problemleri	26
4. BULGULAR	63
5. SONUÇ VE ÖNERİLER	64
6. KAYNAKLAR.....	65
7. EKLER.....	69
EK A 1	
EK A 2	
EK B	
8. ÖZGEÇMİŞ	73

ŞEKİL LİSTESİ

Sayfa

Şekil 3.1: Problem 1 için $\nu=0.1$, $\Delta t=0.001$ ve $h=0.025$ farklı zamanlarda elde edilen SF8 sonuçları.....	34
Şekil 3.2: Problem 1 için $\nu=0.01$, $\Delta t=0.0001$ ve $h=0.0125$ farklı zamanlarda elde edilen SF8 sonuçları.....	34
Şekil 3.3: Problem 1 için $\nu=0.01$, $\Delta t=0.0001$ ve $h=0.0125$ farklı zamanlarda elde edilen KSF6 sonuçları.....	35
Şekil 3.4: Problem 1 için $\nu=0.01$, $\Delta t=0.0001$ ve $h=0.0125$ farklı zamanlarda elde edilen LWSF8 sonuçları.....	35
Şekil 3.5: Problem 1 için $\nu=0.01$, $\Delta t=0.001$ ve $h=0.0125$ farklı zamanlarda elde edilen PC3 sonuçları.....	36
Şekil 3.6: Problem 1 için $\nu=0.01$, $\Delta t=0.001$ ve $h=0.0125$ farklı zamanlarda elde edilen UKSF3 sonuçları.....	36
Şekil 3.7: Problem 1 için $\nu=0.01$, $\Delta t=0.001$ ve $h=0.0125$ farklı zamanlarda elde edilen UKSF5 sonuçları.....	37
Şekil 3.8: Problem 1 için $\nu=0.01$, $\Delta t=0.0001$ ve $h=0.0125$ farklı zamanlarda elde edilen PY2 sonuçları.....	37
Şekil 3.9: Problem 1 için $\nu=0.01$, $\Delta t=0.0001$ ve $h=0.0125$ farklı zamanlarda elde edilen PY5 sonuçları.....	38
Şekil 3.10: Problem 1 için $\nu=0.001$, $\Delta t=0.0001$ ve $h=0.0125$ farklı zamanlarda elde edilen SF8 sonuçları.....	38
Şekil 3.11: Problem 1 için $\nu=0.001$, $\Delta t=0.0001$ ve $h=0.0125$ farklı zamanlarda elde edilen KSF6 sonuçları.....	39
Şekil 3.12: Problem 1 için $\nu=0.001$, $\Delta t=0.0001$ ve $h=0.0125$ farklı zamanlarda elde edilen LWSF8 sonuçları.....	39
Şekil 3.13: Problem 1 için $\nu=0.0001$, $\Delta t=0.0001$ ve $h=0.0125$ farklı zamanlarda elde edilen PC2 sonuçları.....	40
Şekil 3.14: Problem 1 için $\nu=0.001$, $\Delta t=0.0001$ ve $h=0.0125$ farklı zamanlarda elde edilen PC4 sonuçları.....	40
Şekil 3.15: Problem 1 için $\nu=0.001$, $\Delta t=0.001$ ve $h=0.0125$ farklı zamanlarda elde edilen UKSF3 sonuçları.....	41
Şekil 3.16: Problem 1 için $\nu=0.001$, $\Delta t=0.001$ ve $h=0.0125$ farklı zamanlarda elde edilen UKSF5 sonuçları.....	41

Şekil 3.17: Problem 1 için $\nu=0.0001$, $\Delta t=0.0001$ ve $h=0.0125$ farklı zamanlarda elde edilen UKSF5 sonuçları.....	42
Şekil 3.18: Problem 1 için $\nu=0.0001$, $\Delta t=0.0001$ ve $h=0.0125$ farklı zamanlarda elde edilen PY2 sonuçları.....	42
Şekil 3.19: Problem 1 için $\nu=0.00001$, $\Delta t=0.0001$ ve $h=0.0125$ farklı zamanlarda elde edilen UKSF3 sonuçları.....	43
Şekil 3.20: Problem 1 için $\nu=0.00001$, $\Delta t=0.0001$ ve $h=0.0125$ farklı zamanlarda elde edilen UKSF5 sonuçları.....	43
Şekil 3.21: Problem 2 için $\nu=0.1$, $\Delta t=0.001$ ve $h=0.01$ farklı zamanlarda elde edilen SF8 sonuçları.....	51
Şekil 3.22: Problem 2 için $\nu=0.01$, $\Delta t=0.0001$ ve $h=0.01$ farklı zamanlarda elde edilen SF8 sonuçları.....	52
Şekil 3.23: Problem 2 için $\nu=0.01$, $\Delta t=0.0001$ ve $h=0.01$ farklı zamanlarda elde edilen KSF6 sonuçları.....	52
Şekil 3.24: Problem 2 için $\nu=0.01$, $\Delta t=0.0001$ ve $h=0.0125$ farklı zamanlarda elde edilen LWSF8 sonuçları	53
Şekil 3.25: Problem 2 için $\nu=0.01$, $\Delta t=0.001$ ve $h=0.0125$ farklı zamanlarda elde edilen PC3 sonuçları.....	53
Şekil 3.26: Problem 2 için $\nu=0.01$, $\Delta t=0.001$ ve $h=0.0125$ farklı zamanlarda elde edilen UKSF3 sonuçları.....	54
Şekil 3.27: Problem 2 için $\nu=0.01$, $\Delta t=0.001$ ve $h=0.0125$ farklı zamanlarda elde edilen UKSF5 sonuçları.....	54
Şekil 3.28: Problem 2 için $\nu=0.01$, $\Delta t=0.0001$ ve $h=0.0125$ farklı zamanlarda elde edilen PY2 sonuçları.....	55
Şekil 3.29: Problem 2 için $\nu=0.01$, $\Delta t=0.0001$ ve $h=0.0125$ farklı zamanlarda elde edilen PY5 sonuçları.....	55
Şekil 3.30: Problem 2 için $\nu=0.001$, $\Delta t=0.0001$ ve $h=0.0125$ farklı zamanlarda elde edilen SF8 sonuçları.....	56
Şekil 3.31: Problem 2 için $\nu=0.001$, $\Delta t=0.0001$ ve $h=0.0125$ farklı zamanlarda elde edilen KSF6 sonuçları.....	56
Şekil 3.32: Problem 2 için $\nu=0.001$, $\Delta t=0.0001$ ve $h=0.0125$ farklı zamanlarda elde edilen LWSF8 sonuçları.....	57
Şekil 3.33: Problem 2 için $\nu=0.0001$, $\Delta t=0.0001$ ve $h=0.0125$ farklı zamanlarda elde edilen PC2 sonuçları.....	57
Şekil 3.34: Problem 2 için $\nu=0.001$, $\Delta t=0.0001$ ve $h=0.0125$ farklı zamanlarda elde edilen PC4 sonuçları.....	58
Şekil 3.35: Problem 2 için $\nu=0.001$, $\Delta t=0.001$ ve $h=0.0125$ farklı zamanlarda elde edilen UKSF3 sonuçları.....	58

Şekil 3.36: Problem 2 için $\nu=0.001$, $\Delta t=0.001$ ve $h=0.0125$ farklı zamanlarda elde edilen UKSF5 sonuçları.....	59
Şekil 3.37: Problem 2 için $\nu=0.0001$, $\Delta t=0.001$ ve $h=0.0125$ farklı zamanlarda elde edilen UKSF5 sonuçları	59
Şekil 3.38: Problem 2 için $\nu=0.0001$, $\Delta t=0.0001$ ve $h=0.0125$ farklı zamanlarda elde edilen PY2 sonuçları.....	60
Şekil 3.39: Problem 2 için $\nu=0.00001$, $\Delta t=0.001$ ve $h=0.0125$ farklı zamanlarda elde edilen SF8 sonuçları.....	60
Şekil 3.40: Problem 2 için $\nu=0.00001$, $\Delta t=0.0001$ ve $h=0.0125$ farklı zamanlarda elde edilen KSF6 sonuçları.....	61
Şekil 3.41: Problem 2 için $\nu=0.00001$, $\Delta t=0.001$ ve $h=0.0125$ farklı zamanlarda elde edilen UKSF3 sonuçları.....	61
Şekil 3.42: Problem 2 için $\nu=0.00001$, $\Delta t=0.001$ ve $h=0.0125$ farklı zamanlarda elde edilen UKSF5 sonuçları.....	62

TABLO LİSTESİ

Sayfa

Tablo 3.1: Problem 1 için $\nu=1$, $\Delta t=0.00001$, $h=0.1$ ve $t=0.1$ alınarak nümerik ve analitik çözümleri.....	28
Tablo 3.2: Problem 1 için $\nu=0.1$, $\Delta t=0.0001$ ve $h=0.0125$ alınarak farklı zamanlardaki nümerik ve analitik çözümleri.....	29
Tablo 3.3: Problem 1 için $\nu=0.01$, $\Delta t=0.0001$ ve $h=0.0125$ alınarak farklı zamanlardaki nümerik ve analitik çözümleri.....	31
Tablo 3.4: Problem 1 için oluşturulan tabloların farklı zamanlardaki CPU (s) sonuçları.....	32
Tablo 3.5: Problem 1 için farklı h , Δt , ν ve t değerleriyle elde edilen sonuçlar.....	33
Tablo 3.6: Problem 2 için $\nu=1$, $\Delta t=0.00001$, $h=0.1$ ve $t=0.1$ alınarak nümerik ve analitik çözümleri.....	45
Tablo 3.7: Problem 2 için $\nu=0.1$, $\Delta t=0.00001$ ve $h=0.0125$ alınarak farklı zamanlardaki nümerik ve analitik çözümleri.....	47
Tablo 3.8: Problem 2 için $\nu=0.01$, $\Delta t=0.001$ ve $h=0.01$ alınarak farklı zamanlardaki nümerik ve analitik çözümleri.....	48
Tablo 3.9: Problem 2 için $\nu=0.01$, $\Delta t=0.0001$ ve $h=0.0125$ alınarak farklı zamanlardaki nümerik ve analitik çözümleri.....	50

SEMBOLLER VE KISALTMALAR LİSTESİ

u	: Hız vektörü
(u, v, w)	: Hız vektör bileşeni
div	: Diverjans operatörü
ρ	: Yoğunluk
i	: İç enerji
E	: Bir hacimdeki toplam enerji
p	: Basınç
∇^2	: Laplace operatörü
μ	: Dinamik viskozite
ν	: Kinematik viskozite
Δx	: Konum artımı
Δt	: Zaman artımı
KH	: Kesme hatası
SF6	: Altıncı mertebe sonlu fark
SF8	: Sekizinci mertebe sonlu fark
KSF6	: Altıncı mertebe kompakt sonlu fark
LWSF6	: Altıncı mertebe Lax-Wendroff sonlu fark
LWSF8	: Sekizinci mertebe Lax-Wendroff sonlu fark
LWKSF6	: Altıncı mertebe Lax-Wendroff kompakt sonlu fark
PC	: Predictor-Corrector yöntemi
PC1	: Altıncı mertebe MacCormack sonlu fark
PC2	: Sekizinci mertebe MacCormack sonlu fark
PC3	: Altıncı ve sekizinci mertebe MacCormack sonlu fark
PC4	: Altıncı ve kompakt altıncı mertebe MacCormack sonlu fark
UKSF3	: Üçüncü mertebe Upwind kompakt sonlu fark
UKSF5	: Beşinci mertebe Upwind kompakt sonlu fark
PY1	: Altıncı mertebe parçalı sonlu fark
PY2	: Sekizinci mertebe parçalı sonlu fark
PY3	: Altıncı mertebe parçalı Lax-Wendroff sonlu fark
PY4	: Sekizinci mertebe parçalı Lax-Wendroff sonlu fark
PY5	: Altıncı mertebe parçalı Lax-Wendroff kompakt sonlu fark
TVD-RK3	: Total variation diminishing-third order Runge-Kutta

ÖNSÖZ

Bu çalışma sırasında bilgi ve deneyimlerinden yararlandığım, araştırmalarım sırasında görüşleriyle bana yol gösteren, ilgi ve desteğini hiçbir zaman esirgemeyen sayın hocam Doç. Dr. Murat SARI' ya, her türlü sorularıma cevap veren ve katkıları olan sayın Prof. Dr. Uğur YÜCEL' e sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Ayrıca, maddi ve manevi destekleriyle yanımda olan arkadaşlarıma ve en önemlisi benim bugünlere gelmemde emeği olan sevgili aileme teşekkürü bir borç bilirim.

1. GİRİŞ

Uygulamalı bilimlerin pek çok problemini temsil eden kısmi diferansiyel denklemler uzun zamandır kullanılmaktadır. Örneğin, levhalarda ve çubukta ısı akışı, elektrik devrelerinde akım ya da yükün bulunması, kimyasal reaksiyonların incelenmesi, telin ya da levhanın titreşimleri, radyoaktif cismin bozunması, bir canlı topluluğunun nüfus artışı; roket, füze, gezegen ve uydu hareketlerinin belirlenmesi, sığ sularda oluşan dalga problemi gibi pek çok model kısmi diferansiyel denklemler ile ifade edilmektedir. Doğadaki bu olayların modellenmesi genelde nonlinear kısmi diferansiyel denklemler ile yapılmaktadır. Ancak nonlinear kısmi diferansiyel denklemlerin genelde analitik çözümlerini elde etmek zordur. Bu nedenle bilim insanları, bilgisayar alanındaki gelişmelerle birlikte analitik olarak çözülemeyen ya da çözümü uzun süren problemler için nümerik yöntemleri geliştirmişlerdir. Gaz dinamiği, türbülans gibi çoğu fiziksel olayın matematiksel modellenmesinde kullanılan Burgers denklemleri, analitik olarak çözülebilen birkaç lineer olmayan kısmi diferansiyel denklemlerdendir.

Burgers denklemi, lineer olmayan terime ve küçük katsayılı yüksek mertebeden türeve sahip olduğundan, tam çözümü son derece zor olan ve türbülansı modelleyen Navier-Stokes denkleminin özel bir halidir. Bundan dolayı, Burgers denklemi çoğunlukla türbülans içeren sıvı dinamik problemlerini çözmeye kullanılır. Ancak ν şeklindeki küçük viskoz sayıları için analitik çözüm yetersiz kalmakta, farklı viskozite değerleri için denklem parabolik ya da hiperbolik özellikler göstermektedir. Aşağıda ayrıntılı olarak belirtileceği gibi, bu yüzden pek çok araştırmacı, sonlu farklar, sonlu elemanlar, sınır eleman metodu gibi nümerik yöntemlerle denklemi incelemiştir.

Karpman (1975), Burgers denklemini Navier-Stokes denkleminin özel bir durumu olarak ve bu denkleme uygulanan nümerik yöntemlerin kararlılık analizinde model problem olarak kullanmıştır. Varoğlu ve Finn (1980) izoparametrik uzay-zaman sonlu elemanlarının kullanıldığı metodu geliştirmişlerdir. Caldwell ve diğ. (1981) sonlu eleman yöntemiyle; Evans ve Abdullah (1984) değişik sınır ve başlangıç

şartlarıyla verilen denklemler için grup açık yöntemiyle; Nguyen ve Reymann (1982) Reynolds sayısının büyük değerleri için sonlu eleman metodunun en küçük kareler zayıf formülasyonu ile; Ali ve diğ. (1990) B-spline Galerkin yöntemiyle; Ali ve diğ. (1991) Method of Lines yöntemiyle söz konusu denklem için çözüm üretmişlerdir. Kutluay ve diğ. (2004) Burgers benzeri denklemlerin nümerik çözümlerini hesaplamak için en küçük kareler kuadratik B-spline sonlu elemanlar metodunu geliştirmişlerdir. Kutluay ve Esen (2004^{a,b}) diğer çalışmada lumped Galerkin yöntemi ve lineerleştirilmiş kapalı sonlu fark yaklaşımıyla Burgers denkleminin nümerik çözümlerini elde etmişlerdir. Aksan (2006) 1-boyutlu Burgers denklemini zaman ayrıştırma metoduyla lineer olmayan adi diferansiyel denkleme dönüştürüp kuadratik B-spline sonlu eleman yöntemini kullanarak çözmüşlerdir. Dağ ve diğ. (2005) denklemdeki lineer olmayan terimi lineerleştiren bir kübik B-spline yöntemi kullandılar. Gardner ve diğ. (1997) kuadratik B-spline fonksiyonları Petrov-Galerkin yöntemi ile; Öziş ve diğ. (2003) kuadratik baz fonksiyonlarını esas alarak Galerkin yöntemi ile; Abbasbandy ve Darvishi (2005) modifiye Adomian ayrıştırma yöntemi ile; Javidi ve Darvishi (2005) pseudospektral yöntemi ile çözümlerini ortaya koymuşlardır. İnan ve Bahadır (2014) Burgers denklemini üstel sonlu fark yöntemiyle çözerek yeni bir teknik geliştirmişlerdir. Öziş ve Aslan (2005) asimptotik açılım yöntemiyle büyük Reynolds sayılarını da içeren Burgers denklemini nümerik olarak çözmüşlerdir. Inc (2008) Homotopi analiz metodunu kullanarak 1-boyutlu lineer olmayan Burgers denkleminin nümerik sonuçlarını vermiştir. Kübik B-spline kuasi interpolasyon ile Burgers denkleminin nümerik çözümleri ise Zhu ve Wang (2009) tarafından verilmiştir. Ayrıca, Burgers denklemlerinin nümerik ve analitik çözümlerini elde etmede Abazari ve Borhanifar (2010) diferansiyel değişim metodunu kullanmışlardır. Kadalbajoo ve diğ. (2005) Burgers denklemini çözmek için bir parametrelili düzgün kapalı fark şemasını önermişlerdir. Kadalbajoo ve Awasthi (2006) söz konusu denkleme Hopf-Cole dönüşümü uygulayarak Crank-Nicolson sonlu fark yaklaşımıyla çözümler üretmişlerdir. Seydaoğlu (2010) yüksek lisans tezinde parçalanmış 1-boyutlu Burgers denkleminin sonlu fark yöntemleri ile nümerik çözümlerini vermiştir. Gülsu ve Öziş (2005) Burgers denkleminin nümerik çözümlerini elde etmek için kısıtlı (restrictive) Taylor yaklaşımını uygulayarak açık sonlu fark yaklaşımını benimsemişlerdir. Kutluay ve diğ. (1999) açık ve tam açık sonlu fark yaklaşımlarıyla; Bahadır ve Sağlam (2005) sonlu farklarla lineerleştirilmiş Burgers denklemine karışık sınır eleman yöntemini uygulayarak; Lin ve Zhou (2001)

Galerkin metodu ve sonlu fark metodunu birleştiren yarı-kapalı zamanı ayırıştırma metoduyla; Hassanien ve diğ. (2005) dördüncü mertebeden sonlu fark yaklaşımlarıyla; Sari ve Gürarlan (2009), denkleme uygulanan altıncı mertebeden kompakt sonlu fark metoduyla; Sari ve diğ. (2009), yüksek mertebeden sonlu fark yaklaşımlarıyla Burgers denkleminde çözümler üreterek literatürdeki yerlerini almışlardır.

Bu çalışmada Burgers denklemini çözmek için yüksek mertebeden sonlu fark (SF6, SF8) ve yüksek mertebeden kompakt sonlu fark (KSF3, KSF5, KSF6) yaklaşımlarına yer verilmiştir. Ayrıca bu yaklaşımların, Lax-Wendroff, MacCormack, upwind ve parçalanmış (Splitted) yöntemler gibi farklı versiyonları ele alınarak söz konusu denklem nümerik olarak ayrıntılı bir şekilde irdelenmiştir. Yöntemlerin çıkarılışları ayrıntılı olarak gösterilmiş ve bazı başlangıç-sınır koşulları dikkate alınarak Burgers denkleminde ait çözümler, ele alınan yaklaşımlar ile hesaplanmıştır. Ayrıca elde edilen sonuçlar var olan literatür sonuçlarıyla da kıyaslanmıştır. Bu sonuçları elde etmede MATLAB ve MAPLE kodları üretilmiştir.

Akışkanlar mekaniğinde önemli bir yere sahip olan Navier-Stokes denklemlerinin özel bir şekli olan Burgers denkleminin keskin (süreksiz) davranışı da fiziksel ve nümerik açıdan yapılan önemli tartışma konularından biridir. Burgers denkleminin irdelenmesinde, sonlu fark yaklaşımlarının geniş bir yelpazesine yer verilmiş olmasının bu çalışmaya ilave bir değer kattığına inanılmaktadır.

2. BURGERS DENKLEMİNİN SONLU FARK FORMÜLASYONLARI

2.1 Burgers Denklemi

Burgers denklemi, akışkan akıllarında, trafik modellerinde karşılaşılan çoğu fiziksel sistemin davranışında, türbülans içeren akışkan dinamiklerindeki problemlerin, sığ su dalgalarının incelenmesinde sıkça başvurulan bir lineer olmayan kısmi diferansiyel denklemdir. Denklem ilk olarak Bateman (1915) tarafından ortaya atılmış, daha sonra Burgers (1939) tarafından türbülans için matematiksel bir model olarak analiz edilmiştir.

Burgers denkleminin çıkarılışı Navier-Stokes denklemlerinden elde edilebilir. Navier-Stokes denklemleri, hareket eden bir akışkanın hızı, basıncı ve yoğunluğu arasındaki bağıntıyı ifade eder. Bu denklemler Euler denklemlerinin genel bir halidir ve viskozitenin akışkan üzerindeki etkilerini temsil eder. Navier-Stokes denklemlerinin ifade ettiği fiziksel anlam konusundaki bilgiler için, örneğin, Currie (2005) nin çalışmasına başvurulabilir. Akışkan maddeler, sıkıştırılamayan ve sıkıştırılabilen olmak üzere ikiye ayrılır. Sıkıştırılabilen akışkanların hareketleri sırasında zamanla yoğunlukta değişim gözlemlenirken, Burgers denklemi gibi sıkıştırılamayan akışkanların yoğunluklarında değişim yoktur yani sabittir. Sıkıştırılamayan akışkanların problemleri; endüstriyel kanal akışları, hidrolik ve hava dinamiği gibi uygulamalı bilimlerin pek çok alanında rastlanmaktadır.

Burgers denklemi, akışkanlar mekaniğinden, kütle korunumu, momentum korunumu (Newton'un II. Kanunu) ve enerji korunumu (Termodinamiğin I. Kanunu) nu temel alarak oluşturulan Navier-Stokes denklemlerinden elde edilir.

Akış alanı içerisinde x, y ve z doğrultusundaki bileşenleri sırasıyla u, v, w olan \mathbf{u} hızına sahip bir akışkan ele aldığımızda,

$$\frac{d\rho}{dt} + \text{div}(\rho\mathbf{u}) = 0$$

denklemini, 3-boyutlu kütle korunumu veya süreklilik denklemdir. İfadenin ilk terimi, sıkıştırılabilir akışkandaki bir noktada yoğunluğun zamana bağlı değişimi, ikinci terimi ise kontrol hacmimizin sınırlarından dışarıya doğru olan net akışı tanımlar ve *konvektif* terimi olarak adlandırılır. Sıkıştırılmaz bir akışkan için yoğunluk ρ sabittir. Dolayısıyla yukarıdaki ifade,

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

şeklini alır. Genellikle bir akışkanın iç enerjisi i ' nin, $\frac{1}{2}\rho\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}$ birim kütledeki kinetik enerjisi olmak üzere

$$E = \rho i + \frac{1}{2}\rho\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}$$

birim hacimdeki toplam enerjiyi verir. Enerji korunumu,

$$\frac{\partial E}{\partial t} + \nabla(E\mathbf{u}) = f$$

olur. f , yüzey (basınç, viskoz vb.) ve gövde (yerçekimi, merkezkaç vb.) kuvvetleri tarafından akışkan parçacığı elemanı üzerinde yapılan iş ve ısı iletiminin toplam enerjisidir. Ayrıca, akışkana uygulanan momentum korunumu,

$$\rho \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla(\mathbf{u}) \right) = s$$

şeklinindedir. Burada s , akışkan üzerindeki kuvvetleri temsil eder. Akışkan denkleminin genel hali;

$$\rho \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla(\mathbf{u}) \right) = -\nabla p + \mu \nabla^2 \mathbf{u} + s$$

şeklinindedir. Burada denklemin sol tarafındaki ilk terim zaman ivmesini, ikinci terim konvektif ivmesini; eşitliğin sağındaki ilk terim, basınç gradientini, ikinci terim viskoz etkisini ve üçüncü terim s , akışkan üzerindeki kuvvetleri (yerçekimi, merkezkaç, vb.) temsil eder. Akışın sıkıştırılmaz olduğu ve diğer kuvvetlerin ihmal edildiği göz önüne alınırsa

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla(\mathbf{u}) = \nu \nabla^2 \mathbf{u}$$

olur. Burada, $\frac{\mu}{\rho} = \nu$ viskoziteyi ifade etmektedir. Burada ele alınan ifadelerin detaylı tartışması için Munson ve diğ. (2009) başvurulabilir. Denklemin kartezyen koordinatlardaki 3-boyutlu açılımı

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} = \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} = \nu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} = \nu \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right)$$

verilebilir.

Navier-Stokes denklemlerinin verilen akışkanın herhangi bir bölgesindeki kuvvetler dengesinin dinamik ifadesi olduğu söylenebilir. Akışkan parçacığının hızının tek bir bileşeni alınırsa $\left(v \frac{\partial u}{\partial y} = w \frac{\partial u}{\partial z} = 0 \right)$, söz konusu denklem

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

olarak elde edilir. Bu denkleme *bir boyutlu Burgers denklemi* denir. Bu denklem, lineer olmayan bir boyutlu akış denkleminin bütün davranışlarını temsil eder (Cebeci ve diğ., 2005). Denklemdaki ν parametresiyle konveksiyon ile difüzyon terimleri arasındaki çözüm davranışı gözlemlenebilir. Akışkanlar dinamiğinde önemli yer tutan ve model denklemlerden biri olan Burgers denklemi araştırmacıların ilgi odağı olagelmiştir. Belirli başlangıç-sınır koşulları altında problemin hem analitik hem de nümerik çözümlerine rastlanmaktadır.

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad a < x < b, \quad t > 0$$

tipindeki bir boyutlu Burgers denklemi,

$$u(a,t) = f_1(t) , t > 0$$

$$u(b,t) = f_2(t) , t > 0$$

sınır koşulları ve

$$u(x,0) = g(t) , a < x < b$$

başlangıç koşulları ile birlikte verilir. Burada a ve b reel sabitler olup f_1, f_2 ve g fonksiyonları ise bilinenlerdir.

Burgers denklemini içerdığı uu_x lineer olmayan ifade nedeniyle günümüzde bir çok araştırmacının ilgisini çekmektedir (Kutluay ve diğ., 2004). Çünkü ele alınan bazı problemlerin analitik çözümleri Fourier serisi içermekte ve serilerin çözümlerinin yavaş yakınsaması bir sorun olmaktadır. Bu nedenle iyi sonuçlar elde etmek için uzun serilere ihtiyaç vardır. Bundan dolayı, Burgers denklemlerinin nümerik çözümleri önemlidir. Ayrıca teknolojinin gelişmesiyle birlikte denklem, araştırmacıları hassas ve yüksek mertebeden yaklaşımlar bulmaya yöneltmiş ve analitik çözüme daha yakın değerler üretilmesini sağlamıştır.

2.2 Yüksek Mertebeden Sonlu Fark Yöntemleri (SF6, SF8)

Bir fonksiyonun analitik çözümünün var olması durumunda bu fonksiyonun istenilen noktadaki değerini hesaplamak mümkündür. Fakat, analitik çözümü olmayan fonksiyonların doğrudan istenilen noktadaki değerini hesaplamaya ihtiyaç duyulabilir. Bu tür fonksiyonları hesaplamak için de nümerik yöntemler geliştirilmiştir. Bu yöntemlerden biri de, günümüzde en çok kullanılan sonlu fark yöntemleridir. Bu yöntemin çıkarılışında, Taylor seri açılımı akla gelir.

Yüksek mertebeden sonlu fark yöntemleri, zor ve daha çok hassasiyet isteyen problemlerin çözümünde kullanılır. Bu amaçla, bu yöntemde, kullanılan nokta sayısının artırılması göreceli olarak daha iyi sonuçların vermesine olanak sağlamaktadır. Altıncı mertebeden sonlu fark için yedi nokta, sekizinci mertebeden sonlu fark için de dokuz nokta kullanılmaktadır. Şimdi, yedi nokta ile yüksek mertebeden sonlu fark çıkarımlarını Taylor seri yaklaşımıyla hesaplayalım.

$\Delta x = h = x_{i+1} - x_i$ konumdaki artış miktarı olmak üzere N nokta içeren kapalı $a \leq x \leq b$ aralığını alalım. Altıncı merteye için yedi noktaya ihtiyacımız vardır. Aşağıdaki şekil, merkezi fark yaklaşımı gereğince ara noktaların nasıl bulunacağını göstermektedir. Ara nokta için i dersek; geriye kalan altı noktadan i ' nin sağına $i + 1$, $i + 2$, $i + 3$; sol tarafa da $i - 1$, $i - 2$, $i - 3$ olacak şekilde simetrik biçimde yazılır.

Verilen noktalardaki Taylor seri yaklaşımını aşağıdaki şekilde yazalım:

$$\left. \begin{aligned} u_{i-3} &= u_i - 3hu'_i + \frac{(3h)^2}{2!} u''_i - \frac{(3h)^3}{3!} u'''_i + \frac{(3h)^4}{4!} u^{(4)}_i - \frac{(3h)^5}{5!} u^{(5)}_i + \frac{(3h)^6}{6!} u^{(6)}_i - \frac{(3h)^7}{7!} u^{(7)}_i \\ u_{i-2} &= u_i - 2hu'_i + \frac{(2h)^2}{2!} u''_i - \frac{(2h)^3}{3!} u'''_i + \frac{(2h)^4}{4!} u^{(4)}_i - \frac{(2h)^5}{5!} u^{(5)}_i + \frac{(2h)^6}{6!} u^{(6)}_i - \frac{(2h)^7}{7!} u^{(7)}_i \\ u_{i-1} &= u_i - hu'_i + \frac{h^2}{2!} u''_i - \frac{h^3}{3!} u'''_i + \frac{h^4}{4!} u^{(4)}_i - \frac{h^5}{5!} u^{(5)}_i + \frac{h^6}{6!} u^{(6)}_i - \frac{h^7}{7!} u^{(7)}_i \\ u_{i+1} &= u_i + hu'_i + \frac{h^2}{2!} u''_i + \frac{h^3}{3!} u'''_i + \frac{h^4}{4!} u^{(4)}_i + \frac{h^5}{5!} u^{(5)}_i + \frac{h^6}{6!} u^{(6)}_i + \frac{h^7}{7!} u^{(7)}_i \\ u_{i+2} &= u_i + 2hu'_i + \frac{(2h)^2}{2!} u''_i + \frac{(2h)^3}{3!} u'''_i + \frac{(2h)^4}{4!} u^{(4)}_i + \frac{(2h)^5}{5!} u^{(5)}_i + \frac{(2h)^6}{6!} u^{(6)}_i + \frac{(2h)^7}{7!} u^{(7)}_i \\ u_{i+3} &= u_i + 3hu'_i + \frac{(3h)^2}{2!} u''_i + \frac{(3h)^3}{3!} u'''_i + \frac{(3h)^4}{4!} u^{(4)}_i + \frac{(3h)^5}{5!} u^{(5)}_i + \frac{(3h)^6}{6!} u^{(6)}_i + \frac{(3h)^7}{7!} u^{(7)}_i \end{aligned} \right\} \quad (2.1)$$

Yukarıdaki yaklaşımlar üzerinde çeşitli işlemler yapılarak, ikinci mertebeden türev terimi olan u''_i yalnız kalacak şekilde diğer mertebeden türevli terimler yok edilecektir. Bunun için ilk önce (2.1) ifadesini en sade hale getirelim:

$$\left. \begin{aligned} u_{i+1} + u_{i-1} &= 2u_i + h^2 u''_i + 2 \frac{h^4}{4!} u^{(4)}_i + 2 \frac{h^6}{6!} u^{(6)}_i, \\ u_{i+2} + u_{i-2} &= 2u_i + (2h)^2 u''_i + 2 \frac{(2h)^4}{4!} u^{(4)}_i + 2 \frac{(2h)^6}{6!} u^{(6)}_i, \\ u_{i+3} + u_{i-3} &= 2u_i + (3h)^2 u''_i + 2 \frac{(3h)^4}{4!} u^{(4)}_i + 2 \frac{(3h)^6}{6!} u^{(6)}_i. \end{aligned} \right\} \quad (2.2)$$

Elde edilen (2.2) ifadesindeki denklemler sırasıyla a, b, c keyfi sabitleriyle çarpılıp, 2. mertebeden daha yüksek mertebeli türevlerin yok edilmesiyle

$$a \frac{2h^4}{4!} u^{(4)}_i + b \frac{2(2h)^4}{4!} u^{(4)}_i + c \frac{2(3h)^4}{4!} u^{(4)}_i = 0,$$

$$a \frac{2h^6}{6!} u^{(6)}_i + b \frac{2(2h)^6}{6!} u^{(6)}_i + c \frac{2(3h)^6}{6!} u^{(6)}_i = 0.$$

denklemleri oluşur. Bu denklemlerden de,

$$a + 16b + 81c = 0,$$

$$a + 64b + 729c = 0.$$

üç bilinmeyenli iki denklem elde edilir ve bir bilinmeyene keyfi değer verilerek,

$$a = 270, b = -27, c = 2$$

bulunur. Bu değerler (2.2) ifadesinde yerine yazılırsa, ikinci mertebe türev terimi için altıncı mertebe sonlu fark yaklaşımı aşağıdaki gibi olur:

$$u_i'' = \left\{ (2u_{i-3} - 27u_{i-2} + 270u_{i-1} - 490u_i + 270u_{i+1} - 27u_{i+2} + 2u_{i+3}) / (180h^2) \right\} - 0,001785h^6 u_i^{(8)}$$

Burada, $0,0017857h^6 u_i^{(8)}$ kesme hatasıdır.

Kesme hatası, elde edilecek olan sonlu fark çözümlerinin, kısmi diferansiyel denklemin analitik çözümüne ne derece iyi yaklaştığını gösterir.

Yukarıda ele alınan yöntemler, aynı şekilde sınır ve sınıra yakın noktalar için de geçerlidir. $i = 1$ sınır noktasını bulmak için kendisinden sonraki altı noktaya ihtiyaç vardır. Bu noktalar $i + 1, i + 2, i + 3, i + 4, i + 5, i + 6$ şeklindedir. Yukarıdaki gibi Taylor seri açılımıyla ilgili ifadeler çıkarılabilir:

$$\left. \begin{aligned} u_{i+1} &= u_i + hu_i' + \frac{h^2}{2!} u_i'' + \frac{h^3}{3!} u_i''' + \frac{h^4}{4!} u_i^{(4)} + \frac{h^5}{5!} u_i^{(5)} + \frac{h^6}{6!} u_i^{(6)} + \frac{h^7}{7!} u_i^{(7)} \\ u_{i+2} &= u_i + 2hu_i' + \frac{(2h)^2}{2!} u_i'' + \frac{(2h)^3}{3!} u_i''' + \frac{(2h)^4}{4!} u_i^{(4)} + \frac{(2h)^5}{5!} u_i^{(5)} + \frac{(2h)^6}{6!} u_i^{(6)} + \frac{(2h)^7}{7!} u_i^{(7)} \\ u_{i+3} &= u_i + 3hu_i' + \frac{(3h)^2}{2!} u_i'' + \frac{(3h)^3}{3!} u_i''' + \frac{(3h)^4}{4!} u_i^{(4)} + \frac{(3h)^5}{5!} u_i^{(5)} + \frac{(3h)^6}{6!} u_i^{(6)} + \frac{(3h)^7}{7!} u_i^{(7)} \\ u_{i+4} &= u_i + 4hu_i' + \frac{(4h)^2}{2!} u_i'' + \frac{(4h)^3}{3!} u_i''' + \frac{(4h)^4}{4!} u_i^{(4)} + \frac{(4h)^5}{5!} u_i^{(5)} + \frac{(4h)^6}{6!} u_i^{(6)} + \frac{(4h)^7}{7!} u_i^{(7)} \\ u_{i+5} &= u_i + 5hu_i' + \frac{(5h)^2}{2!} u_i'' + \frac{(5h)^3}{3!} u_i''' + \frac{(5h)^4}{4!} u_i^{(4)} + \frac{(5h)^5}{5!} u_i^{(5)} + \frac{(5h)^6}{6!} u_i^{(6)} + \frac{(5h)^7}{7!} u_i^{(7)} \\ u_{i+6} &= u_i + 6hu_i' + \frac{(6h)^2}{2!} u_i'' + \frac{(6h)^3}{3!} u_i''' + \frac{(6h)^4}{4!} u_i^{(4)} + \frac{(6h)^5}{5!} u_i^{(5)} + \frac{(6h)^6}{6!} u_i^{(6)} + \frac{(6h)^7}{7!} u_i^{(7)} \end{aligned} \right\} \quad (2.3)$$

Ara değerler için uyguladığımız yöntem burada da geçerlidir. u_i'' ikinci mertebeden türev yaklaşımını bulmak için (2.3) ifadesine gerekli cebirsel işlemler yapılarak

2. mertebeden türevli terimler yalnız bırakılabilir. Bu amaçla, (2.3) ifadesi keyfi a, b, c, d, e, f sabitleriyle çarpılıp,

$$\begin{aligned}
& ah u_i' + b(2h)u_i' + c(3h)u_i' + d(4h)u_i' + e(5h)u_i' + f(6h)u_i' = 0, \\
& a \frac{h^3}{3!} u_i''' + b \frac{(2h)^3}{3!} u_i''' + c \frac{(3h)^3}{3!} u_i''' + d \frac{(4h)^3}{3!} u_i''' + e \frac{(5h)^3}{3!} u_i''' + f \frac{(6h)^3}{3!} u_i''' = 0, \\
& a \frac{h^4}{4!} u_i^{(4)} + b \frac{(2h)^4}{4!} u_i^{(4)} + c \frac{(3h)^4}{4!} u_i^{(4)} + d \frac{(4h)^4}{4!} u_i^{(4)} + e \frac{(5h)^4}{4!} u_i^{(4)} + f \frac{(6h)^4}{4!} u_i^{(4)} = 0, \\
& a \frac{h^5}{5!} u_i^{(5)} + b \frac{(2h)^5}{5!} u_i^{(5)} + c \frac{(3h)^5}{5!} u_i^{(5)} + d \frac{(4h)^5}{5!} u_i^{(5)} + e \frac{(5h)^5}{5!} u_i^{(5)} + f \frac{(6h)^5}{5!} u_i^{(5)} = 0, \\
& a \frac{h^6}{6!} u_i^{(6)} + b \frac{(2h)^6}{6!} u_i^{(6)} + c \frac{(3h)^6}{6!} u_i^{(6)} + d \frac{(4h)^6}{6!} u_i^{(6)} + e \frac{(5h)^6}{6!} u_i^{(6)} + f \frac{(6h)^6}{6!} u_i^{(6)} = 0.
\end{aligned}$$

denklem sistemi elde edilir. Bu denklemlerden de,

$$a + 2b + 3c + 4d + 5e + 6f = 0,$$

$$a + 8b + 27c + 64d + 125e + 216f = 0,$$

$$a + 16b + 81c + 256d + 625e + 1296f = 0,$$

$$a + 32b + 243c + 1024d + 3125e + 7776f = 0,$$

$$a + 64b + 729c + 4096d + 15625e + 46656f = 0.$$

cebirsel ifadesi elde edilir. Altı bilinmeyenli beş denklemden oluşan bu sistemin çözümlerini bulmak için bir tanesine keyfi değer atanır.

Bunun için yukarıdaki sistemi matris formatında yazalım.

$$\begin{pmatrix}
1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\
1 & 8 & 27 & 64 & 125 & 216 \\
1 & 16 & 81 & 256 & 625 & 1296 \\
1 & 32 & 243 & 1024 & 3125 & 7776 \\
1 & 64 & 729 & 4096 & 15625 & 46656
\end{pmatrix}$$

Bu sistemi, Gauss eliminasyon yöntemi ile eşelon forma indirirsek

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 6 & 24 & 60 & 120 & 210 \\ 0 & 0 & 22 & 112 & 340 & 800 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1200}{11} & \frac{7320}{11} & \frac{25920}{11} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{3288}{5} & \frac{23328}{5} \end{pmatrix}$$

elde edilir. Bu matris formunu,

$$a + 2b + 3c + 4d + 5e + 6f = 0,$$

$$6b + 24c + 60d + 120e + 210f = 0,$$

$$22c + 112d + 340e + 800f = 0,$$

$$\frac{1200}{11}d + \frac{7320}{11}e + \frac{25920}{11}f = 0,$$

$$\frac{3288}{5}e + \frac{23328}{5}f = 0.$$

lineer sistemine getirilir. Bu denklem sistemi çözümlerse

$$a = -3132, b = 5265, c = -5080, d = 2970, e = -972, f = 137$$

olarak bulunur. Bu değerler (2.3) ifadesinde yerine yazılırsa, ikinci mertebe türev terimi için altıncı mertebe sonlu fark yaklaşımı aşağıdaki gibi olur.

$$u_i'' = (812u_i - 3132u_{i+1} + 5265u_{i+2} - 5080u_{i+3} + 2970u_{i+4} - 972u_{i+5} + 137u_{i+6}) / (180h^2)$$

Benzer şekilde, sırasıyla, $i = 2, 3$ sınıra yakın noktalar için ikinci mertebe türev terimi için altıncı mertebe sonlu fark yaklaşımı,

$$u_i'' = (137u_{i-1} - 147u_i - 255u_{i+1} + 470u_{i+2} - 285u_{i+3} + 93u_{i+4} - 13u_{i+5}) / (180h^2)$$

$$u_i'' = (-13u_{i-2} + 228u_{i-1} - 420u_i + 200u_{i+1} + 15u_{i+2} - 12u_{i+3} + 2u_{i+4}) / (180h^2)$$

olarak bulunur. Benzer şekilde, $i = N - 2, N - 1, N$ noktaları için ikinci mertebe türev terimi için altıncı mertebe sonlu fark yaklaşımı çıkarılabilir. Sonuç olarak, tüm noktalar ($1 \leq i \leq N$) için ikinci mertebe türev terimi için altıncı mertebe sonlu fark yaklaşımı, sırasıyla,

$$u_i'' = \frac{1}{180h^2} (812u_i - 3132u_{i+1} + 5265u_{i+2} - 5080u_{i+3} + 2970u_{i+4} - 972u_{i+5} + 137u_{i+6})$$

$$u_i'' = \frac{1}{180h^2} (137u_{i-1} - 147u_i - 255u_{i+1} + 470u_{i+2} - 285u_{i+3} + 93u_{i+4} - 13u_{i+5})$$

$$u_i'' = \frac{1}{180h^2} (-13u_{i-2} + 228u_{i-1} - 420u_i + 200u_{i+1} + 15u_{i+2} - 12u_{i+3} + 2u_{i+4})$$

$$u_i'' = \frac{1}{180h^2} (2u_{i-3} - 27u_{i-2} + 270u_{i-1} - 490u_i + 270u_{i+1} - 27u_{i+2} + 2u_{i+3})$$

$$u_i'' = \frac{1}{180h^2} (-13u_{i+2} + 228u_{i+1} - 420u_i + 200u_{i-1} + 15u_{i-2} - 12u_{i-3} + 2u_{i-4})$$

$$u_i'' = \frac{1}{180h^2} (137u_{i+1} - 147u_i - 255u_{i-1} + 470u_{i-2} - 285u_{i-3} + 93u_{i-4} - 13u_{i-5})$$

$$u_i'' = \frac{1}{180h^2} (812u_i - 3132u_{i-1} + 5265u_{i-2} - 5080u_{i-3} + 2970u_{i-4} - 972u_{i-5} + 137u_{i-6})$$

şeklindedir.

Yukarıda u_i'' için bulunan altıncı mertebe yaklaşım, u_i' birinci mertebe türev için de bulunur. Ayrıca, birinci mertebe türev terimi için elde edilen tüm altıncı mertebeden sonlu fark yaklaşım formüllerini tek bir ifade ile de gösterilebilir (Zeytinoğlu, 2010). Benzer yaklaşım ile dokuz nokta kullanılarak elde edilen (sekizinci mertebeden sonlu fark yaklaşımı) yaklaşımların katsayıları Taylor seri açılımıyla hesaplanmıştır ve Ek A.2'de verilmiştir.

Benzer şekilde, birinci mertebe türev için yüksek (6. ve 8.) mertebeden sonlu fark yaklaşımları Ek A.1'de verilmiştir.

2.3 Yüksek Mertebeden Kompakt Sonlu Fark Yöntemleri

Kompakt sonlu fark yöntemi bir kapalı yöntemdir. Bu yöntemin avantajlarından biri, bulunması istenilen noktanın komşu noktaların türevlerinin hesaplanması ve hesaplanmaya dahil edilerek daha iyi sonuçlar vermesidir. Açık (explicit) yöntemden farklı olan bu metot, komşu noktaların bilinmemesine bağlı olarak birden fazla bilinmeyen içermektedir. Bu tür sistemleri eşzamanlı olarak çözülebilir hale getiren yaklaşımlardan biri de kompakt sonlu fark yöntemidir.

Bu alt bölümde, Taylor seri açılımı ve merkezi fark yaklaşımı ile yöntemin çıkarılışı gösterilecektir.

$\Delta x = h = x_{i+1} - x_i$ konumdaki artış miktarı olmak üzere N nokta içeren kapalı $a \leq x \leq b$ aralığını alalım. i noktasındaki u'_i birinci mertebeden türev terimi, i noktasına yakın olan noktaların fonksiyon değerlerine bağlıdır (Lele, 1992). Lele'nin işaret ettiği gibi, ikinci ve dördüncü mertebeden u'_i birinci mertebeye türev teriminin merkezi fark yaklaşımı, sırasıyla, $\{u_{i-1}, u_{i+1}\}$ ve $\{u_{i-2}, u_{i-1}, u_{i+1}, u_{i+2}\}$ kümelerine bağlıdır. Genelleştirilmiş yazımı ise;

$$\beta u'_{i-2} + \alpha u'_{i-1} + u'_i + \alpha u'_{i+1} + \beta u'_{i+2} = a \frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2h} + b \frac{u_{i+2} - u_{i-2}}{4h} + c \frac{u_{i+3} - u_{i-3}}{6h} \quad (2.4)$$

şeklindedir. (2.4) ifadesinde katsayılar arasındaki ilişki, Taylor seri açılımı sayesinde bulunup, aynı türev terimli katsayılar eşleştirilerek hesaplanır. Bu amaçla, ilk önce (2.4) denkleminin sol tarafı Taylor seri açılımıyla yazılırsa,

$$u'_{i-2} = u'_i - 2hu''_i + \frac{(2h)^2 u'''_i}{2!} - \frac{(2h)^3 u^{(4)}_i}{3!} + \frac{(2h)^4 u^{(5)}_i}{4!}$$

$$u'_{i-1} = u'_i - hu''_i + \frac{(h)^2 u'''_i}{2!} - \frac{(h)^3 u^{(4)}_i}{3!} + \frac{(h)^4 u^{(5)}_i}{4!}$$

birinci mertebeye türev teriminin Taylor seri açılımı yukarıdaki gibi olur. Aynı şekilde u'_{i+1} ve u'_{i+2} ifadeleri Taylor seri açılımıyla yazılıp, α ve β katsayıları ile birlikte (2.4) ifadesinin sol tarafının en sade hali,

$$(2\alpha + 2\beta + 1)u'_i + h^2(\alpha + 4\beta)u'''_i + \frac{2h^4}{4!}(\alpha + 16\beta)u^{(5)}_i \quad (2.5)$$

şeklini alır. Benzer şekilde, (2.4) denkleminin sağ tarafı da Taylor seri açılımıyla yazılırsa, ifadenin en sade hali,

$$(a + b + c)u'_i + \frac{h^2}{3!}(a + 4b + 9c)u'''_i + \frac{h^4}{5!}(a + 16b + 81c)u^{(5)}_i \quad (2.6)$$

şeklini alır.

(2.5) ve (2.6) ifadeleri birbirine eşitlenip, ilgili türev terimlerinin katsayıları eşitlenirse,

$$\text{ikinci mertebeye: } (a + b + c) = (1 + 2\alpha + 2\beta)$$

$$\text{dördüncü mertebeye: } (a + 2^2b + 3^2c) = 2 \frac{3!}{2!} (\alpha + 4\beta)$$

$$\text{altıncı mertebeye: } (a + 2^4b + 3^4c) = 2 \frac{5!}{4!} (\alpha + 16\beta)$$

şeklini alır. (2.4) ifadesi tridiagonal ya da pentadiagonal bir sistemdir. $\beta = 0$ durumu göz önüne alındığında ise sistem tridiagonaldır. Bir yaklaşımı elde etmek için kesilen hata teriminin etkisi, büyüktür. Bu durumdan yola çıkılırsa, dördüncü mertebeden hata terimi

$$\text{KH} = \left[\frac{1}{5!} (a + 2^4b + 3^4c) - \frac{2}{4!} (\alpha + 16\beta) \right] h^4 u_i^{(5)}$$

olur. Aynı zamanda $c = 0$ seçilirse

$$a = \frac{2}{3} (\alpha + 2) \quad \text{ve} \quad b = \frac{1}{3} (4\alpha - 1)$$

α parametresine bağlı dördüncü mertebeden tridiagonal sistem elde edilir. Bu durumlar göz önünde bulundurulursa (2.4) ifadesi

$$\alpha u'_{i-1} + u'_i + \alpha u'_{i+1} = \frac{2}{3} (\alpha + 2) \frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2h} + \frac{1}{3} (4\alpha - 1) \frac{u_{i+2} - u_{i-2}}{4h} \quad (2.7)$$

halini alır. Yukarıda verilen kesme hatasını da α parametresine bağlı olarak

$$\text{KH} = \left[\frac{1}{5!} (a + 2^4b + 3^4c) - \frac{2}{4!} (\alpha + 2^4\beta) \right] h^4 u_i^{(5)} = \frac{4}{5!} (3\alpha - 1) h^4 u_i^{(5)}$$

yazılır. Yukarıda belirttiğimiz gibi hata terimi yok edilirse, yani,

$$\text{KH} = \frac{4}{5!} (3\alpha - 1) h^4 u_i^{(5)} = 0$$

yaklaşım altıncı mertebeden olur. Bu, $\alpha = \frac{1}{3}$ olmasıdır. Dolayısıyla $\alpha = \frac{1}{3}$ olduğunda

$a = \frac{14}{9}$ ve $b = \frac{1}{9}$ olur. Bu değerler (2.7) ifadesinde yerine yazıldığında,

$$\frac{1}{3}u'_{i-1} + u'_i + \frac{1}{3}u'_{i+1} = \frac{1}{h} \left(-\frac{1}{36}u_{i-2} - \frac{7}{9}u_{i-1} + \frac{7}{9}u_{i+1} + \frac{1}{36}u_{i+2} \right)$$

elde edilir. Bulunan bu ifade ara noktalar için genel bir ifadedir. Benzer şekilde sınır ve sınıra yakın noktaların yaklaşımları da elde edilebilir. $i = 1$ noktası için yaklaşım,

$$u'_i + \alpha u'_{i+1} = au_i + bu_{i+1} + cu_{i+2} + du_{i+3} + eu_{i+4} + fu_{i+5}$$

şeklindedir. Önceki çıkarılıştaki gibi terimleri Taylor seri açılımıyla yazarsak

$$\begin{aligned} (\alpha + 1)u'_i + \alpha hu''_i + \alpha \frac{h^2}{2!}u'''_i + \alpha \frac{h^3}{3!}u^{(4)}_i + \alpha \frac{h^4}{4!}u^{(5)}_i &= (a + b + c + d + e + f)u_i \\ + (b + 2c + 3d + 4e + 5f)hu'_i + (b + 2^2c + 3^2d + 4^2e + 5^2f) \frac{h^2}{2!}u''_i \\ + (b + 2^3c + 3^3d + 4^3e + 5^3f) \frac{h^3}{3!}u'''_i + (b + 2^4c + 3^4d + 4^4e + 5^4f) \frac{h^4}{4!}u^{(4)}_i \\ + (b + 2^5c + 3^5d + 4^5e + 5^5f) \frac{h^5}{5!}u^{(5)}_i \end{aligned}$$

Yukarıdaki sistemde aynı mertebeden türev terimlerinin katsayıları eşitlenirse,

$$\begin{aligned} a + b + c + d + e + f &= 0 \\ b + 2c + 3d + 4e + 5f &= \alpha + 1 \\ b + 2^2c + 3^2d + 4^2e + 5^2f &= 2\alpha \\ b + 2^3c + 3^3d + 4^3e + 5^3f &= 3\alpha \\ b + 2^4c + 3^4d + 4^4e + 5^4f &= 4\alpha \end{aligned}$$

lineer sistem elde edilir.

Burada $\alpha = 5$ için,

$$a = -\frac{197}{60} \quad b = -\frac{5}{12} \quad c = 5 \quad d = -\frac{5}{3} \quad e = \frac{5}{12} \quad f = -\frac{1}{20}$$

katsayı değerleri bulunur. Dolayısıyla $i = 1$ için birinci mertebeden türev yaklaşımı

$$u'_i + 5u'_{i+1} = \frac{1}{h} \left(-\frac{197}{60}u_i - \frac{5}{2}u_{i+1} + 5u_{i+2} - \frac{5}{3}u_{i+3} + \frac{5}{12}u_{i+4} - \frac{1}{20}u_{i+5} \right)$$

şeklindedir. Benzer şekilde, $i = 2$ için birinci derece türev yaklaşımı

$$\frac{2}{11}u'_{i-1} + u'_i + \frac{2}{11}u'_{i+1} = \frac{1}{h} \left(-\frac{20}{33}u_{i-1} - \frac{35}{132}u_i + \frac{34}{33}u_{i+1} - \frac{7}{33}u_{i+2} + \frac{2}{33}u_{i+3} - \frac{1}{132}u_{i+4} \right)$$

elde edilir. Benzer düşünceler $i = N-1$ ve $i = N$ sınır noktaları için de geçerlidir.

Sonuç olarak $1 \leq i \leq N$ noktalarında, u'_i birinci derece türev teriminin altıncı derece kompakt sonlu fark yaklaşımı

$$u'_i + 5u'_{i+1} = \frac{1}{h} \left(-\frac{197}{60}u_i - \frac{5}{2}u_{i+1} + 5u_{i+2} - \frac{5}{3}u_{i+3} + \frac{5}{12}u_{i+4} - \frac{1}{20}u_{i+5} \right)$$

$$\frac{2}{11}u'_{i-1} + u'_i + \frac{2}{11}u'_{i+1} = \frac{1}{h} \left(-\frac{20}{33}u_{i-1} - \frac{35}{132}u_i + \frac{34}{33}u_{i+1} - \frac{7}{33}u_{i+2} + \frac{2}{33}u_{i+3} - \frac{1}{132}u_{i+4} \right)$$

$$\frac{1}{3}u'_{i-1} + u'_i + \frac{1}{3}u'_{i+1} = \frac{1}{h} \left(-\frac{1}{36}u_{i-2} - \frac{7}{9}u_{i-1} + \frac{7}{9}u_{i+1} + \frac{1}{36}u_{i+2} \right)$$

$$\frac{2}{11}u'_{i-1} + u'_i + \frac{2}{11}u'_{i+1} = \frac{1}{h} \left(\frac{20}{33}u_{i+1} + \frac{35}{132}u_i - \frac{34}{33}u_{i-1} + \frac{7}{33}u_{i-2} - \frac{2}{33}u_{i-3} + \frac{1}{132}u_{i-4} \right)$$

$$5u'_{i-1} + u'_i = \frac{1}{h} \left(\frac{197}{60}u_i + \frac{5}{2}u_{i-1} - 5u_{i-2} + \frac{5}{3}u_{i-3} - \frac{5}{12}u_{i-4} + \frac{1}{20}u_{i-5} \right)$$

olarak verilir. Yukarıda birinci derece türev terimi için yaptığımız çıkarımın benzeri u''_i , ikinci derece türev terimi için de yapılabilir. Bu konudaki detaylı tartışma için Lele (1992)'nin çalışmasına başvurulabilir.

u_i'' ikinci mertebe türev terimini katsayı matrisi ile hesaplamak daha kolay bir yöntemdir. Birinci mertebe türev için bulduğumuz yukarıdaki denklem sistemlerini \mathbf{A} ve \mathbf{B} katsayılar matrisi olmak üzere $\mathbf{A}U' = \mathbf{B}U$ şeklinde yazabiliriz. Dolayısıyla U''

$$\mathbf{A}U' = \mathbf{B}U$$

$$U' = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}U$$

$$U'' = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}U$$

şeklinde elde edilir.

Bu çalışmanın temelini oluşturan yüksek mertebeden (SF6, SF8) sonlu fark ve altıncı mertebeden (KSF6) sonlu fark şemalarının çıkarılışına yer verilmiştir. Şimdi ise bu nümerik yöntemleri Burgers denklemine uygulamadan önce literatürde sıkça karşılaşılan ve yukarıdaki yöntemlerin farklı versiyonları denilebilecek yaklaşımlara bakalım.

2.4 Lax–Wendroff Yöntemi

$\Delta t = k = y_{j+1} - y_j$ ($1 \leq j \leq M$) zaman artımı olmak üzere, Lax-Wendroff sonlu fark yöntemi, Taylor seri açılımı ile aşağıdaki ifade takip edilerek,

$$u_i^{j+1} = u_i^j + (k)u_t + \frac{1}{2}(k)^2 u_{tt} + O[(k)^3]$$

elde edilir (Lax ve Wendroff, 1960). Daha sonra ise bir boyutlu dalga denklemi kullanılarak Lax-Wendroff yöntemi literatüre kazandırılmıştır. Bu amaçla, aynı mantıktan yola çıkılarak yöntem Burgers denklemine uygulanır. Denklemin nonlinear kısmı ele alınırsa

$$u_t = -uu_x$$

$$u_{tt} = u^2 u_{xx}$$

olur. Bu ifadeler, yukarıda verilen Taylor seri açılımında yerine yazılırsa,

$$u_i^{j+1} = u_i^j - kuu_x + \frac{k^2}{2}(u)^2 u_{xx} + \dots$$

ifadesi elde edilir. Burada x' e göre türevler yerine merkezi fark yaklaşımları yazılırsa sistem

$$u_i^{j+1} = u_i^j - \frac{k}{2h} u_i^j (u_{i+1}^j - u_{i-1}^j) + \frac{k^2}{2h^2} (u_i^j)^2 (u_{i-1}^j - 2u_i^j + u_{i+1}^j)$$

biçimini alır. Son olarak, yukarıdaki ifadenin Burgers denkleminin uygulanmasıyla

$$u_i^{j+1} = u_i^j - \frac{k}{2h} u_i^j (u_{i+1}^j - u_{i-1}^j) + \frac{k^2}{2h^2} (u_i^j)^2 (u_{i-1}^j - 2u_i^j + u_{i+1}^j) + \frac{\nu k}{h^2} (u_{i-1}^j - 2u_i^j + u_{i+1}^j)$$

elde edilir. Burada dikkat edilmesi gereken nokta, Lax-Wendroff yönteminin, Burgers denkleminin sadece lineer olmayan terimine uygulanmasıdır.

2.5 MacCormack Açık Yöntemi

Daha çok sıvı akış problemlerinin çözümünde kullanılan ve MacCormack (1969) tarafından geliştirilen ve lineer olmayan kısmi diferansiyel denklemlerin çözümünde etkin olan bir yöntemdir (Tannehill ve diğ., 1997). Bu yöntem, model denklemlere Predictor-Corrector (PC) yöntemiyle uygulanır. Bu nedenle öncelikle PC yöntemine değinilecektir.

Burada, predictor (kestirici) yöntemine açık (explicit); corrector (düzeltici) yöntemine de kapalı (implicit) yöntem denilebilir.

Açık yöntemler ile problemlerin çözümleri yapılırken, kararlılık analizinde başarılı olmak için binlerce veya milyonlarca adımdan oluşan yöntemler kullanmak zorunda kalınabilir ve bu durum hesaplamayı güçleştirir. Ancak, kapalı yöntemler ise tam aksine çok güçlü kararlılık özelliğine sahiptir. Böylece bu iki yöntemi kombine ederek, lineer olmayan denklemlerin çözümlerini iyileştirici bir yaklaşım ortaya konmuş olur (Iyengar ve Jain, 2009). Bu yöntem, *predictor-corrector yöntemi* veya *PC yöntemi* denilmektedir.

Yöntemin denkleme uygulanmasında, önce predictor ile $\left(j + \frac{1}{2}\right)$ 'deki zaman adımının yaklaşık çözümler hesaplanır. Sonra da correctorda, predictorda hesaplanan

$\left(j + \frac{1}{2}\right)$ deki zaman adımının yaklaşık çözümleri kullanılarak $(j + 1)$ 'deki yaklaşık çözümler bulunur.

Ayrıca, bu yöntemi kullanan Dey ve Dey (1983) açık predictor-corrector yaklaşımı ile Burgers denkleminin çözümlerini vermişlerdir. Şimdi, MacCormack açık yönteminin Burgers denklemine uygulanmasıyla

$$\begin{aligned} \text{Predictor: } \overline{u_i^{j+1}} &= u_i^j - \frac{k}{h} u_i^j (u_{i+1}^j - u_i^j) + \frac{\nu k}{h^2} (u_{i-1}^j - 2u_i^j + u_{i+1}^j) \\ \text{Corrector: } u_i^{j+1} &= \frac{1}{2} \left[u_i^j + \overline{u_i^{j+1}} - \frac{k}{h} \overline{u_i^{j+1}} (\overline{u_i^{j+1}} - \overline{u_{i-1}^{j+1}}) + \frac{\nu k}{h^2} (\overline{u_{i-1}^{j+1}} - 2\overline{u_i^{j+1}} + \overline{u_{i+1}^{j+1}}) \right] \end{aligned}$$

ifadesi elde edilir.

Sonraki bölümde, Burgers denklemine uygulanan MacCormack açık yönteminin nümerik çözümlerine de yer verilecektir. Bu çözümlerde, predictor-corrector yöntemlerinde kullanılmak üzere farklı yüksek mertebeden yaklaşımlara müracaat edilecektir.

2.6 Yüksek Mertebeden Upwind Kompakt Sonlu Fark Yöntemi

Kompakt sonlu fark yöntemlerini iki geniş kategoriye ayırdığımızda bunlardan biri merkezi sonlu fark, diğeri de upwind sonlu fark yöntemidir. Son yıllarda çoğu araştırmacı bu yöntem üzerinde çalışmışlardır. Rai ve Moin (1991), yüksek mertebe upwind sonlu fark yönteminin çok sağlam olduğu fikrinde birleşmişlerdir.

Daha çok akışkanlar mekaniğinde kullanılan bu yöntemin, türbülans sıvı akış simülasyonlarını göstermek için son yıllarda kullanımı artmıştır. Tolstykh (1991) atmosferdeki nem taşınım denklemi için beşinci mertebe upwind kompakt sonlu fark yöntemini analiz etmiştir. Nümerik dissipatifi daha aza indirgeyerek, konveksiyon teriminin baskın olduğu problemleri iyi analiz edebilmek için upwind yöntemi kullanılır (Zhong, 1996). Bu alt bölümde yüksek mertebeden kompakt sonlu fark yöntemlerinin (KSF3, KSF5) çıkarılışı gösterilecektir.

2.6.1 Beşinci Mertebeden Upwind Kompakt Sonlu Fark Yöntemi

u'_i birinci mertebeye türev teriminin i -inci düğüm noktasındaki merkezi sonlu fark yaklaşımının en genel hali,

$$\sum_{k=-M+M_0+1}^{M_0} b_{i+k} u'_{i+k} = \frac{1}{h} \sum_{k=-N+N_0+1}^{N_0} a_{i+k} u_{i+k}$$

şeklindedir (Carpenter ve diğ., 1995). Denklemin sağ tarafındaki N_0 , i -inci düğüm noktasını temel alarak sağındaki veya solundaki nokta sayısı, N ise tüm noktaların sayısıdır. Benzer şekilde, eşitliğin sol tarafındaki M ve M_0 tanımlanır. Burada $M \geq 2$ olduğunda yukarıdaki ifade kompakt sonlu fark yöntemi, $M=1$ ve $M_0=0$ olduğunda açık sonlu fark yöntemi olur. N_0 ve M_0 tanımlamalarından yola çıkılarak toplam düğüm sayısı,

$$N = 2N_0 + 1$$

$$M = 2M_0 + 1$$

olarak ifade edilir. Dolayısıyla,

$$\sum_{k=-M_0}^{M_0} b_{i+k} u'_{i+k} = \frac{1}{h} \sum_{k=-N_0}^{N_0} a_{i+k} u_{i+k} - \frac{\alpha}{(p+1)!} h^p \left(\frac{\partial u^{p+1}}{\partial^{p+1} x} \right) + \dots$$

en son hali elde edilir. Burada, $p = 2(N_0 + M_0) - 1$. Bu nedenle, upwind yönteminin mertebeleri her zaman tek tamsayıdır. Ayrıca, α sıfırdan farklı ise tüm yöntemler p -inci mertebeden, α sıfır ise tüm yöntemler $(p+1)$ -inci mertebeden açık yöntemdir. α , sayısal dissipasyon büyüklüğü üzerinde oldukça etkilidir ve değeri tek değildir.

İşaret edilen bu noktalardan sonra beşinci mertebeden upwind kompakt sonlu fark ifadesi,

$$b_{i-1} u'_{i-1} + b_i u'_i + b_{i+1} u'_{i+1} = \frac{1}{h} \sum_{k=-2}^2 a_{i+k} u_{i+k} - \frac{\alpha}{6!} h^5 \left(\frac{\partial u^6}{\partial^6 x} \right)$$

olarak verilebilir (Zhong, 1996).

Gerekli işlemlerden sonra,

$$a_{i+2} = \frac{5}{3} + \frac{5}{6}\alpha$$

$$a_{i+1} = \frac{140}{3} + \frac{20}{3}\alpha$$

$$a_i = 0 - 15$$

$$a_{i-1} = -\frac{140}{3} + \frac{20}{3}\alpha$$

$$a_{i-2} = -\frac{5}{3} + \frac{5}{6}\alpha$$

$$b_{i+1} = 20 + 5\alpha$$

$$b_i = 60$$

$$b_{i-1} = 20 - 5\alpha$$

katsayıları hesaplanır. Son olarak ara noktaların ifadesi $\alpha = -1$ için,

$$\frac{5}{12}u'_{i-1} + u'_i + \frac{1}{4}u'_{i+1} = \frac{1}{h} \left(-\frac{1}{24}u_{i-2} - \frac{8}{9}u_{i-1} + \frac{1}{4}u_i + \frac{2}{3}u_{i+1} + \frac{1}{72}u_{i+2} \right)$$

biçimindedir.

Şimdi $i=1$ sınır noktası için birinci merteye türev teriminin beşinci mertebeden kompakt sonlu fark yaklaşımını çıkaralım. Elde edilen bu ifade altıncı merteye kompakt sonlu fark çıkarımına benzerdir.

$$u'_i + \alpha u'_{i+1} = \alpha u_i + b u_{i+1} + c u_{i+2} + d u_{i+3} + e u_{i+4}$$

ifadelerini ele alalım. Eşitliğin hem sağına hem de soluna Taylor seri açılımını uygularsak,

$$\begin{aligned} (\alpha + 1)u'_i + \alpha h u''_i + \alpha \frac{h^2}{2!} u'''_i + \alpha \frac{h^3}{3!} u^{(4)}_i &= (a + b + c + d + e)u_i \\ &+ (b + 2c + 3d + 4e)h u'_i + (b + 2^2 c + 3^2 d + 4^2 e) \frac{h^2}{2!} u''_i \\ &+ (b + 2^3 c + 3^3 d + 4^3 e) \frac{h^3}{3!} u'''_i + (b + 2^4 c + 3^4 d + 4^4 e) \frac{h^4}{4!} u^{(4)}_i \end{aligned}$$

elde edilir. Aynı mertebeden türevler eşitlendiğinde,

$$a + b + c + d + e = 0$$

$$b + 2c + 3d + 4e = \alpha + 1$$

$$b + 2^2c + 3^2d + 4^2e = 2\alpha$$

$$b + 2^3c + 3^3d + 4^3e = 3\alpha$$

lineer denklem sistemi elde edilir. Burada $\alpha = 4$ için,

$$a = -\frac{37}{12}, \quad b = \frac{2}{3}, \quad c = 3, \quad d = -\frac{2}{3}, \quad e = \frac{1}{12}$$

katsayıları bulunur. Dolayısıyla $i = 1$ birinci merteye türev yaklaşımı

$$u'_i + 4u'_{i+1} = \frac{1}{h} \left(-\frac{37}{12}u_i + \frac{2}{3}u_{i+1} + 3u_{i+2} - \frac{2}{3}u_{i+3} + \frac{1}{12}u_{i+4} \right)$$

gibi olur. Benzer şekilde $i = 2$ için de yapılırsa,

$$\frac{1}{6}u'_{i-1} + u'_i + \frac{1}{2}u'_{i+1} = \frac{1}{h} \left(-\frac{5}{9}u_{i-1} - \frac{1}{2}u_i + u_{i+1} + \frac{1}{18}u_{i+2} \right)$$

elde edilir. Benzer düşünceler $i = N-1$ ve $i = N$ noktaları için de geçerlidir. Sonuç olarak, $1 \leq i \leq N$ noktalarında u'_i birinci merteye türev teriminin beşinci mertebeden upwind kompakt yaklaşımı aşağıdaki gibidir:

$$u'_i + 4u'_{i+1} = \frac{1}{h} \left(-\frac{37}{12}u_i + \frac{2}{3}u_{i+1} + 3u_{i+2} - \frac{2}{3}u_{i+3} + \frac{1}{12}u_{i+4} \right)$$

$$\frac{1}{6}u'_{i-1} + u'_i + \frac{1}{2}u'_{i+1} = \frac{1}{h} \left(-\frac{5}{9}u_{i-1} - \frac{1}{2}u_i + u_{i+1} + \frac{1}{18}u_{i+2} \right)$$

$$\frac{5}{12}u'_{i-1} + u'_i + \frac{1}{4}u'_{i+1} = \frac{1}{h} \left(-\frac{1}{24}u_{i-2} - \frac{8}{9}u_{i-1} + \frac{1}{4}u_i + \frac{2}{3}u_{i+1} + \frac{1}{72}u_{i+2} \right)$$

$$\frac{1}{2}u'_{i-1} + u'_i + \frac{1}{6}u'_{i+1} = \frac{1}{h} \left(-\frac{1}{18}u_{i-2} - u_{i-1} + \frac{1}{2}u_i + \frac{5}{9}u_{i+1} \right)$$

$$4u'_{i-1} + u'_i = \frac{1}{h} \left(-\frac{1}{12}u_{i-4} + \frac{2}{3}u_{i-3} - 3u_{i-2} - \frac{2}{3}u_{i-1} + \frac{37}{12}u_i \right)$$

Altıncı mertebeden kompakt sonlu fark yöntemindeki gibi, ikinci mertebeden türev terimini, katsayılar matrisi ile hesaplamak bu yöntem için de geçerlidir. Yukarıda yapılan işlemlerin benzeri üçüncü mertebeden upwind kompakt sonlu fark yöntemine (UKSF3) de yapılarak sınır noktalarındaki ifadeler bulunabilir. Yine ara noktalar için Zhong (1996) çalışmasına başvurulabilir. u'_i , birinci mertebeye türev terimi için üçüncü mertebeye upwind kompakt sonlu fark yaklaşımı Ek B' de verilmiştir.

2.7 Parçalı (Splitted) Burgers Denklemi

Parçalama yöntemine Marchuk (1968) çalışmalarında çoğunlukla yer vermiş ve daha sonra bir çok bilim adamı tarafından uygulanarak literatüre kazandırılmıştır. Lineer olmayan kısmi diferansiyel denklemler, fiziksel uygulamaları, kuantum hesaplamaları gibi çalışmalar bu yöntemin gerekliliğinin ortaya çıkmasına katkı sağlamıştır. Bu yöntemin avantajlarından biri, denklemleri basit yapılara indirgeyerek bilgisayar ortamında yeterince hassas çözüm sunmasıdır.

Bu da yöntemin etkin sonuçlar vermesine ve uygulanabilir olmasına olanak sağlamıştır (Jain ve Raja, 1979). Ayrıca, söz konusu yazarlar çalışmalarında bir boyutlu kapalı sonlu fark yöntemi ile Burgers denkleminin nümerik çözümlerini elde etmişlerdir. Yöntemin uygulanışı,

$$u_t = \nu u_{xx} \quad (2.8)$$

$$u_t = -uu_x \quad (2.9)$$

şeklindedir. Önce (2.8) denklemi sonlu farklar yaklaşımıyla,

$$\overline{u_i^{j+1}} = u_i^j + \frac{\nu k}{h^2} (u_{i-1}^j - 2u_i^j + u_{i+1}^j)$$

biçiminde yazılır. Daha sonra elde edilen $\overline{u_i^{j+1}}$ ler (2.9) denkleminde

$$u_i^{j+1} = \overline{u_i^{j+1}} - \frac{k}{2h} \overline{u_i^{j+1}} (\overline{u_{i+1}^{j+1}} - \overline{u_{i-1}^{j+1}})$$

şeklinde yerine yazılmasıyla u_i^{j+1} , bir sonraki zaman adımı değerleri hesaplanır. Bu yöntemin kalitatif ve kantitatif davranışa etkisi son bölümde gösterilip tartışılacaktır. Ayrıca yöntemin SF6, SF8 ile çözümleri ve Lax-Wendroff ile olan kombinasyonu ile üretilen nümerik çözümler sonraki bölümde verilecektir.

Bu çalışma boyunca analiz edilen yaklaşımlar, altıncı merteye sonlu fark, sekizinci merteye sonlu fark, altıncı merteye kompakt sonlu fark, altıncı merteye Lax-Wendroff sonlu fark, sekizinci merteye Lax-Wendroff sonlu fark, altıncı merteye Lax-Wendroff kompakt sonlu fark, sırasıyla, SF6, SF8, KSF6, LWSF6, LWSF8 ve LWKSF6 ile gösterilecektir.

MacCormack şeması altında predictor-corrector ifadelerini şu şekilde özetleyebiliriz: Altıncı merteye predictor ve corrector (PC1); sekizinci merteye predictor ve corrector (PC2); altıncı merteye predictor ve sekizinci merteye corrector (PC3); altıncı merteye predictor ve altıncı merteye kompakt corrector (PC4).

Üçüncü merteye upwind kompakt sonlu fark (UKSF3) ve beşinci merteye upwind kompakt sonlu fark (UKSF5) şeklinde kısaltılmıştır.

Altıncı merteye parçalanmış (splitted) yöntemi (PY1), sekizinci merteye (PY2); altıncı merteye Lax-Wendroff parçalanmış yöntemi (PY3), sekizinci merteye (PY4) ve altıncı merteye Lax-Wendroff kompakt parçalanmış yöntemi (PY5) ile gösterilmiştir.

Bu şekilde ele alınan sonlu fark şemaları, belirli başlangıç-sınır şartlarına sahip problemlere uygulanacak ve elde edilecek sonuçlar literatürde mevcut olan analitik ve nümerik sonuçlarla karşılaştırılacaktır.

3. NÜMERİK YÖNTEMLERİN UYGULANMASI

Nonlinear kısmi diferansiyel denklem olan Burgers denkleminin, konum (x) ve zaman (t) olmak üzere iki bağımsız değişkeni vardır. Bu denklem, konuma sonlu fark yöntemleri uygulayarak zamana bağlı adi diferansiyel denklem biçiminde yazılabilir. Bu tür denklemleri çözmeye kullanılan yöntemlerden biri de, çok fazla hesaplama zorluğu gerektirmeyen açık TVD-RK3 (Total Variation Diminishing- third order Runge Kutta) yöntemidir. Harten (1983) tarafından önerilen bu yöntem, kararlılık özelliğini kesinleştirmesinden ötürü bu çalışmada tercih edilmiştir. Söz konusu TVD-RK3 yöntemi

$$u_i = L(u)$$

şeklinde verilmiş uygun başlangıç koşullarına sahip adi diferansiyel denklemlerde kullanılır. Yukarıdaki ifade, denklemin sağ tarafına sonlu fark yaklaşımı uygulanması ile elde edilir (Gottlieb ve Shu, 1998). Nümerik çözümün toplam değişimi (TV),

$$\text{TV}(u) = \sum_i |u_{i+1} - u_i|$$

zaman içinde azalım göstermektedir. Yani,

$$\text{TV}(u^{k+1}) \leq \text{TV}(u^k)$$

t_0 (k . adım)' dan $t_0 + \Delta t$ ($(k+1)$. adım)' ye kadar,

$$u^{(1)} = u^k + \Delta t L(u),$$

$$u^{(2)} = \frac{3}{4}u^k + \frac{1}{4}u^{(1)} + \frac{1}{4}\Delta t L(u^{(1)}),$$

$$u^{k+1} = \frac{1}{3}u^k + \frac{2}{3}u^{(2)} + \frac{2}{3}\Delta t L(u^{(2)}).$$

ile ifade edilir ve TVD-RK3 yöntemi olarak bilinir.

3.1 Test Problemleri

Problem 1 (Gülsu, 2006): Bir boyutlu Burgers denklemini,

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

$0 < x < 1$ ve $t > 0$ olmak üzere,

$$u(0, t) = 0, \quad u(1, t) = 0$$

homojen sınır şartları ve

$$u(x, 0) = \sin(\pi x)$$

başlangıç şartı ile birlikte ele alalım. Başlangıç-sınır şartları altında problemin analitik çözümü,

$$a_0 = \int_0^1 \exp\left\{-(2\pi\nu)^{-1} [1 - \cos(\pi x)]\right\} dx$$

$$a_n = 2 \int_0^1 \exp\left\{-(2\pi\nu)^{-1} [1 - \cos(\pi x)]\right\} \cos(n\pi x) dx, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Fourier katsayıları olmak üzere, problemin tam çözümü

$$u(x, t) = 2\pi\nu \frac{\sum_{n=1}^{\infty} a_n \exp(-n^2 \pi^2 \nu t) n \sin(n\pi x)}{a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \exp(-n^2 \pi^2 \nu t) \cos(n\pi x)}$$

biçimindedir.

Nümerik yöntemlerle elde edilen sonuçların analitik çözümlere ne kadar yakın olduğunu göstermek için (x_i, t_j) noktasındaki $u(x, t)$ ' nin analitik ve nümerik değerleri, sırasıyla U_{ij} ve u_{ij} olmak üzere,

$$L_2 = \sqrt{h \sum_{i=1}^N (U_{ij} - u_{ij})^2}$$

ve

$$L_\infty = \max_i |U_{ij} - u_{ij}|$$

hata normları hesaplanacaktır.

Tablo 3.1.' de , yüksek mertebeden sonlu fark (SF6, SF8) ve kompakt sonlu fark (KSF3, KSF5, KSF6) yöntemleri kullanılarak $\nu = 1$, $\Delta t = 0.00001$, $h = 0.1$ ve $t = 0.1$ koşullarında hesaplanan sonuçlar, Dağ ve diğ. (2005) tarafından kübik B-spline yöntemi kullanılarak elde edilen sonuçların yanı sıra Kutluay ve Esen (2004) tarafından verilen kuadratik B-spline sonlu eleman yöntemi kullanılarak elde edilen sonuçlar ve analitik sonuçlarla kıyaslanmıştır. Tablo 3.2.' de, $\nu = 0.1$, $\Delta t = 0.0001$ ve $h = 0.0125$ farklı t değerleri için çalışmamızda yer alan sonlu fark şemalarının nümerik sonuçları, Kutluay ve diğ. (2004) analiz ettiği en küçük kareler kuadratik B-spline sonlu eleman metodunun sonuçları ile karşılaştırılmıştır. Tablo 3.3.' de, $\nu = 0.01$, $\Delta t = 0.0001$ ve $h = 0.0125$ farklı t değerleri için elde edilen veriler, kıyaslanabilmesi için literatürdeki analitik sonuçlar ile birlikte verilmiştir. Tablo 3.4.'de Burgers denkleminde uyguladığımız nümerik sonuçların CPU (s) zamanları verilmiştir. Ayrıca, denklemin irdelenmesi için uygulanan şemaların farklı ν , Δt ve h değerlerindeki sonuçları, göreceli olarak Tablo 3.5.'de verilmiştir. Çözüm için önerdiğimiz yöntemlerin, karşılaştırılan diğer nümerik yöntemlerden iyi olduğu tablolarda görülmektedir. Farklı t , ν , Δt ve h değerleri için önerdiğimiz yöntemlerden elde edilen kalitatif sonuçlar Şekil 3.1 - 3.20.' de verilmektedir.

Tablo 3.1: Problem 1 için $\nu = 1$, $\Delta t = 0.00001$, $h = 0.1$ ve $t = 0.1$ nümerik ve analitik çözümleri

x	SF6	SF8	KSF6	LWSF6	LWSF8	LWKSF6	PC 1
0.1	0.10954	0.10954	0.10954	0.10954	0.10954	0.10954	0.10954
0.2	0.20979	0.20980	0.20979	0.20979	0.20979	0.20979	0.20979
0.3	0.29190	0.29190	0.29190	0.29189	0.29190	0.29190	0.29189
0.4	0.34792	0.34793	0.34793	0.34792	0.34793	0.34793	0.34792
0.5	0.37157	0.37158	0.37158	0.37157	0.37158	0.37158	0.37157
0.6	0.35904	0.35905	0.35905	0.35904	0.35905	0.35905	0.35904
0.7	0.30990	0.30992	0.30991	0.30990	0.30992	0.30991	0.30990
0.8	0.22781	0.22783	0.22783	0.22781	0.22783	0.22783	0.22781
0.9	0.12068	0.12070	0.12069	0.12068	0.12070	0.12070	0.12068
L_2	4.200E-06	8.699E-06	5.871E-06	4.518E-06	8.357E-06	5.537E-06	5.934E-06
L_∞	8.276E-06	1.528E-05	1.081E-06	8.475E-06	1.508E-05	1.061E-05	9.263E-06

Tablo 3.1 (devam): Problem 1 için $\nu = 1$, $\Delta t = 0.00001$, $h = 0.1$ ve $t = 0.1$ nümerik ve analitik çözümleri

x	PC 2	P-C 3	P-C 4	UKSF3	UKSF5	PY 1	PY 2
0.1	0.10954	0.10954	0.10954	0.10951	0.10954	0.10954	0.10954
0.2	0.20979	0.20979	0.20979	0.20981	0.20980	0.20979	0.20979
0.3	0.29190	0.29190	0.29189	0.29189	0.29190	0.29189	0.29190
0.4	0.34793	0.34792	0.34792	0.34795	0.34793	0.34792	0.34793
0.5	0.37158	0.37158	0.37157	0.37152	0.37158	0.37157	0.37158
0.6	0.35905	0.35904	0.35904	0.35902	0.35904	0.35904	0.35906
0.7	0.30991	0.30990	0.30990	0.30972	0.30990	0.30990	0.30992
0.8	0.22783	0.22782	0.22781	0.22767	0.22780	0.22781	0.22783
0.9	0.12069	0.12069	0.12068	0.12037	0.12067	0.12068	0.12070
L_2	7.095E-06	9.915E-07	2.873E-06	1.235E-04	8.270E-06	3.814E-06	9.080E-06
L_∞	1.432E-05	1.590E-06	3.716E-06	3.126E-04	1.712E-05	7.630E-05	1.592E-05

Tablo 3.1 (devam): Problem 1 için $\nu = 1$, $\Delta t = 0.00001$, $h = 0.1$ ve $t = 0.1$ nümerik ve analitik çözümleri

x	PY 3	PY 4	PY 5	Dağ ve diğ. (2005)	Kutluay ve Esen (2004)	Analitik Çözüm (mevcut çalışma)
0.1	0.10954	0.10954	0.10954	0.10888	0.10935	0.109538142215944
0.2	0.20979	0.20979	0.20979	0.20847	0.20967	0.209792130868702
0.3	0.29189	0.29190	0.29190	0.28992	0.29175	0.291896324201927
0.4	0.34792	0.34793	0.34793	0.34537	0.34774	0.347923878334304
0.5	0.37157	0.37158	0.37158	0.36859	0.37132	0.371577437063746
0.6	0.35904	0.35905	0.35905	0.35589	0.35871	0.359045539553663
0.7	0.30990	0.30992	0.30991	0.30696	0.30951	0.309904963640550
0.8	0.22781	0.22783	0.22783	0.22552	0.22744	0.227817378204899
0.9	0.12068	0.12070	0.12070	0.11942	0.12032	0.120686675611833
L_2	4.152E-06	8.748E-06	5.923E-06			
L_∞	7.829E-06	1.572E-05	1.125E-05			

Tablo 3.2: Problem 1 için $\nu = 0.1$, $\Delta t = 0.0001$ ve $h = 0.0125$ farklı zamanlardaki nümerik ve analitik çözümleri

x	t	Mevcut Çalışma						PC 1	PC 2
		SF6	SF8	KSF6	LWSF6	LWSF8	LWKSF6		
0.25	0.4	0.30889	0.30889	0.30889	0.30889	0.30889	0.30889	0.30889	0.30889
	0.6	0.24077	0.24077	0.24077	0.24077	0.24077	0.24077	0.24076	0.24076
	0.8	0.19568	0.19568	0.19568	0.19567	0.19567	0.19567	0.19567	0.19567
	1.0	0.16256	0.16256	0.16256	0.16256	0.16256	0.16256	0.16256	0.16256
0.50	0.4	0.56963	0.56963	0.56963	0.56963	0.56963	0.56963	0.56963	0.56963
	0.6	0.44726	0.44726	0.44726	0.44725	0.44725	0.44725	0.44725	0.44725
	0.8	0.35924	0.35924	0.35924	0.35923	0.35923	0.35923	0.35923	0.35923
	1.0	0.29192	0.29192	0.29192	0.29191	0.29191	0.29191	0.29191	0.29191
0.75	0.4	0.62544	0.62544	0.62544	0.62543	0.62543	0.62543	0.62544	0.62544
	0.6	0.48728	0.48728	0.48728	0.48727	0.48727	0.48727	0.48728	0.48728
	0.8	0.37392	0.37392	0.37392	0.37392	0.37392	0.37392	0.37392	0.37392
	1.0	0.28747	0.28747	0.28747	0.28747	0.28747	0.28747	0.28747	0.28747
	3.0	0.02977	0.02977	0.02977	0.02977	0.02977	0.02977	0.02977	0.02977

Tablo 3.2 (devam): Problem 1 için, $\nu = 0.1$, $\Delta t = 0.0001$ ve $h = 0.0125$ farklı zamanlardaki nümerik ve analitik çözümleri

		Mevcut Çalışma							
x	t	PC 3	PC 4	UKSF3	UKSF5	PY 1	PY 2	PY 3	PY 4
0.25	0.4	0.30889	0.30889	0.30865	0.30889	0.30889	0.30889	0.30889	0.30889
	0.6	0.24076	0.24076	0.24036	0.24077	0.24076	0.24076	0.24076	0.24076
	0.8	0.19567	0.19567	0.19601	0.19568	0.19567	0.19567	0.19567	0.19567
	1.0	0.16256	0.16256	0.16466	0.16259	0.16256	0.16256	0.16256	0.16256
0.50	0.4	0.56963	0.56963	0.56628	0.56963	0.56963	0.56963	0.56962	0.56962
	0.6	0.44725	0.44725	0.44840	0.44729	0.44725	0.44725	0.44725	0.44725
	0.8	0.35923	0.35923	0.36703	0.35933	0.35924	0.35924	0.35923	0.35923
	1.0	0.29191	0.29191	0.31021	0.29210	0.29192	0.29192	0.29191	0.29191
0.75	0.4	0.62544	0.62544	0.61813	0.62563	0.62546	0.62546	0.62546	0.62546
	0.6	0.48728	0.48728	0.51231	0.48776	0.48730	0.48730	0.48730	0.48730
	0.8	0.37392	0.37392	0.43867	0.37469	0.37394	0.37394	0.37394	0.37394
	1.0	0.28747	0.28747	0.39578	0.28850	0.28749	0.28749	0.28748	0.28748
	3.0	0.02977	0.02977	-0.54246	0.02956	0.02977	0.02977	0.02977	0.02977

Tablo 3.2 (devam): Problem 1 için, $\nu = 0.1$, $\Delta t = 0.0001$ ve $h = 0.0125$ farklı zamanlardaki nümerik ve analitik çözümleri

		$\Delta t = 0.0001$		
x	t	PY 5	Kutluay ve diğ. (2004)	Kutluay ve diğ. (2004) Analitik
0.25	0.4	0.30889	0.31215	0.30889
	0.6	0.24076	0.24360	0.24074
	0.8	0.19567	0.19815	0.19568
	1.0	0.16256	0.16473	0.16256
0.50	0.4	0.56962	0.57293	0.56963
	0.6	0.44725	0.45088	0.44721
	0.8	0.35923	0.36286	0.35924
	1.0	0.29191	0.29532	0.29192
0.75	0.4	0.62546	0.63038	0.62544
	0.6	0.48730	0.49268	0.48721
	0.8	0.37394	0.37912	0.37392
	1.0	0.28748	0.29204	0.28747
	3.0	0.02977	0.03038	0.02977

Tablo 3.3: Problem 1 için, $\nu = 0.01$, $\Delta t = 0.0001$ ve $h = 0.0125$ farklı zamanlardaki nümerik ve analitik çözümleri

x	t	SF6	SF8	KSF6	LWSF6	LWSF8	LWKSF6
0.25	0.4	0.34191	0.34191	0.34191	0.34191	0.34191	0.34191
	0.6	0.26899	0.26899	0.26908	0.26899	0.26899	0.26908
	0.8	0.22148	0.22148	0.22171	0.22148	0.22148	0.22171
	1.0	0.18819	0.18819	0.18837	0.18819	0.18819	0.18837
	3.0	0.07511	0.07511	0.07503	0.07511	0.07511	0.07503
0.50	0.4	0.66071	0.66071	0.66071	0.66071	0.66071	0.66071
	0.6	0.52947	0.52947	0.52976	0.52947	0.52947	0.52976
	0.8	0.43914	0.43914	0.43948	0.43914	0.43914	0.43948
	1.0	0.37442	0.37442	0.37463	0.37442	0.37442	0.37463
	3.0	0.15018	0.15018	0.15011	0.15018	0.15018	0.15011
0.75	0.4	0.91026	0.91026	0.91028	0.91026	0.91026	0.91028
	0.6	0.76731	0.76731	0.76776	0.76731	0.76731	0.76776
	0.8	0.64740	0.64740	0.64771	0.64740	0.64740	0.64771
	1.0	0.55605	0.55605	0.55619	0.55605	0.55605	0.55619
	3.0	0.22481	0.22481	0.22479	0.22481	0.22481	0.22479

Tablo 3.3 (devam): Problem 1 için, $\nu = 0.01$, $\Delta t = 0.0001$ ve $h = 0.0125$ farklı zamanlardaki nümerik ve analitik çözümleri

x	t	PC 1	PC 2	PC 3	PC 4	UKSF3	UKSF5
0.25	0.4	0.34191	0.34191	0.34191	0.34191	0.34191	0.34191
	0.6	0.26899	0.26899	0.26899	0.26899	0.26899	0.26899
	0.8	0.22148	0.22148	0.22148	0.22148	0.22148	0.22148
	1.0	0.18819	0.18819	0.18819	0.18819	0.18819	0.18819
	3.0	0.07511	0.07511	0.07511	0.07511	0.07511	0.07511
0.50	0.4	0.66070	0.66070	0.66070	0.66070	0.66071	0.66071
	0.6	0.52946	0.52946	0.52946	0.52946	0.52947	0.52947
	0.8	0.43913	0.43913	0.43913	0.43913	0.43914	0.43914
	1.0	0.37441	0.37441	0.37441	0.37441	0.37442	0.37442
	3.0	0.15018	0.15018	0.15018	0.15018	0.15018	0.15018
0.75	0.4	0.91027	0.91027	0.91027	0.91027	0.91027	0.91026
	0.6	0.76731	0.76731	0.76731	0.76731	0.76732	0.76732
	0.8	0.64739	0.64739	0.64739	0.64739	0.64740	0.64740
	1.0	0.55604	0.55604	0.55604	0.55604	0.55606	0.55605
	3.0	0.22481	0.22481	0.22481	0.22481	0.22481	0.22481

Tablo 3.3 (devam): Problem 1 için, $\nu = 0.01$, $\Delta t = 0.0001$ ve $h = 0.0125$ farklı zamanlardaki nümerik ve analitik çözümleri

x	t	PY 1	PY 2	PY 3	PY 4	PY 5	Kutluay ve Esen (2004)	Analitik
0.25	0.4	0.34191	0.34191	0.34191	0.34191	0.34191	0.34183	0.34191
	0.6	0.26899	0.26899	0.26899	0.26899	0.26908	0.26889	0.26896
	0.8	0.22148	0.22148	0.22148	0.22148	0.22171	0.22142	0.22148
	1.0	0.18819	0.18819	0.18819	0.18819	0.18837	0.18815	0.18819
	3.0	0.07511	0.07511	0.07511	0.07511	0.07503	0.07511	0.07511
0.50	0.4	0.66071	0.66071	0.66071	0.66071	0.66070	0.66066	0.66071
	0.6	0.52947	0.52947	0.52947	0.52947	0.52976	0.52938	0.52942
	0.8	0.43914	0.43914	0.43914	0.43914	0.43948	0.43910	0.43914
	1.0	0.37442	0.37442	0.37442	0.37442	0.37463	0.37438	0.37442
	3.0	0.15018	0.15018	0.15018	0.15018	0.15011	0.15017	0.15018
0.75	0.4	0.91026	0.91026	0.91026	0.91026	0.91027	0.91024	0.91026
	0.6	0.76731	0.76731	0.76731	0.76731	0.76776	0.76721	0.76724
	0.8	0.64739	0.64739	0.64739	0.64739	0.64771	0.64737	0.64740
	1.0	0.55605	0.55605	0.55605	0.55605	0.55619	0.55603	0.55605
	3.0	0.22481	0.22481	0.22481	0.22481	0.22479	0.22480	0.22481

Tablo 3.4: Problem 1 için oluşturulan tabloların farklı zamanlardaki CPU(s) sonuçları

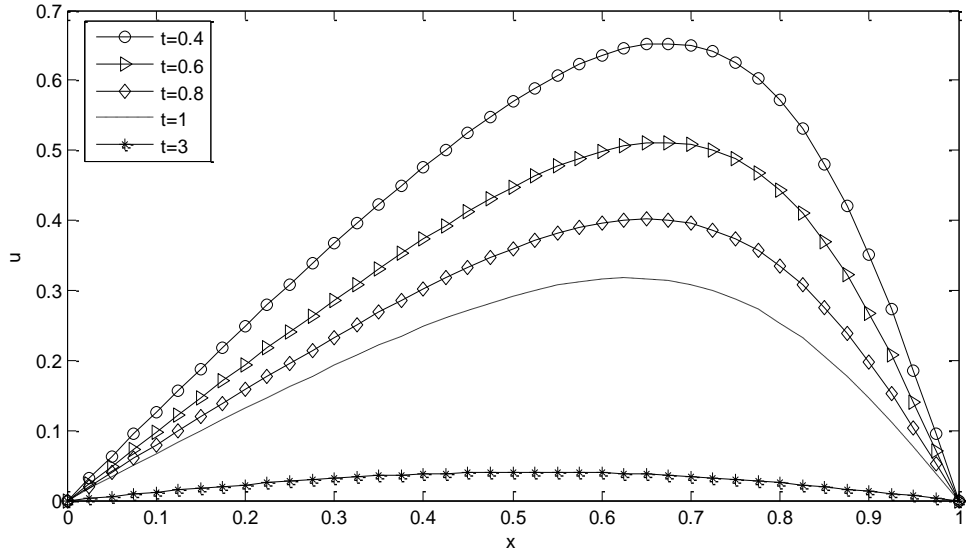
t	Tablo 3.1 $h=0.1$ $\nu=1$		Tablo 3.2 $h=0.0125$ $\nu=0.1$			Tablo 3.3 $h=0.0125$ $\nu=0.01$		
	0.1		0.4	0.6	1	0.4	0.8	3
SF6	0.112		0.143	0.215	0.345	0.145	0.286	0.957
SF8	0.114		0.149	0.217	0.367	0.147	0.291	0.968
KSF6	0.106		0.139	0.207	0.322	0.133	0.281	0.951
LWSF6	0.155		0.186	0.285	0.461	0.182	0.367	1.404
LWSF8	0.161		0.202	0.304	0.463	0.191	0.383	1.474
LWKSF6	0.154		0.186	0.280	0.463	0.182	0.358	1.422
PC 1	0.157		0.180	0.267	0.451	0.177	0.361	1.370
PC 2	0.158		0.184	0.270	0.451	0.180	0.360	1.372
PC 3	0.142		0.180	0.265	0.454	0.179	0.354	1.356
PC 4	0.136		0.177	0.263	0.437	0.180	0.348	1.348
UKSF3	0.104		0.125	0.193	0.319	0.125	0.256	0.982
UKSF5	0.106		0.129	0.201	0.317	0.131	0.257	1.006
PY1	0.124		0.149	0.216	0.350	0.140	0.285	1.076
PY2	0.126		0.148	0.218	0.353	0.145	0.299	1.207
PY3	0.167		0.202	0.310	0.515	0.210	0.418	1.588
PY4	0.170		0.213	0.313	0.529	0.217	0.421	1.588
PY5	0.166		0.198	0.308	0.511	0.211	0.407	1.582

Tablo 3.5: Problem 1 için farklı h , Δt , ν ve t değerleriyle elde edilen sonuçlar

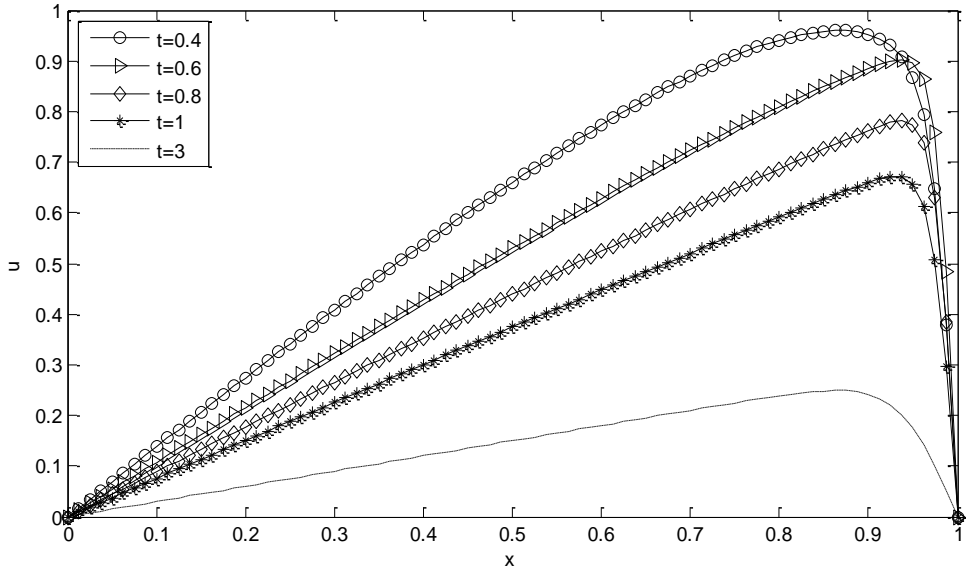
$t = 1$ $\Delta t = 0.00001$ $h = 0.0125$									
x	$\nu = 1$			$\nu = 0.1$			$\nu = 0.01$		
	0.25	0.5	0.75	0.25	0.5	0.75	0.25	0.5	0.75
FD6	0.00004	0.00005	0.00004	0.16257	0.29192	0.28748	0.18820	0.37442	0.55605
KSF6	0.00004	0.00005	0.00004	0.16257	0.29192	0.28748	0.18837	0.37463	0.55620
LWSF6	0.00004	0.00005	0.00004	0.16257	0.29192	0.28748	0.18820	0.37442	0.55605
PC1	0.00004	0.00005	0.00004	0.16257	0.29192	0.28748	0.18820	0.37442	0.55605
PC3	0.00004	0.00005	0.00004	0.16257	0.29192	0.28748	0.18820	0.37442	0.55605
PC4	0.00004	0.00005	0.00004	0.16257	0.29192	0.28748	0.18820	0.37442	0.55605
UKSF3	NaN	NaN	NaN	0.16765	0.32857	0.47488	0.18820	0.37442	0.55606
UKSF5	0.00004	0.00005	0.00004	0.16261	0.29220	0.28900	0.18820	0.37442	0.55606
PY1	0.00004	0.00005	0.00004	0.16257	0.29192	0.28748	0.18820	0.37442	0.55605
PY3	0.00004	0.00005	0.00004	0.16257	0.29192	0.28748	0.18820	0.37442	0.55605
Analitik	0.00004	0.00005	0.00004	0.16256	0.29192	0.28747	0.18819	0.37442	0.55605

$t = 1$ $\Delta t = 0.0001$ $\nu = 0.01$									
x	$h = 0.05$			$h = 0.025$			$h = 0.0125$		
	0.25	0.5	0.75	0.25	0.5	0.75	0.25	0.5	0.75
FD6	0.18819	0.37442	0.55665	0.18819	0.37442	0.55605	0.18819	0.37442	0.55605
KSF6	0.19120	0.37166	0.55869	0.18785	0.37412	0.55597	0.18837	0.37463	0.55619
LWSF6	0.18819	0.37442	0.55665	0.18819	0.37442	0.55605	0.18819	0.37442	0.55605
PC1	0.18819	0.37441	0.55665	0.18819	0.37441	0.55605	0.18819	0.37441	0.55605
PC3	0.18819	0.37441	0.55634	0.18819	0.37441	0.55604	0.18819	0.37441	0.55604
PC4	0.18830	0.37403	0.55752	0.18819	0.37441	0.55605	0.18819	0.37441	0.55604
UKSF3	0.18846	0.37226	0.56745	0.18819	0.37440	0.55549	0.18819	0.37442	0.55606
UKSF5	0.18829	0.37385	0.55857	0.18819	0.37442	0.55603	0.18819	0.37442	0.55605
PY1	0.18819	0.37442	0.55665	0.18819	0.37442	0.55605	0.18819	0.37442	0.55605
PY3	0.18819	0.37442	0.55665	0.18819	0.37442	0.55605	0.18819	0.37442	0.55605
Analitik	0.18819	0.37442	0.55605	0.18819	0.37442	0.55605	0.18819	0.37442	0.55605

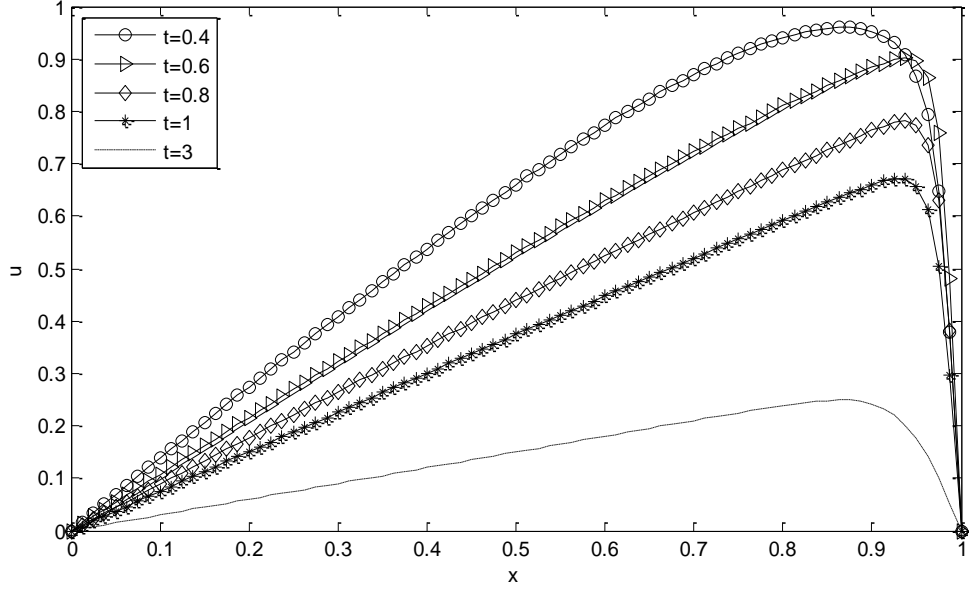
$t = 1$ $h = 0.025$ $\nu = 0.01$									
x	$\Delta t = 0.01$			$\Delta t = 0.005$			$\Delta t = 0.001$		
	0.25	0.5	0.75	0.25	0.5	0.75	0.25	0.5	0.75
FD6	0.18819	0.37442	0.55605	0.18819	0.37442	0.55605	0.18819	0.37442	0.55605
KSF6	0.18797	0.37431	0.55619	0.18790	0.37421	0.55607	0.18785	0.37414	0.55598
LWSF6	0.18819	0.37442	0.55604	0.18819	0.37442	0.55605	0.18819	0.37442	0.55605
PC1	0.18787	0.37383	0.55534	0.18787	0.37383	0.55534	0.18816	0.37436	0.55598
PC3	0.18787	0.37383	0.55534	0.18803	0.37413	0.55570	0.18816	0.37436	0.55598
PC4	0.18787	0.37383	0.55534	0.18787	0.37383	0.55534	0.18816	0.37436	0.55598
UKSF3	0.18819	0.37439	0.55553	0.18819	0.37440	0.55550	0.18819	0.37440	0.55549
UKSF5	0.18819	0.37442	0.55605	0.18819	0.37442	0.55605	0.18819	0.37442	0.55601
PY1	0.18817	0.37437	0.55597	0.18818	0.37440	0.55601	0.18819	0.37442	0.55604
PY3	0.18817	0.37437	0.55597	0.18818	0.37440	0.55601	0.18819	0.37442	0.55604
Analitik	0.18819	0.37442	0.55605	0.18819	0.37442	0.55605	0.18819	0.37442	0.55605



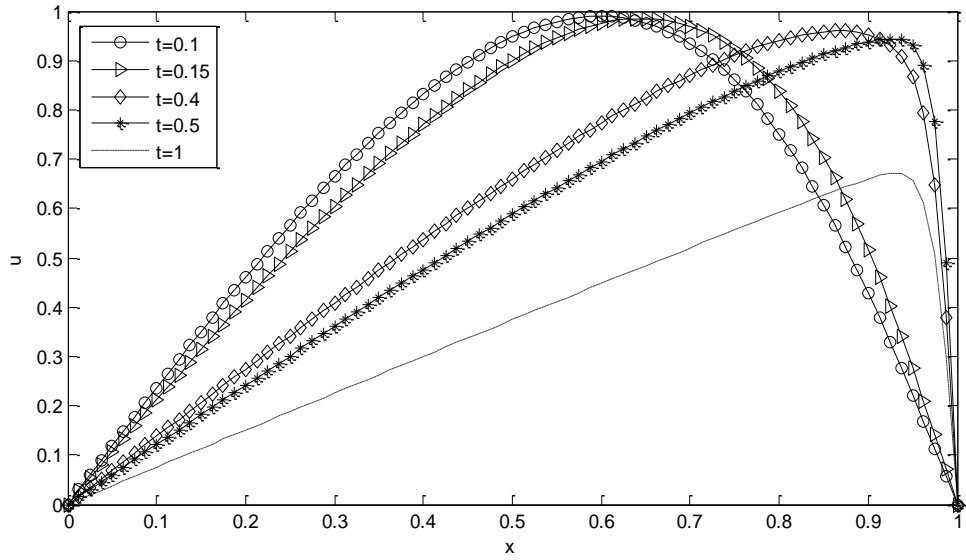
Şekil 3.1: Problem 1 için $\nu = 0.1$, $\Delta t = 0.001$ ve $h = 0.025$ farklı zamanlarda elde edilen SF8 sonuçları



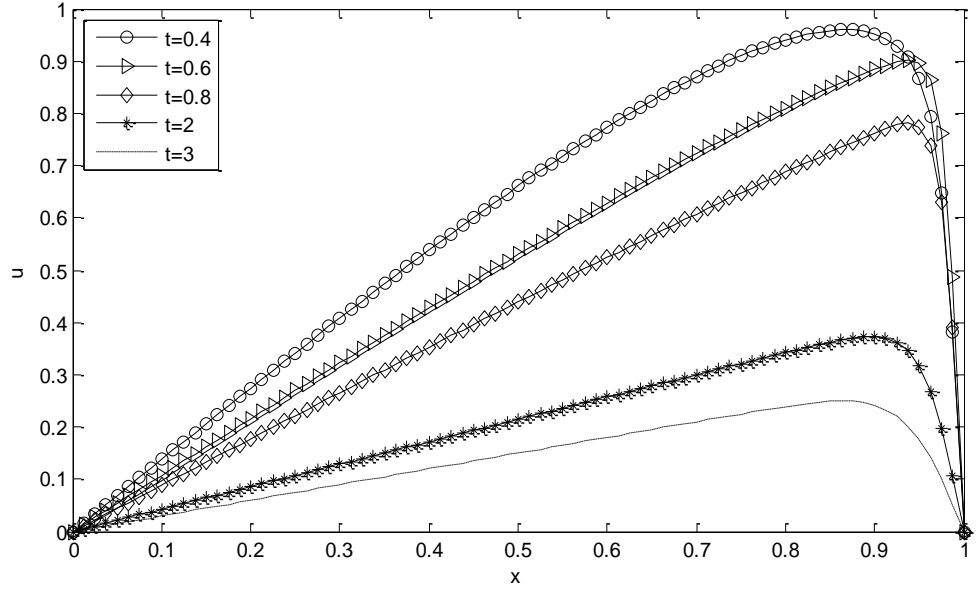
Şekil 3.2: Problem 1 için $\nu = 0.01$, $\Delta t = 0.0001$ ve $h = 0.0125$ farklı zamanlarda elde edilen SF8 sonuçları



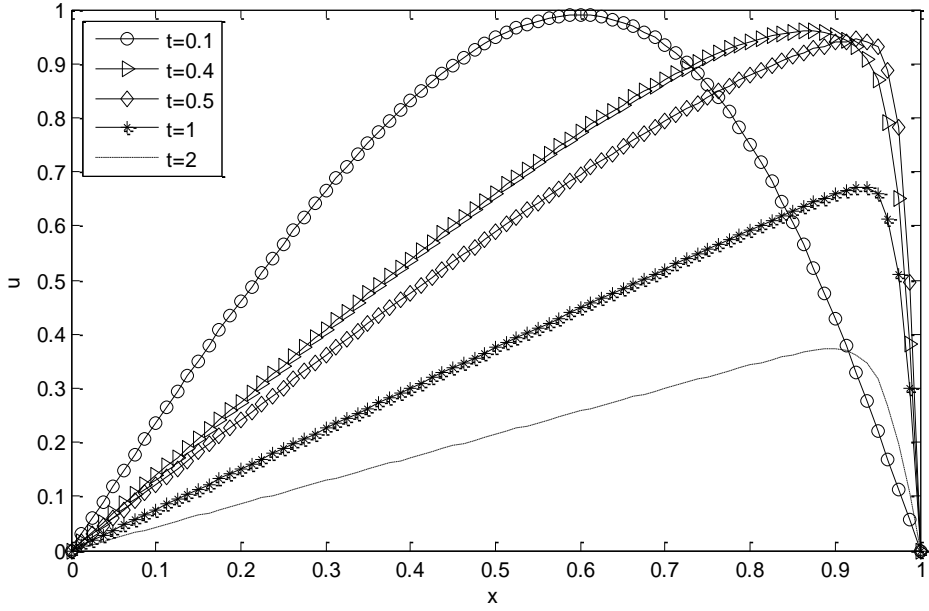
Şekil 3.3: Problem 1 için $\nu = 0.01$, $\Delta t = 0.0001$ ve $h = 0.0125$ farklı zamanlarda elde edilen KSF6 sonuçları



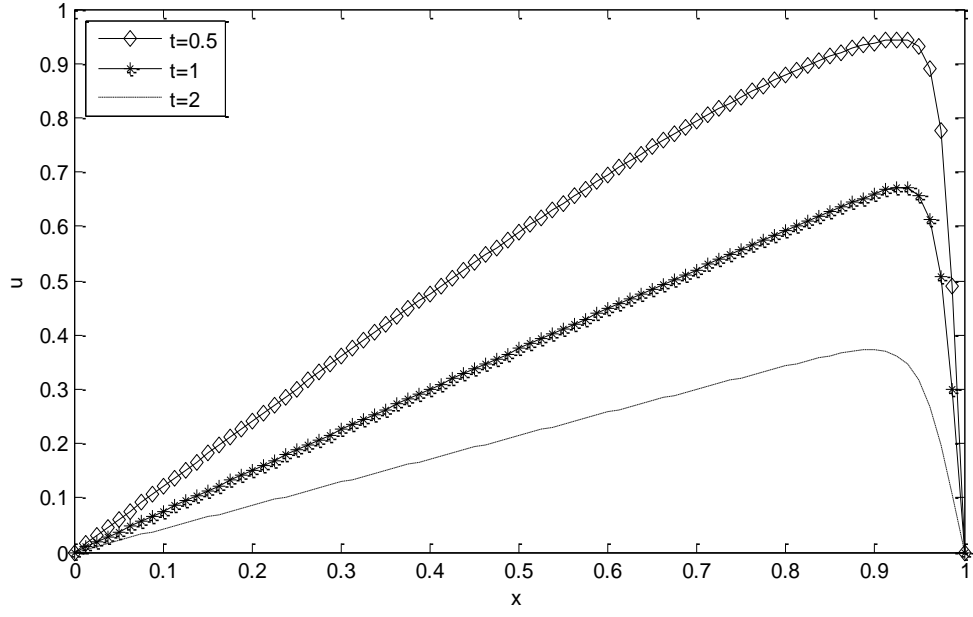
Şekil 3.4: Problem 1 için $\nu = 0.01$, $\Delta t = 0.0001$ ve $h = 0.0125$ farklı zamanlarda elde edilen LWSF8 sonuçları



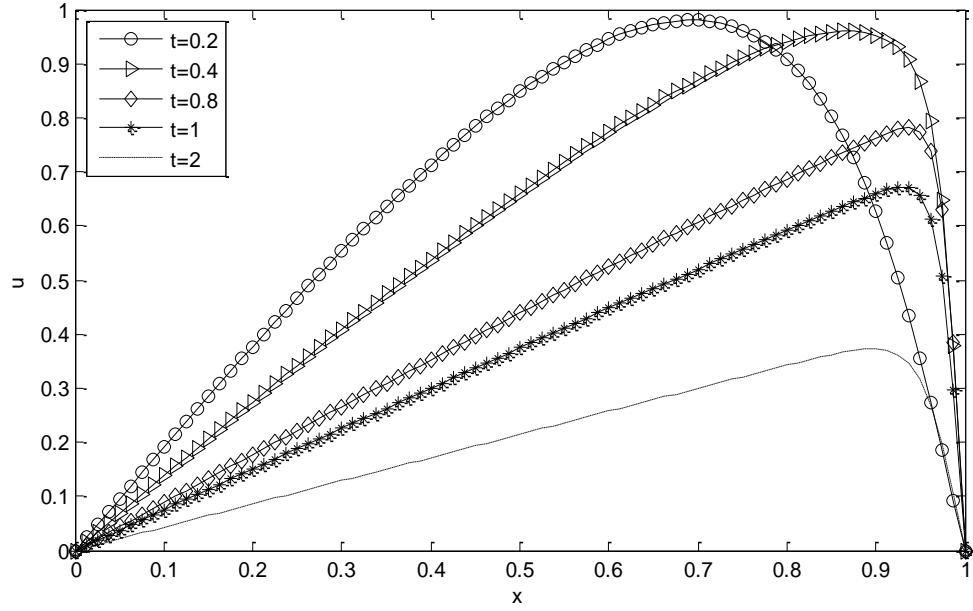
Şekil 3.5: Problem 1 için $\nu = 0.01$, $\Delta t = 0.001$ ve $h = 0.0125$ farklı zamanlarda elde edilen PC3 sonuçları



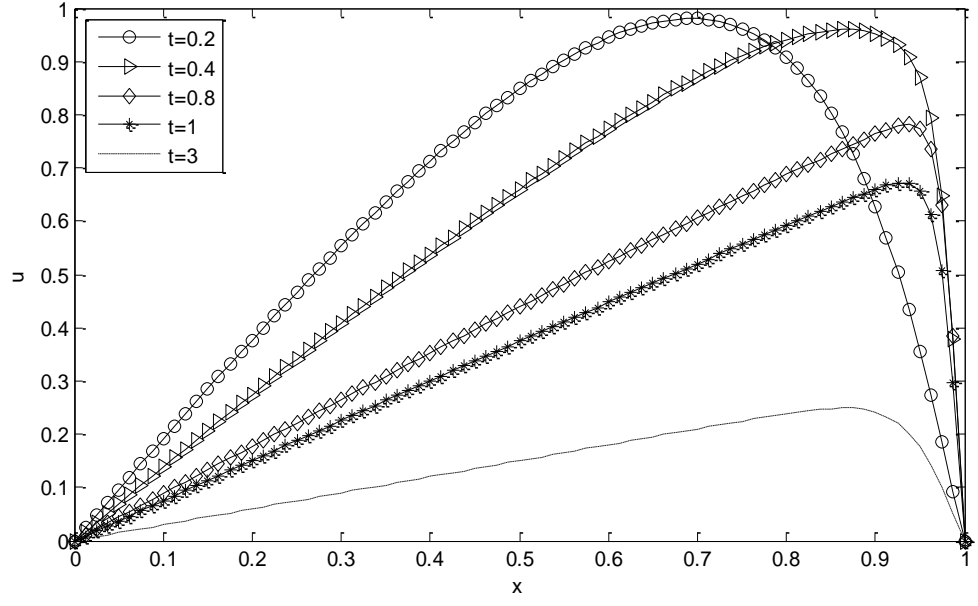
Şekil 3.6: Problem 1 için $\nu = 0.01$, $\Delta t = 0.001$ ve $h = 0.0125$ farklı zamanlarda elde edilen UKSF3 sonuçları



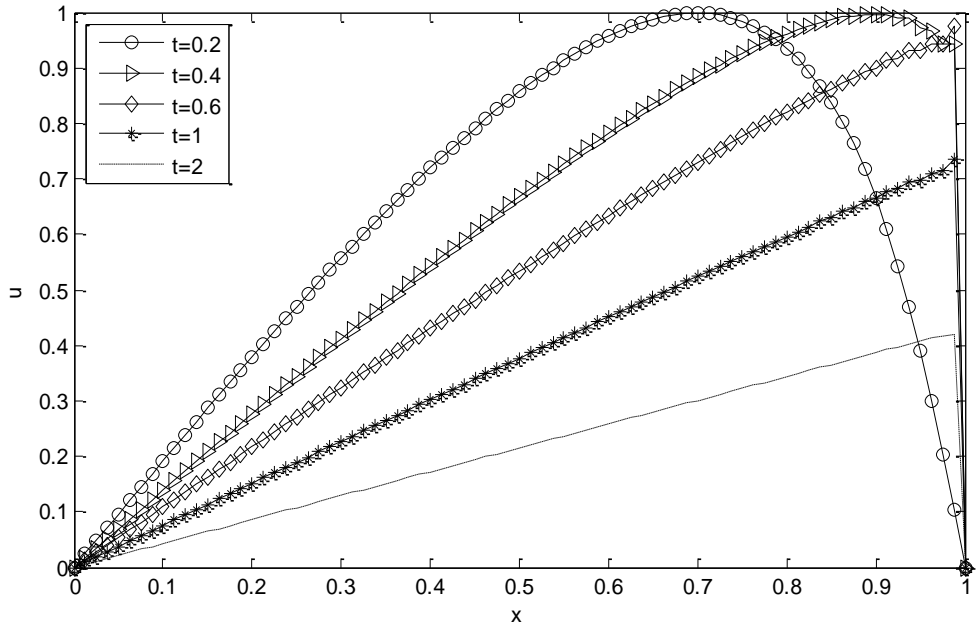
Şekil 3.7: Problem 1 için $\nu = 0.01$, $\Delta t = 0.001$ ve $h = 0.0125$ farklı zamanlarda elde edilen UKSF5 sonuçları



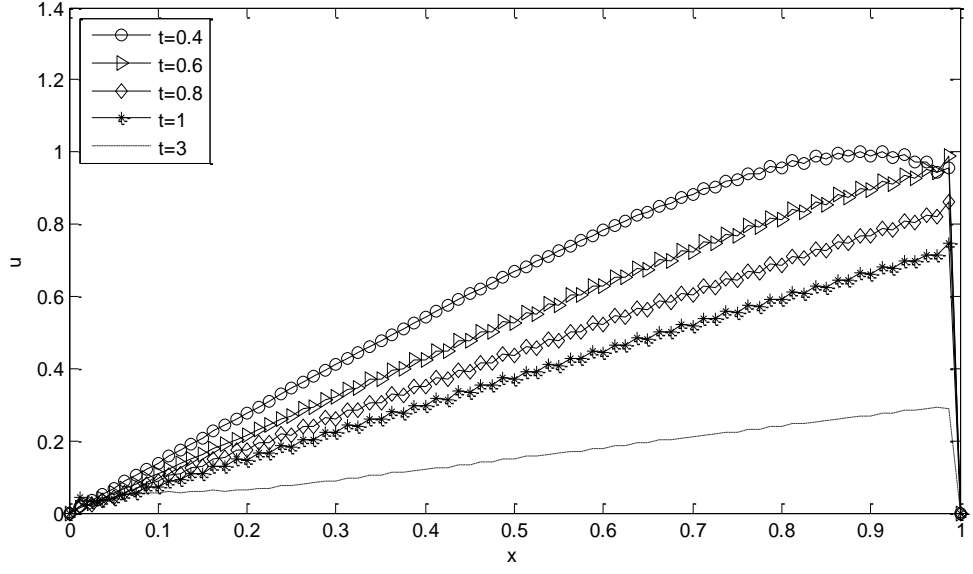
Şekil 3.8: Problem 1 için $\nu = 0.01$, $\Delta t = 0.0001$ ve $h = 0.0125$ farklı zamanlarda elde edilen PY 2 sonuçları



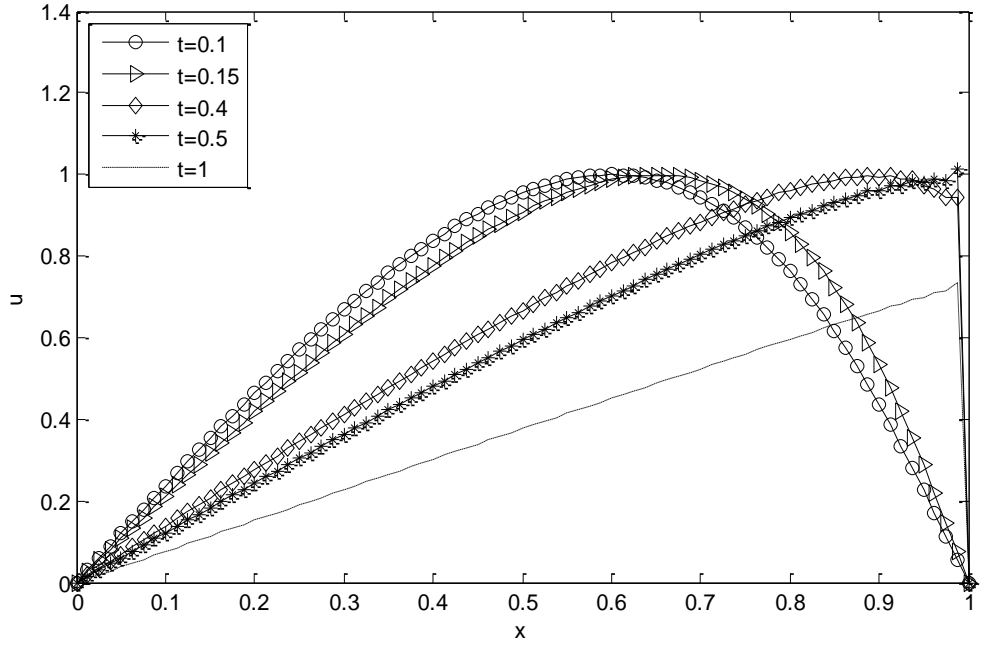
Şekil 3.9: Problem 1 için $\nu = 0.01$, $\Delta t = 0.0001$ ve $h = 0.0125$ farklı zamanlarda elde edilen PY 5 sonuçları



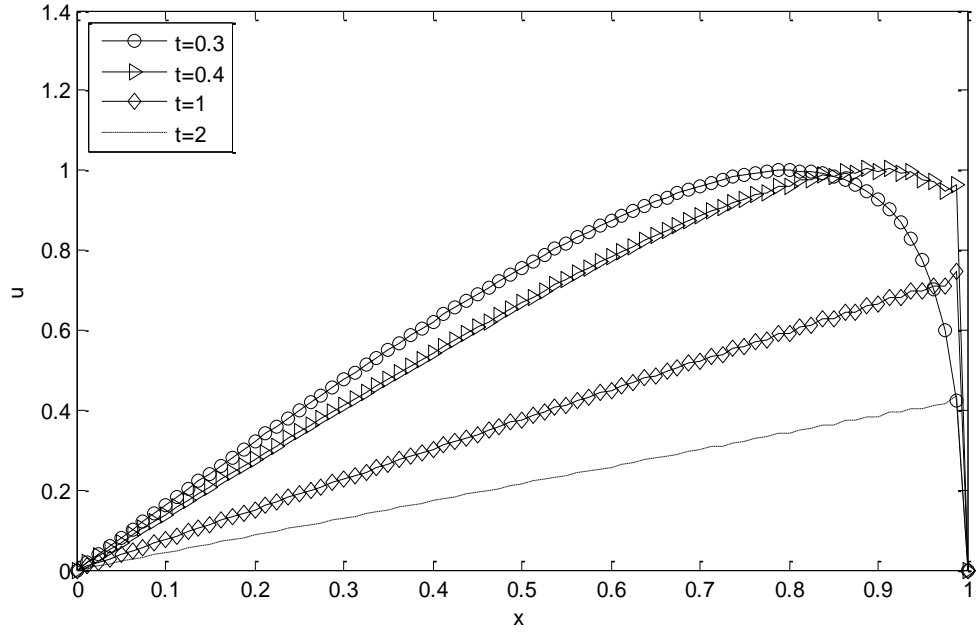
Şekil 3.10: Problem 1 için $\nu = 0.001$, $\Delta t = 0.0001$ ve $h = 0.0125$ farklı zamanlarda elde edilen SF8 sonuçları



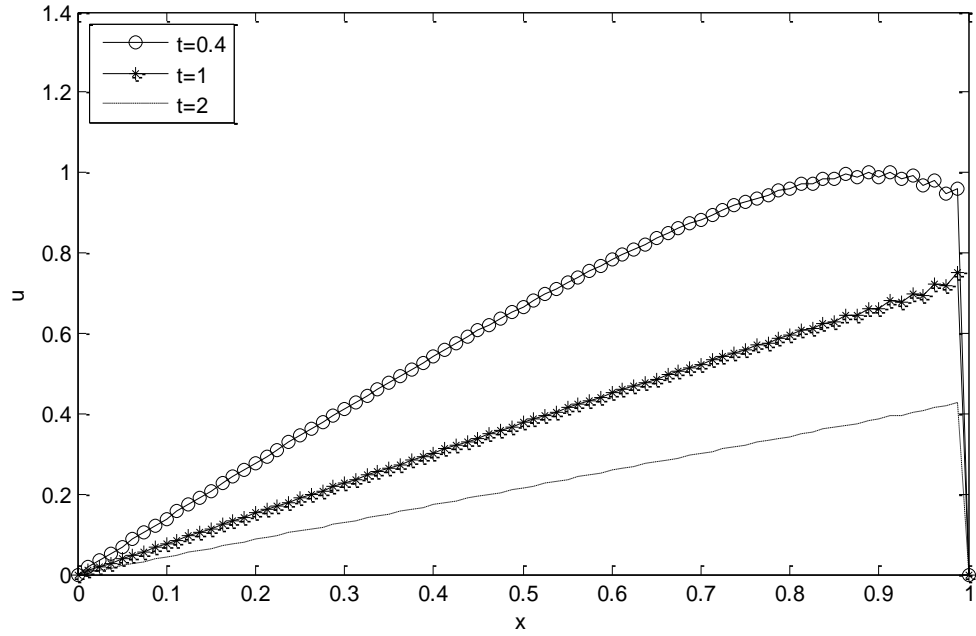
Şekil 3.11: Problem 1 için $\nu = 0.001$, $\Delta t = 0.0001$ ve $h = 0.0125$ farklı zamanlarda elde edilen KSF6 sonuçları



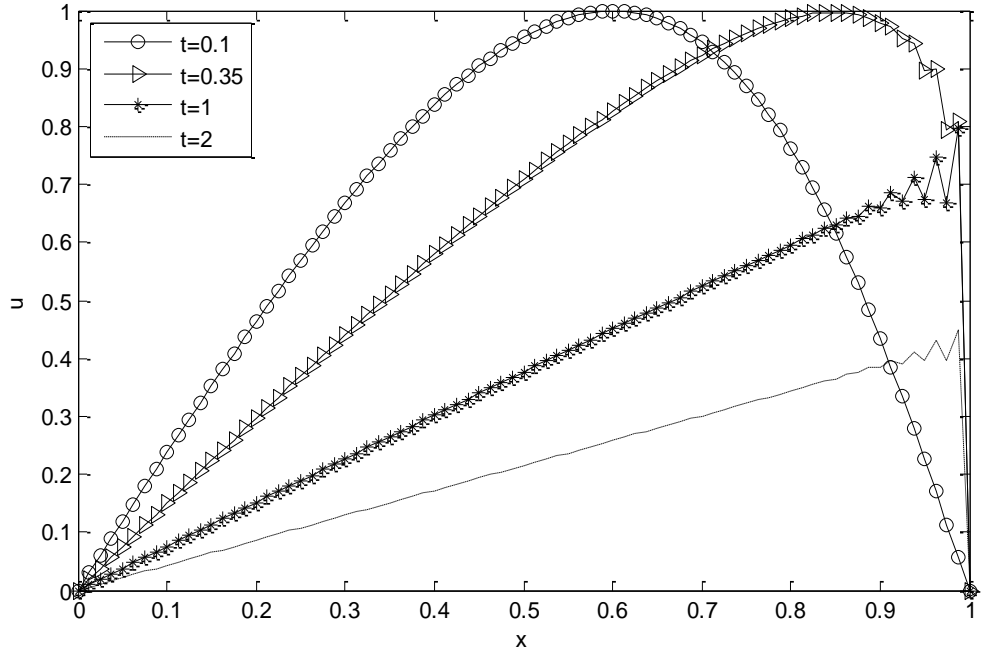
Şekil 3.12: Problem 1 için $\nu = 0.001$, $\Delta t = 0.0001$ ve $h = 0.0125$ farklı zamanlarda elde edilen LWSF8 sonuçlar



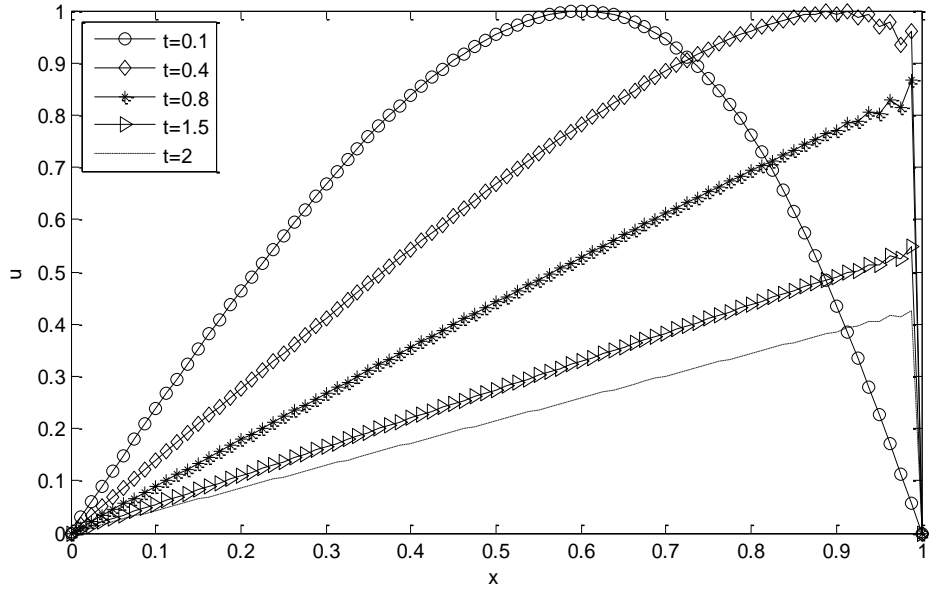
Şekil 3.13: Problem 1 için $\nu = 0.0001$, $\Delta t = 0.0001$ ve $h = 0.0125$ farklı zamanlarda elde edilen PC 2 sonuçları



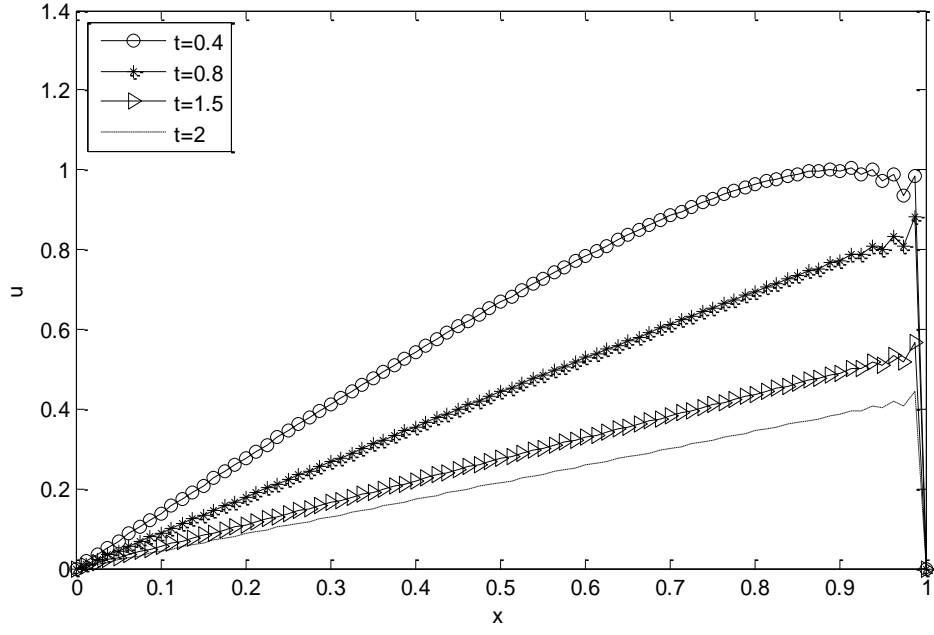
Şekil 3.14: Problem 1 için $\nu = 0.001$, $\Delta t = 0.0001$ ve $h = 0.0125$ farklı zamanlarda elde edilen PC 4 sonuçları



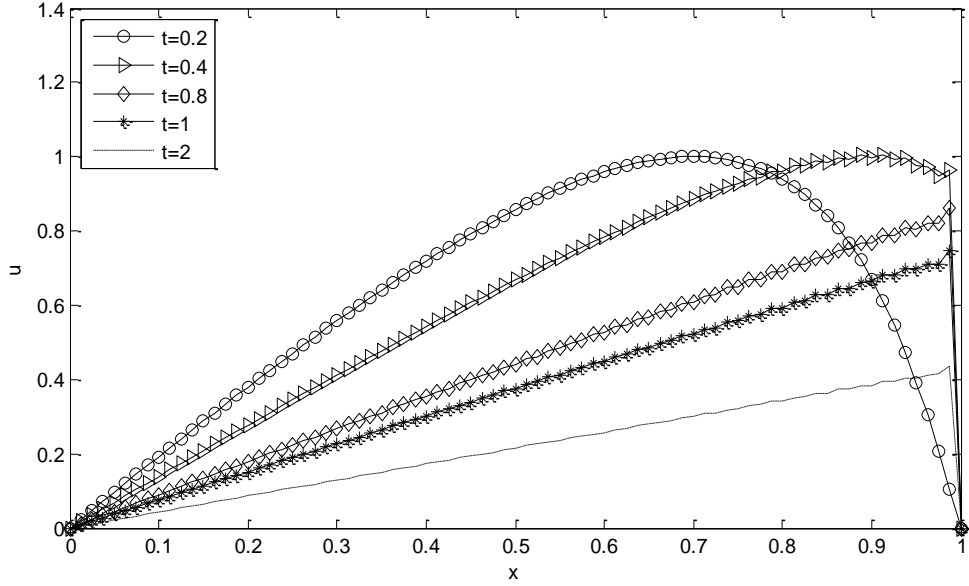
Şekil 3.15: Problem 1 için $\nu = 0.001$, $\Delta t = 0.001$ ve $h = 0.0125$ farklı zamanlarda elde edilen UKSF3 sonuçları



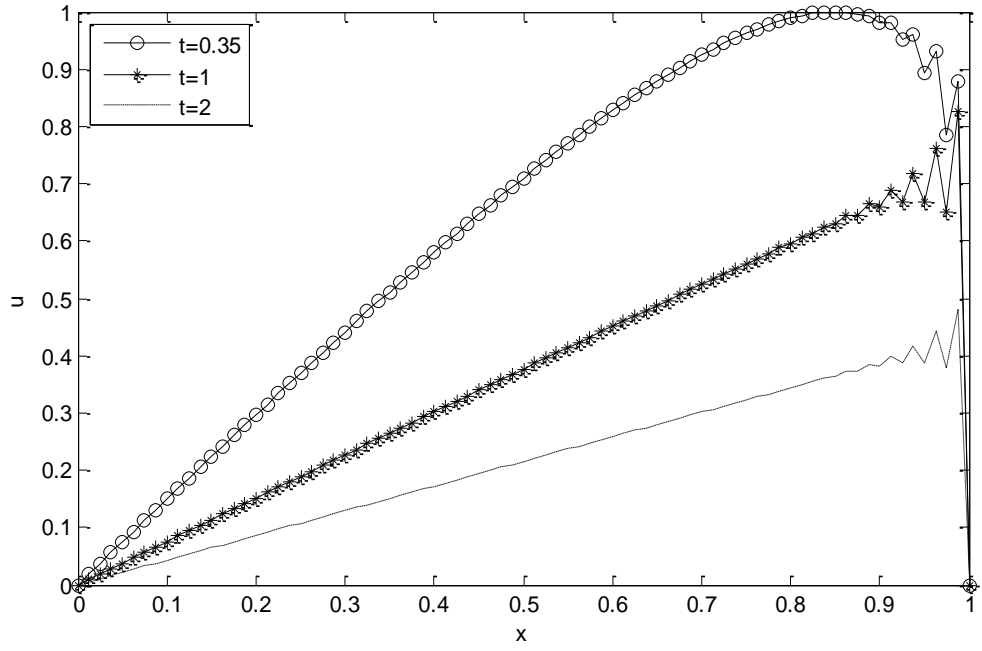
Şekil 3.16: Problem 1 için $\nu = 0.001$, $\Delta t = 0.001$ ve $h = 0.0125$ farklı zamanlarda elde edilen UKSF5 sonuçları



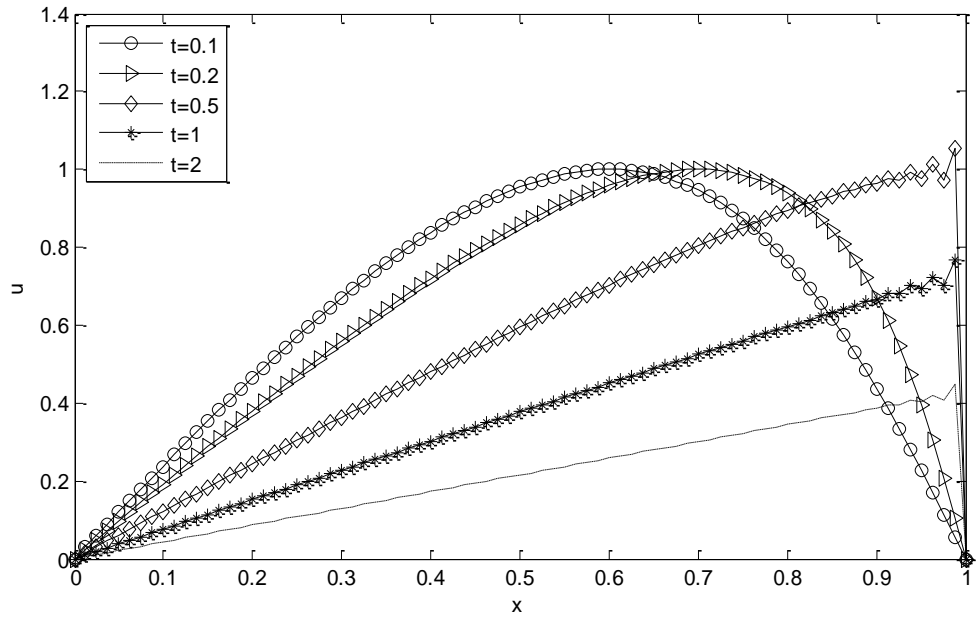
Şekil 3.17: Problem 1 için $\nu = 0.0001$, $\Delta t = 0.0001$ ve $h = 0.0125$ farklı zamanlarda elde edilen UKSF5 sonuçları



Şekil 3.18: Problem 1 için $\nu = 0.0001$, $\Delta t = 0.0001$ ve $h = 0.0125$ farklı zamanlarda elde edilen PY 2 sonuçları



Şekil 3.19: Problem 1 için $\nu = 0.00001$, $\Delta t = 0.0001$ ve $h = 0.0125$ farklı zamanlarda elde edilen UKSF3 sonuçları



Şekil 3.20: Problem 1 için $\nu = 0.00001$, $\Delta t = 0.0001$ ve $h = 0.0125$ farklı zamanlarda elde edilen UKSF5 sonuçları

Problem 2 (Gülsu, 2006): Bir boyutlu Burgers denklemini,

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

$0 < x < 1$ ve $t > 0$ olmak üzere,

$$u(0, t) = 0, \quad u(1, t) = 0$$

homojen sınır şartları ve

$$u(x, 0) = 4x(1 - x)$$

başlangıç şartı ile birlikte ele alalım. Başlangıç-sınır şartları altında problemin analitik çözümü,

$$a_0 = \int_0^1 \exp\{-x^2 (3\nu)^{-1} (3 - 2x)\} dx$$

$$a_n = 2 \int_0^1 \exp\{-x^2 (3\nu)^{-1} (3 - 2x)\} \cos(n\pi x) dx$$

Fourier katsayıları olmak üzere, problemin tam çözümü

$$u(x, t) = 2\nu \frac{\sum_{n=1}^{\infty} a_n \exp(-n^2 \pi^2 \nu t) n \sin(n\pi x)}{a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \exp(-n^2 \pi^2 \nu t) \cos(n\pi x)}$$

biçimindedir.

Tablo 3.4.' de, $\nu = 1$, $\Delta t = 0.00001$, $h = 0.1$ ve $t = 0.1$ koşulları altında önerdiğimiz yöntemlerin sonuçları, Kutluay ve Esen (2004)'in önerdiği yaklaşımın sonuçları ve bu çalışmamızda yapılan analitik sonuçlar ile karşılaştırılmıştır. Ayrıca Tablo 3.4'de L_2 ve L_∞ hata normları hesaplanmıştır. Tablo 3.5.' de, önerilen yöntemlerin farklı x konumu ve t zamanı ile $\nu = 0.1$, $\Delta t = 0.00001$, $h = 0.0125$ değerleri için elde edilen sonuçlar, Gülsu (2006)'nun çalışmasındaki problemin

analitik sonuçları ile kıyaslanmıştır. Sonuçların analitik çözümlerle oldukça iyi bir uyum içinde olduğu görülmektedir. Ayrıca, Tablo 3.5.'de gözlemlenen bir diğer durum güzel ise, $h = 0.05$ değerinde UKSF3 ve UKSF5 sonuçlarının analitik sonuca çok hızlı bir şekilde yaklaşmasıdır. Tablo 3.6.'da $\nu = 0.01$, $\Delta t = 0.001$, $h = 0.01$ ve farklı x , t değerleri için elde edilen veriler, Bahadır ve Sağlam (2005)'in çalışma sonuçları ile; Tablo 3.7.'de $\nu = 0.01$, $\Delta t = 0.0001$, $h = 0.0125$ ve farklı x , t değerleri için elde edilen sonuçlar ise Kutluay ve diğ. (2004) çalışmasındaki sonuçlar ve problemin analitik çözümü ile birlikte verilmiştir. Bu verilen tablolar incelendiğinde, kullandığımız yöntemlerin sonuçlarının analitik sonuçlara çok iyi yaklaştığı gözlemlenmektedir. Farklı t , ν , Δt ve h değerleri için önerdiğimiz yöntemlerden elde edilen kalitatif sonuçlar Şekil 3.21 - 3.42.'de verilmektedir.

Tablo 3.6: Problem 2 için $\nu = 1$, $\Delta t = 0.00001$, $h = 0.1$ ve $t = 0.1$ nümerik ve analitik çözümleri

x	SF6	SF8	KSF6	LWSF6	LWSF8	LWKSF6	PC 1
0.1	0.11289	0.11289	0.11290	0.11289	0.11289	0.11290	0.11289
0.2	0.21624	0.21626	0.21626	0.21624	0.21626	0.21626	0.21625
0.3	0.30095	0.30097	0.30097	0.30095	0.30097	0.30097	0.30096
0.4	0.35885	0.35887	0.35887	0.35885	0.35887	0.35887	0.35885
0.5	0.38340	0.38343	0.38343	0.38340	0.38343	0.38343	0.38341
0.6	0.37064	0.37066	0.37066	0.37064	0.37066	0.37066	0.37064
0.7	0.32004	0.32008	0.32007	0.32004	0.32007	0.32007	0.32005
0.8	0.23535	0.23538	0.23538	0.23535	0.23538	0.23538	0.23535
0.9	0.12470	0.12473	0.12473	0.12470	0.12473	0.12473	0.12470
L_2	1.596E-05	5.153E-06	5.871E-06	1.639E-05	7.343E-06	4.813E-06	1.809E-05
L_∞	2.276E-05	1.007E-05	1.081E-06	2.332E-05	1.514E-05	9.864E-06	2.540E-05

Tablo 3.6 (devam): Problem 2 için $\nu = 1$, $\Delta t = 0.00001$, $h = 0.1$ ve $t = 0.1$ nümerik ve analitik çözümleri

x	PC 2	PC 3	PC 4	UKSF3	UKSF5	PY 1	PY 2
0.1	0.11289	0.11289	0.11289	0.11284	0.11289	0.11289	0.11289
0.2	0.21625	0.21625	0.21625	0.21623	0.21625	0.21624	0.21625
0.3	0.30097	0.30096	0.30096	0.30089	0.30095	0.30095	0.30097
0.4	0.35886	0.35885	0.35885	0.35880	0.35885	0.35885	0.35887
0.5	0.38342	0.38341	0.38341	0.38324	0.38340	0.38340	0.38343
0.6	0.37066	0.37065	0.37065	0.37049	0.37064	0.37064	0.37067
0.7	0.32007	0.32006	0.32005	0.31972	0.32004	0.32004	0.32008
0.8	0.23538	0.23536	0.23536	0.23510	0.23534	0.23535	0.23538
0.9	0.12473	0.12471	0.12471	0.12430	0.12469	0.12470	0.12473
L_2	6.239E-06	8.007E-06	1.192E-05	2.120E-04	1.821E-05	1.569E-05	8.087E-06
L_∞	1.436E-05	1.187E-05	1.694E-05	4.199E-04	2.792E-05	2.171E-05	1.605E-05

Tablo 3.6 (devam): Problem 2 için $\nu = 1$, $\Delta t = 0.00001$, $h = 0.1$ ve $t = 0.1$ nümerik ve analitik çözümleri

x	PY 3	PY 4	PY 5	Kutluay ve Esen (2004)	(Mevcut çalışma) Analitik
0.1	0.11289	0.11289	0.11290	0.11269	0.112892307119675
0.2	0.21624	0.21625	0.21626	0.21611	0.216252261695909
0.3	0.30095	0.30097	0.30097	0.30078	0.300966027688440
0.4	0.35885	0.35887	0.35887	0.35862	0.358863264312495
0.5	0.38340	0.38343	0.38343	0.38310	0.383422636612340
0.6	0.37064	0.37066	0.37066	0.37025	0.370658051841435
0.7	0.32004	0.32008	0.32007	0.31960	0.320065880570160
0.8	0.23535	0.23538	0.23538	0.23494	0.235371290542476
0.9	0.12470	0.12473	0.12473	0.12431	0.124718122056537
L_2	1.612E-05	7.770E-06	5.050E-06		
L_∞	2.230E-05	1.584E-05	1.056E-05		

Tablo 3.7: Problem 2 için $\nu = 0.1$, $\Delta t = 0.00001$ ve $h = 0.0125$ farklı zamanlardaki nümerik ve analitik sonuçlar

x	t	SF6	SF8	KSF6	LWSF6	LWSF8	LWKSF6
0.25	0.4	0.317523	0.317523	0.317523	0.317523	0.317523	0.317523
	0.6	0.246141	0.246141	0.246141	0.246141	0.246141	0.246141
	0.8	0.199555	0.199555	0.199555	0.199555	0.199555	0.199555
	1.0	0.165600	0.165600	0.165600	0.165600	0.165600	0.165600
0.50	0.4	0.584537	0.584537	0.584537	0.584537	0.584537	0.584537
	0.6	0.457982	0.457982	0.457982	0.457981	0.457981	0.457981
	0.8	0.367398	0.367398	0.367398	0.367398	0.367398	0.367398
	1.0	0.298346	0.298346	0.298346	0.298346	0.298346	0.298346
0.75	0.4	0.645616	0.645616	0.645616	0.645615	0.645615	0.645615
	0.6	0.502682	0.502682	0.502682	0.502682	0.502682	0.502682
	0.8	0.385336	0.385336	0.385336	0.385335	0.385335	0.385335
	1.0	0.295861	0.295861	0.295861	0.295860	0.295860	0.295860
	3.0	0.030440	0.030440	0.030440	0.030440	0.030440	0.030440

Tablo 3.7 (devam): Problem 2 için $\nu = 0.1$, $\Delta t = 0.00001$ ve $h = 0.0125$ farklı zamanlardaki nümerik ve analitik sonuçlar

x	t					$h = 0.05$	$h = 0.05$
		PC 1	PC 2	PC 3	PC 4	UKSF3	UKSF5
0.25	0.4	0.317522	0.317522	0.317522	0.317522	0.317519	0.317524
	0.6	0.246141	0.246141	0.246141	0.246141	0.246136	0.246142
	0.8	0.199555	0.199555	0.199555	0.199555	0.199548	0.199555
	1.0	0.165600	0.165600	0.165600	0.165600	0.165593	0.165600
0.50	0.4	0.584537	0.584537	0.584537	0.584537	0.584537	0.584535
	0.6	0.457981	0.457981	0.457981	0.457981	0.457969	0.457978
	0.8	0.367398	0.367398	0.367398	0.367398	0.367383	0.367395
	1.0	0.298346	0.298346	0.298346	0.298346	0.298334	0.298344
0.75	0.4	0.645616	0.645616	0.645616	0.645616	0.645525	0.645604
	0.6	0.502682	0.502682	0.502682	0.502682	0.502631	0.502673
	0.8	0.385335	0.385335	0.385335	0.385335	0.385312	0.385334
	1.0	0.295860	0.295860	0.295860	0.295860	0.295856	0.295864
	3.0	0.030440	0.030440	0.030440	0.030440	0.030446	0.030440

Tablo 3.7 (devam): Problem 2 için $\nu = 0.1$, $\Delta t = 0.00001$ ve $h = 0.0125$ farklı zamanlardaki nümerik ve analitik sonuçlar

x	t	PY 1	PY 2	PY 3	PY 4	PY 5	Gülsu(2006) Analitik
0.25	0.4	0.317522	0.317522	0.317522	0.317522	0.317522	0.317521
	0.6	0.246141	0.246141	0.246141	0.246141	0.246141	0.246143
	0.8	0.199555	0.199555	0.199555	0.199555	0.199555	0.199560
	1.0	0.165600	0.165600	0.165600	0.165600	0.165600	0.165603
0.50	0.4	0.584536	0.584536	0.584536	0.584536	0.584536	0.584541
	0.6	0.457981	0.457981	0.457981	0.457981	0.457981	0.457980
	0.8	0.367398	0.367398	0.367398	0.367398	0.367398	0.367404
	1.0	0.298346	0.298346	0.298346	0.298346	0.298346	0.298343
0.75	0.4	0.645618	0.645618	0.645617	0.645617	0.645617	0.645628
	0.6	0.502685	0.502685	0.502684	0.502684	0.502684	0.502684
	0.8	0.385338	0.385338	0.385337	0.385337	0.385337	0.385340
	1.0	0.295862	0.295862	0.295862	0.295862	0.295862	0.295861
	3.0	0.030440	0.030440	0.030440	0.030440	0.030440	0.030442

Tablo 3.8: Problem 2 için $\nu = 0.01$, $\Delta t = 0.001$ ve $h = 0.01$ farklı zamanlardaki nümerik ve analitik sonuçlar

x	t	SF6	SF8	KSF6	LWSF8	PC 1	PC 2
0.1	0.50	0.12846	0.12846	0.12846	0.12846	0.12843	0.12843
	2.00	0.04381	0.04381	0.04380	0.04381	0.04381	0.04381
	4.00	0.02335	0.02335	0.02334	0.02334	0.02334	0.02334
0.3	0.50	0.37849	0.37849	0.37849	0.37849	0.37842	0.37842
	2.00	0.13135	0.13135	0.13133	0.13135	0.13133	0.13133
	4.00	0.07003	0.07003	0.07002	0.07003	0.07002	0.07002
0.5	0.50	0.60989	0.60989	0.60991	0.60988	0.60982	0.60982
	2.00	0.21859	0.21859	0.21858	0.21859	0.21856	0.21856
	4.00	0.11668	0.11668	0.11667	0.11668	0.11667	0.11667
0.7	0.50	0.80978	0.80978	0.80986	0.80978	0.80977	0.80977
	2.00	0.30535	0.30535	0.30534	0.30535	0.30531	0.30531
	4.00	0.16288	0.16288	0.16287	0.16288	0.16286	0.16286
0.9	0.50	0.94601	0.94601	0.94616	0.94600	0.94618	0.94617
	2.00	0.38027	0.38027	0.38027	0.38027	0.38021	0.38022
	4.00	0.16858	0.16858	0.16857	0.16858	0.16855	0.16855

Tablo 3.8 (devam): Problem 2 için $\nu = 0.01$, $\Delta t = 0.001$ ve $h = 0.01$ farklı zamanlardaki nümerik ve analitik sonuçlar

x	t	PC 4	UKSF3	UKSF5	PY 1	PY 2	PY 3
0.1	0.50	0.12843	0.12846	0.12846	0.12846	0.12846	0.12846
	2.00	0.04381	0.04381	0.04381	0.04381	0.04381	0.04381
	4.00	0.02334	0.02334	0.02335	0.02334	0.02334	0.02334
0.3	0.50	0.37842	0.37849	0.37849	0.37848	0.37848	0.37848
	2.00	0.13133	0.13135	0.13135	0.13134	0.13134	0.13134
	4.00	0.07002	0.07003	0.07003	0.07003	0.07003	0.07003
0.5	0.50	0.60982	0.60996	0.60989	0.60987	0.60987	0.60987
	2.00	0.21856	0.21859	0.21859	0.21858	0.21858	0.21858
	4.00	0.11667	0.11668	0.11668	0.11668	0.11668	0.11668
0.7	0.50	0.80977	0.81008	0.80978	0.80977	0.80977	0.80976
	2.00	0.30531	0.30547	0.30535	0.30534	0.30534	0.30534
	4.00	0.16286	0.16283	0.16288	0.16288	0.16288	0.16288
0.9	0.50	0.94618	0.94657	0.94604	0.94601	0.94601	0.94600
	2.00	0.38022	0.38531	0.38027	0.38036	0.38037	0.38036
	4.00	0.16855	0.16642	0.16858	0.16866	0.16866	0.16866

Tablo 3.8 (devam): Problem 2 için $\nu = 0.01$, $\Delta t = 0.001$ ve $h = 0.01$ farklı zamanlardaki nümerik ve analitik sonuçlar

x	t	PY 4	PY 5	Bahadır ve Sağlam (2005)	Bahadır ve Sağlam (Analitik)
0.1	0.50	0.12846	0.12845	0.12808	0.12846
	2.00	0.04381	0.04381	0.04388	0.04381
	4.00	0.02334	0.02334	0.02351	0.02335
0.3	0.50	0.37848	0.37847	0.37956	0.37849
	2.00	0.13134	0.13133	0.13129	0.13135
	4.00	0.07003	0.07002	0.07009	0.07003
0.5	0.50	0.60987	0.60989	0.61768	0.60989
	2.00	0.21858	0.21858	0.21873	0.21859
	4.00	0.11668	0.11668	0.11671	0.11668
0.7	0.50	0.80976	0.80983	0.83022	0.80978
	2.00	0.30534	0.30534	0.30614	0.30535
	4.00	0.16288	0.16287	0.16293	0.16288
0.9	0.50	0.94600	0.94613	0.98068	0.94601
	2.00	0.38036	0.38036	0.38163	0.38027
	4.00	0.16866	0.16866	0.16766	0.16858

Tablo 3.9: Problem 2 için $\nu = 0.01$, $\Delta t = 0.0001$ ve $h = 0.0125$ farklı zamanlardaki nümerik ve analitik sonuçlar

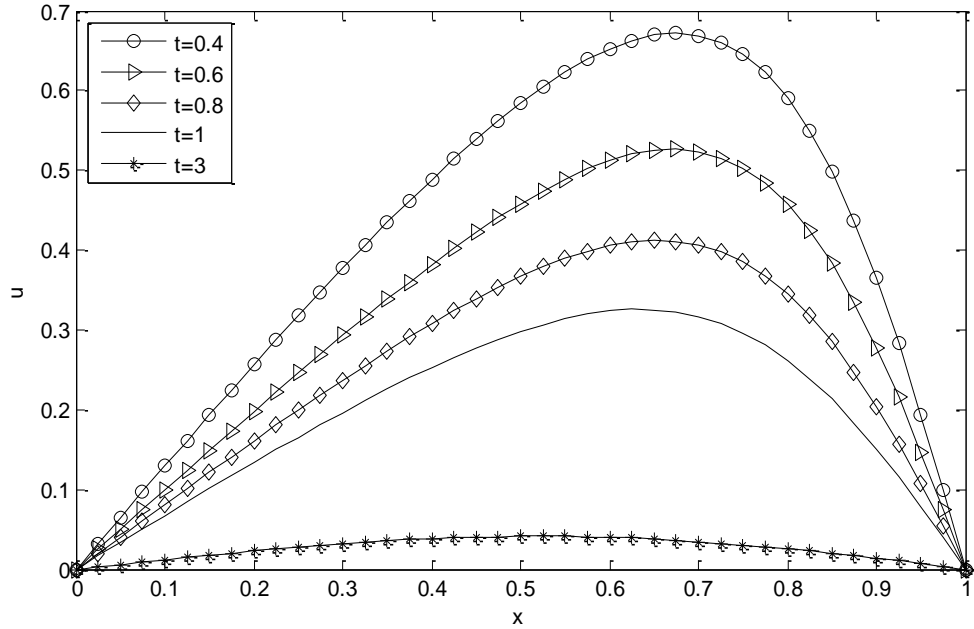
x	t	SF6	SF8	KSF6	LWSF6	LWSF8	LWKSF6
0.25	0.4	0.36226	0.36226	0.36226	0.36226	0.36226	0.36226
	0.6	0.28207	0.28207	0.28220	0.28207	0.28207	0.28220
	0.8	0.23045	0.23045	0.23071	0.23045	0.23045	0.23071
	1.0	0.19469	0.19469	0.19488	0.19469	0.19469	0.19488
	3.0	0.07613	0.07613	0.07604	0.07613	0.07613	0.07604
0.50	0.4	0.68368	0.68368	0.68368	0.68368	0.68368	0.68368
	0.6	0.54837	0.54837	0.54872	0.54837	0.54837	0.54872
	0.8	0.45371	0.45371	0.45408	0.45371	0.45371	0.45408
	1.0	0.38568	0.38568	0.38590	0.38568	0.38568	0.38590
	3.0	0.15218	0.15218	0.15210	0.15218	0.15218	0.15210
0.75	0.4	0.92050	0.92050	0.92058	0.92050	0.92050	0.92058
	0.6	0.78306	0.78306	0.78354	0.78306	0.78306	0.78354
	0.8	0.66272	0.66272	0.66306	0.66272	0.66272	0.66306
	1.0	0.56932	0.56932	0.56948	0.56932	0.56932	0.56948
	3.0	0.22774	0.22774	0.22771	0.22774	0.22774	0.22771

Tablo 3.9 (devam): Problem 2 için $\nu = 0.01$, $\Delta t = 0.0001$ ve $h = 0.0125$ farklı zamanlardaki nümerik ve analitik sonuçlar

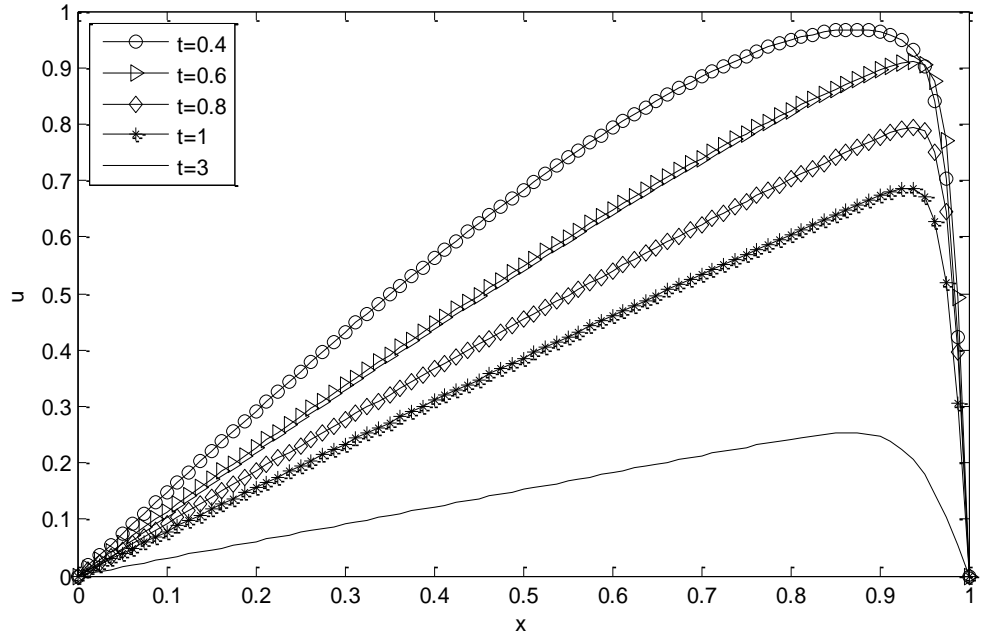
x	t	PC 1	PC 2	PC 3	PC 4	UKSF3	UKSF5
0.25	0.4	0.36225	0.36225	0.36225	0.36225	0.36226	0.36226
	0.6	0.28206	0.28206	0.28206	0.28206	0.28207	0.28207
	0.8	0.23045	0.23045	0.23045	0.23045	0.23045	0.23045
	1.0	0.19469	0.19469	0.19469	0.19469	0.19469	0.19469
	3.0	0.07613	0.07613	0.07613	0.07613	0.07613	0.07613
0.50	0.4	0.68367	0.68367	0.68367	0.68367	0.68369	0.68368
	0.6	0.54837	0.54837	0.54837	0.54837	0.54838	0.54837
	0.8	0.45371	0.45371	0.45371	0.45371	0.45372	0.45371
	1.0	0.38567	0.38567	0.38567	0.38567	0.38568	0.38568
	3.0	0.15218	0.15218	0.15218	0.15218	0.15218	0.15218
0.75	0.4	0.92051	0.92051	0.92051	0.92051	0.92051	0.92050
	0.6	0.78306	0.78306	0.78306	0.78306	0.78308	0.78307
	0.8	0.66271	0.66271	0.66271	0.66271	0.66274	0.66272
	1.0	0.56931	0.56931	0.56931	0.56931	0.56934	0.56932
	3.0	0.22774	0.22774	0.22774	0.22774	0.22774	0.22774

Tablo 3.9 (devam): Problem 2 için $\nu = 0.01$, $\Delta t = 0.0001$ ve $h = 0.0125$ farklı zamanlardaki nümerik ve analitik sonuçlar

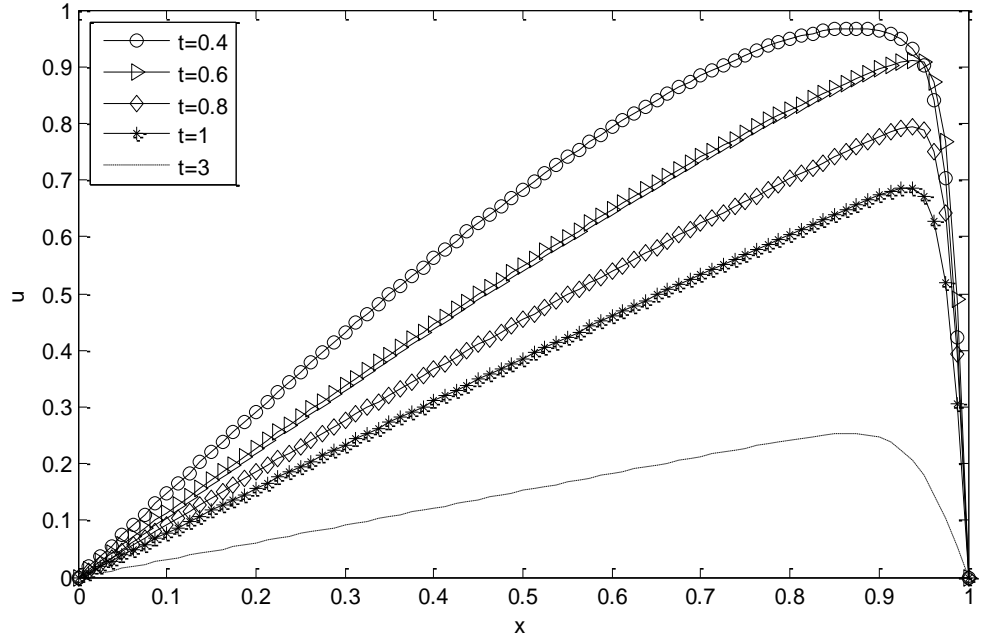
x	t	PY 1	PY 2	PY 3	PY 4	PY 5	Kutluay ve diğ. (2004)	Analitik
0.25	0.4	0.36226	0.36226	0.36226	0.36226	0.36226	0.36911	0.36226
	0.6	0.28207	0.28207	0.28207	0.28207	0.28219	0.28905	0.28204
	0.8	0.23045	0.23045	0.23045	0.23045	0.23071	0.23703	0.23045
	1.0	0.19469	0.19469	0.19469	0.19469	0.19488	0.20069	0.19469
	3.0	0.07613	0.07613	0.07613	0.07613	0.07604	0.07865	0.07613
0.50	0.4	0.68368	0.68368	0.68368	0.68368	0.68368	0.68818	0.68368
	0.6	0.54837	0.54837	0.54837	0.54837	0.54872	0.55425	0.54832
	0.8	0.45371	0.45371	0.45371	0.45371	0.45408	0.46011	0.45371
	1.0	0.38567	0.38567	0.38567	0.38567	0.38590	0.39206	0.38568
	3.0	0.15218	0.15218	0.15218	0.15218	0.15210	0.15576	0.15218
0.75	0.4	0.92050	0.92050	0.92050	0.92050	0.92058	0.92194	0.92050
	0.6	0.78306	0.78306	0.78306	0.78306	0.78354	0.78676	0.78299
	0.8	0.66272	0.66272	0.66272	0.66272	0.66306	0.66777	0.66272
	1.0	0.56932	0.56932	0.56932	0.56932	0.56947	0.57491	0.56932
	3.0	0.22774	0.22774	0.22774	0.22774	0.22771	0.23183	0.22774



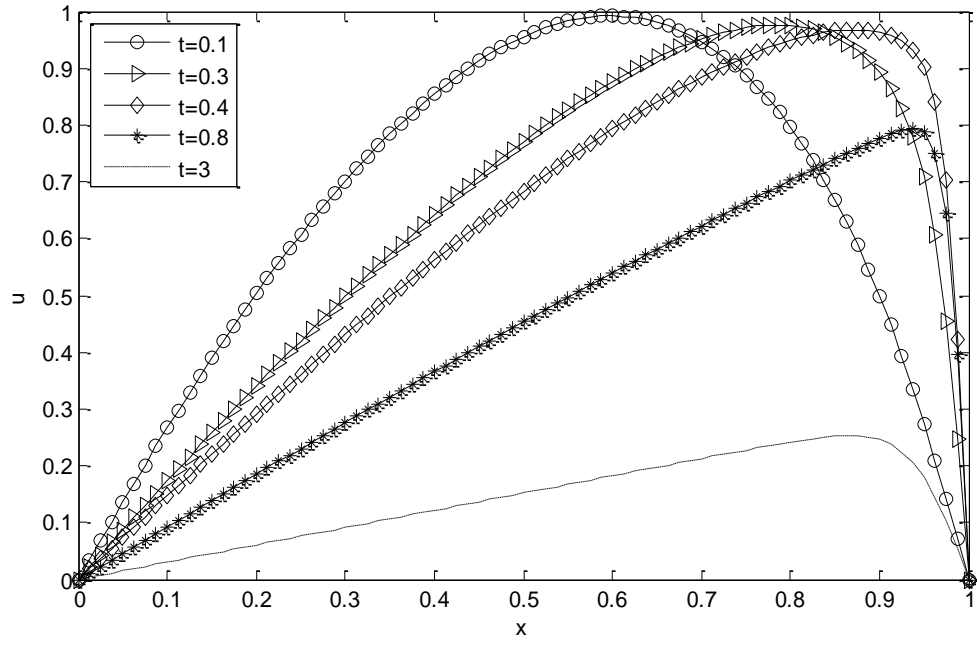
Şekil 3.21: Problem 2 için $\nu = 0.1$, $\Delta t = 0.001$ ve $h = 0.01$ farklı zamanlarda elde edilen SF8 sonuçları



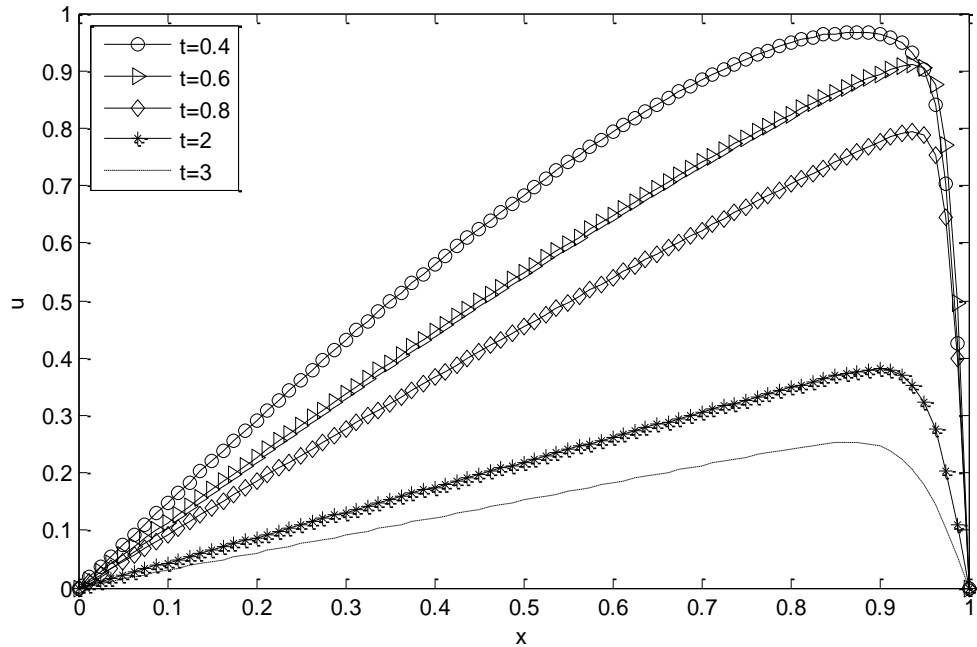
Şekil 3.22: Problem 2 için $\nu = 0.01$, $\Delta t = 0.0001$ ve $h = 0.01$ farklı zamanlarda elde edilen SF8 sonuçları



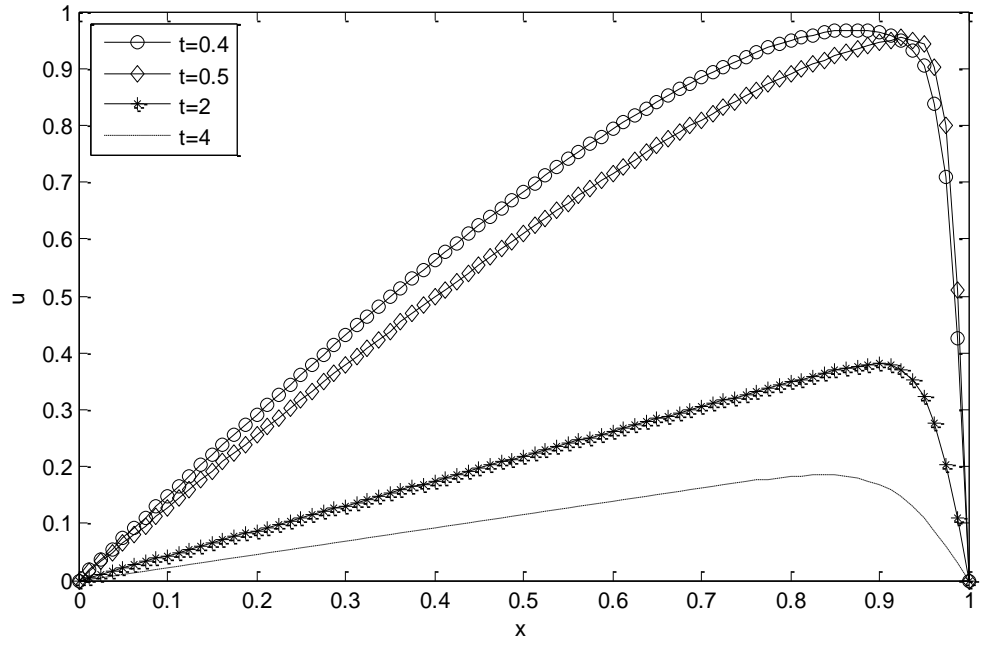
Şekil 3.23: Problem 2 için $\nu = 0.01$, $\Delta t = 0.0001$ ve $h = 0.01$ farklı zamanlarda elde edilen KSF6 sonuçları



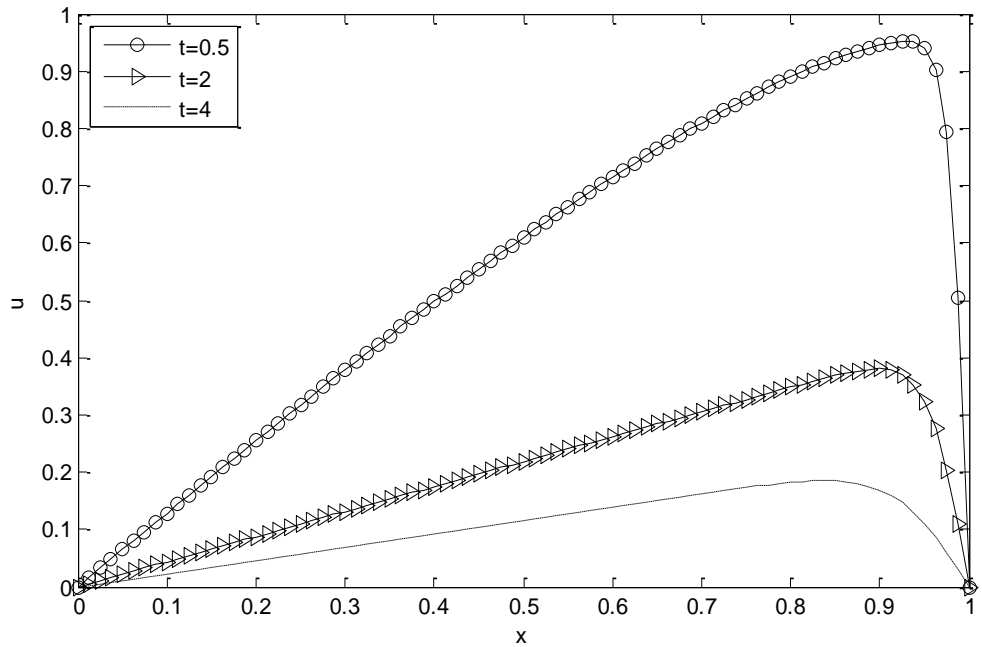
Şekil 3.24: Problem 2 için $\nu = 0.01$, $\Delta t = 0.0001$ ve $h = 0.0125$ farklı zamanlarda elde edilen LWSF8 sonuçları



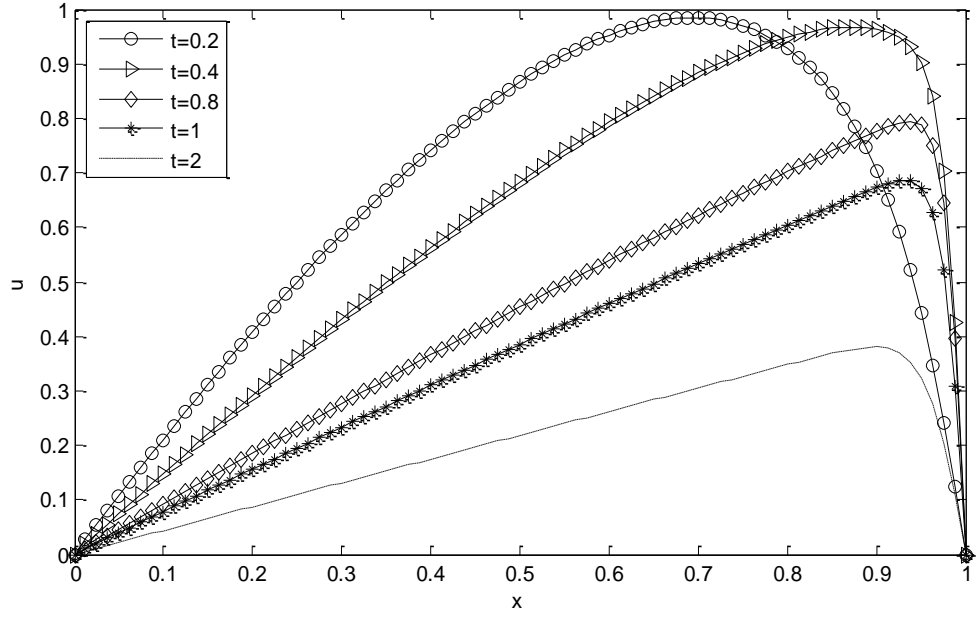
Şekil 3.25: Problem 2 için $\nu = 0.01$, $\Delta t = 0.001$ ve $h = 0.0125$ farklı zamanlarda elde edilen PC3 sonuçları



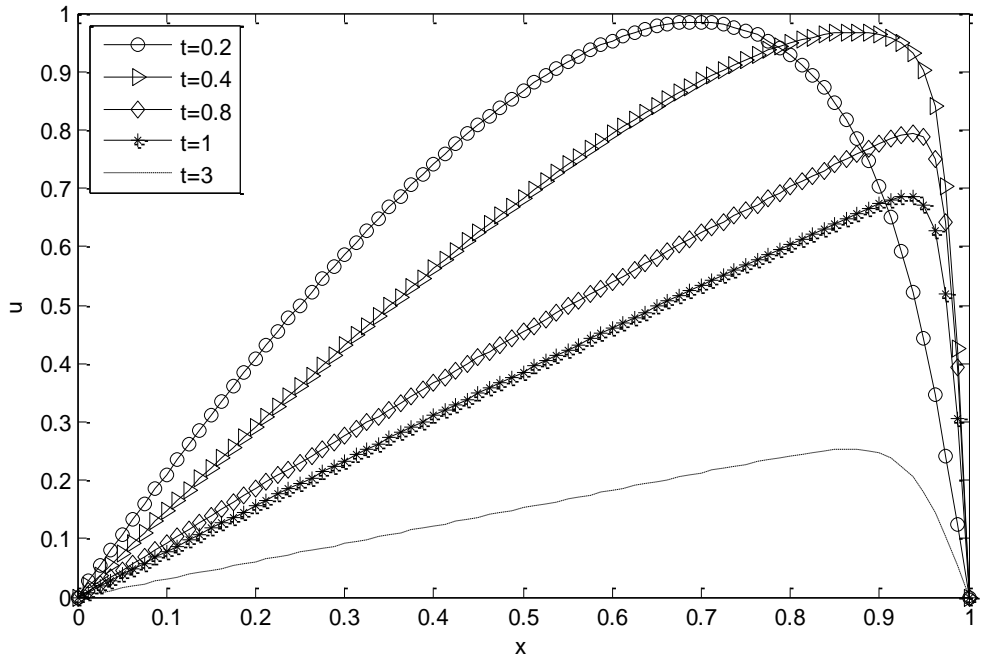
Şekil 3.26: Problem 2 için $\nu = 0.01$, $\Delta t = 0.001$ ve $h = 0.0125$ farklı zamanlarda elde edilen UKSF3 sonuçları



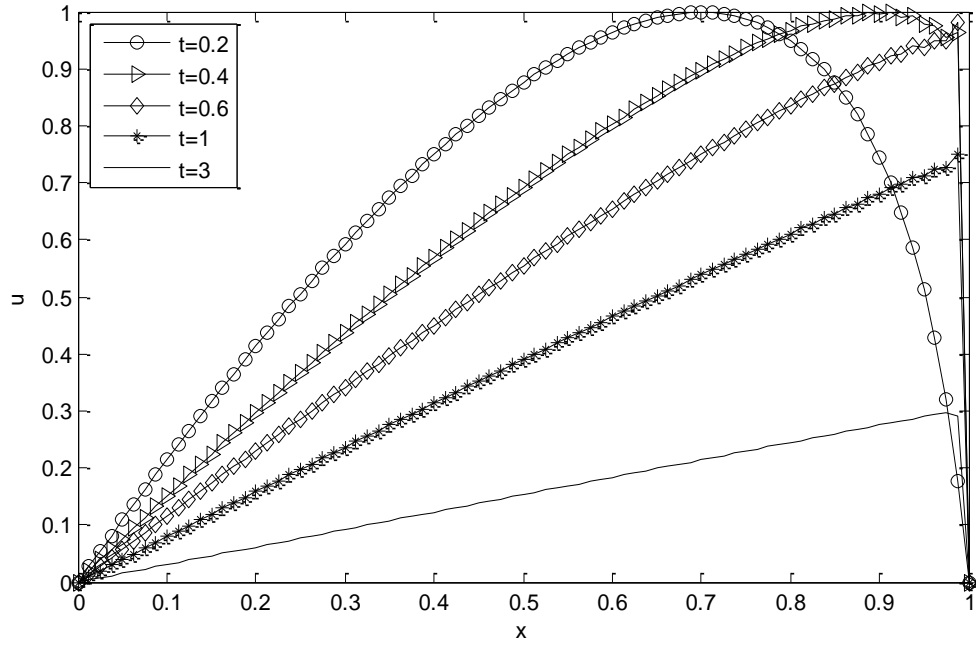
Şekil 3.27: Problem 2 için $\nu = 0.01$, $\Delta t = 0.001$ ve $h = 0.0125$ farklı zamanlarda elde edilen UKSF5 sonuçları



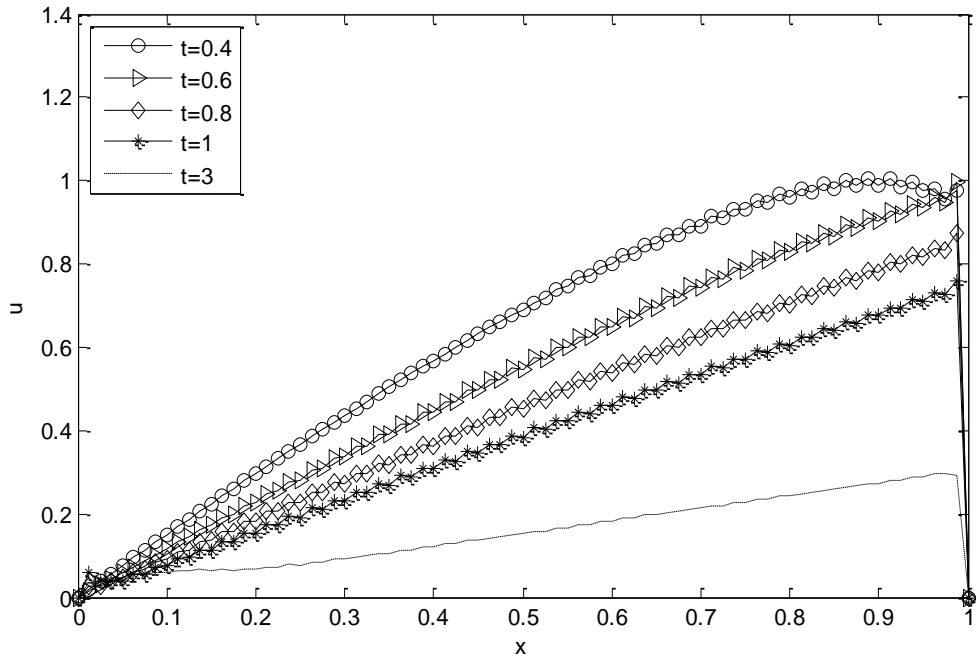
Şekil 3.28: Problem 2 için $\nu = 0.01$, $\Delta t = 0.0001$ ve $h = 0.0125$ farklı zamanlarda elde edilen PY 2 sonuçları



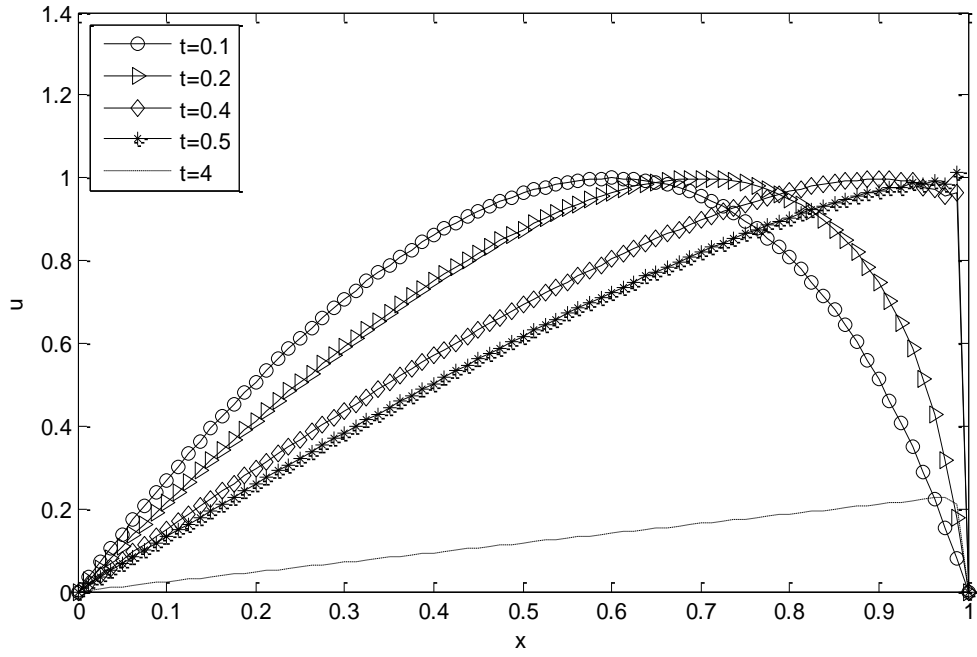
Şekil 3.29: Problem 2 için $\nu = 0.01$, $\Delta t = 0.0001$ ve $h = 0.0125$ farklı zamanlarda elde edilen PY 5 sonuçları



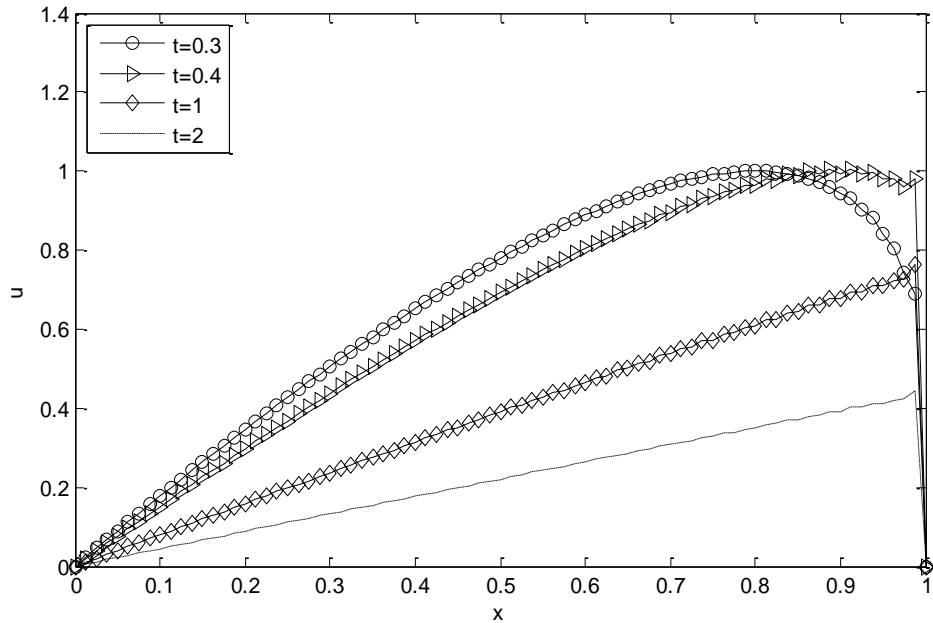
Şekil 3.30: Problem 2 için $\nu = 0.001$, $\Delta t = 0.0001$ ve $h = 0.0125$ farklı zamanlarda elde edilen SF8 sonuçları



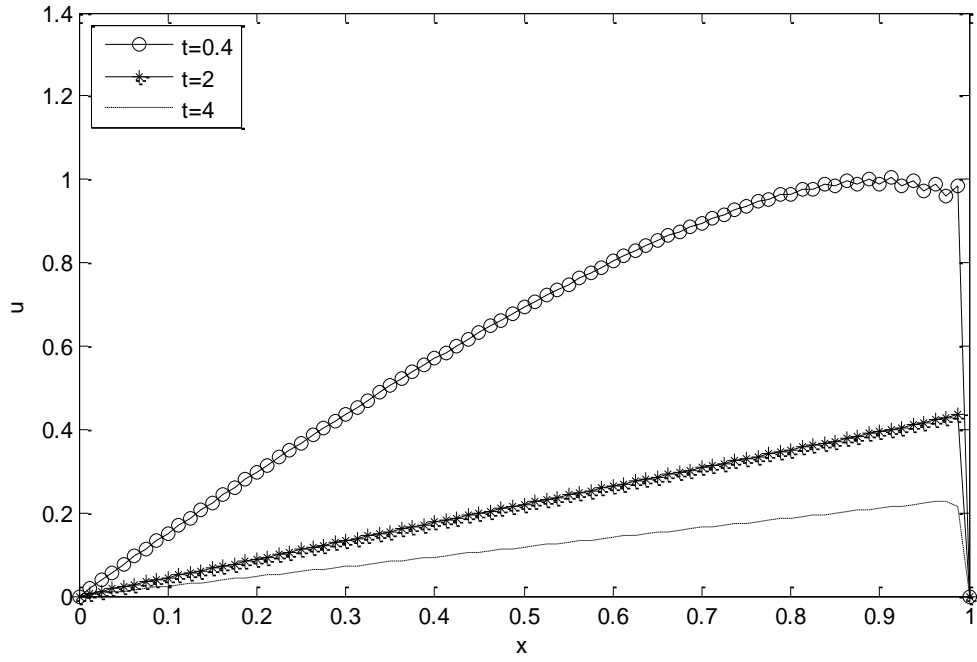
Şekil 3.31: Problem 2 için $\nu = 0.001$, $\Delta t = 0.0001$ ve $h = 0.0125$ farklı zamanlarda elde edilen KSF6 sonuçları



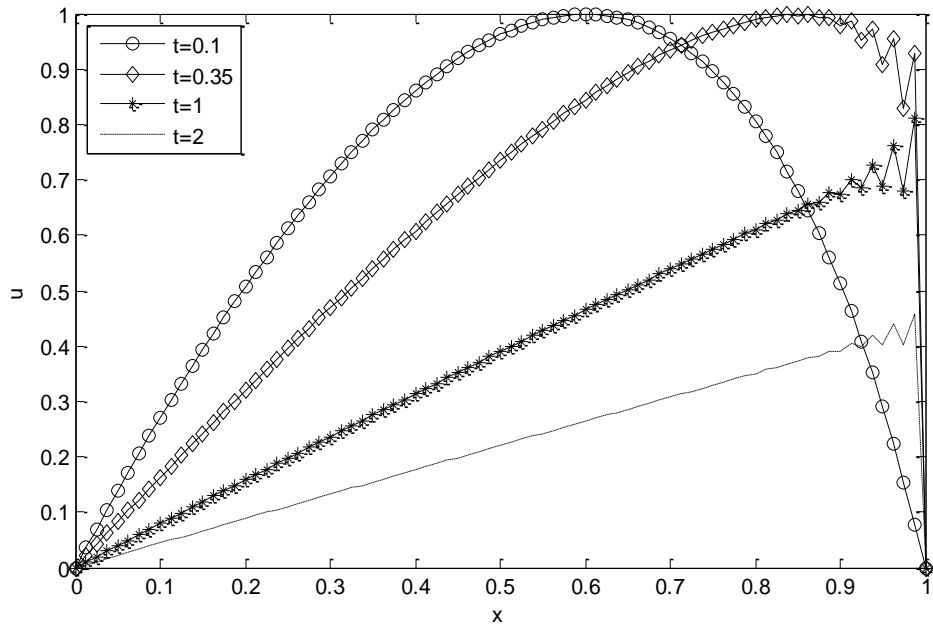
Şekil 3.32: Problem 2 için $\nu = 0.001$, $\Delta t = 0.0001$ ve $h = 0.0125$ farklı zamanlarda elde edilen LWSF8 sonuçları



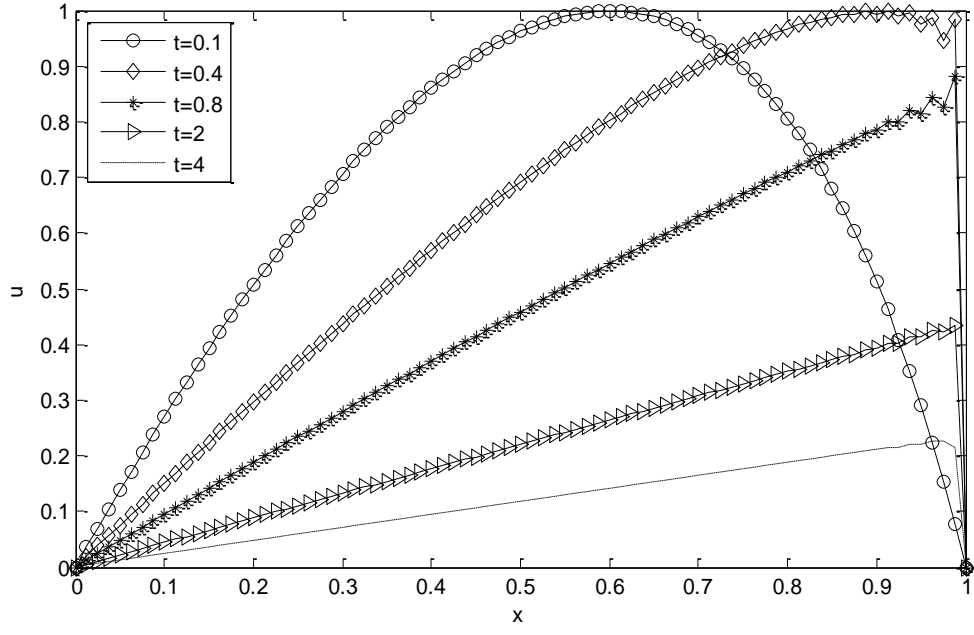
Şekil 3.33: Problem 2 için $\nu = 0.0001$, $\Delta t = 0.0001$ ve $h = 0.0125$ farklı zamanlarda elde edilen PC2 sonuçları



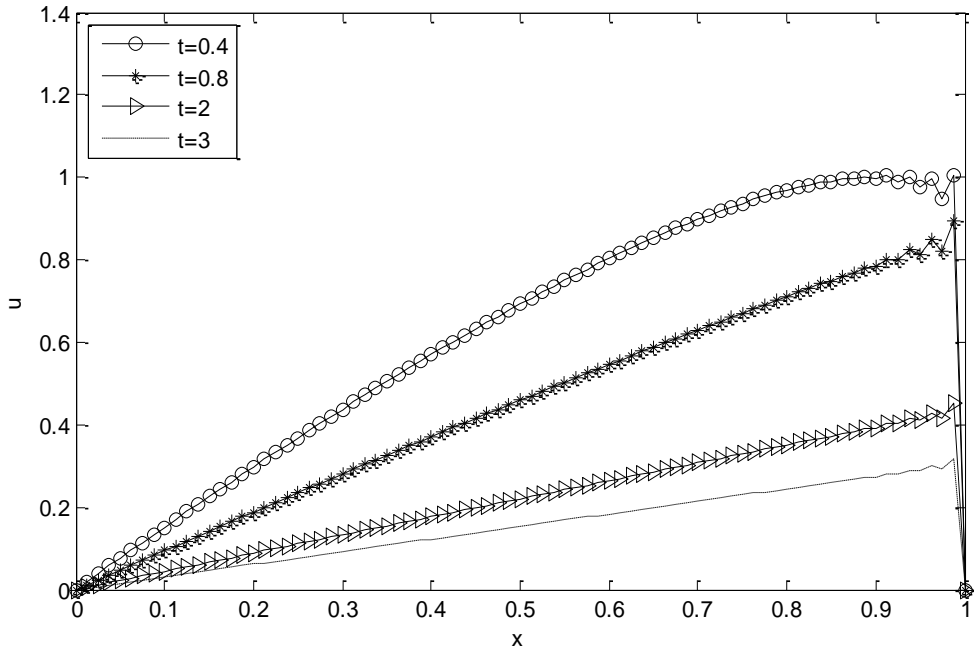
Şekil 3.34: Problem 2 için $\nu = 0.001$, $\Delta t = 0.0001$ ve $h = 0.0125$ farklı zamanlarda elde edilen PC4 sonuçları



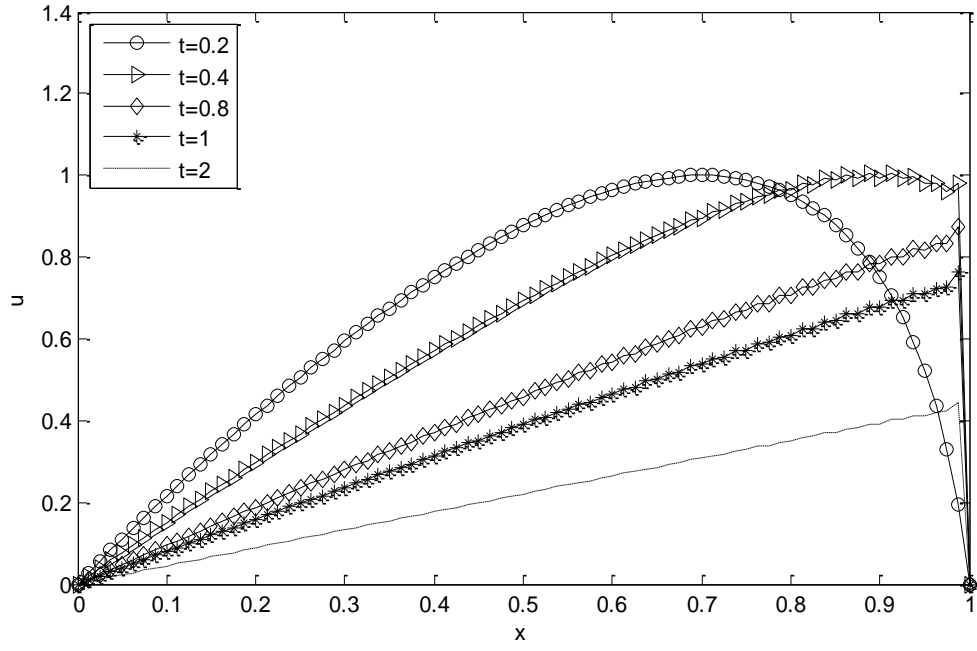
Şekil 3.35: Problem 2 için $\nu = 0.001$, $\Delta t = 0.001$ ve $h = 0.0125$ farklı zamanlarda elde edilen UKSF3 sonuçları



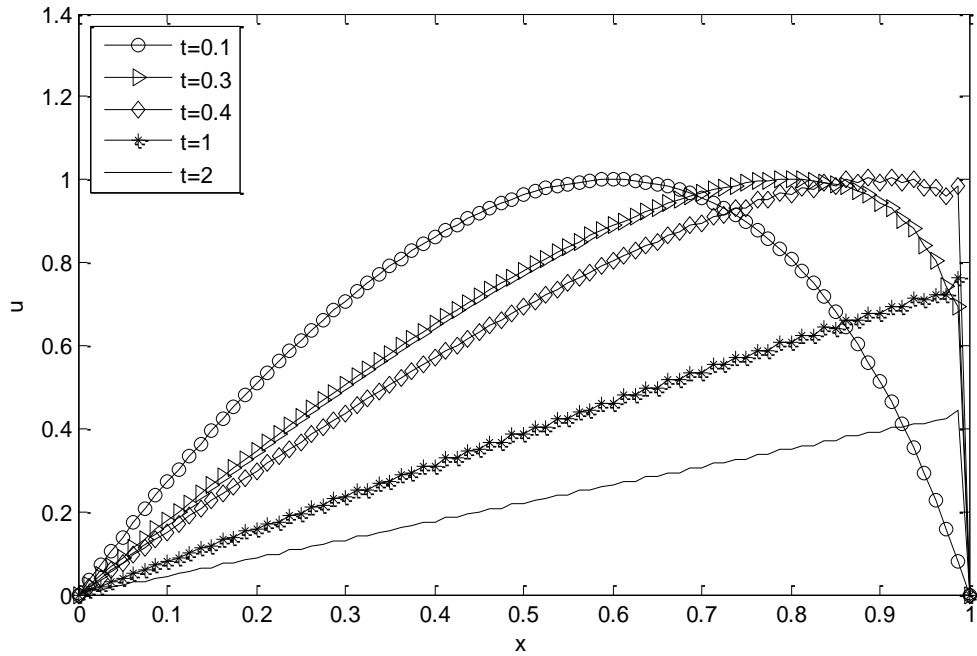
Şekil 3.36: Problem 2 için $\nu = 0.001$, $\Delta t = 0.001$ ve $h = 0.0125$ farklı zamanlarda elde edilen UKSF5 sonuçları



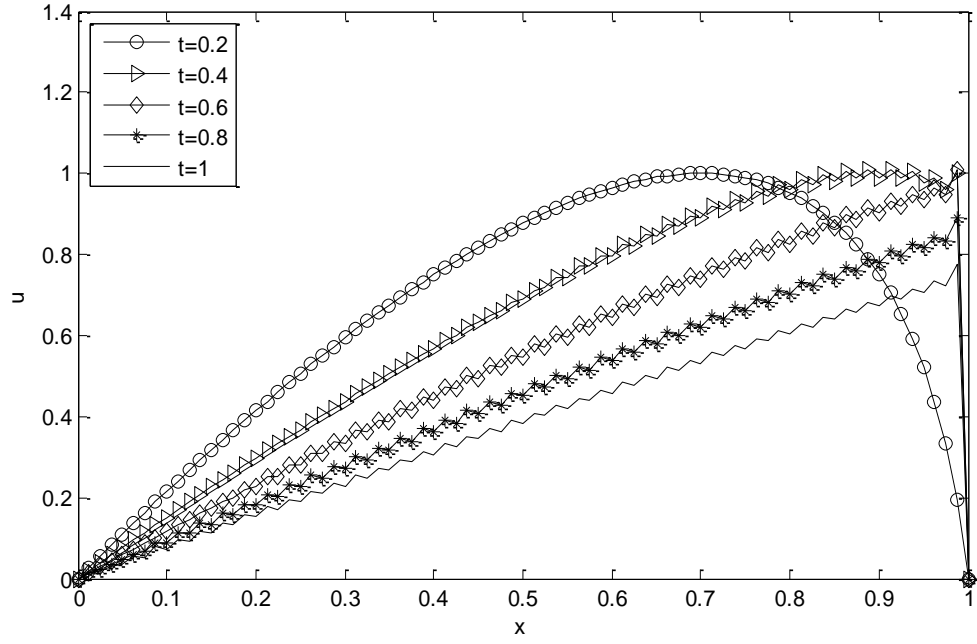
Şekil 3.37: Problem 2 için $\nu = 0.0001$, $\Delta t = 0.001$ ve $h = 0.0125$ farklı zamanlarda elde edilen UKSF5 sonuçları



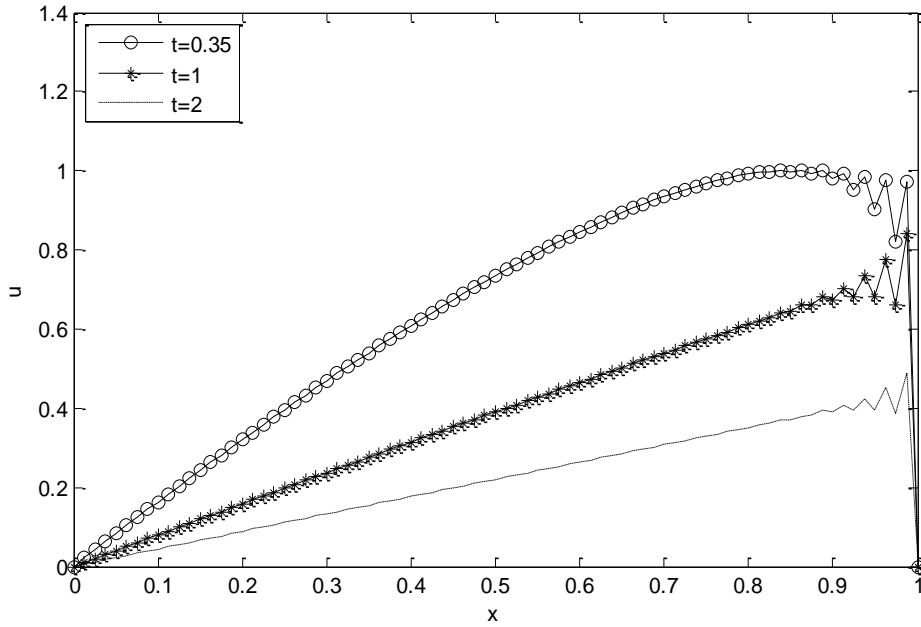
Şekil 3.38: Problem 2 için $\nu = 0.0001$, $\Delta t = 0.0001$ ve $h = 0.0125$ farklı zamanlarda elde edilen PY 2 sonuçları



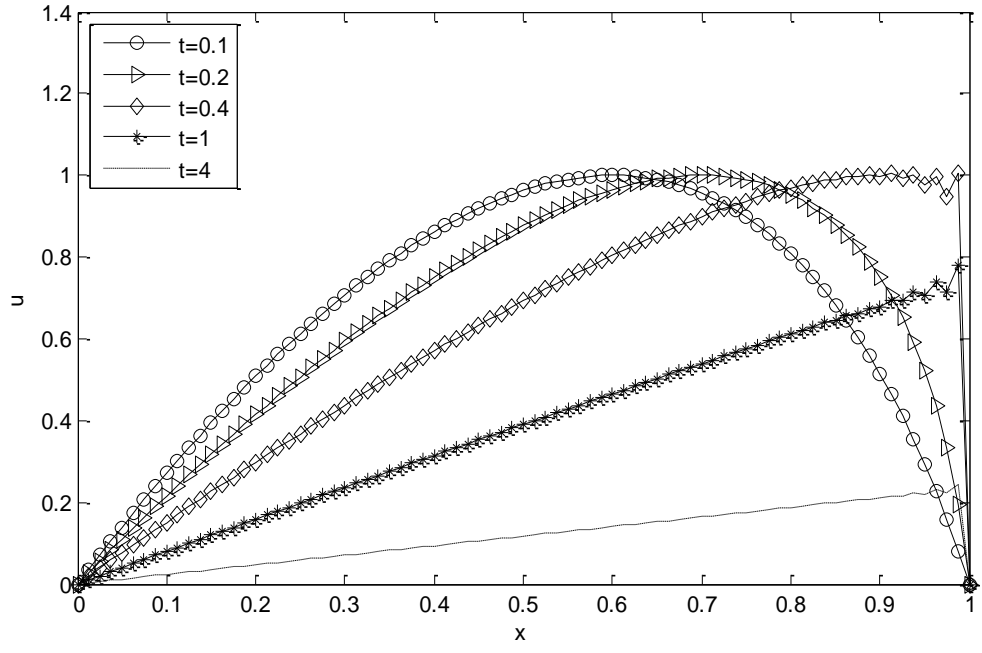
Şekil 3.39: Problem 2 için $\nu = 0.00001$, $\Delta t = 0.001$ ve $h = 0.0125$ farklı zamanlarda elde edilen SF8 sonuçları



Şekil 3.40: Problem 2 için $\nu = 0.00001$, $\Delta t = 0.0001$ ve $h = 0.0125$ farklı zamanlarda elde edilen KSF6 sonuçları



Şekil 3.41: Problem 2 için $\nu = 0.00001$, $\Delta t = 0.001$ ve $h = 0.0125$ farklı zamanlarda elde edilen UKSF3 sonuçları



Şekil 3.42: Problem 2 için $\nu = 0.00001$, $\Delta t = 0.001$ ve $h = 0.0125$ farklı zamanlarda elde edilen UKSF5 sonuçları

4. BULGULAR

Ele alınan nümerik yöntemlerin Burgers denklemini başarılı ve etkin bir şekilde çözebildiği ve üretilen sonuçların analitik çözüm ile uyum içinde olduğu görülmüştür. Ayrıca, elde edilen sonuçların literatürde mevcut olan bazı nümerik sonuçlarla da uyum içinde olduğu hatta bazılarında daha da hassas olduğu görülmüştür.

Tablo 3.5'ten de görüldüğü üzere; h , Δt , ν parametrelerinin farklı değerlerinde Burgers denkleminin uygulanan yöntemlerin kendi aralarında kıyaslaması da yapılmış ve genel olarak literatürle uyumluluk gösterdiği anlaşılmıştır. Viskozitenin, ν , küçük değerleri için elde edilen sonuçlarda, diğer yöntemlere göre altıncı mertebe kompakt sonlu fark yöntemi (KSF6) analitik sonuca yaklaşımadaki hassasiyeti çok az miktarda da olsa daha geride gözükmektedir. Ancak, altıncı mertebe kompakt sonlu fark yöntemini içeren PC4 şemasının KSF6 yönteminden daha iyi olduğu da göz ardı edilmemelidir. $\Delta t=0.0001$ ve $\nu=0.01$ değerlerinde büyük h değerleri için KSF6 metodu PC4, UKSF3 ve UKSF5 metotlarına nazaran çok küçük düzeyde de olsa analitik sonuçtan farkı göreceli olarak fazladır. $h=0.025$ ve $\nu=0.01$ için, büyük Δt değerinde upwind kompakt yöntemlerin, merkezi kompakt yöntemden daha hassas davranış sergilediği görülmüştür. Küçülen Δt değerlerinde, tezde kullanılan yöntemlerin analitik sonuçlarla oldukça iyi bir uyum sergilediği gözlemlenmektedir. Bunlar arasındaki ilişki detaylı olarak Tablo 3.5'te verilmiştir.

Tablo 3.4 görüldüğü üzere, daha az hesaplama ihtiyacı duyulduğu için, Burgers denkleminin uygulanan yöntemlerden UKSF3 ve UKSF5 şemalarının daha avantajlı olduğu söylenebilir. Burada hesaplanan tüm sonuçlar için üretilen bilgisayar yazılımları MATLAB 2013a versiyonunda çalıştırılmıştır.

5. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu çalışmada, sonlu fark yaklaşımlarının değişik versiyonları ve farklı kombinasyonları kullanılarak Burgers denkleminin kalitatif ve kantitatif davranışları incelenmiştir. Ele alınan bu yöntemler, kayda değer bir test problemi olan Burgers denkleminin çözümü aracılığıyla karşılaştırılmış, avantajlarına ve dezavantajlarına yer verilmiştir. Genel olarak yöntemlerin uyum içerisinde olduğu görülmüştür. Ancak, süreksiz davranışın söz konusu olduğu noktalarda yapısal avantaja sahip yöntemler (UKSF3, UKSF5)'in ön plana çıktığı gözlemlenmiştir.

Altıncı mertebe kompakt sonlu fark yöntemi, yüksek mertebeden sonlu fark (SF6,SF8) yöntemlerine göre daha kısa zamanda sonuç vermesi ve hesaplamada az efor harcaması gözönüne alındığında avantajlı bir yöntem olduğu söylenebilir. Ancak, küçük viskozite değerlerinde sınıra yakın noktalarda, diğer sonlu fark yöntemlerine göre analitik sonuca yaklaşımadaki hassasiyeti çok az miktarda da olsa geride olduğu gözlemlenmiştir.

Yüksek mertebeden upwind kompakt sonlu fark (UKSF3, UKSF5) yöntemlerinin, çalışmamızdaki diğer yöntemlere nazaran, daha kısa sürede hesaplama özelliği ve küçük viskozite değerlerinde analitik sonuçlara daha hızlı bir şekilde yaklaştığı tespit edilmiştir. Ayrıca, küçük viskozite değerleri için verilen kalitatif sonuçlarda, upwind yönteminin diğer yöntemlere meydan okuması, bu yöntemin etkili ve iyi alternatif olduğu düşüncesini kuvvetlendirmiştir.

Dolayısıyla, yüksek mertebeden upwind kompakt sonlu fark yöntemlerini, nonlinear kısmi diferansiyel denklemlerce temsil edilen keskin davranışlı fiziksel problemlerde daha detaylı bir şekilde uygulayacak geniş bir çalışmaya yer verilmesi akademik açıdan heyecan verici olacaktır.

6. KAYNAKLAR

Abazari, R. and Borhanifar, A., “Numerical study of the solution of the Burgers and coupled Burgers equations by a differential transformation method”, *Comput. and Math. with Appl.*, 59, 2711-2722, (2010).

Abbasbandy, S. and Darvishi, M. T., “A numerical solution of Burgers’ equation by modified Adomian method”, *Appl. Math. Comput.*, 163, 1265-1272, (2005).

Aksan, E. N., “Quadratic B-spline finite element method for numerical solution of the Burgers’ equation”, *Appl. Math. Comput.*, 176, 884-896, (2006).

Ali, A. H. A., Gardner, L. R. T. and Gardner, G. A., “A collocation method for Burgers equation using cubic splines”, *Comp. Math. Appl. Mech. Eng.*, 100, 325-337, (1992).

Bahadır, A. R. and Sağlam, M., “A mixed finite difference and boundary element approach to one-dimensional Burgers’ equation”, *Appl. Math. Comput.*, 160, 663-673, (2005).

Bateman, H., “Some recent researches on the motion of fluids”, *Mon. Weather Rev.*, 43, 163-170, (1915).

Burgers, J. M., “Mathematical examples illustrating relations occurring in the theory of turbulent fluid motion”, *Trans. Roy. Neth. Acad. Sci.*, 17, 1-53, (1939).

Caldwell, J., Wanless, P. and Cook, A. E., “A finite element approach to Burgers equation”, *Appl. Math. Modelling*, 5, 189-193, (1981).

Carpenter, M. H., Gotlieb, D. and Abarbanel, S., “The stability of numerical boundary treatments for compact high-order finite difference schemes”, *J. Comput. Phys.*, 108, 272-295, (1993).

Dağ, İ., Irk, D. and Saka, B., “A numerical solution of the Burgers equation using cubic B-splines”, *Appl. Math. Comput.*, 163, 199-211, (2005).

Dey, S. K. and Dey, C., “An explicit predictor-corrector solver with applications to Burgers’ equation”, *National Aeronautics and Space Administration*, 64, No:29, (1983).

Evans, D. J. and Abdullah, A. R., “The group explicit method for the solution of Burgers’ equation”, *Computing*, 32, 239-253, (1984).

Gardner, L. R. T., Gardner, G. A. and Doğan, A., “A Petrov-Galerkin finite element scheme for Burgers equation”, *Arab. J. Sci. Eng.*, 22, 99-109, (1997).

Gottlieb, S. and Shu, C. W., “Total variation diminishing Runge-Kutta schemes”, *Math. Comput.*, 67, 73-85, (1998).

- Gülsu, M., “A finite difference approach solution of Burgers’ equation”, *Appl. Math. and Comp.*, 175, 1245-1255, (2006).
- Gülsu, M. and Öziş, T., “Numerical solution of Burgers’ equation with restrictive Taylor approximation”, *Appl. Math. Comput.*, 171, 1192-1200, (2005).
- Harten, A., “High resolution schemes for hyperbolic conservation laws”, *J. Comput. Phys.*, 49, 357-393, (1983).
- Hassanien, I. A., Salama, A. A. and Hosham, H. A., “Fourth order finite difference method for solving Burgers equation”, *Appl. Math. Comput.*, 170, 781-800, (2005).
- Inc, M., “On numerical solution of Burgers’ equation by homotopy analysis method”, *Physics Letters A.*, 372, 356-360, (2008).
- Iyengar, S. R. K. and Jain, R. K., *Numerical Methods*, New Delhi: New Age International, 216-237, (2009).
- İnan, B. and Bahadır, A. R., “A numerical solution of the Burgers’ equation using a Crank-Nicolson exponential finite difference method”, *J. Math. Comput. Sci.*, 4, 849-860, (2014).
- Jain, P. C. and Raja, M., “Splitting-up technique for Burgers’ equations”, *Indian J. Pure Appl. Math.*, 12, 1543-1551, (1979).
- Darvishi, M. T. and Javidi, M., “A numerical solution of Burgers’ equation by pseudospectral method and Darvishi’s preconditioning”, *Appl. Math. Comput.*, 173, 421-429, (2006).
- Lax, P. D. and Wendroff, B., “Systems of conservation laws”, *Commun. Pure Appl. Math.*, 13, 217-237, (1960).
- Lele, S. K., “Compact finite difference schemes with spectral-like resolution”, *J. Comput. Phys.*, 103, 15-53, (1992).
- Kadalbajoo, M. K. and Awasthi, A., “A numerical method based on Crank-Nicolson scheme for Burgers’ equation”, *Appl. Math. and Comput.*, 182, 1430-1442, (2006).
- Kadalbajoo, M. K., Sharma, K. K. and Awasthi, A., “A parameter-uniform implicit difference scheme for solving time-dependent Burgers’ equation”, *Appl. Math. Comput.*, 170, 1365-1393, (2005).
- Karpman, V. I., *Nonlinear Waves in Dispersive Media*, New York: Pergamon Press, (1975).

- Kutluay, S., Bahadır, A. R. and Özdes, A., “Numerical solution of one-dimensional Burgers equation: explicit and exact-explicit finite difference methods”, *Appl. Math. Comput.*, 103, 251-261, (1999).
- Kutluay, S., Esen, A. and Dağ, I., “Numerical solutions of the Burgers’ equation by the least squares quadratic B-spline finite element method”, *J. Comp. Appl. Math.*, 167, 21-33, (2004).
- Kutluay, S. and Esen, A., “A lumped Galerkin method for solving the Burgers equation”, *Int. J. Comp. Math.*, 81(11),1433-1444, (2004).
- Kutluay, S. and Esen, A., “A linearized numerical scheme for Burgers-like equations”, *Appl. Math. Comp.*, 156, 295-305, (2004).
- Lin, E. B. and Zhou, X., “Connection coefficients on an interval and wavelet solutions of Burgers’ equation”, *Appl. Math. Comp.*, 163, 1265-1272, (2005).
- MacCormack, R. W., “The effect of viscosity in hypervelocity impact cratering”, *AIAA Paper*, 69-354, (1969).
- Marchuk, G. I., “Some application of splitting-up methods to the solution of mathematical physics problems”, *Aplikace Matematiky*, 13, 103-132, (1968).
- Munson, B. R., Young, D. F., Okiishi, T. H. and Huebsch, W. W., *Fundamentals of Fluid Mechanics*, USA: John Wiley & Sons, (2009).
- Nguyen, H. and Reynen, J., “A space-time finite element approach to Burgers’ equation”, (eds: Taylor, C et al.), *Numerical Methods for Nonlinear Problems*, Pineridge Press, 2, 718-728, (1982).
- Özis, T. and Aslan, Y., “The semi-approximate approach for solving Burgers’ equation with high Reynolds number”, *Appl. Math. Comp.*, 163, 131-145, (2005).
- Özis, T., Aksan, E. N. and Özdes, A., “A finite element approach for solution of Burgers’ equation”, *Appl. Math. Comp.*, 139, 417-428, (2003).
- Rai, M. M. and Moin, P., “Direct simulations of turbulent flow using finite difference schemes”, *J. Comp. Phys.*, 96, 15-53, (1991).
- Sari, M., Gürarlan, G. and Zeytinoğlu, A., “High order finite difference schemes for the solution of generalized Burger-Fisher equation”, *Commun. Num. Meth. Eng.*, doi: 10.1002/cnm. 1360, (2009).
- Sari, M. and Gürarlan, G., “A sixth-order compact finite difference scheme to the numerical solutions of Burgers’ equation”, *Appl. Math. Comp.*, 208, 475-483, (2009).

Seydaoğlu, M., “Parçalanmış 1-Boyutlu Burgers Denkleminin sonlu Fark Yöntemleri ile Nümerik Çözümleri”, Yüksek Lisans Tezi, İnönü Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Malatya, (2010).

Tannehill, J. C., Anderson, D. A. and Pletcher, R. H., *Computational Fluid Mechanics and Heat Transfer*, USA: Taylor&Francis, (1997).

Tolstykh, A. I., “On a class of noncentered compact difference schemes”, *J. Comp. Phys.*, 44, 69-74, (1991).

Varoğlu, E. and Finn, W. D. L., “Space time finite elements incorporating characteristics for the Burgers’ equations”, *Int J. Num. Meth. Eng.*, 16, 171-184, (1980).

Zeytinoğlu, A., “Burgers Denklemlerinin Bazı Yaklaşık Çözümleri”, Yüksek Lisans Tezi, Süleyman Demirel Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Isparta, (2010).

Zhu, C. G. and Wang, R. H., “Numerical solution Burgers’ equation by cubic B-spline quasi interpolation”, *Appl. Math. Comp.*, 208, 206-272, (2009).

Zhong, X., “High-order finite difference schemes for numerical simulation of hypersonic boundary-layer transition”, *J. Comp. Phys.*, 144(2), 662-709, (1998).

7. EKLER

EK A.1 Birinci Mertebe Türev Teriminin Altıncı ve Sekizinci Mertebeden Sonlu Fark (SF6, SF8) Formülasyonları

u'_i birinci mertebe türev teriminin altıncı mertebeden sonlu fark (SF6) formülasyonu, sırasıyla,

$i = 1, 2, 3$ için,

$$u'_i = \frac{1}{60h} (-147u_i + 360u_{i+1} - 450u_{i+2} + 400u_{i+3} - 225u_{i+4} + 72u_{i+5} - 10u_{i+6})$$

$$u'_i = \frac{1}{60h} (-10u_{i-1} - 77u_i + 150u_{i+1} - 100u_{i+2} + 50u_{i+3} - 15u_{i+4} + 2u_{i+5})$$

$$u'_i = \frac{1}{60h} (2u_{i-2} - 24u_{i-1} - 35u_i + 80u_{i+1} - 30u_{i+2} + 8u_{i+3} - u_{i+4})$$

$i = 4, \dots, N-3$ için,

$$u'_i = \frac{1}{60h} (-u_{i-3} + 9u_{i-2} - 45u_{i-1} + 45u_{i+1} - 9u_{i+2} + u_{i+3})$$

$i = N-2, N-1, N$ için,

$$u'_i = \frac{1}{60h} (u_{i-4} - 8u_{i-3} + 30u_{i-2} - 80u_{i-1} + 35u_i + 24u_{i+1} - 2u_{i+2})$$

$$u'_i = \frac{1}{60h} (-2u_{i-5} + 15u_{i-4} - 50u_{i-3} + 100u_{i-2} - 150u_{i-1} + 77u_i + 10u_{i+1})$$

$$u'_i = \frac{1}{60h} (10u_{i-6} - 72u_{i-5} + 225u_{i-4} - 400u_{i-3} + 450u_{i-2} - 360u_{i-1} + 147u_i)$$

olarak verilir.

u'_i birinci mertebe türev teriminin sekizinci mertebeden sonlu fark (SF8) formülasyonu, sırasıyla,

$i = 1, 2, 3, 4$ için

$$u'_i = \frac{1}{840h} (-2283u_i + 6720u_{i+1} - 11760u_{i+2} + 15680u_{i+3} - 14700u_{i+4} + 940u_{i+5} - 3920u_{i+6} + 960u_{i+7} - 105u_{i+8})$$

$$u'_i = \frac{1}{840h} (-105u_{i-1} - 1338u_i + 2940u_{i+1} - 2940u_{i+2} + 2450u_{i+3} - 1470u_{i+4} + 588u_{i+5} - 140u_{i+6} + 15u_{i+7})$$

$$u'_i = \frac{1}{840h} (15u_{i-2} - 240u_{i-1} - 798u_i + 1680u_{i+1} - 1050u_{i+2} + 560u_{i+3} - 210u_{i+4} + 48u_{i+5} - 5u_{i+6})$$

$$u'_i = \frac{1}{840h} (-5u_{i-3} + 60u_{i-2} - 420u_{i-1} - 378u_i + 1050u_{i+1} - 420u_{i+2} + 140u_{i+3} - 30u_{i+4} + 3u_{i+5})$$

$i = 5, \dots, N - 4$ için,

$$u'_i = \frac{1}{840h} (3u_{i-4} - 32u_{i-3} + 168u_{i-2} - 672u_{i-1} + 672u_{i+1} - 168u_{i+2} + 32u_{i+3} - 3u_{i+4})$$

$i = N - 3, N - 2, N - 1, N$ için,

$$u'_i = \frac{1}{840h} (-3u_{i-5} + 30u_{i-4} - 140u_{i-3} + 420u_{i-2} - 1050u_{i-1} + 378u_i + 420u_{i+1} + 60u_{i+2} + 5u_{i+3})$$

$$u'_i = \frac{1}{840h} (5u_{i-6} - 48u_{i-5} + 210u_{i-4} - 560u_{i-3} + 1050u_{i-2} - 1680u_{i-1} + 798u_i + 240u_{i+1} - 15u_{i+2})$$

$$u'_i = \frac{1}{840h} (-15u_{i-7} - 140u_{i-6} - 588u_{i-5} + 1470u_{i-4} - 2450u_{i-3} + 2940u_{i-2} - 2940u_{i-1} + 1338u_i + 105u_{i+1})$$

$$u'_i = \frac{1}{840h} (105u_{i-8} - 960u_{i-7} + 3920u_{i-6} - 9408u_{i-5} + 14700u_{i-4} - 15680u_{i-3} + 11760u_{i-2} - 6720u_{i-1} + 2283u_i)$$

olarak verilir.

Ek A.2 İkinci Mertebe Türev Teriminin Sekizinci Mertebe Sonlu Fark (SF8) Formülasyonu

u''_i ikinci mertebe türev teriminin sekizinci mertebeden sonlu fark (SF8) formülasyonu, sırasıyla,

$i = 1, 2, 3, 4$ için,

$$u_i'' = (29531u_i - 138528u_{i+1} + 312984u_{i+2} - 448672u_{i+3} + 435330u_{i+4} - 284256u_{i+5} + 120008u_{i+6} - 29664u_{i+7} + 3267u_{i+8}) / (5040h^2)$$

$$u_i'' = (3267u_{i-1} - 128u_i - 20916u_{i+1} + 38556u_{i+2} - 37030u_{i+3} + 23688u_{i+4} - 9828u_{i+5} + 2396u_{i+6} - 261u_{i+7}) / (5040h^2)$$

$$u_i'' = (-261u_{i-2} + 5616u_{i-1} - 9268u_i + 1008u_{i+1} + 5670u_{i+2} - 4144u_{i+3} + 17644u_{i+4} - 432u_{i+5} + 47u_{i+6}) / (5040h^2)$$

$$u_i'' = (47u_{i-3} - 684u_{i-2} + 7308u_{i-1} - 13216u_i + 6930u_{i+1} - 252u_{i+2} - 196u_{i+3} + 72u_{i+4} - 9u_{i+5}) / (5040h^2)$$

$i = 5, \dots, N - 4$ için,

$$u_i'' = (-9u_{i-4} + 128u_{i-3} - 1008u_{i-2} + 8064u_{i-1} - 14350u_i + 8064u_{i+1} - 1008u_{i+2} + 128u_{i+3} - 9u_{i+4}) / (5040h^2)$$

$i = N - 3, N - 2, N - 1, N$ için,

$$u_i'' = (-9u_{i-5} + 72u_{i-4} - 196u_{i-3} - 252u_{i-2} + 6930u_{i-1} - 13216u_i + 7308u_{i+1} - 684u_{i+2} + 47u_{i+3}) / (5040h^2)$$

$$u_i'' = (47u_{i-6} - 432u_{i-5} + 1764u_{i-4} - 4144u_{i-3} + 5670u_{i-2} + 1008u_{i-1} - 9268u_i + 5616u_{i+1} - 261u_{i+2}) / (5040h^2)$$

$$u_i'' = (-261u_{i-7} + 2396u_{i-6} - 9828u_{i-5} + 23688u_{i-4} - 37030u_{i-3} + 38556u_{i-2} - 20916u_{i-1} + 128u_i + 3267u_{i+1}) / (5040h^2)$$

$$u_i'' = (3267u_{i-8} - 29664u_{i-7} + 120008u_{i-6} - 284256u_{i-5} + 435330u_{i-4} - 448672u_{i-3} + 312984u_{i-2} - 138528u_{i-1} + 29531u_i) / (5040h^2)$$

**Ek B Birinci Mertebe Türev Teriminin Üçüncü Mertebe Upwind
Kompakt Sonlu Fark (UKSF3) Formülasyonu**

u'_i birinci mertebe türev terimi için üçüncü mertebe upwind kompakt sonlu fark formülasyonu, sırasıyla,

$i = 1$ için,

$$u'_i + 2u'_{i+1} = \frac{1}{h} \left(-\frac{5}{2}u_i + 2u_{i+1} + \frac{1}{2}u_{i+1} \right)$$

$i = 2, \dots, N-1$ için,

$$\frac{5}{16}u'_{i-1} + u'_i + \frac{3}{16}u'_{i+1} = \frac{1}{h} \left(\frac{7}{8}u_{i-1} + \frac{1}{4}u_i + \frac{5}{8}u_{i+1} \right)$$

$i = N$ için

$$2u'_{i-1} + u'_i = \frac{1}{h} \left(-\frac{1}{2}u_{i-2} - 2u_{i-1} + \frac{5}{2}u_i \right)$$

olarak verilir.

8. ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı : Eren DİNÇER

Doğum Yeri ve Tarihi : Kars – 30.04.1990

Lisans Üniversite : Pamukkale Üniversitesi Matematik Bölümü, 2012

Y. Lisans Üniversite : Pamukkale Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, 2015

Elektronik posta : erendincer_2021@hotmail.com