PAMUKKALE ÜNİVERSİTESİ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

BAZI ÜÇGENSEL MATRİS METODLARININ MUTLAK YAKINSAKLIK ALANLARI VE TAUBERIAN TEOREMLERİ ÜZERİNE

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Güllü Canan HAZAR

Anabilim Dalı : Matematik

Tez Danışmanı: Prof. Dr. Mehmet Ali SARIGÖL

HAZİRAN 2013

YÜKSEK LİSANS TEZ ONAY FORMU

Pamukkale Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü 111441502 nolu öğrecisi G. Canan HAZAR tarafından hazırlanan "**BAZI ÜÇGENSEL MATRİS METODLARININ MUTLAK YAKINSAKLIK ALANLARI VE TAUBERIAN TEOREMLERİ ÜZERİNE**" başlıklı tez tarafımızdan okunmuş, kapsamı ve niteliği açısından bir Yüksek Lisans tezi olarak kabul edilmiştir.

Jüri Başkanı:	**Prof. Dr. Nuri KOLSUZ (PAÜ)**	
Tez Danışmanı:	**Prof. Dr. Mehmet Ali SARIGÖL (PAÜ)**	
Jüri Üyesi :	**Prof. Dr. Sadulla JAFAROV (PAÜ)**	

Pamukkale Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun 17/07/2013.. tarih ve .23/10........ sayılı kararıyla onaylanmıştır.

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü
Prof. Dr. Nuri KOLSUZ

Bu tezin tasarımı, hazırlanması, yürütülmesi, araştırmalarının yapılması ve bulgularının analizlerinde bilimsel etiğe ve akademik kurallara özenle riayet edildiğini; bu çalışmanın doğrudan birincil ürünü olmayan bulguların, verilerin ve materyallerin bilimsel etiğe uygun olarak kaynak gösterildiğini ve alıntı yapılan çalışmalara atfedildiğine beyan ederim.

İmza :

Öğrenci Adı Soyadı : G. Canan HAZAR

ÖNSÖZ

Bu tez çalışması, Pamukkale Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı Yüksek Lisans programında yapılmıştır.

Bu çalışmada, mutlak toplanabilme metotları arasındaki içerme bağıntıları ve Das[1] tarafından verilen Tauberian teoremleri incelenmiştir.

Bu çalışmayı yaparken değerli zamanını feda ederek benden yardım ve eleştirilerini hiç esirgemeyen ve her türlü bilgi ve deneyimini benimle paylaşan değerli danışman hocam Sayın Prof. Dr. Mehmet Ali Sarıgöl'e ve Pamukkale Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik bölümü tüm öğretim üyeleri hocalarıma sonsuz teşekkürlerimi bir borç bilirim.

Ayrıca tüm hayatım boyunca bana her zaman destek olan canım aileme ve arkadaşlarıma en içten teşekkürlerimi sunarım.

Haziran, 2013

G. Canan HAZAR

İÇİNDEKİLER

ÖZET

BAZI ÜÇGENSEL MATRİS METODLARININ MUTLAK YAKINSAKLIK ALANLARI VE TAUBERIAN TEOREMLERİ ÜZERİNE

Bu çalışma üç bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölümde çalışma boyunca kullanılacak temel tanım ve teoremler verilmiştir.

İkinci bölümde konunun anlaşılmasına yardımcı olan aynı zamanda önemli ispat teknikleri kazandıran ve üçüncü bölümde faydalanacağımız Das[1]'a ait olan temel lemmalar ile ispatları verilmiştir.

Üçüncü bölümde Das[1]'a ait olan $|N,p|$ mutlak Nörlund ve $|R,exp(n-1)^{\alpha},1|$ mutlak Riesz toplanabilme metotlarıyla ilgili Tauberian teoremlerinin yanısıra $|N,p|$, $|N,P|$, $|(C,1)(N,p_n)|$ ve $|R,\lambda_{n-1},1|$ metotlarının kapsama ilişkileri incelenmiştir.

Anahtar Kelimeler: Tauberian Teoremleri, Mutlak Toplanabilme Metodları.

SUMMARY

ON THE ABSOLUTE CONVERGENCE FIELD OF SOME TRIANGULAR MATRİX METHODS AND TAUBERIAN THEOREMS

This thesis consists of three chapters.

In the first chapter, the basic definitions and the theorems used throughout the study have been stated.

In the second chapter, it has been given the basic lemmas and their proofs of Das[1] which will help us to understand the subject and to have some important techniques of proof, and also be used in the third chapter.

In the third chapter, Tauberian theorems of Das[1] concerning on absolute Nörlund summability $|N,p|$, absolute Riesz summability $|R,exp(n-1)^{\alpha},1|$ and inclusion relations between summability methods $|N,p|$, $|N,P|$, $|(C,1)(N,p_n)|$ ve $|R,\lambda_{n-1},1|$ have been examined.

Key Words: Tauberian Theorems, Absolute Summability Methods.

1 TANIM VE TEOREMLER

Bu bölümde bundan sonraki bölümler göz önüne alınarak gerekli temel tanım ve teoremler verilmiştir.

Bu çalışmada aksi söylenmezse $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ reel veya kompleks terimli seriyi, (s_n) bu serinin kısmi toplamlar dizisini ve BV ise sınırlı salınımlı dizilerin uzayını gösterecektir, yani

$$BV = \left\{ x = (x_n) : \sum_{n=0}^{\infty} |x_n - x_{n-1}| < \infty \ , \ x_{-1} = 0 \right\}$$

olacaktır.

Tanım 1.1 : $\alpha > -1$ olmak üzere (s_n) ve (na_n) dizilerinin α ıncı mertebeden n inci (C, α) Cesàro ortalamalarını sırasıyla σ_n^{α} ve τ_n^{α} ile gösterelim, yani $n \geqslant 1$ için

$$A_0^{\alpha} = 1, \quad A_n^{\alpha} = \binom{n+\alpha}{n} = \frac{(\alpha+1)(\alpha+2)...(\alpha+n)}{n!}$$

olmak üzere

$$\sigma_n^{\alpha} = \frac{1}{A_n^{\alpha}} \sum_{\nu=0}^{n} A_{n-\nu}^{\alpha-1} s_{\nu}$$

ve

$$\tau_n^{\alpha} = \frac{1}{A_n^{\alpha}} \sum_{\nu=0}^{n} A_{n-\nu}^{\alpha-1} (\nu a_{\nu})$$

olsun. Eğer

$$\lim_{n \to \infty} \sigma_n^{\alpha} = s$$

ise bu taktirde $\sum a_n$ serisine (veya (s_n) dizisine) s değerine (C, α) toplanabilirdir denir.

Özel olarak $\alpha = 1$ için σ_n^1 ve τ_n^1 in yerine kısaca σ_n ve τ_n yazacağız. Bu durumda $A_{\nu}^1 = n + 1$ ve $A_{\nu}^0 = 1$ olduğundan,

$$\sigma_n^1 = \sigma_n = \frac{1}{n+1} \sum_{\nu=1}^{n} s_{\nu}$$

ve

$$\tau_n^1 = \tau_n = \frac{1}{n+1} \sum_{\nu=1}^{n} \nu a_\nu$$

olur [**4**].

Burada dikkat edelim ki A_n^α ın katsayıları $|x| < 1$ için $(1-x)^{-1}$ in kuvvet serisine açılımından elde edilir, yani

$$(1-x)^{-\alpha-1} = \sum_{\nu=0}^{\infty} A_\nu^\alpha x^\nu$$

olur.

Eğer $(\sigma_n^\alpha) \in BV$ yani

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left|\sigma_n^\alpha - \sigma_{n-1}^\alpha\right| < \infty$$

ise, bu taktirde $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ serisine (veya (s_n) dizisine) mutlak (C,α) toplanabilir veya $|C,\alpha|$ toplanabilir denir [**3**].

Tanım 1.2 : (p_n) reel veya kompleks sayıların bir dizisi ve

$$P_n = p_0 + p_1 + ... + p_n \neq 0 \, (n \geqslant 0) \;\; ; \;\; P_n = p_n = 0 \, (n < 0)$$

olsun. Bu durumda

$$t_n^p \left(s_n\right) = \frac{1}{P_n} \sum_{\nu=0}^{n} p_{n-\nu} s_\nu \tag{1.1}$$

eşitliği ile tanımlı $(t_n^p (s_n))$ dizisine (s_n) dizisinin Nörlund ortalaması denir ve (N,p) ile gösterilir. Buna göre (1.1) dönüşümüne karşılık gelen matris,

$$a_{n\nu} = \begin{cases} \dfrac{p_{n-\nu}}{P_n}, & \nu \leq n \;\; \text{için} \\ 0 \quad\quad , & \nu > n \;\; \text{için} \end{cases}$$

dır. Eğer

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left|t_n^p (s_n) - t_{n-1}^p (s_n)\right| < \infty$$

yani $(t_n^p (s_n))$ dizisi sınırlı salınımlı ise $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ serisine (veya (s_n) dizisine) mutlak (N,p) toplanabilir veya $|N,p|$ toplanabilir denir ve

$$(t_n^p (s_n)) \in BV \;\; , \;\; \sum a_n \in |N,p| \;\; , \;\; (s_n) \in |N,p|$$

sembollerinden biriyle ifade edilir.

Burada $\alpha \neq -1, -2, ...$ olmak üzere özel olarak $p_n = A_n^{\alpha-1}$ alınırsa (N, p) Nörlund ortalaması (C, α) ortalamasına ve $|N, p|$ mutlak toplanabilme metodu $|C, \alpha|$ metoduna indirgenir.

Eğer (s_n) dizisinin (N, q) dönüşümünün (N, p) dönüşümü sınırlı salınımlı bir dizi ise $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ serisine (veya (s_n) dizisine) $|(N, q)(N, p)|$ toplanabilir denir.

Herhangi bir (p_n) dizisi için biçimsel olarak;

$$p(x) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n x^n, P(x) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n x^n$$

yazalım. Bu durumda (c_n) dizisini

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} p_n x^n\right)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \ , \ c_{-1} = 0 \tag{1.2}$$

özdeşliğiyle tanımlayacağız.

Tanım 1.3 : $0 < \lambda_0 < \lambda_1 ...$ olsun. Bu durumda $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ serisinin (veya (s_n) dizisinin) Riesz ortalaması veya $(R, \lambda_{n-1}, 1)$ ortalaması,

$$R_n = \frac{1}{\lambda_n} \sum_{\nu=0}^{n} (\lambda_\nu - \lambda_{\nu-1}) s_\nu \ , \ (\lambda_{-1} = 0)$$

şeklinde tanımlanır. Bu dönüşüme karşılık gelen matris

$$a_{n\nu} = \begin{cases} \dfrac{\lambda_\nu - \lambda_{\nu-1}}{\lambda_n}, & \nu \leq n \\ 0 \quad , & \nu > n \end{cases}$$

dır. Eğer

$$\lim_{n\to\infty} R_n = s$$

ise $\sum a_n$ serisi s değerine $(R, \lambda_{n-1}, 1)$ toplanabilirdir denir.

Teorem 1.4 : $(R, \lambda_{n-1}, 1)$ Riesz ortalamasının regüler olması için gerek ve yeter şart $n \to \infty$ için $\lambda_n \to \infty$ olmasıdır **[4]**.

Tanım 1.5 : (R_n) tanım 1.3 deki Riesz dönüşümünü göstersin. Eğer

$$\sum_{n=0}^{\infty} |R_n - R_{n-1}| < \infty$$

ise $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ serisine veya (s_n) dizisine mutlak $(R,\lambda_{n-1},1)$ toplanabilir veya $|R,\lambda_{n-1},1|$ toplanabilir denir [**5**].

Tanım 1.6 : $A = (a_{nk})$ $(n,k = 0,1,2,...)$ kompleks veya reel terimli sonsuz bir matris ve X ile Y de bütün dizilerin oluşturduğu S uzayının iki alt uzayı olsun. $x = (x_k)$ X de herhangi bir dizi ve her $n \in N$ için

$$A_n(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_{nk} x_k \tag{1.3}$$

serisi yakınsak olmak üzere $(A_n(x))$ dizisi, Y kümesinin bir elemanı yani $(A_n(x)) \in Y$ ise $A = (a_{nk})$ matrisine X dizi uzayından Y dizi uzayına bir matris dönüşümü denir ve $A \in (X,Y)$ ile gösterilir [**2**].

X uzayındaki her bir diziyi aynı limite sahip olan Y uzayındaki bir diziye dönüştüren matrislerin sınıfını $(X,Y\ ;P)$ ile göstereceğiz. Bu durumda $(c,c\ ;P)$ sınıfının elemanlarına regüler matris, (BV,BV) ve $(BV,BV\ ;P)$ sınıfının elemanlarına ise sırasıyla mutlak konservatif ve mutlak regüler matris adı verilir.

Aşağıdaki Silverman-Toeplitz teoremi verilen bir A matrisinin regüler olması için gerek ve yeter şartları ifade eder.

Teorem 1.7 (Silverman-Toeplitz Teoremi) : $A = (a_{nk})$ reel veya kompleks terimli bir sonsuz matris olsun. Bu taktirde $A \in (c,c\ ;P)$ olması için gerek ve yeter şart

(**i**) Her k sabiti için $\lim\limits_{n\to\infty} a_{nk} = 0$

(**ii**) $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_{nk} = 1$

(**iii**) Her n için $\sum\limits_{k=0}^{\infty} |a_{nk}| \leq M$

olacak şekilde bir M sabitinin mevcut olmasıdır [**4**].

Teorem 1.8 : (N,p) Nörlund Ortalamasının regüler olması için gerek ve yeter şart

$$n \to \infty \text{ için } p_n = o(P_n) \tag{1.4}$$

ve

$$n \to \infty \text{ için } \sum_{\nu=0}^{n} |p_\nu| = O\left(P_n\right) \tag{1.5}$$

olmasıdır.

Bu teorem $A = (N, p)$ alınırsa Silverman-Toeplitz teoreminden elde edilir.

Teorem 1.9 : (N, p) Nörlund Ortalamasının mutlak regüler olması için gerek ve yeter şart

$$n \to \infty \text{ için } p_n = o\left(P_n\right) \tag{1.4}$$

ve

$$\sum_{n=\nu}^{\infty} \left| \frac{P_{n-\nu}}{P_n} - \frac{P_{n-\nu-1}}{P_{n-1}} \right| = O\left(1\right) \tag{1.6}$$

olmasıdır.

Bu teorem Lemma 2.3 den kolayca elde edilir.

Tanım 1.10 : Sınırlı dizileri, sınırlı dizilere dönüştüren lineer dönüşümlere toplanabilme (veya limitleme) metodu denir [**4**].

Tanım 1.11 : P ve Q iki toplanabilme metodu olsun. Eğer P metodu ile toplanabilen her seri Q metodu ile de toplanabilir ise bu durumda P ye Q yu gerektiriyor denir ve $P \subseteq Q$ ile gösterilir. Aynı zamanda $P \subseteq Q$ ve $Q \subseteq P$ ise bu durumda iki metod eşdeğerdir denir ve $P \sim Q$ şeklinde yazılır [**4**].

Mutlak Nörlund metodu ile mutlak Abel metodu arasındaki ilişki aşağıdaki teoremde verilmiştir.

Tanım 1.12 : Eğer $f\left(w\right) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{-\frac{n}{w}}$ ve $f\left(w\right) \in BV\left(0, \infty\right)$ ise bu durumda $\sum a_n$ serisine mutlak Abel toplanabilir veya $|A|$ toplanabilir denir.

Teorem 1.13 : (N, p) Nörlund ortalaması ve A Abel metodu olsun. Eğer

(i) (N, p) regüler,

(ii) Her $n \geqslant 0$ için $P_n > 0$,

(iii) $|x| < 1$ için $p\left(x\right) \neq 0$

ise bu durumda

$$|N, p| \subseteq |A|$$

dır [**1**].

Dikkat edilmelidir ki bu teoremin ifadesinde (**iii**) hipotezi [**14**] de atılmıştır. Fakat bu durumda teorem doğru değildir. Çünkü

$$p_0 = 1 \ , \ p_1 = 2 \ , \ p_n = 0 \ \ (n \geqslant 1) \, , \ s_n = (-1)^n$$

alınırsa $t_n^p (s_n) = 0 \ (n \geqslant 1)$ olduğundan $(s_n) \in |N, p|$ olmasına karşın $|A|$ toplanabilir değildir.

Tanım 1.14 : V özel bir toplanabilme metodu olsun. Eğer bir dizinin $V-$toplanabilir olduğu bilindiğinde bu dizinin yakınsaklığını da gerektiren şarta *Tauber şartı* denir ve bu şartın doğruluğunu ortaya koyan teoreme ise *Tauber Teoremi* adı verilir [**4**].

Örneğin, $t_n = s_{2n}$ dönüşümü için $a_n = o\,(1)$ Tauber şartıdır.

2 TEMEL LEMMALAR

Bu bölümde Das[**1**]'a ait konunun anlaşılmasına yardımcı olan aynı zamanda önemli ispat teknikleri kazandıran 3. bölümde faydalanacağımız temel lemmalar ile ispatlarını vereceğiz. Öncelikle çok kullandığımız $\mathcal{M}$ kümesini ifade edelim.

$$\mathcal{M} = \left\{ (p_n) : n = 0, 1, 2, ... \text{ için } \ p_n > 0 \ , \ \frac{p_{n+1}}{p_n} \leq \frac{p_{n+2}}{p_{n+1}} \leq 1 \right\}$$

Herhangi bir (f_n) dizisi için

$$f_n^{(1)} = f_0 + f_1 + ... + f_n \ ; \ f_n^{(2)} = f_0^{(1)} + f_1^{(1)} + ... + f_n^{(1)}$$

yazacağız.

Tanım 2.1 : $A = (a_{nk})$ matrisinin esas köşegen üstünde kalan elemanları "0", altında kalan elemanlarından en az biri "0"dan farklı ise, bu matrise alt üçgensel matris denir. Yani

$$A = (a_{nk}) = \begin{cases} \exists a_{nk} \neq 0 & , \qquad n > k \\ \forall a_{nk} = 0 & , \qquad n < k \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan matrise alt üçgensel matris denir [**21**].

Lemma 2.2 : λ_n , $\lambda'_n \to \infty$ olsun. Bu taktirde $|R, \lambda_{n-1}, 1| \subseteq \left|R, \lambda'_{n-1}, 1\right|$ olması için gerek ve yeter şart

$$\frac{\lambda'_n - \lambda'_{n-1}}{\lambda'_n} = O\left(\frac{\lambda_n - \lambda_{n-1}}{\lambda_n}\right)$$

olmasıdır [**19**].

Lemma 2.3 : $H = (\alpha_{n\nu})$ kompleks veya reel sayıların üçgensel bir matrisi olsun. Bu taktirde H matrisinin dönüşümünün mutlak regüler olması için gerek ve yeter şart

(i) $n \to \infty$ için $\displaystyle\sum_{\nu=0}^{n} \alpha_{n\nu} \to 1$

(ii) $n \to \infty$ için $\alpha_{n\nu} \to 0$, (ν sabit)

(iii) Her ρ için $\displaystyle\sum_{n=\rho}^{\infty} \left| \sum_{\nu=\rho}^{n} (\alpha_{n\nu} - \alpha_{n-1,\nu}) \right| \leq K$

olacak şekilde bir K sabitinin mevcut olmasıdır.

Üstelik $H \in (BV, BV)$ olması için gerek ve yeter şart tek başına (**iii**) koşulunun sağlanmasıdır [**13**].

Lemma 2.4 : $(p_n) \in \mathcal{M}$ olsun. Bu durumda

$$\sum_{\rho=0}^{r} P_\rho \sum_{n=r+1}^{\infty} |c_{n-\rho}| \leq r+1$$

dir.

İspat: $(p_n) \in \mathcal{M}$ olsun. Bu durumda bilinir ki

$$c_0 > 0 \ , \ c_n \leq 0 \ \ (n = 1, 2, ...) \ \text{için}$$
$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n \geqslant 0 \tag{2.1}$$

dır [**10**]**.** Buna göre (2.1) den

$$\begin{aligned} \sum_{n=\nu+1}^{\infty} |c_n| &= \sum_{n=\nu+1}^{\infty} \left| c_n^{(1)} - c_{n-1}^{(1)} \right| \qquad (2.2) \\ &= \sum_{n=\nu+1}^{\infty} \left(-c_n^{(1)} + c_{n-1}^{(1)} \right) \\ &= \lim_{m\to\infty} \sum_{n=\nu+1}^{m} \left(-c_n^{(1)} + c_{n-1}^{(1)} \right) \\ &\leq c_\nu^{(1)} - \lim_{m\to\infty} c_m^{(1)} \\ &\leq c_\nu^{(1)} \end{aligned}$$

elde edilir. Öte yandan (1.2) göz önüne alınırsa

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

ve

$$\frac{1}{p(x)} = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$$

olduğuna göre $|x| < 1$ için

$$\begin{aligned}
\frac{p(x)}{1-x} &= \left(\sum_{n=0}^{\infty} x^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} p_n x^n\right) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{\nu=0}^{n} x^{\nu} p_{n-\nu} x^{n-\nu} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{\nu=0}^{n} p_{n-\nu}\right) x^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} P_n x^n \\
&= P(x)
\end{aligned}$$

ve dolayısıyla

$$\frac{p(x)}{1-x} = P(x)$$

bulunur. Benzer olarak

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n &= \frac{1}{(1-x)^2} \\
&= \frac{p(x)}{(1-x)^2 p(x)} \\
&= \left(\frac{p(x)}{1-x}\right)\left(\frac{1}{(1-x)p(x)}\right) \\
&= P(x)\left(\frac{1}{(1-x)p(x)}\right) \\
&= \left(\sum_{n=0}^{\infty} P_n x^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} x^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n\right) \\
&= \left(\sum_{n=0}^{\infty} P_n x^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{\nu=0}^{n} c_{n-\nu} x^{n-\nu} x^{\nu}\right) \\
&= \left(\sum_{n=0}^{\infty} P_n x^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{\nu=0}^{n} c_{n-\nu} x^{n}\right) \\
&= \left(\sum_{n=0}^{\infty} P_n x^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} x^n c_n^{(1)}\right) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{\nu=0}^{n} P_{\nu} c_{n-\nu}^{(1)} x^n
\end{aligned}$$

olduğundan

$$\sum_{\nu=0}^{n} P_{\nu} c_{n-\nu}^{(1)} = n+1 \tag{2.3}$$

olur. Şu halde (2.2) ve (2.3) den

$$\sum_{\rho=0}^{r} P_\rho \sum_{n=r+1}^{\infty} |c_{n-\rho}| \leq \sum_{\rho=0}^{r} P_\rho c_{n-\rho}^{(1)} = r+1$$

elde edilir.Bu ise lemmanın ispatını tamamlar.

Lemma 2.5 : $(p_n) \in \mathcal{M}$ olsun. Bu durumda
(**i**) Her n için $\left(c_n^{(1)}\right)$ dizisi monoton artmayandır ve $c_n^{(1)} \geqslant 0$
$(\mathbf{ii})_a$ $P_n c_n^{(1)} \leq 1$, $(\mathbf{ii})_b$ $c_n^{(2)} p_n \leq 1$ dir.
(**iii**) $P_n c_n^{(2)} \leq 2n+1$ dir.

İspat : (**i**) : (2.1) den elde edilir.
$(\mathbf{ii})_a$: $(p_n) \in \mathcal{M}$ olduğundan ve $\sum_{n=0}^{\infty} p_n x^n$ kuvvet serisi $|x| < 1$ için mutlak yakınsak olduğundan, serilerin Cauchy çarpımından

$$\begin{aligned}
\frac{1}{1-x} &= \left(\frac{1}{(1-x)\,p(x)}\right) p(x) \\
&= \left(\sum_{n=0}^{\infty} x^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} p_n x^n\right) \\
&= \left(\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{\nu=0}^{n} x^{n-\nu} c_\nu x^\nu\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} p_n x^n\right) \\
&= \left(\sum_{n=0}^{\infty} x^n \sum_{\nu=0}^{n} c_\nu\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} p_n x^n\right) \\
&= \left(\sum_{n=0}^{\infty} x^n c_n^{(1)}\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} p_n x^n\right) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{\nu=0}^{n} x^{n-\nu} c_{n-\nu}^{(1)} p_\nu x^\nu \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{\nu=0}^{n} c_{n-\nu}^{(1)} p_v\right) x^n
\end{aligned}$$

ve dolayısıyla

$$\sum_{\nu=0}^{n} c_{n-\nu}^{(1)} p_\nu = 1 \tag{2.4}$$

elde edilir. Böylece (**i**) göz önüne alınırsa

$$\begin{aligned} c_n^{(1)} P_n &= c_n^{(1)} p_0 + c_n^{(1)} p_1 + ... + c_n^{(1)} p_n \\ &\leq c_n^{(1)} p_0 + c_{n-1}^{(1)} p_1 + ... + c_0^{(1)} p_n \\ &= \sum_{\nu=0}^{n} c_{n-\nu}^{(1)} p_\nu \\ &= 1 \end{aligned}$$

yani

$$c_n^{(1)} P_n \leq 1$$

elde edilir.

$(\mathbf{ii})_b$: (2.4) ifadesi ve (p_n) nin monoton artmayan dizi olduğu göz önüne alınırsa,

$$\begin{aligned} p_n c_n^{(2)} &= p_n \sum_{\nu=0}^{n} c_{n-\nu}^{(1)} \\ &\leq c_n^{(1)} p_0 + c_{n-1}^{(1)} p_1 + ... + c_0^{(1)} p_n \\ &= \sum_{\nu=0}^{n} c_{n-\nu}^{(1)} p_\nu \\ &= 1 \end{aligned}$$

yani

$$p_n c_n^{(2)} \leq 1$$

bulunur.

(**iii**) : $(\mathbf{ii})_a$, $(\mathbf{ii})_b$ ve (p_n) nin azalmayan özelliğini kullanırsak $n \geqslant 1$ için,

$$\begin{aligned} P_n c_n^{(2)} - P_{n-1} c_{n-1}^{(2)} &= (P_{n-1} + p_n) \left(c_{n-1}^{(2)} + c_n^{(1)} \right) - P_{n-1} c_{n-1}^{(2)} \\ &= P_{n-1} c_{n-1}^{(2)} + P_{n-1} c_n^{(1)} + p_n c_{n-1}^{(2)} + p_n c_n^{(1)} - P_{n-1} c_{n-1}^{(2)} \\ &= P_n c_n^{(1)} + c_{n-1}^{(2)} p_n \\ &\leq P_n c_n^{(1)} + c_{n-1}^{(2)} p_{n-1} \\ &\leq 2 \end{aligned}$$

bulunur ve buradan da

$$\sum_{\nu=1}^{n} \left(P_\nu c_\nu^{(2)} - P_{\nu-1} c_{\nu-1}^{(2)} \right) = \sum_{\nu=1}^{n} 2 = 2n$$

olur. Eşitliğin sol tarafının $P_n c_n^{(2)} - P_0 c_0^{(2)}$ ve $P_0 c_0^{(2)} = 1$ olduğu göz önüne alınırsa

$$P_n c_n^{(2)} \leq 2n + 1$$

elde edilir.

Lemma 2.6 : (p_n) terimleri negatif olmayan bir dizi olsun. Bu durumda

$$P_n^{(1)} \leq K \left\{ (n+1) P_n \right\} \tag{2.5}$$

olacak şekilde bir K sabiti vardır. Ayrıca, (p_n) artmayan bir dizi ise

$$(n+1) P_n \leq M P_n^{(1)} \tag{2.6}$$

koşulu sağlanır. Aynı zamanda

(i) $(n+1) p_n \leq P_n$

(ii) $P_n \sim P_{n-1}$ dir.

İspat : (P_n) dizisi artan olduğundan

$$\begin{aligned} P_n^{(1)} &= P_0 + P_1 + ... + P_n \\ &\leq P_n + P_n + ... + P_n \\ &= (n+1) P_n \end{aligned}$$

yani,

$$P_n^{(1)} \leq (n+1) P_n$$

bulunur. Şu halde (2.5) şartı sağlanır.

Şimdi (2.6) şartının sağlandığını gösterelim. $\left(\dfrac{P_n}{n+1} \right)$ dizisi monoton artmayan olduğundan,

$$\frac{P_0}{1} > \frac{P_1}{2} > ... > \frac{P_n}{n+1}$$

olup dolayısıyla

$$\begin{aligned} P_n^{(1)} &= P_0 + P_1 + ... + P_n \geqslant \frac{P_n}{n+1} + \frac{2P_n}{n+1} + ... + \frac{(n+1) P_n}{n+1} \\ &= (1 + 2 + ... + (n+1)) \frac{P_n}{n+1} \\ &= \frac{1}{2} (n+2) P_n \\ &> \frac{1}{2} (n+1) P_n \end{aligned}$$

olur. Bu da ispatı tamamlar.
(**i**) : (p_n) dizisi artmayan olduğundan

$$\begin{aligned} P_n &= p_0 + p_1 + ... + p_n \\ &\geqslant p_n + p_n + ... + p_n = (n+1)\, p_n \end{aligned}$$

dolayısıyla

$$(n+1)\, p_n \leq P_n$$

bulunur. Şu halde (**i**) ispatlanır.
(**ii**) : (**i**) den dolayı

$$\frac{p_n}{P_n} \leq \frac{1}{n+1} \to 0 \quad (n \to \infty)$$

yazılabilir. Buradan

$$\frac{P_n - P_{n-1}}{P_n} = 1 - \frac{P_{n-1}}{P_n} \to 0 \quad (n \to \infty)$$

yani

$$\frac{P_{n-1}}{P_n} \to 1 \quad (n \to \infty)$$

olur. Bu demektir ki

$$P_n \sim P_{n-1}$$

dir.

Lemma 2.7 : $(p_n) \in \mathcal{M}$ olsun. Bu taktirde

$$0 \leq \sum_{\rho=\mu}^{\nu} p_{n-\rho} c_{\rho-\mu} \leq p_{n-\mu} c_{\nu-\mu}^{(1)} \ , \quad (\mu \leq \nu \leq n) \tag{2.7}$$

$$0 \leq \sum_{\nu=\mu}^{n-1} (n-\nu)\, p_{n-\nu} c_{\nu-\mu} \leq 1 \tag{2.8}$$

$$0 \leq \frac{1}{n+1} \sum_{\nu=\mu}^{n-1} \left(\frac{n-\nu}{\nu+1} \right) p_{n-\nu} c_{\nu-\mu} \leq p_{n-\mu} \sum_{r=\mu}^{n-1} \frac{c_{\nu-\mu}^{(1)}}{(\nu+1)(\nu+2)} \tag{2.9}$$

dir.

İspat : (2.7) eşitsizliği Das[**7**] tarafından verildi.
(2.8) eşitsizliği (2.7), Lemma 2.5$(\mathbf{ii})_b$ ve

$$\sum_{\nu=\mu}^{n-1} (n-\nu)\, p_{n-\nu} c_{\nu-\mu} = \sum_{\nu=\mu}^{n-1} \sum_{\rho=\mu}^{\nu} p_{n-\rho} c_{\rho-\mu}$$

eşitliğinden elde edilir. Diğerine gelince Abel kısmi toplamasından

$$\begin{aligned}
\sum_{\nu=\mu}^{n-1} (n-\nu)\, p_{n-\nu} c_{\nu-\mu} &= \sum_{\nu=\mu}^{n-1} \sum_{\rho=\mu}^{\nu} p_{n-\rho} c_{\rho-\mu} \\
&\leq \sum_{\nu=\mu}^{n-1} p_{n-\mu} c_{\nu-\mu}^{(1)} \\
&\leq p_{n-\mu} c_{n-\mu}^{(2)} \\
&\leq 1
\end{aligned}$$

yazılabilir. Bu ise (2.8) eşitsizliğidir.
(2.9) eşitsizliği (2.7) den elde edilir. Gerçekten Abel kısmi toplamasından

$$\begin{aligned}
\sum_{r=\mu}^{n-1} \frac{1}{(r+1)(r+2)} \sum_{\nu=\mu}^{r} p_{n-\nu} c_{\nu-\mu} &= \sum_{\nu=\mu}^{n-1} p_{n-\nu} c_{\nu-\mu} \sum_{r=\nu}^{n-1} \left(\frac{1}{r+1} - \frac{1}{r+2} \right) \\
&= \frac{1}{n+1} \sum_{\nu=\mu}^{n-1} \left(\frac{n-\nu}{\nu+1} \right) p_{n-\nu} c_{\nu-\mu}
\end{aligned}$$

olduğu göz önüne alınırsa ve (2.7) eşitsizliğinden dolayı

$$\begin{aligned}
\frac{1}{n+1} \sum_{\nu=\mu}^{n-1} \left(\frac{n-\nu}{\nu+1} \right) p_{n-\nu} c_{\nu-\mu} &= \sum_{\nu=\mu}^{n-1} \frac{1}{(\nu+1)(\nu+2)} \sum_{r=\mu}^{\nu} p_{n-r} c_{r-\mu} \\
&\leq \sum_{\nu=\mu}^{n-1} \frac{1}{(\nu+1)(\nu+2)} p_{n-\mu} c_{\nu-\mu}^{(1)} \\
&= p_{n-\mu} \sum_{\nu=\mu}^{n-1} \frac{1}{(\nu+1)(\nu+2)} c_{\nu-\mu}^{(1)}
\end{aligned}$$

bulunur.

Lemma 2.8 : (p_n) negatif olmayan ve artmayan bir dizi olsun. Bu taktirde her $\kappa \leq \rho$ için

$$\varphi_\rho = \sum_{n=\rho+1}^{\infty} \frac{(n-\kappa)(p_{n-\kappa-1} - p_{n-\kappa})}{P_{n-1}^{(1)}} = O\left(\frac{1}{\rho+1} \right)$$

$$\psi_\rho = \sum_{n=\rho+1}^{\infty} \frac{(n-\kappa)(p_{n-\kappa-1} - p_{n-\kappa})}{n P_{n-1}} = O\left(\frac{1}{\rho+1} \right)$$

dir.

İspat : Lemma 2.6 den dolayı

$$\varphi_\rho = O\left(\frac{1}{\rho+1}\right) \text{ ise } \psi_\rho = O\left(\frac{1}{\rho+1}\right)$$

dır ve bunun tersi de doğrudur.Bu yüzden $\varphi_\rho = O\left(\frac{1}{\rho+1}\right)$ olduğunu göstermek yeterlidir. Kolayca görülebilir ki $\kappa \leq \rho$ için

$$\begin{aligned}
\beta_n &= \sum_{\mu=\rho+1}^{n} (\mu-\kappa)\left(p_{\mu-\kappa-1} - p_{\mu-\kappa}\right) \\
&\leq \sum_{\mu=\kappa+1}^{n} (\mu-\kappa)\left(p_{\mu-\kappa-1} - p_{\mu-\kappa}\right) \\
&= P_{n-\kappa} - (n+1-\kappa)\, p_{n-\kappa}
\end{aligned}$$

dir. Buradan $n > \kappa$ için

$$0 \leq \beta_n \leq P_{n-\kappa}$$

bulunur.

Şimdi Lemma 2.6 yı kullanarak $n \to \infty$ için ve her κ için

$$\begin{aligned}
\frac{\beta_n}{P_{n-1}^{(1)}} &\leq \frac{K P_{n-\kappa}}{(n+1)\, P_{n-1}} \\
&= O\left(\frac{P_{n-\kappa}}{(n+1)\, P_{n-1}}\right) \\
&= O(1)
\end{aligned}$$

elde ederiz. Böylece

$$\begin{aligned}
\sum_{n=\rho+1}^{\infty} \frac{(n-\kappa)\left(p_{n-\kappa-1} - p_{n-\kappa}\right)}{P_{n-1}^{(1)}} &= \lim_{m\to\infty} \sum_{n=\rho+1}^{m} \frac{(n-\kappa)\left(p_{n-\kappa-1} - p_{n-\kappa}\right)}{P_{n-1}^{(1)}} \\
= \lim_{m\to\infty} \sum_{n=\rho+1}^{m-1} &\left(\sum_{\mu=\rho+1}^{n} (\mu-\kappa)\left(p_{\mu-\kappa-1} - p_{\mu-\kappa}\right)\right)\left(\frac{1}{P_{n-1}^{(1)}} - \frac{1}{P_n^{(1)}}\right) \\
+ \lim_{m\to\infty} &\sum_{\mu=\rho+1}^{m} (\mu-\kappa)\left(p_{\mu-\kappa-1} - p_{\mu-\kappa}\right) \frac{1}{P_{m-1}^{(1)}} \\
= \lim_{m\to\infty} &\sum_{n=\rho+1}^{m} \sum_{\mu=\rho+1}^{n} (\mu-\kappa)\left(p_{\mu-\kappa-1} - p_{\mu-\kappa}\right) \frac{P_n}{P_{n-1}^{(1)} P_n^{(1)}} \\
= \lim_{m\to\infty} &\sum_{n=\rho+1}^{m} \frac{P_n \beta_n}{P_{n-1}^{(1)} P_n^{(1)}} \\
= O &\left(\lim_{m\to\infty} \sum_{n=\rho+1}^{m} \frac{1}{(n+1)^2}\right) \\
= O &\left(\frac{1}{\rho+1}\right)
\end{aligned}$$

Lemma 2.9 : (p_n) negatif olmayan ve artmayan bir dizi olsun. Bu durumda, $0 \leq \mu \leq \nu$, $(\nu \geqslant 1)$ için

$$\sum_{n=\nu}^{\infty} \frac{p_n p_{n-\mu}}{P_n P_{n-1}} \leq \sum_{n=\nu}^{\infty} \frac{p_{n-\nu}}{(n+1)\, P_{n-1}} = O\left(\frac{1}{\nu+1}\right)$$

dir.

İspat : Lemma 2.6(**i**) den eşitsizliğin birinci tarafı yani

$$\sum_{n=\nu}^{\infty} \frac{p_n p_{n-\mu}}{P_n P_{n-1}} \leq \sum_{n=\nu}^{\infty} \frac{p_{n-\nu}}{(n+1)\, P_{n-1}}$$

bulunur. Lemma 2.6(**ii**) ve (p_n) nin artmayan bir dizi olduğunu göz önüne alınırsa

$$\sum_{n=\nu}^{2\nu} \frac{p_{n-\nu}}{(n+1)\, P_{n-1}} = O(1) \frac{1}{(\nu+1)\, P_\nu} \sum_{n=\nu}^{2\nu} p_{n-\nu} = O\left(\frac{1}{\nu+1}\right)$$

ve

$$\begin{aligned}
\sum_{n=2\nu+1}^{\infty} \frac{p_{n-\nu}}{(n+1)\, P_{n-1}} &= O\left(\sum_{n=2\nu+1}^{\infty} \frac{p_{n-\nu}}{(n+1)\, P_{n-\nu-1}}\right) \\
&= O\left(\sum_{n=2\nu+1}^{\infty} \frac{p_{n-\nu}}{(n+1)\, P_{n-\nu}}\right) \\
&= O\left(\sum_{n=2\nu+1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)\,(n-\nu+1)}\right) \\
&= O\left(\frac{1}{\nu+1}\right)
\end{aligned}$$

elde ederiz. Bu da ispatı tamamlar.

Lemma 2.10 : $(p_n) \in \mathcal{M}$ olsun. Bu durumda $\rho \geqslant 0$ için

$$P_\rho \sum_{v=\rho}^{\infty} \frac{c_{\nu-\rho}^{(1)}}{(\nu+1)^2} = O\left(\frac{1}{\rho+1}\right)$$

dır.

İspat : Lemma 2.5(**iii**) yi kullanarak

$$
\begin{aligned}
\sum_{v=\rho}^{2\rho} \frac{c_{\nu-\rho}^{(1)}}{(\nu+1)^2} &\leq \frac{1}{(\rho+1)^2} \sum_{v=\rho}^{2\rho} c_{\nu-\rho}^{(1)} \\
&= \frac{c_{\rho}^{(2)}}{(\rho+1)^2} \\
&= O\left(\frac{1}{(\rho+1)\, P_{\rho}}\right)
\end{aligned}
$$

ve Lemma 2.5$(\mathbf{ii})_a$ yı kullanarak

$$
\begin{aligned}
\sum_{v=2\rho+1}^{\infty} \frac{c_{\nu-\rho}^{(1)}}{(\nu+1)^2} &\leq \frac{1}{P_{\rho}} \sum_{v=2\rho+1}^{\infty} \frac{1}{(\nu+1)^2} \\
&= O\left(\frac{1}{(\rho+1)\, P_{\rho}}\right)
\end{aligned}
$$

elde ederiz. Bu ise ispatı tamamlar.

Lemma 2.11 : $(p_n) \in \mathcal{M}$ olsun. Bu durumda $\rho \geqslant 0$ için

$$
\sum_{n=\rho}^{\infty} \frac{p_{n-\rho} c_{n-\rho}^{(2)}}{(n+1)\, P_n} = O\left(\frac{1}{P_{\rho}}\right)
$$

dır.

İspat : $\left(c_n^{(2)}\right)$ monoton azalmayan bir dizi olduğundan ve Lemma 2.5(**iii**) den

$$
\begin{aligned}
\sum_{n=\rho}^{2\rho} \frac{p_{n-\rho} c_{n-\rho}^{(2)}}{(n+1)\, P_n} &\leq \frac{1}{(\rho+1)\, P_{\rho}} \sum_{n=\rho}^{2\rho} p_{n-\rho} c_{n-\rho}^{(2)} \\
&\leq \frac{c_{\rho}^{(1)}}{(\rho+1)\, P_{\rho}} \sum_{n=\rho}^{2\rho} p_{n-\rho} \\
&= \frac{c_{\rho}^{(1)}}{(\rho+1)} \\
&\leq \frac{2\rho+1}{(\rho+1)\, P_{\rho}}
\end{aligned}
$$

olduğundan

$$
\sum_{n=\rho}^{2\rho} \frac{p_{n-\rho} c_{n-\rho}^{(2)}}{(n+1)\, P_n} = O\left(\frac{1}{P_{\rho}}\right)
$$

elde edilir.

$$\begin{aligned}
\sum_{n=2\rho+1}^{\infty} \frac{p_{n-\rho} c_{n-\rho}^{(2)}}{(n+1) P_n} &= O(1) \sum_{n=2\rho+1}^{\infty} \frac{(2(n-\rho)+1) p_{n-\rho}}{(n+1) P_n P_{n-\rho}} \\
&= O(1) \sum_{n=2\rho+1}^{\infty} \frac{p_{n-\rho}}{P_n P_{n-\rho}} \\
&= O(1) \sum_{n=2\rho+1}^{\infty} \frac{p_{n-\rho}}{P_{n-\rho-1} P_{n-\rho}} \\
&= O(1) \sum_{n=2\rho+1}^{\infty} \left(\frac{1}{P_{n-\rho-1}} - \frac{1}{P_{n-\rho}} \right) \\
&= O\left(\frac{1}{P_\rho} \right)
\end{aligned}$$

bulunur.

Lemma 2.12 : (p_n) negatif olmayan ve artmayan bir dizi olsun. Bu durumda

$$\varphi_\mu = \sum_{n=\mu}^{\infty} \left(\frac{n+1-\mu}{n+1} \right) \left| \frac{p_{n-\mu}}{P_n} - \frac{p_{n-\mu-1}}{P_{n-1}} \right| = O\left(\frac{1}{\mu+1} \right)$$

dir.

İspat :

$$\begin{aligned}
\varphi_\mu &= \sum_{n=\mu}^{\infty} \left(\frac{n+1-\mu}{n+1} \right) \left| \frac{p_{n-\mu}}{P_n} - \frac{p_{n-\mu-1}}{P_{n-1}} \right| \\
&= \sum_{n=\mu}^{\infty} \left(\frac{n+1-\mu}{n+1} \right) \left| \frac{p_{n-\mu} - p_{n-\mu-1}}{P_n} - \frac{p_n p_{n-\mu-1}}{P_n P_{n-1}} \right| \\
&\leq \sum_{n=\mu}^{\infty} \left(\frac{n+1-\mu}{n+1} \right) \left| \frac{p_{n-\mu} - p_{n-\mu-1}}{P_n} \right| + \sum_{n=\mu}^{\infty} \left(\frac{n+1-\mu}{n+1} \right) \frac{p_n p_{n-\mu-1}}{P_n P_{n-1}} \\
&= \varphi_\mu^{(1)} + \varphi_\mu^{(2)}
\end{aligned}$$

yazalım. Şimdi Lemma 2.8 den ve $P_n^{(1)} \leq (n+1) P_n$ olduğunu göz önüne alırsak

$$
\begin{aligned}
\varphi_\mu^{(1)} &= \sum_{n=\mu}^{\infty}\left(\frac{n+1-\mu}{n+1}\right)\frac{|p_{n-\mu}-p_{n-\mu-1}|}{P_n} \\
&= \frac{p_0}{(\mu+1)\,P_\mu}+\sum_{n=\mu+1}^{\infty}\frac{(n+1-\mu)\,(p_{n-\mu-1}-p_{n-\mu})}{(n+1)\,P_n} \\
&\leq \frac{p_0}{(\mu+1)\,P_\mu}+\sum_{n=\mu+1}^{\infty}\frac{(n+1-\mu)\,(p_{n-\mu-1}-p_{n-\mu})}{P_{n-1}^{(1)}} \\
&= O\left(\frac{1}{\mu+1}\right)
\end{aligned}
$$

elde edilir. Lemma 2.7 den

$$
\begin{aligned}
\varphi_\mu^{(2)} &= \sum_{n=\mu}^{\infty}\left(\frac{n+1-\mu}{n+1}\right)\frac{p_n p_{n-\mu-1}}{P_n P_{n-1}} \\
&\leq \sum_{n=\mu}^{\infty}\frac{p_n p_{n-\mu-1}}{P_n P_{n-1}} \\
&= O\left(\frac{1}{\mu+1}\right)
\end{aligned}
$$

elde edilir ki bu da ispatı tamamlar.

Lemma 2.13 : (**i**) : (p_n) negatif olmayan bir dizi olsun. Bu durumda $r \to \infty$ için

$$
A_r = \sum_{n=1}^{r} P_n^{(1)} \int_r^{\infty} w^{-2} e^{-\frac{n}{w}} P\left(e^{-\frac{1}{w}}\right)^{-1} dw = O\,(1)
$$

dir.

(**ii**) : (p_n) negatif olmayan ve artmayan bir dizi olsun. Bu durumda $r \to \infty$ için

$$
B_r = \int_1^{r} w^{-2} P\left(e^{-\frac{1}{w}}\right)^{-1}\left(\sum_{n=r}^{\infty} P_n^{(1)} e^{-\frac{n}{w}}\right) dw = O\,(1)
$$

dir.

İspat : (**i**) : $w \geqslant r$ için

$$
\begin{aligned}
P\left(e^{-\frac{1}{w}}\right) &= \sum_{n=0}^{\infty} P_n e^{-\frac{n}{w}} \\
&\geqslant \sum_{n=0}^{r} P_n e^{-\frac{n}{w}} \\
&\geqslant e^{-1} \sum_{n=0}^{r} P_n \\
&\geqslant e^{-1} P_r^{(1)}
\end{aligned}
$$

dir, yani

$$
\left(P\left(e^{-\frac{1}{w}}\right)\right)^{-1} \leq \left(e^{-1} P_r^{(1)}\right)^{-1} = \frac{e}{P_r^{(1)}}
$$

elde edilir.

$$
P_n^{(1)} \leq (n+1) P_n \leq 2n P_n
$$

olduğunu göz önüne alırsak

$$
\begin{aligned}
A_r &\leq \frac{e}{P_r^{(1)}} \sum_{n=1}^{r} P_n^{(1)} \int_0^{\infty} w^{-2} e^{-\frac{n}{w}} dw \\
&\leq \frac{e}{P_r^{(1)}} \sum_{n=1}^{r} \frac{P_n^{(1)}}{n} \\
&\leq \frac{2e}{P_r^{(1)}} \sum_{n=1}^{r} P_n \\
&\leq 2e
\end{aligned}
$$

olur. Bu da (**i**) nin ispatını tamamlar.
(**ii**) : (**ii**) yi ispatlamak için önce lemmanın hipotezi altında $w \to \infty$ için

$$
P\left(e^{-\frac{1}{w}}\right)^{-1} P\left(e^{-\frac{1}{2w}}\right) = O(1) \tag{2.10}
$$

olduğunu gösterelim. $w \to \infty$ için $e^{-\frac{1}{2w}} \to 1$ olduğundan (2.10) ifadesi daha kolay olarak

$$
x \to -1^- \text{ için } P(x) = O\left(P\left(x^2\right)\right) \tag{2.11}
$$

şeklinde ifade edilebilir. Şimdi $0 < x < 1$ için

$$
p_{2n} x^{2n} + p_{2n+1} x^{2n+1} \leq p_n x^{2n} (1+x) \leq 2 p_n x^{2n}
$$

dir. Bu eşitsizliği taraf tarafa toplayarak

$$\sum_{n=0}^{\infty} p_n x^n \leq 2 \sum_{n=0}^{\infty} p_n x^{2n}$$

yani

$$p(x) \leq 2p\left(x^2\right)$$

elde edilir. Böylece

$$\begin{aligned} P(x) &= \frac{p(x)}{1-x} = \frac{(1+x)\,p(x)}{1-x^2} \\ &\leq \frac{2p(x)}{1-x^2} \\ &\leq \frac{4p\left(x^2\right)}{1-x^2} \\ &= 4P\left(x^2\right) \end{aligned}$$

Bu da (2.11) i ispatlar, dolayısıyla (2.10) nu ispatlar. Şimdi (2.10) nu kullanarak

$$\begin{aligned} B_r &= \int_1^r w^{-1} P\left(e^{-\frac{1}{w}}\right)^{-1} e^{-\frac{r}{2w}} \sum_{n=r}^{\infty} P_n^{(1)} e^{-\frac{n}{2w}} dw \\ &= O\left(\int_1^r w^{-2}\left(1-e^{-\frac{1}{2w}}\right)^{-1} e^{-\frac{n}{2w}} dw\right) \\ &= O\left(r \int_1^r w^{-2} e^{-\frac{r}{2w}} dw\right) \\ &= O(1) \end{aligned}$$

bulunur. Bu da Lemma 2.13 ün ispatını tamamlar.

Lemma 2.14 : (λ_n) herhangi bir dizi ve $(s_n) \in |R, \lambda_{n-1}, 1|$ olsun. Bu durumda $(s_n) \in |C, 0|$ olması için gerek ve yeter şart

$$T_5 : \left(\frac{\lambda_{n-1} a_n}{\lambda_n - \lambda_{n-1}}\right) \in |R, \lambda_{n-1}, 1|$$

olmasıdır.

İspat : Diyelim ki

$$y_n = \frac{1}{\lambda_n} \sum_{\nu=0}^{n} (\lambda_\nu - \lambda_{\nu-1}) \left(\frac{\lambda_{n-1} a_n}{\lambda_n - \lambda_{n-1}}\right) \;,\; \lambda_{-1} = 0$$

olsun. Bu taktirde

$$\begin{aligned} s_n - R_n &= s_n - \frac{1}{\lambda_n}\sum_{\nu=0}^{n}(\lambda_\nu - \lambda_{\nu-1})\, a_\nu \\ &= \frac{1}{\lambda_n}\sum_{\nu=0}^{n}\lambda_{\nu-1}a_\nu \\ &= \frac{1}{\lambda_n}\sum_{\nu=0}^{n}(\lambda_\nu - \lambda_{\nu-1})\left(\frac{\lambda_{n-1}a_n}{\lambda_n - \lambda_{n-1}}\right) \\ &= y_n \end{aligned}$$

bulunur. Buradan da $(s_n) \in |R, \lambda_{n-1}, 1|$ yani $(R_n) \in BV$ verildiğine göre BV nin lineer uzay olduğu göz önüne alınırsa elde edilen son eşitlikten dolayı

$$(s_n) \in BV \Leftrightarrow (y_n) \in BV$$

dir. Ayrıca

$$(y_n) \in BV \Leftrightarrow \left(\frac{\lambda_{n-1}a_n}{\lambda_n - \lambda_{n-1}}\right) \in |R, \lambda_{n-1}, 1|$$

olduğuna göre

$$(s_n) \in |C, 0| \Leftrightarrow (T_5)$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanır.

Lemma 2.15 : $(\lambda_n)\,,\,(b_n)\,,\,(d_n)$ herhangi üç dizi olsun. Eğer $(b_n) \in |R, \lambda_{n-1}, 1|$ ve $(d_n) \in BV$ ise bu durumda $(b_n d_n) \in |R, \lambda_{n-1}, 1|$ dir.

İspat :

$$x_n = \frac{1}{\lambda_n}\sum_{\nu=0}^{n}(\lambda_\nu - \lambda_{\nu-1})\, b_\nu$$

diyelim. Bu durumda Abel kısmi toplaması nedeniyle

$$\begin{aligned} \frac{1}{\lambda_n}\sum_{\nu=0}^{n}(\lambda_\nu - \lambda_{\nu-1})\, b_\nu d_\nu &= \frac{1}{\lambda_n}\left\{\sum_{\nu=0}^{n-1}\sum_{i=0}^{\nu}(\lambda_i - \lambda_{i-1})\, b_i \Delta d_\nu + \sum_{i=0}^{n}(\lambda_i - \lambda_{i-1})\, b_i d_n\right\} \\ &= \frac{1}{\lambda_n}\left\{\sum_{\nu=0}^{n-1}\Delta d_\nu \lambda_\nu x_\nu + d_n \lambda_n x_n\right\} \\ &= \frac{1}{\lambda_n}\sum_{\nu=0}^{n}\Delta d_\nu \lambda_\nu x_\nu + d_{n+1}x_n \end{aligned}$$

bulunur. Fakat $(d_{n+1}) \in BV$ ve $(x_n) \in BV$ olduğu için

$$\left(\frac{1}{\lambda_n}\sum_{\nu=0}^{n}\Delta d_\nu \lambda_\nu x_\nu\right) \in BV \tag{2.12}$$

olduğunu ispatlamak yeterlidir. Dikkat edelim ki (2.12) dönüşümüne karşılık gelen matris

$$\alpha_{n\nu} = \begin{cases} \dfrac{(\Delta d_\nu)\,\lambda_\nu}{\lambda_n} & , \quad (\nu \leq n) \\ 0 & , \quad (\nu > n) \end{cases}$$

dır. Böylece Lemma 2.3 den dolayı (2.12) nin sağlanması için gerek ve yeter şart her ρ için

$$J_\rho = \sum_{n=\rho}^{\infty}\left|\Delta d_n + \sum_{\nu=\rho}^{n-1}\lambda_\nu \Delta d_\nu\left(\frac{1}{\lambda_n} - \frac{1}{\lambda_{n-1}}\right)\right| = O\,(1)$$

olmasıdır. Şimdi gerekli işlemler yapılırsa her ρ için

$$\begin{aligned} J_\rho &= \sum_{n=\rho}^{\infty}|\Delta d_n| + \sum_{\nu=\rho}^{\infty}|\Delta d_\nu|\,\lambda_\nu \sum_{n=\nu+1}^{\infty}\left(\frac{1}{\lambda_n} - \frac{1}{\lambda_{n-1}}\right) \\ &\leq 2\sum_{n=0}^{\infty}|\Delta d_n| \\ &= O\,(1) \end{aligned}$$

elde edilir. Bu ise ispatı tamamlar.

3 TAUBERIAN TEOREMLERİ

Bu bölümde Das[**1**]'a ait olan $|N, p|$ mutlak Nörlund ve $|R, \exp(n-1)^{\alpha}, 1|$ mutlak Riesz toplanabilme metotlarıyla ilgili Tauberian teoremlerinin yanısıra $|N, p|$, $|N, P|$, $|(C,1)(N,p)|$ ve $|R, \exp(n-1)^{\alpha}, 1|$ metotlarının kapsama ilişkileri verilmiştir.

Aşağıdaki iki teorem iki metot arasındaki ilişkiyi vermektedir.

Teorem 3.1 : Her n için $P_n > 0$ ve $P_n^{(1)} \to \infty$ olsun. Bu durumda $|(C,1)(N,p)| \subseteq |N, P|$ olması için gerek ve yeter şart (2.6) şartının sağlanmasıdır. Bazı durumlar için bu kapsama kesindir, yani $(x_n) \in |N, P|$ ve $(x_n) \notin |(C,1)(N,p)|$ olacak şekilde bir (N, p) Nörlund ortalaması ve (x_n) dizisi vardır.

Teorem 3.2 : Her n için $P_n > 0$ ve $P_n^{(1)} \to \infty$ olsun. Bu durumda $|N, P| \subseteq |(C,1)(N,p)|$ olması için gerek ve yeter şart (2.5) şartının sağlanmasıdır. Bazı durumlar için bu kapsama kesindir, yani $(x_n) \in |(C,1)(N,p)|$ ve $(x_n) \notin |N, P|$ olacak şekilde regüler ve mutlak regüler bir (N, p) Nörlund ortalaması ve bir (x_n) dizisi vardır.

Bu iki teoremin ispatı benzer olduğundan kısa olması için Teorem 3.1 ve Teorem 3.2 nin ispatını birlikte vereceğiz.

İspat : Dikkat edelim ki

$$\begin{aligned}
t_n^P(s_n) &= \frac{1}{P_n^{(1)}} \sum_{\nu=0}^{n} s_\nu P_{n-\nu} \\
&= \frac{1}{P_n^{(1)}} \sum_{\nu=0}^{n} s_\nu \sum_{\mu=\nu}^{n} p_{n-\mu} \\
&= \frac{1}{P_n^{(1)}} \sum_{\mu=0}^{n} \frac{P_\mu}{P_\mu} \sum_{\nu=0}^{\mu} s_\nu p_{n-\nu} \\
&= \frac{1}{P_n^{(1)}} \sum_{\mu=0}^{n} P_\mu t_\mu^p(s_\mu)
\end{aligned}$$

ve (s_n) dizisinin (N, p) dönüşümünün $(C, 1)$ ortalaması

$$t_n^1\left(t_n^p\left(s_n\right)\right) \;=\frac{1}{n+1}\sum_{\nu=0}^{n} t_\nu^p\left(s_\nu\right)$$

dir. Şimdi Teorem 3.1 in ilk kısmını ispatlamak için, Lemma 2.2 de

$$\lambda_n = n+1 \text{ ve } \lambda'_n = P_n^{(1)}$$

alınırsa hipotezden

$$\frac{P_n}{P_n^{(1)}} = \frac{P_n^{(1)} - P_{n-1}^{(1)}}{P_n^{(1)}} = O\left(\frac{1}{n+1}\right)$$

elde edilir. Benzer olarak Teorem 3.2 nin ilk kısmını ispatlamak için Lemma 2.2 de

$$\lambda_n = P_n^{(1)} \text{ ve } \lambda'_n = n+1$$

koyarsak, hipotezden dolayı

$$\frac{1}{n+1} = O\left(\frac{P_n^{(1)} - P_{n-1}^{(1)}}{P_n^{(1)}}\right) = O\left(\frac{P_n}{P_n^{(1)}}\right)$$

sağlanır. Şu halde Lemma 2.2 den ispat tamamlanır. Bu teoremlerin ikinci kısımları için

$$P_n = \frac{2}{(n+1)\,(n+2)}$$

alınırsa

$$P_n^{(1)} = (n+1)\,P_n$$

bulunur. Bu durumda (2.6) şartı sağlanır fakat (2.5) şartı sağlanmaz. Dolayısıyla Teorem 3.2 den dolayı

$$|N,P| \nsubseteq |(C,1)\,(N,p)|$$

olur ki bu da Teorem 3.1 in ikinci kısmının ispatını tamamlar.
Benzer olarak

$$P_0 = p_0 = 1 \;,\; P_n = \frac{n^{\frac{1}{2}}}{(n+1)^{\frac{1}{2}}-1}P_{n-1} \quad (n \geqslant 1)$$

alınırsa

$$P_n^{(1)} = (n+1)^{\frac{1}{2}}\,P_n$$

bulunur. Bu durumda (2.6) şartı sağlanmaz. Dolayısıyla

$$|(C,1)\,(N,p)| \nsubseteq |N,P|$$

elde edilir ki bu da Teorem 3.2 nin ikinci kısmının ispatını tamamlar.

Teorem 3.3 : Eğer $(p_n) \in \mathcal{M}$ ise bu taktirde

$$|(N,p)\,(C,1)| \subseteq |N,P|$$

dir.

İspat : (s_n) dizisinin $(C,1)$ ortalamasına t_n ve $(N,p)\,(C,1)$ ortalamasına $t_n\,(p,1)$ dersek

$$t_n = \frac{1}{n+1}\sum_{\nu=0}^{n} s_\nu \text{ ve } t_n\,(p,1) = \frac{1}{P_n}\sum_{\nu=0}^{n} p_{n-\nu}t_\nu$$

olur. Abel kısmi toplaması nedeniyle

$$\begin{aligned}
t_n^P\,(s_n) &= \frac{1}{P_n^{(1)}}\sum_{\nu=0}^{n} P_{n-\nu}s_\nu \\
&= \frac{1}{P_n^{(1)}}\left\{\sum_{\nu=0}^{n-1}\Delta P_{n-\nu}\sum_{\mu=0}^{\nu} s_\mu + P_0\sum_{\mu=0}^{n} s_\mu\right\} \\
&= \frac{1}{P_n^{(1)}}\left\{\sum_{\nu=0}^{n-1} p_{n-\nu}\,(\nu+1)\,t_\nu + P_0\,(n+1)\,t_n\right\} \\
&= \frac{1}{P_n^{(1)}}\sum_{\nu=0}^{n}(\nu+1)\,p_{n-\nu}t_\nu \\
&= \frac{1}{P_n^{(1)}}\sum_{\nu=0}^{n}(\nu+1)\,p_{n-\nu}\sum_{\mu=0}^{\nu} c_{\nu-\mu}P_\mu t_\mu\,(p,1) \\
&= \frac{1}{P_n^{(1)}}\sum_{\mu=0}^{n}\left\{\sum_{\nu=\mu}^{n}(\nu+1)\,p_{n-\nu}c_{\nu-\mu}\right\}P_\mu t_\mu\,(p,1)
\end{aligned}$$

yazılabilir. Şu halde $\left(t_n^P\,(s_n)\right)$ dizisi

$$\alpha_{n\mu} = \begin{cases} \dfrac{P_\mu}{P_n^{(1)}}\displaystyle\sum_{\nu=\mu}^{n}(\nu+1)\,p_{n-\nu}c_{\nu-\mu} & (0 \le \mu \le n) \\ 0 & (\mu > n) \end{cases}$$

olmak üzere $(t_\mu\,(p,1))$ dizisinin $\alpha = (\alpha_{n\mu})$ matrisi ile yapılan dönüşüm dizisidir. Burada dikkat edelim ki

$$\sum_{v=\mu}^{n} p_{n-\nu} c_{v-\mu} = \begin{cases} 1\ , & (n=\mu) \\ 0\ , & (n>\mu) \end{cases} \tag{3.1}$$

dır. (3.1) ve $\alpha_{n\mu}$ nün tanımından $n > \mu$ için

$$\begin{aligned} \sum_{v=\mu}^{n} (\nu+1)\, p_{n-\nu} c_{v-\mu} &= \sum_{v=\mu}^{n-1} - \left(\sum_{i=\mu}^{\nu} p_{n-i} c_{i-\mu} \right) + (n+1) \sum_{i=\mu}^{n} p_{n-i} c_{i-\mu} \\ &= -\sum_{v=\mu}^{n-1} \left(\sum_{i=\mu}^{\nu} p_{n-i} c_{i-\mu} \right) + (n+1) \sum_{i=\mu}^{n} p_{n-i} c_{i-\mu} \\ &= -\sum_{v=\mu}^{n-1} \left(\sum_{i=\mu}^{\nu} p_{n-i} c_{i-\mu} \right) \\ &= -\sum_{v=\mu}^{n-1} (n-\nu)\, p_{n-\nu} c_{\nu-\mu} \end{aligned}$$

olduğundana göre

$$\alpha_{n\mu} = -\frac{P_\mu}{P_n^{(1)}} \sum_{v=\mu}^{n-1} (n-\nu)\, p_{n-\nu} c_{\nu-\mu} \tag{3.2}$$

yazılabilir ve $n > \mu + 1$ için

$$\alpha_{n-1,\mu} = -\frac{P_\mu}{P_{n-1}^{(1)}} \sum_{v=\mu}^{n-1} (n-\nu)\, p_{n-1-\nu} c_{\nu-\mu} \tag{3.3}$$

olur. Şimdi $n \to \infty$ için

$$P_n^{(1)} = P_0 + P_1 + ... + P_n > (n+1)\, P_0$$

eşitsizliğinden dolayı

$$P_n^{(1)} \to \infty$$

dır. Buradan (2.8) in ışığında her sabit μ ve $n \to \infty$ için

$$\alpha_{n\mu} = o\,(1)$$

dir.

$$|\alpha_{n\mu}| = \frac{P_\mu}{P_n^{(1)}} \sum_{v=\mu}^{n-1} (n-\nu)\, p_{n-\nu} c_{\nu-\mu} \le \frac{P_\mu}{P_n^{(1)}} \to 0$$

yani

$$\alpha_{n\mu} = o\,(1)$$

bulunur. Ayrıca

$$\sum_{\mu=0}^{n} \alpha_{n\mu} = 1 \tag{3.4}$$

olduğu kolayca görülür. Böylece Lemma 2.3 den her ρ için

$$J_\rho = \sum_{n=\rho}^{\infty} \left| \sum_{\nu=\rho}^{n} (\alpha_{n\nu} - \alpha_{n-1,\nu}) \right| = O(1)$$

olduğunu ispatlamak yeterlidir. Şimdi (3.4), (3.2) ve (3.3) den dolayı $n > \rho$ için

$$\begin{aligned}
\sum_{\mu=\rho}^{n} (\alpha_{n\mu} - \alpha_{n-1,\mu}) &= \sum_{\mu=0}^{n} (\alpha_{n\mu} - \alpha_{n-1,\mu}) - \sum_{\mu=0}^{\rho-1} (\alpha_{n\mu} - \alpha_{n-1,\mu}) \\
&= -\sum_{\mu=0}^{\rho-1} (\alpha_{n\mu} - \alpha_{n-1,\mu}) \\
&= \sum_{\mu=0}^{\rho-1} (\alpha_{n-1,\mu} - \alpha_{n\mu}) \\
&= \sum_{\mu=0}^{\rho-1} \left(-\frac{P_\mu}{P_{n-1}^{(1)}} \sum_{v=\mu}^{n-1} (n-\nu)\, p_{n-1-\nu} c_{\nu-\mu} + \frac{P_\mu}{P_n^{(1)}} \sum_{v=\mu}^{n-1} (n-\nu)\, p_{n-\nu} c_{\nu-\mu} \right) \\
&= \sum_{\mu=0}^{\rho-1} P_\mu \sum_{v=\mu}^{n-1} (n-\nu) \left(\frac{p_{n-\nu}}{P_n^{(1)}} - \frac{p_{n-\nu-1}}{P_{n-1}^{(1)}} \right) c_{\nu-\mu}
\end{aligned}$$

yazabiliriz. Öte yandan

$$\begin{aligned}
\frac{p_{n-\nu}}{P_n^{(1)}} - \frac{p_{n-\nu-1}}{P_{n-1}^{(1)}} &= \frac{p_{n-\nu} P_{n-1}^{(1)}}{P_n^{(1)} P_{n-1}^{(1)}} - \frac{p_{n-\nu-1} P_n^{(1)}}{P_n^{(1)} P_{n-1}^{(1)}} \\
&= \frac{p_{n-\nu} \left(P_n^{(1)} - P_n \right)}{P_n^{(1)} P_{n-1}^{(1)}} - \frac{p_{n-\nu-1} P_n^{(1)}}{P_n^{(1)} P_{n-1}^{(1)}} \\
&= \frac{(p_{n-\nu} - p_{n-\nu-1})}{P_{n-1}^{(1)}} - \frac{p_{n-\nu} P_n}{P_n^{(1)} P_{n-1}^{(1)}}
\end{aligned}$$

olduğu göz önüne alınır ve eşitlik J_ρ da yerine yazılırsa

$$
\begin{aligned}
J_{\rho} &= \left|\alpha_{\rho\rho}\right| + \sum_{n=\rho+1}^{\infty} \left| \sum_{\mu=0}^{\rho-1} \left(\alpha_{n-1,\mu} - \alpha_{n,\mu}\right) \right| \\
&= \left|\alpha_{\rho\rho}\right| + \sum_{n=\rho+1}^{\infty} \left| \sum_{\mu=0}^{\rho-1} P_{\mu} \sum_{v=\mu}^{n-1} (n-\nu) \left(\frac{p_{n-\nu}}{P_{n}^{(1)}} - \frac{p_{n-\nu-1}}{P_{n-1}^{(1)}} \right) c_{\nu-\mu} \right| \\
&\leq \left|\alpha_{\rho\rho}\right| + \sum_{n=\rho+1}^{\infty} \frac{1}{P_{n-1}^{(1)}} \left| \sum_{\mu=0}^{\rho-1} P_{\mu} \sum_{v=\mu}^{n-1} (n-\nu) \left(p_{n-\nu-1} - p_{n-\nu}\right) c_{\nu-\mu} \right| \\
&\quad + \sum_{n=\rho+1}^{\infty} \frac{P_{n}}{P_{n}^{(1)} P_{n-1}^{(1)}} \left| \sum_{\mu=0}^{\rho-1} P_{\mu} \sum_{v=\mu}^{n-1} (n-\nu)\, p_{n-\nu} c_{\nu-\mu} \right| \\
&= J_{\rho}^{(1)} + J_{\rho}^{(2)} + J_{\rho}^{(3)}
\end{aligned}
$$

elde edilir. Lemma 2.6 dan

$$
J_{\rho}^{(1)} = \left|\alpha_{\rho\rho}\right| = \frac{(\rho+1)\, P_{\rho}}{P_{\rho}^{(1)}} = O(1)
$$

ve Lemma 2.7 nin ((2.8) eşitsizliğinden)

$$
\begin{aligned}
J_{\rho}^{(3)} &\leq K \sum_{\mu=0}^{\rho-1} P_{\mu} \sum_{n=\rho+1}^{\infty} \left(\frac{P_{n}^{(1)} - P_{n-1}^{(1)}}{P_{n}^{(1)} P_{n-1}^{(1)}} \right) \\
&= K \sum_{\mu=0}^{\rho-1} P_{\mu} \sum_{n=\rho+1}^{\infty} \left(\frac{1}{P_{n-1}^{(1)}} - \frac{1}{P_{n}^{(1)}} \right) \\
&= \frac{K}{P_{\rho}^{(1)}} \sum_{\mu=0}^{\rho-1} P_{\mu} \\
&= O(1)
\end{aligned}
$$

olduğu görülür. Şimdi $J_{\rho}^{(2)}$ toplamını $\nu = \mu$ den $\nu = \rho - 1$ e ve $\nu = \rho$ dan $\nu = n-1$ e şeklinde iki parçaya ayıralım: Bu durumda

$$
J_{\rho_1}^{(2)} = \sum_{n=\rho+1}^{\infty} \frac{1}{P_{n-1}^{(1)}} \left| \sum_{\mu=0}^{\rho-1} P_{\mu} \sum_{v=\mu}^{\rho-1} (n-\nu) \left(p_{n-\nu-1} - p_{n-\nu}\right) c_{\nu-\mu} \right|
$$

ve

$$
J_{\rho_2}^{(2)} = \sum_{n=\rho+1}^{\infty} \frac{1}{P_{n-1}^{(1)}} \left| \sum_{\mu=0}^{\rho-1} P_{\mu} \sum_{v=\rho}^{n-1} (n-\nu) \left(p_{n-\nu-1} - p_{n-\nu}\right) c_{\nu-\mu} \right|
$$

olmak üzere

$$
J_{\rho}^{(2)} \leq J_{\rho_1}^{(2)} + J_{\rho_2}^{(2)}
$$

elde edilir. Bu arada

$$\sum_{\nu=0}^{n} c_{n-\nu} P_{\nu} = 1 \tag{3.5}$$

olduğunu dikkat edelim. Bu durumda (3.5) i kullanarak Lemma 2.8 den dolayı

$$\begin{aligned}
J_{\rho_1}^{(2)} &= \sum_{n=\rho+1}^{\infty} \frac{1}{P_{n-1}^{(1)}} \left\{ \sum_{v=0}^{\rho-1} (n-\nu)(p_{n-\nu-1} - p_{n-\nu}) \sum_{\mu=0}^{\nu} P_{\mu} c_{\nu-\mu} \right\} \\
&= \sum_{n=\rho+1}^{\infty} \frac{1}{P_{n-1}^{(1)}} \sum_{v=0}^{\rho-1} (n-\nu)(p_{n-\nu-1} - p_{n-\nu}) \\
&= \sum_{v=0}^{\rho-1} \sum_{n=\rho+1}^{\infty} \frac{1}{P_{n-1}^{(1)}} (n-\nu)(p_{n-\nu-1} - p_{n-\nu}) \\
&= \sum_{v=0}^{\rho-1} O\left(\frac{1}{\rho+1}\right) \\
&= O(1)
\end{aligned}$$

olur. Aynı zamanda Lemma 2.8 ve Lemma 2.4 den

$$\begin{aligned}
J_{\rho_2}^{(2)} &\leq \sum_{\mu=0}^{\rho-1} P_{\mu} \sum_{v=\rho}^{\infty} |c_{\nu-\mu}| \sum_{n=\nu+1}^{\infty} \frac{(n-\nu)(p_{n-\nu-1} - p_{n-\nu})}{P_{n-1}^{(1)}} \\
&\leq K \sum_{\mu=0}^{\rho-1} P_{\mu} \sum_{v=\rho}^{\infty} \frac{|c_{\nu-\mu}|}{\nu+1} \\
&\leq \frac{K}{\rho+1} \sum_{\mu=0}^{\rho-1} P_{\mu} \sum_{v=\rho}^{\infty} |c_{\nu-\mu}| \\
&\leq K \frac{\rho}{\rho+1} \\
&= O(1)
\end{aligned}$$

olduğu görülür. Bu da ispatı tamamlar.

Teorem 3.4 : $(p_n) \in \mathcal{M}$ olsun. Bu durumda

$$|N, P| \subseteq |(N, p)(C, 1)|$$

dir.

İspatı : Teorem 3.3 de olduğu gibi (s_n) dizisinin $(N, p)(C, 1)$ ortalaması

$$\alpha_{n\mu} = \begin{cases} \dfrac{P_{\mu}^{(1)}}{P_n} \displaystyle\sum_{\nu=\mu}^{n} \frac{p_{n-\nu} c_{\nu-\mu}}{\nu+1} & (\mu \leq n) \\ 0 & (\mu > n) \end{cases} \tag{3.6}$$

olmak üzere $\alpha = (\alpha_{n\mu})$ matrisinin (N,P) Nörlund ortalamasıdır.(2.3) den

$$\begin{aligned}\sum_{\mu=0}^{n}\alpha_{n\mu} &= \sum_{\mu=0}^{n}\frac{P_{\mu}^{(1)}}{P_n}\sum_{\nu=\mu}^{n}\frac{p_{n-\nu}c_{\nu-\mu}}{\nu+1}\\ &= \frac{1}{P_n}\sum_{\nu=0}^{n}\frac{p_{n-\nu}}{(\nu+1)}\sum_{\mu=0}^{\nu}P_{\mu}^{(1)}c_{\nu-\mu}\\ &= \frac{1}{P_n}\sum_{\nu=0}^{n}\frac{p_{n-\nu}(\nu+1)}{(\nu+1)}\\ &= 1\end{aligned}$$

dir. Şimdi Abel kısmi toplama formülünden

$$\begin{aligned}\sum_{\nu=\mu}^{n}\frac{p_{n-\nu}c_{\nu-\mu}}{\nu+1} &= \sum_{\nu=\mu}^{n-1}\left(\sum_{\rho=\mu}^{\nu}p_{n-\rho}c_{\rho-\mu}\right)\left(\frac{1}{\nu+1}-\frac{1}{\nu+2}\right)\\ &+\left(\sum_{\rho=\mu}^{n}p_{n-\rho}c_{\rho-\mu}\right)\frac{1}{n+1}\\ &= \sum_{\nu=\mu}^{n-1}\frac{1}{(\nu+1)(\nu+2)}\sum_{\rho=\mu}^{\nu}p_{n-\rho}c_{\rho-\mu}+\frac{1}{n+1}\sum_{\rho=\mu}^{n}p_{n-\rho}c_{\rho-\mu}\end{aligned} \tag{3.7}$$

yazılabilir. Lemma 2.7 ((2.7) eşitsizliği) ve (3.7) den dolayı her n ve μ için $\alpha_{n\mu} \geqslant 0$ olur.
(2.1) den ise

$$\begin{aligned}0 &\le \alpha_{n\mu} = \frac{P_{\mu}^{(1)}}{P_n}\sum_{\nu=\mu}^{n}\frac{p_{n-\nu}c_{\nu-\mu}}{\nu+1}\\ &\le \frac{P_{\mu}^{(1)}}{P_n(\mu+1)}\sum_{\nu=\mu}^{n}p_{n-\nu}c_{\nu-\mu}\\ &\le \frac{P_{\mu}^{(1)}}{P_n(\mu+1)}p_{n-\mu}c_0\end{aligned}$$

yazılabilir. Şimdi $(p_n) \in \mathcal{M}$ olduğundan monoton azalan olduğu göz önüne alınırsa $\frac{p_n}{P_n} \le \frac{1}{n}$ bulunur. Dolayısıyla her sabit μ ve $n \to \infty$ için

$$\alpha_{n\mu} = o(1)$$

olur. Son olarak

$$J_\rho = \sum_{n=\rho}^{\infty}\left|\sum_{\mu=\rho}^{n}(\alpha_{n\mu}-\alpha_{n-1,\mu})\right| = O(1)$$

olduğunu gösterelim. $\alpha_{n\mu}$ tanımı ve (3.1) nedeniyle $n > \mu$ için

$$\begin{aligned}
\alpha_{n\mu} &= \frac{P_{\mu}^{(1)}}{P_n} \sum_{\nu=\mu}^{n} p_{n-\nu} c_{\nu-\mu} \left(\frac{1}{\nu+1} - \frac{1}{n+1} \right) \\
&= \frac{P_{\mu}^{(1)}}{(n+1)\, P_n} \sum_{\nu=\mu}^{n-1} \left(\frac{n-\nu}{\nu+1} \right) p_{n-\nu} c_{\nu-\mu}
\end{aligned}$$

ve $n > \mu + 1$ için

$$\alpha_{n-1,\mu} = \frac{P_{\mu}^{(1)}}{(n+1)\, P_{n-1}} \sum_{\nu=\mu}^{n-1} p_{n-1-\nu} c_{\nu-\mu} \left(\frac{n-\nu}{\nu+1} \right)$$

dir. Böylece $n > \rho$ için

$$\begin{aligned}
\sum_{\mu=\rho}^{n} (\alpha_{n\mu} - \alpha_{n-1,\mu}) &= \sum_{\mu=0}^{\rho-1} (\alpha_{n-1,\mu} - \alpha_{n\mu}) \\
&= \sum_{\mu=0}^{\rho-1} P_{\mu}^{(1)} \sum_{\nu=\mu}^{n-1} \frac{n-\nu}{(n+1)\,(\nu+1)} \left(\frac{p_{n-\nu-1}}{P_{n-1}} - \frac{p_{n-\nu}}{P_n} \right) c_{\nu-\mu}
\end{aligned}$$

olur. Ayrıca

$$\begin{aligned}
\frac{p_{n-\nu-1}}{P_{n-1}} - \frac{p_{n-\nu}}{P_n} &= \frac{P_n p_{n-\nu-1}}{P_n P_{n-1}} - \frac{P_{n-1} p_{n-\nu}}{P_{n-1} P_n} \\
&= \frac{P_n p_{n-\nu-1}}{P_n P_{n-1}} - \frac{(P_n - p_n)\, p_{n-\nu}}{P_{n-1} P_n} \\
&= \frac{p_{n-\nu-1} - p_{n-\nu}}{P_{n-1}} + \frac{p_n p_{n-\nu}}{P_{n-1} P_n}
\end{aligned}$$

olduğunu göz önüne alırsak

$$\begin{aligned}
J_\rho &= |\alpha_{\rho\rho}| + \sum_{n=\rho+1}^{\infty} \left| \sum_{\mu=0}^{\rho-1} (\alpha_{n-1,\mu} - \alpha_{n,\mu}) \right| \\
&= |\alpha_{\rho\rho}| + \sum_{n=\rho+1}^{\infty} \left| \sum_{\mu=0}^{\rho-1} P_{\mu}^{(1)} \sum_{v=\mu}^{n-1} \frac{n-\nu}{(n+1)\,(\nu+1)} \left(\frac{p_{n-\nu-1}}{P_{n-1}} - \frac{p_{n-\nu}}{P_n} \right) c_{\nu-\mu} \right| \\
&= |\alpha_{\rho\rho}| + \sum_{n=\rho+1}^{\infty} \left| \sum_{\mu=0}^{\rho-1} P_{\mu}^{(1)} \sum_{v=\mu}^{n-1} \frac{n-\nu}{(n+1)\,(\nu+1)} \left(\frac{p_{n-\nu-1} - p_{n-\nu}}{P_{n-1}} + \frac{p_n p_{n-\nu}}{P_{n-1} P_n} \right) c_{\nu-\mu} \right| \\
&\leq |\alpha_{\rho\rho}| + \sum_{n=\rho+1}^{\infty} \frac{p_n}{(n+1)\, P_n P_{n-1}} \left| \sum_{\mu=0}^{\rho-1} P_{\mu}^{(1)} \sum_{v=\mu}^{n-1} p_{n-\nu} c_{\nu-\mu} \left(\frac{n-\nu}{\nu+1} \right) \right| \\
&\quad + \sum_{n=\rho+1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)\, P_{n-1}} \left| \sum_{\mu=0}^{\rho-1} P_{\mu}^{(1)} \sum_{v=\mu}^{n-1} \left(\frac{n-\nu}{\nu+1} \right) (p_{n-\nu-1} - p_{n-\nu})\, c_{\nu-\mu} \right| \\
&= J_{\rho}^{(1)} + J_{\rho}^{(2)} + J_{\rho}^{(3)}
\end{aligned}$$

yazılabilir. Şimdi

$$\begin{aligned} J_{\rho}^{(1)} &= |\alpha_{\rho\rho}| = \frac{P_{\rho}^{(1)}}{(\rho+1)\,P_{\rho}} \\ &\leq \frac{P_1+P_2+...+P_{\rho}}{(\rho+1)\,P_{\rho}} \\ &\leq \frac{(\rho+1)\,P_{\rho}}{(\rho+1)\,P_{\rho}} \\ &= O\,(1) \end{aligned}$$

olduğu açıktır. Lemma 2.7 nin (2.8) eşitsizliğinden ise

$$\begin{aligned} J_{\rho}^{(2)} &= \sum_{n=\rho+1}^{\infty} \frac{p_n}{(n+1)\,P_nP_{n-1}} \left| \sum_{\mu=0}^{\rho-1} P_{\mu}^{(1)} \sum_{v=\mu}^{n-1} p_{n-\nu} c_{\nu-\mu} \left(\frac{n-\nu}{\nu+1}\right) \right| \\ &= \sum_{n=\rho+1}^{\infty} \frac{p_n}{P_nP_{n-1}} \sum_{\mu=0}^{\rho-1} \frac{P_{\mu}^{(1)}}{n+1} \sum_{v=\mu}^{n-1} p_{n-\nu} c_{\nu-\mu} \left(\frac{n-\nu}{\nu+1}\right) \\ &\leq \sum_{\mu=0}^{\rho-1} P_{\mu}^{(1)} \sum_{n=\rho+1}^{\infty} \frac{p_np_{n-\mu}}{P_nP_{n-1}} \sum_{v=\mu}^{n-1} \frac{c_{\nu-\mu}^{(1)}}{(\nu+1)\,(\nu+2)} \\ &= J_{\rho_1}^{(2)} + J_{\rho_2}^{(2)} \end{aligned}$$

dır. Burada

$$J_{\rho_1}^{(2)} = \sum_{\mu=0}^{\rho-1} P_{\mu}^{(1)} \sum_{n=\rho+1}^{\infty} \frac{p_np_{n-\mu}}{P_nP_{n-1}} \sum_{v=\mu}^{\rho-1} \frac{c_{\nu-\mu}^{(1)}}{(\nu+1)\,(\nu+2)}$$

ve

$$J_{\rho_2}^{(2)} = \sum_{\mu=0}^{\rho-1} P_{\mu}^{(1)} \sum_{n=\rho+1}^{\infty} \frac{p_np_{n-\mu}}{P_nP_{n-1}} \sum_{v=\rho}^{n-1} \frac{c_{\nu-\mu}^{(1)}}{(\nu+1)\,(\nu+2)}$$

dir. Kolayca görülebilir ki

$$\sum_{\mu=0}^{\nu} P_{\mu}^{(1)} c_{\nu-\mu}^{(1)} = A_{\nu}^{2} = \frac{3.4...\,(\nu+2)}{\nu!} \tag{3.8}$$

dir. (3.8), (p_n) nin monotonluğunu ve Lemma 2.9 u kullanarak

$$\begin{aligned} J_{\rho_1}^{(2)} &\leq \sum_{n=\rho+1}^{\infty} \frac{p_np_{n-\rho}}{P_nP_{n-1}} \sum_{\nu=0}^{\rho-1} \frac{A_{\nu}^{(2)}}{(\nu+1)\,(\nu+2)} \\ &= O\,(\rho+1) \sum_{n=\rho+1}^{\infty} \frac{p_np_{n-\rho}}{P_nP_{n-1}} \\ &= O\,(1) \end{aligned}$$

elde ederiz.

İlk önce $J_{\rho_2}^{(2)}$ de toplamın sırasını değiştirelim ve sonra da Lemma 2.9 ve Lemma 2.8 i kullanırsak ve (3.8) tanımından,

$$\begin{aligned}
J_{\rho_2}^{(2)} &= \sum_{\mu=0}^{\rho-1} P_\mu^{(1)} \sum_{n=\rho+1}^{\infty} \frac{p_n p_{n-\mu}}{P_n P_{n-1}} \sum_{v=\rho}^{n-1} \frac{c_{\nu-\mu}^{(1)}}{(\nu+1)(\nu+2)} \\
&= \sum_{\mu=0}^{\rho-1} P_\mu^{(1)} \sum_{v=\rho}^{\infty} \frac{c_{\nu-\mu}^{(1)}}{(\nu+1)(\nu+2)} \sum_{n=\nu+1}^{\infty} \frac{p_n p_{n-\mu}}{P_n P_{n-1}} \\
&\leq K \sum_{\mu=0}^{\rho-1} P_\mu^{(1)} \sum_{v=\rho}^{\infty} \frac{c_{\nu-\mu}^{(1)}}{(\nu+1)^3} \\
&\leq K \sum_{\mu=0}^{\rho-1} P_\mu^{(1)} c_{\rho-\mu}^{(1)} \sum_{v=\rho}^{\infty} \frac{1}{(\nu+1)^3} \\
&\leq \frac{K}{(\rho+1)^2} \sum_{\mu=0}^{\rho} P_\mu^{(1)} c_{\rho-\mu}^{(1)} \\
&= O(1)
\end{aligned}$$

elde ederiz.

Bir sonraki adımda $J_\rho^{(3)}$ toplamını ele alalım. Önce bu toplamı

$$J_{\rho_1}^{(3)} = \sum_{n=\rho+1}^{\infty} \frac{1}{(n+1) P_{n-1}} \left| \sum_{\mu=0}^{\rho-1} P_\mu^{(1)} \sum_{v=\mu}^{\rho-1} \left(\frac{n-\nu}{\nu+1}\right) (p_{n-\nu-1} - p_{n-\nu}) c_{\nu-\mu} \right|$$

ve

$$J_{\rho_2}^{(3)} = \sum_{\mu=0}^{\rho-1} P_\mu^{(1)} \sum_{n=\rho+1}^{\infty} \frac{1}{(n+1) P_{n-1}} \left| \sum_{v=\rho}^{n-1} \left(\frac{n-\nu}{\nu+1}\right) (p_{n-\nu-1} - p_{n-\nu}) c_{\nu-\mu} \right|$$

olmak üzere iki parçaya ayıralım. Bu durumda

$$J_\rho^{(3)} \leq J_{\rho_1}^{(3)} + J_{\rho_2}^{(3)}$$

yazılabilir. Şimdi

$$\sum_{\nu=0}^{n} P_\nu^{(1)} c_{n-\nu} = n+1$$

eşitliğini kullanarak Lemma 2.8 nedeniyle

$$\begin{aligned}
J_{\rho_1}^{(3)} &= \sum_{n=\rho+1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)\,P_{n-1}} \left| \sum_{\mu=0}^{\rho-1} P_{\mu}^{(1)} \sum_{v=\mu}^{\rho-1} \left(\frac{n-\nu}{\nu+1} \right) (p_{n-\nu-1} - p_{n-\nu})\, c_{\nu-\mu} \right| \\
&= \sum_{n=\rho+1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)\,P_{n-1}} \left| \sum_{v=0}^{\rho-1} \left(\frac{n-\nu}{\nu+1} \right) (p_{n-\nu-1} - p_{n-\nu}) \sum_{\mu=0}^{\nu} P_{\mu}^{(1)} c_{\nu-\mu} \right| \\
&= \sum_{n=\rho+1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)\,P_{n-1}} \sum_{v=0}^{\rho-1} (n-\nu)\,(p_{n-\nu-1} - p_{n-\nu}) \\
&= \sum_{v=0}^{\rho-1} \sum_{n=\rho+1}^{\infty} \frac{(n-\nu)\,(p_{n-\nu-1} - p_{n-\nu})}{(n+1)\,P_{n-1}} \\
&= \sum_{v=0}^{\rho-1} O\left(\frac{1}{\rho+1} \right) \\
&= O\,(1)
\end{aligned}$$

bulunur. Nihayet Lemma 2.8 in 2. eşitsizliği ve Lemma 2.4 göz önüne alınırsa

$$\begin{aligned}
J_{\rho_2}^{(3)} &= \sum_{\mu=0}^{\rho-1} P_{\mu}^{(1)} \sum_{n=\rho+1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)\,P_{n-1}} \left| \sum_{v=\rho}^{n-1} \left(\frac{n-\nu}{\nu+1} \right) (p_{n-\nu-1} - p_{n-\nu})\, c_{\nu-\mu} \right| \\
&\leq \sum_{\mu=0}^{\rho-1} P_{\mu}^{(1)} \sum_{v=\rho}^{\infty} \frac{|c_{\nu-\mu}|}{\nu+1} \sum_{n=\nu+1}^{\infty} \frac{n-\nu}{(n+1)\,P_{n-1}} (p_{n-\nu-1} - p_{n-\nu}) \\
&\leq K \sum_{\mu=0}^{\rho-1} P_{\mu}^{(1)} \sum_{v=\rho}^{\infty} \frac{|c_{\nu-\mu}|}{(\nu+1)^2} \\
&\leq \frac{K}{\rho+1} \sum_{\mu=0}^{\rho-1} P_{\mu} \sum_{v=\rho}^{\infty} |c_{\nu-\mu}| \\
&= O\,(1)
\end{aligned}$$

elde edilir. Bu da teoremin ispatını tamamlar.

Teorem 3.5 : $(p_n) \in \mathcal{M}$ olsun. Bu taktirde

$$|(N,p)\,(C,1)| \sim |N,P| \sim |(C,1)\,(N,p)|$$

dir.

Bu noktada belirtmek isteriz ki bu beş teoremin adi anlamdaki toplanabilme teorisindeki benzeri Das[**8**] tarafından verilmiştir.

İspat : Lemma 2.6 yı göz önüne alıp Teorem 3.1, Teorem 3.2, Teorem 3.3 ve Teorem 3.4 birleştirilirse Teorem 3.5 elde edilir.

Teorem 3.6 : $(p_n) \in \mathcal{M}$ olsun. Bu taktirde

$$(t_n p\,(s_n)) \in BV \Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|t_n p\,(na_n)|}{n} < \infty$$

dir.
Dikkat edilmelidir ki mutlak Nörlund toplanabilme teorisi üzerinde çalıştığımızda bu teoremin Cesàro toplanabilme teorisinde Kogbetliantz'ın

$$\alpha > -1 \text{ için } n\left(\sigma_n^{\alpha} - \sigma_{n-1}^{\alpha}\right) = \tau_n^{\alpha}$$

formülünde olduğu gibi önemli avantajları vardır.

İspat : Önce

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|t_n^p\,(na_n)|}{n} < \infty \Rightarrow t_n^p\,(s_n) \in BV \tag{3.9}$$

olduğunu göstereceğiz. Bunun için

$$\Omega\,(n,\nu) = \frac{P_{n-\nu}}{P_n} - \frac{P_{n-\nu-1}}{P_{n-1}}$$

yazalım. Bu durumda $m \geqslant n+1$ için

$$\Omega\,(n,0) = 0\ ,\ \Omega\,(n,m) = 0$$

ve aynı zamanda (p_n) negatif olmayan ve artmayan bir dizi olduğundan

$$\Omega\,(n,\nu) \geqslant 0$$

dır. (N,p) Nörlund ortalamasının tersi alınırsa

$$\nu a_\nu = \sum_{\rho=1}^{\nu} c_{\nu-\rho} P_\rho t_\rho^p\,(\rho a_\rho)\ \ ,(t_0^p\,(\rho a_\rho) = 0)$$

olacağından

$$\begin{aligned}
t_n^p\,(s_n) - t_{n-1}^p\,(s_n) &= \sum_{\nu=1}^{n}\left(\frac{p_{n-\nu}}{P_n} - \frac{p_{n-\nu-1}}{P_{n-1}}\right) s_\nu \\
&= \sum_{\nu=1}^{n} \Omega\,(n,\nu)\, a_\nu \\
&= \sum_{\nu=1}^{n} \Omega\,(n,\nu) \sum_{\rho=1}^{\nu} \frac{c_{\nu-\rho}}{\nu} P_\rho t_\rho^p\,(\rho a_\rho) \\
&= \sum_{\rho=1}^{n} t_\rho^p\,(\rho a_\rho)\, P_\rho \sum_{\nu=\rho}^{n} \frac{\Omega\,(n,\nu)}{\nu} c_{\nu-\rho}
\end{aligned}$$

yazılabilir. Böylece (3.9) un sağlanması için gerek ve yeter şart her ρ için

$$J_\rho = \rho P_\rho \sum_{n=\rho}^{\infty} \left| \sum_{\nu=\rho}^{n} \frac{1}{\nu} \Omega(n,\nu) c_{\nu-\rho} \right| = O(1)$$

olmasıdır. Bu Lemma 2.3 ün (**iii**) koşulunun farklı bir formudur. Şimdi

$$\begin{aligned}
\sum_{\nu=\rho}^{n} \frac{1}{\nu} \Omega(n,\nu) c_{\nu-\rho} &= \sum_{\nu=\rho}^{n} \Delta_\nu \left(\frac{\Omega(n,\nu)}{\nu} \right) c_{\nu-\rho}^{(1)} \\
&= \sum_{\nu=\rho}^{n} \frac{1}{\nu(\nu+1)} \Omega(n,\nu) c_{\nu-\rho}^{(1)} + \sum_{\nu=\rho}^{n} \frac{1}{\nu+1} \Delta_\nu \Omega(n,\nu) c_{\nu-\rho}^{(1)}
\end{aligned}$$

yazalım. Bu durumda

$$J_\rho^{(1)} = \rho P_\rho \sum_{n=\rho}^{\infty} \left| \sum_{\nu=\rho}^{n} \frac{1}{\nu(\nu+1)} \Omega(n,\nu) c_{\nu-\rho}^{(1)} \right|$$

ve

$$J_\rho^{(2)} = \rho P_\rho \sum_{n=\rho}^{\infty} \left| \sum_{\nu=\rho}^{n} \frac{1}{\nu+1} \Delta_\nu \Omega(n,\nu) c_{\nu-\rho}^{(1)} \right|$$

olmak üzere

$$J_\rho \leq J_\rho^{(1)} + J_\rho^{(2)}$$

olur. Lemma 2.10 dan

$$\begin{aligned}
J_\rho^{(1)} &= \rho P_\rho \sum_{n=\rho}^{\infty} \left| \sum_{\nu=\rho}^{n} \frac{1}{\nu(\nu+1)} \Omega(n,\nu) c_{\nu-\rho}^{(1)} \right| \\
&= \rho P_\rho \sum_{\nu=\rho}^{\infty} \frac{c_{\nu-\rho}^{(1)}}{\nu(\nu+1)} \sum_{n=\nu}^{\infty} \Omega(n,\nu) \\
&\leq \rho P_\rho \sum_{\nu=\rho}^{\infty} \frac{c_{\nu-\rho}^{(1)}}{\nu(\nu+1)} \\
&= \rho O\left(\frac{1}{\rho+1} \right) \\
&= O(1)
\end{aligned}$$

bulunur ve $J_\rho^{(2)}$ yi hesaplamak için

$$\frac{1}{\nu+1} = \frac{n-\nu}{(\nu+1)(n+1)} + \frac{1}{n+1}$$

eşitliğini göz önüne alalım. Bu durumda (2.4) eşitliğinden

$$\begin{aligned}
\sum_{\nu=\rho}^{n} \frac{1}{\nu+1} \Delta_\nu \Omega(n,\nu)\, c^{(1)}_{\nu-\rho} &= \frac{1}{n+1} \sum_{\nu=\rho}^{n-1} \left(\frac{n-\nu}{\nu+1}\right) \Delta_\nu \Omega(n,\nu)\, c^{(1)}_{\nu-\rho} \\
&\quad + \frac{1}{n+1} \sum_{\nu=\rho}^{n} c^{(1)}_{\nu-\rho} \left(\frac{p_{n-\nu}}{P_n} - \frac{p_{n-\nu-1}}{P_{n-1}}\right) \\
&= \frac{1}{n+1} \sum_{\nu=\rho}^{n-1} \left(\frac{n-\nu}{\nu+1}\right) \Delta_\nu \Omega(n,\nu)\, c^{(1)}_{\nu-\rho} \\
&\quad + \frac{1}{(n+1) P_n} \sum_{\nu=\rho}^{n} c^{(1)}_{\nu-\rho} p_{n-\nu} - \frac{1}{(n+1) P_{n-1}} \sum_{\nu=\rho}^{n} c^{(1)}_{\nu-\rho} p_{n-\nu-1} \\
&= \frac{1}{n+1} \sum_{\nu=\rho}^{n-1} \left(\frac{n-\nu}{\nu+1}\right) \Delta_\nu \Omega(n,\nu)\, c^{(1)}_{\nu-\rho} + \frac{1}{n+1} \left(\frac{1}{P_n} - \frac{1}{P_{n-1}}\right)
\end{aligned}$$

dir. Böylece

$$\begin{aligned}
J^{(2)}_\rho &\leq \rho P_\rho \sum_{n=\rho}^{\infty} \frac{1}{n+1} \left(\frac{1}{P_{n-1}} - \frac{1}{P_n}\right) \\
&\quad + \rho P_\rho \sum_{n=\rho}^{\infty} \frac{1}{n+1} \sum_{\nu=\rho}^{n-1} \left(\frac{n-\nu}{\nu+1}\right) |\Delta_\nu \Omega(n,\nu)|\, c^{(1)}_{\nu-\rho} \\
&\leq \frac{\rho P_\rho}{P_\rho P_{\rho-1}} \sum_{n=\rho}^{\infty} p_n + \rho P_\rho \sum_{\nu=\rho}^{\infty} \frac{c^{(1)}_{\nu-\rho}}{\nu+1} \sum_{n=\nu+1}^{\infty} \frac{(n-\nu)\, |\Delta_\nu \Omega(n,\nu)|}{n+1} \\
&\leq K + K \rho P_\rho \sum_{\nu=\rho}^{\infty} \frac{c^{(1)}_{\nu-\rho}}{(\nu+1)^2} \\
&= O(1)
\end{aligned}$$

olduğu görülür. Önce

$$t^p_n(s_n) \in BV \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|t^p_n(na_n)|}{n} < \infty \tag{3.10}$$

olduğunu ispatlayalım. (N,p) dönüşümü için ters formülü kullanarak, (**[6]** da görülebildiği gibi) $\nu \geqslant 1$ için

$$\begin{aligned}
a_\nu &= \sum_{\mu=0}^{\nu} (c_{\nu-\mu} - c_{\nu-\mu-1}) P_\mu t^p_\mu(s_n) \\
&= \sum_{\rho=0}^{\nu-1} \Delta t^p_\rho(s) \left\{ \sum_{\mu=0}^{\rho} c_{\nu-\mu} p_\mu - P_\rho c_{\nu-\rho-1} \right\}
\end{aligned}$$

elde edilir. Buradan

$$
\begin{aligned}
t_n^p\left(na_n\right) &= \frac{1}{P_n}\sum_{\nu=0}^{n} p_{n-\nu}\nu a_\nu \\
&= \frac{1}{P_n}\sum_{\nu=0}^{n} p_{n-\nu}\nu \sum_{\rho=0}^{\nu-1}\Delta t_\rho^p\left(s\right)\left\{\sum_{\mu=0}^{\rho} c_{\nu-\mu}p_\mu - P_\rho c_{\nu-\rho-1}\right\} \\
&= \frac{1}{P_n}\sum_{\rho=0}^{n-1}\Delta t_\rho^p\left(s\right)\sum_{\nu=\rho+1}^{n}\nu p_{n-\nu}\left\{\sum_{\mu=0}^{\rho} c_{\nu-\mu}p_\mu - P_\rho c_{\nu-\rho-1}\right\}
\end{aligned}
$$

bulunur. Buna göre (3.10) un doğru olması için gerek ve yeter şart her ρ için

$$
J_\rho = \sum_{n=\rho+1}^{\infty}\frac{1}{nP_n}\left|\sum_{\nu=\rho+1}^{n}\nu p_{n-\nu}\left(\sum_{\mu=0}^{\rho} p_\mu c_{\nu-\mu} - P_\rho c_{\nu-\rho-1}\right)\right| = O\left(1\right)
$$

olmasıdır. Eğer

$$
J_\rho^{(1)} = \sum_{n=\rho+1}^{\infty}\frac{1}{nP_n}\left|\sum_{\nu=\rho+1}^{n}\nu p_{n-\nu}\sum_{\mu=0}^{\rho} p_\mu c_{\nu-\mu}\right|
$$

ve

$$
J_\rho^{(2)} = P_\rho\sum_{n=\rho+1}^{\infty}\frac{1}{nP_n}\left|\sum_{\nu=\rho+1}^{n}\nu p_{n-\nu}c_{\nu-\rho-1}\right|
$$

dersek

$$
J_\rho \leq J_\rho^{(1)} + J_\rho^{(2)}
$$

yazılabilir. Lemma 2.9, (2.2) eşitsizliği ve(2.4) ifadesi göz önüne alınırsa

$$
\begin{aligned}
J_\rho^{(1)} &\leq \sum_{n=\rho+1}^{\infty}\frac{1}{nP_n}\sum_{\nu=\rho+1}^{n}\nu p_{n-\nu}\sum_{\mu=0}^{\rho} p_\mu\left|c_{\nu-\mu}\right| \\
&\leq K\sum_{\mu=0}^{\rho} p_\mu\sum_{\nu=\rho+1}^{\infty}\nu\left|c_{\nu-\mu}\right|\sum_{n=\nu}^{\infty}\frac{p_{n-\nu}}{\left(n+1\right)P_n} \\
&\leq K\sum_{\mu=0}^{\rho} p_\mu\sum_{\nu=\rho+1}^{\infty}\frac{\nu\left|c_{\nu-\mu}\right|}{\nu+1} \\
&\leq K\sum_{\mu=0}^{\rho} p_\mu\sum_{\nu=\rho+1}^{\infty}\left|c_{\nu-\mu}\right| \\
&\leq K\sum_{\mu=0}^{\rho} p_\mu c_{\rho-\mu}^{(1)} \\
&= O\left(1\right)
\end{aligned}
$$

bulunur ve aynı zamanda

$$\sum_{\nu=\rho+1}^{n} \nu p_{n-\nu} c_{\nu-\rho-1} = \sum_{\nu=\rho+1}^{n-1} \sum_{\mu=\rho+1}^{\nu} p_{n-\mu} c_{\mu-\rho-1} \left(\nu-(\nu+1)\right) + (n+1) \sum_{\mu=\rho+1}^{n} p_{n-\mu} c_{\mu-\rho-1} = -\sum_{\nu=\rho+1}^{n-1} \sum_{\mu=\rho+1}^{\nu} p_{n-\mu} c_{\mu-\rho-1} + (n+1) \sum_{\mu=\rho+1}^{n} p_{n-\mu} c_{\mu-\rho-1} \tag{3.11}$$

olduğundan, Lemma 2.7 ve Lemma 2.11 den dolayı

$$\begin{aligned}
J_{\rho}^{(2)} &= P_{\rho} \sum_{n=\rho+1}^{\infty} \frac{1}{nP_n} \left| -\sum_{\nu=\rho+1}^{n} \sum_{\mu=\rho+1}^{\nu} p_{n-\mu} c_{\mu-\rho-1} + (n+1) \sum_{\mu=\rho+1}^{n} p_{n-\mu} c_{\mu-\rho-1} \right| \\
&\leq P_{\rho} \sum_{n=\rho+1}^{\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right) \frac{1}{P_n} \left| \sum_{\mu=\rho+1}^{n} p_{n-\mu} c_{\mu-\rho-1} \right| \\
&\quad + P_{\rho} \sum_{n=\rho+1}^{\infty} \frac{1}{nP_n} \left| \sum_{\nu=\rho+1}^{n} \sum_{\mu=\rho+1}^{\nu} p_{n-\mu} c_{\mu-\rho-1} \right| \\
&\leq \frac{P_{\rho}(\rho+2)}{(\rho+1) P_{\rho+1}} + P_{\rho} \sum_{n=\rho+1}^{\infty} \frac{1}{nP_n} \sum_{\nu=\rho+1}^{n} \left| \sum_{\mu=\rho+1}^{\nu} p_{n-\mu} c_{\mu-\rho-1} \right| \\
&\leq K + P_{\rho} \sum_{n=\rho+1}^{\infty} \frac{1}{nP_n} \sum_{\nu=\rho+1}^{n} p_{n-\rho-1} c_{\nu-\rho-1}^{(1)} \\
&= K + P_{\rho} \sum_{n=\rho+1}^{\infty} \frac{p_{n-\rho-1} c_{n-\rho-1}^{(2)}}{nP_n} \\
&\leq K + P_{\rho} O\left(\frac{1}{P_{\rho}}\right) \\
&= O(1)
\end{aligned}$$

elde edilir. Bu da Teorem 3.6 nın ispatını tamamlar.

Lemma 3.7 : $(p_n) \in \mathcal{M}$ ve $(s_n) \in |N, P|$ olsun. Bu taktirde $(s_n) \in |N, P|$ olması için gerek ve yeter şart $(\tau_n) \in |N, p|$ olmasıdır.
Bu lemmanın adi anlamdaki (N, p) Nörlund metodu için benzeri **[9]** da verilmiştir.

İspat : Bu Lemmanın ispatı, Teorem 3.5 ve

$$t_n^p (s_n - \sigma_n) = t_n^p (s_n) - t_n^p (\sigma_n) = t_n^p (\tau_n)$$

eşitliğinden elde edilir.

Lemma 3.8 : $(p_n) \in \mathcal{M}$ olsun. Bu taktirde

$$t_n^p(\sigma_n) \in BV \Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|t_n^p(\tau)|}{n} < \infty$$

dir.

İspat : Teorem 3.6 dan dolayı

$$t_n^p(\sigma_n) \in BV \Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left| \frac{1}{P_n} \sum_{\nu=1}^{n} p_{n-\nu} \nu (\sigma_\nu - \sigma_{\nu-1}) \right| < \infty$$

dır. Şu halde

$$\nu (\sigma_\nu - \sigma_{\nu-1}) = \tau_\nu$$

olduğuna göre

$$t_n^p(\sigma_n) \in BV \Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left| \frac{1}{P_n} \sum_{\nu=1}^{n} p_{n-\nu} \tau_\nu \right| < \infty$$

$$t_n^p(\sigma_n) \in BV \Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|t_n^p(\tau)|}{n} < \infty$$

elde edilir.

Lemma 3.9 : $(p_n) \in \mathcal{M}$ olsun. Bu taktirde

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|t_n^P(na_n)|}{n} < \infty \Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|t_n^p(\tau)|}{n} < \infty$$

dir.

İspat : Önce

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|t_n^P(na_n)|}{n} < \infty \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|t_n^p(\tau)|}{n} < \infty \tag{3.12}$$

olduğunu gösterelim. Teorem 3.4 ün ispatında kullanılan (3.6) sonucunu (s_n) nin yerine (na_n) yazarak uygulanırsa

$$t_n^p(\tau) = \sum_{\mu=1}^{n} \alpha_{n\mu} t_\mu^P(\mu a_\mu)$$

elde edilir. Burada $\alpha_{n\mu}$ matrisi Teorem 3.4 ün ispatında ortaya çıkan matrisle aynıdır. Böylece (3.12) nin doğruluğunu göstermek için her ρ için

$$J_\rho = \rho P_\rho^{(1)} \sum_{n=\rho}^{\infty} \frac{1}{nP_n} \left| \sum_{\nu=\rho}^{n} \frac{p_{n-\nu} c_{\nu-\rho}}{\nu+1} \right| = O(1)$$

olduğunu ispatlamak yeterlidir. (3.7) ve (3.1) eşitlikleri göz önüne alınırsa ve Lemma 2.7, Lemma 2.9, Lemma 2.10 nedeniyle

$$\begin{aligned}
J_\rho &= \rho P_\rho^{(1)} \sum_{n=\rho}^{\infty} \frac{1}{nP_n} \left| \sum_{\nu=\rho}^{n-1} \frac{1}{(\nu+1)(\nu+2)} \sum_{\mu=\rho}^{\nu} p_{n-\mu} c_{\mu-\rho} + \frac{1}{n+1} \sum_{\mu=\rho}^{n} p_{n-\mu} c_{\mu-\rho} \right| \\
&\leq \rho P_\rho^{(1)} \sum_{n=\rho}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)P_n} \left| \sum_{\mu=\rho}^{n} p_{n-\mu} c_{\mu-\rho} \right| \\
&\quad + \rho P_\rho^{(1)} \sum_{n=\rho}^{\infty} \frac{1}{nP_n} \left| \sum_{\nu=\rho}^{n-1} \frac{1}{(\nu+1)(\nu+2)} \sum_{\mu=\rho}^{\nu} p_{n-\mu} c_{\mu-\rho} \right| \\
&\leq \frac{\rho P_\rho^{(1)}}{\rho(\rho+1)P_\rho} + \rho P_\rho^{(1)} \sum_{n=\rho}^{\infty} \frac{1}{nP_n} \sum_{\nu=\rho}^{n-1} \frac{1}{(\nu+1)(\nu+2)} \sum_{\mu=\rho}^{\nu} p_{n-\mu} c_{\mu-\rho} \\
&\leq K + \rho P_\rho^{(1)} \sum_{n=\rho}^{\infty} \frac{1}{nP_n} \sum_{\nu=\rho}^{n-1} \frac{p_{n-\rho} c_{\nu-\rho}^{(1)}}{(\nu+1)(\nu+2)} \\
&= K + \rho P_\rho^{(1)} \sum_{\nu=\rho}^{\infty} \frac{c_{\nu-\rho}^{(1)}}{(\nu+1)(\nu+2)} \sum_{n=\nu}^{\infty} \frac{p_{n-\rho}}{nP_n} \\
&\leq K + \rho P_\rho^{(1)} \sum_{\nu=\rho}^{\infty} \frac{c_{\nu-\rho}^{(1)}}{(\nu+1)^3} \\
&\leq K + \frac{\rho P_\rho^{(1)}}{(\rho+1)} \sum_{\nu=\rho}^{\infty} \frac{c_{\nu-\rho}^{(1)}}{(\nu+1)^2} \\
&\leq K + \frac{\rho P_\rho^{(1)}}{P_\rho(\rho+1)^2} \\
&\leq K + \frac{P_\rho^{(1)}}{P_\rho(\rho+1)} \\
&= O(1)
\end{aligned}$$

bulunur. Bu da (3.12) nin ispatını tamamlar.

Şimdi

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|t_n^p(\tau)|}{n} < \infty \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|t_n^P(na_n)|}{n} < \infty \tag{3.13}$$

olduğunu gösterelim. Kolayca görüleceği üzere $\alpha_{n\mu}$, Teorem 3.3 ün ispatında göz önüne aldığımız matris olmak üzere

$$t_n^P(na_n) = \sum_{\mu=1}^{n} \alpha_{n\mu} t_\mu^p(\tau)$$

yazılabilir.Böylece (3.13) ü ispatlamak için her ρ için

$$J_\rho = \rho P_\rho \sum_{n=\rho}^{\infty} \frac{1}{nP_n^{(1)}} \left| \sum_{\nu=\rho}^{n} (\nu+1) p_{n-\nu} c_{\nu-\rho} \right| = O(1)$$

olduğunu göstermek yeterlidir. Böylece (2.6) yı göz önüne alırsak Teorem 3.6 nın ikinci kısmının ispatındaki notasyonlar cinsinden

$$J_\rho^{(2)} = O(1)$$

bulunur. Buradan ispat tamamlanır.

Şimdi mutlak Nörlund $|N,p|$ metodu için bir Tauber teoremi olan aşağıdaki temel teoremi ispat edelim:

Teorem 3.10 : $(p_n) \in \mathcal{M}$ ve $(s_n) \in |A|$ olsun. Bu taktirde

$$(s_n) \in |N,p| \Leftrightarrow T_1 : (\tau_n) \in |N,p|$$

dir.

Teorem 3.5 nedeniyle T_1 Tauberian şartı aşağıdaki şartlardan herhangi birine denktir.

$T_2 : (na_n) \in |N,P|$

$T_3 : (na_n) \in |(C,1)(N,p)|$

Bu yüzden bu şartlardan en uygun olanını kullanabiliriz.

İspat : T_1 şartının gerekliliği Lemma 3.7 den elde edildiğinden, bu şartın sadece yeterliliğini ispatlamak yeterlidir. İspatta $t_n^P(na)$ yerine kısalık için t_n^P yazacağız. Lemma 3.7 den dolayı $(s_n) \in |N,P|$ olduğunu kanıtlamak yeterlidir. Fakat Teorem 3.6, Lemma 3.8 ve Lemma 3.9 den

$$\begin{aligned}
(s_n) &\in |N,P| \Leftrightarrow (\tau_n) \in |N,p| \\
&\Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} n^{-1} |t_n^p(\tau)| < \infty \\
&\Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} n^{-1} \left| t_n^P(na_n) \right| < \infty
\end{aligned}$$

bulunur. Böylece

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-1} \left| t_n^P \right| < \infty \tag{3.14}$$

olduğunu göstermek yeterlidir. $n \to \infty$ ve her $n \leq w \leq n+1$ için

$$\frac{1}{n} \sim \frac{1}{w^2 \left(1 - e^{-\frac{1}{w}} \right)}$$

olduğundan (3.14) ifadesi,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| t_n^P \right| \int_n^{n+1} \frac{dw}{w^2 \left(1 - e^{-\frac{1}{w}} \right)} < \infty \tag{3.15}$$

ifadesine denktir. Fakat $f(w) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{-\frac{n}{w}}$ fonksiyonu $(1, \infty)$ da sınırlı salınımlı olduğundan (3.15) ifadesi,

$$\sum_{n=1}^{\infty} |X_n| < \infty$$

eşitsizliğine denktir. Burada

$$X_n = \int_n^{n+1} \left\{ f'(w) + \frac{t_n^P}{w^2 \left(1 - e^{-\frac{1}{w}} \right)} \right\} dw$$

dir. Öte yandan

$$P\left(e^{-\frac{1}{w}} \right) = \sum_{\kappa=0}^{\infty} P_\kappa e^{-\frac{\kappa}{w}}$$

olmak üzere

$$
\begin{aligned}
f'(w) &= -\frac{1}{w^2}\sum_{\kappa=1}^{\infty}\kappa a_\kappa e^{-\frac{\kappa}{w}} \\
&= -\frac{\left(\displaystyle\sum_{\kappa=1}^{\infty}\kappa a_\kappa e^{-\frac{\kappa}{w}}\right)\left(\displaystyle\sum_{\kappa=0}^{\infty}P_\kappa e^{-\frac{\kappa}{w}}\right)}{w^2\displaystyle\sum_{\kappa=0}^{\infty}P_\kappa e^{-\frac{\kappa}{w}}} \\
&= -\frac{\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}e^{-\frac{n}{w}}\frac{P_n^{(1)}}{P_n^{(1)}}\sum_{\kappa=0}^{n}P_{n-\kappa}\kappa a_\kappa}{w^2\displaystyle\sum_{\kappa=0}^{\infty}P_\kappa e^{-\frac{\kappa}{w}}} \\
&= -\frac{\displaystyle\sum_{\kappa=1}^{\infty}P_\kappa^{(1)}t_\kappa^P e^{-\frac{\kappa}{w}}}{w^2P\left(e^{-\frac{1}{w}}\right)}
\end{aligned}
$$

olduğuna göre

$$
\begin{aligned}
\frac{t_n^P}{w^2\left(1-e^{-\frac{1}{w}}\right)} &= \frac{t_n^P\displaystyle\sum_{\kappa=1}^{\infty}P_\kappa^{(1)}e^{-\frac{\kappa}{w}}}{w^2\left(1-e^{-\frac{1}{w}}\right)\displaystyle\sum_{\kappa=1}^{\infty}P_\kappa^{(1)}e^{-\frac{\kappa}{w}}} \\
&= \frac{\displaystyle\sum_{\kappa=1}^{\infty}P_\kappa^{(1)}t_n^P e^{-\frac{\kappa}{w}}}{w^2\left(\displaystyle\sum_{\kappa=1}^{\infty}P_\kappa^{(1)}e^{-\frac{\kappa}{w}}-\sum_{\kappa=1}^{\infty}P_\kappa^{(1)}e^{-\frac{\kappa+1}{w}}\right)} \\
&= \frac{\displaystyle\sum_{\kappa=1}^{\infty}P_\kappa^{(1)}t_n^P e^{-\frac{\kappa}{w}}}{w^2\left(\displaystyle\sum_{\kappa=1}^{\infty}P_\kappa e^{-\frac{\kappa}{w}}\right)} \\
&= \frac{\displaystyle\sum_{\kappa=1}^{\infty}P_\kappa^{(1)}t_n^P e^{-\frac{\kappa}{w}}}{w^2P\left(e^{-\frac{1}{w}}\right)}
\end{aligned}
$$

eşitliği nedeniyle

$$
\begin{aligned}
X_n &= \int_n^{n+1}\left\{ f'(w) + \frac{t_n^P}{w^2\left(1-e^{-\frac{1}{w}}\right)}\right\} dw \qquad (3.16)\\
&= \int_n^{n+1}\left\{ -\frac{\sum_{\kappa=1}^{\infty} P_\kappa^{(1)} t_\kappa^P e^{-\frac{\kappa}{w}}}{w^2 P\left(e^{-\frac{1}{w}}\right)} + \frac{\sum_{\kappa=1}^{\infty} P_\kappa^{(1)} t_n^P e^{-\frac{\kappa}{w}}}{w^2 P\left(e^{-\frac{1}{w}}\right)}\right\} dw\\
&= \int_n^{n+1} \frac{dw}{w^2 P\left(e^{-\frac{1}{w}}\right)} \sum_{\kappa=1}^{\infty} P_\kappa^{(1)}\left(t_n^P - t_\kappa^P\right) e^{-\frac{\kappa}{w}}
\end{aligned}
$$

elde edilir. Şimdi

$$
\left|t_n^P - t_\kappa^P\right| \le \begin{cases} \sum_{r=n+1}^{\kappa} \left|t_r^P - t_{r-1}^P\right| & , \quad (\kappa > n)\\ \sum_{r=\kappa+1}^{n} \left|t_r^P - t_{r-1}^P\right| & , \quad (\kappa < n) \end{cases}
$$

yazar ve bu eşitsizliği $|X_n|$ ifadesinde yerine koyarsak Lemma 2.13 den dolayı verilen her r için

$$
\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} |X_n| &\le \sum_{r=2}^{\infty} \left|t_r^P - t_{r-1}^P\right| \sum_{\kappa=r}^{\infty} P_\kappa^{(1)} \int_1^r \frac{e^{-\frac{\kappa}{w}}}{w^2 P\left(e^{-\frac{1}{w}}\right)} dw\\
&\quad + \sum_{r=2}^{\infty} \left|t_r^P - t_{r-1}^P\right| \sum_{\kappa=1}^{r-1} P_\kappa^{(1)} \int_1^{\infty} \frac{e^{-\frac{\kappa}{w}}}{w^2 P\left(e^{-\frac{1}{w}}\right)} dw\\
&< \infty
\end{aligned}
$$

olduğu görülür. Çünkü $\left(t_r^P\right) \in BV$ dir. Bu da Teorem 3.10 un ispatını tamamlar. Özel olarak $0 \le \alpha \le 1$ için $p_n = A_n^{\alpha-1}$ alınırsa $|N,p| = |C,\alpha|$ ve $|N,P| = |C,\alpha+1|$ olacağından Teorem 3.10 dan aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 3.11 : $(s_n) \in |A|$ olsun. Bu durumda $0 \le \alpha \le 1$ için $(s_n) \in |C,\alpha|$ olması için gerek ve yeter şart $(na_n) \in |C,\alpha+1|$ olmasıdır.
Bu sonucun $\alpha \geqslant 0$ için genel durumu Hyslop **[11]** tarafından verilmiştir.

Özel olarak $p_n = \dfrac{1}{n+1}$ seçilirse Teorem 3.10 dan aşağıdaki sonuç ifade edilebilir.

Sonuç 3.12 : $(s_n) \in |A|$ olsun. Bu taktirde $(s_n) \in \left|N, \dfrac{1}{n+1}\right|$ olması için gerek ve yeter şart $(\tau_n) \in \left|N, \dfrac{1}{n+1}\right|$ olmasıdır.

Teorem 3.13 : $0 < \alpha < 1$ için

$$\left|N, \frac{1}{n+1}\right| \subseteq \left|R, e^{(n-1)\alpha}, 1\right|$$

ve aynı zamanda $\left|R, e^{(n-1)\alpha}, 1\right|$ toplanabilen fakat $\left|N, \dfrac{1}{n+1}\right|$ toplanamayan bir seri mevcuttur.

Bu teoremin birinci kısmı ile ilgili adi toplanabilme teorisinde benzeri **[20]**'de verilmiştir.

İspat : (s_n) dizisinin $\left(N, \dfrac{1}{n+1}\right)$ ortalamasını $t_n\left(s_n\right)$ ve $\lambda_n = \exp\left(n^\alpha\right)$ $(0 < \alpha < 1)$ olmak üzere $(R, \lambda_{n-1}, 1)$ ortalamasını R_n^α ile gösterelim. Bu durumda Teorem 3.6 dolayı

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left|t_n^p\left(na_n\right)\right|}{n} < \infty \Rightarrow R_n^\alpha \in BV \tag{3.17}$$

olduğunu göstermek yeterlidir. Kolayca hesaplanacağı gibi

$$R_n^\alpha - R_{n-1}^\alpha = \frac{\lambda_n - \lambda_{n-1}}{\lambda_n \lambda_{n-1}} \sum_{\nu=1}^{n} \lambda_{\nu-1} a_\nu$$

dır. a_ν terimini $t_n\left(na_n\right)$ cinsinden çekip yerine yazarsak

$$\begin{aligned} R_n^\alpha - R_{n-1}^\alpha &= \frac{\lambda_n - \lambda_{n-1}}{\lambda_n \lambda_{n-1}} \sum_{\nu=1}^{n} \lambda_{\nu-1} \frac{1}{\nu} \sum_{\rho=1}^{\nu} c_{\nu-\rho} P_\rho t_\rho\left(\rho a_\rho\right) \\ &= \frac{\lambda_n - \lambda_{n-1}}{\lambda_n \lambda_{n-1}} \sum_{\rho=1}^{n} P_\rho t_\rho\left(\rho a_\rho\right) \sum_{\nu=\rho}^{n} \frac{\lambda_{\nu-1}}{\nu} c_{\nu-\rho} \end{aligned}$$

yazılabilir. Dolayısıyla (3.17) nin doğruluğunu göstermek için her ρ için

$$J_\rho = \rho P_\rho \sum_{n=\rho}^{\infty} \frac{\lambda_n - \lambda_{n-1}}{\lambda_n \lambda_{n-1}} \left| \sum_{\nu=\rho}^{n} \frac{\lambda_{\nu-1}}{\nu} c_{\nu-\rho} \right| = O(1)$$

olduğunu ispatlamak yeterlidir. Bunun için

$$\rho' = \left[\rho^{1-\alpha}\right] + 2 \quad \left(\rho' \geqslant 2\right) \text{ ve } m = \min\left\{n, \rho + \rho'\right\}$$

yazalım. Bu durumda

$$J_\rho^{(1)} = \rho P_\rho \sum_{n=\rho}^{\infty} \frac{\lambda_n - \lambda_{n-1}}{\lambda_n \lambda_{n-1}} \left| \sum_{\nu=\rho}^{m} \frac{\lambda_{\nu-1} c_{\nu-\rho}}{\nu} \right|$$

ve

$$J_\rho^{(2)} = \rho P_\rho \sum_{n=\rho+\rho'+1}^{\infty} \frac{\lambda_n - \lambda_{n-1}}{\lambda_n \lambda_{n-1}} \left| \sum_{\nu=\rho+\rho'+1}^{\infty} \frac{\lambda_{\nu-1} c_{\nu-\rho}}{\nu} \right|$$

olmak üzere

$$J_\rho \leq J_\rho^{(1)} + J_\rho^{(2)}$$

yazılabilir. Şimdi Abel kısmi toplama formülünden

$$\sum_{\nu=\rho}^{m} \frac{\lambda_{\nu-1}}{\nu} c_{\nu-\rho} = \sum_{\nu=\rho}^{m} \Delta \left(\frac{\lambda_{\nu-1}}{\nu} \right) c_{\nu-\rho}^{(1)} + \frac{\lambda_m}{m+1} c_{m-\rho}^{(1)} \tag{3.18}$$

ve dolayısıyla (3.18) den

$$\begin{aligned}
J_\rho^{(1)} &= \rho P_\rho \sum_{n=\rho}^{\infty} \frac{\lambda_n - \lambda_{n-1}}{\lambda_n \lambda_{n-1}} \left| \sum_{\nu=\rho}^{m} \Delta \left(\frac{\lambda_{\nu-1}}{\nu} \right) c_{\nu-\rho}^{(1)} + \frac{\lambda_m}{m+1} c_{m-\rho}^{(1)} \right| \\
&\leq \rho P_\rho \sum_{n=\rho}^{\infty} \frac{\lambda_n - \lambda_{n-1}}{\lambda_n \lambda_{n-1}} \left\{ \sum_{\nu=\rho}^{m} \left| \Delta \left(\frac{\lambda_{\nu-1}}{\nu} \right) \right| c_{\nu-\rho}^{(1)} + \frac{\lambda_m}{m+1} c_{m-\rho}^{(1)} \right\} \\
&= \rho P_\rho \sum_{n=\rho}^{\infty} \frac{\lambda_n - \lambda_{n-1}}{\lambda_n \lambda_{n-1}} \sum_{\nu=\rho}^{m} \left| \Delta \left(\frac{\lambda_{\nu-1}}{\nu} \right) \right| c_{\nu-\rho}^{(1)} \\
&\quad + \rho P_\rho \frac{\lambda_m}{m+1} c_{m-\rho}^{(1)} \sum_{n=\rho}^{\infty} \frac{\lambda_n - \lambda_{n-1}}{\lambda_n \lambda_{n-1}} \\
&\leq \rho P_\rho \sum_{\nu=\rho}^{\rho+\rho'} c_{\nu-\rho}^{(1)} \left| \Delta \left(\frac{\lambda_{\nu-1}}{\nu} \right) \right| \sum_{n=\nu}^{\infty} \frac{\lambda_n - \lambda_{n-1}}{\lambda_n \lambda_{n-1}} \\
&\quad + \rho P_\rho \sum_{n=\rho}^{\rho+\rho'} \frac{\lambda_n - \lambda_{n-1}}{\lambda_n \lambda_{n-1}} \frac{\lambda_n}{n+1} c_{n-\rho}^{(1)} + \rho P_\rho \frac{\lambda_{\rho+\rho'}}{\rho+\rho'+1} c_{\rho'}^{(1)} \sum_{n=\rho+\rho'+1}^{\infty} \frac{\lambda_n - \lambda_{n-1}}{\lambda_n \lambda_{n-1}} \\
&= J_{\rho_1}^{(1)} + J_{\rho_2}^{(1)} + J_{\rho_3}^{(1)}
\end{aligned}$$

yazılabilir.

$$\sum_{n=\nu}^{\infty} \frac{\lambda_n - \lambda_{n-1}}{\lambda_n \lambda_{n-1}} = \sum_{n=\nu}^{\infty} \left(\frac{1}{\lambda_{n-1}} - \frac{1}{\lambda_n} \right) = \frac{1}{\lambda_{\nu-1}} - \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\lambda_n} = \frac{1}{\lambda_{\nu-1}}$$

ve

$$\lambda_n - \lambda_{n-1} = O\left(n^{\alpha-1} \exp\left(n^\alpha\right)\right)$$

olduğunu göz önüne alırsak

$$\begin{aligned}
J_{\rho_1}^{(1)} &= \rho P_\rho \sum_{\nu=\rho}^{\rho+\rho'} c_{\nu-\rho}^{(1)} \left|\Delta\left(\frac{\lambda_{\nu-1}}{\nu}\right)\right| \sum_{n=\nu}^{\infty} \frac{\lambda_n-\lambda_{n-1}}{\lambda_n\lambda_{n-1}} \\
&= \rho P_\rho \sum_{\nu=\rho}^{\rho+\rho'} c_{\nu-\rho}^{(1)} O\left(\frac{1}{\nu^{2-\alpha}}\right) \\
&= \rho P_\rho \frac{O(1)}{\rho^{2-\alpha}} \sum_{\nu=\rho}^{\rho+\rho'} c_{\nu-\rho}^{(1)} \\
&= \rho P_\rho \frac{O(1)}{\rho^{2-\alpha}} c_{\rho'}^{(2)} \\
&= O(1)
\end{aligned}$$

elde edilir. Çünkü Lemma 2.5(**iii**) den dolayı

$$c_{\rho'}^{(2)} \leq \frac{2\rho'+1}{P_{\rho'}} = O\left(\frac{\rho'+1}{\log\rho'}\right)$$

ve

$$\frac{\rho P_\rho\left(\rho'+1\right)}{\rho^{2-\alpha}\left(\log\rho'\right)} = O(1)$$

dir. Benzer olarak

$$\begin{aligned}
J_{\rho_2}^{(1)} &= \rho P_\rho \sum_{n=\rho}^{\rho+\rho'} \frac{\lambda_n-\lambda_{n-1}}{\lambda_n\lambda_{n-1}} \frac{\lambda_n}{n+1} c_{n-\rho}^{(1)} \\
&= \rho P_\rho \sum_{n=\rho}^{\rho+\rho'} c_{n-\rho}^{(1)} O\left(\frac{1}{n^{2-\alpha}}\right) \\
&= \frac{\rho P_\rho O(1)}{\rho^{2-\alpha}} \sum_{n=\rho}^{\rho+\rho'} c_{n-\rho}^{(1)} \\
&= \frac{\rho P_\rho O(1)}{\rho^{2-\alpha}} c_{\rho'}^{(2)} \\
&= O(1)
\end{aligned}$$

olur. Aynı zamanda Lemma 2.5$(\mathbf{ii})_a$ dan

$$
\begin{aligned}
J_{\rho_3}^{(1)} &= \rho P_\rho \frac{\lambda_{\rho+\rho'}}{\rho+\rho'+1} c_{\rho'}^{(1)} \sum_{n=\rho+\rho'+1}^{\infty} \frac{\lambda_n-\lambda_{n-1}}{\lambda_n\lambda_{n-1}} \\
&= \rho P_\rho \frac{\lambda_{\rho+\rho'}}{\rho+\rho'+1} c_{\rho'}^{(1)} \frac{1}{\lambda_{\rho+\rho'}} \\
&= \frac{\rho P_\rho}{\rho+\rho'+1} c_{\rho'}^{(1)} \\
&= O\left(\frac{P_\rho}{P_{\rho'}}\right)
\end{aligned}
$$

bulunur.

Son olarak (2.2) eşitsizliğinden

$$
\begin{aligned}
J_{\rho}^{(2)} &= \rho P_\rho \sum_{n=\rho+\rho'+1}^{\infty} \frac{\lambda_n-\lambda_{n-1}}{\lambda_n\lambda_{n-1}} \left| \sum_{\nu=\rho+\rho'+1}^{\infty} \frac{\lambda_{\nu-1}c_{\nu-\rho}}{\nu} \right| \\
&\leq \rho P_\rho \sum_{n=\rho+\rho'+1}^{\infty} \frac{\lambda_n-\lambda_{n-1}}{\lambda_n\lambda_{n-1}} \sum_{\nu=\rho+\rho'+1}^{\infty} \frac{\lambda_{\nu-1}}{\nu} \left|c_{\nu-\rho}\right| \\
&= \rho P_\rho \sum_{\nu=\rho+\rho'+1}^{\infty} \frac{\lambda_{\nu-1}}{\nu} \left|c_{\nu-\rho}\right| \sum_{n=\rho+\rho'+1}^{\infty} \frac{\lambda_n-\lambda_{n-1}}{\lambda_n\lambda_{n-1}} \\
&\leq \rho P_\rho \sum_{\nu=\rho+\rho'+1}^{\infty} \frac{\lambda_{\nu-1}}{\nu} \left|c_{\nu-\rho}\right| \frac{1}{\lambda_{\rho+\rho'}} \\
&\leq P_\rho \sum_{\nu=\rho+\rho'+1}^{\infty} \left|c_{\nu-\rho}\right| \\
&\leq \frac{P_\rho}{P_{\rho+\rho'}} \\
&= O(1)
\end{aligned}
$$

elde edilir. Bu da Teorem 3.13 ün ispatını tamamlar.

Aşağıdaki teorem $\left|N, \dfrac{1}{n+1}\right|$ metodu için bir Tauberian teoremidir.

Teorem 3.14 :

$$
\sum a_n \in \left|N, \frac{1}{n+1}\right| \text{ ve } T_4 : \left(n^{1-\alpha}a_n\right) \in \left|R, e^{(n-1)\alpha}, 1\right| \ , \ (0<\alpha<1)
$$

olsun. Bu durumda

$$
\sum a_n \in |C, 0|
$$

dır.

Dikkat edelim ki adi anlamda $\left(N, \dfrac{1}{n+1}\right)$ toplanabilme metodu için Iyengar **[12]** tarafından ispat edildi ki eğer $\sum a_n \in \left(N, \dfrac{1}{n+1}\right)$ ve $n^{(1-\alpha)} a_n = O(1)$ $(0 < \alpha \le 1)$ ise bu taktirde

$$\sum a_n \in (C, 0)$$

dır.

İspat : $0 < \alpha < 1$ için $\lambda_n = \exp(n^\alpha)$ olsun. Eğer λ_n nin bu değeri için $T_4 \Rightarrow T_5$ olduğunu gösterebilirsek Teorem 3.14 ün ispatı, Lemma 2.14 ve Teorem 3.13 den elde edilir. Aslında bu durumda

$$T_4 \Leftrightarrow T_5$$

elde ederiz. Bu gerektirme $(d_n) = \left(\dfrac{\lambda_{n-1}}{\lambda_n - \lambda_{n-1}} n^\alpha\right) \in BV$ olduğu göz önüne alınarak Lemma 2.15 den elde edilir ve aynı zamanda $\left(\dfrac{1}{d_n}\right) \in BV$ olduğu görülür. Teoremin ikinci kısmının ispatı için

$$-\frac{\pi}{4} + 1 + 0 - \frac{1}{3} + 0 + \frac{1}{5} - 0 + \frac{1}{7} + \ldots \tag{3.19}$$

serisini göz önüne alalım.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)\log(n+1)} = \infty$$

olduğundan (3.19) serisinin $\left|N, \dfrac{1}{n+1}\right|$ metoduyla toplanabilir olmadığı aşağıdaki sonuçtan (**[6]** da Teorem 1 den) elde edilir:

$$(s_n) \in \left|N, \frac{1}{n+1}\right| \Rightarrow \sum |\varepsilon_n a_n| < \infty \Leftrightarrow \varepsilon_n = O\left(\frac{1}{\log(n+1)}\right)$$

Diğer taraftan aynı seri $|R, \exp(n-1)^\alpha, 1|$ $(0 < \alpha < 1)$ toplanabilirdir. Gerçekten (3.19) serisi

$$f(t) = \begin{cases} 0 \;, & \left(0 \le t \le \frac{\pi}{2}\right) \\ -\frac{\pi}{2} \;, & \left(\frac{\pi}{2} \le t < \pi\right) \end{cases}$$

fonksiyonunun $t = 0$ daki Fourier serisidir ve üstelik Mohanty **[15]** nin teoremine göre $\left\{f(t)\log\dfrac{\kappa}{t}\right\} \in BV(0,\pi)$ olduğunda $f(t)$ nin $t = 0$ daki Fourier serisi $|R, \exp(n-1)^\alpha, 1|$ $(0 < \alpha < 1)$ toplanabilirdir. Fakat kolayca görülebileceği gibi $\left\{f(t)\log\dfrac{\kappa}{t}\right\} \in BV(0,\pi)$ dir ve böylece teoremin ispatı tamamlanır.

KAYNAKLAR

1. **Das, G.,** 1968: Tauberian Theorems for absolute Nörlund Summability, University College, London, 357-384.

2. **Maddox, I. J.,** 1970: Elements of Functional Analysis, Cambridge University Press.

3. **Fekete, M.,** 1911: Zur Theorie der Divergenten Reihen, Math. Es Termezs Ertesitö (Budapest)29, 719-726.

4. **Petersen, G. M.,** 1966: Regular Matrix Transformations, Mc Graw Hill Publishing Company Limited, London-New York-Toronto.

5. **Mazhar, S. M.,** 1966: On the Summability Factors of Infinite Series, Publ. Math. Debrecen, 13, 229-236.

6. **Das, G.,** 1966: On the Absolute Nörlund Summability Factors of İnfinite Series, J. London Math. Soc., 41, 685-92.

7. **Das, G.,** 1966: On the Some Methods of Summability, Quart. J. Math., Oxford(2), 17, 707-13.

8. **Das, G.,** 1968: Product of Nörlund Methods, Indian J. Math., 10, 25-43.

9. **Das, G.,** 1967: On a Theorem of Hardy and Littlewood, Proc. Cambridge Phil. Soc., 63, 707-13.

10. **Hardy, G. H.,** 1949: Divergent Series, Oxford.

11. **Hyslop, J. M.,** 1937: A Tauberian theorem for absolute summability, J. London Math. Soc., 12, 176-80.

12. **Iyengar, K. S. K.,** 1943: A Tauberian Theorem and Its Application to Convergence of Fourier Series, Proc. Indian Acad. Sci. Sect., A 18, 81-87.

13. **Knopp, K. and Lorentz, G. G.,** 1949: Beitrage Zur Absoluten Limitierung, Arch. Math.(2), 10-16.

14. **Fadden, L. Mc.,** 1942: Absolute Nörlund Summability, Duke Math. J., 9, 168-207.

15. **Mohanty, R.,** 1950: A Criterion for the Absolute Convergence of a Fourier Series, Proc. London Math. Soc.(2), 51, 186-96.

16. **Mohanty, R. and Ray, B. K.,** 1967: On the Non-Absolute Summability of a Fourier Series and the Conjugate of a Fourier Series by a Nörlund Method, Proc. Cambridge Phil. Soc., 63, 407-11.

17. **Pati, T.,** 1961: The Non-Absolute Summability of a Fourier Series by a Nörlund Method, J. Indian Math. Soc., 25, 197-214.

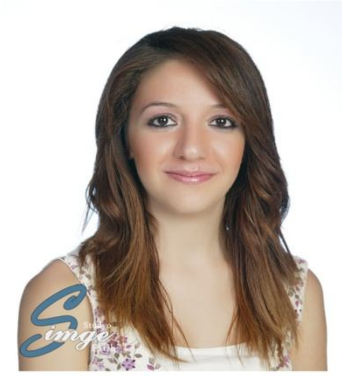
18. Silverman, L. L., 1937: Products of Nörlund Transformation, Bull. American Math. Soc., 43, 95-101.

19. Sunouchi, G., 1949: Notes of Fourier Analysis, XVIII, Absolute summability of Series with Constant Terms, Tohoku Math. J., 2, 57-65.

20. Varshney, O. P., 1959: On the Relation Between Harmonic Summability and Summability by Riesz Means of Certain Type, Tohoku Math. J., 11, 20-24.

21. Ayres, F. Jr., 1962: Schaum's Outline of Theory and Problems of Matrices, New York, Schaum, p. 10.

ÖZGEÇMİŞ



Ad Soyad : G. Canan HAZAR

Unvanı : Araştırma Görevlisi (2012-)

Anabilim Dalı : Analiz ve Fonksiyonlar Teorisi

Lisans Üniversite : İstanbul Üniversitesi (2009)

Tezsiz Yüksek Lisans : Marmara Üniversitesi (2010)

İletişim : Pamukkale Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü

Kınıklı / DENİZLİ

e-posta : gchazar@pau.edu.tr