

**T.C.
PAMUKKALE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI**

**DİFERANSİYEL, İNTEGRAL VE İNTEGRODİFERANSİYEL
DENKLEMLER İÇİN BERNSTEIN YAKLAŞIMI**

DOKTORA TEZİ

NEŞE İŞLER ACAR

DENİZLİ, OCAK - 2015

T.C.
PAMUKKALE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI
UYGULAMALI MATEMATİK



DİFERANSİYEL, İNTEGRAL VE İNTEGRODİFERANSİYEL
DENKLEMLER İÇİN BERNSTEIN YAKLAŞIMI

DOKTORA TEZİ

NEŞE İŞLER ACAR

DENİZLİ, OCAK - 2015

KABUL VE ONAY SAYFASI

NEŞE İŞLER ACAR tarafından hazırlanan “DİFERANSİYEL, İNTEGRAL VE İNTEGRODİFERANSİYEL DENKLEMLER İÇİN BERNSTEIN YAKLAŞIMI” adlı tez çalışmasının savunma sınavı 12.01.2015 tarihinde yapılmış olup aşağıda verilen jüri tarafından oy birliği ile Pamukkale Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı’nda Doktora Tezi olarak kabul edilmiştir.

Jüri Üyeleri

İmza

Danışman
Prof. Dr. Ayşegül DAŞCIOĞLU



Üye
Prof. Dr. Mehmet SEZER



Üye
Doç. Dr. İbrahim ÇELİK



Üye
Doç. Dr. Handan ÇERDİK YASLAN



Üye
Doç. Dr. Alp Arslan KIRAÇ



Pamukkale Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu’nun 29/01/2015 tarih ve 04/18..... sayılı kararıyla onaylanmıştır..



Prof. Dr. Orhan KARABULUT

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

Bu tez çalışması BAP tarafından 2012FBE036 nolu proje ile desteklenmiştir.

Bu tezin tasarımı, hazırlanması, yürütülmesi, araştırmalarının yapılması ve bulgularının analizlerinde bilimsel etiğe ve akademik kurallara özenle riayet edildiğini; bu çalışmanın doğrudan birincil ürünü olmayan bulguların, verilerin ve materyallerin bilimsel etiğe uygun olarak kaynak gösterildiğini ve alıntı yapılan çalışmalara atfedildiğine beyan ederim.



NEŞE İŞLER ACAR

ÖZET

**DİFERANSİYEL, İNTEGRAL VE İNTEGRODİFERANSİYEL
DENKLEMLER İÇİN BERNSTEIN YAKLAŞIMI
DOKTORA TEZİ
NEŞE İŞLER ACAR
PAMUKKALE ÜNİVERSİTESİ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI
UYGULAMALI MATEMATİK
(TEZ DANIŞMANI: PROF. DR. AYŞEGÜL DAŞCIOĞLU)**

DENİZLİ, OCAK - 2015

Bu çalışma beş ana bölümden oluşacak şekilde organize edilmiştir. Birinci bölümde, konu ile ilgili literatür bilgileri, genelleştirilmiş Bernstein polinomlarının ve baz formlarının tanımları ve temel özellikleri verilmiştir. İkinci bölümde, lineer denklemlerin nümerik çözümleri için genelleştirilmiş Bernstein polinomlarına dayalı sıralama yöntemleri üretilmiştir. Üçüncü bölümde, lineer olmayan denklemlerin nümerik çözümleri için kuasilineerleştirme tekniği ve sıralama noktaları kullanılarak genelleştirilmiş Bernstein polinomlarına dayalı yöntem geliştirilmiştir. Dördüncü bölümde, Bernstein polinomlarının düzgün yaklaşım özellikleri gözönüne alınarak, lineer denklemler için hata analizi irdelenmiştir. Son bölümde ise sunulan yöntemlerin lineer ve lineer olmayan denklemlere uygulanabilirliğini, doğruluğunu ve verimliliğini göstermek için çeşitli örnekler ele alınmıştır.

ANAHTAR KELİMELER: Bernstein polinomları, Bernstein yaklaşımı, sıralama yöntemi, kuasilineerleştirme tekniği, lineer ve lineer olmayan diferansiyel, integral ve integrodiferansiyel denklemler

ABSTRACT

BERNSTEIN APPROXIMATION FOR DIFFERENTIAL, INTEGRAL AND INTEGRODIFFERENTIAL EQUATIONS

PH.D THESIS

NEŞE İŞLER ACAR

PAMUKKALE UNIVERSITY INSTITUTE OF SCIENCE

MATHEMATICS

APPLIED MATEMATİCS

(SUPERVISOR: PROF. DR. AYŞEGÜL DAŞCIOĞLU)

DENİZLİ, JANUARY 2015

This study is organized as five main chapters. In the first chapter, literatures on the topic, definitions and fundamental properties of the Bernstein polynomials and their basis forms are given. In the second chapter, collocation methods based on the generalized Bernstein polynomials are produced for the solutions of linear equations. In the third chapter, a numerical method based on the generalized Bernstein polynomials is developed by using the quasilinearization technique and collocation points. In the fourth chapter, by considering the uniform approximation properties of the Bernstein polynomials, the error analysis is demonstrated for the linear equations. In the final chapter, to illustrate the applicability, implementation and efficiency of the presented methods to the linear and nonlinear equations, some examples are considered.

KEYWORDS: Bernstein polynomials, Bernstein approximation, collocation method, quasilinearization technique, linear and nonlinear differential, integral and integrodifferential equations

İÇİNDEKİLER

Sayfa

ÖZET.....	i
ABSTRACT	ii
İÇİNDEKİLER	iii
ŞEKİL LİSTESİ.....	iv
TABLO LİSTESİ	v
ÖNSÖZ.....	vi
1. TEMEL KAVRAM VE BAĞINTILAR.....	1
1.1 Giriş	1
1.2 Genelleştirilmiş Bernstein Baz Polinomları ve Özellikleri	5
1.3 Genelleştirilmiş Bernstein Polinomları ve Türevi.....	16
2. LİNEER DENKLEMLER İÇİN BERNSTEIN SIRALAMA YÖNTEMİ 18	18
2.1 Giriş	18
2.2 Diferansiyel Denklemler için Temel Bağntı	22
2.3 İntegral Denklemler için Temel Bağntılar	24
2.4 İntegrodiferansiyel Denklemler için Temel Bağntı	29
2.5 Çözüm Yöntemi.....	32
3. LİNEER OLMAYAN DENKLEMLER İÇİN BERNSTEIN	37
SIRALAMA YÖNTEMİ.....	37
3.1 Giriş	37
3.2 Diferansiyel Denklemler için Temel Bağntılar	41
3.3 İntegral Denklemler için Temel Bağntı	45
3.4 İntegrodiferansiyel Denklemler için Temel Bağntı	48
3.5 Çözüm Yöntemi.....	52
4. LİNEER DENKLEMLER İÇİN HATA ANALİZİ	55
4.1 Giriş	55
4.2 Diferansiyel Denklemler için Hata Analizi	62
4.3 İntegral Denklemler için Hata Analizi	64
4.4 İntegrodiferansiyel Denklemler için Hata Analizi	67
5. UYGULAMALAR.....	71
5.1 Giriş	71
5.2 Lineer Denklemler için Uygulamalar	73
5.3 Lineer Olmayan Denklemler için Uygulamalar	93
6. SONUÇ VE ÖNERİLER	102
7. KAYNAKLAR.....	106
8. EKLER.....	114
EK A.....	114
EK B	119
9. ÖZGEÇMİŞ	122

ŞEKİL LİSTESİ

	<u>Sayfa</u>
Şekil 5.1: Örnek 5.2.3 için tam çözümün sunulan yöntem ile elde edilen yaklaşık çözüm ile karşılaştırılması.....	82
Şekil 5.2: Örnek 5.2.4 için tam çözümün sunulan yöntem ile elde edilen yaklaşık çözüm ile karşılaştırılması.....	83
Şekil 5.3: Örnek 5.2.10 için sunulan yöntem ile elde edilen mutlak hata sonuçları.....	91
Şekil 5.4: Örnek 5.3.3 için sunulan yöntem ile farklı r değerleri için elde edilen yaklaşık çözüm sonuçları.....	98

TABLO LİSTESİ

Sayfa

Tablo 5.1:	Örnek 5.2.1 için $x_s = s/n$; $s = 0, \dots, n$ noktaları üzerindeki maksimum hata sonuçları	76
Tablo 5.2:	Örnek 5.2.1 için $x_s = s/(n+1)$; $s = 1, \dots, n+1$ noktaları üzerindeki maksimum hata sonuçları	76
Tablo 5.3:	Örnek 5.2.1 için $x_s = s/(n+2)$; $s = 1, \dots, n+1$ noktaları üzerindeki maksimum hata sonuçları	77
Tablo 5.4:	Örnek 5.2.1 için $x_s = (1 - \cos(\frac{\pi s}{n}))/2$; $s = 0, \dots, n$ noktaları üzerindeki maksimum hata sonuçları	77
Tablo 5.5:	Örnek 5.2.1 için $x_s = s/(n-m)$; $s = 0, \dots, n-m$ noktaları üzerinde silmeden ekleyerek elde edilen maksimum hata sonuçları 78	
Tablo 5.6:	Örnek 5.2.1 için koşul sayısı analizi	78
Tablo 5.7:	Örnek 5.2.2 için $x_s = s/n$; $s = 0, \dots, n$ noktaları üzerindeki maksimum hata sonuçları	79
Tablo 5.8:	Örnek 5.2.2 için $x_s = s/(n+1)$; $s = 1, \dots, n+1$ noktaları üzerindeki maksimum hata sonuçları	79
Tablo 5.9:	Örnek 5.2.2 için $x_s = s/(n+2)$; $s = 1, \dots, n+1$ noktaları üzerindeki maksimum hata sonuçları	80
Tablo 5.10:	Örnek 5.2.2 için $x_s = (1 - \cos(\frac{\pi s}{n}))/2$; $s = 0, \dots, n$ noktaları üzerindeki maksimum hata sonuçları	80
Tablo 5.11:	Örnek 5.2.2 için $x_s = s/(n-m)$; $s = 0, \dots, n-m$ noktaları üzerinde silmeden ekleyerek elde edilen maksimum hata sonuçları 81	
Tablo 5.12:	Örnek 5.2.2 için $ e_n(x) $ mutlak hatalarının karşılaştırılması.....	81
Tablo 5.13:	Örnek 5.2.3 için $e_{max}(n)$ maksimum hata karşılaştırma.....	82
Tablo 5.14:	Örnek 5.2.4 için $\varepsilon_n(x)$ bağıl hata karşılaştırma.....	84
Tablo 5.15:	Örnek 5.2.5 için ortalama hata analizi	85
Tablo 5.16:	Örnek 5.2.5 için alternatif yöntem ile ortalama hata analizi.....	85
Tablo 5.17:	Örnek 5.2.6 için ortalama hata analizi	86
Tablo 5.18:	Örnek 5.2.6 için $e_{kök}(n)$ karşılaştırma	87
Tablo 5.19:	Örnek 5.2.7 için $e_{max}(n)$ maksimum hata karşılaştırma.....	87
Tablo 5.20:	Örnek 5.2.7 için ortalama hata analizi	88
Tablo 5.21:	Örnek 5.2.7 için alternatif yöntem ile ortalama hata analizi.....	88
Tablo 5.22:	Örnek 5.2.8 için $ e_n(x) $ mutlak hata karşılaştırma	89
Tablo 5.23:	Örnek 5.2.9 için $e_{kök}(n)$ karşılaştırma	90
Tablo 5.24:	Örnek 5.2.10 için $e_{ort}(n)$ ortalama hata karşılaştırma	93
Tablo 5.25:	Örnek 5.3.1'in üçüncü iterasyon için mutlak hata analizi	94
Tablo 5.26:	Örnek 5.3.1 için mutlak hataların karşılaştırılması.....	94
Tablo 5.27:	Örnek 5.3.2 için $e_{max}(n)$ maksimum hata analizi	95
Tablo 5.28:	Örnek 5.3.2 için $E_{max}(r)$ maksimum hata analizi.....	96
Tablo 5.29:	Örnek 5.3.2 için maksimum hataların karşılaştırılması	96
Tablo 5.30:	Örnek 5.3.3 için $e_{ort}(n)$ ortalama hata analizi	97
Tablo 5.31:	Örnek 5.3.3 için $ e_n(x) $ mutlak hata karşılaştırma	98
Tablo 5.32:	Örnek 5.3.4 için $e_{ort}(n)$ ortalama hata analizi.....	99
Tablo 5.33:	Örnek 5.3.5 için $e_2(n)$ hatasının karşılaştırması.....	100
Tablo 5.34:	Örnek 5.3.6 için mutlak hata analizi	101

ÖNSÖZ

Doktora tez çalışmam boyunca bilgilerinden, tecrübe ve deneyimlerinden yararlandığım değerli danışman hocam sayın Prof. Dr. Ayşegül Daşcıoğlu, sayın Prof. Dr. Mehmet Sezer, sayın Doç Dr. İbrahim Çelik ve sayın Prof. Dr. Ravi P. Agarwal'a sonsuz saygı, hürmet ve teşekkürlerimi sunarım. Ayrıca bu süreçte göstermiş oldukları sabır ve anlayışlarından ötürü sayın Prof. Dr. Mustafa Kemal Sağel hocama ve tüm akademisyen arkadaşlarıma şükranlarımı bildiririm.

Hayatıma girişinden bu yana maddi ve manevi hiçbir desteğini esirgemeyen eşim Utku Acar'a ve hayatımın tüm aşamasında beni yalnız bırakmayan aileme minneti borç bilirim.

Neşe İŞLER ACAR

1. TEMEL KAVRAM VE BAĞINTILAR

1.1 Giriş

1900'lü yılların başında Vito Volterra, nüfus artışı fenomeni üzerine olan çalışması için yeni tipte denklemler geliştirmiş ve bu denklemleri integrodiferansiyel denklemler olarak isimlendirmiştir. Bu tipteki denklemler; bilinmeyen fonksiyon ve türevlerini ya da integral işareti altında bilinmeyen fonksiyonun türevlerini içeren denklemler olarak tanımlanır. Özel olarak integrodiferansiyel denklemler, bilinmeyen fonksiyon ve türevlerini içeren diferansiyel denklemler ve integral işareti altında bilinmeyen fonksiyon içeren integral denklemlere indirgenir. Kimya, biyoloji, mekanik, mühendislik, finans, endüstri gibi birçok fiziksel ve matematiksel problemler integrodiferansiyel denklemler ile modellenebilir (Rahman 2007).

İntegrodiferansiyel denklemler gibi çeşitli denklemlerin çözümü için kullanılan analitik yöntemler, matematiksel modelleme üzerine çalışmada her zaman temel yöntemler olarak gözönüne alınır. Fakat çoğu matematiksel modelleri analitik yolla çözmek mümkün değildir. Bu nedenle yaklaşık olarak çözüm üreten, hesaba dayalı yöntemler ile ilgilenilir. Uygulamaya dayalı bu tip matematiksel modellerin çözümünde en sık kullanılan nümerik yöntemlerden biri sıralama yöntemidir. Bu yöntem; verilen bir denklemin gerçek çözümüne, belirli bir sonlu boyutlu uzaya ait olan en uygun fonksiyon ile yaklaşım esasına dayanır. Bu yöntemde, sıralama noktaları olarak bilinen ayırık noktalar ve yaklaşım yapacak olan fonksiyon genellikle cebirsel bir polinom olmak üzere sıralama noktaları üzerinde denklemini sağlayacak şekilde seçilir. Bu durum ise sıralama noktaları üzerinde yöntemin hatasının sıfır olmasına mecbur bırakır. Bundan dolayı verilen herhangi bir denklem bu noktalarda sağlanmış olur. Bu yöntemin en göze çarpan özellikleri, uygulamaları kolaylaştırması ve çözümler için yüksek dereceli bir doğruluk sağlamasıdır.

Diferansiyel denklemlerdeki başlangıç değer problemleri için polinom ya da parçalı polinomlara dayalı sıralama yöntemi üzerine sistematik olarak ilk kez 1960'lı yılların sonlarında çalışılmıştır. Günümüzde ise lineer ve lineer olmayan diferansiyel, integral ve integrodiferansiyel denklemlerin çözümü için Chebyshev sıralama yöntemi (Akyüz-Daşcıoğlu 2006, Yang ve Hou 2010, Akyüz-Daşcıoğlu ve Çerdik-Yaslan 2011, Yüksel ve diğ. 2012), Hermite sıralama yöntemi (Parand ve diğ. 2010), shifted Jacobi-Gauss sıralama yöntemi (Bhrawy 2012), Legendre sıralama yöntemi (Yalçınbaş ve diğ. 2009), Bessel sıralama yöntemi (Yüzbaşı ve diğ. 2012) gibi çeşitli polinomlara dayalı pek çok sıralama yöntemi geliştirilmiştir. Diğer yazarlardan farklı olarak Akyüz-Daşcıoğlu (2006), El-Hawary ve El-Sheshtawy (2010) çalışmalarında, integral kısmında bilinmeyen fonksiyonun türevlerini içeren integrodiferansiyel denklemlerin nümerik çözümlerini gözönüne almıştır.

Literatürde, lineer ve lineer olmayan diferansiyel, integral ve integrodiferansiyel denklemleri çözmek için sıralama yöntemi dışında yakın zamanda geliştirilen birçok nümerik yöntem vardır. Bu nümerik yöntemlerden bazıları; lineer diferansiyel denklemler için Sinc-Galerkin yöntemi (El-Gamel ve diğ. 2003), Adomian ayrıştırma yöntemi (Mestrovic 2007), septic spline yöntemi (Siddiqi ve Akram 2008), lineer integral denklemler için Taylor açılım yöntemi (Chen ve Jiang 2012), sabit nokta yöntemi (Caliò ve diğ. 2010), lineer integrodiferansiyel denklemler için varyasyonel iterasyon yöntemi (Noor ve Mohyud-Din 2007), Chebyshev polinomlarına dayalı spektral yöntem (El-Hawary ve El-Sheshtawy 2010), lineer olmayan diferansiyel denklemler için Legendre wavelet yaklaşımı (Aminikhah ve Moradian 2013), shifted Jacobi-Gauss sıralama spektral yöntemi (Bhrawy ve Alofi 2012), C^1 -lineerleştirme (Ramos 2004), sonlu-fark yöntemi (Kumar 2002), değiştirilmiş ayrıştırma yöntemi (Wazwaz 2001), lineer olmayan integral denklemler için kuasilineerleştirme tekniği kullanarak sıralama yöntemine dayalı yöntem (Maleknejad ve Najafi 2011), lineer olmayan integrodiferansiyel denklemler için Hybrid yöntemi (Marzban ve Hoseini 2012), direk yöntem (Babolian ve diğ. 2009), sabit nokta yöntemi (Berenguer 2013) şeklinde sıralanabilir.

Polinomlar; kolay tanımlanabilir, modern bilgisayar sisteminde hızlı hesaplanabilir ve çeşitli fonksiyonları ifade edebilir olduğundan en çok kullanılan matematik aracıdır. Bundan dolayı, yıllardır yaklaşımlar teorisi ve nümerik analizde önemli bir rol oynar. Özellikle son yıllarda Bernstein polinomları, birçok araştırmacının dikkatini çekmektedir. Bézier eğrilerinin ve bilgisayar takviyeli geometrik tasarımlardaki (CAGD) yüzeylerin bir çok özelliği Bernstein polinomlarının özelliklerinden elde edilir (Farin 2002). Bunun yanı sıra çeşitli yaklaşım yöntemleri kullanılarak, farklı tipteki denklemlerin çözümü için bu polinomlardan yararlanır. Örneğin; lineer diferansiyel denklemleri, yüksek mertebeden pantograf denklemi ve zayıf singüler çekirdekli Volterra integrodiferansiyel denklemi çözmek için Bernstein seri çözümüne dayanan rasyonel interpolasyon ve sıralama yöntemi (Işık ve diğ. 2010) geliştirilmiştir. Cauchy çekirdekli singüler integrodiferansiyel denklemin nümerik çözümünü elde etmek için Bernstein polinomları kullanılarak polinom yaklaşımına dayalı bir yöntem (Bhattacharya ve Mandal 2008^b, Işık ve diğ. 2011^{a,b}) sunulmuştur. Lineer ve lineer olmayan diferansiyel denklemlerin, lineer Volterra integrodiferansiyel denklemlerin nümerik çözümü, Bernstein polinomlarının lineer kombinasyonu olarak verilmiş ve buradaki katsayılar Galerkin yöntemi (Bhatti ve Bracken 2007, Pandya ve Joshi 2011) ile belirlenmiştir. Yüksek çift-mertebeli sınır değer problemlerinin yaklaşık çözümünü elde etmek için Bernstein polinomlarının özelliklerinden yararlanılarak bu polinomların herhangi mertebeden türevleri ve integralleri için açık formüller türetilmiş, Bernstein Galerkin, Bernstein Petrov-Galerkin ve türetilen açılımların katsayılarını kullanma yöntemleri (Doha ve diğ. 2011^{a,b}) uygulanmıştır. İntegral şartları ile verilen hiperbolik kısmi türevli denklemin yaklaşık çözümünü elde etmek için Bernstein polinomlarının ve Ritz-Galerkin yönteminin özellikleri gözönüne alınarak Bernstein polinomlarına dayalı Ritz-Galerkin yöntemi (Yousefi ve Dehghan 2009) üretilmiş ve sonrasında Ritz-Galerkin yöntemi, kısmi türevli denklemin çözümünü cebirsel denklemin çözümüne indirgemek için kullanılmıştır. Üçüncü mertebeden lineer olmayan özel bir kısmi türevli denklem olan Korteweg-de Vries (KDV) denkleminin yaklaşık çözümü için değiştirilmiş Bernstein baz polinomlarına dayanan algoritma sunulmuş ve katsayıları belirlemek için Galerkin yöntemi (Bhatta ve Bhatti 2006)

kullanılmıştır. İkinci mertebeden değişken katsayılı adi diferansiyel denklemin özel bir hali olan Harmonik Oskilatör denkleminin yaklaşık çözümü için Bernstein baz polinomları ile bir yöntem (Bhatti 2009) üretilmiştir. Kuantum mekanik sistemdeki bu denklemin enerji spektrumunu, yani özdeğerlerini elde etmek için Bernstein Galerkin yöntemi kullanılmıştır. Birinci ve ikinci çeşit regüler ve singüler çekirdekli Volterra integral denklemlerin, ikinci çeşit Fredholm integral denklemin, basit ve ikinci çeşit hiper-singüler integral denklemin nümerik çözümleri için Bernstein polinomlarından (Mandal ve Bhattacharya 2007, Bhattacharya ve Mandal 2008^a) yararlanılmıştır. Abel tipli singüler integral denklemini çözmek için normalleştirilmiş Bernstein polinomlarına dayalı yeni bir nümerik yöntem (Singh ve diğ. 2009^a) geliştirilmiştir. Yine Bernstein polinomları kullanılarak Galerkin yöntemi (Shirin ve Islam 2010) ile singüler olmayan Fredholm integral denkleminin nümerik çözümü elde edilmiştir. Lane-Emden tipli diferansiyel denklemlerin çözümü için Bernstein polinomlarına dayalı integrasyonun işlevsel matrisi (Kumar ve diğ. 2011), türevlemenin işlevsel matrisi (Pandey ve Kumar 2012) ve sıralama yönteminden (Isik ve Sezer 2013) yararlanılmıştır. Lineer olmayan Fredholm-Volterra integrodiferansiyel denklemin çözümünü elde etmek için Bernstein polinomlarına dayalı integrasyonun işlevsel matrisi ve sıralama yöntemi (Ordokhani ve Davaei far 2011^a) sunulmuştur.

Bernstein baz polinomları ortogonal değildir. Bundan dolayı bu baz polinomlarının en küçük kareler yaklaşım yönteminde kullanımı sınırlıdır. Bu yaklaşımda ortogonal bir baz seçiminin önemi, lineer sistemi köşegenleştirerek bunu takiben en küçük kareler katsayılarının basitçe kapalı formda ifade edilmesini sağlamasından kaynaklanır. Bu yaklaşımda Bernstein baz polinomlarının üzerindeki sınırlamayı ortadan kaldırmanın bir yolu; baz dönüşümü yapmaktır. Örneğin; Bernstein baz polinomları ile Legendre baz polinomları arasında (Farouki 2000, Ordokhani ve Davaei far 2011^b), Chebyshev baz polinomları arasında (Mazure 1999, Rababah ve diğ. 2006), Jacobi baz polinomları arasında (Rabah 2004) matris dönüşümü yapılır. Diğer bir yol ise Bernstein baz polinomlarının dual baz fonksiyonlarını (Jüttler 1998) kullanmaktır. Bunun dışında Bernstein polinomları, Gram-Schmidt

ortonormalleştirme işlemi ile ortonormal hale getirilebilir. Bu bahsedilen durumlardan biri kullanılarak çözüm yöntemi olarak integrasyonun Bernstein operasyon matrisi elde edilir. Bu matrisler; diferansiyel denklemleri, integral denklemleri, optimal kontrol denklemleri, salınım hesabı gibi problemleri çözmeye kullanılır. Lineer bir dinamik sistemi tanımlama, çözmeye ve en uygun hale getirmeye integrasyon uygulamak için fonksiyonların bir ortonormal sisteminin kullanılması; bilgisayar yönelimli olması ve böylece yüksek mertebeden diferansiyel denklemlerin boyutu düşürülerek daha kullanışlı hale getirilmesi gibi önemli avantajlara sahiptir (Singh ve diğ. 2009^b, Yousefi ve Behroozifar 2010).

Bu tez çalışmasının amacı; diferansiyel, integral ve integrodiferansiyel denklemlerin nümerik çözümlerini elde etmek için Bernstein polinomlarına dayalı sıralama yöntemi üretmektir. Bu yöntemde Bernstein polinomları için baz dönüşümü, dual baz ya da ortogonalleştirmenin kullanılması yerine doğrudan polinomun kendisini kullanarak işlem pratikliği sağlanır. Bunun yanı sıra ortaya koyulan bu yöntemle elde edilen sonuçların doğruluğa yakınlık derecesi, en küçük kareler yaklaşımı yerine Bernstein polinomlarının en iyi düzgün yaklaşım özelliklerine bakılarak irdelenir. Araştırmamın sonunda, üretilen yöntemin uygulanabilir, duyarlı ve verimli olduğu çeşitli nümerik örnekler üzerinde gösterilir.

1.2 Genelleştirilmiş Bernstein Baz Polinomları ve Özellikleri

$[0, 1]$ aralığı üzerinde tanımlanan Bernstein polinomları (Lorentz 1986, Farouki ve Rajan 1988, Joy 2000, Farin 2002) ve bu polinomların baz gösterimleri (Farouki ve Rajan 1988) $t = \frac{x-a}{b-a}$ dönüşümü ile $[a, b]$ aralığına genelleştirilebilir. $[a, b]$ aralığı üzerinde tanımlı olan Bernstein polinomları ve Bernstein baz polinomları sırasıyla genelleştirilmiş Bernstein polinomları ve genelleştirilmiş Bernstein baz polinomları olarak adlandırılabilir. Bu kısımda, genelleştirilmiş Bernstein baz polinomları tanımlanmış ve en temel özellikleri verilmiştir.

Tanım 1.2.1 $n \in \{0, 1, 2, \dots\}$ olmak üzere $[a, b]$ aralığı üzerinde n . dereceden genelleştirilmiş Bernstein baz polinomları,

$$p_{i,n}(x) = \frac{1}{(b-a)^n} \binom{n}{i} (x-a)^i (b-x)^{n-i}; \quad i = 0, 1, \dots, n$$

ile tanımlanır. Burada $\binom{n}{i} = \frac{n!}{i!(n-i)!}$ binom katsayıları ve $\binom{n}{i} (x-a)^i (b-x)^{n-i}$ binom fonksiyonudur. n . dereceden $n+1$ tane polinom vardır. Kolaylık olması açısından $i < 0$ veya $i > n$ için $p_{i,n}(x) = 0$ kabul edilir.

Özellik 1.2.1 (Pozitif tanımlılık) Tüm $x \in [a, b]$ için $p_{i,n}(x) \geq 0$ 'dır.

Özellik 1.2.2 Genelleştirilmiş Bernstein baz polinomları

$$p_{i,n}(a) = \begin{cases} 1 & ; \quad i = 0 \\ 0 & ; \quad i > 0 \end{cases}, \quad p_{i,n}(b) = \begin{cases} 1 & ; \quad i = n \\ 0 & ; \quad i < n \end{cases}$$

koşullarını sağlar.

İspat: Farouki (2012), $[0, 1]$ aralığı üzerinde bu özelliğe değinmiştir. $[a, b]$ aralığı üzerinde Tanım 1.2.1 ve $i > 0$ veya $i < n$ için $p_{i,n}(x) = 0$ kabulü gözönüne alınarak $i = 0$, $i > 0$, $i = n$ ve $i < n$ için sırasıyla

$$\begin{aligned} p_{0,n}(a) &= \frac{1}{(b-a)^n} \binom{n}{0} (b-a)^n = 1, \\ p_{i,n}(a) &= 0, \\ p_{n,n}(b) &= \frac{1}{(b-a)^n} \binom{n}{n} (b-a)^n = 1, \\ p_{i,n}(b) &= 0 \end{aligned}$$

değerleri bulunur.

Özellik 1.2.3 (Simetri) Her $x \geq 0$ için $p_{n-i,n}(x+a) = p_{i,n}(b-x)$ gerçeklenir.

İspat: $[0, 1]$ aralığı üzerinde bu özelliğe Farouki (2012) değinmiştir. Bu özelliğin $[a, b]$ aralığı üzerinde geçerli olduğu, Tanım 1.2.1 gözönüne alınarak

$$\begin{aligned} p_{n-i,n}(x+a) &= \frac{1}{(b-a)^n} \binom{n}{n-i} x^{n-i} (b-a-x)^i \\ &= \frac{1}{(b-a)^n} \binom{n}{i} (b-x-a)^i x^{n-i} \\ &= p_{i,n}(b-x) \end{aligned}$$

şeklinde gösterilir.

Özellik 1.2.4 (Rekürans bağıntısı) n . dereceden genelleştirilmiş Bernstein baz polinomları, $(n - 1)$. dereceden genelleştirilmiş Bernstein baz polinomlarının lineer bileşimi olarak yazılabilir:

$$p_{i,n}(x) = \frac{1}{b-a} [(b-x)p_{i,n-1}(x) + (x-a)p_{i-1,n-1}(x)].$$

İspat: Bu özelliğin ifade ve ispatı $[0, 1]$ aralığı üzerinde Farin (2002) tarafından verilmiştir. Burada $[a, b]$ aralığına genişleterek verelim. Bunun için Tanım 1.2.1 gözönüne alınarak

$$\begin{aligned} p_{i,n}(x) &= \frac{1}{(b-a)^n} \binom{n}{i} (x-a)^i (b-x)^{n-i} \\ &= \frac{1}{(b-a)^n} \left[\binom{n-1}{i} + \binom{n-1}{i-1} \right] (x-a)^i (b-x)^{n-i} \\ &= \frac{1}{(b-a)^n} \binom{n-1}{i} (x-a)^i (b-x)^{n-i} \\ &\quad + \frac{1}{(b-a)^n} \binom{n-1}{i-1} (x-a)^i (b-x)^{n-i} \\ &= \frac{1}{b-a} \left[(b-x) \left(\frac{1}{(b-a)^{n-1}} \binom{n-1}{i} (x-a)^i (b-x)^{n-1-i} \right) \right. \\ &\quad \left. + (x-a) \left(\frac{1}{(b-a)^{n-1}} \binom{n-1}{i-1} (x-a)^{i-1} (b-x)^{n-1-(i-1)} \right) \right] \\ &= \frac{1}{b-a} [(b-x)p_{i,n-1}(x) + (x-a)p_{i-1,n-1}(x)] \end{aligned}$$

istenen bağıntı elde edilir.

Özellik 1.2.5 n . dereceden genelleştirilmiş Bernstein baz polinomlarının $n + 1$ toplamı, $(n - 1)$. dereceden genelleştirilmiş Bernstein baz polinomlarının n toplamına eşittir:

$$\sum_{i=0}^n p_{i,n}(x) = \sum_{i=0}^{n-1} p_{i,n-1}(x).$$

İspat: Bu özelliğin ifade ve ispatı $[0, 1]$ aralığı üzerinde Joy (2000) tarafından verilmiştir. Şimdi bu özelliğin $[a, b]$ aralığı üzerinde de geçerli olduğunu gösterelim. Özellik 1.2.4 ve $i < 0$ veya $i > n$ için $p_{i,n}(x) = 0$ olma şartı gözönüne alınırsa

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^n p_{i,n}(x) &= \frac{1}{b-a} \sum_{i=0}^n [(b-x)p_{i,n-1}(x) + (x-a)p_{i-1,n-1}(x)] \\
&= \frac{b-x}{b-a} \sum_{i=0}^{n-1} [p_{i,n-1}(x) + p_{n,n-1}(x)] \\
&\quad + \frac{x-a}{b-a} \sum_{i=1}^n [p_{i-1,n-1}(x) + p_{-1,n-1}(x)] \\
&= \frac{b-x}{b-a} \sum_{i=0}^{n-1} p_{i,n-1}(x) + \frac{x-a}{b-a} \sum_{i=1}^n p_{i-1,n-1}(x) \\
&= \frac{b-x}{b-a} \sum_{i=0}^{n-1} p_{i,n-1}(x) + \frac{x-a}{b-a} \sum_{i=0}^{n-1} p_{i,n-1}(x) \\
&= \frac{b-x+x-a}{b-a} \sum_{i=0}^{n-1} p_{i,n-1}(x) \\
&= \sum_{i=0}^{n-1} p_{i,n-1}(x)
\end{aligned}$$

istenen ifade elde edilir.

Özellik 1.2.6 (Birim parçalanma) n . dereceden genelleştirilmiş Bernstein baz polinomlarının $n+1$ teriminin toplamı 1'e eşittir.

$$\sum_{i=0}^n p_{i,n}(x) = \sum_{i=0}^{n-1} p_{i,n-1}(x) = \dots = \sum_{i=0}^1 p_{i,1}(x) = 1.$$

İspat: Bu özelliğin ifade ve ispatı $[0, 1]$ aralığı üzerinde Joy (2000) tarafından verilmiştir. Şimdi bu özelliği $[a, b]$ aralığına genişleterek verelim. Tanım 1.2.1, Özellik 1.2.5 ve binom açılımı¹ gözönüne alınarak sırasıyla

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^n p_{i,n}(x) &= \sum_{i=0}^{n-1} p_{i,n-1}(x) \\
&= \frac{1}{(b-a)^{n-1}} \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n-1}{i} (x-a)^i (b-x)^{n-1-i} \\
&= \frac{1}{(b-a)^{n-1}} (x-a+b-x)^{n-1} \\
&= 1,
\end{aligned}$$

¹ x ve y pozitif sayılar, $n \in \{0, 1, 2, \dots\}$ olmak üzere binom açılımı, $(x+y)^n = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} x^i y^{n-i}$ olarak tanımlanır.

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{n-2} p_{i,n-2}(x) &= \frac{1}{(b-a)^{n-2}} \sum_{i=0}^{n-2} \binom{n-2}{i} (x-a)^i (b-x)^{n-2-i} \\
&= \frac{1}{(b-a)^{n-2}} (x-a+b-x)^{n-2} \\
&= 1, \\
&\vdots \\
\sum_{i=0}^1 p_{i,1}(x) &= \frac{1}{b-a} [(b-x) + (x-a)] = 1
\end{aligned}$$

bulunur.

Özellik 1.2.7 (Derece yükseltme) n . dereceden genelleştirilmiş Bernstein baz polinomları, $(n+1)$. dereceden genelleştirilmiş Bernstein baz polinomlarının lineer bileşimi olarak yazılabilir:

$$p_{i,n}(x) = \frac{n-i+1}{n+1} p_{i,n+1}(x) + \frac{i+1}{n+1} p_{i+1,n+1}(x).$$

İspat: Bu özelliğin $[0, 1]$ aralığı üzerinde ifade ve ispatı Joy (2000) tarafından verilmiştir. $[a, b]$ aralığı üzerinde ise aşağıdaki iki eşitlik taraf tarafa toplanarak istenen elde edilir:

$$\begin{aligned}
\left(1 - \frac{x-a}{b-a}\right) p_{i,n}(x) &= \frac{1}{(b-a)^{n+1}} \binom{n}{i} (x-a)^i (b-x)^{n+1-i} \\
&= \frac{\binom{n}{i}}{\binom{n+1}{i}} \frac{1}{(b-a)^{n+1}} \binom{n+1}{i} (x-a)^i (b-x)^{n+1-i} \\
&= \frac{\binom{n}{i}}{\binom{n+1}{i}} p_{i,n+1}(x) \\
&= \frac{n-i+1}{n+1} p_{i,n+1}(x), \\
\frac{x-a}{b-a} p_{i,n}(x) &= \frac{1}{(b-a)^{n+1}} \binom{n}{i} (x-a)^{i+1} (b-x)^{n-i} \\
&= \frac{\binom{n}{i}}{\binom{n+1}{i+1}} \frac{1}{(b-a)^{n+1}} \binom{n+1}{i+1} (x-a)^{i+1} (b-x)^{n+1-(i+1)} \\
&= \frac{\binom{n}{i}}{\binom{n+1}{i+1}} p_{i+1,n+1}(x) \\
&= \frac{i+1}{n+1} p_{i+1,n+1}(x).
\end{aligned}$$

Özellik 1.2.8 n . ve m . dereceden genelleştirilmiş iki Bernstein baz polinomunun çarpımı:

$$p_{i,n}(x)p_{j,m}(x) = \frac{\binom{n}{i}\binom{m}{j}}{\binom{n+m}{i+j}}p_{i+j,n+m}(x).$$

İspat: Tanım 1.2.1 gözönüne alınarak

$$\begin{aligned} p_{i,n}(x)p_{j,m}(x) &= \frac{1}{(b-a)^n} \binom{n}{i} (x-a)^i (b-x)^{n-i} \\ &\quad \frac{1}{(b-a)^m} \binom{m}{j} (x-a)^j (b-x)^{m-j} \\ &= \frac{1}{(b-a)^{n+m}} \binom{n}{i} \binom{m}{j} (x-a)^{i+j} (b-x)^{n+m-(i+j)} \\ &= \frac{\binom{n}{i}\binom{m}{j}}{\binom{n+m}{i+j}} \frac{1}{(b-a)^{n+m}} \binom{n+m}{i+j} (x-a)^{i+j} (b-x)^{n+m-(i+j)} \\ &= \frac{\binom{n}{i}\binom{m}{j}}{\binom{n+m}{i+j}} p_{i+j,n+m}(x) \end{aligned}$$

istenen eşitlik bulunur. Bu özelliğin $[0, 1]$ aralığı üzerinde verilen ifadesi için Farouki ve Rajan'a (1988) bakınız.

Özellik 1.2.9 (Türevlenebilme) n . dereceden genelleştirilmiş Bernstein baz polinomlarının birinci türevi, $(n-1)$. dereceden genelleştirilmiş Bernstein baz polinomlarının lineer bileşimi olarak yazılabilir:

$$\frac{d}{dx}p_{i,n}(x) = \frac{n}{b-a} [p_{i-1,n-1}(x) - p_{i,n-1}(x)].$$

İspat: Bu özelliğin $[0, 1]$ aralığı üzerinde ifade ve ispatı Joy (2000) tarafından verilmiştir. $[a, b]$ aralığı üzerinde ise Tanım 1.2.1 gözönüne alınarak

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}p_{i,n}(x) &= \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{(b-a)^n} \binom{n}{i} (x-a)^i (b-x)^{n-i} \right) \\ &= \frac{1}{(b-a)^n} \binom{n}{i} \left[i(x-a)^{i-1} (b-x)^{n-i} \right. \\ &\quad \left. - (n-i)(x-a)^i (b-x)^{n-i-1} \right] \\ &= \frac{n}{(b-a)^n} \frac{(n-1)!}{(i-1)!(n-i)!} (x-a)^{i-1} (b-x)^{n-i} \\ &\quad - \frac{n}{(b-a)^n} \frac{(n-1)!}{i!(n-i-1)!} (x-a)^i (b-x)^{n-i-1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{n}{b-a} \left[\frac{1}{(b-a)^{n-1}} \binom{n-1}{i-1} (x-a)^{i-1} (b-x)^{n-1-(i-1)} \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{(b-a)^{n-1}} \binom{n-1}{i} (x-a)^i (b-x)^{(n-1)-i} \right] \\
&= \frac{n}{b-a} [p_{i-1,n-1}(x) - p_{i,n-1}(x)]
\end{aligned}$$

gerçeklendiği görülür.

Özellik 1.2.10 $(n+k)$. dereceden genelleştirilmiş Bernstein baz polinomlarının k . türevi, n . dereceden genelleştirilmiş Bernstein baz polinomları cinsinden aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$p_{i,n+k}^{(k)}(x) = \frac{(n+k)!}{n!(b-a)^k} \sum_{s=0}^k (-1)^{k-s} \binom{k}{s} p_{i-s,n}(x).$$

İspat: Bu özelliğin $[0, 1]$ aralığı üzerinde Phillips (2003) tarafından verilen ifade ve ispatını $[a, b]$ aralığına genişleterek verelim. Bunun için öncelikle Tanım 1.2.1'den kolaylıkla yazılabilen

$$p_{i,n+k}^{(k)}(x) = \frac{1}{(b-a)^{n+k}} \binom{n+k}{i} \frac{d^k}{dx^k} (x-a)^i (b-x)^{n+k-i}$$

türev ifadesini ele alalım.

Leibniz Kuralı² gözönüne alınarak, yukarıdaki eşitliğin sağındaki çarpımın türevi

$$\frac{d^k}{dx^k} (x-a)^i (b-x)^{n+k-i} = \sum_{s=0}^k \binom{k}{s} \frac{d^s}{dx^s} (x-a)^i \frac{d^{k-s}}{dx^{k-s}} (b-x)^{n+k-i}$$

haline gelir. Buradan

$$\frac{d^s}{dx^s} (x-a)^i = \begin{cases} \frac{i!}{(i-s)!} (x-a)^{i-s} & ; i-s \geq 0 \\ 0 & ; i-s < 0 \end{cases},$$

²Diferansiyellenebilir iki fonksiyonun çarpımının k . türevi için Leibniz kuralı:
 $\frac{d^k}{dx^k} (f(x)g(x)) = \sum_{r=0}^k \binom{k}{r} \frac{d^r}{dx^r} f(x) \frac{d^{k-r}}{dx^{k-r}} g(x).$

$$\frac{d^{k-s}}{dx^{k-s}} (x-a)^{n+k-i} = \begin{cases} (-1)^{k-s} \frac{(n+k-i)!}{(n+s-i)!} (b-x)^{n+s-i} & ; i-s \leq n \\ 0 & ; i-s > n \end{cases}$$

bulunur. Bu durumda $(n+k)$. dereceden genelleştirilmiş Bernstein baz polinomlarının k . türevi

$$p_{i,n+k}^{(k)}(x) = \frac{1}{(b-a)^{n+k}} \sum_{s=0}^k (-1)^{k-s} \binom{k}{s} \binom{n+k}{i} \frac{i!}{(i-s)!} \frac{(n+k-i)!}{(n+s-i)!} (x-a)^{i-s} (b-x)^{n+s-i}$$

halini alır.

$$\binom{n+k}{i} \frac{i!}{(i-s)!} \frac{(n+k-i)!}{(n+s-i)!} = \frac{(n+k)!}{n!} \binom{n}{i-s}$$

şeklinde düzenlenirse

$$\begin{aligned} p_{i,n+k}^{(k)}(x) &= \frac{(n+k)!}{n! (b-a)^k} \sum_{s=0}^k (-1)^{k-s} \binom{k}{s} \frac{1}{(b-a)^n} \binom{n}{i-s} (x-a)^{i-s} (b-x)^{n+s-i} \\ &= \frac{(n+k)!}{n! (b-a)^k} \sum_{s=0}^k (-1)^{k-s} \binom{k}{s} p_{i-s,n}(x) \end{aligned}$$

istenen eşitlik elde edilir.

Özellik 1.2.11 Genelleştirilmiş Bernstein baz polinomlarının $x \in [a, b]$ değişkenine bağlı belirsiz integrali ve $[a, b]$ aralığı üzerinde belirli integrali sırasıyla aşağıdaki gibidir:

$$\int_a^x p_{i,n}(t) dt = \frac{b-a}{n+1} \sum_{s=i+1}^{n+1} p_{s,n+1}(x), \quad \int_a^b p_{i,n}(t) dt = \frac{b-a}{n+1}.$$

İspat: Bu özelliğin ispatı, $[0, 1]$ aralığı üzerinde Farouki ve Rajan (1988) tarafından verilen benzer yol takip edilerek $[a, b]$ aralığına genişletilebilir. Bunun için Özellik 1.2.9 kullanılarak, $i = 0, 1, \dots, n$ için

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} p_{i+1,n+1}(x) &= \frac{n+1}{b-a} [p_{i,n}(x) - p_{i+1,n}(x)] \\ \frac{d}{dx} p_{i+2,n+1}(x) &= \frac{n+1}{b-a} [p_{i+1,n}(x) - p_{i+2,n}(x)] \\ &\vdots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}p_{n,n+1}(x) &= \frac{n+1}{b-a} [p_{n-1,n}(x) - p_{n,n}(x)] \\ \frac{d}{dx}p_{n+1,n+1}(x) &= \frac{n+1}{b-a} [p_{n,n}(x) - p_{n+1,n}(x)]\end{aligned}$$

türev bağıntıları yazılabilir. Bu bağıntılar taraf tarafa toplanırsa, $i > n$ için $p_{i,n}(x) = 0$ olduğundan

$$\sum_{s=i+1}^{n+1} \frac{d}{dx}p_{s,n+1}(x) = \frac{n+1}{b-a} p_{i,n}(x)$$

elde edilir. Bu eşitliğin her iki tarafının a 'dan x 'e göre integrali alınırsa, Özellik

1.2.2'den dolayı $\sum_{s=i+1}^{n+1} p_{s,n+1}(a) = 0$ olduğundan

$$\begin{aligned}\sum_{s=i+1}^{n+1} \int_a^x \frac{d}{dt}p_{s,n+1}(t) dt &= \frac{n+1}{b-a} \int_a^x p_{i,n}(t) dt \\ \sum_{s=i+1}^{n+1} [p_{s,n+1}(x) - p_{s,n+1}(a)] &= \frac{n+1}{b-a} \int_a^x p_{i,n}(t) dt \\ \sum_{s=i+1}^{n+1} p_{s,n+1}(x) &= \frac{n+1}{b-a} \int_a^x p_{i,n}(t) dt\end{aligned}$$

olur. Diğer yandan $x = b$ için yukarıdaki belirli integralin değeri; Özellik 1.2.2'den

dolayı $\sum_{s=i+1}^{n+1} p_{s,n+1}(b) = 1$ olduğundan

$$\int_a^b p_{i,n}(t) dt = \frac{b-a}{n+1} \left[\sum_{s=i+1}^{n+1} p_{s,n+1}(b) - \sum_{s=i+1}^{n+1} p_{s,n+1}(a) \right] = \frac{b-a}{n+1}$$

şeklinde bulunur. Bu da ispatı tamamlar.

Sonuç 1.2.1 Genelleştirilmiş iki Bernstein baz polinomunun çarpımının $x \in [a, b]$ değişkenine bağlı belirsiz integrali ve $[a, b]$ aralığı üzerinde belirli integrali sırasıyla aşağıdaki gibidir:

$$\int_a^x p_{i,n}(t)p_{j,m}(t) dt = \frac{(b-a) \binom{n}{i} \binom{m}{j}}{(n+m+1) \binom{n+m}{i+j}} \sum_{r=i+j+1}^{n+m+1} p_{r,n+m+1}(x),$$

$$\int_a^b p_{i,n}(t)p_{j,m}(t)dt = \frac{(b-a) \binom{n}{i} \binom{m}{j}}{(n+m+1) \binom{n+m}{i+j}}.$$

İspat: Özellik 1.2.8 ve Özellik 1.2.11 gözönüne alınarak, iki integral sırasıyla

$$\begin{aligned} \int_a^x p_{i,n}(t)p_{j,m}(t)dt &= \frac{\binom{n}{i} \binom{m}{j}}{\binom{n+m}{i+j}} \int_a^x p_{i+j,n+m}(t) dt \\ &= \frac{\binom{n}{i} \binom{m}{j} (b-a)}{\binom{n+m}{i+j} (n+m+1)} \sum_{r=i+j+1}^{n+m+1} p_{r,n+m+1}(x), \\ \int_a^b p_{i,n}(t)p_{j,m}(t)dt &= \frac{\binom{n}{i} \binom{m}{j}}{\binom{n+m}{i+j}} \int_a^b p_{i+j,n+m}(t) dt \\ &= \frac{(b-a) \binom{n}{i} \binom{m}{j}}{(n+m+1) \binom{n+m}{i+j}} \end{aligned}$$

şeklinde bulunur.

Özellik 1.2.12 Genelleştirilmiş Bernstein baz polinomları için aşağıdaki bağıntılar geçerlidir:

$$\sum_{i=0}^n i p_{i,n}(x) = \frac{n(x-a)}{b-a}, \quad \sum_{i=0}^n i^2 p_{i,n}(x) = \frac{n(n-1)(x-a)^2}{(b-a)^2} + \frac{n(x-a)}{b-a}.$$

İspat: Natanson (1964) tarafından $[0,1]$ aralığı üzerinde ortaya koyulan bu teorem, $[a,b]$ aralığı üzerinde Özellik 1.2.6 ve Tanım 1.2.1 gözönüne alınarak aşağıdaki gibi ispatlanabilir:

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^n i p_{i,n}(x) &= \frac{1}{(b-a)^n} \sum_{i=0}^n i \binom{n}{i} (x-a)^i (b-x)^{n-i} \\ &= \frac{1}{(b-a)^n} \sum_{i=1}^n \frac{n!}{(i-1)!(n-i)!} (x-a)^i (b-x)^{n-i} \\ &= \frac{n(x-a)}{b-a} \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{(b-a)^{n-1}} \frac{(n-1)!}{i!(n-1-i)!} (x-a)^i (b-x)^{n-1-i} \\ &= \frac{n(x-a)}{b-a} \sum_{i=0}^{n-1} p_{i,n-1}(x) \\ &= \frac{n(x-a)}{b-a}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^n i^2 p_{i,n}(x) &= \frac{1}{(b-a)^n} \sum_{i=0}^n i^2 \binom{n}{i} (x-a)^i (b-x)^{n-i} \\
&= \frac{1}{(b-a)^n} \sum_{i=0}^n i \frac{(n-1)!}{(i-1)!(n-i)!} (x-a)^i (b-x)^{n-i} \\
&= \frac{n}{(b-a)^n} \left\{ \sum_{i=1}^n (i-1) \frac{(n-1)!}{(i-1)!(n-i)!} (x-a)^i (b-x)^{n-i} \right. \\
&\quad \left. + \sum_{i=1}^n \frac{(n-1)!}{(i-1)!(n-i)!} (x-a)^i (b-x)^{n-i} \right\} \\
&= \frac{n}{(b-a)^n} \left\{ \sum_{i=2}^n \frac{(n-1)!}{(i-2)!(n-i)!} (x-a)^i (b-x)^{n-i} \right. \\
&\quad \left. + \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(n-1)!}{i!(n-1-i)!} (x-a)^{i+1} (b-x)^{n-i-1} \right\} \\
&= \frac{n(n-1)(x-a)^2}{(b-a)^2} \left\{ \sum_{i=0}^{n-2} \frac{1}{(b-a)^{n-2}} \frac{(n-2)!}{i!(n-2-i)!} (x-a)^i (b-x)^{n-i-2} \right\} \\
&\quad + \frac{n(x-a)}{b-a} \left\{ \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(n-1)!}{i!(n-1-i)!} (x-a)^i (b-x)^{n-i-1} \right\} \\
&= \frac{n(n-1)(x-a)^2}{(b-a)^2} \sum_{i=0}^{n-2} p_{i,n-2}(x) + \frac{n(x-a)}{b-a} \sum_{i=0}^{n-1} p_{i,n-1}(x) \\
&= \frac{n(n-1)(x-a)^2}{(b-a)^2} + \frac{n(x-a)}{b-a}.
\end{aligned}$$

Özellik 1.2.13 Genelleştirilmiş Bernstein baz polinomları aşağıdaki bağıntıya sahiptir:

$$\sum_{i=0}^n \left(x - \left(a + \frac{(b-a)i}{n} \right) \right)^2 p_{i,n}(x) = \frac{(x-a)(b-x)}{n}.$$

İspat: $[0, 1]$ aralığı üzerinde Natanson (1964) tarafından değinilen bu özelliğin, $[a, b]$ aralığı üzerinde Özellik 1.2.6 ve Özellik 1.2.12 gözönüne alınarak

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^n \left(x - \left(a + \frac{(b-a)i}{n} \right) \right)^2 p_{i,n}(x) &= \frac{1}{n^2} \sum_{i=0}^n (n(x-a) - (b-a)i)^2 p_{i,n}(x) \\
&= (x-a)^2 \sum_{i=0}^n p_{i,n}(x) + \frac{(b-a)^2}{n^2} \sum_{i=0}^n i^2 p_{i,n}(x) \\
&\quad - 2 \frac{(x-a)(b-a)}{n} \sum_{i=0}^n i p_{i,n}(x)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{2}{n} [(n-1)(x-a)^2 + (b-a)(x-a)] \\
&\quad + (x-a)^2 - 2(x-a)^2 \\
&= \frac{(x-a)(b-x)}{n}
\end{aligned}$$

gerçeklendiği görülür.

1.3 Genelleştirilmiş Bernstein Polinomları ve Türevi

Bu kısımda, genelleştirilmiş Bernstein baz polinomlarının bir lineer bileşimi olan genelleştirilmiş Bernstein polinomları ve bu polinomların türevi tanımlanmıştır.

Tanım 1.3.1 $y : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ sürekli bir fonksiyon olsun. $[a, b]$ aralığı üzerinde n . dereceden genelleştirilmiş Bernstein polinomları

$$B_n(y; x) = \sum_{i=0}^n y \left(a + \frac{(b-a)i}{n} \right) p_{i,n}(x)$$

şeklinde tanımlanır. $p_{i,n}(x)$, Tanım 1.2.1 ile verilen Bernstein baz polinomlarıdır.

Tanım 1.3.2 $y : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ sürekli bir fonksiyon olsun. $[a, b]$ aralığı üzerinde n . dereceden genelleştirilmiş Bernstein polinomlarının k . türevi

$$B_n^{(k)}(y; x) = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{(b-a)^k} \sum_{i=0}^{n-k} \Delta_h^k y \left(a + \frac{(b-a)i}{n} \right) p_{i,n-k}(x)$$

ile tanımlanır. Burada Δ_h^k , y fonksiyonunun k . mertebeden fark operatörü olup, $h = \frac{b-a}{n}$ için aşağıdaki gibi ifade edilebilir:

$$\begin{aligned}
\Delta_h^k y \left(a + \frac{(b-a)i}{n} \right) &= y \left(a + \frac{(b-a)i}{n} + kh \right) \\
&\quad - \binom{k}{1} y \left(a + \frac{(b-a)i}{n} + (k-1)h \right) \\
&\quad + \dots + (-1)^k y \left(a + \frac{(b-a)i}{n} \right).
\end{aligned}$$

$[0, 1]$ aralığı üzerinde verilen tanım için Lorentz'e (1986) bakınız.

Özellik 1.3.1 $(n+k)$. dereceden genelleştirilmiş Bernstein polinomlarının k . türevi, $k \geq 0$ tamsayısı ve $n \geq 0$ için y fonksiyonunun k . mertebeden farkları cinsinden aşağıdaki gibi ifade edilebilir:

$$B_{n+k}^{(k)}(y; x) = \frac{(n+k)!}{n!(b-a)^k} \sum_{i=0}^n \Delta_h^k y \left(a + \frac{(b-a)i}{n+k} \right) p_{i,n}(x).$$

Burada Δ_h^k , $h = (b-a)/(n+k)$ adım sayısını belirtmektedir.

İspat: Bu özelliğin ispatını, $[0, 1]$ aralığı üzerinde Phillips (2003) tarafından verilen ispatından yola çıkarak $[a, b]$ aralığına genişletelim. Bunun için Tanım 1.3.1'den

$$B_{n+k}(y; x) = \sum_{i=0}^{n+k} y \left(a + \frac{(b-a)i}{n+k} \right) p_{i,n+k}(x)$$

olmak üzere bu polinomun k . türevini

$$B_{n+k}^{(k)}(y; x) = \sum_{i=0}^{n+k} y \left(a + \frac{(b-a)i}{n+k} \right) p_{i,n+k}^{(k)}(x)$$

ele alalım. Bu eşitlikte Özellik 1.2.10 gözönüne alınırsa, eşitlik

$$B_{n+k}^{(k)}(y; x) = \sum_{i=0}^{n+k} y \left(a + \frac{(b-a)i}{n+k} \right) \frac{(n+k)!}{n!(b-a)^k} \sum_{s=0}^k (-1)^{k-s} \binom{k}{s} p_{i-s,n}(x)$$

haline gelir. Burada $0 \leq i-s \leq n$ için $t = i-s$ alınarak

$$B_{n+k}^{(k)}(y; x) = \frac{(n+k)!}{n!(b-a)^k} \sum_{t=0}^n \sum_{s=0}^k (-1)^{k-s} \binom{k}{s} y \left(a + \frac{(b-a)(t+s)}{n+k} \right) p_{t,n}(x)$$

olur. Ayrıca Δ_h^k fark operatörü için

$$\sum_{s=0}^k (-1)^{k-s} \binom{k}{s} y \left(a + \frac{(b-a)(t+s)}{n+k} \right) = \Delta_h^k y \left(a + \frac{(b-a)t}{n+k} \right)$$

gerçeklendiğinden istenen elde edilir.

2. LİNEER DENKLEMLER İÇİN BERNSTEIN SIRALAMA YÖNTEMİ

2.1 Giriş

Bu bölümde lineer diferansiyel, integral ve integrodiferansiyel denklemlerin nümerik çözümleri için Bölüm 1.3'te bahsedilen geliştirilmiş Bernstein polinomlarından yararlanılarak sıralama yöntemi geliştirilmiştir. Bernstein sıralama yöntemi olarak adlandırılan bu yöntemde ele alınan lineer denklemlerin çözümüne geliştirilmiş Bernstein polinomları ile yaklaşılır. Ayrıca geliştirilmiş Bernstein polinomları için üretilen temel matris bağıntısı ve sıralama noktaları gözönüne alınarak denklemler, matris denklemleri haline getirilir.

Bir fonksiyonun çeşitli değerlere karşılık elde edilen yaklaşık çözümü ile gerçek çözümü arasındaki farkların bir ağırlık fonksiyonu ile çarpılarak, toplamalarını minimize etme işlemine ağırlıklı kalanlar yöntemi denir. Ağırlıklı kalanlar yönteminde diferansiyel, integral ve integrodiferansiyel denklemlerin $y(x)$ çözüm fonksiyonuna

$$y(x) \cong y_n(x) = \sum_{i=0}^n c_i \varphi_i$$

deneme fonksiyonları ile yaklaşılır. Burada c_i keyfi sabitler, φ_i lineer bağımsız baz fonksiyonları ve y_n bu baz fonksiyonlarının lineer kombinasyonu olarak yazılmıştır. Bu ifade verilen herhangi bir diferansiyel, integral ya da integrodiferansiyel denklemde yerine yazılırsa $R_n(x) \neq 0$ kalan hata elde edilir. Bu yöntemle göre D bölgesi üzerinden alınan $R_n(x)$ 'in ağırlıklı integrali sıfır olmalıdır:

$$\int_D R_n(x) W_i dx = 0; \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Burada W_i ağırlık fonksiyonları olup, bu fonksiyonların sayısı y_n 'deki c_i

bilinmeyen sabitlerin sayısına eşittir. Sonuç olarak denklemler için bilinmeyen c_i sabitlerinin sayısı kadar cebirsel denklem elde edilir. Ağırlıklı kalanlar yöntemlerinden biri de sıralama yöntemidir. Bu yöntemde ağırlık fonksiyonları D bölgesindeki Dirac δ fonksiyonlarının ailesinden alınır. Yani $W_i(x) = \delta(x - x_i)$ şeklinde seçilir. Burada Dirac δ fonksiyonu

$$\delta(x - x_i) = \begin{cases} \infty, & x = x_i \\ 0, & d.d. \end{cases}$$

şeklinde tanımlanır. Ağırlık fonksiyonunun eşiti yukarıdaki integralde yerine yazılırsa

$$\int_D R_n(x) \delta(x - x_i) dx = 0 \implies R_n(x_i) = 0$$

olur. Bu ise kalanın belirli noktalarda sıfıra eşitlendiğinin bir göstergesidir. Burada D reel bir aralıktır.

Bu tez çalışmasında ele alınan yöntem, Bernstein polinomlarına dayalı bir sıralama yöntemidir. Amaç; lineer denklemlerin çözüm fonksiyonu için $D = [a, b]$ sonlu aralığı, $c_i = y\left(a + \frac{(b-a)i}{n}\right)$ bilinmeyen sabitler ve $\varphi_i = p_{i,n}(x)$ olmak üzere

$$y(x) \cong B_n(y; x) = \sum_{i=0}^n y\left(a + \frac{(b-a)i}{n}\right) p_{i,n}(x) \quad (2.1)$$

yaklaşımını gözönüne almaktır.

Yaklaşımlar teorisi, çoğunlukla belirli tipteki fonksiyonların ve fonksiyon sınıflarının yaklaşımı ile ilgilenir. Bir anlamda yaklaşım yapan fonksiyonlardan daha basit fonksiyonları içeren altuzayların kullanımı ile ilgilenir (Steffens 2006). Bu altuzaylar genellikle cebirsel veya trigonometrik polinomların kümesinden seçilir. Bu doğrultuda yaklaşımlar teorisinin temel teoremi olarak nitelendirilen teorem ilk kez Karl Theodor Wilhelm Weierstrass (1885) tarafından ifade ve ispat edilmiştir. Weierstrass yaklaşım teoremi de denilen bu teorem ile Weierstrass, kapalı aralık üzerinde tanımlı herhangi bir sürekli fonksiyonun isteğe bağlı olarak cebirsel polinomlara en iyi düzgün yaklaşımı yapabileceğini aşağıdaki gibi ifade etmiştir:

Teorem 2.1.1 $y : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ süreklî bir fonksiyon ise bu durumda herbir $x \in [a, b]$ ve her $\varepsilon > 0$ için

$$|P_n(x) - y(x)| < \varepsilon$$

olacak şekilde bir $P_n(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^i$ polinomu vardır (DeVore ve Lorentz 1993).

Sergei Natanovich Bernstein (1912), $[0, 1]$ aralığı üzerinde tanımladığı Bernstein polinomlarının aşağıdaki teorem ile Weierstrass teoremini gerçekleştirdiğini göstermiştir.

Teorem 2.1.2 $y : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ süreklî bir fonksiyon ise bu durumda herbir $x \in [0, 1]$ ve her $\varepsilon > 0$ için

$$|B_n(y; x) - y(x)| < \varepsilon$$

gerçeklenir (Rivlin 1969).

Şimdi ileriki bölümlerde kullanılacak olan genelleştirilmiş Bernstein baz polinomlarının türevleri için gerekli olan temel matris gösterimini verelim.

Teorem 2.1.3 Genelleştirilmiş Bernstein baz polinomları ile türevleri arasında

$$\mathbf{P}^{(k)}(x) = \mathbf{P}(x) \mathbf{N}^k; \quad k = 1, 2, \dots, m$$

matris bağıntısı mevcuttur. Burada $i, j = 0, 1, \dots, n$ için

$$d_{ij} = \frac{1}{b-a} \begin{cases} n-i & ; \quad j = i+1 \\ 2i-n & ; \quad j = i \\ -i & ; \quad j = i-1 \\ 0 & ; \quad d.d. \end{cases}$$

olmak üzere $\mathbf{N} = (d_{ij})$ matrisi $(n+1) \times (n+1)$ tipli bir matris, $\mathbf{P}(x) = [p_{i,n}(x)]$ ve $\mathbf{P}^{(k)}(x) = [p_{i,n}^{(k)}(x)]$ $1 \times (n+1)$ tipli matrislerdir. Ayrıca $\mathbf{N}^0 = \mathbf{I}$ birim matristir.

İspat: Özellik 1.2.7 gözönüne alınarak, genelleştirilmiş Bernstein baz polinomları için

$$\begin{aligned}
p_{i,n-1}(x) &= \frac{n-i}{n}p_{i,n}(x) + \frac{i+1}{n}p_{i+1,n}(x), \\
p_{i-1,n-1}(x) &= \frac{n-i+1}{n}p_{i-1,n}(x) + \frac{i}{n}p_{i,n}(x)
\end{aligned}$$

bağıntıları yazılabilir. Bu bağıntılar, Özellik 1.2.9'da yer alan türev bağıntısının sağındaki ifadelerde yerine konulursa, n . dereceden genelleştirilmiş Bernstein baz polinomlarının birinci türevi için

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}p_{i,n}(x) &= \frac{n}{b-a} \left[\frac{n-i+1}{n}p_{i-1,n}(x) + \left(\frac{i}{n} - \frac{n-i}{n} \right) p_{i,n}(x) - \frac{i+1}{n}p_{i+1,n}(x) \right] \\
&= \frac{1}{b-a} [(n-i+1)p_{i-1,n}(x) + (2i-n)p_{i,n}(x) - (i+1)p_{i+1,n}(x)]
\end{aligned}$$

bağıntısı gerçekleşir. Diğer yandan bu bağıntıda $i < 0$ veya $i > n$ için $p_{i,n}(x) = 0$ olma şartı kullanılarak $i = 0, 1, \dots, n$ için

$$\begin{aligned}
p'_{0,n}(x) &= \frac{1}{b-a} [-np_{0,n}(x) - p_{1,n}(x)] \\
p'_{1,n}(x) &= \frac{1}{b-a} [np_{0,n}(x) + (2-n)p_{1,n}(x) - 2p_{2,n}(x)] \\
&\vdots \\
p'_{n-1,n}(x) &= \frac{1}{b-a} [2p_{n-2,n}(x) + (n-2)p_{n-1,n}(x) - np_{n,n}(x)] \\
p'_{n,n}(x) &= \frac{1}{b-a} [p_{n-1,n}(x) + np_{n,n}(x)]
\end{aligned}$$

eşitlikleri yazılabilir. $\mathbf{P}(x)$ ve $\mathbf{P}^{(k)}(x)$ yukarıda tanımlandığı gibi ve \mathbf{N} matrisi

$$\mathbf{N} = \frac{1}{b-a} \begin{bmatrix} -n & n & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2-n & n-1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 4-n & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & n-4 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1-n & n-2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -n & n \end{bmatrix}$$

olmak üzere genelleştirilmiş Bernstein baz polinomlarının birinci türevi için

$$\mathbf{P}'(x) = \mathbf{P}(x)\mathbf{N}$$

bir matris gösterimi bulunur. Bu eşitliğin her iki tarafı k kez türevlenir ve

iterasyon işlemleri uygulanırsa, $\mathbf{P}^{(k)}(x)$ türevleri de

$$\begin{aligned} \mathbf{P}''(x) &= \mathbf{P}'(x) \mathbf{N} = \mathbf{P}(x) \mathbf{N}^2 \\ \mathbf{P}^{(3)}(x) &= \mathbf{P}''(x) \mathbf{N} = \mathbf{P}(x) \mathbf{N}^3 \\ \vdots & \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \\ \mathbf{P}^{(k)}(x) &= \mathbf{P}^{(k-1)}(x) \mathbf{N} = \mathbf{P}(x) \mathbf{N}^k \end{aligned}$$

benzer matris gösterimlerine sahip olur. Bu da ispatı tamamlar.

Teorem 2.1.4 Genelleştirilmiş Bernstein polinomları ve türevleri aşağıdaki gibi bir matris gösterimine sahiptir:

$$B_n^{(k)}(y; x) = \mathbf{P}(x) \mathbf{N}^k \mathbf{Y}; \quad k = 0, 1, \dots, m. \quad (2.2)$$

İspat: Genelleştirilmiş Bernstein polinomlarının $k = 0, 1, \dots, m$ için türevi

$$B_n^{(k)}(y; x) = \sum_{i=0}^n y \left(a + \frac{(b-a)i}{n} \right) p_{i,n}^{(k)}(x)$$

şeklinde yazılabilir. Öncelikle bu ifadenin matris gösterimi

$$B_n^{(k)}(y; x) = \mathbf{P}^{(k)}(x) \mathbf{Y}$$

olarak bulunur. Burada $\mathbf{P}^{(k)}(x)$ matrisi yukarıdaki teoremde tanımlanmış olup, \mathbf{Y} matrisi de aşağıdaki biçimdedir:

$$\mathbf{Y} = \left[\begin{matrix} y(a) & y\left(a + \frac{b-a}{n}\right) & \dots & y(b) \end{matrix} \right]^T.$$

Teorem 2.1.3 kullanılarak ispat tamamlanır.

2.2 Diferansiyel Denklemler için Temel Bağlantı

Bu kısımda, $c \in [a, b]$ olmak üzere

$$\sum_{k=0}^{m-1} \tau_{jk} y^{(k)}(c) = \lambda_j; \quad j = 0, 1, \dots, m-1 \quad (2.3)$$

başlangıç koşulları veya

$$\sum_{k=0}^{m-1} [\alpha_{jk} y^{(k)}(a) + \beta_{jk} y^{(k)}(b)] = \gamma_j; \quad j = 0, 1, \dots, m-1 \quad (2.4)$$

sınır koşulları ile verilen en genel m . mertebeden lineer homojen olmayan

$$\sum_{k=0}^m a_k(x) y^{(k)}(x) = g(x); \quad a \leq x \leq b \quad (2.5)$$

diferansiyel denkleminin çözümüne (2.1) ile ifade edilen genelleştirilmiş Bernstein polinomları ile yaklaşalım. Burada τ_{jk} , α_{jk} , β_{jk} , λ_j ve γ_j bilinen sabitler ve $y\left(a + \frac{(b-a)i}{n}\right)$ bilinmeyen katsayılardır.

Lineer diferansiyel denklemlerin verilen koşullar altındaki çözümünün var ve tek olması için $a_k(x)$ ve $g(x)$ 'in $[a, b]$ aralığı üzerinde sürekli fonksiyonlar olması gerekir.

Teorem 2.2.1 (2.5) ile tanımlanan m . mertebeden lineer homojen olmayan diferansiyel denklemin çözümü sürekli olsun. Bu durumda $x_s \in [a, b]$ sıralama noktaları üzerinde bu denklem için

$$\sum_{k=0}^m \mathbf{A}_k \mathbf{P} \mathbf{N}^k \mathbf{Y} = \mathbf{G} \quad (2.6)$$

matris gösterimi gerçekleşir. Burada \mathbf{N} matrisi Teorem 2.1.3'te tanımlandığı gibi, $\mathbf{P} = [p_{i,n}(x_s)]$ ve $\mathbf{A}_k = \text{diag}[a_k(x_s)]$ matrisleri $(n+1) \times (n+1)$ tipli, $\mathbf{G} = [g(x_s)]$ ve $\mathbf{Y} = \left[y\left(a + \frac{(b-a)i}{n}\right) \right]$ matrisleri $(n+1) \times 1$ tiplidir.

İspat: (2.5) denkleminin çözümü, $[a, b]$ aralığı üzerinde sürekli olduğundan Teorem 2.1.1 ve Teorem 2.1.2 gereğince (2.1) ile verilen genelleştirilmiş Bernstein polinom yaklaşımına sahiptir. (2.1) bağıntısının her iki tarafının k . türevi alınır ve (2.2) bağıntısı kullanılırsa, bilinmeyen fonksiyon ve türevleri için

$$y^{(k)}(x) \cong B_n^{(k)}(y; x) = \mathbf{P}(x) \mathbf{N}^k \mathbf{Y}; \quad k = 0, 1, \dots, m$$

matris bağıntısı gerçekleşir. Buradaki matris gösterimleri yukarıdaki teoremlerde

tanımlandığı gibidir. Diğer yandan sıralama yöntemi gereğince, $x_s \in [a, b]$ sıralama noktaları üzerinde $y^{(k)}(x_s) = B_n^{(k)}(y; x_s)$ olduğundan yukarıdaki bağıntı

$$y^{(k)}(x_s) = \mathbf{P}(x_s) \mathbf{N}^k \mathbf{Y}; \quad k = 0, 1, \dots, m \quad (2.7)$$

olarak ifade edilebilir.

Sıralama noktaları ve (2.7) bağıntısı, (2.5) denkleminde yerine yazılırsa

$$\sum_{k=0}^m a_k(x_s) \mathbf{P}(x_s) \mathbf{N}^k \mathbf{Y} = g(x_s)$$

lineer cebirsel denklem sistemi elde edilir. Bu denklem

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} \mathbf{P}(x_0) \\ \mathbf{P}(x_1) \\ \vdots \\ \mathbf{P}(x_n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_{0,n}(x_0) & p_{1,n}(x_0) & \dots & p_{n,n}(x_0) \\ p_{0,n}(x_1) & p_{1,n}(x_1) & \dots & p_{n,n}(x_1) \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ p_{0,n}(x_n) & p_{1,n}(x_n) & & p_{n,n}(x_n) \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}_k = \begin{bmatrix} a_k(x_0) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_k(x_1) & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_k(x_n) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{G} = \begin{bmatrix} g(x_0) \\ g(x_1) \\ \vdots \\ g(x_n) \end{bmatrix}$$

matris gösterimleri ile istenen matris denklemi haline döndürür. Bu da ispatı tamamlar.

2.3 İntegral Denklemler için Temel Bağıntılar

Bu kısımda, $a(x) \neq 0$ ve $a(x) \neq 1$ olmak üzere

$$a(x)y(x) = g(x) + \lambda_1 \int_a^b f(x,t)y(t)dt + \lambda_2 \int_a^x v(x,t)y(t)dt \quad (2.8)$$

üçüncü çeşit lineer Fredholm-Volterra integral denklemin çözümüne (2.1) ile verilen genelleştirilmiş Bernstein polinomları ile yaklaşalım. Burada çekirdek

fonksiyonları $f(x, t) : [a, b] \times [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, $v(x, t) : [a, b] \times [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ile $a(x)$ ve $g(x)$ fonksiyonları bilinen fonksiyonlar, λ_1 ve λ_2 bilinen sabitler, $y(x)$ ise bilinmeyen fonksiyondur. Özel olarak $a(x) \equiv 0$ ve $a(x) \equiv 1$ için bu denklem, sırasıyla birinci çeşit ve ikinci çeşit lineer Fredholm-Volterra integral denklemleri olarak adlandırılır.

Lineer integral denklemlerin çözümü için varlık-teklik teoremi gereğince $f(x, t)$ ve $v(x, t)$ çekirdek fonksiyonları $[a, b] \times [a, b]$ karesi üzerinde, $a(x)$ ve $g(x)$ ise $[a, b]$ aralığı üzerinde sürekli fonksiyonlar olmalıdır.

Teorem 2.3.1 (2.8) ile tanımlanan üçüncü çeşit lineer Fredholm-Volterra integral denkleminin çözümü sürekli olsun. Bu durumda $x_s \in [a, b]$ sıralama noktaları olmak üzere bu integral denklem için

$$[\mathbf{AP} - \lambda_1 \mathbf{F} - \lambda_2 \mathbf{V}] \mathbf{Y} = \mathbf{G} \quad (2.9)$$

matris bağıntısı gerçekleşir. Burada \mathbf{P} , \mathbf{Y} ve \mathbf{G} matrisi Teorem 2.2.1'de tanımlandığı gibi, $\mathbf{A} = \text{diag}[a(x_s)]$, $\mathbf{F} = [F_{s,i}]$ ve $\mathbf{V} = [V_{s,i}]$ matrisleri ise $(n+1) \times (n+1)$ tiplidir.

İspat: (2.8) denkleminin çözümü, $[a, b]$ aralığı üzerinde sürekli olduğundan Teorem 2.1.1 ve Teorem 2.1.2 gereğince (2.1) ile verilen genelleştirilmiş Bernstein polinom yaklaşımına sahiptir. Sıralama yöntemi ve (2.2) bağıntısı gereğince, $x_s \in [a, b]$ sıralama noktaları üzerinde bilinmeyen fonksiyon için

$$y(x_s) = B_n(y; x_s) = \mathbf{P}(x_s) \mathbf{Y} \quad (2.10)$$

bağıntısı gerçekleşir. (2.10) bağıntısı (2.8) denkleminde yerine yazılırsa

$$a(x_s) \mathbf{P}(x_s) \mathbf{Y} = g(x_s) + \lambda_1 \int_a^b f(x_s, t) \mathbf{P}(t) dt \mathbf{Y} + \lambda_2 \int_a^{x_s} v(x_s, t) \mathbf{P}(t) dt \mathbf{Y} \quad (2.11)$$

lineer cebirsel denklem sistemi elde edilir. Bu sistemde λ_1 ve λ_2 'nin yanında yer alan integralleri sırasıyla

$$\mathbf{F}(x_s) = \begin{bmatrix} F_{s,0} & F_{s,1} & \dots & F_{s,n} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{V}(x_s) = \begin{bmatrix} V_{s,0} & V_{s,1} & \dots & V_{s,n} \end{bmatrix}$$

matrisleri ile gösterelim. Bunların elemanları ise

$$F_{s,i} = \int_a^b f(x_s, t) p_{i,n}(t) dt, \quad V_{s,i} = \int_a^{x_s} v(x_s, t) p_{i,n}(t) dt$$

şeklinde tanımlanır. Bu durumda (2.11) denklem sistemi

$$[a(x_s) \mathbf{P}(x_s) - \lambda_1 \mathbf{F}(x_s) - \lambda_2 \mathbf{V}(x_s)] \mathbf{Y} = g(x_s)$$

olarak yazılabilir. Burada $s = 0, 1, \dots, n$ için

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a(x_0) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a(x_1) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a(x_n) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{P} = \begin{bmatrix} \mathbf{P}(x_0) \\ \mathbf{P}(x_1) \\ \vdots \\ \mathbf{P}(x_n) \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} \mathbf{F}(x_0) \\ \mathbf{F}(x_1) \\ \vdots \\ \mathbf{F}(x_n) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{V} = \begin{bmatrix} \mathbf{V}(x_0) \\ \mathbf{V}(x_1) \\ \vdots \\ \mathbf{V}(x_n) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{G} = \begin{bmatrix} g(x_0) \\ g(x_1) \\ \vdots \\ g(x_n) \end{bmatrix}$$

matrisleri gözönüne alınarak istenen matris gösterimi elde edilmiş olur.

Sonuç 2.3.1 Özel olarak (2.8) ile verilen üçüncü çeşit lineer Fredholm-Volterra integral denkleminde $a(x) \equiv 0$ ve $a(x) \equiv 1$ alınırsa, birinci ve ikinci çeşit lineer Fredholm-Volterra integral denklemleri için (2.9) ile ifade edilen matris bağıntısı sırasıyla

$$[-\lambda_1 \mathbf{F} - \lambda_2 \mathbf{V}] \mathbf{Y} = \mathbf{G} \quad \text{ve} \quad [\mathbf{P} - \lambda_1 \mathbf{F} - \lambda_2 \mathbf{V}] \mathbf{Y} = \mathbf{G}$$

matris bağıntılarına indirgenir.

$F_{s,i}$ ve $V_{s,i}$ integrallerinin hesaplanamadığı ya da hesaplanmasının zor olduğu durumlarda lineer Fredholm-Volterra integral denklemlerinin çözümlerini bulabilmek için alternatif bir bağıntı verelim.

Teorem 2.3.2 (2.8) ile tanımlanan üçüncü çeşit lineer Fredholm-Volterra integral denkleminin çözümü sürekli olsun. Eğer $f(x, t)$ ve $v(x, t)$ çekirdek fonksiyonları t değişkenine göre $[a, b]$ aralığı üzerinde sürekli fonksiyonlar ise bu durumda (2.8) integral denklemi için

$$[\mathbf{AP} - \lambda_1 \mathbf{fM}(b) - \lambda_2 \mathbf{vM}] \mathbf{Y} = \mathbf{G} \quad (2.12)$$

matris gösterimi gerçeklenir. Burada \mathbf{P} , \mathbf{Y} ve \mathbf{G} matrisi Teorem 2.2.1'de, \mathbf{A} matrisi Teorem 2.3.1'de tanımlandığı gibi, \mathbf{f} ve $\mathbf{M}(b) = \mathbf{M}(x_n)$; $(n+1) \times (n+1)$ tipli, \mathbf{v} ; $(n+1) \times (n+1)^2$ tipli ve \mathbf{M} ; $(n+1)^2 \times (n+1)$ tipli matrisler olup, $i, j, s = 0, 1, \dots, n$ için

$$\mathbf{M}(x) = \left[\int_a^x p_{i,n}(t) p_{j,n}(t) dt \right], \quad \mathbf{f}(x) = [f(x, t_s)] \quad \text{ve} \quad \mathbf{v}(x) = [v(x, t_s)]$$

olmak üzere

$$\mathbf{f} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}(x_0) \\ \mathbf{f}(x_1) \\ \vdots \\ \mathbf{f}(x_n) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v} = \begin{bmatrix} \mathbf{v}(x_0) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \mathbf{v}(x_1) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \mathbf{v}(x_n) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{M} = \begin{bmatrix} \mathbf{M}(x_0) \\ \mathbf{M}(x_1) \\ \vdots \\ \mathbf{M}(x_n) \end{bmatrix}$$

şeklinde tanımlanırlar.

İspat: (2.8) denkleminin çözümü, $[a, b]$ aralığı üzerinde sürekli olduğundan (2.1) genelleştirilmiş Bernstein polinom yaklaşımına sahiptir. (2.2) bağıntısı gereğince, bilinmeyen fonksiyon için

$$y(x) \cong B_n(y; x) = \mathbf{P}(x) \mathbf{Y} \quad (2.13)$$

bağıntısı sağlanır. Ayrıca f ve v çekirdek fonksiyonları t değişkenine göre $[a, b]$ aralığı üzerinde sürekli fonksiyonlar olduğundan, aşağıdaki gibi genelleştirilmiş Bernstein polinom yaklaşımına sahiptir:

$$f(x, t) \cong B_n(f; t) = \sum_{i=0}^n f\left(x, a + \frac{(b-a)i}{n}\right) p_{i,n}(t),$$

$$v(x, t) \cong B_n(v; t) = \sum_{i=0}^n v \left(x, a + \frac{(b-a)i}{n} \right) p_{i,n}(t).$$

Bu durumda $f(x, t)$ ve $v(x, t)$ fonksiyonları için sırasıyla

$$f(x, t) \simeq \mathbf{f}(x) \mathbf{P}^T(t) \quad \text{ve} \quad v(x, t) \simeq \mathbf{v}(x) \mathbf{P}^T(t) \quad (2.14)$$

matris gösterimleri gerçekleşir. Burada $t_s = a + \frac{(b-a)s}{n}$; $s = 0, 1, \dots, n$ olmak üzere

$$\mathbf{f}(x) = \left[f(x, t_0) \quad f(x, t_1) \quad \dots \quad f(x, t_n) \right],$$

$$\mathbf{v}(x) = \left[v(x, t_0) \quad v(x, t_1) \quad \dots \quad v(x, t_n) \right]$$

ve

$$\mathbf{P}^T(t) = \left[p_{0,n}(t) \quad p_{1,n}(t) \quad \dots \quad p_{n,n}(t) \right]^T$$

şeklindedir. (2.13) ve (2.14) ile verilen bağıntılar, (2.8) integral denkleminde yerine yazılırsa

$$a(x) \mathbf{P}(x) \mathbf{Y} \simeq g(x) + \lambda_1 \int_a^b \mathbf{f}(x) \mathbf{P}^T(t) \mathbf{P}(t) \mathbf{Y} dt + \lambda_2 \int_a^x \mathbf{v}(x) \mathbf{P}^T(t) \mathbf{P}(t) \mathbf{Y} dt$$

elde edilir. Sıralama yöntemi gereğince $s = 0, 1, \dots, n$ için x_s sıralama noktaları üzerinde

$$y(x_s) = B_n(y; x_s), \quad f(x_s, t) = B_n(f(x_s, t); t) \quad \text{ve} \quad v(x_s, t) = B_n(v(x_s, t); t)$$

olduğundan, yukarıdaki denklem

$$a(x_s) \mathbf{P}(x_s) \mathbf{Y} = g(x_s) + \lambda_1 \mathbf{f}(x_s) \int_a^b \mathbf{P}^T(t) \mathbf{P}(t) dt \mathbf{Y} + \lambda_2 \mathbf{v}(x_s) \int_a^{x_s} \mathbf{P}^T(t) \mathbf{P}(t) dt \mathbf{Y}$$

haline gelir ya da daha kısa olarak

$$[a(x_s) \mathbf{P}(x_s) - \lambda_1 \mathbf{f}(x_s) \mathbf{M}(b) - \lambda_2 \mathbf{v}(x_s) \mathbf{M}(x_s)] \mathbf{Y} = g(x_s) \quad (2.15)$$

şeklinde yazılabilir. Burada

$$\mathbf{M}(x_s) = \begin{bmatrix} m_{0,0}(x_s) & \dots & m_{0,n}(x_s) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ m_{n,0}(x_s) & \dots & m_{n,n}(x_s) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{M}(b) = \begin{bmatrix} m_{0,0}(b) & \dots & m_{0,n}(b) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ m_{n,0}(b) & \dots & m_{n,n}(b) \end{bmatrix}$$

matrislerinin elemanları $i, j = 0, 1, \dots, n$ için

$$m_{i,j}(x_s) = \int_a^{x_s} p_{i,n}(t)p_{j,n}(t)dt = \frac{(b-a)}{2n+1} \frac{\binom{n}{i}\binom{n}{j}}{\binom{2n}{i+j}} \sum_{r=i+j+1}^{2n+1} p_{r,2n+1}(x_s),$$

$$m_{i,j}(b) = \int_a^b p_{i,n}(t)p_{j,n}(t)dt = \frac{(b-a)}{2n+1} \frac{\binom{n}{i}\binom{n}{j}}{\binom{2n}{i+j}}$$

şeklinde bulunur. (2.15) lineer denklem sistemi $s = 0, 1, \dots, n$ için yukarıda tanımlanan \mathbf{A} , \mathbf{P} , \mathbf{Y} , \mathbf{G} , \mathbf{f} , \mathbf{v} ve \mathbf{M} matrisleri gözönüne alınarak istenen matris denklemine dönüşür.

Sonuç 2.3.2 Özel olarak birinci ve ikinci çeşit Fredholm-Volterra integral denklemleri için (2.12) ile verilen matris bağıntısı sırasıyla

$$[-\lambda_1 \mathbf{fM}(b) - \lambda_2 \mathbf{vM}] \mathbf{Y} = \mathbf{G} \quad \text{ve} \quad [\mathbf{P} - \lambda_1 \mathbf{fM}(b) - \lambda_2 \mathbf{vM}] \mathbf{Y} = \mathbf{G}$$

matris bağıntılarına indirgenir.

2.4 İntegrodiferansiyel Denklemler için Temel Bağntı

Bu kısımda

$$\sum_{k=0}^{m-1} \sum_{j=0}^l \tau_{ij}^k y^{(k)}(c_j) = \mu_i; \quad i = 0, 1, \dots, m-1, \quad a \leq c_j \leq b \quad (2.16)$$

karışık koşullar ile verilen

$$\sum_{k=0}^m a_k(x) y^{(k)}(x) = g(x) + \lambda_1 \int_a^b \sum_{k=0}^q f_k(x, t) y^{(k)}(t) dt + \lambda_2 \int_a^x \sum_{k=0}^r v_k(x, t) y^{(k)}(t) dt \quad (2.17)$$

en genel gösterime sahip lineer Fredholm-Volterra integrodiferansiyel denkleminin çözümüne, (2.1) ile ifade edilen genelleştirilmiş Bernstein polinomları ile

yaklaşalım. Burada $a_k(x)$, $g(x)$; $[a, b]$ aralığı üzerinde $f_k(x, t)$ ve $v_k(x, t)$; $[a, b] \times [a, b]$ karesi üzerinde tanımlı bilinen fonksiyonlar, τ_{ij}^k , c_j , μ_i , λ_1 ve λ_2 bilinen sabitler, $y(x)$ bilinmeyen bir fonksiyon, m ise $m \geq q, r$ olacak şekilde bir doğal sayıdır.

Lineer integrodiferansiyel denklemlerin verilen koşullar altındaki çözümünün var ve tek olması için $a_k(x)$ ve $g(x)$ fonksiyonlarının $[a, b]$ aralığı üzerinde, $f_k(x, t)$ ve $v_k(x, t)$ fonksiyonlarının ise $[a, b] \times [a, b]$ karesi üzerinde sürekli olması gerekir.

Teorem 2.4.1 (2.17) ile tanımlanan en genel gösterime sahip lineer Fredholm-Volterra integrodiferansiyel denkleminin çözümü sürekli olsun. Bu durumda $x_s \in [a, b]$ sıralama noktaları üzerinde bu denklem, aşağıdaki matris bağıntısına indirgenebilir:

$$\left[\sum_{k=0}^m \mathbf{A}_k \mathbf{P} \mathbf{N}^k - \lambda_1 \sum_{k=0}^q \mathbf{F}_k \mathbf{N}^k - \lambda_2 \sum_{k=0}^r \mathbf{V}_k \mathbf{N}^k \right] \mathbf{Y} = \mathbf{G}. \quad (2.18)$$

Burada \mathbf{N} matrisi Teorem 2.1.3'te; \mathbf{A}_k , \mathbf{P} , \mathbf{Y} ve \mathbf{G} matrisi Teorem 2.2.1'de tanımlandığı gibidir. Ayrıca $\mathbf{F}_k = [F_{k,s,i}]$ ve $\mathbf{V}_k = [V_{k,s,i}]$ matrisleri, boyutu $(n+1)$ olan kare matrisler olup, elemanları

$$F_{k,s,i} = \int_a^b f_k(x_s, t) p_{i,n}(t) dt, \quad V_{k,s,i} = \int_a^{x_s} v_k(x_s, t) p_{i,n}(t) dt$$

şeklinde belirlenir.

İspat: (2.17) denkleminin çözümü, $[a, b]$ aralığı üzerinde sürekli olduğundan genelleştirilmiş Bernstein polinom yaklaşımına sahiptir. (2.2) bağıntısı gereğince, bilinmeyen fonksiyon ve türevleri için

$$y^{(k)}(x) = \mathbf{P}(x) \mathbf{N}^k \mathbf{Y}; \quad k = 0, 1, \dots, m$$

bağıntısı sağlanır. Diğer yandan sıralama yöntemi gereğince, $x_s \in [a, b]$ sıralama

noktaları üzerinde $y^{(k)}(x_s) = B_n^{(k)}(y; x_s); s = 0, 1, \dots, n$ olduğundan bu bağıntı

$$y^{(k)}(x_s) = \mathbf{P}(x_s) \mathbf{N}^k \mathbf{Y}; \quad k = 0, 1, \dots, m \quad (2.19)$$

haline gelir. Sıralama noktaları ve (2.19) bağıntısı, (2.17) denkleminde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^m a_k(x_s) \mathbf{P}(x_s) \mathbf{N}^k \mathbf{Y} &= g(x_s) + \lambda_1 \int_a^b \sum_{k=0}^q f_k(x_s, t) \mathbf{P}(t) \mathbf{N}^k \mathbf{Y} dt \\ &+ \lambda_2 \int_a^{x_s} \sum_{k=0}^r v_k(x_s, t) \mathbf{P}(t) \mathbf{N}^k \mathbf{Y} dt \end{aligned}$$

lineer cebirsel denklem sistemi elde edilir. Bu denklemin sağ tarafında yer alan integraller sırasıyla

$$\mathbf{F}_k(x_s) = \int_a^b f_k(x_s, t) \mathbf{P}(t) dt \quad \text{ve} \quad \mathbf{V}_k(x_s) = \int_a^{x_s} v_k(x_s, t) \mathbf{P}(t) dt$$

olarak tanımlanırsa, denklem aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$\left[\sum_{k=0}^m a_k(x_s) \mathbf{P}(x_s) \mathbf{N}^k - \lambda_1 \sum_{k=0}^q \mathbf{F}_k(x_s) \mathbf{N}^k - \lambda_2 \sum_{k=0}^r \mathbf{V}_k(x_s) \mathbf{N}^k \right] \mathbf{Y} = g(x_s).$$

$s = 0, 1, \dots, n$ için bu sistem

$$\mathbf{A}_k = \begin{bmatrix} a_k(x_0) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_k(x_1) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_k(x_n) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{G} = \begin{bmatrix} g(x_0) \\ g(x_1) \\ \vdots \\ g(x_n) \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} \mathbf{P}(x_0) \\ \mathbf{P}(x_1) \\ \vdots \\ \mathbf{P}(x_n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_{0,n}(x_0) & p_{1,n}(x_0) & \dots & p_{n,n}(x_0) \\ p_{0,n}(x_1) & p_{1,n}(x_1) & \dots & p_{n,n}(x_1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{0,n}(x_n) & p_{1,n}(x_n) & \dots & p_{n,n}(x_n) \end{bmatrix} = [p_{i,n}(x_s)],$$

$$\mathbf{F}_k = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_k(x_0) \\ \mathbf{F}_k(x_1) \\ \vdots \\ \mathbf{F}_k(x_n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{k,0,0} & F_{k,0,1} & \cdots & F_{k,0,n} \\ F_{k,1,0} & F_{k,1,1} & \cdots & F_{k,1,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ F_{k,n,0} & F_{k,n,1} & \cdots & F_{k,n,n} \end{bmatrix} = [F_{k,s,i}],$$

$$\mathbf{V}_k = \begin{bmatrix} \mathbf{V}_k(x_0) \\ \mathbf{V}_k(x_1) \\ \vdots \\ \mathbf{V}_k(x_n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_{k,0,0} & V_{k,0,1} & \cdots & V_{k,0,n} \\ V_{k,1,0} & V_{k,1,1} & \cdots & V_{k,1,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ V_{k,n,0} & V_{k,n,1} & \cdots & V_{k,n,n} \end{bmatrix} = [V_{k,s,i}]$$

matris gösterimleri gözönüne alınarak, istenilen (2.18) matris bağıntısına dönüştür ve ispat bu şekilde tamamlanmış olur.

2.5 Çözüm Yöntemi

Bu kısımda sırasıyla (2.5), (2.8) ve (2.17) ile tanımlanan lineer diferansiyel, integral ve integrodiferansiyel denklemlerin (2.3), (2.4) ya da (2.16) ile verilen koşullar altındaki çözümlerini aşağıdaki adımları izleyerek elde etmeye çalışalım:

Adım 1. Diferansiyel denklemler için (2.6), integral denklemler için (2.9) ve (2.12), integrodiferansiyel denklemler için (2.18) olarak bulunan temel matris bağıntılarında \mathbf{W} katsayılar matrisi sırasıyla

$$\begin{aligned} \mathbf{W} &= \sum_{k=0}^m \mathbf{A}_k \mathbf{P} \mathbf{N}^k, \\ \mathbf{W} &= \mathbf{A} \mathbf{P} - \lambda_1 \mathbf{F} - \lambda_2 \mathbf{V}, \\ \mathbf{W} &= \mathbf{A} \mathbf{P} - \lambda_1 \mathbf{f} \mathbf{M}(b) - \lambda_2 \mathbf{v} \mathbf{M}, \\ \mathbf{W} &= \sum_{k=0}^m \mathbf{A}_k \mathbf{P} \mathbf{N}^k - \lambda_1 \sum_{k=0}^q \mathbf{F}_k \mathbf{N}^k - \lambda_2 \sum_{k=0}^r \mathbf{V}_k \mathbf{N}^k \end{aligned}$$

ile gösterilsin. Bu durumda bu temel matris denklemleri kısaca aşağıdaki gibi ifade edilebilir:

$$\mathbf{W} \mathbf{Y} = \mathbf{G} \text{ ya da } [\mathbf{W}; \mathbf{G}].$$

Adım 2. $y^{(k)}(x_s) = \mathbf{P}(x_s) \mathbf{N}^k \mathbf{Y}$ bağıntısı, $x_s = a, b, c, c_j$ değerleri için (2.3), (2.4) ve (2.16) ile verilen koşullarda yerine yazılırsa

$$\mathbf{U}_j \mathbf{Y} = \lambda_j \quad \text{ya da} \quad [\mathbf{U}_j; \lambda_j] \quad (2.20)$$

$$\mathbf{V}_j \mathbf{Y} = \gamma_j \quad \text{ya da} \quad [\mathbf{V}_j; \gamma_j] \quad (2.21)$$

$$\mathbf{T}_i \mathbf{Y} = \mu_i \quad \text{ya da} \quad [\mathbf{T}_i; \mu_i] \quad (2.22)$$

matris gösterimleri bulunur. Burada

$$\begin{aligned} \mathbf{U}_j &= \sum_{k=0}^{m-1} \tau_{jk} \mathbf{P}(c) \mathbf{N}^k, \quad \mathbf{V}_j = \sum_{k=0}^{m-1} [\alpha_{jk} \mathbf{P}(a) \mathbf{N}^k + \beta_{jk} \mathbf{P}(b) \mathbf{N}^k], \\ \mathbf{T}_i &= \sum_{k=0}^{m-1} \sum_{j=0}^l \tau_{ij}^k \mathbf{P}(c_j) \mathbf{N}^k; \quad i = 0, \dots, m-1 \end{aligned}$$

şeklindedir.

Adım 3. Lineer denklemlerin verilen koşullar altındaki çözümlerini elde etmek için $[\mathbf{W}; \mathbf{G}]$ arttırılmış matrisini, silmeden ya da silerek ekleme tekniği kullanarak yeni bir arttırılmış matris ile gösterelim. Bu gösterim; sıralama noktalarının sayısına, denklemin verilen koşullarına ve denklemin mertebesine bağlı olarak farklı şekillerde ifade edilebilir.

Eğer sıralama noktalarının sayısı S olarak alınırsa, \mathbf{W} 'nin boyutu S olur. Koşullar, $[\mathbf{W}; \mathbf{G}]$ 'nin hiçbir satırı silinmeden eklenirse elde edilen yeni arttırılmış matris $[\widetilde{\mathbf{W}}; \widetilde{\mathbf{G}}]$ ile gösterilsin. Bu durumda $\widetilde{\mathbf{W}} (S+m) \times (n+1)$, $\widetilde{\mathbf{G}}$ ise $(S+m) \times 1$ tipli matrisler olur. Koşullar $[\mathbf{W}; \mathbf{G}]$ matrisinin belirli satırları silinerek yerleştirildiğinde elde edilen yeni arttırılmış matris $[\mathbf{W}^*; \mathbf{G}^*]$ olsun. O zaman $\mathbf{W}^* S \times (n+1)$ ve $\mathbf{G}^* S \times 1$ tipli matrisler olur.

Eğer $S = n+1$ ise $x_s \in [a, b]$ sıralama noktaları, eşit aralıklı olan

$$\begin{aligned} x_s &= a + \frac{(b-a)s}{n}; \quad s = 0, 1, \dots, n \\ x_s &= a + \frac{(b-a)s}{n+1}, \quad x_s = a + \frac{(b-a)s}{n+2}; \quad s = 1, 2, \dots, n+1 \end{aligned}$$

ve eşit aralıklı olmayan

$$x_s = \frac{(a+b) - (b-a) \cos\left(\frac{\pi s}{n}\right)}{2}; \quad s = 0, 1, \dots, n,$$

$$x_s = \frac{(a+b) - (b-a) \cos\left(\frac{\pi s}{n+1}\right)}{2}; \quad s = 1, 2, \dots, n+1$$

noktalarından herhangi biri olarak seçilebilir. Ayrıca $s = 1$ ile başlayan sıralama noktaları aralığın sol uç noktasını içermez, diğerleri içerir. Bununla birlikte uç noktaları içeren ya da içermeyen bunların dışında farklı sıralama noktaları da seçilebilir. Aralığın uç noktalarından herhangi biri ya da her ikisi tekil nokta ise bu durumda yöntem için aralığın uç noktalarını içermeyen sıralama noktaları gözönüne alınır. Bu durumda $\widetilde{\mathbf{W}}$ katsayılar matrisi $(n+m+1) \times (n+1)$ tipli bir dikdörtgensel matris, \mathbf{W}^* katsayılar matrisi ise $(n+1) \times (n+1)$ tipli bir kare matris olur. $\widetilde{\mathbf{G}}$ ve \mathbf{G}^* sağ yan matrisleri sırasıyla $(n+m+1) \times 1$ ve $(n+1) \times 1$ tipli matrislerdir. Matrisin satırlarını silmeden sonuna (2.22) karışık koşulları ekleyerek oluşturulan $[\widetilde{\mathbf{W}}; \widetilde{\mathbf{G}}]$ arttırılmış matrisi ile matrisin son m satırı, baştan m satırı, ortadan m satırı ya da baştan ve sondan m satırı silinip, yerine (2.20), (2.21) ya da (2.22) koşullarının yazılmasıyla elde edilen $[\mathbf{W}^*; \mathbf{G}^*]$ arttırılmış matrisi aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$[\widetilde{\mathbf{W}}; \widetilde{\mathbf{G}}] = \begin{bmatrix} w_{0,0} & w_{0,1} & \dots & w_{0,n} & ; & g(x_0) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & ; & \dots \\ w_{n,0} & w_{n,1} & \dots & w_{n,n} & ; & g(x_n) \\ t_{0,0} & t_{0,1} & \dots & t_{0,n} & ; & \mu_0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & ; & \dots \\ t_{m-1,0} & t_{m-1,1} & \dots & t_{m-1,n} & ; & \mu_{m-1} \end{bmatrix},$$

$$[\mathbf{W}^*; \mathbf{G}^*] = \begin{bmatrix} w_{0,0} & w_{0,1} & \dots & w_{0,n} & ; & g(x_0) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & ; & \dots \\ w_{n-m,0} & w_{n-m,1} & \dots & w_{n-m,n} & ; & g(x_{n-m}) \\ u_{0,0} & u_{0,1} & \dots & u_{0,n} & ; & \lambda_0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & ; & \dots \\ u_{m-1,0} & u_{m-1,1} & \dots & u_{m-1,n} & ; & \lambda_{m-1} \end{bmatrix},$$

$$\begin{aligned}
[\mathbf{W}^*; \mathbf{G}^*] &= \begin{bmatrix} v_{0,0} & v_{0,1} & \cdots & v_{0,n} & ; & \gamma_0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & ; & \cdots \\ v_{m-1,0} & v_{m-1,1} & \cdots & v_{m-1,n} & ; & \gamma_{m-1} \\ w_{n-m,0} & w_{n-m,1} & \cdots & w_{n-m,n} & ; & g(x_{n-m}) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & ; & \cdots \\ w_{n,0} & w_{n,1} & \cdots & w_{n-m,n} & ; & g(x_n) \end{bmatrix}, \\
[\mathbf{W}^*; \mathbf{G}^*] &= \begin{bmatrix} w_{0,0} & w_{0,1} & \cdots & w_{0,n} & ; & g(x_0) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & ; & \cdots \\ t_{0,0} & t_{0,1} & \cdots & t_{0,n} & ; & \mu_0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & ; & \cdots \\ t_{m-1,0} & t_{m-1,1} & \cdots & t_{m-1,n} & ; & \mu_{m-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ w_{n-m,0} & w_{n-m,1} & \cdots & w_{n-m,0} & ; & g(x_n) \end{bmatrix}, \\
[\mathbf{W}^*; \mathbf{G}^*] &= \begin{bmatrix} u_{0,0} & u_{0,1} & \cdots & u_{0,n} & ; & \lambda_0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & ; & \cdots \\ u_{n-m,0} & u_{n-m,1} & \cdots & u_{n-m,n} & ; & \lambda_{n-m} \\ w_{n-m+1,0} & w_{n-m+1,1} & \cdots & w_{n-m+1,n} & ; & g(x_{n-m+1}) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & ; & \cdots \\ u_{m-1,0} & u_{m-1,1} & \cdots & u_{m-1,n} & ; & \lambda_{m-1} \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Eğer $S = n - m + 1$ olursa $\widetilde{\mathbf{W}}$ katsayılar matrisi $(n + 1) \times (n + 1)$ tipli bir kare matris, \mathbf{W}^* katsayılar matrisi $(n - m + 1) \times (n + 1)$ tipli bir dikdörtgensel matris olur. Buna göre sıralama noktaları $x_s = a + \frac{(b-a)s}{n-m}$; $s = 0, 1, \dots, n - m$ olarak seçilirse yeni $(n + 1) \times 1$ tipli $\widetilde{\mathbf{G}}$ matrisi ve $\widetilde{\mathbf{W}}$ katsayılar matrisine karşılık gelen yeni $[\widetilde{\mathbf{W}}; \widetilde{\mathbf{G}}]$ arttırılmış matris, $[\mathbf{W}; \mathbf{G}]$ arttırılmış matrisine (2.20), (2.21) ya da (2.22) ile tanımlı satır matrisleri eklenerek yazılabilir. Bu şekilde elde edilen yeni arttırılmış matris bir kare matristir. Diğer yandan yeni $(n - m + 1) \times 1$ tipli \mathbf{G}^* matrisi ve \mathbf{W}^* katsayılar matrisine karşılık gelen yeni $[\mathbf{W}^*; \mathbf{G}^*]$ arttırılmış matris, $[\mathbf{W}; \mathbf{G}]$ arttırılmış matrisin son m satırı, baştan m satırı, ortadan m satırı ya da baştan ve sondan m satırı silinip, yerine (2.20), (2.21) ya da (2.22) ile tanımlı satır

matrisleri yazılarak elde edilir. Bu şekilde elde edilen yeni arttırılmış matris ise dikdörtgensel bir matristir.

Adım 4. İntegral denklemler için koşul verilmediğinden \mathbf{W}^* ve $\widetilde{\mathbf{W}}$ matrisleri yazılamaz. Bu nedenle bu denklemlerin çözümü, $rank(\mathbf{W}) = rank[\mathbf{W}; \mathbf{G}] = n + 1$ olduğunda tek türlü olarak belirlenir. Diferansiyel ve integrodiferansiyel denklemler için $rank(\widetilde{\mathbf{W}}) = [\widetilde{\mathbf{W}}; \widetilde{\mathbf{G}}] = n + 1$ ya da $rank(\mathbf{W}^*) = rank[\mathbf{W}^*; \mathbf{G}^*] = n + 1$ oluyorsa sistem, $\mathbf{Y} = (\widetilde{\mathbf{W}})^{-1} \widetilde{\mathbf{G}}$ ya da $\mathbf{Y} = (\mathbf{W}^*)^{-1} \mathbf{G}^*$ olarak yazılabilir ve bu sistemin çözümü tek türlü belirlenir. Bir matris kare matris değilse ya da kare ve aynı zamanda tekil bir matris ise matrisin tersi yoktur. Bu tip sistemler Gauss eliminasyon, genelleştirilmiş ters (Moore-Penrose pseudoinverse), LU ayrıştırma ve QR ayrıştırma yöntemleri ile çözülebilir.

3. LİNEER OLMAYAN DENKLEMLER İÇİN BERNSTEIN SIRALAMA YÖNTEMİ

Bu bölümde lineer olmayan diferansiyel, integral ve integrodiferansiyel denklemlerin çözümünü elde etmek için geliştirilmiş Bernstein polinomlarına dayalı bir sıralama yöntemi geliştirilmiştir. Bu yöntemin en önemli özelliği, sıralama noktaları ve kuasilineerleştirme tekniği kullanarak lineer olmayan denklemleri, tekrarlı olarak lineer denklemlere indirgemesidir.

3.1 Giriş

Kuasilineerleştirme yöntemi, ilk kez Bellman ve Kalaba (1965) tarafından Newton-Raphson yönteminin geliştirilmiş hali olarak lineer olmayan adi ve kısmi diferansiyel denklemleri çözmek için ortaya konan bir yöntemdir. Bu yöntemin amacı; lineer olmayan denklemleri, tekrarlı olarak lineer denklemlerin bir dizisi şeklinde ifade ederek çözmektir. Bu nedenle yöntem, lineerleştirme yöntemlerinden (Ramos 2003, Ramos 2005) farklı olarak bir iterasyon yöntemidir. Kuasilineerleştirme yöntemi ile birçok sistem tanımlama ve optimizasyon problemleri indirgenebildiğinden, bu yöntem modern kontrol uygulamalarında faydalı bir hesaplama tekniğidir. Ayrıca bu yöntem, diferansiyel denklemler (Charles ve Baird 1969, Agarwal 1984, Mandelzweig ve Tabakin 2001), fonksiyonel denklemler (Ahmad ve diğ. 2003, Drici ve diğ. 2009), integral denklemler (Pandit 1997, Caliò 2010), integrodiferansiyel denklemler (Ahmad ve diğ. 2001, Ahmad 2006, Wang ve diğ. 2009) gibi birçok çeşitli denklemlere uygulanmıştır.

Kuasilineerleştirme yöntemi (Bellman ve Kalaba 1965, Stanley 1968) aslında Newton-Raphson yönteminin geliştirilmesi olduğundan, Newton-Raphson yöntemini ve önemli özelliklerini gözden geçirmek faydalı olur. Newton-Raphson yöntemi, grafik çıkarımı dışında Taylor seri açılımıyla da geliştirilebilir. $f(x) = 0$ cebirsel denklemini gözönüne alalım. Bu denklemin z

kökünü elde etmeye çalışalım. $f(x)$ monoton azalan, konveks bir fonksiyon ve z basit bir kök olsun. Başlangıçta z köküne yakınsayan bir x_0 noktası seçelim. Taylor seri açılımının ikinci ve daha yüksek terimleri ihmal edilerek $f(x)$ 'in x_0 noktasındaki açılımı

$$f(x) = f(x_0) + (x - x_0) f'(x_0)$$

olarak ifade edilebilir. z köküne ikinci yaklaşım, x için aşağıda verilen lineer denklemi çözerek elde edilebilir:

$$f(x_0) + (x - x_0) f'(x_0) = 0.$$

Bu yaklaşıma x_1 yaklaşımı diyelim. x_1 kullanılarak x_2 üçüncü yaklaşımı,

$$f(x_1) + (x_2 - x_1) f'(x_1) = 0$$

denklemi x_2 için çözümlenerek elde edilebilir. Bu şekilde devam edilerek

$$f(x_n) + (x_{n+1} - x_n) f'(x_n) = 0 \tag{3.1}$$

genel rekürans bağıntısı elde edilir. Bu denklem x_{n+1} için çözümlerse, denklem

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

haline gelir. Burada x_n , her zaman bir önceki denklemin çözümünden bilinen fonksiyon ve x_{n+1} bilinmeyen fonksiyondur. Eğer başlangıçta $x_0 < z$ ise $f(x_n) > 0$ ve $f'(x_n) < 0$ eşitsizliklerinden dolayı yakınsamamın monoton olduğu açıktır.

Bunun yanısıra Taylor serisi, yöntemin hatasını tahmin etmek için de kullanılabilir. Taylor seri açılımı gözönüne alınarak, $f(z) = 0$ olduğundan

$$0 = f(x_n) + (z - x_n) f'(x_n) + (z - x_n)^2 \frac{f''(\xi)}{2!} \tag{3.2}$$

yazılabilir. (3.2) denkleminde (3.1) denklemini çıkarılarak

$$0 = (z - x_{n+1}) f'(x_n) + (z - x_n)^2 \frac{f''(\xi)}{2!}$$

bulunur. Yakınsamanın olduğu varsayılırsa, hem x_n hem de ξ sonunda z köküne yaklaşacağından, $f'(z) \neq 0$ olmak üzere

$$z - x_{n+1} = (z - x_n)^2 \frac{f''(z)}{2f'(z)}$$

elde edilir. Bu eşitliğe göre $(n + 1)$. iterasyondaki hata, n . iterasyondaki hatanın karesi ile orantılıdır. Bu tip bir yakınsama, kuadratik (ikinci dereceden) yakınsama olarak bilinir. Bu nedenle kuasilineerleştirme yöntemi yakınsamanın hızlı olmasını sağlar.

Kuasilineerleştirme yönteminin uygulanışını basit bir örnekle aşağıda gösterelim.

$$y(0) = c_1, \quad y(t_f) = c_2; \quad 0 \leq t \leq t_f \quad (3.3)$$

sınır koşulları ile verilen

$$y''(t) = f(y(t), t) \quad (3.4)$$

lineer olmayan ikinci mertebeden diferansiyel denklemini gözönüne alalım. $y(t)$ 'nin uygun bir başlangıç yaklaşımını $y_0(t)$ olarak seçelim. Burada Newton-Raphson yönteminden farklı olarak seçilen ilk iterasyon bir değer yerine bir fonksiyondur. f fonksiyonunun $y_0(t)$ fonksiyonu civarındaki Taylor seri açılımı, ikinci ve daha yüksek dereceden terimleri ihmal edilerek aşağıdaki gibi ifade edilebilir:

$$f(y(t), t) \cong f(y_0(t), t) + (y(t) - y_0(t))f_y(y_0(t), t). \quad (3.5)$$

Burada f_y , f fonksiyonunun y 'ye göre kısmi türevidir. (3.4) ve (3.5) denklemleri birleştirilerek

$$y''(t) \cong f(y_0(t), t) + (y(t) - y_0(t))f_y(y_0(t), t) \quad (3.6)$$

elde edilir. $y_0(t)$, t 'nin bilinen fonksiyonları olduğundan, (3.6) denklemi değişken katsayılı lineer diferansiyel denklemdir. Bu denklemin sınır koşulları, (3.3) ile tanımlanan denklemin koşullarıdır. Aynı yoldan cebirsel denklemler için rekürans bağıntısı elde edilebilir. (3.6) denklemi $y(t)$ için çözülebilir. Bu çözüme $y_1(t)$ diyelim. Bilinen $y_1(t)$ ile (3.6) denklemi, $y_1(t)$ civarında Taylor serisine aşağıdaki

gibi açılabilir:

$$y''(t) \cong f(y_1(t), t) + (y(t) - y_1(t)) f_y(y_1(t), t).$$

Bu denklem çözülerek $y(t)$ için üçüncü yaklaşım elde edilir. Bu yaklaşıma $y_2(t)$ diyelim. Problemin yakınsadığını gözönüne alalım. Bu şekilde devam edilirse, rekürans bağıntısı

$$y''_{n+1}(t) = f(y_n(t), t) + (y_{n+1}(t) - y_n(t)) f_y(y_n(t), t) \quad (3.7)$$

olarak yazılabilir. Burada y_n her zaman bilinen ve bir önceki iterasyondan elde edilen fonksiyon, y_{n+1} ise bilinmeyen fonksiyondur. (3.7) denklemi her zaman lineer diferansiyel denklemdir ve sınır koşulları (3.3) ile verilen koşullardır.

Şimdi (3.3) sınır koşulları ile verilen

$$y''(t) = f(y'(t), y(t), t) \quad (3.8)$$

ikinci mertebeden lineer olmayan diferansiyel denklemi gözönüne alalım. $y'(t)$ birinci türevi diğer bir fonksiyon olarak gözönüne alınabilir. (3.8) denklemi, $y_0(t)$ civarında aşağıdaki gibi Taylor serisine açılabilir:

$$\begin{aligned} y''(t) \cong & f(y'_0(t), y_0(t), t) + (y'(t) - y'_0(t)) f_{y'}(y'_0(t), y_0(t), t) \\ & + (y(t) - y_0(t)) f_y(y'_0(t), y_0(t), t). \end{aligned}$$

Bu şekilde devam edilerek aşağıdaki rekürans bağıntısı elde edilir:

$$\begin{aligned} y''_{n+1}(t) = & f(y'_n(t), y_n(t), t) + (y'_{n+1}(t) - y'_n(t)) f_{y'}(y'_n(t), y_n(t), t) \quad (3.9) \\ & + (y_{n+1}(t) - y_n(t)) f_y(y'_n(t), y_n(t), t). \end{aligned}$$

(3.9) denklemi de her zaman (3.3) koşulları ile verilen lineer bir diferansiyel denklemdir. İkinci mertebeden daha yüksek mertebeli denklemler için rekürans bağıntısı, (3.9) rekürans bağıntısı için izlenen yolun aynısı ile elde edilebilir.

3.2 Diferansiyel Denklemler için Temel Bağıntılar

Bu kısımda, sırasıyla (2.3) ve (2.4) ile tanımlanan başlangıç veya sınır koşulları ile verilen

$$y^{(m)}(x) = g(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(m-1)}(x)); \quad a \leq x \leq b \quad (3.10)$$

m . mertebeden lineer olmayan diferansiyel denklemini gözönüne alalım. Burada $g : [a, b] \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu lineer olmayan bir fonksiyon, y ise bilinmeyen bir fonksiyondur. Bu denklemlere kuasilineerleştirme yöntemi uygulayarak, denklemi lineer denklemlerin bir dizisi haline getirelim ve bu lineer denklemlerin çözümüne, $r = 0, 1, \dots$ iterasyon sayısına bağlı olarak

$$y_{r+1}(x) \simeq B_n(y_{r+1}; x) = \sum_{i=0}^n y_{r+1} \left(a + \frac{(b-a)i}{n} \right) p_{i,n}(x) \quad (3.11)$$

genelleştirilmiş Bernstein polinomları ile yaklaşalım.

Lineer olmayan diferansiyel denklemlerin verilen koşullar altındaki çözümünün var ve tek olması için g 'nin $[a, b] \times \mathbb{R}^m$ üzerinde Lipschitz koşulunu¹ sağlayan sürekli bir fonksiyon olması gerekir.

Teorem 3.2.1 $g, y^{(k)}$ ($k = 0, 1, \dots, m-1$) fonksiyonuna göre Taylor serisine açılabilir bir fonksiyon ve (3.10) ile tanımlanan m . mertebeden lineer olmayan diferansiyel denklem, genelleştirilmiş Bernstein polinom çözümüne sahip olsun. Bu durumda $x_s \in [a, b]$ sıralama noktaları üzerinde (3.10) denklemi, aşağıdaki gibi bir matris gösterimine sahiptir:

$$\left[\mathbf{PN}^m - \sum_{k=0}^{m-1} \mathbf{G}_r \mathbf{PN}^k \right] \mathbf{Y}_{r+1} = \mathbf{H}_r; \quad r = 0, 1, \dots \quad (3.12)$$

Burada \mathbf{N} ve \mathbf{P} sırasıyla Teorem 2.1.3 ve Teorem 2.2.1'de tanımlanan matrisler, $\mathbf{G}_r = \text{diag}[g_r(x_s)]$ $(n+1) \times (n+1)$ tipli köşegen bir matris, $\mathbf{H}_r = [h_r(x_s)]$ ve

¹ f fonksiyonu, tüm $(x, z_0, z_1, \dots, z_{m-1}), (x, w_0, w_1, \dots, w_{m-1}) \in [a, b] \times \mathbb{R}^m$ için $|f(x, z_0, z_1, \dots, z_{m-1}) - f(x, w_0, w_1, \dots, w_{m-1})| \leq \sum_{k=0}^{m-1} L_k |z_k - w_k|$ koşulunu sağlar (Stakgold and Holst 2011).

$\mathbf{Y}_{r+1} = \left[y_{r+1} \left(a + \frac{(b-a)i}{n} \right) \right]$ $(n+1) \times 1$ tipli matrislerdir; bunların elemanları da aşağıdaki gibidir:

$$g_r(x) = \frac{\partial g}{\partial y^{(k)}}(x, y_r(x), y_r'(x), \dots, y_r^{(m-1)}(x)),$$

$$h_r(x) = g(x, y_r(x), y_r'(x), \dots, y_r^{(m-1)}(x)) - \sum_{k=0}^{m-1} y_r^{(k)}(x) g_r(x).$$

İspat: (3.10) denkleminde kuasilineerleştirme yöntemi uygulanarak denklem, $r = 0, 1, \dots$ iterasyon sayısı için aşağıdaki gibi m . mertebeden lineer diferansiyel denklemlerin bir dizisi şeklinde ifade edilebilir:

$$y_{r+1}^{(m)}(x) = g(x, y_r(x), y_r'(x), \dots, y_r^{(m-1)}(x)) \quad (3.13)$$

$$+ \sum_{k=0}^{m-1} \left(y_{r+1}^{(k)}(x) - y_r^{(k)}(x) \right) \frac{\partial g}{\partial y^{(k)}}(x, y_r(x), y_r'(x), \dots, y_r^{(m-1)}(x)).$$

Burada $y_0(x)$ ilk yaklaşım fonksiyonu, $y_r(x)$ bir önceki iterasyonla elde edilen ve her zaman bilinen bir fonksiyon ve $y_{r+1}(x)$ bilinmeyen bir fonksiyondur.

(3.13) ile elde edilen lineer diferansiyel denklemlerin bir dizisinin çözümü, (3.11) ile ifade edilen genelleştirilmiş Bernstein polinom yaklaşımına sahip olduğundan (2.2) bağıntısı kullanılarak bilinmeyen y_{r+1} fonksiyonu ve türevleri için

$$y_{r+1}^{(k)}(x) \simeq B_n^{(k)}(y_{r+1}; x) = \mathbf{P}^{(k)}(x) \mathbf{Y}_{r+1} = \mathbf{P}(x) \mathbf{N}^k \mathbf{Y}_{r+1}; \quad r = 0, 1, \dots$$

matris bağıntısı gerçekleşir. Sıralama yöntemi gereğince, $x_s \in [a, b]$ sıralama noktaları üzerinde ise bu bağıntı

$$y_{r+1}^{(k)}(x_s) = B_n^{(k)}(y_{r+1}; x_s) = \mathbf{P}(x_s) \mathbf{N}^k \mathbf{Y}_{r+1}; \quad r = 0, 1, \dots \quad (3.14)$$

olarak ifade edilebilir. Bu sıralama noktaları ve (3.14) bağıntısı, (3.13) denkleminde yerine yazılırsa

$$\mathbf{P}(x_s) \mathbf{N}^m \mathbf{Y}_{r+1} - \sum_{k=0}^{m-1} g_r(x_s) \mathbf{P}(x_s) \mathbf{N}^k \mathbf{Y}_{r+1} = h_r(x_s)$$

lineer cebirsel denklem sistemine ulaşılır. Burada yer alan $g_r(x)$ ve $h_r(x)$ fonksiyonları teoremin ifadesinde tanımlandığı gibidir. $s = 0, 1, \dots, n$ için bu sistem

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} \mathbf{P}(x_0) \\ \mathbf{P}(x_1) \\ \vdots \\ \mathbf{P}(x_n) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{G}_r = \begin{bmatrix} g_r(x_0) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & g_r(x_1) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & g_r(x_n) \end{bmatrix} \quad \text{ve} \quad \mathbf{H}_r = \begin{bmatrix} h_r(x_0) \\ h_r(x_1) \\ \vdots \\ h_r(x_n) \end{bmatrix}$$

matris gösterimleri gözönüne alınarak istenilen matris bağıntısını verir. Bu da ispatı tamamlar.

Teorem 3.2.2 f, y fonksiyonuna göre Taylor serisine açılabilir bir fonksiyon ve özel olarak

$$y(a) = \lambda, \quad y'(a) = \mu \quad (3.15)$$

başlangıç koşulları veya

$$A_1 y(a) + A_2 y'(a) = \beta, \quad B_1 y(b) + B_2 y'(b) = \gamma \quad (3.16)$$

sınır koşulları ile verilen

$$y''(x) + \frac{\alpha}{x} y'(x) + g(x, y) = 0; \quad a \leq x \leq b, \quad a, \alpha > 0 \quad (3.17)$$

ikinci mertebeden lineer olmayan Lane-Emden tipli denklemi genelleştirilmiş Bernstein polinom çözümüne sahip olsun. Bu durumda $x_s \neq 0$, $[a, b]$ aralığı üzerinde tanımlı sıralama noktaları üzerinde bu denklem için aşağıdaki matris gösterimi gerçekleşir:

$$[\mathbf{PN}^2 + \alpha \mathbf{QP} + \mathbf{G}_r \mathbf{P}] \mathbf{Y}_{r+1} = \mathbf{H}_r; \quad r = 0, 1, \dots \quad (3.18)$$

Burada $i, s = 0, 1, \dots, n$ için \mathbf{N} ve \mathbf{P} matrisleri sırasıyla Teorem 2.1.3 ve Teorem 2.2.1'de tanımlandığı gibi, $\mathbf{Q} = \text{diag} \left[\frac{1}{x_s} \right]$, $\mathbf{G}_r = \text{diag} [g_y(x_s, y_r)]$ $(n+1) \times (n+1)$ tipli matrisler, $\mathbf{Y}_{r+1} = \left[y_{r+1} \left(a + \frac{(b-a)i}{n} \right) \right]$ ve $\mathbf{H}_r = [y_r(x_s) g_y(x_s, y_r) - g(x_s, y_r)]$ $(n+1) \times 1$ tipli matrislerdir.

İspat: (3.17) ile tanımlanan lineer olmayan Lane-Emden tipli diferansiyel denkleme kuasilineerleştirme yöntemi uygulanarak, aşağıdaki gibi lineer diferansiyel denklemlerin bir dizisi elde edilir:

$$y_{r+1}''(x) + \frac{\alpha}{x} y_{r+1}'(x) + [g(x, y_r) + g_y(x, y_r)(y_{r+1}(x) - y_r(x))] = 0. \quad (3.19)$$

Burada g_y , g fonksiyonunun y fonksiyonuna göre kısmi türevi, $y_0(x)$ ilk yaklaşım fonksiyonu, $y_r(x)$ her zaman bilinen bir fonksiyon ve $y_{r+1}(x)$ bir önceki iterasyondan elde edilen fonksiyondur.

$$h_r(x) = y_r(x) g_y(x, y_r) - g(x, y_r)$$

denirse, bu durumda (3.19) denklemi

$$y_{r+1}''(x) + \frac{\alpha}{x} y_{r+1}'(x) + g_y(x, y_r) y_{r+1}(x) = h_r(x) \quad (3.20)$$

olarak tekrar düzenlenebilir.

(3.19) denkleminin çözümü, (3.11) genelleştirilmiş Bernstein polinom yaklaşımına sahip olduğundan sıralama yöntemi ve (2.2) bağıntısı gereğince, $x_s \neq 0$ sıralama noktaları üzerinde bilinmeyen fonksiyon ve türevleri sırasıyla

$$\begin{aligned} y_{r+1}(x_s) &= B_n(y_{r+1}; x_s) = \mathbf{P}(x_s) \mathbf{Y}_{r+1}, \\ y_{r+1}'(x_s) &= B_n'(y_{r+1}; x_s) = \mathbf{P}(x_s) \mathbf{N} \mathbf{Y}_{r+1}, \\ y_{r+1}''(x_s) &= B_n''(y_{r+1}; x_s) = \mathbf{P}(x_s) \mathbf{N}^2 \mathbf{Y}_{r+1} \end{aligned}$$

matris bağıntılarını gerçekler. Bu sıralama noktaları ve yukarıdaki bağıntılar, (3.20) ile bulunan denklemde yerine yazılırsa $s = 0, 1, \dots, n$ için

$$\mathbf{P}(x_s) \mathbf{N}^2 \mathbf{Y}_{r+1} + \frac{\alpha}{x_s} \mathbf{P}(x_s) \mathbf{N} \mathbf{Y}_{r+1} + g_y(x_s, y_r) \mathbf{Y}_{r+1} = h_r(x_s)$$

lineer cebirsel denklem sistemi elde edilir. Bu sistemde \mathbf{N} ve \mathbf{P} matrisleri Teorem 2.1.3 ve Teorem 2.2.1'de tanımlandığı gibi, \mathbf{Q} , \mathbf{H}_r ve \mathbf{F}_r matrisleri aşağıda tanımlandığı gibi

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 1/x_0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1/x_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1/x_n \end{bmatrix}, \quad \mathbf{H}_r = \begin{bmatrix} y_r(x_0) g_y(x_0, y_r) - g(x_0, y_r) \\ y_r(x_1) g_y(x_1, y_r) - g(x_1, y_r) \\ \vdots \\ y_r(x_n) g_y(x_n, y_r) - g(x_n, y_r) \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{G}_r = \begin{bmatrix} g_y(x_0, y_r) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & g_y(x_1, y_r) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & g_y(x_n, y_r) \end{bmatrix}$$

gözönüne alınırsa, istenen matris denklemi elde edilir. Bu da ispatı tamamlar.

3.3 İntegral Denklemler için Temel Bağntı

Bu kısımda

$$a(x)y(x) = g(x) + \lambda_1 \int_a^b f(x, t, y(t)) dt + \lambda_2 \int_a^x v(x, t, y(t)) dt \quad (3.21)$$

tanımlanan lineer olmayan Fredholm-Volterra integral denklemini gözönüne alalım. Burada $a(x) \neq 0$ bilinen fonksiyon, $f : [a, b] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $v : [a, b] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ lineer olmayan çekirdek fonksiyonlar, λ_1 ve λ_2 bilinen sabitler, $y(x)$ bilinmeyen bir fonksiyondur. Bu denkleme kuasilineerleştirme yöntemini uygulayarak, denklemi tekrarlı olarak lineer denklemlerin bir dizisi haline getirelim ve bu lineer denklemlerin çözümüne, (3.11) ile ifade edilen genelleştirilmiş Bernstein polinomları ile yaklaşalım.

Lineer olmayan integral denklemlerin çözümü için varlık-teklik teoremleri gereğince $f, v : [a, b] \times \mathbb{R}$ üzerinde Lipschitz koşulunu² sağlayan sürekli fonksiyonlar olmalıdır.

Teorem 3.3.1 $x_s \in [a, b]$ sıralama noktaları ve f, v fonksiyonları, y' 'ye göre Taylor serisine açılabilir fonksiyonlar olsun. Eğer (3.21) ile tanımlanan lineer

² $x, t \in [a, b]$ ve $w, z \in \mathbb{R}$ için $|f(x, t, z) - f(x, t, w)| \leq L_f |z - w|$ ve $|v(x, t, z) - v(x, t, w)| \leq L_v |z - w|$ olacak şekilde $L_f, L_v \geq 0$ vardır (Berenguer ve diğ. 2013).

olmayan Fredholm-Volterra integral denklemi, genelleştirilmiş Bernstein polinom çözümüne sahip ise bu durumda denklem aşağıdaki matris bağıntısına indirgenir:

$$[\mathbf{AP} - \lambda_1 \mathbf{F}_r - \lambda_2 \mathbf{V}_r] \mathbf{Y}_{r+1} = \mathbf{H}_r; \quad r = 0, 1, \dots \quad (3.22)$$

Burada \mathbf{P} ve \mathbf{A} matrisleri sırasıyla Teorem 2.2.1 ve Teorem 2.3.1'de tanımlandığı gibi, $i, s = 0, 1, \dots, n$ için $\mathbf{Y}_{r+1} = \left[y_{r+1} \left(a + \frac{(b-a)i}{n} \right) \right]$ ve $\mathbf{H}_r = [h_r(x_s)]$ matrisleri $(n+1) \times 1$ tipli, $\mathbf{F}_r = [F_{r,s,i}]$ ve $\mathbf{V}_r = [V_{r,s,i}]$ matrisleri $(n+1) \times (n+1)$ tipli matrislerdir. Ayrıca bu matrislerin elemanları

$$\begin{aligned} h_r(x) &= g(x) + \lambda_1 \int_a^b [f(x, t, y_r(t)) - f_y(x, t, y_r(t)) y_r(t)] dt \\ &\quad + \lambda_2 \int_a^x [v(x, t, y_r(t)) - v_y(x, t, y_r(t)) y_r(t)] dt, \\ F_{r,s,i} &= \int_a^b f(x_s, t, y_r(t)) p_{i,n}(t) dt, \quad V_{r,s,i} = \int_a^{x_s} v(x_s, t, y_r(t)) p_{i,n}(t) dt \end{aligned}$$

şeklindedir.

İspat: f ve v fonksiyonları, y 'ye göre Taylor serisine açılabilir fonksiyonlar olduğundan (3.21) ile tanımlanan lineer olmayan Fredholm-Volterra integral denklemi, kuasilineerleştirme yöntemi ile aşağıdaki gibi lineer integral denklemlerin bir dizisi şeklinde yazılabilir:

$$\begin{aligned} a(x) y_{r+1}(x) &= g(x) \\ &\quad + \lambda_1 \int_a^b [f(x, t, y_r(t)) + f_y(x, t, y_r(t)) (y_{r+1}(t) - y_r(t))] dt \\ &\quad + \lambda_2 \int_a^x [v(x, t, y_r(t)) + v_y(x, t, y_r(t)) (y_{r+1}(t) - y_r(t))] dt. \end{aligned}$$

Burada f_y ve v_y fonksiyonları f ve v 'nin y fonksiyonuna göre kısmi türevleri, $y_0(x)$ ilk yaklaşım fonksiyonu, $y_r(x)$ her zaman bilinen bir fonksiyon ve $y_{r+1}(x)$ bir önceki iterasyondan elde edilen fonksiyondur. Teoremin ifadesinde verilen $h_r(x)$ fonksiyonunu gözönüne alarak, yukarıdaki denklem kısa olarak

$$a(x)y_{r+1}(x)=h(x)+\lambda_1\int_a^bf_y(x,t,y_r(t))y_{r+1}(t)dt+\lambda_2\int_a^xv_y(x,t,y_r(t))y_{r+1}(t)dt \quad (3.23)$$

şeklinde düzenlenebilir.

(3.21) denklemi, (3.11) ile ifade edilen genelleştirilmiş Bernstein polinom çözümüne sahip olduğundan (2.2) bağıntısı kullanılarak çözüm fonksiyonu için

$$y_{r+1}(x)\simeq\mathbf{P}(x)\mathbf{Y}_{r+1};\quad r=0,1,\dots$$

bağıntısı gerçekleşir. Sıralama yöntemi gereğince, bu bağıntı ve $x_s\in[a,b]$ sıralama noktaları (3.23) ile bulunan denklemde yerine yazılırsa

$$a(x_s)\mathbf{P}(x_s)\mathbf{Y}_{r+1}-\lambda_1\mathbf{F}_r(x_s)\mathbf{Y}_{r+1}-\lambda_2\mathbf{V}_r(x_s)\mathbf{Y}_{r+1}=h_r(x_s)$$

lineer denklemi elde edilir. Burada

$$\mathbf{F}_r(x_s)=\int_a^bf_y(x_s,t,y_r)\mathbf{P}(t)dt=\begin{bmatrix}F_{r,s,0}&F_{r,s,1}&\dots&F_{r,s,n}\end{bmatrix},$$

$$\mathbf{V}_r(x_s)=\int_a^xv_y(x_s,t,y_r)\mathbf{P}(t)dt=\begin{bmatrix}V_{r,s,0}&V_{r,s,1}&\dots&V_{r,s,n}\end{bmatrix}$$

şeklinde tanımlanmıştır. Yukarıdaki denklemde $s=0,1,\dots,n$ alınırsa meydana gelen lineer denklem sistemi,

$$\mathbf{F}_r=\begin{bmatrix}\mathbf{F}_r(x_0) \\ \mathbf{F}_r(x_1) \\ \vdots \\ \mathbf{F}_r(x_n)\end{bmatrix},\quad \mathbf{V}_r=\begin{bmatrix}\mathbf{V}_r(x_0) \\ \mathbf{V}_r(x_1) \\ \vdots \\ \mathbf{V}_r(x_n)\end{bmatrix}\quad \text{ve}\quad \mathbf{H}_r=\begin{bmatrix}h_r(x_0) \\ h_r(x_1) \\ \vdots \\ h_r(x_n)\end{bmatrix}$$

matris gösterimleri gözönüne alınarak istenen matris bağıntısını verir. Bu da ispatı tamamlar.

3.4 İntegrodiferansiyel Denklemler için Temel Bağntı

Bu kısımda, (2.3) ve (2.4) ile tanımlanan başlangıç veya sınır koşulları ile verilen

$$g(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(m)}(x)) = \lambda_1 \int_a^b f(x, t, y(t), y'(t), \dots, y^{(m)}(t)) dt \quad (3.24) \\ + \lambda_2 \int_a^x v(x, t, y(t), y'(t), \dots, y^{(m)}(t)) dt$$

en genel gösterime sahip lineer olmayan Fredholm-Volterra integrodiferansiyel denklemini ele alalım. Burada $g : [a, b] \times \mathbb{R}^{m+1} \rightarrow \mathbb{R}$, $f : [a, b] \times [a, b] \times \mathbb{R}^{m+1} \rightarrow \mathbb{R}$ ve $v : [a, b] \times [a, b] \times \mathbb{R}^{m+1} \rightarrow \mathbb{R}$ lineer olmayan fonksiyonlar, λ_1 ve λ_2 bilinen sabitler ve $y(x)$ bilinmeyen bir fonksiyondur. Bu denklemin yaklaşık çözümünü elde etmek için denkleme kuasilineerleştirme yöntemini uygulayarak, denklemi tekrarlı olarak lineer halde yazalım. Daha sonra elde edilen bu lineer denklemlerin çözümüne (3.11) ile ifade edilen genelleştirilmiş Bernstein polinomları ile yaklaşım yapalım.

Lineer olmayan integrodiferansiyel denklemlerin verilen koşullar altındaki çözümünün var ve tek olması için g 'nin $[a, b]$ aralığı üzerinde, f ve v 'nin ise $[a, b] \times [a, b] \times \mathbb{R}^{m+1}$ üzerinde Lipschitz koşulunu sağlayan sürekli fonksiyonlar olması gerekir.

Bu kısımda işlemlerin daha anlaşılır olabilmesi için bazı kısaltmalar kullanacağız. Bunlar kaynak ve çekirdek fonksiyonları için

$$g_r(x) = g(x, y_r(x), y'_r(x), \dots, y_r^{(m)}(x)), \\ f_r(x, t) = f(x, t, y_r(t), y'_r(t), \dots, y_r^{(m)}(t)), \\ v_r(x, t) = v(x, t, y_r(t), y'_r(t), \dots, y_r^{(m)}(t))$$

ve bunların kısmi türevleri için

$$g_{y_r^{(k)}}(x) = \frac{\partial g}{\partial y^{(k)}}(x, y_r(x), y'_r(x), \dots, y_r^{(m)}(x)),$$

$$f_{y_r^{(k)}}(x, t) = \frac{\partial f}{\partial y^{(k)}}(x, t, y_r(t), y_r'(t), \dots, y_r^{(m)}(t)),$$

$$v_{y_r^{(k)}}(x, t) = \frac{\partial v}{\partial y^{(k)}}(x, t, y_r(t), y_r'(t), \dots, y_r^{(m)}(t))$$

şeklindedir.

Teorem 3.4.1 g , f ve v fonksiyonları $k = 0, 1, \dots, m$ için $y^{(k)}$ fonksiyonuna göre Taylor serisine açılabilir fonksiyonlar ve (3.24) ile tanımlı en genel gösterime sahip lineer olmayan Fredholm-Volterra integrodiferansiyel denklemin çözümü, genelleştirilmiş Bernstein polinom yaklaşımına sahip olsun. Bu durumda $x_s \in [a, b]$ sıralama noktaları üzerinde bu denklem için aşağıdaki matris bağıntısı gerçekleşir:

$$\left[\sum_{k=0}^m (\mathbf{G}_{r,k} \mathbf{P} - \lambda_1 \mathbf{F}_{r,k} - \lambda_2 \mathbf{V}_{r,k}) \mathbf{N}^k \right] \mathbf{Y}_{r+1} = \mathbf{H}_r; \quad r = 0, 1, \dots \quad (3.25)$$

Burada \mathbf{N} ve \mathbf{P} matrisleri sırasıyla Teorem 2.1.3 ve Teorem 2.2.1'de tanımlandığı

gibi, $i, s = 0, 1, \dots, n$ için $\mathbf{G}_{r,k} = \text{diag} [g_{y_r^{(k)}}(x_s)]$, $\mathbf{F}_{r,k} = \left[\int_a^b f_{y_r^{(k)}}(x_s, t) p_{i,n}(t) dt \right]$,

$\mathbf{V}_{r,k} = \left[\int_a^b v_{y_r^{(k)}}(x_s, t) p_{i,n}(t) dt \right]$ $(n+1) \times (n+1)$ tipli matrisler, $\mathbf{H}_r = [h_r(x_s)]$ ve

$\mathbf{Y}_{r+1} = \left[y_{r+1} \left(a + \frac{(b-a)i}{n} \right) \right]$ ise $(n+1) \times 1$ tipli matrisler olup,

$$h_r(x) = \lambda_1 \int_a^b f_r(x, t) dt + \lambda_2 \int_a^x v_r(x, t) dt - g_r(x) + \sum_{k=0}^m g_{y_r^{(k)}}(x) y_r^{(k)}(x)$$

$$- \sum_{k=0}^m \left[\lambda_1 \int_a^b f_{y_r^{(k)}}(x, t) y_r^{(k)}(t) dt + \lambda_2 \int_a^x v_{y_r^{(k)}}(x, t) y_r^{(k)}(t) dt \right]$$

şeklindedir.

İspat: g , f ve v fonksiyonları $y^{(k)}$ fonksiyonuna göre Taylor serisine açılabilir olduğundan (3.24) denklemini, kuasilineerleştirme yöntemi ile aşağıdaki gibi lineer integrodiferansiyel denklemlerin bir dizisi haline getirilebilir:

$$\begin{aligned}
g_r(x) = & - \sum_{k=0}^m \left(y_{r+1}^{(k)}(x) - y_r^{(k)}(x) \right) g_{y_r^{(k)}}(x) \\
& + \lambda_1 \left[\int_a^b f_r(x, t) dt + \sum_{k=0}^m \int_a^b \left(y_{r+1}^{(k)}(t) - y_r^{(k)}(t) \right) f_{y_r^{(k)}}(x, t) dt \right] \\
& + \lambda_2 \left[\int_a^x v_r(x, t) dt + \sum_{k=0}^m \int_a^x \left(y_{r+1}^{(k)}(t) - y_r^{(k)}(t) \right) v_{y_r^{(k)}}(x, t) dt \right].
\end{aligned} \tag{3.26}$$

Burada $y_0(x)$ ilk iterasyon fonksiyonu, $y_r(x)$ bir önceki iterasyonla elde edilen ve her zaman bilinen bir fonksiyon ve $y_{r+1}(x)$ bilinmeyen bir fonksiyondur.

(3.26) denkleminde sadece r -ye bağlı ifadeler sağa atılır ve $h_r(x)$ olarak tanımlanırsa denklem

$$\sum_{k=0}^m \left[g_{y_r^{(k)}}(x) y_{r+1}^{(k)}(x) - \lambda_1 \int_a^b f_{y_r^{(k)}}(x, t) y_{r+1}^{(k)}(t) dt - \lambda_2 \int_a^x v_{y_r^{(k)}}(x, t) y_{r+1}^{(k)}(t) dt \right] = h_r(x) \tag{3.27}$$

şeklinde yeniden yazılabilir. (3.27) ile bulunan denklem, y_r fonksiyonu x 'e bağlı olarak bilinen fonksiyon olduğundan lineer Fredholm-Volterra integrodiferansiyel denklem belirtir.

Bilinmeyen y_{r+1} fonksiyonu genelleştirilmiş Bernstein polinom çözümüne sahip olduğundan (2.2) bağıntısı gözönüne alınarak, bu fonksiyon ve türevleri için

$$y_{r+1}^{(k)}(x) \simeq B_n^{(k)}(y_{r+1}; x) = \mathbf{P}^{(k)}(x) \mathbf{Y}_{r+1}; \quad r = 0, 1, \dots$$

bağıntısı ve sıralama yöntemi gereğince, x_s sıralama noktaları üzerinde

$$y_{r+1}^{(k)}(x_s) = \mathbf{P}(x_s) \mathbf{N}^k \mathbf{Y}_{r+1}; \quad k = 0, 1, \dots, m \tag{3.28}$$

bağıntısı gerçekleşir. Bu sıralama noktaları ve (3.28) bağıntısı, (3.27) ile elde edilen denklemde yerine yazılırsa $s = 0, 1, \dots, n$ için

$$\sum_{k=0}^m \left[g_{y_r^{(k)}}(x_s) \mathbf{P}(x_s) - \lambda_1 \mathbf{F}_{r,k}(x_s) - \lambda_2 \mathbf{V}_{r,k}(x_s) \right] \mathbf{N}^k \mathbf{Y}_{r+1} = h_r(x_s) \tag{3.29}$$

lineer cebirsel denklem sistemi elde edilir. Burada

$$\mathbf{F}_{r,k}(x_s) = \int_a^b f_{y_r^{(k)}}(x_s, t) \mathbf{P}(t) dt, \quad \mathbf{V}_{r,k}(x_s) = \int_a^{x_s} v_{y_r^{(k)}}(x_s, t) \mathbf{P}(t) dt$$

şeklinde tanımlanan matrislerdir.

(3.29) sistemi $s = 0, 1, \dots, n$ için

$$\mathbf{G}_{r,k} = \begin{bmatrix} g_{y_r^{(k)}}(x_0) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & g_{y_r^{(k)}}(x_1) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & g_{y_r^{(k)}}(x_n) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{P} = \begin{bmatrix} \mathbf{P}(x_0) \\ \mathbf{P}(x_1) \\ \vdots \\ \mathbf{P}(x_n) \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{F}_{r,k} = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_{r,k}(x_0) \\ \mathbf{F}_{r,k}(x_1) \\ \vdots \\ \mathbf{F}_{r,k}(x_n) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{V}_{r,k} = \begin{bmatrix} \mathbf{V}_{r,k}(x_0) \\ \mathbf{V}_{r,k}(x_1) \\ \vdots \\ \mathbf{V}_{r,k}(x_n) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{H}_r = \begin{bmatrix} h_r(x_0) \\ h_r(x_1) \\ \vdots \\ h_r(x_n) \end{bmatrix}.$$

matris gösterimleri gözönüne alınarak istenen matris bağıntısını verir. Bu da ispatı tamamlar.

Sonuç 3.4.1 $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ için (3.24) ile tanımlanan lineer olmayan Fredholm-Volterra integrodiferansiyel denklemi aşağıdaki m . mertebeden lineer olmayan diferansiyel denkleme indirgenir:

$$g(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(m)}(x)) = 0$$

ve bu denklem için

$$\sum_{k=0}^m \mathbf{G}_{r,k} \mathbf{P} \mathbf{N}^k \mathbf{Y}_{r+1} = \widehat{\mathbf{H}}_r; \quad r = 0, 1, \dots \quad (3.30)$$

matris gösterimi gerçekleşir. Burada \mathbf{N} , \mathbf{P} , $\mathbf{G}_{r,k}$ ve \mathbf{Y}_{r+1} matrisleri sırasıyla Teorem 2.1.3, Teorem 2.2.1, Teorem 3.4.1'de tanımlandığı gibi ve $\widehat{\mathbf{H}}_r = [\widehat{h}_r(x_s)]$ matrisinin elemanları aşağıdaki gibidir:

$$\widehat{h}_r(x_s) = \sum_{k=0}^m g_{y_r^{(k)}}(x_s) y_r^{(k)}(x_s) - g_r(x_s).$$

Sonuç 3.4.2 $m = 0$ için (3.24) ile tanımlanan lineer olmayan Fredholm-Volterra integrodiferansiyel denklemi, $y^{(0)}(t) = y(t)$ olmak üzere

$$g(x, y(x)) = \lambda_1 \int_a^b f(x, t, y(t)) dt + \lambda_2 \int_a^x v(x, t, y(t)) dt$$

lineer olmayan Fredholm-Volterra integral denklemine indirgenir ve bu denklem

$$[\mathbf{G}_r - \lambda_1 \mathbf{F}_r - \lambda_2 \mathbf{V}_r] \mathbf{Y}_{r+1} = \bar{\mathbf{H}}_r; \quad r = 0, 1, \dots \quad (3.31)$$

matris gösterimine sahiptir. Burada \mathbf{Y}_{r+1} matrisi Teorem 3.4.1'deki gibi, $\mathbf{G}_r = \text{diag}[g_y(x_s, y_r(x_s))]$, $\mathbf{F}_r = [F_{r,s,i}]$, $\mathbf{V}_r = [V_{r,s,i}]$, $\bar{\mathbf{H}}_r = [h_r(x_s)]$ ve bu matrislerin elemanları aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$\begin{aligned} h_r(x_s) &= g_y(x_s, y_r(x_s)) y_r(x_s) - g(x_s, y_r(x_s)) \\ &\quad - \lambda_1 \int_a^b [f(x_s, t, y_r(t)) - f_y(x_s, t, y_r(t)) y_r(t)] dt \\ &\quad - \lambda_2 \int_a^{x_s} [v(x_s, t, y_r(t)) - v_y(x_s, t, y_r(t)) y_r(t)] dt, \\ F_{r,s,i} &= \int_a^b f_y(x_s, t, y_r(t)) p_{i,n}(t) dt, \quad V_{r,s,i} = \int_a^{x_s} v_y(x_s, t, y_r(t)) p_{i,n}(t) dt. \end{aligned}$$

3.5 Çözüm Yöntemi

Bu kısımda lineer olmayan (3.10) diferansiyel, (3.21) integral ve (3.24) integrodiferansiyel denklemlerin (2.3) veya (2.4) koşulları altındaki çözümünü bulmak için aşağıdaki adımları izleyelim:

Adım 1. Lineer diferansiyel, integral ve integrodiferansiyel denklemler dizi için elde edilen temel matris bağıntılarında $r = 0, 1, \dots$ iterasyonlu \mathbf{W}_r katsayılar matrisi sırasıyla

$$\begin{aligned}
\mathbf{W}_r &= \mathbf{P}\mathbf{N}^m - \sum_{k=0}^{m-1} \mathbf{H}_r \mathbf{P}\mathbf{N}^k, \\
\mathbf{W}_r &= \mathbf{A}\mathbf{P} - \lambda_1 \mathbf{F}_r - \lambda_2 \mathbf{V}_r, \\
\mathbf{W}_r &= \sum_{k=0}^m (\mathbf{G}_{r,k} \mathbf{P} - \lambda_1 \mathbf{F}_{r,k} - \lambda_2 \mathbf{V}_{r,k}) \mathbf{N}^k
\end{aligned}$$

şeklinde gösterilirse, denklem basitçe $\mathbf{W}_r \mathbf{Y}_{r+1} = \mathbf{H}_r$ ya da $[\mathbf{W}_r; \mathbf{H}_r]$ ile ifade edilebilir. Bu denklem, sabit r değeri için n bilinmeyenli y_{r+1} katsayılarından oluşan lineer cebirsel denklem sistemi belirtir.

Adım 2. \mathbf{W}_r ve \mathbf{H}_r matrislerini hesaplayabilmek için $y_0(x)$ ilk iterasyon fonksiyonu seçilmelidir. Bu yaklaşık fonksiyon çeşitli yollarla belirlenebilir. Örneğin, mühendislik problemleri için bu yaklaşım fiziksel durumlardan ya da matematiksel materyallerden elde edilebilir. Ancak çoğu problem için kaba bir ilk yaklaşım, yakınsama işlemi için yeterlidir. En açık şekilde ilk yaklaşım, $0 \leq t \leq t_f$ için $y_0(t) = c_1$ başlangıç koşulu olarak seçilebilir. Yani $y_0(t)$ sabit bir fonksiyon olarak seçilebilir (Stanley 1968). Daha iyi bir yaklaşım için verilen başlangıç ya da sınır koşullarını sağlayan en yüksek dereceli polinom da gözönüne alınabilir. Ancak başlangıç fonksiyonu polinom olmak zorunda değildir. İntegral denklemlerde ise yanında koşullar verilmediğinden bu fonksiyon, denklemdeki kaynak fonksiyonu $y_0(x) = g(x)$ olarak belirlenebilir.

Adım 3. $y_{r+1}^{(k)}(x_s) = \mathbf{P}(x_s) \mathbf{N}^k \mathbf{Y}_{r+1}$ bağıntısı gözönüne alınarak (2.3) ve (2.4) ile verilen koşullar, aşağıdaki matris bağıntılarına sahip olur:

$$\mathbf{U}_j \mathbf{Y}_{r+1} = \lambda_j \text{ ya da } [\mathbf{U}_j; \lambda_j], \quad \mathbf{V}_j \mathbf{Y}_{r+1} = \gamma_j \text{ ya da } [\mathbf{V}_j; \gamma_j].$$

Adım 4. $[\mathbf{W}_r; \mathbf{H}_r]$ arttırılmış matrisi her bir $r = 0, 1, \dots$ için lineer denklem sistemi ifade ettiğinden, Bölüm 2.5'te lineer bir denklem sisteminin çözüm tekniği için izlenen benzer yollar burada da geçerlidir. Bu durumda $[\mathbf{W}_r; \mathbf{H}_r]$ arttırılmış matris, silmeden ekleme tekniği ya da silerek ekleme tekniği kullanarak yeni arttırılmış matrisler ile ifade edilebilir. Örneğin; $S = n + 1$ olacak şekilde seçilirse, $r = 0, 1, \dots$ için silmeden ekleme tekniği kullanılarak elde edilen $\widetilde{\mathbf{W}}_r$ katsayılar matrisi $(n+m+1) \times (n+1)$ tipli bir dikdörtgensel matris ve silerek

ekleme tekniği kullanılarak elde edilen \mathbf{W}_r^* katsayılar matrisi $(n+1) \times (n+1)$ tipli bir kare matris olur. Bu matrislere karşılık gelen yeni arttırılmış matrisler ise sırasıyla $[\widetilde{\mathbf{W}}_r; \widetilde{\mathbf{H}}_r]$ ve $[\mathbf{W}_r^*; \mathbf{H}_r^*]$ olur. Burada $[\widetilde{\mathbf{W}}_r; \widetilde{\mathbf{H}}_r]$ arttırılmış matris, $[\mathbf{W}_r; \mathbf{H}_r]$ arttırılmış matrisin satırlarını silmeden, sonuna (3.32) ya da (3.33) satır matrisi eklenerek elde edilir. Diğer yandan $[\mathbf{W}_r^*; \mathbf{H}_r^*]$ arttırılmış matris, $[\mathbf{W}_r; \mathbf{H}_r]$ arttırılmış matrisin m satırı ile (3.32) ya da (3.33) arttırılmış matrisin satırları yer değiştirilerek yazılabilir.

Eğer $S = n - m + 1$ olarak seçilirse, silmeden ekleme tekniği kullanılarak elde edilen $(n+1) \times (n+1)$ tipli $\widetilde{\mathbf{W}}_r$ katsayılar matrisine karşılık gelen yeni $[\widetilde{\mathbf{W}}_r; \widetilde{\mathbf{H}}_r]$ arttırılmış matris, $[\mathbf{W}_r; \mathbf{H}_r]$ arttırılmış matrisine (3.32) ya da (3.33) ile tanımlı satır matrisleri eklenerek yazılabilir. Silerek ekleme tekniği kullanılarak elde edilen $(n-m+1) \times (n+1)$ tipli \mathbf{W}_r^* katsayılar matrisine karşılık gelen yeni $[\mathbf{W}_r^*; \mathbf{G}_r^*]$ arttırılmış matris, $[\mathbf{W}_r; \mathbf{G}_r]$ arttırılmış matrisinin son m satırı, baştan m satırı, ortadan m satırı ya da baştan ve sondan m satırı silinip, yerine (3.32) ya da (3.33) ile tanımlı satır matrisleri yazılarak elde edilir.

Adım 5. Burada lineer olmayan denklemler kuasilineerleştirme tekniği ile lineer denklemlere indirildiğinden, lineer olmayan sistemlerin çözümlüne ihtiyaç yoktur. Lineer denklem sistemlerinde olduğu gibi eğer $rank(\widetilde{\mathbf{W}}_r) = rank([\widetilde{\mathbf{W}}_r; \widetilde{\mathbf{H}}_r])$ ya da $rank(\mathbf{W}_r^*) = rank([\mathbf{W}_r^*; \mathbf{H}_r^*]) = n+1$ ise bilinmeyen y_{r+1} katsayıları herbir r iterasyonu için tek türlü belirlenir. İntegral denklemler koşullar ile tanımlanmadığından $rank(\mathbf{W}_r) = rank([\mathbf{W}_r; \mathbf{H}_r]) = n+1$ olması durumunda çözümler tek türlü belirlenebilir. Bu tip sistemler Gauss eliminasyon, genelleştirilmiş ters, LU ayrıştırma ve QR ayrıştırma yöntemleri ile çözülebilir.

4. LİNEER DENKLEMLER İÇİN HATA ANALİZİ

Bu bölümde genelleştirilmiş Bernstein polinomlarının düzgün yaklaşım özellikleri gözönüne alınarak, çeşitli lineer denklemlerin Bernstein yaklaşımı ile elde edilen çözümleri için kalan hata sınırları ve yakınsaklık kriterleri incelenmiştir.

4.1 Giriş

Aşağıda genelleştirilmiş Bernstein polinomlarının $[a, b]$ aralığı üzerinde Weierstrass teoremini gerçeklediğini gösteren teoremi verelim ve bu polinomların en iyi düzgün yaklaşım özelliklerine değinelim.

Özellik 4.1.1 $x \in [a, b]$ ve $\delta > 0$ olsun.

$$\Delta_n = \left\{ i; \left| a + \frac{(b-a)i}{n} - x \right| \geq \delta, \quad i = 0, 1, \dots, n \right\}$$

olmak üzere

$$\sum_{i \in \Delta_n} p_{i,n}(x) \leq \frac{(b-a)^2}{4n\delta^2}$$

gerçeklenir.

İspat: $[0, 1]$ aralığı üzerinde Natanson (1964) tarafından ifade ve ispatı verilen bu özelliğin, $[a, b]$ aralığı üzerinde de gerçekleştiğini aşağıda gösterelim: $\left| a + \frac{(b-a)i}{n} - x \right| \geq \delta \implies \frac{\left(a + \frac{(b-a)i}{n} - x \right)^2}{\delta^2} \geq 1$ eşitsizliği ve Özellik 1.2.13 kullanılarak

$$\begin{aligned} \sum_{i \in \Delta_n} p_{i,n}(x) &\leq \sum_{i \in \Delta_n} \frac{\left(a + \frac{(b-a)i}{n} - x \right)^2}{\delta^2} p_{i,n}(x) \\ &= \frac{(x-a)(b-x)}{n\delta^2} \end{aligned}$$

elde edilir. Burada eşitsizliğin sağ tarafındaki ifadenin $[a, b]$ aralığı üzerinde x 'e göre maksimumu alınarak

$$\sum_{i \in \Delta_n} p_{i,n}(x) \leq \frac{1}{n\delta^2} \max_{x \in [a,b]} (x-a)(b-x) = \frac{(b-a)^2}{4n\delta^2}$$

şeklinde istenen eşitsizlik bulunur.

Teorem 4.1.3 Eğer $y^{(k)}(x)$ ($k = 0, 1, \dots, m$) $[a, b]$ aralığı üzerinde sürekli fonksiyon ise bu durumda $[a, b]$ aralığı üzerinde $m \geq 0$ tamsayısı için

$$\lim_{n \rightarrow \infty} B_n^{(k)}(y; x) = y^{(k)}(x)$$

düzgün olarak gerçekleşir.

İspat: Bu teoremin $[0, 1]$ aralığı üzerindeki ifade ve ispatı Phillips (2003) tarafından verilmiştir. İlk olarak $k = 0$ için bu teoremi verilen ispata benzer yolla $[a, b]$ aralığına genişletelim.

y fonksiyonu $[a, b]$ aralığı üzerinde sürekli olduğundan sınırlıdır. Yani $\forall x \in [a, b]$ için $|y(x)| \leq M$ olacak şekilde bir $M > 0$ sayısı vardır. Kapalı ve sınırlı aralık üzerinde sürekli bir fonksiyon bu aralık üzerinde düzgün süreklidir. Bu durumda $\forall \varepsilon > 0$ için $|x_1 - x_2| < \delta$ olmak üzere $\forall x_1, x_2 \in [a, b]$ için $|y(x_1) - y(x_2)| < \frac{\varepsilon}{2}$ eşitsizliğini gerçekleyen en az bir $\delta > 0$ sayısı vardır. Diğer yandan Özellik 1.2.6 gözönüne alınarak

$$B_n(y; x) - y(x) = \sum_{i=0}^n \left[y \left(a + \frac{(b-a)i}{n} \right) - y(x) \right] p_{i,n}(x)$$

eşitliği yazılabilir. Buradaki toplam, $i = 0, 1, \dots, n$ indis kümesi için

$$\Gamma_n = \left\{ i; \left| a + \frac{(b-a)i}{n} - x \right| < \delta \right\}, \quad \Delta_n = \left\{ i; \left| a + \frac{(b-a)i}{n} - x \right| \geq \delta \right\}$$

şeklinde iki sınıfa ayrılсын. Bu durumda

$$\begin{aligned} B_n(y; x) - y(x) &= \sum_{i \in \Gamma_n} \left[y \left(a + \frac{(b-a)i}{n} \right) - y(x) \right] p_{i,n}(x) \\ &\quad + \sum_{i \in \Delta_n} \left[y \left(a + \frac{(b-a)i}{n} \right) - y(x) \right] p_{i,n}(x) \end{aligned}$$

şeklinde yazılabilir. Bu eşitliğe sırasıyla üçgen eşitsizliği¹, genelleştirilmiş üçgen eşitsizliği² uygulanır ve Özellik 1.2.1 gözönüne alınırsa

$$|B_n(y; x) - y(x)| \leq \sum_{i \in \Gamma_n} \left| y \left(a + \frac{(b-a)i}{n} \right) - y(x) \right| p_{i,n}(x) \quad (4.1)$$

$$+ \sum_{i \in \Delta_n} \left| y \left(a + \frac{(b-a)i}{n} \right) - y(x) \right| p_{i,n}(x)$$

eşitsizliği elde edilir.

$i \in \Delta_n$ için y fonksiyonu sınırlı olduğundan $\left| y \left(a + \frac{(b-a)i}{n} \right) - y(x) \right| < 2M$ olacak şekilde $M > 0$ sayısı vardır. Diğer yandan $i \in \Gamma_n$ için y fonksiyonu sürekli olduğundan $\left| y \left(a + \frac{(b-a)i}{n} \right) - y(x) \right| < \frac{\varepsilon}{2}$ gerçekleşir. Bu eşitsizlikler, (4.1) eşitsizliğinin sağında yerine yazılır, Özellik 1.2.6 ve Özellik 1.2.14 gözönüne alınırsa

$$|B_n(y; x) - y(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2} \sum_{i \in \Gamma_n} p_{i,n}(x) + 2M \sum_{i \in \Delta_n} p_{i,n}(x)$$

$$\leq \frac{\varepsilon}{2} \sum_{i=0}^n p_{i,n}(x) + 2M \sum_{i \in \Delta_n} p_{i,n}(x)$$

$$\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{M(b-a)^2}{2n\delta^2}$$

elde edilir. Yeterince büyük n değerleri için $\frac{M(b-a)^2}{2n\delta^2} < \frac{\varepsilon}{2}$ olduğundan, $\forall \varepsilon > 0$ için istenen

$$|B_n(y; x) - y(x)| < \varepsilon$$

bulunur. Bu da $k = 0$ için istenen yakınsaklığın gerçekleştiğini gösterir.

Şimdi yukarıdaki ispata benzer yolla $k \geq 1$ için teoremin gerçekleştiğini gösterelim. Bunun için Tanım 1.3.2'de $a + (b-a)i/n < \xi_i < a + (b-a)(i+k)/n$ olmak üzere k . mertebeden fark operatörü için gerçekleşen

¹Sürekli fonksiyonlar uzayı üzerinde $|x+y| \leq |x| + |y|$ eşitsizliği, üçgen eşitsizliği olarak adlandırılır.

²Üçgen eşitsizliğinden yararlanarak tümevarım yöntemi ile sürekli fonksiyonlar uzayı üzerinde $\left| \sum_{i=0}^n x_i \right| \leq \sum_{i=0}^n |x_i|$ genelleştirilmiş üçgen eşitsizliği yazılabilir.

$$\Delta_h^k y \left(a + \frac{(b-a)i}{n} \right) = \frac{(b-a)^k}{n^k} y^{(k)}(\xi_i)$$

ifadesi yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} B_n^{(k)}(y; x) &= \frac{n!}{(n-k)! (b-a)^k} \sum_{i=0}^{n-k} \frac{(b-a)^k}{n^k} y^{(k)}(\xi_i) p_{i, n-k}(x) \\ &= \frac{n!}{(n-k)! n^k} \sum_{i=0}^{n-k} y^{(k)}(\xi_i) p_{i, n-k}(x) \end{aligned}$$

olur. Burada $x \in [a, b]$ için

$$y^{(k)}(\xi_i) = y^{(k)}(\xi_i) - y^{(k)}(x) + y^{(k)}(x)$$

olarak düşünülürse

$$\begin{aligned} \frac{n^k (n-k)!}{n!} B_n^{(k)}(y; x) &= \sum_{i=0}^{n-k} [y^{(k)}(\xi_i) - y^{(k)}(x) + y^{(k)}(x)] p_{i, n-k}(x) \\ &= \sum_{i=0}^{n-k} (y^{(k)}(\xi_i) - y^{(k)}(x)) p_{i, n-k}(x) + \sum_{i=0}^{n-k} y^{(k)}(x) p_{i, n-k}(x) \end{aligned}$$

eşitliği yazılabilir. Özellik 1.2.6, genelleştirilmiş üçgen eşitsizliği ve Özellik 1.2.1 gözönüne alınarak bu eşitlik

$$\left| \frac{n^k (n-k)!}{n!} B_n^{(k)}(y; x) - y^{(k)}(x) \right| \leq \sum_{i=0}^{n-k} |y^{(k)}(\xi_i) - y^{(k)}(x)| p_{i, n-k}(x)$$

eşitsizliğine döndüür.

y fonksiyonu $[a, b]$ aralığı üzerinde düzgün sürekli olduğundan $\forall \varepsilon > 0$ için $|\xi_i - x| < \delta$ olmak üzere $\forall \xi_i, x \in [a, b]$ için $|y^{(k)}(\xi_i) - y^{(k)}(x)| < \varepsilon$ eşitsizliğini sağlayan en az bir $\delta > 0$ sayısı vardır öyle ki

$$\left| \frac{n^k (n-k)!}{n!} B_n^{(k)}(y; x) - y^{(k)}(x) \right| < \varepsilon$$

gerçeklenir. Ayrıca $n \rightarrow \infty$ iken $\frac{n^k (n-k)!}{n!} \rightarrow 1$ olduğundan $B_n^{(k)}(y; x) \rightarrow y^{(k)}(x)$ olur. Bu da $k \geq 1$ için ispatı tamamlar.

Teorem 4.1.4 $y : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ sürekli bir fonksiyon ve $\omega(\delta)^3$, y fonksiyonunun süreklilik modülü olsun. Bu durumda genelleştirilmiş Bernstein polinomları için aşağıdaki eşitsizlik ve düzgün yakınsaklık gerçekleşir:

$$|y(x) - B_n(y; x)| \leq \omega(n^{-1/2}) \left[1 + \sqrt{(x-a)(b-x)} \right], \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \|B_n y - y\|_\infty = 0.$$

İspat: Sırasıyla Tanım 1.3.1, Özellik 1.2.1, genelleştirilmiş üçgen eşitsizliği, Özellik 1.2.6 ve süreklilik modülü tanımı gözönüne alınarak

$$\begin{aligned} |B_n(y; x) - y(x)| &= \left| \sum_{i=0}^n y \left(a + \frac{(b-a)i}{n} \right) p_{i,n}(x) - y(x) \right| \\ &= \left| \sum_{i=0}^n y \left(a + \frac{(b-a)i}{n} \right) p_{i,n}(x) - \sum_{i=0}^n y(x) p_{i,n}(x) \right| \\ &= \left| \sum_{i=0}^n \left[y \left(a + \frac{(b-a)i}{n} \right) - y(x) \right] p_{i,n}(x) \right| \\ &\leq \sum_{i=0}^n \left| y \left(a + \frac{(b-a)i}{n} \right) - y(x) \right| p_{i,n}(x) \\ &\leq \sum_{i=0}^n \omega \left(\left| x - \left(a + \frac{(b-a)i}{n} \right) \right| \right) p_{i,n}(x) \end{aligned}$$

eşitsizliği yazılabilir. Burada $\delta = n^{-1/2}$ ve $\lambda = n^{1/2} \left| x - \left(a + \frac{(b-a)i}{n} \right) \right|$ olmak üzere süreklilik modülünün özelliği⁴ ve Özellik 1.2.6 kullanılarak aşağıdaki eşitsizliğe ulaşılır:

$$\begin{aligned} |B_n(y; x) - y(x)| &\leq \sum_{i=0}^n \omega(n^{-1/2}) \left(1 + n^{1/2} \left| x - \left(a + \frac{(b-a)i}{n} \right) \right| \right) p_{i,n}(x) \\ &\leq \omega(n^{-1/2}) \left\{ 1 + n^{1/2} \sum_{i=0}^n \left| x - \left(a + \frac{(b-a)i}{n} \right) \right| p_{i,n}(x) \right\}. \end{aligned}$$

Bu eşitsizliğin sağında yer alan toplam ifadesine Cauchy-Schwarz eşitsizliği⁵

³ $y : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ sürekli bir fonksiyon olmak üzere $y(x)$ fonksiyonunun süreklilik modülü $\omega(\delta)$, $\delta > 0$ için $\omega(\delta) = \sup_{\substack{x_1, x_2 \in [a, b] \\ |x_1 - x_2| \leq \delta}} |y(x_1) - y(x_2)|$ ile tanımlanır (Lorentz 1986).

⁴Eğer $\lambda > 0$ ise $\omega(\lambda\delta) \leq (1 + \lambda) \omega(\delta)$ gerçekleşir (Rivlin 1969).

⁵ $\sum_{i=0}^n |x_i y_i| \leq \left[\sum_{i=0}^n |x_i|^2 \right]^{1/2} \left[\sum_{i=0}^n |y_i|^2 \right]^{1/2}$ eşitsizliği Cauchy-Schwarz eşitsizliği olarak bilinir (Rivlin 1969).

uygulanır ve Özellik 1.2.13 gözönüne alınırsa

$$\begin{aligned}
|y(x) - B_n(y; x)| &\leq \omega(n^{-1/2}) \left\{ 1 + n^{1/2} \sum_{i=0}^n \left| x - \left(a + \frac{(b-a)i}{n} \right) \right| \right. \\
&\quad \left. (p_{i,n}(x))^{1/2} (p_{i,n}(x))^{1/2} \right\} \\
&\leq \omega(n^{-1/2}) \left\{ 1 + n^{1/2} \left[\sum_{i=0}^n p_{i,n}(x) \right]^{1/2} \right. \\
&\quad \left. \left[\sum_{i=0}^n \left(x - \left(a + \frac{(b-a)i}{n} \right) \right)^2 p_{i,n}(x) \right]^{1/2} \right\} \\
&\leq \omega(n^{-1/2}) \left[1 + n^{1/2} \left(\frac{(x-a)(b-x)}{n} \right)^{1/2} \right] \\
&\leq \omega(n^{-1/2}) \left[1 + \sqrt{(x-a)(b-x)} \right]
\end{aligned}$$

istenen eşitsizlik elde edilir. Buradan maksimum norm tanımı⁶ gözönüne alınarak

$$\begin{aligned}
\|y - B_n y\|_\infty &= \max_{a \leq x \leq b} |y(x) - B_n(y; x)| \\
&\leq \omega(n^{-1/2}) \left[1 + \max_{a \leq x \leq b} \left(\sqrt{(x-a)(b-x)} \right) \right] \\
&\leq \omega(n^{-1/2}) \left[1 + \frac{b-a}{2} \right]
\end{aligned}$$

bulunur. Bu eşitsizliğin $[0, 1]$ aralığı üzerindeki ifade ve ispatı için Rivlin'e (1969) bakınız. Ayrıca süreklilik modülünün özelliğinden⁷ $n \rightarrow \infty$ iken $\omega(n^{-1/2}) \rightarrow 0$ olup, $\|y - B_n y\|_\infty \rightarrow 0$ olur. Bu da ispatı tamamlar.

Teorem 4.1.5 Eğer $y^{(k+2)}(x)$, $[a, b]$ aralığı üzerinde sürekli bir fonksiyon ise bu durumda $k \geq 0$ tamsayısı için aşağıdaki eşitsizlik gerçekleşir:

$$\begin{aligned}
|B_n^{(k)}(y; x) - y^{(k)}(x)| &\leq \frac{1}{2n} [k(k-1) \|y^{(k)}\|_\infty + k|b+a-2x| \|y^{(k+1)}\|_\infty \\
&\quad + (x-a)(b-x) \|y^{(k+2)}\|_\infty].
\end{aligned}$$

İspat: DeVore ve Loretz (1993) tarafından $[0, 1]$ aralığı üzerinde ifade ve ispatı

⁶ $[a, b]$ aralığı üzerinde sürekli bir f fonksiyonunun maksimum normu $\|f\|_\infty = \max_{a \leq x \leq b} |f(x)|$ ile tanımlanır (Rivlin 1969).

⁷ $y : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ sürekli bir fonksiyon $\Leftrightarrow \lim_{\delta \rightarrow 0} \omega(\delta) = 0$ gerçekleşir (Rivlin 1969).

verilen teoremin $[a, b]$ aralığı üzerinde de gerçekleştiğini gösterelim. Bunun için tümevarım yöntemi ile önce $k = 0$ için teoremin doğruluğunu ispatlayalım.

y fonksiyonunun $x = \frac{(b-a)i}{n}$ civarındaki ilk üç terimine göre Taylor seri açılımı; $n \rightarrow \infty$ iken $R_n(x) \rightarrow 0$ olmak üzere

$$y\left(a + \frac{(b-a)i}{n}\right) = y(x) + \left(a + \frac{(b-a)i}{n} - x\right) y'(x) + \frac{\left(a + \frac{(b-a)i}{n} - x\right)^2}{2!} y''(x) + R_n(x)$$

şeklinde ifade edilebilir. Bu eşitlik Tanım 1.3.1'de yerine yazılır, sırasıyla Özellik 1.2.6, Özellik 1.2.12 ve Özellik 1.2.13 gözönüne alınır

$$\begin{aligned} B_n(y; x) &= y(x) \sum_{i=0}^n p_{i,n}(x) + y'(x) \sum_{i=0}^n \left(a + \frac{(b-a)i}{n} - x\right) p_{i,n}(x) \\ &\quad + y''(x) \sum_{i=0}^n \frac{\left(a + \frac{(b-a)i}{n} - x\right)^2}{2!} p_{i,n}(x) \\ &= y(x) + \frac{b-a}{n} y'(x) \sum_{i=0}^n i p_{i,n}(x) + (a-x) y'(x) \sum_{i=0}^n p_{i,n}(x) \\ &\quad + \frac{(x-a)(b-x)}{2n} y''(x) \\ &= y(x) + (x-a) y'(x) + (a-x) y'(x) + \frac{(x-a)(b-x)}{2n} y''(x) \\ &= y(x) + \frac{(x-a)(b-x)}{2n} y''(x) \end{aligned}$$

olarak bulunur. Buradan maksimum norm tanımı kullanılarak

$$|B_n(y; x) - y(x)| \leq \frac{(x-a)(b-x)}{2n} \|y''\|_\infty$$

eşitsizliğine ulaşılır. k için aşağıdaki eşitsizliğin gerçekleştiğini varsayalım:

$$\begin{aligned} |B_n^{(k)}(y; x) - y^{(k)}(x)| &\leq \frac{1}{2n} \left[k(k-1) \|y^{(k)}\|_\infty + k|b+a-2x| \|y^{(k+1)}\|_\infty \right. \\ &\quad \left. + (x-a)(b-x) \|y^{(k+2)}\|_\infty \right]. \end{aligned}$$

Bu eşitsizlikte her iki tarafın x' göre bir kez türevi alınır

$$\begin{aligned}
|B_n^{(k+1)}(y; x) - y^{(k+1)}(x)| &\leq \frac{1}{2n} [k(k-1) \|y^{(k+1)}\|_\infty + 2k \|y^{(k+1)}\|_\infty \\
&\quad + k|b+a-2x| \|y^{(k+2)}\|_\infty + (b-x) \|y^{(k+2)}\|_\infty \\
&\quad - (x-a) \|y^{(k+2)}\|_\infty + (x-a)(b-x) \|y^{(k+3)}\|_\infty] \\
&= \frac{1}{2n} [k(k+1) \|y^{(k+1)}\|_\infty \\
&\quad + (k+1)|b+a-2x| \|y^{(k+2)}\|_\infty \\
&\quad + (x-a)(b-x) \|y^{(k+3)}\|_\infty]
\end{aligned}$$

istenen eşitsizliğin $k+1$ için de geçerli olduğu kanıtlanır. Bu durumda ispat doğru bir şekilde tamamlanır.

Sonuç 4.1.1 Eğer $y^{(k+2)}(x)$, $[a, b]$ aralığı üzerinde sürekli bir fonksiyon ise bu durumda $k \geq 0$ tamsayısı için

$$\|B_n^{(k)}(y; x) - y^{(k)}(x)\|_\infty \leq \frac{(b-a)^2}{8n} \|y''\|_\infty$$

eşitsizliği gerçekleşir.

4.2 Diferansiyel Denklemler için Hata Analizi

Teorem 4.2.1 Eğer $a_k(x)$ ve $y^{(k+2)}(x)$ ($k = 0, 1, \dots, m$) fonksiyonları $[a, b]$ aralığı üzerinde sürekli fonksiyonlar ise bu durumda

$$\sum_{k=0}^m a_k(x) y^{(k)}(x) = g(x); \quad a \leq x \leq b$$

en genel m . mertebeden lineer diferansiyel denklemi için kalan hata, θ pozitif bir sabit olmak üzere

$$\|R_n\|_\infty \leq \frac{\theta}{2n}$$

eşitsizliğini ve

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|R_n\|_\infty = 0$$

düzgün yakınsaklığı gerçekler.

İspat: $y^{(k+2)}(x)$ fonksiyonu $[a, b]$ aralığı üzerinde sürekli olduğundan Bernstein yaklaşık çözümünü olarak ele alınabilir. Bu durumda yukarıda tanımlanan lineer diferansiyel denklemin Bernstein yaklaşık çözümünü için kalan hata

$$\begin{aligned} R_n(x) &= \sum_{k=0}^m a_k(x) B_n^{(k)}(y; x) - \sum_{k=0}^m a_k(x) y^{(k)}(x) \\ &= \sum_{k=0}^m a_k(x) (B_n^{(k)}(y; x) - y^{(k)}(x)) \\ |R_n(x)| &\leq \sum_{k=0}^m |a_k(x)| |B_n^{(k)}(y; x) - y^{(k)}(x)| \end{aligned}$$

şeklinde ifade edilebilir.

Teorem 4.1.5 gözönüne alınarak, kalan hatanın mutlak değeri

$$\begin{aligned} |R_n(x)| &\leq \frac{1}{2n} \sum_{k=0}^m |a_k(x)| \{ k(k-1) \|y^{(k)}\|_\infty + k|b+a-2x| \|y^{(k+1)}\|_\infty \\ &\quad + (x-a)(b-x) \|y^{(k+2)}\|_\infty \} \end{aligned}$$

şeklinde düzenlenebilir. Bu eşitsizliğin her iki tarafının x 'e göre maksimumu alınırsa, maksimum norm tanımı kullanılarak kalan hata sınırı

$$\begin{aligned} \|R_n\|_\infty &\leq \frac{1}{2n} \sum_{k=0}^m \|a_k\|_\infty \left\{ k(k-1) \|y^{(k)}\|_\infty + k(b-a) \|y^{(k+1)}\|_\infty \right. \\ &\quad \left. + \frac{(b-a)^2}{4} \|y^{(k+2)}\|_\infty \right\} \end{aligned}$$

olur. Burada $S_k = k(k-1) \|y^{(k)}\|_\infty + k(b-a) \|y^{(k+1)}\|_\infty + \frac{(b-a)^2}{4} \|y^{(k+2)}\|_\infty$ olmak üzere

$$\theta = \sum_{k=0}^m \|a_k\|_\infty S_k$$

denirse, kalan hata için

$$\|R_n\|_\infty \leq \frac{\theta}{2n}$$

istenen eşitsizliğe ulaşılır. θ sabit olduğundan $n \rightarrow \infty$ iken $\|R_n\|_\infty \rightarrow 0$ gerçekleşir. Bu da ispatı tamamlar.

Teorem 4.2.2 $y^{(k)}(x)$ ($k = 0, 1, \dots, m$), $[a, b]$ aralığı üzerinde sürekli bir fonksiyon ve $x_s \in [a, b]$ sıralama noktaları olsun. Yukarıda tanımlanan en genel m . mertebeden lineer diferansiyel denklemi için sıralama noktaları üzerinde kalan hata sıfırdır.

İspat: $y^{(k)}(x)$, $[a, b]$ aralığı üzerinde sürekli bir fonksiyon olduğundan Bernstein yaklaşık çözümünü olarak gözönüne alınabilir. Bu durumda sıralama yöntemi gereğince, $x_s \in [a, b]$ ile verilen sıralama noktaları üzerinde $y^{(k)}(x_s) = B_n^{(k)}(y; x_s)$ olduğundan bu diferansiyel denklem için kalan hata

$$R_n(x_s) = \sum_{k=0}^m a_k(x_s) (B_n^{(k)}(y; x_s) - y^{(k)}(x_s)) = 0$$

olarak bulunur. Ancak burada x_s noktaları önemlidir. Eğer $y^{(k)}(x_s) = B_n^{(k)}(y; x_s)$ eşitliği sağlanmazsa hata artar.

4.3 İntegral Denklemler için Hata Analizi

Teorem 4.3.1 $a(x)$ ve $y(x)$ fonksiyonları $[a, b]$ aralığı üzerinde, $f(x, t)$ ve $v(x, t)$ fonksiyonları $[a, b] \times [a, b]$ karesi üzerinde sürekli fonksiyonlar olsun.

$$a(x)y(x) = g(x) + \lambda_1 \int_a^b f(x, t)y(t)dt + \lambda_2 \int_a^x v(x, t)y(t)dt$$

üçüncü çeşit lineer Fredholm-Volterra integral denklemi için kalan hata sınırı

$$\|R_n\|_\infty \leq (\alpha + (b-a)|\lambda_1|\beta + (x-a)|\lambda_2|\gamma)\|e_n\|_\infty$$

olur. Burada $\|e_n\|_\infty = \|B_n y - y\|_\infty$, $\alpha = \|a\|_\infty$, $\beta = \|f\|_\infty$ ve $\gamma = \|v\|_\infty$ şeklinde sabitlerdir.

İspat: y , $[a, b]$ aralığı üzerinde sürekli bir fonksiyon olduğundan Bernstein yaklaşık çözümünü olarak ele alınabilir. Bu durumda yukarıda tanımlanan lineer integral denklem için mutlak kalan hata

$$\begin{aligned}
|R_n(x)| &= \left| a(x) B_n(y; x) - \lambda_1 \int_a^b f(x, t) B_n(y; t) dt - \lambda_2 \int_a^x v(x, t) B_n(y; t) dt - g(x) \right| \\
&= \left| a(x) B_n(y; x) - \lambda_1 \int_a^b f(x, t) B_n(y; t) dt - \lambda_2 \int_a^x v(x, t) B_n(y; t) dt \right. \\
&\quad \left. - \left(a(x)y(x) - \lambda_1 \int_a^b f(x, t) y(t) dt - \lambda_2 \int_a^x v(x, t) y(t) dt \right) \right| \\
&\leq |a(x)| |B_n(y; x) - y(x)| + |\lambda_1| \int_a^b |f(x, t)| |B_n(y; t) - y(t)| dt \\
&\quad + |\lambda_2| \int_a^x |v(x, t)| |B_n(y; t) - y(t)| dt
\end{aligned}$$

olarak yazılabilir. Tek değişkenli ve iki değişkenli fonksiyonlar için maksimum norm tanımı kullanılarak $\|a\|_\infty = \max_{x \in [a, b]} |a(x)|$, $\|f\|_\infty = \max_{x, t \in [a, b]} |f(x, t)|$ ve $\|v\|_\infty = \max_{x, t \in [a, b]} |v(x, t)|$ olmak üzere

$$\begin{aligned}
\|R_n\|_\infty &\leq \|a\|_\infty \|B_n y - y\|_\infty + (b - a) |\lambda_1| \|f\|_\infty \|B_n y - y\|_\infty \\
&\quad + (x - a) |\lambda_2| \|v\|_\infty \|B_n y - y\|_\infty \\
&\leq (\|a\|_\infty + (b - a) |\lambda_1| \|f\|_\infty + (x - a) |\lambda_2| \|v\|_\infty) \|B_n y - y\|_\infty
\end{aligned}$$

bulunur. Burada $\alpha = \|a\|_\infty$, $\beta = \|f\|_\infty$, $\gamma = \|v\|_\infty$ ve $\|e_n\|_\infty = \|B_n y - y\|_\infty$ denirse

$$\|R_n\|_\infty \leq (\alpha + (b - a) |\lambda_1| \beta + (x - a) |\lambda_2| \gamma) \|e_n\|_\infty$$

elde edilir.

Sonuç 4.3.1 Özel olarak birinci ve ikinci çeşit lineer Fredholm-Volterra integral denklemleri için sırasıyla kalan hata sınırı

$$\begin{aligned}
\|R_n\|_\infty &\leq ((b - a) |\lambda_1| \beta + (x - a) |\lambda_2| \gamma) \|e_n\|_\infty, \\
\|R_n\|_\infty &\leq (1 + (b - a) |\lambda_1| \beta + (x - a) |\lambda_2| \gamma) \|e_n\|_\infty
\end{aligned}$$

olur. Teorem 4.3.1'de izlenen ispat yolu ile kolaylıkla bulunur.

Teorem 4.3.2 $y(x)$, $[a, b]$ aralığı üzerinde sürekli bir fonksiyon ve $x_s \in [a, b]$ sıralama noktaları olsun. Bu durumda birinci, ikinci ve üçüncü çeşit lineer Fredholm-Volterra integral denklemler için sıralama noktaları üzerinde kalan hata sınırı

$$|R_n(x_s)| \leq \kappa(x_s)(b-a) \left(1 + \frac{b-a}{2}\right) \omega(n^{-1/2})$$

olup,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |R_n(x_s)| = 0$$

gerçeklenir. Burada κ sıralama noktalarına bağlı pozitif bir sabit sayıdır.

İspat: $y(x)$, $[a, b]$ aralığı üzerinde sürekli bir fonksiyon olduğundan Bernstein yaklaşık çözümünü olarak gözönüne alınabilir. O halde yukarıda tanımlanan üçüncü çeşit lineer Fredholm-Volterra integral denklemler için sıralama noktaları üzerinde kalan hatanın mutlak değeri aşağıdaki gibi ifade edilebilir:

$$\begin{aligned} |R_n(x_s)| &\leq |a(x_s)| |B_n(y; x_s) - y(x_s)| \\ &\quad + |\lambda_1| \int_a^b |f(x_s, t)| |B_n(y; t) - y(t)| dt \\ &\quad + |\lambda_2| \int_a^{x_s} |v(x_s, t)| |B_n(y; t) - y(t)| dt. \end{aligned}$$

Bernstein polinom yaklaşımı için x_s sıralama noktaları üzerinde $B_n(y; x_s) = y(x_s)$ olduğundan ve Teorem 4.1.4 gereğince, mutlak kalan hata için

$$\begin{aligned} |R_n(x_s)| &\leq \omega(n^{-1/2}) \left\{ |\lambda_1| \int_a^b |f(x_s, t)| \left[1 + \sqrt{(t-a)(b-t)}\right] dt \right. \\ &\quad \left. + |\lambda_2| \int_a^{x_s} |v(x_s, t)| \left[1 + \sqrt{(t-a)(b-t)}\right] dt \right\} \end{aligned}$$

eşitsizliği gerçekleşir. Burada $\varepsilon_s = \varepsilon(x_s) = |\lambda_1| \max_{t \in [a, b]} |f(x_s, t)|$, $\rho_s = \rho(x_s) = |\lambda_2| \max_{t \in [a, b]} |v(x_s, t)|$ ve $\max_{t \in [a, b]} \left[1 + \sqrt{(t-a)(b-t)}\right] = 1 + \frac{b-a}{2}$ denirse, $a \leq x_s \leq b$ için

$$\begin{aligned}
|R_n(x_s)| &\leq ((b-a)\varepsilon_s + (x_s-a)\rho_s) \left(1 + \frac{b-a}{2}\right) \omega(n^{-1/2}) \\
&\leq (\varepsilon_s + \rho_s)(b-a) \left(1 + \frac{b-a}{2}\right) \omega(n^{-1/2})
\end{aligned}$$

bulunur. $\kappa(x_s)$, ε_s ve ρ_s 'den büyük bir sabit olmak üzere

$$|R_n(x_s)| \leq \kappa(x_s)(b-a) \left(1 + \frac{b-a}{2}\right) \omega(n^{-1/2})$$

bulunur. Süreklilik modülünün özelliği gereğince, $n \rightarrow \infty$ iken $\omega(n^{-1/2}) \rightarrow 0$ olduğundan $|R_n(x_s)| \rightarrow 0$ olur. Bu da ispatı tamamlar. Ayrıca sıralama noktaları üzerinde $B_n(y; x_s) = y(x_s)$ olduğundan bu teorem, özel olarak birinci ve ikinci çeşit lineer Fredholm-Volterra integral denklemleri için de geçerli olur.

4.4 İntegrodiferansiyel Denklemler için Hata Analizi

Teorem 4.4.1 a_k ve $y^{(k+2)}$ ($k = 0, 1, \dots, m$); $[a, b]$ aralığı üzerinde, f ve v ; $[a, b] \times [a, b]$ karesi üzerinde sürekli fonksiyonlar olsun. Bu durumda

$$\sum_{k=0}^m a_k(x) y^{(k)}(x) = g(x) + \lambda_1 \int_a^b \sum_{k=0}^q f_k(x, t) y^{(k)}(t) dt + \lambda_2 \int_a^x \sum_{k=0}^r v_k(x, t) y^{(k)}(t) dt$$

en genel lineer Fredholm-Volterra integrodiferansiyel denklemi için kalan hata, aşağıdaki eşitsizliğe ve düzgün yakınsaklığa sahip olur:

$$\|R_n\|_\infty \leq \frac{1}{2n} [\theta + (b-a)(|\lambda_1|\phi + |\lambda_2|\varphi)], \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \|R_n\|_\infty = 0.$$

Burada θ ve S_k Teorem 4.2.1'de tanımlandığı gibi, ϕ ve φ aşağıdaki gibi pozitif sabitlerdir:

$$\phi = \sum_{k=0}^q \|f_k\|_\infty S_k \text{ ve } \varphi = \sum_{k=0}^r \|v_k\|_\infty S_k.$$

İspat: $y^{(k+2)}$, $[a, b]$ aralığı üzerinde sürekli fonksiyon olduğundan Bernstein yaklaşık çözümünü olarak ele alınabilir. Bu durumda yukarıda verilen denklemin sağ tarafına Teorem 4.1.5 uygulanarak, mutlak kalan hata için

$$\begin{aligned}
|R_n(x)| \leq & \frac{1}{2n} \left[\sum_{k=0}^m |a_k(x)| \{k(k-1) \|y^{(k)}\|_\infty + k|b+a-2x| \|y^{(k+1)}\|_\infty \right. \\
& + (x-a)(b-x) \|y^{(k+2)}\|_\infty \} + |\lambda_1| \int_a^b \sum_{k=0}^q |f_k(x,t)| \{k(k-1) \|y^{(k)}\|_\infty \\
& + k|b+a-2t| \|y^{(k+1)}\|_\infty + (t-a)(b-t) \|y^{(k+2)}\|_\infty \} dt \\
& + |\lambda_2| \int_a^x \sum_{k=0}^r |v_k(x,t)| \{k(k-1) \|y^{(k)}\|_\infty + k|b+a-2t| \|y^{(k+1)}\|_\infty \\
& \left. + (t-a)(b-t) \|y^{(k+2)}\|_\infty \} dt \right]
\end{aligned}$$

eşitsizliği yazılabilir. Burada $q, r \leq m+2$ olacak şekilde tamsayılardır. Bu eşitsizlikte her iki tarafın x ve t 'ye göre maksimumu alınırsa, $\|R_n\|_\infty = \max_{x \in [a,b]} |R_n(x)|$, $\|a_k\|_\infty = \max_{x \in [a,b]} |a_k(x)|$, $\|f_k\|_\infty = \max_{x,t \in [a,b]} |f_k(x,t)|$ ve $\|v_k\|_\infty = \max_{x,t \in [a,b]} |v_k(x,t)|$ olmak üzere kalan hata sınırı

$$\begin{aligned}
\|R_n\|_\infty & \leq \frac{1}{2n} \left[\sum_{k=0}^m \|a_k\|_\infty S_k + |\lambda_1| \int_a^b \sum_{k=0}^q \|f_k\|_\infty S_k dt \right. \\
& \left. + |\lambda_2| \int_a^x \sum_{k=0}^r \|v_k\|_\infty S_k dt \right] \\
& \leq \frac{1}{2n} \left[\sum_{k=0}^m \|a_k\|_\infty S_k + |\lambda_1| (b-a) \sum_{k=0}^q \|f_k\|_\infty S_k \right. \\
& \left. + |\lambda_2| (b-a) \sum_{k=0}^r \|v_k\|_\infty S_k \right]
\end{aligned}$$

olarak elde edilir. Eğer θ , Teorem 4.2.1'de, ϕ ve φ yukarıda tanımlandığı gibi gözönüne alınırsa, kalan hata sınırı istenilen şekilde bulunur. θ , ϕ ve φ sabit olduğundan, $n \rightarrow \infty$ iken $\|R_n\|_\infty \rightarrow 0$ olur. Bu da ispatı tamamlar.

Teorem 4.4.2 $x_s \in [a, b]$ sıralama noktaları olsun. Eğer a_k ve $y^{(k+2)}$ ($k = 0, 1, \dots, m$); $[a, b]$ aralığı üzerinde, f ve v ; $[a, b] \times [a, b]$ karesi üzerinde sürekli fonksiyonlar ise bu durumda yukarıda tanımlanan en genel lineer Fredholm-Volterra integrodiferansiyel denklemi için kalan hata, aşağıdaki eşitsizliği gerçekler:

$$|R_n(x_s)| \leq \frac{1}{2n} [|\lambda_1| (b-a) \sigma(x_s) + |\lambda_2| (x_s - a) \tau(x_s)]$$

ve sıralama noktaları üzerinde $\lim_{n \rightarrow \infty} |R_n(x_s)| = 0$ olur. Burada σ ve τ sıralama noktalarına bağlı sabitlerdir.

İspat: $y^{(k+2)}$ fonksiyonu $[a, b]$ aralığı üzerinde sürekli olduğundan Bernstein yaklaşık çözümü olarak gözönüne alınabilir. Bu durumda (2.17) ile tanımlanan lineer integrodiferansiyel denklem için mutlak kalan hata

$$\begin{aligned} |R_n(x)| &\leq \sum_{k=0}^m |a_k(x)| |B_n^{(k)}(y; x) - y^{(k)}(x)| \\ &\quad + |\lambda_1| \int_a^b \sum_{k=0}^q |f_k(x, t)| |B_n^{(k)}(y; t) - y^{(k)}(t)| dt \\ &\quad + |\lambda_2| \int_a^x \sum_{k=0}^r |v_k(x, t)| |B_n^{(k)}(y; t) - y^{(k)}(t)| dt \end{aligned}$$

eşitsizliğini sağlar. Sıralama yöntemi gereğince, $x_s \in [a, b]$ sıralama noktaları üzerinde $B_n^{(k)}(y; x_s) = y^{(k)}(x_s)$ olduğundan kalan hata

$$\begin{aligned} |R_n(x_s)| &\leq |\lambda_1| \int_a^b \sum_{k=0}^q |f_k(x_s, t)| |B_n^{(k)}(y; t) - y^{(k)}(t)| dt \\ &\quad + |\lambda_2| \int_a^{x_s} \sum_{k=0}^r |v_k(x_s, t)| |B_n^{(k)}(y; t) - y^{(k)}(t)| dt \end{aligned}$$

şeklinde yazılabilir. Bu eşitsizliğin sağ tarafına Teorem 4.1.5 uygulanarak, $q, r \leq m + 2$ olacak şekilde tamsayılar olmak üzere

$$\begin{aligned} |R_n(x_s)| &\leq \frac{1}{2n} \left[|\lambda_1| \int_a^b \sum_{k=0}^q |f_k(x_s, t)| \{k(k-1) \|y^{(k)}\|_\infty \right. \\ &\quad \left. + k|b+a-2t| \|y^{(k+1)}\|_\infty + (t-a)(b-t) \|y^{(k+2)}\|_\infty\} dt \right. \\ &\quad \left. + |\lambda_2| \int_a^{x_s} \sum_{k=0}^r |v_k(x_s, t)| \{k(k-1) \|y^{(k)}\|_\infty \right. \\ &\quad \left. + k|b+a-2t| \|y^{(k+1)}\|_\infty + (t-a)(b-t) \|y^{(k+2)}\|_\infty\} dt \right] \end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir. Eğer bu eşitsizlikte sağ tarafın t -ye göre maksimumu alınrsa, bu durumda kalan hata sınırı için S_k Teorem 4.2.1'de tanımlandığı gibi,

$$|\lambda_1| \max_{t \in [a,b]} |f_k(x_s, t)| = \varepsilon_k(x_s), \quad |\lambda_2| \max_{t \in [a,b]} |v_k(x_s, t)| = \rho_k(x_s)$$

olmak üzere

$$|R_n(x_s)| \leq \frac{1}{2n} \left[(b-a) \sum_{k=0}^q \varepsilon_k(x_s) S_k + (x_s - a) \sum_{k=0}^r \rho_k(x_s) S_k \right]$$

bulunur. Burada

$$\sigma(x_s) = \sum_{k=0}^q \varepsilon_k(x_s) S_k \text{ ve } \tau(x_s) = \sum_{k=0}^r \rho_k(x_s) S_k$$

olarak ifade edilirse, istenilen sonuca ulaşılır. σ ve τ sabit olduğundan, $n \rightarrow \infty$ iken $|R_n(x_s)| \rightarrow 0$ olur. Bu da ispatı tamamlar.

5. UYGULAMALAR

Bu bölümde, çeşitli lineer ve lineer olmayan denklemlerin Bölüm 2 ve 3'te üretilen genelleştirilmiş Bernstein polinomlarına dayalı sıralama yöntemi ile elde edilen çözümleri verilmiştir. Hesaplamalar, Bölüm 2.5 ve 3.5'te çözüm yöntemi için verilen adımlar gözönüne alınarak 32 dijitte MATLAB 7.1 programında hazırlanan algoritmalar ile yapılmıştır.

5.1 Giriş

MATLAB, ilk olarak 1970'li yıllarda Linpack ve Eispack projeleriyle geliştirilmiş, daha sonra sayısal analizci Cleve Moler ve John N. Little tarafından kurulan Mathworks Inc. Şirketi'nin en önemli niteliği haline gelmiş, temel olarak nümerik hesaplama, grafiksel veri gösterimi ve programlamayı içeren teknik ve bilimsel hesaplamalar için yazılmış yüksek performansa sahip bir yazılımdır. MATLAB adı, Matrix Laboratory (Matris Laboratuvarı) kelimelerinden gelir. İlk başlarda problemlerin çözümüne, matris temelli teknikleri kullanarak yardımcı olmaktayken, bugün geliştirilen yerleşik kütüphanesi, uygulama ve programlama özellikleri ile gerek üniversite ortamlarında (başta matematik ve mühendislik olmak üzere tüm bilim dallarında) gerekse sanayi çevresinde yüksek verimli araştırma, geliştirme ve analiz aracı olarak yaygın bir kullanım alanı bulmuştur (Heperkan ve Kesgin 2008).

MATLAB komut temelli bir programdır. Bu programda $\mathbf{WY} = \mathbf{G}$ şeklindeki bir cebirsel sistem, \mathbf{W} kare matris ise $\text{inv}(\mathbf{W}) * \mathbf{G}$ komutu ile çözülebilir. Eğer \mathbf{W} kare matris değil ya da kare ve aynı zamanda tekil matris ise matrisin tersi yoktur ve bu cebirsel sistemin çözümü için ancak $\text{linsolve}(\mathbf{W}, \mathbf{G})$, $\text{mldivide}(\mathbf{W}, \mathbf{G}) = \mathbf{W} \setminus \mathbf{G}$ ve $\text{pinv}(\mathbf{W}) * \mathbf{G}$ komutları kullanılabilir. Bu yazılımda sistemleri çözmek için kullanılan en önemli ve temel algoritmalar Gauss eliminasyon, Genelleştirilmiş ters, LU ayrıştırma ve QR ayrıştırma yöntemleridir. Örneğin; `mldivide` komutu böyle bir matrisi çözerken kısmi

pivottlama ile Gauss eliminasyon yöntemini, linsolve komutu matrisin çözümünü bulurken sütun pivottlama, LU ayrıştırma ile QR ayrıştırma yöntemlerini kullanır. Diğer yandan pinv komutu karesel olmayan matrislerin tersini alabilmek için kullanılır ve bu komut, matrisi sözde tersine (Moore-Penrose pseudoinverse) dönüştürür.

En etkili ve hatasız olabilecek nümerik yöntemlerin irdelenmesinde esas mesele, hızlı yakınsayan algoritmaların geliştirilmesidir. Bu durumda yapılması gereken farklı hata kaynaklarını kontrol etmektir. Aşağıda, $[a, b]$ sonlu aralık üzerinde sürekli bir fonksiyon ile düzgün yaklaşımı gözönüne alarak elde edilen nümerik sonuçların gerçek sonuçlara olan yakınlık derecesini kontrol etmek için kullanılan bazı hata tiplerini tanımlayalım.

Tanım 5.1.1 $y(x)$ ve $y_n(x)$ sırasıyla lineer denklemler için gerçek ve Bernstein yaklaşık çözümü olsun. Hata $e_n(x) = y(x) - y_n(x)$ ve $y(x) \neq 0$ olmak üzere mutlak, maksimum ve bağıl hata sırasıyla aşağıdaki gibi tanımlanabilir:

$$|e_n(x)| = |y(x) - y_n(x)|, \quad \|e_n\|_\infty = \max_{a \leq x \leq b} |e_n(x)|, \quad \varepsilon_n(x) = \left| \frac{e_n(x)}{y(x)} \right|.$$

Diğer yandan $x_s \in [a, b]$ sıralama noktaları üzerinde maksimum, ortalama, \mathcal{L}^2 -norm hata, ortalama kare ve ortalama kare hatanın karekökü sırasıyla aşağıdaki formüllerle nümerik olarak hesaplanabilir:

$$\begin{aligned} e_{\max}(n) &= \max_{x_s \in [a, b]} |e_n(x_s)|, \quad e_{ort}(n) = \frac{1}{n+1} \sum_{s=0}^n |e_n(x_s)|, \\ e_2(n) &= \sqrt{\int_a^b e^2(x) dx}, \quad e_{kare}(n) = \frac{1}{n+1} \sum_{s=0}^n (e_n(x_s))^2, \\ e_{kök}(n) &= \sqrt{\frac{1}{n+1} \sum_{s=0}^n (e_n(x_s))^2}. \end{aligned}$$

Matlab programında, x_s noktaları üzerinde mutlak hata $abs(e_n(x_s))$, bağıl hata $abs(e_n(x_s)/y(x_s))$, maksimum hata $norm(e_n(x_s), \text{inf})$, \mathcal{L}^2 -norm hata $norm(e_n(x_s))$, ortalama hata $mae(e_n(x_s))$, ortalama kare hata $mse(e_n(x_s))$ ve ortalama kare hatanın karekökü $\sqrt{mse(e_n(x_s))}$ komutlarıyla bulunur.

r . iterasyon fonksiyonu için sıralama noktaları üzerinde hata $E_r(x_s) = y_{r+1}(x_s) - y_r(x_s)$ olmak üzere mutlak ve maksimum hata aşağıdaki gibi ifade edilebilir:

$$|E_r(x_s)| = |y_{r+1}(x_s) - y_r(x_s)|, \quad E_{\max}(r) = \max_{x_s \in [a,b]} |E_r(x_s)|.$$

$\mathbf{WY} = \mathbf{G}$ şeklinde tanımlı lineer denklem sisteminin çözümlerini en duyarlı şekilde elde etmek için gerekli olan hipotezlerden biri $\mathbf{W} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ matrisinin tekil olmayan bir matris olmasıdır. Bu matrisin tekilliğe ne kadar yakın olup olmadığını belirten uygun bir ölçüt ise \mathbf{W} katsayılar matrisinin koşul sayısını hesaplamaktır.

Tanım 5.1.2 $\mathbf{W} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ tekil olmayan bir katsayılar matrisinin koşul sayısı

$$\kappa(\mathbf{W}) = \text{cond}(\mathbf{W}) = \|\mathbf{W}\| \|\mathbf{W}^{-1}\|$$

şeklinde tanımlanır. $\kappa(\mathbf{W}) = \kappa(\mathbf{W}^{-1})$ olduğu açıktır. Bunun yanısıra $\mathbf{W}\mathbf{W}^{-1} = \mathbf{I}$ olduğundan $\|\mathbf{W}\| \|\mathbf{W}^{-1}\| \geq \|\mathbf{W}\mathbf{W}^{-1}\| = 1$ olup, her \mathbf{W} matrisi için $\kappa(\mathbf{W}) \geq 1$ 'dir. Eğer $\kappa(\mathbf{W})$, küçük bir değer ise lineer denklem sistemi iyi-koşullu, büyük bir değer ise lineer denklem sistemi kötü-koşullu olarak adlandırılır. Burada “küçük” ve “büyük” kavramı açıkça tanımlanmamaktadır. Denklem sisteminin iyi-koşullu olması için $\kappa(\mathbf{W})$ 'nın büyüklüğünün girilen \mathbf{W} ve \mathbf{G} verilerinin doğruluğuna ve hesaplanan çözümdeki hatanın toleransına bağlıdır. Girilen veriler 10^{-p} bağıl hataya sahip ve hesaplanan çözümdeki hatanın toleransı 10^{-q} olmak üzere eğer $\kappa(\mathbf{W}) \leq \frac{1}{2}10^{p-q}$ ise bu durumda verilen denklem sistemi iyi-koşullu olur (Sundarapandian 2008). Ayrıca Matlab programında koşul sayısı için $\text{cond}(\mathbf{W})$ komutundan yararlanılır.

5.2 Lineer Denklemler için Uygulamalar

Bu kısımda lineer diferansiyel, integral ve integrodiferansiyel denklem içeren on tane örnek gözönüne alınarak bu tip denklemlerin nümerik çözümleri, Bölüm 2'de anlatılan genelleştirilmiş Bernstein polinomlarına dayalı sıralama

yöntemi ile ortaya koyulacaktır. Bu yöntemle elde edilen nümerik hata sonuçları tablolar halinde sunulacak ve diğer yöntemlerin nümerik hata sonuçları ile karşılaştırılarak sunulan yöntemlerin ne kadar uygulanabilir, etkili ve verimli olduğu araştırılacaktır.

Örnek 5.2.1 $y(0) = 1, y'(0) = -1, y''(0) = 2, y'''(0) = -2$ başlangıç koşulları ile verilen

$$y^{(4)} + y^{(3)} = x - 1; \quad x \in [0, 1]$$

diferansiyel denklemini gözönüne alalım. Bu denklemin verilen koşullar altındaki tam çözümü $y(x) = 1 - x + x^2 - \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{24}$ 'dir.

Şimdi $n = 4$ için bu problemin yaklaşık çözümünü amaçlanan yöntem ile bulmaya çalışalım. Sıralama noktaları $x_s = \frac{s}{4}; s = 0, 1, \dots, 4$ olarak seçilirse

$$x_0 = 0, \quad x_1 = \frac{1}{4}, \quad x_2 = \frac{2}{4}, \quad x_3 = \frac{3}{4} \quad \text{ve} \quad x_4 = 1$$

olur. Teorem 2.2.1 gereğince, temel matris denklemini

$$\mathbf{W} = \mathbf{P}\mathbf{N}^4 + \mathbf{P}\mathbf{N}^3$$

şeklindedir; buradaki \mathbf{P} ve \mathbf{N} matrisleri ile $[\mathbf{W}; \mathbf{G}]$ arttırılmış matris aşağıdaki gibidir:

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.32 & 0.42 & 0.21 & 0.05 & 0.00 \\ 0.06 & 0.25 & 0.37 & 0.25 & 0.06 \\ 0.00 & 0.05 & 0.21 & 0.42 & 0.32 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{N} = \begin{bmatrix} -4 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & 4 \end{bmatrix},$$

$$[\mathbf{W}; \mathbf{G}] = \begin{bmatrix} 0 & -24 & 72 & -72 & 24 & ; & -1.00 \\ 6 & -48 & 108 & -96 & 30 & ; & -0.75 \\ 12 & -72 & 144 & -120 & 36 & ; & -0.50 \\ 18 & -96 & 180 & -144 & 42 & ; & -0.25 \\ 24 & -120 & 216 & -168 & 48 & ; & 0 \end{bmatrix}.$$

Ayrıca başlangıç koşullarına karşılık gelen matrisler

$$\begin{aligned} [\mathbf{U}_1; \lambda_1] &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & ; & 1 \end{bmatrix}, \\ [\mathbf{U}_2; \lambda_2] &= \begin{bmatrix} -4 & 4 & 0 & 0 & 0 & ; & -1 \end{bmatrix}, \\ [\mathbf{U}_3; \lambda_3] &= \begin{bmatrix} 12 & -24 & 12 & 0 & 0 & ; & 2 \end{bmatrix}, \\ [\mathbf{U}_4; \lambda_4] &= \begin{bmatrix} -24 & 72 & -72 & 24 & 0 & ; & -2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

şeklinde bulunur. Bu satır matrisleri ile $[\mathbf{W}; \mathbf{G}]$ arttırılmış matrisin son dört satırı yer değiştirilerek, yeni arttırılmış $[\mathbf{W}^*; \mathbf{G}^*]$ kare matrisi elde edilir. Bu sistem MATLAB 7.1'de yazılan algoritma ile çözülürse, bilinmeyen katsayılar matrisi

$$\mathbf{Y} = \begin{bmatrix} 1.00 & 0.75 & 0.67 & 0.67 & 0.71 \end{bmatrix}^T$$

olmak üzere çözüm fonksiyonu

$$y = (1 - x)^4 + 3x(1 - x)^3 + 4x^2(1 - x)^2 + (8/3)x^3(1 - x) + (17/24)x^4$$

olarak hesaplanır.

Tablo 5.1-5.5'te çeşitli sıralama noktaları üzerinde geliştirilmiş Bernstein polinomlarına dayalı sıralama yöntemi ile farklı çözüm teknikleri kullanılarak hesaplanan maksimum hata sonuçları verilmektedir. Problemin tam çözümü dördüncü dereceden bir polinom tipli fonksiyon olup, farklı sıralama noktaları üzerindeki en iyi hata değeri $n = 4$ için elde edilmekte, n 'nin 4'ten büyük değerleri için ise elde edilen hata değerleri sayısal olarak büyümektedir. Tablo 5.4'te verilen $x_s = [1 - \cos(\frac{\pi s}{n})] / 2; s = 0, 1, \dots, n$ sıralama noktaları üzerinde elde edilen maksimum hata sonuçlarının, diğer sıralama noktaları üzerinde elde edilen maksimum hata sonuçlarına göre daha iyi olduğu görülmektedir. Genel olarak bu tablolardan silmeden ekleme tekniği ile elde edilen nümerik sonuçların, silerek ekleme tekniği ile elde edilen nümerik sonuçlara göre daha iyi sonuçlar verdiği söylenebilir. Silerek ekleme teknikleri içerisinde ise aralığın sol uç noktasında verilmiş başlangıç koşulları için genelde son satırları silerek ekleme tekniği ile elde edilen sonuçların daha etkili olduğunu vurgulamakta yarar vardır.

Tablo 5.1: Örnek 5.2.1 için $x_s = \frac{s}{n}$; $s = 0, 1, \dots, n$ noktaları üzerindeki maksimum hata sonuçları

n	Silmeden	İlk Satırları Silerek	Baştan ve Sondan Silerek	Son Satırları Silerek	Ortadan Silerek
4	$2.6e - 015$	$1.1e - 016$	$2.8e - 015$	$1.1e - 016$	$1.1e - 016$
5	$3.2e - 015$	$3.6e - 015$	$3.4e - 015$	$6.1e - 016$	$1.9e - 016$
7	$8.3e - 015$	$1.5e - 013$	$5.0e - 015$	$3.8e - 016$	$1.6e - 014$
9	$5.3e - 014$	$8.0e - 013$	$2.0e - 014$	$7.1e - 015$	$2.5e - 014$
10	$1.3e - 013$	$2.0e - 012$	$4.7e - 013$	$7.5e - 014$	$3.6e - 014$
12	$1.6e - 013$	$5.0e - 011$	$2.6e - 012$	$1.0e - 013$	$1.6e - 013$
15	$4.3e - 013$	$2.8e - 009$	$1.8e - 011$	$2.8e - 013$	$1.2e - 013$
18	$8.8e - 013$	$4.5e - 008$	$1.2e - 010$	$5.7e - 012$	$3.8e - 013$
20	$3.1e - 012$	$1.6e - 007$	$1.0e - 009$	$3.1e - 012$	$2.4e - 013$
25	$1.9e - 012$	$4.8e - 006$	$5.5e - 009$	$7.4e - 010$	$1.0e - 012$
30	$2.1e - 011$	$8.9e - 005$	$3.0e - 006$	$6.4e - 009$	$4.9e - 011$

Tablo 5.2: Örnek 5.2.1 için $x_s = \frac{s}{n+1}$; $s = 1, 2, \dots, n + 1$ noktaları üzerindeki maksimum hata sonuçları

n	Silmeden	İlk Satırları Silerek	Baştan ve Sondan Silerek	Son Satırları Silerek	Ortadan Silerek
4	$2.2e - 016$	$2.2e - 016$	$1.9e - 015$	$2.2e - 016$	$2.2e - 016$
5	$4.3e - 015$	$5.3e - 015$	$1.1e - 016$	$1.1e - 016$	$3.4e - 015$
7	$4.1e - 014$	$6.6e - 014$	$1.4e - 014$	$1.1e - 016$	$1.8e - 015$
9	$9.3e - 015$	$7.9e - 014$	$4.0e - 014$	$5.4e - 014$	$3.2e - 014$
10	$3.8e - 014$	$1.8e - 012$	$9.1e - 013$	$1.7e - 014$	$1.8e - 014$
12	$6.5e - 013$	$1.5e - 010$	$1.2e - 011$	$6.3e - 014$	$1.2e - 013$
15	$6.6e - 013$	$2.5e - 009$	$3.3e - 011$	$6.2e - 013$	$7.2e - 013$
18	$1.4e - 011$	$7.9e - 008$	$4.5e - 009$	$7.3e - 012$	$1.8e - 012$
20	$6.6e - 013$	$4.2e - 007$	$9.6e - 009$	$1.2e - 010$	$1.7e - 011$
25	$2.9e - 011$	$6.6e - 005$	$1.2e - 006$	$1.1e - 009$	$4.0e - 011$
30	$8.8e - 010$	$8.8e - 003$	$7.4e - 005$	$8.2e - 008$	$8.6e - 009$

Tablo 5.3: Örnek 5.2.1 için $x_s = \frac{s}{n+2}$; $s = 1, 2, \dots, n+1$ noktaları üzerindeki maksimum hata sonuçları

n	Silmeden	İlk Satırları Silerek	Baştan ve Sondan Silerek	Son Satırları Silerek	Ortadan Silerek
4	$1.7e - 016$	$1.7e - 015$	$2.1e - 015$	$1.7e - 016$	$1.7e - 015$
5	$2.3e - 016$	$9.8e - 015$	$1.0e - 015$	$2.3e - 016$	$2.3e - 016$
7	$4.9e - 015$	$2.2e - 013$	$1.7e - 014$	$2.3e - 015$	$1.4e - 014$
9	$4.3e - 014$	$1.9e - 013$	$3.7e - 013$	$1.0e - 014$	$2.0e - 014$
10	$9.3e - 014$	$8.4e - 012$	$3.5e - 013$	$1.5e - 013$	$6.6e - 014$
12	$6.1e - 014$	$3.8e - 011$	$2.6e - 012$	$2.1e - 013$	$3.2e - 014$
15	$1.2e - 012$	$3.4e - 009$	$6.3e - 012$	$6.1e - 013$	$3.5e - 013$
18	$4.1e - 012$	$2.6e - 008$	$3.6e - 010$	$4.6e - 012$	$7.5e - 014$
20	$1.0e - 011$	$1.3e - 007$	$1.1e - 008$	$4.5e - 011$	$6.6e - 012$
25	$1.5e - 010$	$1.3e - 005$	$6.8e - 007$	$2.5e - 010$	$3.3e - 011$
30	$8.8e - 010$	$6.7e - 003$	$4.9e - 005$	$5.1e - 008$	$4.6e - 009$

Tablo 5.4: Örnek 5.2.1 için $x_s = \frac{1 - \cos(\frac{\pi s}{n})}{2}$; $s = 0, 1, \dots, n$ noktaları üzerindeki maksimum hata sonuçları

n	Silmeden	İlk Satırları Silerek	Baştan ve Sondan Silerek	Son Satırları Silerek	Ortadan Silerek
4	$1.7e - 015$	$1.9e - 016$	$1.9e - 016$	$1.9e - 016$	$1.9e - 016$
5	$1.7e - 015$	$8.5e - 017$	$2.7e - 015$	$3.4e - 015$	$8.5e - 017$
7	$1.1e - 014$	$1.1e - 012$	$1.9e - 014$	$5.1e - 015$	$8.2e - 015$
9	$3.7e - 014$	$2.9e - 011$	$1.1e - 013$	$1.5e - 013$	$1.9e - 013$
10	$8.0e - 015$	$8.3e - 012$	$4.6e - 014$	$7.5e - 014$	$3.8e - 013$
12	$4.9e - 015$	$3.6e - 011$	$3.3e - 013$	$1.4e - 013$	$4.7e - 013$
15	$2.5e - 014$	$1.2e - 009$	$2.0e - 013$	$7.4e - 013$	$3.2e - 012$
18	$9.9e - 015$	$1.4e - 008$	$6.5e - 013$	$9.7e - 013$	$4.4e - 012$
20	$2.1e - 013$	$9.7e - 009$	$1.5e - 012$	$2.4e - 012$	$7.3e - 011$
25	$4.5e - 013$	$1.5e - 007$	$5.5e - 012$	$2.5e - 012$	$1.4e - 010$
30	$5.6e - 013$	$2.1e - 006$	$2.4e - 012$	$4.4e - 013$	$6.1e - 010$

Tablo 5.5: $x_s = \frac{s}{n-m}; s = 0, \dots, n - m$ noktaları üzerinde silmeden ekleyerek elde edilen maksimum hata sonuçları

n	$e_{\max}(n)$	n	$e_{\max}(n)$
5	$1.6e - 014$	15	$9.9e - 014$
7	$1.4e - 014$	18	$4.7e - 012$
9	$1.1e - 013$	20	$6.3e - 012$
10	$5.9e - 014$	25	$5.7e - 010$
12	$2.1e - 014$	30	$1.8e - 009$

Tablo 5.6'da Örnek 5.2.1'in çözümü için genelleştirilmiş Bernstein polinomlarına dayalı sıralama yöntemi ile silmeden ekleme tekniği kullanılarak elde edilen $[\widetilde{\mathbf{W}}; \widetilde{\mathbf{G}}]$ arttırılmış matrisinin farklı n değerleri için koşul sayısı sunulmaktadır. Bu tabloya göre $n = 4$ için en iyi koşul sayısı elde edilmekte, n 'nin 4'ten büyük değerleri için koşul sayısı da sayısal olarak büyümektedir. Diğer yandan MATLAB, $n = 45$ için $x_s = \frac{s}{n}; s = 0, 1, \dots, n$ sıralama noktaları üzerinde toleransı $tol = 2.4e - 007$ ve bağıl hatayı $\varepsilon_n(x_s) = 1.0e - 003$ olarak hesaplamıştır. Bu durumda Teorem 5.1.2 gereğince, $p = 3$ ve $q = 7$ için $p - q = -4$ olmak üzere $\kappa(\mathbf{W}) = 10^{16} > \frac{1}{2}10^{-4}$ olup, verilen denklem sistemi kötü-koşullu olur.

Tablo 5.6: Örnek 5.2.1 için koşul sayısı analizi

n	$\kappa, s = 0, 1, \dots, n$		$\kappa, s = 1, \dots, n + 1$		$\kappa, s = 0, \dots, n - m$
	$x_s = \frac{s}{n}$	$x_s = \frac{1 - \cos(\frac{\pi s}{n})}{2}$	$x_s = \frac{s}{n+1}$	$x_s = \frac{s}{n+2}$	$x_s = \frac{s}{n-m}$
4	$1.3e + 003$	$1.3e + 003$	$1.3e + 003$	$1.2e + 003$	—
5	$4.7e + 003$	$5.3e + 003$	$4.3e + 003$	$3.1e + 003$	$4.0e + 003$
8	$5.6e + 004$	$6.8e + 004$	$5.7e + 004$	$2.6e + 004$	$5.3e + 004$
16	$1.8e + 006$	$2.4e + 006$	$1.9e + 006$	$5.5e + 005$	$1.8e + 006$

Örnek 5.2.2 $y(0) = 1, y'(0) = 0, y^{(2)}(0) = y^{(3)}(0) = -2, y^{(4)}(0) = -3, y^{(5)}(0) = -4, y^{(6)}(0) = -5, y^{(7)}(0) = -6$ başlangıç koşulları ile verilen sekizinci mertebeden lineer diferansiyel denklemini gözöntüne alalım:

$$y^{(8)} - y = -8e^x; 0 < x < 1.$$

Problemin tam çözümünü $y(x) = (1 - x)e^x$ dir.

Tablo 5.7-5.11’de artan n değerleri için farklı sıralama noktaları üzerinde genelleştirilmiş Bernstein polinomlarına dayalı sıralama yöntemi ile çeşitli çözüm teknikleri kullanılarak hesaplanan maksimum hata sonuçları sunulmaktadır.

Tablo 5.7: Örnek 5.2.2 için $x_s = \frac{s}{n}$; $s = 0, 1, \dots, n$ noktaları üzerindeki maksimum hata sonuçları

n	Silmeden	İlk Satırları Silerek	Baştan ve Sondan Silerek	Son Satırları Silerek	Ortadan Silerek
9	$1.9e - 001$	$1.7e - 004$	$2.6e - 005$	$1.3e - 006$	$1.6e - 005$
10	$5.7e - 004$	$4.5e - 005$	$4.1e - 006$	$8.1e - 008$	$4.8e - 006$
11	$7.0e - 007$	$8.4e - 006$	$4.8e - 007$	$3.4e - 009$	$9.1e - 008$
12	$5.5e - 009$	$1.1e - 006$	$4.4e - 008$	$1.7e - 010$	$1.3e - 008$
13	$1.5e - 010$	$1.4e - 007$	$3.0e - 009$	$1.1e - 011$	$2.9e - 010$
14	$9.6e - 012$	$9.9e - 008$	$4.2e - 010$	$2.9e - 011$	$5.2e - 010$
15	$9.0e - 012$	$2.2e - 007$	$3.6e - 009$	$1.7e - 011$	$1.4e - 010$
20	$2.4e - 010$	$9.8e - 005$	$2.0e - 007$	$7.3e - 010$	$1.2e - 008$
25	$2.2e - 009$	$3.0e - 001$	$6.2e - 005$	$2.5e - 008$	$1.0e - 008$
30	$8.4e - 009$	$4.4e - 001$	$2.5e - 002$	$2.0e - 007$	$2.4e - 008$

Tablo 5.8: Örnek 5.2.2 için $x_s = \frac{s}{n+1}$; $s = 1, 2, \dots, n + 1$ noktaları üzerindeki maksimum hata sonuçları

n	Silmeden	İlk Satırları Silerek	Baştan ve Sondan Silerek	Son Satırları Silerek	Ortadan Silerek
9	$1.3e - 001$	$1.7e - 004$	$1.2e - 004$	$1.2e - 006$	$4.5e - 007$
10	$3.4e - 004$	$4.7e - 005$	$3.1e - 005$	$1.9e - 008$	$1.5e - 007$
11	$5.5e - 007$	$9.0e - 006$	$5.3e - 006$	$4.5e - 009$	$8.7e - 008$
12	$9.0e - 009$	$1.3e - 006$	$7.0e - 007$	$1.4e - 010$	$1.3e - 008$
13	$5.5e - 010$	$1.6e - 007$	$7.1e - 008$	$2.2e - 011$	$2.1e - 010$
14	$9.8e - 011$	$3.1e - 007$	$1.9e - 008$	$6.7e - 012$	$2.2e - 010$
15	$1.3e - 011$	$1.6e - 006$	$1.0e - 007$	$5.4e - 011$	$1.9e - 010$
20	$1.5e - 010$	$3.2e - 004$	$7.4e - 004$	$7.3e - 009$	$3.2e - 009$
25	$3.1e - 008$	1.3	2.6	$4.1e - 007$	$9.0e - 008$
30	$1.2e - 007$	$5.0e - 001$	$2.4e - 001$	$2.6e - 005$	$1.2e - 006$

Tablo 5.9: Örnek 5.2.2 için $x_s = \frac{s}{n+2}$; $s = 1, 2, \dots, n+1$ noktaları üzerindeki maksimum hata sonuçları

n	Silmeden	İlk Satırları Silerek	Baştan ve Sondan Silerek	Son Satırları Silerek	Ortadan Silerek
9	$6.8e - 002$	$1.3e - 004$	$4.4e - 005$	$4.5e - 007$	$1.7e - 007$
10	$1.4e - 004$	$3.3e - 005$	$1.1e - 005$	$7.4e - 009$	$5.7e - 008$
11	$2.9e - 007$	$6.0e - 006$	$1.9e - 006$	$3.9e - 009$	$3.2e - 008$
12	$5.8e - 009$	$8.0e - 007$	$2.5e - 007$	$1.8e - 011$	$4.7e - 009$
13	$3.5e - 010$	$8.1e - 008$	$2.5e - 008$	$3.4e - 011$	$2.2e - 011$
14	$1.6e - 011$	$1.2e - 007$	$3.7e - 009$	$2.5e - 011$	$9.3e - 011$
15	$3.1e - 011$	$4.5e - 007$	$6.4e - 008$	$9.0e - 011$	$1.2e - 009$
20	$1.3e - 009$	$2.0e - 003$	$1.2e - 004$	$7.1e - 010$	$1.5e - 009$
25	$5.6e - 009$	$5.0e - 001$	$5.3e - 002$	$2.0e - 007$	$9.1e - 009$
30	$2.4e - 007$	$3.5e - 001$	$3.7e - 001$	$2.0e - 006$	$2.1e - 007$

Tablo 5.10: Örnek 5.2.2 için $x_s = \frac{1 - \cos(\frac{\pi s}{n})}{2}$; $s = 0, 1, \dots, n$ noktaları üzerindeki maksimum hata sonuçları

n	Silmeden	İlk Satırları Silerek	Baştan ve Sondan Silerek	Son Satırları Silerek	Ortadan Silerek
9	$2.0e - 001$	$1.9e - 004$	$1.6e - 004$	$2.4e - 006$	$1.6e - 005$
10	$5.3e - 004$	$6.0e - 005$	$4.4e - 005$	$1.7e - 007$	$5.4e - 006$
11	$5.9e - 007$	$1.3e - 005$	$8.1e - 006$	$1.0e - 008$	$2.0e - 007$
12	$4.2e - 009$	$1.9e - 006$	$1.1e - 006$	$5.8e - 010$	$3.3e - 008$
13	$6.1e - 011$	$5.8e - 007$	$7.5e - 008$	$1.5e - 010$	$4.5e - 010$
14	$1.0e - 011$	$2.5e - 006$	$9.4e - 009$	$2.3e - 010$	$7.1e - 010$
15	$2.6e - 010$	$6.3e - 006$	$7.4e - 007$	$3.1e - 010$	$2.8e - 010$
20	$1.1e - 009$	$3.5e - 002$	$2.2e - 004$	$1.5e - 009$	$1.6e - 007$
25	$2.2e - 006$	1.2	$1.4e - 002$	$1.4e - 008$	$1.4e - 006$
30	$6.5e - 006$	$6.5e - 002$	1.1	$1.0e - 007$	$3.0e - 005$

Tablo 5.11: $x_s = \frac{s}{n-m}$; $s = 0, \dots, n - m$ noktaları üzerinde silmeden ekleyerek elde edilen maksimum hata sonuçları

n	$e_{\max}(n)$	n	$e_{\max}(n)$	n	$e_{\max}(n)$	n	$e_{\max}(n)$
9	$1.6e - 005$	11	$1.4e - 007$	13	$5.2e - 010$	15	$5.2e - 010$
10	$1.9e - 006$	12	$8.0e - 009$	14	$1.1e - 011$	20	$3.2e - 009$

Bu tablolardan, $x_s = \frac{s}{n}$; $s = 0, 1, \dots, n$ sıralama noktaları üzerinde hesaplanan maksimum hata sonuçlarının, diğer sıralama noktalarında elde edilen maksimum hata sonuçlarına göre daha iyi olduğu söylenebilir. Ayrıca n 'nin küçük değerleri için silerek ekleme tekniği, n 'nin değerleri büyüdükçe ise silmeden ekleme tekniği daha iyi maksimum hata sonuçları vermektedir. Bunun yanısıra problemin koşulları aralığın sol uç noktasında verilmiş olmasına rağmen son satırları silerek ekleme tekniği ile elde edilen maksimum hata sonuçları, ilk satırları silerek ekleme tekniği ile elde edilen maksimum hata sonuçlarına göre daha etkilidir.

Tablo 5.12'de genelleştirilmiş Bernstein polinomlarına dayalı sıralama yöntemi ile $x_s = \frac{s}{n}$; $s = 0, 1, \dots, n$ sıralama noktaları üzerinde silmeden ekleme ve son satırları silerek ekleme tekniği kullanılarak hesaplanan mutlak hata sonuçları ile değiştirilmiş Adomian ayrıştırma yönteminin (Mestrovic 2007) mutlak hata sonuçları karşılaştırılmaktadır. Bu tabloya göre amaçlanan yöntem ile $n = 10$ için son satırları silerek ekleme tekniği kullanılarak elde edilen sonuçlar, $n = 14$ için ise silmeden ekleme tekniği kullanılarak edilen sonuçlar daha iyidir. Bunun yanısıra farklı n değerleri için amaçlanan yöntemin nümerik sonuçlarının diğer yöntemin nümerik sonuçlarına göre daha etkili olduğunu söylemek mümkündür.

Tablo 5.12: Örnek 5.2.2 için $|e_n(x)|$ mutlak hatalarının karşılaştırılması

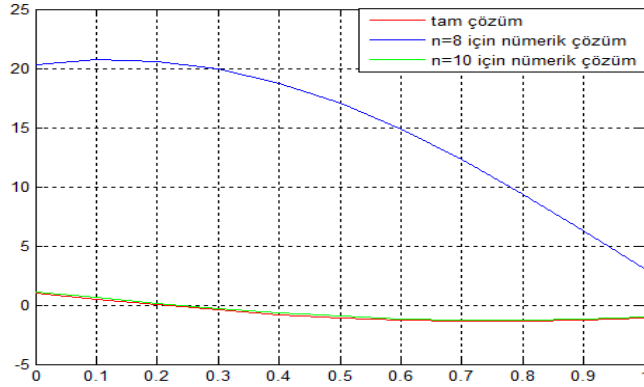
x	Sunulan Yöntem				Değiştirilmiş Adomian ayrıştırma yöntemi
	$n = 10$		$n = 14$		$n = 14$
	Silmeden	Son Satırları Silerek	Silmeden	Son Satırları Silerek	
0.25	$1.0e - 005$	$1.2e - 013$	$2.5e - 014$	$1.8e - 012$	$1.0e - 007$
0.50	$6.9e - 005$	$3.5e - 011$	$2.5e - 015$	$6.1e - 013$	$3.1e - 006$
0.75	$2.4e - 004$	$2.3e - 009$	$1.0e - 012$	$6.8e - 012$	$5.5e - 005$
1.00	$5.7e - 004$	$8.1e - 008$	$9.6e - 012$	$2.9e - 011$	$4.2e - 004$

Örnek 5.2.3 $y(-1) = 4 \cos(1)$, $y(1) = -2 \cos(1)$, $y'(-1) = \cos(1) + 4 \sin(1)$, $y'(1) = \cos(1) + 2 \sin(1)$, $y''(-1) = -16 \cos(1) + 2 \sin(1)$, $y''(1) = 14 \cos(1) - 2 \sin(1)$ sınır koşulları ile verilen

$$y^{(6)} + (5x + 1)y = (185x - 25x^2 + 10x^4) \cos(x) + (270 - 36x^2) \sin(x)$$

denklemini gözönüne alalım. Bu denklemin verilen koşullar altındaki tam çözümünü $y(x) = (2x^3 - 5x + 1) \cos(x)$ 'dir.

Şekil 5.1'de sunulan yöntem ile $x_s = -1 + \frac{2s}{n}$; $s = 0, 1, \dots, n$ sıralama noktaları üzerinde silmeden ekleme tekniği kullanılarak $n = 8$ ve $n = 10$ için elde edilen yaklaşık çözüm ve gerçek çözüm grafik olarak verilmiştir. Bu grafiğe göre nümerik çözümün tam çözüme tutarlı olarak yaklaştığı söylenebilir.



Şekil 5.1: Örnek 5.2.3 için tam çözümün sunulan yöntem ile elde edilen yaklaşık çözüm ile karşılaştırılması

Tablo 5.13'te genelleştirilmiş Bernstein sıralama yönteminin $x_s = -1 + \frac{2s}{n-m}$; $s = 0, 1, \dots, n - m$ sıralama noktalarında silmeden ekleme tekniği ile elde edilen maksimum hata sonuçları, Septic spline yönteminin (Siddiqi ve Akram 2008) hata sonuçları ile kıyaslanmaktadır. Bu tablodan n 'nin farklı değerleri için sunulan yöntemin diğer yöntemden daha iyi sonuçlar verdiği görülmektedir.

Tablo 5.13: Örnek 5.2.3 için $e_{\max}(n)$ maksimum hata karşılaştırma

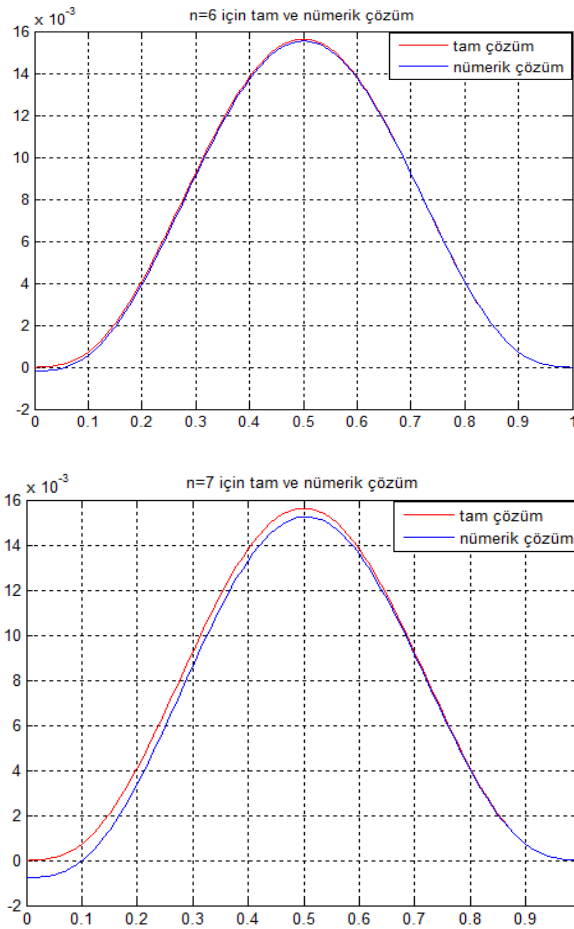
n	8	16	32	64	128
Sunulan Yöntem	$4.4e - 006$	$3.8e - 013$	$3.6e - 013$	$1.7e - 009$	$2.9e - 007$
Septic Spline Yöntemi	$1.5e - 003$	$1.2e - 004$	$1.6e - 005$	$3.8e - 006$	$9.5e - 007$

Örnek 5.2.4 $y(0) = y'(0) = y''(0) = y(1) = y'(1) = y''(1) = 0$ sınır koşulları ile verilen

$$y^{(6)} + e^{-x}y = (x - x^2)^3 e^{-x} - 720; 0 \leq x \leq 1$$

diferansiyel denklemini gözönüne alalım. Bu denklemin verilen koşullar altındaki tam çözümü $y(x) = x^3(1-x)^3$ 'dür.

Şekil 5.2'de sunulan yöntem ile $x_s = \frac{s}{n}; s = 0, 1, \dots, n$ sıralama noktaları üzerinde silmeden ekleme tekniği kullanılarak hesaplanan yaklaşık çözüm ile tam çözüm karşılaştırılmıştır.



Şekil 5.2: Örnek 5.2.4 için tam çözümün sunulan yöntem ile elde edilen yaklaşık çözüm ile karşılaştırılması

Tablo 5.14'te geliştirilmiş Bernstein polinomlarına dayalı sıralama yönteminin $x_s = \frac{s}{n}; s = 0, 1, \dots, n$ sıralama noktaları üzerinde silmeden ekleme tekniği kullanılarak hesaplanan bağıl hata sonuçları, Sinc-Galerkin yönteminin

(El-Gamel ve diğ. 2003) bağıl hata sonuçları ile karşılaştırılmaktadır. Bu tablo, n 'nin daha küçük değerleri için sunulan yöntemin diğer yöntemlere göre daha etkili sonuç verdiğini ortaya koymaktadır.

Tablo 5.14: Örnek 5.2.4 için $\varepsilon_n(x)$ bağıl hata karşılaştırma

$x = \frac{e^{s\pi/4\sqrt{6}}}{1+e^{s\pi/4\sqrt{6}}};$ $s=0, -1, \pm 2, -3, +4, \pm 5, 7$	Sunulan Yöntem		Sinc-Galerkin Yöntemi
	$n = 15$	$n = 65$	$n = 65$
0.1675	$6.1e - 016$	$5.5e - 012$	$4.5e - 004$
0.2764	$5.0e - 016$	$3.5e - 012$	$3.2e - 004$
0.3449	$4.4e - 016$	$1.3e - 012$	$2.8e - 004$
0.4205	$9.9e - 017$	$4.8e - 012$	$2.6e - 004$
0.5	$6.3e - 020$	$4.1e - 012$	$2.5e - 004$
0.6550	$1.5e - 016$	$7.2e - 013$	$2.8e - 004$
0.7828	$1.8e - 016$	$6.7e - 012$	$3.7e - 004$
0.8324	$3.4e - 016$	$1.4e - 011$	$4.5e - 004$
0.9041	$7.5e - 016$	$7.4e - 011$	$7.3e - 004$

Örnek 5.2.5

$$y(x) = 1 + \int_{-1}^1 (xt + x^2t^2) y(t) dt; \quad -1 \leq x \leq 1$$

ikinci çeşit lineer Fredholm integral denklemini gözönüne alalım. Denklemin tam çözümü $y(x) = 1 + \frac{10}{9}x^2$ 'dir.

Tablo 5.15'te geliştirilmiş Bernstein polinomlarına dayalı sıralama yönteminin $x_s = -1 + \frac{2s}{n}$ ve $x_s = -\cos\left(\frac{\pi s}{n}\right)$; $s = 0, 1, \dots, n$ sıralama noktaları üzerinde farklı n değerleri için ortalama hata sonuçları verilmektedir. Bu tablodan, farklı n değerleri için sunulan yöntem ile elde edilen nümerik sonuçların hızlı bir yakınsaklığa sahip olduğu söylenebilir. Yine bu tabloya göre $n = 2$ için sunulan yöntem ile elde edilen ortalama hata değeri 10^{-17} civarında iken, integral denklemlerin çözümü için Bernstein baz polinomlarına dayalı nümerik yöntem (Mandal ve Bhattacharya 2007) ile $n = 4$ için elde edilen ortalama hata değeri 10^{-13} civarındadır.

Tablo 5.15: Örnek 5.2.5 için ortalama hata analizi

$e_{ort}(n), s = 0, 1, \dots, n$			$e_{ort}(n), s = 0, 1, \dots, n$		
n	$x_s = -1 + \frac{2s}{n}$	$x_s = -\cos\left(\frac{\pi s}{n}\right)$	n	$x_s = -1 + \frac{2s}{n}$	$x_s = -\cos\left(\frac{\pi s}{n}\right)$
2	0	$3.7e - 017$	16	$1.5e - 015$	$3.5e - 016$
3	$4.9e - 017$	$1.1e - 016$	17	$2.1e - 014$	$2.7e - 016$
4	$2.5e - 017$	$1.8e - 016$	18	$2.5e - 014$	$2.2e - 016$
5	$3.6e - 016$	$5.4e - 017$	19	$8.8e - 014$	$3.2e - 016$
6	$5.4e - 016$	$9.8e - 017$	20	$1.5e - 013$	$4.0e - 016$
7	$4.2e - 016$	$9.8e - 017$	21	$2.5e - 013$	$4.5e - 016$
8	$2.8e - 016$	$2.4e - 016$	22	$1.7e - 013$	$2.9e - 016$
9	$1.2e - 016$	$2.0e - 016$	23	$5.4e - 013$	$3.7e - 016$
10	$2.4e - 016$	$2.0e - 016$	24	$1.8e - 012$	$3.9e - 016$
11	$2.7e - 015$	$3.3e - 016$	25	$7.3e - 012$	$4.0e - 016$
12	$1.4e - 015$	$3.6e - 016$	30	$4.9e - 011$	$2.0e - 016$
13	$4.4e - 015$	$2.5e - 016$	35	$9.9e - 009$	$3.9e - 016$
14	$2.6e - 015$	$1.7e - 016$	40	$3.1e - 008$	$4.5e - 016$
15	$2.0e - 015$	$5.2e - 016$	50	$6.6e - 008$	$2.1e - 016$

Tablo 5.16’da çeşitli n değerleri için $x_s = -1 + \frac{2s}{n}; s = 0, 1, \dots, n$ sıralama noktaları üzerinde genelleştirilmiş Bernstein polinomlarına dayalı alternatif olarak sunulan yöntem ile elde edilen ortalama hata sonuçları sunulmaktadır. Bu tablodan, artan n değerleri için yakınsamamın çok yavaş olduğunu ve dolayısıyla amaçlanan yöntemin yeterince verimli olmadığını söylemek mümkündür.

Tablo 5.16: Örnek 5.2.5 için alternatif yöntem ile ortalama hata analizi

n	$e_{ort}(n)$	n	$e_{ort}(n)$	n	$e_{ort}(n)$	n	$e_{ort}(n)$
2	1.2	8	$1.5e - 001$	14	$7.6e - 002$	24	$4.2e - 002$
3	$5.9e - 001$	9	$1.3e - 001$	15	$7.0e - 002$	25	$4.0e - 002$
4	$3.8e - 001$	10	$1.1e - 001$	16	$6.5e - 002$	30	$3.0e - 002$
5	$2.8e - 001$	11	$1.0e - 001$	18	$5.7e - 002$	35	$2.8e - 002$
6	$2.2e - 001$	12	$9.1e - 002$	20	$5.1e - 002$	40	$2.4e - 002$
7	$1.8e - 001$	13	$8.3e - 002$	22	$4.6e - 002$	50	$1.9e - 002$

Örnek 5.2.6

$$y(x) = \cos(x) - e^x \sin(x) + \int_0^x e^x y(t) dt; 0 \leq x \leq 1$$

ikinci çeşit lineer Volterra integral denklemini gözöntüne alalım. Bu denklemin analitik çözüümü $y(x) = \cos x$ 'dir.

Tablo 5.17'de genelleştirilmiş Bernstein polinomlarına dayalı sıralama yönteminin $x_s = \frac{s}{n}$ ve $x_s = [1 - \cos(\frac{\pi s}{n})] / 2; s = 0, 1, \dots, n$ sıralama noktaları üzerinde silmeden ekleme tekniği kullanılarak, çeşitli n değerleri için elde edilen ortalama hata sonuçları verilmektedir.

Tablo 5.17: Örnek 5.2.6 için ortalama hata analizi

$e_{ort}(n), s = 0, 1, \dots, n$			$e_{ort}(n), s = 0, 1, \dots, n$		
n	$x_s = \frac{s}{n}$	$x_s = \frac{1 - \cos(\frac{\pi s}{n})}{2}$	n	$x_s = \frac{s}{n}$	$x_s = \frac{1 - \cos(\frac{\pi s}{n})}{2}$
2	$3.5e - 003$	$3.5e - 003$	16	$1.9e - 015$	$1.8e - 016$
4	$7.3e - 006$	$3.6e - 006$	20	$3.8e - 013$	$7.7e - 016$
6	$7.6e - 007$	$1.6e - 009$	21	$1.9e - 013$	$1.2e - 015$
8	$1.3e - 011$	$1.0e - 012$	22	$1.5e - 013$	$6.5e - 016$
10	$9.9e - 015$	$5.5e - 016$	24	$3.1e - 012$	$9.1e - 016$

Bu tabloya göre n 'nin artan değerleri için en iyi ortalama hata sonuçlarının $x_s = [1 - \cos(\frac{\pi s}{n})] / 2; s = 0, 1, \dots, n$ sıralama noktaları üzerinde elde edildiği görölmektedir.

Tablo 5.18'de genelleştirilmiş Bernstein polinomlarına dayalı sıralama yönteminin $n \geq 2$ için $x_s = \frac{(1 - \cos(\frac{\pi s}{n}))}{2}; s = 0, 1, \dots, n$ sıralama noktaları üzerinde hesaplanan ortalama kare hatanın karekök sonuçları, integral denklemler için bilinmeyen fonksiyona Bernstein polinomları ile yaklaşılarak ortaya koyulan sıralama yöntemi (Maleknejad ve diğ. 2011) ile elde edilen ortalama kare hatanın karekök sonuçları ile karşılaştırılmaktadır. Bu tabloya göre artan n değerleri için sunulan yöntemin hata sonuçlarının, diğ. nümerik yöntem ile elde edilen hata sonuçlarından daha iyi olduğu söylenebilir.

Tablo 5.18: Örnek 5.2.6 için $e_{kök}(n)$ karşılaştırma

n	Sunulan Yöntem	Bernstein Yaklaşımına Dayalı Yöntem
2	$4.7e - 003$	$2.0e - 003$
3	$3.1e - 004$	$2.3e - 004$
4	$4.7e - 006$	$6.2e - 006$
5	$1.8e - 007$	$5.4e - 007$
6	$2.1e - 009$	$1.1e - 008$
7	$1.0e - 010$	$1.1e - 009$
8	$1.3e - 012$	$3.4e - 010$
9	$5.2e - 014$	$3.3e - 010$
10	$6.6e - 016$	$3.4e - 010$

Örnek 5.2.7

$$3y(x) = 3x^2 - \sin x(x^2 \sin x + 2x \cos x - 2 \sin x - \sin 1 + 2 \cos 1) \\ + \int_0^1 \sin x \cos ty(t)dt + \int_0^x \sin x \cos ty(t)dt$$

üçüncü çeşit lineer Fredholm-Volterra integral denklemini gözönüne alalım. Bu denklemin tam çözümü $y(x) = x^2$ 'dir.

Tablo 5.19'da genelleştirilmiş Bernstein polinomlarına dayalı sıralama yöntemi için $n + 1$ adet $x_s = \frac{s}{n}; s = 0, 1, \dots, n$ sıralama noktaları üzerinden hesaplanan maksimum hata sonuçları, Taylor açılım yöntemi (Chen ve Jiang 2012), Lineer spline yaklaşımına dayalı sıralama yöntemi ve Sabit nokta yöntemi (Caliò ve diğ. 2010) kullanılarak n adet için elde edilen maksimum hata sonuçları ile karşılaştırılmaktadır.

Tablo 5.19: Örnek 5.2.7 için $e_{\max}(n)$ maksimum hata karşılaştırma

n	Sunulan Yöntem	n	Taylor Yöntemi	Lineer Spline Yaklaşımına Dayalı Sıralama Yöntemi	Sabit Nokta Yöntemi
14	$3.9e - 016$	15	$2.0e - 015$	—	—
16	$2.1e - 016$	17	—	$7.8e - 005$	$4.7e - 005$
32	$2.5e - 012$	33	—	$3.8e - 004$	$9.5e - 005$

Bu tabloya göre artan n değerleri için sunulan yöntem ile elde edilen nümerik sonuçların, diğer yöntemlerin nümerik sonuçlarına göre daha etkili ve iyi sonuçlar olduğu söylenebilir. Ayrıca bu problemin gerçek çözümü ikinci dereceden polinom tipli bir fonksiyon olduğundan, $n = 2$ için sunulan yöntem ile en iyi nümerik değer elde edilir.

Tablo 5.20’de çeşitli n değerleri için genelleştirilmiş Bernstein polinomlarına dayalı sıralama yönteminin en etkili sıralama noktaları üzerinde hesaplanan ortalama hata sonuçları verilmektedir. Bu tabloda $n = 2$ için elde edilen hata sonuçlarının yeterince iyi olması, tam çözümün ikinci dereceden polinom tipli bir fonksiyon olmasından kaynaklanır.

Tablo 5.20: Örnek 5.2.7 için ortalama hata analizi

$e_{ort}(n), s = 0, 1, \dots, n$			$e_{ort}(n), s = 0, 1, \dots, n$		
n	$x_s = \frac{s}{n}$	$x_s = \frac{1 - \cos(\frac{\pi s}{n})}{2}$	n	$x_s = \frac{s}{n}$	$x_s = \frac{1 - \cos(\frac{\pi s}{n})}{2}$
2	$9.8e - 018$	$9.3e - 018$	20	$5.0e - 015$	$9.3e - 017$
4	0	$7.4e - 018$	22	$2.4e - 014$	$1.4e - 016$
6	$8.2e - 017$	$1.9e - 017$	24	$8.6e - 014$	$3.9e - 016$
8	$2.6e - 017$	$6.2e - 017$	26	$2.0e - 013$	$5.2e - 017$
10	$3.5e - 017$	$8.1e - 017$	28	$1.2e - 012$	$7.0e - 017$
16	$4.7e - 016$	$1.1e - 016$	30	$2.0e - 012$	$7.5e - 017$

Tablo 5.21’de $x_s = \frac{s}{n}; s = 0, 1, \dots, n$ sıralama noktaları üzerinde integral denklemler için genelleştirilmiş Bernstein polinomlarına dayalı alternatif olarak sunulan yöntemin çeşitli n değerleri için ortalama hata sonuçları verilmektedir.

Tablo 5.21: Örnek 5.2.7 için alternatif yöntem ile ortalama hata analizi

n	$e_{ort}(n)$	n	$e_{ort}(n)$	n	$e_{ort}(n)$	n	$e_{ort}(n)$
1	$8.00e - 003$	6	$1.03e - 001$	11	$8.48e - 002$	16	$7.06e - 002$
3	$9.82e - 002$	8	$9.62e - 002$	13	$7.85e - 002$	18	$6.63e - 002$
4	$1.04e - 001$	9	$9.19e - 002$	14	$7.56e - 002$	19	$6.44e - 002$
5	$1.07e - 001$	10	$8.84e - 002$	15	$7.30e - 002$	20	$6.26e - 002$

Bu tabloya göre artan n değerleri için yakınsamamın çok yavaş olduğunu ve dolayısıyla sunulan yöntem ile elde edilen nümerik sonuçların yeterince etkili ve verimli olmadığını söylemek mümkündür.

Örnek 5.2.8 $y(0) = 1, y'(0) = 0, y''(0) = -1, y'''(0) = -2, y^{(4)}(0) = -3, y^{(5)}(0) = -4, y^{(6)}(0) = -5, y^{(7)}(0) = -6$ başlangıç koşulları ile verilen

$$y^{(8)}(x) = -8e^x + x^2 + y(x) + \int_0^1 x^2 y'(t) dt$$

lineer Fredholm integrodiferansiyel denklemini gözönüne alalım. Bu problemin tam çözümü $y(x) = (1-x)e^x$ 'dir.

Tablo 5.22'de geliştirilmiş Bernstein polinomlarına dayalı sıralama yönteminin $x_s = \frac{s}{n}; s = 0, 1, \dots, n$ sıralama noktaları üzerinde silmeden ekleme tekniği kullanılarak elde edilen mutlak hata sonuçları, k iterasyon sayısı ile verilen varyasyonel iterasyon yönteminin (Noor ve Mohyud-Din 2007) sonuçları ile karşılaştırılmaktadır. Bu tablo, amaçlanan yöntemin iterasyon kullanmadan diğer yöntemlere göre daha etkili sonuçlar verdiğini gösterir.

Tablo 5.22: Örnek 5.2.8 için $|e_n(x)|$ mutlak hata karşılaştırma

x	Sunulan yöntem $n = 15, k = 1$	Varyasyonel iterasyon Yöntemi	
		$k = 10$	$k = 15$
0.2	$1.6e - 012$	$2.9e - 014$	$1.1e - 016$
0.4	$1.7e - 012$	$3.1e - 011$	$1.2e - 014$
0.6	$1.4e - 012$	$1.9e - 009$	$6.6e - 013$
0.8	$6.3e - 013$	$3.4e - 008$	$1.2e - 011$
1.0	$8.0e - 012$	$3.3e - 007$	$1.1e - 010$

Örnek 5.2.9 $y(0) = y'(0) = 0$ başlangıç koşulları ile verilen birinci tipteki Volterra integrodiferansiyel denklemini gözönüne alalım:

$$\int_0^x \cos(x-t) y''(t) dt = 2 \sin(x).$$

Bu problemin tam çözümü $y(x) = x^2$ 'dir.

Tablo 5.23'te genelleştirilmiş Bernstein polinomlarına dayalı sıralama yönteminin $x_s = \frac{s}{n}; s = 0, 1, \dots, n$ sıralama noktaları üzerinde silmeden ekleme tekniği ile elde edilen ortalama kare hatasının karekökü, Chebyshev sıralama yöntemi (Akyüz-Daşcıoğlu 2006), Chebyshev polinomlarına dayalı spektral yöntem (El-Hawary ve El-Sheshtawy 2010) ve Lagrange interpolasyonuna dayalı sıralama yöntemi (Rashed 2004) ile karşılaştırılmaktadır.

Tablo 5.23: Örnek 5.2.9 için $e_{kök}(n)$ karşılaştırma

n	Sunulan yöntem	Chebyshev Sıralama Yöntemi	Spektral Yöntemi	Lagrange Interpolasyona Dayalı Sıralama Yöntem
2	0	$2.6e - 004$	$1.2e - 004$	$8.4e - 005$
3	$5.9e - 017$	$1.8e - 005$	$2.3e - 005$	$1.7e - 005$
4	$1.8e - 016$	$2.6e - 007$	$1.3e - 007$	$2.4e - 008$
5	$1.2e - 016$	$4.7e - 008$	$1.7e - 008$	$2.6e - 009$
6	$1.2e - 016$	$1.8e - 010$	$7.6e - 011$	$2.9e - 012$
7	$2.2e - 016$	$1.8e - 011$	$1.0e - 011$	$6.7e - 013$
8	$2.4e - 016$	$5.6e - 014$	$3.9e - 014$	$7.8e - 016$
9	$2.4e - 016$	$6.7e - 015$	$4.3e - 015$	$4.4e - 016$

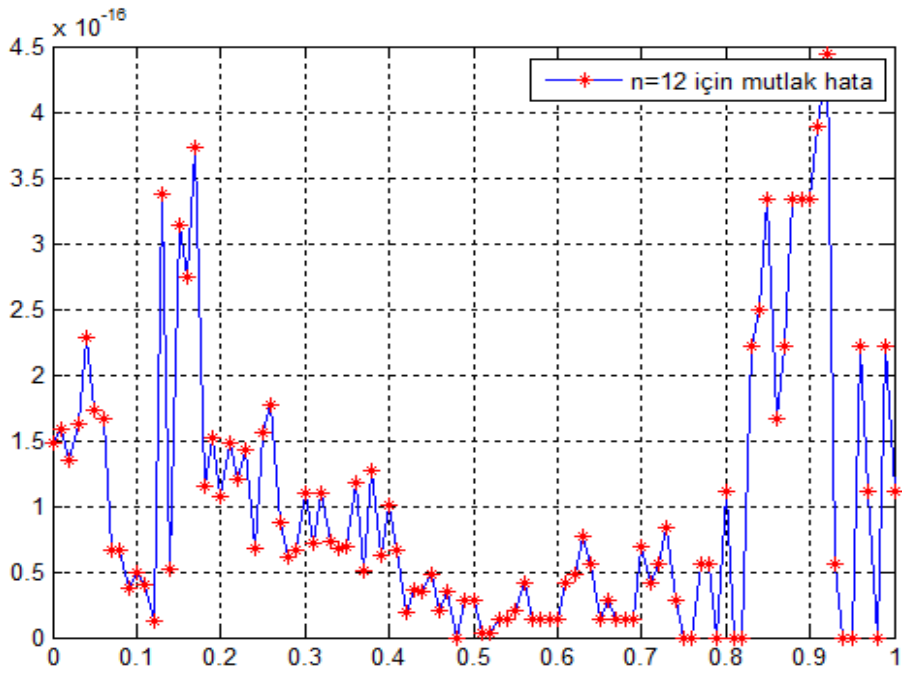
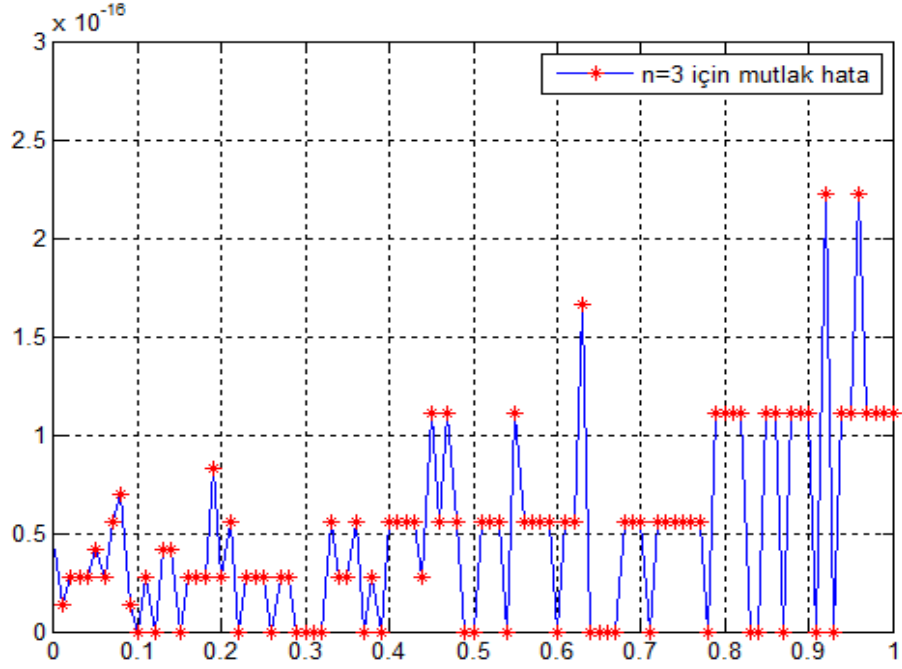
Bu tablo, sunulan yöntem ile elde edilen nümerik sonuçların diğer yöntemler ile elde edilen nümerik sonuçlardan daha iyi olduğunu gösterir.

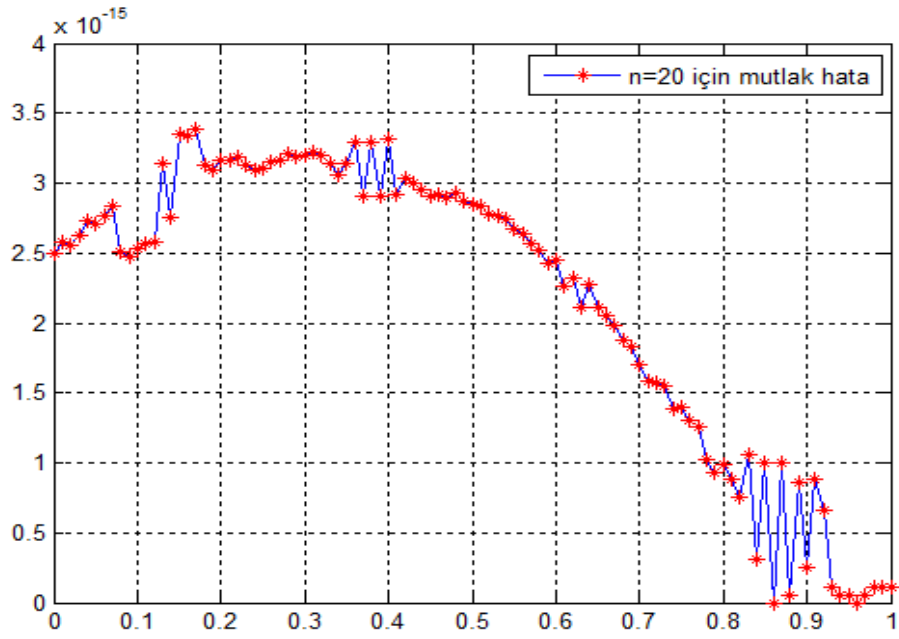
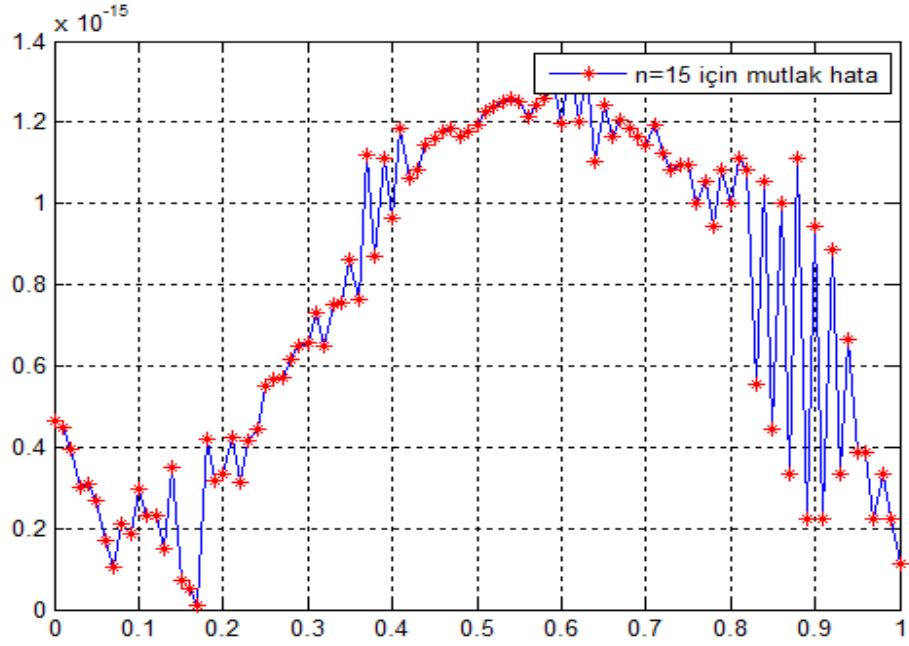
Örnek 5.2.10 $y(-1) + 2y(0) = 0, y'(1/2) = 1, y(1) = 2/3$ karışık tipteki koşullar ile verilen lineer Fredholm-Volterra integrodiferansiyel denklemini gözönüne alalım:

$$\begin{aligned}
e^x y''(x) + x^3 y'(x) + y(x) &= -\frac{2}{\pi} \sin(\pi x) + 2e^x + x^2 - 2x - \frac{1}{3} \\
&+ \int_{-1}^1 [(x^4 - t) y(t) + t^2 y'(t)] dt \\
&+ \int_{-1}^x [\cos(\pi t) y''(t) + 3txy(t)] dt.
\end{aligned}$$

Bu problemin tam çözümü $y(x) = x^2 - 1/3$ 'tür.

Şekil 5.3'te sunulan yöntem ile $x_s = \cos\left(\frac{s\pi}{n}\right)$; $s = 0, 1, \dots, n$ sıralama noktaları üzerinde baştan ve sondan silerek ekleme tekniği kullanılarak farklı n değerleri için elde edilen mutlak hata sonuçları verilmektedir.





Şekil 5.3: Örnek 5.2.10 için sunulan yöntem ile elde edilen mutlak hata sonuçları

Tablo 5.24'te artan n değerleri için geliştirilmiş Bernstein polinomlarına dayalı sıralama yönteminin $x_s = \cos\left(\frac{s\pi}{n}\right)$; $s = 0, 1, \dots, n$ Chebyshev sıralama noktaları üzerinde hesaplanan ortalama hata sonuçları, Chebyshev polinomlarına dayalı sıralama yönteminin (Akyüz-Daşcıoğlu 2006) hata sonuçları ile karşılaştırılmaktadır.

Table 5.24: Örnek 5.2.10 için $e_{ort}(n)$ ortalama hata karşılaştırma

n	Sunulan yöntem		Chebyshev Yöntemi
	Ekleyerek	Silerek	
3	$8.8e - 017$	$8.8e - 017$	$2.0e - 002$
6	$2.1e - 016$	$1.5e - 016$	$1.2e - 004$
9	$1.8e - 016$	$1.2e - 016$	$1.8e - 006$
12	$2.0e - 016$	$2.1e - 016$	$9.1e - 011$
15	$2.4e - 016$	$3.0e - 015$	$4.2e - 012$

Bu tablo, yöntemin hem ekleyerek hem de ilk ve son satır matrislerini silerek elde edilen nümerik sonuçlarının diğer yöntemin nümerik sonuçlarına göre daha etkili olduğunu gösterir.

5.3 Lineer Olmayan Denklemler için Uygulamalar

Bu kısımda lineer olmayan diferansiyel, integral ve integrodiferansiyel denklemleri içeren altı tane problem gözönüne alınacak, bu tip denklemlerin nümerik çözümleri ise Bölüm 3'te sunulan genelleştirilmiş Bernstein polinomlarına dayalı sıralama yöntemi ve kuasilineerleştirme tekniği kullanılarak elde edilecektir. Ayrıca bulunan çeşitli nümerik sonuçlar, tablolar halinde sunulacak ve diğer yöntemlerle karşılaştırılacaktır. Böylece sunulan yöntemin ne kadar uygulanabilir, etkili ve verimli olduğu test edilmiş olur.

Örnek 5.3.1 $y(0) = y'(0) = 0$ başlangıç koşulları ile verilen

$$y''(x) + \frac{2}{x}y'(x) + 4(2e^y + e^{y/2}) = 0; 0 < x \leq 1$$

lineer olmayan Lane-Emden tipli diferansiyel denklemi gözönüne alalım. Bu denklemin verilen koşullar altındaki tam çözümü $y(x) = -2 \ln(1 + x^2)$ 'dir.

Tablo 5.25'te ilk iterasyon fonksiyonu $y_0(x) = 0$ olmak üzere $r = 3$ iterasyonu için yöntemin $x_s = [1 - \cos(\frac{\pi s}{n+1})] / 2; s = 1, 2, \dots, n + 1$ sıralama noktalarında hesaplanan mutlak hata sonuçları listelenmektedir. Bu nümerik sonuçlar, temel arttırılmış matrisin son iki satırı ile başlangıç koşullarını ifade

eden arttırılmış satır matrisleri yer değiştirilerek hesaplanmıştır. Bu tablodan artan n değerleri için sunulan yöntemin yaklaşık çözümlerinin tam çözüme tutarlı olarak yakınsadığı görülmektedir.

Tablo 5.25: Örnek 5.3.1'in üçüncü iterasyon için mutlak hata analizi

x	$n = 5$	$n = 10$	$n = 15$	$n = 30$
0.1	$2.0e - 006$	$1.5e - 008$	$5.4e - 012$	$2.8e - 015$
0.2	$1.6e - 005$	$2.0e - 008$	$5.0e - 012$	$2.6e - 015$
0.3	$4.2e - 005$	$2.1e - 008$	$3.4e - 013$	$2.9e - 015$
0.4	$4.3e - 006$	$1.0e - 008$	$1.9e - 012$	$2.3e - 015$
0.5	$1.1e - 004$	$4.5e - 008$	$3.9e - 012$	$1.8e - 015$
0.6	$1.6e - 004$	$5.0e - 008$	$5.0e - 012$	$2.9e - 015$
0.7	$1.7e - 005$	$9.9e - 009$	$1.1e - 011$	$8.4e - 014$
0.8	$3.1e - 004$	$3.6e - 008$	$2.2e - 011$	$2.1e - 012$
0.9	$1.5e - 004$	$4.2e - 008$	$5.4e - 011$	$3.3e - 011$
1.0	$3.6e - 003$	$2.1e - 006$	$5.2e - 010$	$3.5e - 010$

Tablo 5.26'da, Tablo 5.25'ten yararlanılarak farklı n değerleri için sunulan yöntemin mutlak hata sonuçları, Legendre wavelet yaklaşımı (Aminikhah ve Moradian 2013), Hermite fonksiyonlarına dayalı sıralama (HFS) yöntemi (Parand ve diğ. 2010), shifted Jacobi-Gauss sıralama (SJGS) spektral yönteminin (Bhrawy ve Alofi 2012) mutlak hata sonuçları ile karşılaştırılmaktadır.

Table 5.26: Örnek 5.3.1 için mutlak hataların karşılaştırılması

x	Sunulan Yöntem		
	$n = 5$	$n = 15$	$n = 30$
0.1	$2.0e - 006$	$5.4e - 012$	$2.8e - 015$
0.5	$1.1e - 004$	$3.9e - 012$	$1.8e - 015$
1.0	$3.6e - 003$	$5.2e - 010$	$3.5e - 010$
x	Legendre Wavelet Yaklaşımı	HFS Yöntemi	SJGS Yöntemi
0.1	$1.6e - 004$	$2.9e - 006$	$2.1e - 007$
0.5	$2.0e - 004$	$3.0e - 006$	$4.3e - 007$
1.0	$2.7e - 002$	$9.3e - 007$	$5.6e - 008$

Bu tabloya göre seçilen n ve x değerleri için sunulan yöntemin nümerik sonuçlarının, diğer yöntemlerin nümerik sonuçlarına göre daha iyi ve etkili olduğu söylenebilir.

Örnek 5.3.2 $y'(0) = 0$, $y(1) = 0$ sınır koşulları ile verilen

$$y''(x) + \frac{1}{x}y'(x) + e^y = 0; \quad 0 < x \leq 1$$

izotermik gaz alanı denklemini gözönüne alalım. Bu denklemin yukarıda verilen koşullar altındaki tam çözümünü $c = 3 - 2\sqrt{2}$ olmak üzere $y(x) = 2 \ln\left(\frac{c+1}{cx^2+1}\right)$ 'dir.

Bu problemin çözümü için ilk iterasyon fonksiyonu $y_0(x) = 0$ olarak seçilsin. Tablo 5.27 ve Tablo 28'de farklı n ve r değerleri için sunulan yöntemin $x_s = \left[1 - \cos\left(\frac{\pi s}{n+1}\right)\right] / 2$; $s = 1, 2, \dots, n+1$ sıralama noktaları üzerinde sırasıyla hesaplanan $e_{\max}(n)$ ve $E_{\max}(r)$ maksimum hata sonuçları listelenmektedir. Bu nümerik sonuçlar silmeden ekleme çözüm tekniği ile hesaplanmıştır. Tablo 5.27'ye bakıldığında, sunulan yöntem ile elde edilen nümerik sonuçların yeterince büyük n ve r iterasyon noktaları için etkili olduğu gözükmektedir. Tablo 28 ise n 'nin küçük değerleri ve artan r noktaları için etkili nümerik sonuçların elde edildiğini göstermektedir.

Table 5.27: Örnek 5.3.2 için $e_{\max}(n)$ maksimum hata analizi

n	$r = 1$	$r = 2$	$r = 3$	$r = 4$	$r = 5$	$r = 6$
6	$8.3e - 006$	$2.3e - 006$	$2.3e - 006$	$2.3e - 006$	$2.3e - 006$	$2.3e - 006$
9	$1.0e - 005$	$1.1e - 009$	$1.1e - 009$	$1.1e - 009$	$1.1e - 009$	$1.1e - 009$
12	$1.0e - 005$	$1.2e - 011$	$1.2e - 012$	$1.2e - 012$	$1.2e - 012$	$1.2e - 012$
15	$1.0e - 005$	$1.1e - 011$	$2.8e - 015$	$2.7e - 015$	$2.7e - 015$	$2.7e - 015$
17	$1.0e - 005$	$1.1e - 011$	$1.2e - 015$	$1.3e - 015$	$1.4e - 015$	$1.4e - 015$
20	$1.0e - 005$	$1.1e - 011$	$6.1e - 016$	$6.7e - 016$	$5.6e - 016$	$5.6e - 016$
24	$1.0e - 005$	$1.1e - 011$	$5.2e - 016$	$5.2e - 016$	$4.7e - 016$	$4.6e - 016$
30	$1.0e - 005$	$1.1e - 011$	$6.9e - 016$	$9.4e - 016$	$9.1e - 016$	$9.9e - 016$
33	$1.0e - 005$	$1.1e - 011$	$1.0e - 015$	$8.3e - 016$	$1.1e - 015$	$1.0e - 015$
65	$1.0e - 005$	$1.1e - 011$	$4.7e - 015$	$4.4e - 015$	$4.4e - 015$	$4.4e - 015$

Table 5.28: Örnek 5.3.2 için $E_{\max}(r)$ maksimum hata analizi

n	$r = 1$	$r = 2$	$r = 3$	$r = 4$	$r = 5$	$r = 6$
6	$9.8e - 003$	$8.3e - 006$	$2.3e - 006$	$2.3e - 006$	$2.3e - 006$	$2.3e - 006$
9	$9.8e - 003$	$1.0e - 005$	$1.1e - 009$	$1.1e - 009$	$1.1e - 009$	$1.1e - 009$
12	$9.8e - 003$	$1.0e - 005$	$1.2e - 011$	$1.2e - 012$	$1.2e - 012$	$1.2e - 012$
15	$9.8e - 003$	$1.0e - 005$	$1.1e - 011$	$2.9e - 015$	$2.8e - 015$	$2.8e - 015$
17	$9.8e - 003$	$1.0e - 005$	$1.1e - 011$	$1.1e - 015$	$1.3e - 015$	$1.4e - 015$
20	$9.8e - 003$	$1.0e - 005$	$1.1e - 011$	$5.6e - 016$	$5.5e - 016$	$5.0e - 016$
24	$9.8e - 003$	$1.0e - 005$	$1.1e - 011$	$5.1e - 016$	$5.5e - 016$	$5.6e - 016$

Tablo 5.29’da farklı n ve $r = 6$ iterasyon değeri için sunulan yöntemin $e_{\max}(n)$ maksimum hata sonuçları, C^1 -lineerleştirme (Ramos 2004) ve sonlu-fark yönteminin (Kumar 2002) hata sonuçları ile karşılaştırılmaktadır. Bu tabloya göre artan n değerleri için sunulan yöntemin nümerik sonuçları diğer yöntemlerin nümerik sonuçlarına göre daha yüksek doğruluğa sahiptir.

Table 5.29: Örnek 5.3.2 için maksimum hataların karşılaştırılması

n	Sunulan Yöntem	C^1 -lineerleştirme Yöntemi	Sonlu-fark Yöntemi
9	$1.1e - 009$	$3.1e - 003$	$2.0e - 004$
17	$1.4e - 015$	$5.3e - 004$	$5.0e - 005$
33	$1.0e - 015$	$1.5e - 004$	$1.2e - 005$
65	$4.4e - 015$	$6.8e - 005$	$3.1e - 006$

Bunun yanısıra $n = 16$ ve $r = 5$ için sunulan yöntemin mutlak hata sonuçları

$$|e(0.4)| = 3.5e - 016, \quad |e(0.8)| = 1.1e - 016$$

iken, $n = 20$ için SJGS spektral yönteminin (Bhrawy ve Alofi 2012) mutlak hata sonuçları

$$|e(0.4)| = 3.9e - 016, \quad |e(0.8)| = 2.2e - 016$$

ve kübik B-spline sıralama tekniği ile değiştirilmiş ayrıştırma yönteminin (Wazwaz

2001) mutlak hata sonuçları

$$|e(0.4)| = 1.8e - 006, \quad |e(0.8)| = 9.2e - 007$$

olarak bulunmuştur. Bu durumda daha küçük n değerleri için amaçlanan yöntemin nümerik sonuçlarının diğer yöntemlerin sonuçlarına göre daha yüksek doğruluğa ve daha hızlı yakınsamaya sahip olduğu söylenebilir. Ayrıca tüm bu bulgular doğrultusunda iterasyon değerinin arttırılmasının yakınsamayı hızlandırdığı, yöntemi daha etkili hale getirdiği sonucuna varılabilir.

Örnek 5.3.3

$$y(x) = 2 - e^x + \int_0^x e^{x-t} y^2(t) dt; \quad 0 \leq t \leq 1$$

lineer olmayan Volterra integral denklemini gözönüne alalım. Bu denklemin tam çözümü $y(x) = 1$ 'dir.

$y_0(x) = 2 - e^x$ ilk iterasyon fonksiyonu olmak üzere Tablo 5.30'da artan n ve r değerleri için sunulan yöntemin ortalama hata sonuçları verilmektedir. Bu tabloya göre nümerik sonuçların artan r değerlerine göre yakınsaklığının hızla arttığı söylenebilir.

Tablo 5.30: Örnek 5.3.3 için $e_{ort}(n)$ ortalama hata analizi

n	$r = 1$	$r = 2$	$r = 3$	$r = 4$	$r = 5$
2	$2.3e - 002$	$6.8e - 004$	$1.6e - 007$	$3.6e - 014$	0
4	$2.5e - 002$	$1.9e - 004$	$9.6e - 009$	0	0
8	$2.0e - 002$	$1.3e - 004$	$4.1e - 009$	$2.0e - 016$	$5.3e - 016$
16	$1.7e - 002$	$9.2e - 005$	$2.3e - 009$	$1.1e - 014$	$1.3e - 015$

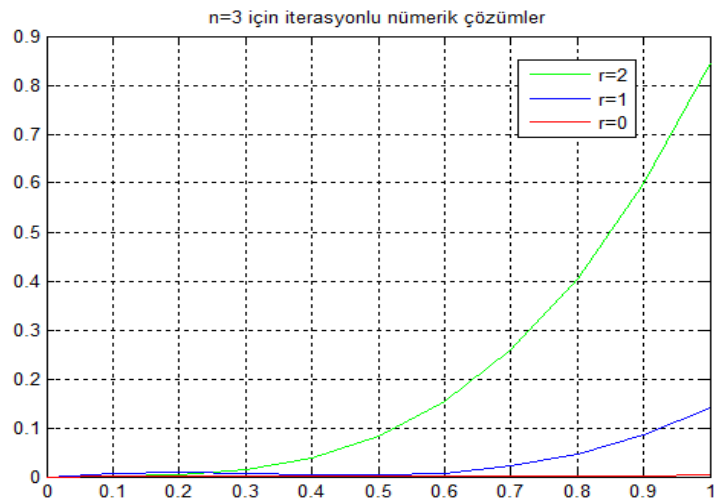
Tablo 5.31'de ilk iterasyon fonksiyonu $y_0(x) = 2 - e^x$ olmak üzere farklı r iterasyon değerleri için $x_s = \frac{s}{n}$; $s = 0, 1, \dots, n$ sıralama noktaları gözönüne alınarak sunulan yöntemin belirli x noktaları üzerinde hesaplanan mutlak hata sonuçları, ilk iterasyon fonksiyonu $y_0(x) = 1 - e^x$ olan kuasilineerleştime tekniğine ve Lagrange baz fonksiyonlarına dayalı sıralama yöntemi (Maleknejad ve Najafi 2011) ile hesaplanan mutlak hata sonuçları ile kıyaslanmaktadır. Bu tabloda,

sunulan yöntemin $r = 2$ ve $r = 5$ için çözüme diğer yönteme göre daha hızlı yakınsadığı görülmektedir.

Table 5.31: Örnek 5.3.3 için $|e_n(x)|$ mutlak hata karşılaştırma

x	Sunulan Yöntem				Lagrange Baz Fonksiyonlarına Dayalı Sıralama Yöntemi	
	$n = 3$		$n = 4$		$n = 4$	
	$r = 2$	$r = 5$	$r = 2$	$r = 5$	$r = 2$	$r = 5$
0.1	$2.3e - 004$	$1.5e - 016$	$5.8e - 005$	$1.7e - 016$	$2.5e - 003$	$1.8e - 015$
0.2	$2.8e - 004$	$2.7e - 016$	$3.9e - 005$	$2.8e - 016$	$7.9e - 004$	$6.6e - 016$
0.3	$2.2e - 004$	$1.4e - 017$	$8.7e - 006$	$3.6e - 017$	$1.4e - 003$	$1.5e - 015$
0.4	$1.3e - 004$	$6.9e - 017$	$3.9e - 006$	$3.5e - 017$	$1.8e - 003$	$2.1e - 015$
0.5	$1.1e - 004$	0	$3.5e - 005$	0	$9.0e - 004$	$1.2e - 015$
0.6	$2.2e - 004$	$1.1e - 016$	$8.4e - 005$	$5.6e - 017$	$3.6e - 003$	$1.1e - 015$
0.7	$5.5e - 004$	0	$1.1e - 004$	$5.6e - 017$	$1.8e - 002$	$2.4e - 015$
0.8	$1.2e - 003$	$1.1e - 016$	$3.5e - 005$	$5.6e - 017$	$5.5e - 002$	$1.3e - 015$
0.9	$2.2e - 003$	$1.1e - 016$	$2.3e - 004$	$1.1e - 016$	$1.3e - 001$	$1.5e - 014$

Şekil 5.4'te sunulan yöntemin $x_s = \frac{s}{n}; s = 0, 1, \dots, n$ sıralama noktaları üzerinde $n = 3$ ve $r = 0, 1, 2$ için hesaplanan yaklaşık çözüm sonuçları verilmektedir.



Şekil 5.4: Örnek 5.3.3'ün sunulan yöntem ile farklı r değerleri için elde edilen yaklaşık çözüm sonuçları

Örnek 5.3.4

$$y(x) = \frac{2x + 7 - 7x^4}{3} + \int_{-1}^x (x+t)y^2(t)dt + \int_{-1}^1 (x-t)y(t)dt; \quad -1 \leq x \leq 1$$

lineer olmayan Fredholm-Volterra integral denklemini gözönüne alalım. Bu denklemin tam çözümü $y(x) = 2x$ 'dir.

Bu problemin sunulan yöntem ile çözümü için ilk iterasyon fonksiyonu $y_0(x) = 0$ olarak belirlensin. Tablo 5.32'de artan n değerleri için sunulan yöntemin $x_s = -1 + \frac{2s}{n}$; $s = 0, 1, \dots, n$ sıralama noktaları üzerinde hesaplanan ortalama hata sonuçları verilmektedir. Buradan sunulan yöntemin nümerik sonuçlarının artan r noktalarına göre hızlı yakınsadığı söylenebilir.

Tablo 5.32: Örnek 5.3.4 için $e_{ort}(n)$ ortalama hata analizi

n	$r = 2$	$r = 3$	$r = 4$	$r = 5$	$r = 6$
2	$1.6e - 001$	$3.7e - 002$	$3.1e - 003$	$2.6e - 005$	$7.1e - 008$
4	$8.2e - 002$	$6.4e - 003$	$4.2e - 005$	$1.7e - 007$	$6.5e - 008$
8	$5.0e - 002$	$1.6e - 003$	$1.5e - 006$	$2.6e - 007$	$1.1e - 007$
16	$4.1e - 002$	$1.1e - 003$	$4.2e - 007$	$3.5e - 006$	$9.5e - 007$

Örnek 5.3.5 $y(0) = 0$ başlangıç koşulu ile verilen

$$y'(x) = 2x - \frac{1}{2} \sin(x^4) + \int_0^x x^2 t \cos(x^2 y(t)) dt; \quad 0 < x, t < 1$$

lineer olmayan Volterra integrodiferansiyel denklemini gözönüne alalım. Bu denklemin yukarıda verilen koşullar altındaki tam çözümü $y(x) = x^2$ 'dir.

Tablo 5.33'te sunulan yöntemin \mathcal{L}^2 -normu üzerinde $y_0(x) = 0$ ve $y_0(x) = x$ olmak üzere iki farklı ilk iterasyon fonksiyonu seçilerek elde edilen hata sonuçları ile Block-Pulse fonksiyonlarını içeren Hybrid fonksiyonlarına ve Lagrange interpolasyon polinomlarına dayalı Hybrid yöntemi (Marzban ve Hoseini 2012) ile elde edilen hata sonuçlarının karşılaştırılması verilmektedir.

Burada sunulan yöntemin nümerik sonuçları silmeden ekleme tekniği kullanılarak, $x_s = \frac{s}{n}; s = 0, 1, \dots, n$ sıralama noktaları üzerinde hesaplanmıştır.

Tablo 5.33: Örnek 5.3.5 için $e_2(n)$ hatasının karşılaştırılması

n	Sunulan Yöntem				Hybrid	
	$y_0(x) = 0$		$y_0(x) = x$		Yöntemi	
	$r = 2$	$r = 3$	$r = 2$	$r = 3$	$n = 9$	$8.8e - 012$
2	$2.9e - 012$	$2.9e - 017$	$6.1e - 017$	$2.5e - 016$	$n = 17$	$3.4e - 012$
3	$5.2e - 017$	$2.3e - 016$	$6.7e - 017$	$1.3e - 016$	$n = 19$	$2.1e - 013$
4	$2.8e - 016$	$1.3e - 016$	$2.9e - 017$	$2.4e - 017$	$n = 39$	$9.7e - 017$

Bu tabloya göre daha küçük n ve r değerleri için sunulan yöntemin nümerik sonuçları, diğer yöntemin nümerik sonuçlarından daha iyi ve daha etkilidir. Ayrıca ilk iterasyon fonksiyonu olarak daha yüksek dereceli polinom seçimi ve r iterasyon değerinin artırılması daha iyi sonuçların elde edilmesine öncülük etmektedir.

Örnek 5.3.6 $y(0) = 0$ başlangıç koşulu ile verilen $x, t \in [0, 1]$ olmak üzere

$$y'(x) = -y(x) + 2x + x^2 + \frac{x^5}{10} - \frac{1}{32} + \frac{1}{4} \int_0^1 ty^3(t) dt - \frac{1}{2} \int_0^x y^2(t) dt$$

lineer olmayan Fredholm-Volterra integrodiferansiyel denklemini gözönüne alalım. Bu denklemin yukarıda verilen koşul altındaki tam çözümü $y(x) = x^2$ 'dir. Burada $g(x, y(x), y'(x)) = y'(x) + y(x) - 2x - x^2 - \frac{x^5}{10} + \frac{1}{32}$, $f(x, t, y(t)) = ty^3(t)$, $v(x, t, y(t)) = y^2(t)$, $\lambda_1 = \frac{1}{4}$ ve $\lambda_2 = -\frac{1}{2}$ şeklinde ifade edilebilir.

Başlangıç koşullarını sağlayacak şekilde iki farklı $y_0(x) = 0$ ve $y_0(x) = x$ ilk iterasyon fonksiyonu seçilebilir. Daha yüksek dereceli bir polinom olduğundan bu denklemin nümerik çözümü için ilk iterasyon fonksiyonunu $y_0(x) = x$ olarak gözönüne alalım. Teorem 3.4.1 gereğince, yukarıdaki problemin matris bağıntısı

$$(\mathbf{G}_{r,0}\mathbf{P} + \mathbf{G}_{r,1}\mathbf{PN} - \frac{1}{4}\mathbf{F}_{r,0} + \frac{1}{2}\mathbf{V}_{r,0})\mathbf{Y}_{r+1} = \mathbf{H}_r; r = 0, 1, \dots$$

olur. Burada $x_s \in [a, b]$ sıralama noktaları olmak üzere $\mathbf{P} = [p_{i,n}(x_s)]$, $g_{y_r} = g_{y_r'} = 1$ olduğundan $\mathbf{G}_{r,0} = \mathbf{G}_{r,1} = \mathbf{I}_{n+1}$,

$$\mathbf{F}_{r,0} = \left[\int_0^1 3ty_r^2(t) p_{i,n}(t) dt \right], \quad \mathbf{V}_{r,0} = \left[\int_0^{x_s} 2y_r(t) p_{i,n}(t) dt \right],$$

$$\mathbf{H}_r = \left[2x_s + x_s^2 + \frac{x_s^5}{10} - \frac{1}{32} + \frac{1}{4} \int_0^1 [-2ty_r^3(t)] dt - \frac{1}{2} \int_0^{x_s} [-y_r^2(t)] dt \right]$$

şeklinde tanımlı matrislerdir.

Tablo 5.34'te amaçlanan yöntemin $n = 2$ ve farklı r değerleri için $x_s = \frac{s}{n}$; $s = 0, 1, \dots, n$ sıralama noktaları üzerinde silmeden ekleme tekniği kullanılarak hesaplanan mutlak hata sonuçları ile üçgensel fonksiyonları kullanan direk yönteminin (Babolian 2009) ve Sabit nokta yönteminin (Berenguer 2013) hata sonuçları karşılaştırılmaktadır. Bu tablo, sunulan yöntem ile elde edilen nümerik sonuçların küçük n değeri için diğer yöntemler ile elde edilen nümerik sonuçlardan daha etkili olduğunu gösterir. Ayrıca bu tablodan amaçlanan yöntemin artan r iterasyon değeri için daha hızlı yakınsaklığa ve daha yüksek doğruluğa sahip olduğu söylenebilir.

Tablo 5.34: Örnek 5.3.6 için mutlak hata analizi

x	$n = 2$ için Sunulan Yöntem				Üçgensel Fonksiyon Yöntemi	Sabit Nokta Yöntemi
	$r = 0$	$r = 1$	$r = 2$	$r = 3$	$n = 15$	$n = 4$
0.1	$5.7e - 004$	$1.8e - 008$	$2.5e - 017$	$6.1e - 018$	$9.8e - 004$	$2.9e - 005$
0.2	$8.7e - 003$	$2.9e - 008$	$3.5e - 017$	$9.0e - 018$	$7.0e - 004$	$1.2e - 005$
0.3	$1.0e - 003$	$3.6e - 008$	$4.2e - 017$	$1.1e - 017$	$7.4e - 004$	$9.0e - 005$
0.4	$1.1e - 003$	$4.0e - 008$	$4.6e - 017$	$1.2e - 017$	$1.1e - 003$	$3.1e - 004$
0.5	$9.3e - 004$	$4.1e - 008$	$4.7e - 017$	$1.2e - 017$	$1.6e - 004$	$1.1e - 004$
0.6	$6.7e - 004$	$3.8e - 008$	$4.4e - 017$	$1.2e - 017$	$1.1e - 003$	$1.0e - 003$
0.7	$2.5e - 004$	$3.2e - 008$	$3.8e - 017$	$1.0e - 017$	$8.2e - 004$	$2.0e - 003$
0.8	$3.0e - 004$	$2.2e - 008$	$2.9e - 017$	$7.6e - 018$	$8.2e - 004$	$2.9e - 003$
0.9	$1.0e - 003$	$8.4e - 009$	$1.6e - 017$	$4.2e - 018$	$1.1e - 003$	$1.1e - 003$
1.0	$1.8e - 003$	$8.4e - 009$	0	0	$1.5e - 004$	$1.8e - 003$

6. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu tez çalışmasında esas amaç; çeşitli lineer ve lineer olmayan diferansiyel, integral ve integrodiferansiyel denklemlerin nümerik çözümleri için geliştirilmiş Bernstein polinomlarına dayalı sıralama yöntemleri geliştirmektir. Bernstein polinomlarına dayalı nümerik yöntemler üretilirken çözüm fonksiyonunun $[a, b]$ aralığı üzerinde sürekli olduğuna dikkat edilmelidir.

Bölüm 2.2’de lineer diferansiyel denklemlerin nümerik çözümü için geliştirilmiş Bernstein polinomlarına dayalı sıralama yöntemi geliştirilmiştir. Bu yöntemin kalan hatası için Bölüm 4.1’de Bernstein polinomlarının düzgün yaklaşımından faydalanılarak hata sınırı bulunmuş ve hatanın sıfıra yakınsadığı ispatlanmıştır. Bölüm 5’te yöntemin uygulanabilir olduğunu göstermek için çeşitli başlangıç ve sınır değer problemleri gözönüne alınmıştır. Ayrıca bu yöntem ile elde edilen nümerik sonuçlar, diğer çalışmalarda yer alan yöntemlerle elde edilen nümerik sonuçlarla karşılaştırılmıştır.

Bölüm 2.3’te lineer Fredholm-Volterra integral denklemlerin nümerik çözümü için geliştirilmiş Bernstein polinomlarına dayalı iki tip sıralama yöntemi geliştirilmiştir. Birinci tip sıralama yönteminde sadece çözüm fonksiyonuna Bernstein polinomları ile yaklaşım yapılırken, alternatif yöntemde çözüm fonksiyonunun yanı sıra çekirdek fonksiyonlarının da tek değişkene göre Bernstein polinomları ile yaklaşımı gözönüne alınmıştır. Burada çekirdek fonksiyonlarının da $[a, b]$ aralığı üzerinde sürekli fonksiyonlar olmasına dikkat edilmelidir. Birinci yöntemin bir dezavantajı, birçok sayıda integral hesaplamaları olduğu için programın hesaplama süresi uzamaktadır. Alternatif yöntemde ise integraller yerine Bernstein polinomlarının temel özelliklerine dayalı formüller kullanılarak, hesaplamalarda hız, zaman ve işlem pratikliği açısından verimliliğin sağlandığı görülmüştür. Alternatif yöntem için bulunan sonuçlar, yakınsamanın çok yavaş olduğunu göstermiştir. Bu nedenle yöntemin elverişsiz ve kullanıma uygun olmadığı sonucuna varılabilir. Bölüm 4.2’de birinci yöntemin kalan hatası

için Bernstein polinomlarının düzgün yaklaşım özelliklerinden faydalanılarak bir hata sınırı bulunmuş ve hatanın sifıra yakınsadığı ispatlanmıştır. Bölüm 5'te iki yöntemin de uygulanabilir olduğunu göstermek için çeşitli örnekler ele alınmıştır.

Bölüm 2.4'te en genel gösterime sahip lineer Fredholm-Volterra integrodiferansiyel denklemlerin nümerik çözümü için genelleştirilmiş Bernstein polinomlarına dayalı bir sıralama yöntemi geliştirilmiştir. Bölüm 4.3'te Bernstein polinomlarının düzgün yaklaşım özellikleri gözönüne alınarak, üretilen yöntemin hata sınırları ve yakınsaklığı incelenmiştir. Bölüm 5'te sunulan yöntemin uygulanabilirliğini ve kesinliğini gösteren birkaç örnek ele alınmıştır.

Bölüm 3'te kuasilineerleştirme tekniği kullanılarak, lineer olmayan diferansiyel, integral ve integrodiferansiyel denklemler tekrarlı olarak lineer denklemlerin bir dizisi şeklinde ifade edilmiştir. Daha sonra bu lineer denklemleri çözmek için genelleştirilmiş Bernstein polinomlarına dayalı sıralama yöntemi üretilmiştir. Bölüm 5'te üretilen yöntemin uygulanabilirliği ve doğruluğu çeşitli örnekler ele alınarak test edilmiştir.

Başlangıç ve sınır değer problemleri için önerilen yöntem ile eşit aralıklı $x_s = a + \frac{(b-a)s}{n}$ ve eşit aralıklı olmayan $x_s = \frac{(a+b) - (b-a) \cos(\frac{\pi s}{n})}{2}$ sıralama noktaları kullanılarak elde edilen sonuçlar, diğer sıralama noktaları kullanılarak elde edilen sonuçlara göre daha etkilidir. Ayrıca aralığın her iki uç noktasını içeren sıralama noktaları üzerinde hesaplanan nümerik sonuçların, aralığın her iki uç noktasını içermeyen sıralama noktaları üzerinde hesaplanan nümerik sonuçlardan daha iyi olduğu yargısına varılabilir.

m . mertebeden bir denklemin verilen koşullar altındaki tam çözümü n . dereceden polinom tipli bir fonksiyon ise $n = m$ için en iyi hata sonuçları elde edilmiş, ancak $n > m$ için hata sonuçlarının sayısal olarak büyüdüğü gözlenmiştir. Ancak tam çözüm polinom tipli bir fonksiyon değilse n değeri arttıkça daha iyi hata sonuçlarının elde edildiği görülmüştür.

Bölüm 2.5 ve 3.5'te değinilen çözüm yöntemleri içerisinde n 'nin küçük değerleri için silmeden ekleme tekniği, n 'nin değeri büyüdükçe ise silerek ekleme

tekniki daha iyi sonuçlar vermiştir.

Başlangıç değer problemleri için eğer koşullar aralığın sol uç noktasında tanımlı ise son satırları silerek ekleme tekniği, eğer koşullar aralığın sağ uç noktasında tanımlı ise ilk satırları silerek ekleme tekniği daha etkili sonuçlar vermiştir.

Sınır değer problemleri için eğer koşullar aralığın iki uç noktasında verilmişse, eşit aralıklı noktalar gzntine alındığında genel olarak n 'nin küçük değerleri için baştan ve sondan silerek ekleme tekniği daha etkili iken, n 'nin artan değerleri için ortadan silerek ekleme tekniğinin daha etkili olduğu grlmştir. Diğer yandan eşit aralıklı olmayan noktalarda baştan ve sondan silerek ekleme tekniği ile hesaplanan nümerik sonuçlar daha etkilidir.

Lineer ve lineer olmayan denklemler için üretilen Bernstein sıralama yöntemi ile elde edilen nümerik sonuçlar, diğer çalışmalarda yer alan nümerik sonuçlarla karşılaştırılarak, genel olarak amaçlanan yöntemin verimli ve etkili olduğu ortaya koyulmuştur.

Üretilen yöntem; problemlere kolay uygulanabilir, bilgisayar ortamında kolay hesaplanabilir ve zamandan tasarruf sağlar.

Lineer denklemler için üretilen sıralama yönteminin nümerik sonuçları, diğer yöntemlerin nümerik sonuçlarına göre yeterince büyük n değerleri için daha hızlı yakınsama ve yüksek doğruluğa sahiptir. Bunun yanısıra lineer olmayan denklemler için üretilen sıralama yönteminde ilk iterasyon fonksiyonunun polinom tipli bir fonksiyon olması gerekmez. Ancak ilk iterasyon fonksiyonunun yüksek dereceden bir polinom olarak seçilmesi, nümerik sonuçların artan r iterasyonları için çok hızlı bir şekilde yakınsadığını göstermiştir.

Bu tezde yapılan çalışmalar, çeşitli konferanslarda sunulmuş, ulusal ve uluslararası dergilerde yayımlanmıştır.

Sonuç olarak tüm bu olumlu çıkarımlar doğrultusunda, lineer ve lineer olmayan diferansiyel, integral ve integrodiferansiyel denklemlerin zmleri için

Üretilen genelletirilmi Bernstein polinomlarına dayalı sıralama yöntemi, fark denklemleri, kesirli denklemler, kısmi türevli denklemler gibi diğerk tür lineer ve lineer olmayan denklemleri içeren problemlere uygulanabilir. Bunun yanısıra lineer denklemler için araştırılan Bernstein polinomlarının düzgün yaklaşımına dayalı hata analizleri, lineer olmayan denklemler için de araştırılabilir. Lineer ve lineer olmayan denklemlerin nümerik czm için czm fonksiyonunun tanımlı olduğu aralık sonsuz aralığa genişletilerek Bernstein polinomlarına dayalı yeni yaklaşımlar üzerine calımalar yapılabilir.

KAYNAKLAR

Agarwal, R. P. and Chow, Y. M., “Iterative methods for a fourth order boundary value problems”, *J. Comput. Appl. Math.*, 10, 203-217, (1984).

Ahmad, B., “A quasilinearization method for a class of integro-differential equations with mixed nonlinearities”, *Nonlinear Anal-Real World Appl.*, 7, 997-1004, (2006).

Ahmad, B., Khan, R. A. and Sivasundaram, S., “Generalized Quasilinearization Method for Nonlinear Functional Differential Equations”, *J. Appl. Math. Stoch. Anal.*, 16 (1), 33-43, (2003).

Ahmad, B., Khan, R. A. and Sivasundaram, S., “Generalized Quasilinearization Method for Nonlinear Integro-Differential Equations”, *Nonlinear Stud.*, 8 (3), 331-341, (2001).

Akyüz-Daşcıoğlu, A. and Çerdik-Yaslan, H., “The solution of high-order nonlinear ordinary differential equations by Chebyshev Series”, *Appl. Math. Comput.*, 217, 5658–5666, (2011).

Akyüz-Daşcıoğlu, A., “A Chebyshev polynomial approach for linear Fredholm-Volterra integro-differential equations in the most general form”, *Appl. Math. Comput.*, 181, 103–112, (2006).

Aminikhah, H. and Moradian, S., “Numerical Solution of Singular Lane-Emden Equation”, *Math. Phys.*, doi:10.1155/2013/507145, (2013).

Babolian, E., Masouri, Z. and Hatamzadeh-Varmazyar, S., “Numerical solution of nonlinear Volterra–Fredholm integro-differential equations via direct method using triangular functions”, *Comput. Math. Appl.* 58, 239–247, (2009).

Bellman, R. E. and Kalaba, R. E., *Quasilinearization and Nonlinear Boundary*

Value Problems, New York: American Elsevier Publishing Company Inc., (1965).

Berenguer, M. I., Gámez, D. and López Linares, A. J., “Fixed point techniques and Schauder bases to approximate the solution of the first order nonlinear mixed Fredholm–Volterra integro-differential equation”, *J. Comput. Appl. Math.*, 252, 52-61, (2013).

Bhatta, D. D. and Bhatti, M. I., “Numerical Solution of KdV equation using modified Bernstein polynomials”, *Appl. Math. Comput.*, 174, 1255-1268, (2006).

Bhattacharya, S. and Mandal, B. N., “Use of Bernstein Polynomials in Numerical Solutions of Volterra Integral Equations”, *Appl. Math. Sci.*, 2 (36), 1773-1787, (2008).

Bhattacharya, S. and Mandal, B. N., “Numerical solution of a singular integro-differential equation”, *Appl. Math. Comput.*, 195, 346-350, (2008).

Bhatti, M. I., “Solutions of the Harmonic Oscillator Equation in a B-Polynomial Basis”, *Adv. Stud. Theor. Phys.*, 3 (12), 451-460, (2009).

Bhatti, M. I. and Bracken, P., “Solutions of Differential Equations in a Bernstein Polynomial Basis”, *J. Comput. Appl. Math.*, 205, 272-280, (2007).

Bhrawy, A. H. and Alofi, A. S., “A Jacobi–Gauss collocation method for solving nonlinear Lane–Emden type equations”, *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simulat.*, 17, 62–70, (2012).

Caliò, F., Munoz, F. and Marchetti, E., “Direct and iterative methods for the numerical solution of mixed integral equations”, *Appl. Math. Comput.*, 216, 3739-3746, (2010).

Chapra, S. C. and Canale, R. P., *Yazılım ve Programlama Uygulamalarıyla Mühendisler için Sayısal Yöntemler*, (Çev: H. Heperkan ve U. Kesgin), Literatür Yayıncılık, 44-54, (2008).

Charles, A. and Baird, Jr., “Modified Quasilinearization Technique for the

Solution of Boundary Value Problems for Ordinary Differential equations”, *J. Optim. Theory Appl.*, 3 (4), 227-242, (1969).

Chen, Z. and Jiang, W., “An approximate solution for a mixed linear Volterra-Fredholm integral equation”, *Appl. Math. Lett.*, 25, 1131-1134, (2012).

DeVore, R. A. and Lorentz, G. G., *Constructive Approximation. In: Bernstein Polynomials*, Berlin: Springer, (1993).

Doha, E. H., Bhrawy, A. H. and Saker, M. A., “On the Derivatives of Bernstein Polynomials: An Application for the Solution of High Even-Order Differential Equations”, *Bound. Value Probl.*, doi:10.1155/2011/829543, (2011).

Doha, E. H., Bhrawy, A. H. and Saker, M. A., “Integrals of Bernstein polynomials: An application for the solution of high even-order differential equations”, *Appl. Math. Lett.*, 24, 559-565, (2011).

Drici, Z., McRae, F. A. and Devi, J. V., “Quasilinearization for functional differential equations with retardation and anticipation”, *Nonlinear Anal.*, 70, 1763–1775, (2009).

El-Gamel, M., Cannon, J. R. and Zayed, A. I., “Sinc-Galerkin Method for Solving Linear Sixth-Order Boundary Value Problems”, *Math. Comput.*, 73, 1325-1343, (2003).

El-Hawary, H. M. and El-Sheshtawy, T. S., “Spectral method for solving the general form linear Fredholm-Volterra integro differential equations based on Chebyshev polynomials”, *J. Mod. Met. Numer. Math.*, 1 (1), 1-11, (2010).

Farin, G., *Curves and surfaces for CAGD fifth edition*, United States of America: Academic Press, (2002).

Farouki, R. T., “The Bernstein polynomial basis: A centennial retrospective”, *Comput. Aided Geom. D.*, 29, 379-419, (2012).

Farouki, R. T., “Legendre-Bernstein Basis Transformations”, *J. Comput. Appl.*

Math., 119, 145-160, (2000).

Farouki, R. T. ve Rajan, V. T., “Algorithms for Polynomials in Bernstein Form”, *Comput. Aided Geom. D.*, 5, 1-26, (1988).

Isik, O. R. and Sezer, M., “Bernstein Series Solution of a Class of Lane-Emden Type Equations”, *Math. Probl. Eng.*, doi:10.1155/2013/423797, (2013).

Işık, O. R., Sezer, M. and Güney, Z., “A Rational Approximation Based on Bernstein Polynomials for High Order Initial and Boundary Values Problems”, *Appl. Math. Comput.*, 217, 9438-9450, (2011).

Işık, O. R., Sezer, M. and Güney, Z., “Bernstein series solution of a class of linear integro-differential equations with weakly singular kernel”, *Appl. Math. Comput.*, 217, 7009-7020, (2011).

Işık, O. R., Güney, Z. and Sezer, M., “Bernstein series solutions of pantograph equations using polynomial interpolation”, *J. Differ. Equ. Appl.*, 18, 357-374, (2010).

Joy, K. I., *Bernstein Polynomials*, University of California: Davis, (2000).

Jüttler, B., “The Dual Basis Functions for the Bernstein Polynomials”, *Adv. Comput. Math.*, 8, 345–352, (1998).

Kumar, M., “A three-point finite difference method for a class of singular two-point boundary value problems”, *J. Comput. Appl. Math.*, 145, 89-97, (2002).

Kumar, N., Pandey, R. K. and Cattani, C., “Solution of the Lane-Emden Equation Using the Bernstein Operational Matrix of Integration”, *Astron. Astrophys.*, doi:10.5402/2011/351747, (2011).

Lorentz, G. G., *Bernstein polynomials*, New York: Chelsea Publishing, (1986).

Maleknejad, K., Hashemizadeh, E. and Ezzati, R., “A new approach to

the numerical solution of Volterra integral equations by using Bernstein approximation”, *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simulat.*, 16, 647-655 (2011).

Maleknejad, K. and Najafi, E., “Numerical solution of nonlinear volterra integral equations using the idea of quasilinearization”, *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simulat.*, 16, 93–100, (2011).

Mandal, B. N. and Bhattacharya, S., “Numerical Solution of some classes of integral equations using Bernstein polynomials”, *Appl. Math. Comput.*, 190, 1707-1716, (2007).

Mandelzweig, V. B. and Tabakin, F., “Quasilinearization approach to nonlinear problems in physics with application to nonlinear ODEs”, *Comput. Phys. Commun.*, 141, 268–281, (2001).

Marzban, H. R. and Hoseini, S. M., “Solution of Nonlinear Volterra-Fredholm Integrodifferential Equations via Hybrid of Block-Pulse Functions and Lagrange Interpolating Polynomials”, *Adv. Numer. Anal.*, doi:10.1155/2012/868279, (2012).

Mazure, M. L., “Chebyshev–Bernstein Bases”, *Comput. Aided Geom. D.*, 16, 649–669, (1999).

Městrovic, M., “The modified decomposition method for eighth-order boundary value problems”, *Appl. Math. Comput.*, 188, 1437-1444, (2007).

Natanson, I. P., *Constructive Function Theory*, New York: Frederick Ungar Publishing Co., (1964).

Noor, M. A. and Mohyud-Din, S. T., “Variational iteration technique for solving higher order boundary value problems”, *Appl. Math. Comput.*, 189, 1929-1942, (2007).

Ordokhani, Y. and Davaei far, S., “Application of the Bernstein Polynomials for Solving the Nonlinear Fredholm Integro-Differential Equations”, *J. Appl. Math.*

Bioinformatics., 1 (2), 13-31, (2011).

Ordokhani, Y. and Davaei far, S., “Approximate Solutions of Differential Equations by Using the Bernstein Polynomials”, *ISRN Appl. Math.*, doi:10.5402/2011/787694, (2011).

Pandey, R. K. and Kumar, N., “Solution of Lane–Emden type equations using Bernstein operational matrix of differentiation”, *New Astron.*, 17, 303–308, (2012).

Pandit, S. G., “Quadratically converging iterative schemes for nonlinear volterra integral equations and an application”, *J. Appl. Math. Stoch. Anal.*, 10, 169–178, (1997).

Pandya, B. M. and Joshi, D. C., “Solution of a Volterra’s Population Model in a Bernstein Polynomial Basis”, *Appl. Math. Sci.*, 5 (69), 3403-3410, (2011).

Parand, K., Dehghan, M. A., Rezaei, R. and Ghaderi, S. M., “An approximation algorithm for the solution of the nonlinear Lane–Emden type equations arising in astrophysics using Hermite functions collocation method”, *Comput. Phys. Commun.*, 181, 1096–1108, (2010).

Phillips, M. G., *Interpolation and Approximation by Polynomials*, New York: Springer-Verlag, (2003).

Rababah, A., Lee, B. G. and Yoo, J., “A Simple Matrix Form for Degree Reduction of Bézier Curves Using Chebyshev–Bernstein Basis Transformations”, *Appl. Math. Comput.*, 181, 310–318, (2006).

Rababah, A., “Jacobi-Bernstein Basis Transformation”, *Comput. Meth. Appl. Math.*, 4 (2), 206–214, (2004).

Rahman, M., *Integral Equations and their Applications*, USA: WIT Press, 165, (2007).

Ramos, J. I., “Linearization techniques for singular initial-value problems of

- ordinary differential equations”, *Appl. Math. Comput.*, 161, 525–542, (2005).
- Ramos, J. I., “Piecewise quasilinearization techniques for singular boundary-value problems”, *Comput. Phys. Commun.*, 158, 12–25, (2004).
- Ramos, J. I., “Linearization methods in classical and quantum mechanics”, *Comput. Phys. Comm.*, 153, 199-208, (2003).
- Rashed, M. T., “Lagrange interpolation to compute the numerical solutions of differential, integral and integro-differential equations”, *Appl. Math. Comput.*, 151, 869–878, (2004).
- Rivlin, T. J., *An introduction to the approximation of functions*, USA: Blaisdell Publishing Company, (1969).
- Shirin, A. and Islam M. S., “Numerical Solutions of Fredholm Integral Equations Using Bernstein Polynomials”, *J. Sci. Res.*, 2 (2), 264-272, (2010).
- Siddiqi, S. S. and Akram, G., “Septic spline solutions of sixth-order boundary value problems”, *J. Comput. Appl. Math.*, 215, 288-301, (2008).
- Singh, V. K., Pandey, R. K. and Singh, O. P., “New stable numerical solutions of singular integral equations of Abel type by using normalized Bernstein polynomials”, *Appl. Math. Sci.*, 3 (5), 241-255, (2009).
- Singh, A. K., Singh, V. K. and Singh O. P., “The Bernstein Operational Matrix of Integration”, *Appl. Math. Sci.*, 3 (49), 2427-2436, (2009).
- Stakgold, I. and Holst, M., *Green Functions and Boundary Value Problems Third Edition*, New York: John Wiley and Sons Inc., (2011).
- Stanley, E. L., *Quasilinearization and Invariant Imbedding*, New York: Academic Press Inc., (1968).
- Steffens, K. G., *The History of Approximation Theory from Euler to Bernstein*,

Boston: Birkhäuser, (2006).

Sundarapandian, V., *Numerical Linear Algebra*, New Delhi: Prentice-Hall of India Private Limited, (2008).

Wang, P., Wu, Y. and Wiwatanapaphee, B., “An Extension of Method of Quasilinearization for Integro-Differential Equations”, *Int. J. Pure Appl. Math.*, 54 (1), 27-37, (2009).

Wazwaz, A. M., “A new algorithm for solving differential equations of Lane-Emden type”, *Appl. Math. Comput.*, 118, 287-310, (2001).

Yalçınbaş, S., Sezer, M. and Sorkun, H. H., “Legendre polynomial solutions of high-order linear Fredholm integro-differential equations”, *Appl. Math. Comput.*, 210, 334-349, (2009).

Yang, C. and Hou, J., “A numerical method for Lane-Emden equations using Chebyshev polynomials and the collocation method”, *Int. Conf. Comput. Inform. Sci.*, 97-100, (2010).

Yousefi, S. A. and Behroozifar M., “Operational Matrices of Bernstein Polynomials and Their Applications”, *Internat. J. Systems Sci.*, 41 (6), 709–716, (2010).

Yousefi, S. A. and Dehghan, B. M., “Bernstein Ritz-Galerkin method for solving an initial-boundary value problem that combines Neumann and integral condition for the wave equation”, *Numer Meth. Part. D. E.*, 26, 1236-1246, (2009).

Yüksel, G., Gülsu, M. and Sezer, M., “A Chebyshev polynomial approach for high-order linear Fredholm-Volterra integro-differential equations”, *GU. J. Sci.*, 25 (2), 393-401, (2012).

Yüzbaşı, Ş., Şahin, N. and Yildirim, A., “A collocation approach for solving high-order linear Fredholm–Volterra integro-differential equations”, *Math. Comput. Model.*, 55, 547-563, (2012).

9. EKLER

EK A

Örnek 5.2.1. ile verilen

$$y^{(4)} + y^{(3)} = x - 1; \quad x \in [0, 1]$$

$$y(0) = 1, \quad y'(0) = -1, \quad y''(0) = 2, \quad y'''(0) = -2$$

başlangıç değer probleminin, Bölüm 2'de değinilen genelleştirilmiş Bernstein polinomlarına dayalı sıralama yöntemi ile çözümünü için Matlab programında geliştirilen örnek algoritma aşağıdaki biçimdedir:

```
clear all
clc
syms x
n=input('n degeri giriniz:');
% Denklemin mertebesi
m=4;
% Denklemin tanımlı olduğu aralığın uç noktaları
a=0;
b=1;
% Sıralama noktaları seçimi
i=0:n;
col=a+(b-a)*i/n;
% Matrislerin boyutları
P=zeros(n+1,n+1); G=zeros(n+1,1); N=zeros(n+1,n+1);
% Sıralama noktaları üzerinde genelleştirilmiş Bernstein polinomları ve baz
formlarının tanımı
for j=1:n+1;
    p(j)=1/(b-a)^n*factorial(n)/(factorial(j-1)*factorial(n-j+1))
```

```

        *(x-a)^(j-1)*(b-x)^(n-(j-1));
    P(i+1,j)=subs(p(j),col(i+1));
end
P;
% Denklemden yer alan kaynak fonksiyonunun sıralama noktaları üzerinde G
matrisi ile gösterimi
for i=1:n+1
    G(i)=col(i)-1;
end
G;
% Teorem 2.1.3 ile verilen N matrisinin sıralama noktaları üzerinde gösterimi
for i=1:n+1
    for j=1:n+1
        if i==j-1
            N(i,j)=(n-i+1)/(b-a);
        elseif i==j;
            N(i,j)=(2*(i-1)-n)/(b-a);
        elseif i==j+1
            N(i,j)=-(i-1)/(b-a);
        end
    end
end
N;
% Teorem 2.2.1 gereğince elde edilen W katsayılar matrisinin gösterimi
W=P*N^4+P*N^3;
L0=1;
L1=-1;
L2=2;
L3=-2;
U0=P(1,:);
U1=U0*N;
U2=U1*N;

```

```

U3=U2*N;
% Silmeden Ekleme tekniği
WW=[W;U0;U1;U2;U3];
GG=[G;L0;L1;L2;L3];
% Arttırılmış matrisin cözümü
Y=linsolve(WW,GG);
% İlk satırları silerek ekleme tekniği
i=0:n-m;
w=W(i+m+1,:);
g=G(i+m+1,:);
WW=[U0;U1;U2;U3;w];
GG=[L0;L1;L2;L3;g];
Y=linsolve(WW,GG);
% Baştan ve sondan silerek ekleme tekniği
i=0:n-m;
w=W(i+m-1,:);
g=G(i+m-1,:);
WW=[U0;U1;w;U2;U3];
GG=[L0;L1;g;L2;L3];
Y=linsolve(WW,GG);
% Son satırları silerek ekleme tekniği
i=0:n-m;
w=W(i+1,:);
g=G(i+1,:);
WW=[w;U0;U1;U2;U3];
GG=[g;L0;L1;L2;L3];
Y=linsolve(WW,GG);
% Ortadan silerek ekleme tekniği
j=1:n+1;
for i=1:n
    if n==2*i
        W(n/2-1,j)=U0;
    end
end

```

```

W(n/2,j)=U1;
W(n/2+1,j)=U2;
W(n/2+2,j)=U3;
G(n/2-1)=L0;
G(n/2)=L1;
G(n/2+1)=L2;
G(n/2+2)=L3;
elseif n==2*i+1
W((n+1)/2-1,j)=U0;
W((n+1)/2,j)=U1;
W((n+1)/2+1,j)=U2;
W((n+1)/2+2,j)=U3;
G((n+1)/2-1)=L0;
G((n+1)/2)=L1;
G((n+1)/2+1)=L2;
G((n+1)/2+2)=L3;
end
end
W;
Y=linsolve(W,G);
% Problemin üretilen yöntem ile elde edilen yaklaşık çözümü
y_n=p*Y;
%Problemin gerçek çözümü
y=1-x+x^2-x^3/3+x^4/24;
% Sıralama noktaları üzerinde mutlak hata
e_n=abs(subs(y-y_n,col));
fprintf('e_n=%1.2g\n',e_n);
% Sıralama noktaları üzerinde maksimum hata
e_max=norm(e_n,inf);
fprintf('e_max=%1.2g\n',e_max);
% Sıralama noktaları üzerinde bağıl hata
e_bagil=e_n/abs(subs(y,col));

```



```
fprintf('e_bagil=%1.2g\n',e_bagil);
% Sıralama noktaları üzerinde ortalama hata
e_ort=mae(e_n);
fprintf('e_ort=%1.2g\n',e_ort);
% Sıralama noktaları üzerinde ortalama kare hata
e_kare=mse(e_n);
fprintf('e_kare=%1.2g\n',e_kare);
Sıralama noktaları üzerinde ortalama kare hatanın karekökü
e_kok=sqrt(e_kare);
fprintf('e_kok=%1.2g\n',e_kok);
Katsayılar matrisinin koşul sayısı
K=cond(WW);
fprintf('K=%1.2g\n',K);
```

EK B

Örnek 5.3.6'da $y(0) = 0$ başlangıç koşulu ile verilen $x, t \in [0, 1]$ olmak üzere

$$y'(x) = -y(x) + 2x + x^2 + \frac{x^5}{10} - \frac{1}{32} + \frac{1}{4} \int_0^1 ty^3(t) dt - \frac{1}{2} \int_0^x y^2(t) dt$$

lineer olmayan Fredholm-Volterra integrodiferansiyel denkleminin, Bölüm 3'te bahsedilen genelleştirilmiş Bernstein polinomlarına dayalı sıralama yöntemi ile çözümü için Matlab programında geliştirilen örnek algoritma aşağıdaki biçimdedir:

```
clear all
clc
syms t
n=input('n degeri giriniz:');
a=0;
b=1;
i=0:n;
col=a+(b-a)*i/n;
P=zeros(n+1,n+1);F=zeros(n+1,n+1);V=zeros(n+1,n+1);
N=zeros(n+1,n+1);G=eye(n+1,n+1);H=zeros(n+1,1);
for j=1:n+1;
    p(j)=1/(b-a)^n*factorial(n)/(factorial(j-1)*factorial(n-j+1))
        *(t-a)^(j-1)*(b-t)^(n-j+1);
    P(i+1,j)=subs(p(j),col(i+1));
end
P;
for i=1:n+1
    for j=1:n+1
        if i==j-1
            N(i,j)=(n-i+1)/(b-a);
        elseif i==j;
```

```

        N(i,j)=(2*(i-1)-n)/(b-a);
elseif i==j+1
        N(i,j)=-(i-1)/(b-a);
end
end
end
N;
% Problemin gerçek çözümü
y=t^2;
% İlk iterasyon fonksiyonunun seçimi
% y0=0;
% y0=t;
s=1:10;
t_s=s/10;
% İterasyon ile denklemin yaklaşık çözümünü bulma işlemleri
r=0;
total=4;
while r < total
for i=1:n+1
        for j=1:n+1
                H(i)=double(int(y0^2,t,0,col(i)))/2-double(int(t*y0^3,t,0,1))/2
                +2*col(i)+col(i)^2+(col(i)^5/10)-(1/32);
                F(i,j)=3*double(int(t*y0^2*p(j),t,0,1));
                V(i,j)=2*double(int(y0*p(j),t,0,col(i)));
        end
end
end
W=G*P+G*P*N-1/4*F+1/2*V;
U0=P(1,:);
L0=0;
WW=[W;U0];
HH=[H;L0];
Y=linsolve(WW,HH);

```

```
% Problemin, üretilen yöntem ile elde edilen yaklaşık çözümü
    y_n=p*Y;
% t_s noktaları üzerinde hesaplanan mutlak hata
    e_n=abs(subs(y-y_n,t_s));
% r. iterasyon fonksiyonu için sıralama noktaları üzerinde mutlak hata
    E_r=abs(subs(y_n-y0,col));
    y0=y_n;
    r=r+1;
    fprintf('r=%1.0f\n',r);
    fprintf('e_n=%1.2g\n',e_n);
    fprintf('E_r=%1.2g\n',E_r);
end
```

9. ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı : Neşe İŞLER ACAR
Doğum Yeri ve Tarihi : MARMARİS / 02.03.1984
Lisans Üniversitesi : Ankara Üniversitesi
Yüksek Lisans Üniversitesi : Ankara Üniversitesi
Elektronik posta : ni57662@gmail.com
Emekvler Mah. Farabi Sok.
İletişim Adresi : Çelik Apt. No:22
BURDUR

Yayın Listesi :

- İşler Acar, N. and Akyüz-Daşcıoğlu, A., “A Collocation Method for Lane-Emden Type Equations in terms of Generalized Bernstein Polynomials”, *Pion. J. Math. Math. Sci.*, 12, 81-97, (2014).
- Akyuz-Dascioglu, A. and Isler, N., “Bernstein collocation method for solving nonlinear differential equations”, *Math. Comput. Appl.*, 18, 293-300, (2013).
- Akyüz-Daşcıoğlu, A., İşler Acar, N. and Güler, C. “Bernstein Collocation Method for Solving Nonlinear Fredholm-Volterra Integrodifferential Equations in the Most General form”, *J. Appl. Math.*, doi:10.1155/2014/134272, (2014).
- Akyüz-Daşcıoğlu, A. and Isler Acar, N., “Bernstein Collocation Method for Solving Linear Differential Equations”, *GU. J. Sci.*, 26, 527-534, (2013).
- Işık, Ö., Üntüvar, M. Ç., Yel, G. and İşler, N., “Studies on generalization of special equations at the q -integers”, *Int. J. Math. Comput.* 11, 143–155, (2011).

Konferans listesi :

• Akyüz-Daşcıoğlu, A. and Acar Isler, N., “A collocation method for solution of Lane-Emden type equations in terms of generalized Bernstein polynomials” International Congress in Honour of Proffesor Ravi P. Agarwal 2014 (Uludağ Üniversitesi)

• Akyuz-Dascioglu, A. and Isler, N., “Bernstein Collocation Method for Solving Nonlinear Differential Equations” 4th International Conference on Mathematical and Computational Applications 2013 (Celal Bayar Üniversitesi)

• Akyuz-Dascioglu, A. and Acar Isler, N., “A collocation method for linear Fredholm-Volterra integro-differential equations in the most general form by means of generalized Bernstein polynomials” 2nd International Eurasian Conference on Mathematical Sciences and Applications 2013 (Sarajevo-Bosna Hersek)

• Akyuz-Dascioglu, A. and Isler, N., “Bernstein Collocation Approach for Solving Linear Integral Equations” International Conference on the Theory, Methods and Applications of Nonlinear Equations 2012 (Teksas A&M Üniversitesi-ABD)

• Akyuz-Daşcıoğlu, A. and İşler, N., “Bernstein Collocation method for Solving Linear Differential Equations” International Conference on Applied Analysis and Algebra 2012 (Yıldız Teknik Üniversitesi)

• İşler, N., Işık, Ö. and Duman, B., “Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü Öğrencilerinin Problem Çözme Becerileri ile Matematiğe Karşı Tutum Puanları Arasındaki İlişkinin Çeşitli Değişkenler Açısından İncelenmesi” International Conference on New Horizons in Education 2010 (Famagusta-Kuzey Kıbrıs Türk Cumhuriyeti)

• Ünüvar, M. Ç., Işık, Ö., İşler, N. and Yel, G., “Özel eşitliklerin q -integer noktalarında genelleştirilmesi üzerine çalışmalar” 5. Ankara Matematik Günleri Sempozyumu 2010 (TOBB Ekonomi ve Teknoloji Üniversitesi)