

**T.C.
PAMUKKALE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI**

**KORTEWEG-DE VRIES DENKLEMİNİN BAZI ANALİTİK
VE YAKLAŞIK ÇÖZÜMLERİ**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

SEVİL ÇULHA

DENİZLİ, ARALIK - 2014

T.C.
PAMUKKALE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI
UYGULAMALI MATEMATİK



KORTEWEG-DE VRIES DENKLEMİNİN BAZI ANALİTİK
VE YAKLAŞIK ÇÖZÜMLERİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

SEVİL ÇULHA

DENİZLİ, ARALIK - 2014

KABUL VE ONAY SAYFASI

SEVİL ÇULHA tarafından hazırlanan “KORTEWEG-DE VRIES DENKLEMİNİN BAZI ANALİTİK VE YAKLAŞIK ÇÖZÜMLERİ” adlı tez çalışmasının savunma sınavı 22.12.2014 tarihinde yapılmış olup aşağıda verilen jüri tarafından oy birliği ile Pamukkale Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı’nda Yüksek Lisans Tezi olarak kabul edilmiştir.

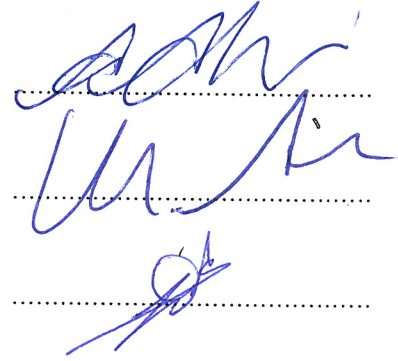
Jüri Üyeleri

İmza

Danışman
Prof. Dr. Ayşegül DAŞCIOĞLU

Üye
Prof. Dr. Muzaffer ADAK

Üye
Doç. Dr. Handan ÇERDİK YASLAN



Pamukkale Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun
31/12/2014 tarih ve 49/15 sayılı kararıyla onaylanmıştır..



Prof. Dr. Orhan KARABULUT

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

Bu tezin tasarımı, hazırlanması, yürütülmesi, araştırmalarının yapılması ve bulgularının analizlerinde bilimsel etiğe ve akademik kurallara özenle riayet edildiğini; bu çalışmanın doğrudan birincil ürünü olmayan bulguların, verilerin ve materyallerin bilimsel etiğe uygun olarak kaynak gösterildiğini ve alıntı yapılan çalışmalara atfedildiğine beyan ederim.



SEVİL ÇULHA

ÖZET

KORTEWEG-DE VRIES DENKLEMİNİN BAZI ANALİTİK VE YAKLAŞIK ÇÖZÜMLERİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

SEVİL ÇULHA

PAMUKKALE ÜNİVERSİTESİ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

UYGULAMALI MATEMATİK

(TEZ DANIŞMANI: PROF. DR. AYŞEGÜL DAŞCIOĞLU)

DENİZLİ, ARALIK - 2014

Bu yüksek lisans tezi üç bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölümde Korteweg-de Vries (KdV) denkleminin tarihsel gelişme sürecinden bahsedilmiş, türleri üzerinde durulmuş ve solitonlar hakkında bilgi verilmiştir. Daha sonra da KdV denkleminin varlık ve teklifi incelenmiştir.

İkinci bölümde çeşitli KdV denklemleri üzerinde sırasıyla bäcklund dönüşüm, ters dönüşüm, sinüs-kosinüs, tanh, üstel fonksiyon, (G'/G) -açılım ve Jacobi eliptik fonksiyon açılım metotları kullanılarak analitik çözümlere yer verilmiştir.

Üçüncü bölümde ise farklı KdV denklemleri üzerine sırasıyla Adomian ayrışım, varyasyonel iterasyon, diferansiyel dönüşüm, indirgenmiş diferansiyel dönüşüm, homotopi pertürbasyon ve homotopi analiz yöntemleri uygulanmıştır.

ANAHTAR KELİMELELER: Korteweg-de Vries denklemi, Solitonlar, Analitik ve yaklaşık çözümler

ABSTRACT

SOME ANALYTICAL AND APPROXIMATE SOLUTIONS OF KORTEWED-DE VRIES EQUATION

MSC THESIS

SEVİL ÇULHA

PAMUKKALE UNIVERSITY INSTITUTE OF SCIENCE

MATHEMATICS

APPLIED MATHEMATICS

(SUPERVISOR: PROF. DR. AYŞEGÜL DAŞCIOĞLU)

DENİZLİ, DECEMBER 2014

This thesis is consisted of three chapters.

In the first chapter, historical development process of Korteweg-de vries equation is mentioned, types of equation are emphasized and information about solitons is given. Then, existence and uniqueness of Korteweg-de Vries (KdV) equation is explained.

In the second chapter, analytical solutions are adverted by using a bäcklund transform, inverse scattering transform, sine-cosine, tanh, exponential function, (G'/G) -expansion, Jacobi elliptic function expansion methods on various KdV equations in respectively.

In the third chapter, approximate solutions are obtained by using Adomian decomposition, variational iteration, differential transform, reduced differential transform, homotopy perturbation and homotopy analysis methods on different kinds of the KdV equations.

KEYWORDS: Korteweg-de Vries equation, Solitons, analytical and approximate solutions

İÇİNDEKİLER

Sayfa

ÖZET.....	i
ABSTRACT.....	ii
İÇİNDEKİLER.....	iii
ŞEKİL LİSTESİ.....	iv
TABLO LİSTESİ.....	v
SEMBOLLER VE KISALTMALAR LİSTESİ.....	vi
ÖNSÖZ.....	vii
1. GİRİŞ.....	1
1.1 KdV Denkleminin Tarihsel Gelişim Süreci.....	1
1.2 KdV Denkleminin Türleri.....	3
1.3 Solitonlar.....	5
1.4 KdV Denklemi İçin Varlık ve Teklik.....	8
2. KdV DENKLEMİ İÇİN TAM ÇÖZÜM YÖNTEMLERİ.....	10
2.1 Bäcklund Dönüşüm Yöntemi.....	11
2.2 Ters Saçılma Dönüşüm Yöntemi.....	16
2.3 Sinüs-Kosinüs Yöntemi.....	22
2.4 Tanh Yöntemi.....	24
2.5 Üstel Fonksiyon Yöntemi.....	28
2.6 (G'/G)-Açılım Yöntemi.....	33
2.7 Jacobi Eliptik Fonksiyon Açılım Yöntemi.....	37
3. KdV DENKLEMİ İÇİN YAKLAŞIK YÖNTEMLER.....	40
3.1 Adomian Ayrışım Yöntemi.....	40
3.2 Varyasyonel İterasyon Yöntemi.....	45
3.3 Diferansiyel Dönüşüm Yöntemi.....	48
3.4 İndirgenmiş Diferansiyel Dönüşüm Yöntemi.....	52
3.5 Homotopi Pertürbasyon Yöntemi.....	56
3.6 Homotopi Analiz Yöntemi.....	60
4. SONUÇ VE ÖNERİLER.....	66
5. KAYNAKLAR.....	67
6. ÖZGEÇMİŞ.....	72

ŞEKİL LİSTESİ

Sayfa

- Şekil 1.1:** 1995’de Union kanalında Russell’in keşfettiği dalğanın canlandırılması... 2
- Şekil 1.2:** Soliter dalga..... 6
- Şekil 1.3:** İki solitonun etkileşimi ($c_1 > c_2$, $t_2 > t_1$) 7
- Şekil 2.1:** Aykırı küresel yüzey 11
- Şekil 2.2:** Bianchi’nin değiştirilebilirlik teoreminin diyagram ile temsil edilişi. 15
- Şekil 2.3:** KdV denklemi için ters saçılma dönüşümünün gösterilimi. 20
- Şekil 2.4:** Bir lineer kısmi diferansiyel denklem için Fourier dönüşüm kullanılıminin gösterilimi..... 21
- Şekil 3.1:** $k = 2$, $t = 0$ ve $-4 \leq x \leq 4$ için KdV denkleminin tek soliton çözümü... 44
- Şekil 3.2:** $t = 0.008$, $-2 \leq x \leq 5$ için KdV denkleminin iki-soliton çözümü. 45
- Şekil 3.3:** Kesik nokta $u(0.01, 0.01)$, düz doğru $\ddot{u}(0.01, 0.01)$ ve kesik doğru $\ddot{u}(0.01, 0.01)$ olmak üzere 8. mertebeden yaklaşımın h eğrisi. 63
- Şekil 3.4:** $h = -1$ olduğunda (a) tam çözüm ve (b) HAM çözüm olmak üzere, $u(x, t)$ ’nin HAM çözümü ile tam çözümünün karşılaştırılması..... 65
- Şekil 3.5:** $h = [-0.5; -0.75; -1]$ için 8. mertebeden yaklaşımla elde edilen sonuçlardır. Burada tam çözüm düz doğruyu, $h = -0.5$ için büyük kesikli doğruyu, $h = -0.75$ için küçük kesikli doğruyu ve $h = -1$ için küçük kesikli doğruyu temsil eder. 65

TABLO LİSTESİ

Sayfa

Tablo 2.1: Genel KdV denkleminin n değerleri için spesifik tam çözümleri.....10

Tablo 3.1: Diferansiyel dönüşüm tablosu.....49

Tablo 3.2: İndirgenmiş diferansiyel dönüşüm tablosu.53

Tablo 3.3: $h = -1$ için HAM çözüm ile tam çözümün karşılaştırılması64

SEMBOLLER VE KISALTMALAR LİSTESİ

\sum_b^a	:	Belirli Toplam
\int_b^a	:	Belirli İntegral
D	:	Türev Operatörü
exp	:	Üstel Fonksiyon
\mathbb{R}	:	Reel Sayı
λ	:	Lagrange Çarpanı
p	:	Gömme Parametresi
$S(t)$:	Saçılma Verisi
$C_n(t)$:	Normalleştirme Sabiti
O	:	Denklem Derecesi
KdV	:	Korteweg-de Vries
mKdV	:	Değiştirilmiş (modified) Korteweg-de Vries
gKdV	:	Genelleştirilmiş (generalized) Korteweg-de Vries
HAM	:	Homotopi Analiz Metodu

ÖNSÖZ

Tezimin konusunu seçmemde bana yardımcı olan ve çalışmalarım süresince her türlü imkânı sağlayan, bilgi ve tecrübelerini benimle paylaşan sayın hocam Prof. Dr. Ayşegül DAŞCIOĞLU'na sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Ayrıca çalışmalarım sırasında maddi ve manevi desteklerini esirgemeyen aileme minnet borçluyum.

Sevil ÇULHA

ÖNSÖZ

Tezimin konusunu seçmemde bana yardımcı olan ve çalışmalarım süresince her türlü imkânı sağlayan, bilgi ve tecrübelerini benimle paylaşan sayın hocam Prof. Dr. Ayşegül DAŞCIOĞLU'na sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Ayrıca çalışmalarım sırasında maddi ve manevi desteklerini esirgemeyen aileme minnet borçluyum.

Sevil ÇULHA

1. GİRİŞ

Korteweg-de Vries (KdV) denklemi sığ su dalgaları, yoğun tabakalı okyanuslardaki büyük iç dalgaları, plazmadaki iyon ses dalgaları, kristal kafesteki¹ ses dalgaları gibi önemli fiziksel sistemlerde ortaya çıkmış bir lineer olmayan kısmi diferansiyel denklemdir.

1.1 KdV Denkleminin Tarihsel Gelişim Süreci

KdV denkleminin ortaya çıkışı ilk olarak 1834'te Edinburgh-Glasgow kanalında Russell²'in gözlemiyle başlar. Russell bu gözlemini 1844'te İngiliz derneğinin 14. toplantısında "Report on Waves" bildirisinde şöyle ifade etmiştir:

"Onunla ilk karşılaştığım durumu anlatarak olaya en iyi girişi yapabileceğime inanıyorum. Dar bir kanalda iki beygir gücüyle geçmekte olan botun hareketini gözlemliyordum. Bot aniden durduğunda kanaldaki su kütlesi durmadı. Bu su kütlesi şiddetli çalkantı ile botun baş kısmında birikti ve sonra da aniden arka tarafa yayılmaya başladı. Büyük bir hızla öne doğru tek başına bir su dalgasının geldiğini, bu yuvarlanmış, belirgin ve iyi tanımlı su kütlesinin hızı azalmadan ve şekli değişmeden kanal boyunca ilerleyişine devam ettiğini fark ettim. Onu at sırtında takip ettim ve ona yetiştiğimde saatte yaklaşık 8-9 mil hızla ilerleyişine devam ettiğini gördüm. Otuz metre uzunluğunda ve yarım metre yüksekliğindeki orijinal şeklini korudu. Dalganın boyu giderek azaldı ve bir veya iki mil takip ettikten sonra kanalın dönemecinde kaybettim." (Drazin ve Johnson 1989).

Russell gözlemlediği bu dalgayı "büyük translasyon dalgası (great wave of translation)" olarak isimlendirmiştir. Ayrıca Russell 1845'de yayınladığı bildirisinde büyük genlikli dalgaların küçük olanlara göre daha hızlı olduğunu göstermiştir (Russell 1845).

¹ Bir katının atom veya iyonları kendini üç boyutta yineleyen bir örüntü içinde dizilmişse, bu yapıya kristal kafes denir.

² John Scott Russell (1808-1882), İskoçyalı, gemi inşaat mühendisi.



Şekil 1.1: 1995’de Union Kanal’ında Russell’in keşfettiği dalganın canlandırılması

Bilim adamları Russell’dan onlarca yıl sonra dalgaların farklı özelliklerini keşfedebilmiş, yayılış ve birbirinden geçiş özelliklerini fark edebilmişlerdir. Nitekim Russell’dan sonra 1847’de Stokes³ ve 1872’de Boussinesq⁴ gibi birçok matematikçi bu dalgalardan bahsetmiştir (Özdemir 2009).

Russell’in keşfinden 60 yıl sonra, şu an Korteweg-de Vries denklemi olarak bildiğimiz denklem ilk kez Korteweg⁵’in öğrencisi olan Vries⁶’in Amsterdam Üniversitesi’nde 1 Aralık 1894’te savunulan doktora tezinde görülmüştür (Kox 1995).

1995 yılında Union Kanal’ında Russell’in keşfettiği dalga tekrar canlandırılmıştır (Porter ve diğ. 2009). Bu Şekil 1.1’de gösterilmiştir.

³ George Gabriel Stokes (1819-1903), İrlandalı, matematikçi ve fizikçi.

⁴ Joseph Valentin Boussinesq (1842-1929), Fransız, matematikçi ve fizikçi.

⁵ Diederik Johannes Korteweg (1848-1941), Hollandalı matematikçi ülkesinde “adeta efsaneleşen bir figür, Amsterdam Doğal Bilimler Fakültesi’nin hayatta kalan son kahramanı” olarak nitelendirilmiştir. Fizikçi Van der Walls rehberliğinde doktora tezini yazmış ve sonraki yıllarda birlikte çalışmışlardır. Yalnız matematikle değil bunun yanında mekanik ve astronomi konularıyla da ilgilenmiştir. En ünlü öğrencisi, yeteneğiyle tanınmış olan soyut matematikçi L.E.J. Brouwer’dır.

⁶ Gustav de Vries (1866-1934), Hollandalı, matematikçi, D.J. Korteweg’in doktora öğrencisi.

Günümüzde KdV denklemi olarak bilinen denklemin en basit formu

$$u_t + auu_x + u_{xxx} = 0, \quad t > 0, \quad -\infty < x < \infty \quad (1.1)$$

şeklinde üçüncü mertebeden lineer olmayan bir denklemdir. KdV denkleminde alt simgeler kısmi türevleri belirtir. a bir parametredir ve yaygın olarak $a = \pm 1$ veya $a = \pm 6$ değerleri ile kullanılır. u_t bir boyutlu yayılan dalganın zaman değişimini niteler, lineer olmayan terim uu_x dalganın yükselişini, u_{xxx} lineer terimi dalganın yayılma veya dağılmasını ifade eder (Wazwaz 2009).

Korteweg ve Vries'in denklem üzerindeki çalışmasından sonra, Zabusky ve Kruskal'ın (1965) KdV denkleminin soliter dalga çözümlerinin önemli özelliklerini keşfetmesi, KdV'ye göre Cauchy problemlerinin çözümleri için Ters Saçılma dönüşümünün Gardner, Greene, Kruskal ve Miura tarafından bulunması, modern lineer olmayan matematik biliminin gelişmesinde en çok çığır açan iki gelişme olarak durmaktadır. İntegrallenebilen sistemlerin tamamı 1967'ye kadar keşfedildi. KdV kesinlikle en çok anlaşılan, makroskopik olay ve süreçlerin uygulamaları için muhtemelen en önemlisidir (Crighton 1995).

1.2 KdV Denkleminin Türleri

Standart KdV denklemi üçüncü mertebeden lineer olmayan bir denklemdir. Bununla birlikte KdV denklemleri 3, 5, 7 veya daha fazla mertebede görülebilir. Bu bölümde en çok karşımıza çıkan üçüncü mertebeden KdV denklemleri üzerinde duracağız. uu_x 'in lineer olmama durumunda değişimler içeren diğer değiştirilmiş türlerini de inceleyeceğiz. Daha ayrıntılı bilgi için Wazwaz (2009) kaynağına bakılabilir. Her bir çeşidin tam analizini şimdi irdeleyelim.

x uzay ve t de zaman değişkeni olmak üzere $u(x,t)$ fonksiyonunun üçüncü mertebeden Korteweg-de Vries denklem ailesi

$$u_t + f(u)u_x + u_{xxx} = 0 \quad (1.2)$$

şeklinindedir. $f(u)u_x$ ve u_{xxx} 'in katsayıları olarak sabit sayılar kullanılabilir. Ama bu sabit sayılar bazen gelmeyebilir. (1.2) denklemi aşağıdaki formlarda görülebilir.

a) Tam integrallenebilir (complete integrability) olması için uygun olan ± 6 çarpanı ile yani $f(u) = \pm 6u$ için

$$u_t \pm 6uu_x + u_{xxx} = 0 \quad (1.3)$$

standart KdV denklemlerinden birini elde ederiz. Ayrıca $f(u) = \pm u$ da kullanılabilir. Tam integrallenebilmesi KdV denkleminin N -soliton çözümlerine sahip olması anlamına gelir.

b) $f(u) = \alpha$ ve u_{xxx} 'in katsayısı β olmak üzere (1.3) denkleminin genelleştirilmiş hali

$$u_t + \alpha uu_x + \beta u_{xxx} = 0 \quad (1.4)$$

şeklindedir.

c) $f(u) = 6u^2$ için değiştirilmiş (modified) KdV (mKdV) denklemi diye adlandırdığımız denklem

$$u_t + 6u^2u_x + u_{xxx} = 0 \quad (1.5)$$

şeklinde verilir. mKdV denklemi, KdV denklemiyle her ikisinin de tam integrallenebilir ve her biri sonsuz sayıda korunumlu büyüklükler olması bakımından özdeşdir. mKdV denklemi elektrik devrelerinde ve çok bileşenli plazmalarda görülür. mKdV denklemi rasyonel fonksiyon formundaki cebirsel soliton çözümlerini verir. mKdV denkleminin cebirsel solitonların kararlılık ve kararsızlık durumları derinlemesine Ablowitz ve Clarkson (1991), Ablowitz ve Segur (1981) tarafından araştırılmıştır.

d) $f(u) = \alpha u^n$, $n \geq 3$ için genelleştirilmiş (generalized) KdV (gKdV) diye adlandırdığımız denklem

$$u_t + \alpha u^n u_x + u_{xxx} = 0, \quad n \geq 3 \quad (1.6)$$

şeklinde verilir. KdV ve mKdV denklemlerinin aksine genelleştirilmiş KdV denklemi $n \geq 3$ için integrallenemez ve dolayısıyla çoklu soliton çözümleri vermez.

e) $f(u) = \alpha u_x$ için potansiyel KdV denklemi diye adlandırdığımız denklem

$$u_t + \alpha(u_x)^2 + u_{xxx} = 0 \quad (1.7)$$

şeklinde verilir. Potansiyel KdV denklemi standart KdV denklemindeki $u = v_x$ düzenlenmesi ve oluşan denklemi x 'e göre integralenmesinden elde edilebilir (Drazin ve Johnson 1989).

f) $f(u) = 2\alpha u - 3\beta u^2$, $\alpha, \beta > 0$ için Gardner denklemi veya KdV ve mKdV denklemlerinin birleşimi diye adlandırdığımız denklem

$$u_t + (2\alpha u - 3\beta u^2)u_x + u_{xxx} = 0 \quad (1.8)$$

şeklinde verilir. Gardner denklemi plazma fiziği, akışkan fiziği, kuantum alan teorisi gibi fiziğin çeşitli alanlarında oldukça kullanılmaktadır. Denklem okyanus dalgalarında önemli bir rol oynar. Gardner denklemi, iç dalgaları açıklamakta ve tanh tipli çözümleri oldukça ilginç kabul etmektedir. Gardner denklemi literatürde bütün yönleriyle araştırılmaktadır. Çünkü denklem nonlinear olay türlerinin modellenmesinde kullanılmaktadır.

g) $f(u) = \alpha u^n - \beta u^{2n}$ için iki lineer olmayan ter ile diğer genelleştirilmiş KdV denklemi olan

$$u_t + (\alpha u^n - \beta u^{2n})u_x + u_{xxx} = 0 \quad (1.9)$$

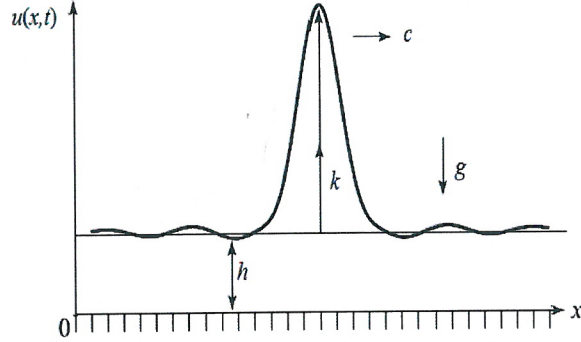
elde ederiz. Bu son denklem nonlinear uzun tipli ses dalgalarının yayılımını modeller. (1.9) denklemi karakteristik yön boyunca nonlinear dalgaların yayılımında güçsüz dağıtıcı etkilerin tanımı için yaklaşık model verir. KdV ve mKdV denkleminin birleşimi olarak da isimlendirilen iyi bilinen Gardner denklemi, (1.9) denkleminde $n = 1$ alınarak da elde edilebilir. Ayrıca (1.9) denklemi birçok bilimsel uygulamalarda görülür ve solitonların çeşitliliğine neden olur.

1.3 Solitonlar

John Scott Russell 1834'te gözlemlediği Şekil 1.2'deki tek (soliter) dalga'yı ve gözlemlerini "Report on Waves" adlı makalesinde anlatmıştır. Yaptığı birçok deneysel çalışmadan sonra, birinci mertebeden dalğanın hızı için

$$c = \sqrt{g(h+k)} \quad (1.10)$$

formunda bir bağıntı bulmuştur. g yer çekimi ivmesini, h durgun sıvının derinliğini, k maksimum dalga yüksekliğini (durgun yüzeyin üzerindeki doruk) ve c de soliter dalganın iletim hızını temsil etmektedir. Dolayısıyla soliter dalganın hızı, genliği ile orantılı olduğu söylenir.



Şekil 1.2: Soliter dalga

Daha sonra Korteweg ve de Vries tarafından soliter dalga çözümü olarak

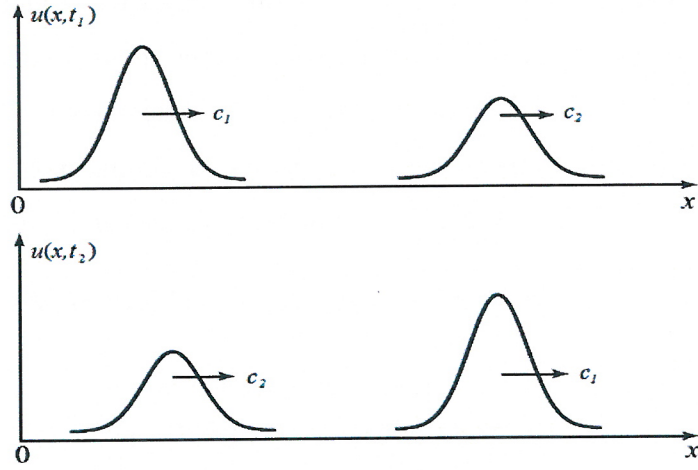
$$u(x,t) = f(x-ct) \quad (1.11)$$

formu öne sürüldü. Burada c sabiti dalga yayılım hızını ve f herhangi bir fonksiyon belirtmektedir. Ayrıca $c > 0$ için dalga pozitif x yönünde hareket ederken, $c < 0$ için dalga negatif x yönünde hareket eder (Wazwaz 2009).

Korteweg ve de Vries'in bulduğu soliter dalga çözümü, lineer olmama ve dağılım arasındaki hassas bir denge sonucu oluşmuştu. Hollandalı matematikçiler ayrıca denklemin periyodik çözümlerini bulmuşlar ama genel çözümlerini üretmede başarısız olmuşlardı. Böylece onların çalışmaları ve Russell'in gözlemlerinin hepsi anlaşılmazlığa düşmüştü. Bundan dolayı da matematikçiler, fizikçiler ve mühendislerin su dalgalarıyla ilgili çalışmaları dikkate alınmamıştı. Nihayet 1960'larda Zabusky ve Kruskal KdV denkleminin soliter dalga çözümlerinin önemli özelliklerini keşfetmişlerdi. KdV denkleminin analitik çözümü zor olduğundan başlangıç koşulları ile ardışık yaklaşım gözlenmesi için nümerik simülasyonlar kullanmışlardı. Zabusky ve Kruskal KdV denkleminin çözümlerini belirtmede,

soliter dalga terimleri için yaygın şekilde kullanılan *soliton* kelimesini kullandılar (Porter ve diğ. 2009).

Şekil 1.3'de gösterildiği gibi lineer olmayan dalgalar güçlü bir şekilde etkileşimde bulunabilir ve daha sonra hiçbir etkileşimde olmamış gibi yollarına devam ederler. İşte bu kimlikleri korunan ve değişmeden devam eden dalgalara *solitonlar* denilmektedir. Solitonların keşfinden sonraki yıllarda uzun süre çalışıldı. Böylece soyut ve uygulamalı matematiğin farklı dallarında ortaya çıkan bir sürü yeni görüşün açıklanmasını sağladı.



Şekil 1.3: İki solitonun etkileşimi ($c_1 > c_2$, $t_2 > t_1$)

Aslında solitonun geçerli ve tam tanımını vermek kolay değildir. Bununla birlikte soliton nonlineer denklem veya sistemlerin herhangi bir çözümü olarak ifade edilebilir. Solitonlar aşağıdaki ortak özelliklere sahiptir:

- (i) kalıcı formlu dalgayı temsil eder.
- (ii) azalacak ya da sonsuzda sabite yaklaşacak biçimde sınırlandırılmıştır.
- (iii) diğer solitonlarla güçlü bir şekilde etkileşime girebilir ve çarpışmadan etkilenmeden çıkar.

KdV denklemi ve diğer benzer denklemlerin içeriğinin soliter dalga olarak tek soliton çözümden bahsetmesi mümkündür. Ama çözümde birden fazlası gözüktüğü zamanlarda solitonlar diye adlandırılır. Bunu açıklamanın diğer bir yolu herhangi bir solitonun diğer solitondan ayrıldığı zaman solitonun soliter dalga olmasıdır. Ayrıca KdV dışındaki denklemler için soliter dalga çözümü sech^2

fonksiyonu olmayabileceğinden bahsetmeliyiz. Örneğin; sech fonksiyonu ve $\arctan(e^{ax})$ fonksiyonu ile de karşılaşabiliriz. Dahası KdV denklemleri gibi denklemler solitonlar olan soliter dalgalara sahipken, bazı nonlinear sistemler soliter dalgalara sahip ama solitonlara sahip değildir.

Daha geniş bilgi için Drazin ve Johnson (1989) kaynağına bakılabilir.

1.4 KdV Denklemi İçin Varlık ve Teklik

Miura, Gardner ve Kruskal (1968), KdV denkleminin dikkat edilmesi gereken özelliklerden bir tanesi olan enerji integrallerinin sonsuz sayıda var olduğunu gösterdiler. Daha sonra Kametaka (1969), Bona ve Smith (1975), KdV denklemi için başlangıç değer probleminin bir tek global çözümünün varlığını ispatladılar. Temam (1969), denklemin bir tek periyodik çözümü var olduğunu gösterdi.

Korteweg-de Vries denkleminin başlangıç değer problemini

$$\begin{aligned} u_t + uu_x + u_{xxx} &= 0, \quad t > 0 \\ u(x, 0) &= g(x), \quad -\infty < x < \infty \end{aligned} \quad (1.12)$$

şeklinde ele alalım (Drazin 1983). Başlangıç değer probleminin bir tek düzgün çözümünün var olduğunu ispatlamak için

$$n = 0, 1, 2, 3, 4 \quad \text{için} \quad \int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{d^n g}{dx^n} \right|^2 < \infty \quad (1.13)$$

koşulu (Bona ve Smith 1975), belirli bir özdeğer problem çözümüne sahip olması için de

$$\int_{-\infty}^{\infty} (1 + |x|) |g(x)| dx < \infty \quad (1.14)$$

koşulu (Faddeev 1958) kullanılır.

Başlangıç ve sınır değer problemi ise bir ucunda dalga yapıcıyla suyu içeren bir düzgün açık kanalın matematiksel modeli olarak düşünülebilir. Bu başlangıç ve sınır değer problemini

$$\begin{aligned}
&\mathbb{R}^+ \times (0, T) \text{ üzerinde, } u_t + u_{xxx} + uu_x = 0; \\
&x \in \mathbb{R}^+ \text{ için, } u(x, 0) = u_0, \\
&u(0, t) = 0 \text{ ve } x \rightarrow \infty \text{ için } u(x, t) \rightarrow 0
\end{aligned} \tag{1.15}$$

şeklinde ele alalım. Eğer $u_0, W_0^{1,2}(\mathbb{R}^+)^7$ içinde ise (1.15)'in bir zayıf global çözümü var olduğu gösterilir. $u_0, W_0^{6,2}(\mathbb{R}^+)$ içindeyken $\|u_0\|_{6,2}$ küçükse o zaman, $T = T_1$ ile $\mathbb{R}^+ \times (0, T_1)$ üzerinde (1.15)'in bir tek klasik çözümü vardır (Ton 1977).

u_{xxx} 'in işareti değiştiğinde başlangıç sınır değer problemini

$$\begin{aligned}
&R^+ \times (0, T) \text{ üzerinde, } u_t - u_{xxx} + uu_x = 0; \\
&u(x, 0) = u_0, \quad u(0, t) = u_x(0, t) = 0, \quad x \rightarrow \infty \quad u(x, t) \rightarrow 0
\end{aligned} \tag{1.16}$$

şeklinde ele alalım. Eğer $\|u_0\|_{2,2}$ küçük ve $T = T_1$ iken $u_0, W_0^{2,2}(\mathbb{R}^+)$ içinde ise $\mathbb{R}^+ \times (0, T_1)$ üzerinde (1.16)'nın bir tek zayıf çözümün var olduğu gösterilir. $u_0, W_0^{6,2}(\mathbb{R}^+)$ içindeyken çözüm klasiktir (Ton 1977).

Ayrıca KdV denkleminin

$$\begin{aligned}
&u_t - uu_x - u_{xxx} = f(x, t) \quad (x, t) \in \mathbb{R}^1 \times (0, \infty) \\
&u(x, 0) = g(x) \quad x \in \mathbb{R}^1
\end{aligned} \tag{1.17}$$

şeklindeki Cauchy problemi için varlık ve tekliline Kametaka (1969) kaynağına bakılabilir.

⁷ $D = \partial / \partial x$ olmak üzere, $W^{k,2}(\mathbb{R}^+) = \{u : 0 \leq j \leq k \text{ için } D^j u, L^2(\mathbb{R}^+) \text{ içindedir}\}$ bir Sobolev uzayı ve $\|u\|_{k,2} = \left\{ \sum_{j=0}^k \|D^j u\|^2 \right\}^{1/2}$ normu ile bir Hilbert uzayıdır. $W_0^{k,2}(\mathbb{R}^+)$, $\|\cdot\|_{k,2}$ normuna göre $C_0^\infty(\mathbb{R}^+)$ 'in (\mathbb{R}^+) içinde kompakt dayanakla bütün sonsuz diferansiyellenebilir fonksiyonlar ailesi tamlamasıdır.

2. KdV DENKLEMİ İÇİN TAM ÇÖZÜM YÖNTEMLERİ

Bu bölümde ele alınacak olan KdV denklemi genel olarak

$$u_t + 6u^n u_x + u_{xxx} = 0$$

formundadır. Burada $u = u(x, t)$ dalga fonksiyonudur. c , dalga yüzünün hızı olmak üzere bazı n değerleri için spesifik tam çözümler Tablo 2.1'deki biçimde belirlenir (Helal ve Mehanna 2007):

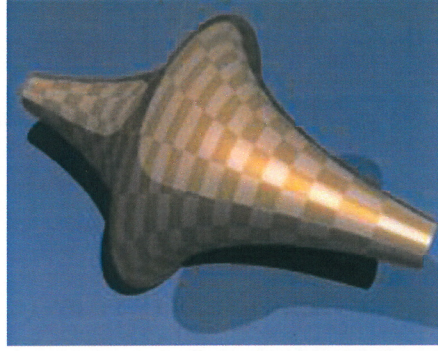
Tablo 2.1: Genel KdV denkleminin n değerleri için spesifik tam çözümleri

n	$u(x, t)$
1	$\frac{c}{2} \operatorname{sech}^2\left(\frac{\sqrt{c}}{2}(x-ct)\right)$
2	$\sqrt{c} \operatorname{sech}(\sqrt{c}(x-ct))$
3	$\sqrt[3]{\frac{5c}{2}} \operatorname{sech}^{\frac{2}{3}}\left(\frac{3}{2}\sqrt{c}(x-ct)\right)$
4	$\left(\frac{5c}{2}\right)^{\frac{1}{4}} \operatorname{sech}^{\frac{1}{2}}(2\sqrt{c}(x-ct))$
5	$\left(\frac{7c}{2}\right)^{\frac{1}{5}} \operatorname{sech}^{\frac{2}{5}}\left(\frac{5}{2}\sqrt{c}(x-ct)\right)$
6	$\left(\frac{14c}{3}\right)^{\frac{1}{6}} \operatorname{sech}^{\frac{1}{3}}(3\sqrt{c}(x-ct))$

Şimdi bu bölümde çeşitli KdV denklemleri üzerinde sırasıyla bäcklund dönüşüm, ters saçılma dönüşüm, sinüs-kosinüs, tanh, üstel fonksiyon, (G'/G) -açılım ve jacobi eliptik fonksiyon açılım metotları kullanılarak analitik çözümler elde edilecektir.

2.1 Bäcklund Dönüşüm Yöntemi

Bäcklund dönüşümleri, diferansiyel geometri ve diferansiyel denklemlerin teorilerinde kullanılmak için L. Bianchi¹ ve A.V Bäcklund² tarafından 1880'li yıllarda geliştirilmiştir. Bäcklund dönüşümlerinin çıkış noktası, Şekil 2.1'de gösterilen aykırı küresel yüzeylerin dönüşümleridir. Bäcklund dönüşümlerine en basit örnek Cauchy Riemann bağıntılarıdır³. Ayrıca Bäcklund dönüşümleri, ters saçılma metodunun uygulanabilmesiyle de ilişkilidir (Drazin 1983).



Şekil 2.1: Aykırı küresel yüzey

KdV denkleminin Bäcklund dönüşümüyle çözümünü ve nonlinear süperpozisyon prensibi ile de yeni çözümlerin elde edilmesini Drazin ve Johnson kaynağı (1989) ele alınarak verilecektir.

Miura dönüşümü,

$$u = v^2 + v_x \quad (2.1)$$

şeklinde ifade edilir. Eğer v ,

$$v_t - 6v^2 v_x + v_{xxx} = 0 \quad (2.2)$$

değiştirilmiş KdV denkleminin bir çözümü ise o zaman u ,

¹ Luigi Bianchi (1856-1928) İtalyan, matematikçi.

² Albert Victor Bäcklund (1845-1922) İsveçli, matematikçi ve fizikçi.

³ Bir gerçel değerli fonksiyon çifti $u(x, y)$ ve $v(x, y)$ için yazılan Cauchy Riemann bağıntıları $\partial u/\partial x = \partial v/\partial y$ ve $\partial u/\partial y = -\partial v/\partial x$ şeklindedir.

$$u_t - 6uu_x + u_{xxx} = 0 \quad (2.3)$$

KdV denkleminin bir çözümüdür. (2.1) dönüşümünü kullanarak (2.2) denkleminde yüksek mertebeli türevleri yok edebildiğimizden, (2.1) ve (2.2) denklemini KdV denklemi için Bäcklund dönüşümü olarak ele alınabilir. Bununla birlikte en uygun dönüşüm Wahquist ve Estabrook (1973) tarafından geliştirilmiştir.

İlk olarak KdV denkleminin Galilean değişmezi⁴ olduğunu hatırlayalım. Bu yüzden u yerine $u - \lambda$ ile çalışabiliriz. Böylece λ 'nın bir reel parametre olduğu

$$u = \lambda + v^2 + v_x \quad (2.4)$$

denklemini yazılabilir. Sonra da KdV denklemini

$$v_t - 6(v^2 + \lambda)v_x + v_{xxx} = 0 \quad (2.5)$$

haline gelir; öyle ki (2.5) ve (2.4) denklemleri u için (2.3)'teki orijinal KdV denklemini ifade eder. Dahası eğer v , (2.5) denkleminin bir çözümü ise o zaman $-v$ de bir çözümdür. Bu da bizi, verilen v ve λ için

$$u_1 = \lambda + v^2 + v_x; \quad u_2 = \lambda + v^2 - v_x$$

şeklinde tanımlanan u_1 ve u_2 adı verilen iki fonksiyona götürür. Burada

$$u_1 - u_2 = 2v_x \quad \text{ve} \quad u_1 + u_2 = 2(\lambda + v^2) \quad (2.6)$$

denklemleri çıkar. Bu aşamada

$$u_i = \frac{\partial w_i}{\partial x} \quad (2.7)$$

ek dönüşümünü ileri sürmek uygun olur. Böylece (2.6) denklemleri sırasıyla

$$w_1 - w_2 = 2v \quad (2.8)$$

ve

$$(w_1 + w_2)_x = 2\lambda + \frac{1}{2}(w_1 - w_2)^2 \quad (2.9)$$

⁴ Galilean değişmezi, tüm eylemsizlik çerçeveleri içindeki hareket kurallarının aynı olduğunu açıklar. Örneğin; geminin hareket halinde mi yoksa sabit mi olduğunun seçilememesi.

haline gelir ((2.8) denklemi, (2.6)'daki ilk denklemin x 'e göre bir kez integrallenmesiyle elde edilir. Ama sonuçtaki keyfi fonksiyon u_i 'yi düzeltmeksizin w_i 'nin tanımının içine alınabilir). (2.9) denklemi, (2.7) denklemi aracılığıyla KdV denkleminin çözümlerini üretmek için w_1 ve w_2 sırasıyla Bäcklund dönüşümünün bir parçasını oluşturur. Son olarak (2.6) ve (2.8) denklemlerini kullanarak (2.5) denklemi,

$$(w_1 - w_2)_t - 3(w_{1x}^2 - w_{2x}^2) + (w_1 - w_2)_{xxx} = 0 \quad (2.10)$$

olarak yazılabilir. (2.9) ve (2.10) ((2.7) ile birlikte) denklemleri KdV denklemi için auto-Bäcklund dönüşümünü oluşturur. (2.9) denklemi dönüşümün x kısmını ve (2.10) denklemi de dönüşümün t kısmını ifade eder.

Öncelikle sıfır çözümden başlayabiliriz. Bütün x ve t 'ler için $w_2(x, t) = 0$ olsun. O zaman (2.9) denklemi

$$w_{1x} = 2\lambda + \frac{1}{2}w_1^2 \quad (2.11)$$

haline gelir. Doğrudan integralini aldığımızda $\lambda = -\kappa^2 (< 0)$ ve f bir keyfi fonksiyon olmak üzere

$$w_1(x, t) = -2\kappa \tanh\{\kappa x + f(t)\} \quad (2.12)$$

elde ederiz. t 'ye bağımlı olan (2.10)'da $w_2(x, t) = 0$ alınarak

$$w_{1t} - 3w_{1x}^2 + w_{1xxx} = 0$$

haline gelir. Şimdi (2.11) denkleminde

$$w_{1xxx} = \frac{\partial}{\partial x} (w_1 w_{1x}) = w_{1x}^2 + w_1^2 w_{1x}$$

elde ederiz. Eğer (2.11) denklemi tekrar kullanılırsa

$$\begin{aligned} w_{1t} - 2w_{1x} (w_{1x} - \frac{1}{2}w_1^2) &= 0 \\ w_{1t} + 4\kappa^2 w_{1x} &= 0 \end{aligned} \quad (2.13)$$

olarak yazılabilir. g keyfi fonksiyonu için (2.13) denkleminin genel çözümü

$$w_1(x, t) = g(x - 4\kappa^2 t)$$

olduğundan, o zaman (2.12) denklemiyle tutarlılığı için x_0 keyfi sabit olmak üzere

$$f(t) = -4\kappa^3 t - \kappa x_0$$

elde ederiz. Böylece Bäcklund dönüşümleri olan

$$w_1(x, t) = -2\kappa \tanh\{\kappa(x - x_0 - 4\kappa^2 t)\} \quad (2.14)$$

çözümü ve (2.7) denkleminde

$$u_1(x, t) = -2\kappa^2 \operatorname{sech}^2\{\kappa(x - x_0 - 4\kappa^2 t)\}$$

KdV denkleminin tek dalga çözümünü elde ederiz. (Dikkat edelim ki eğer $|w_1| < 2\kappa$ ise (2.12) çözümü geçerlidir. Ama $|w_1| > 2\kappa$ ise o zaman

$$w_2(x, t) = -2\kappa \coth\{\kappa(x - x_0 - 4\kappa^2 t)\}$$

bir tekil çözümdür.)

KdV denkleminin tekil dalga çözümünü elde etmek için Bäcklund dönüşümünün nasıl kullanılabildiğini gösterdik. Bu yöntem, (2.14) denkleminde çözümün w_2 seçilmesiyle devam ettirilebilir. Bu yolla KdV denkleminin çözümlerinden kompleks olanları devamlı olarak bulunabilir. Bununla birlikte bütün bunlarda rahatsız edici taraf, her yeni çözüm x 'e ve t 'ye göre integrallerini almayı gerektirir. Şimdi daha fazla integrallemeye başvurmadan KdV denkleminin çözümlerini elde etmek için güzel bir yöntem ifade edeceğiz.

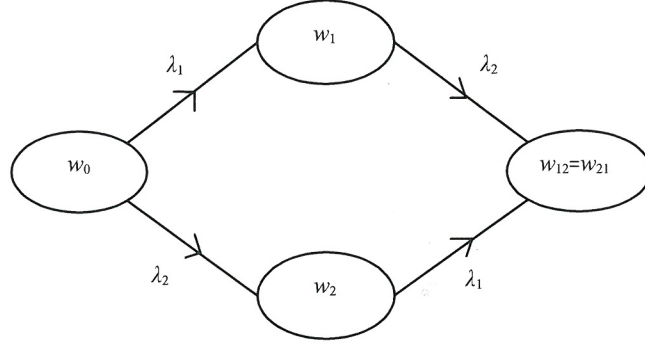
Öncelikle çözümleri w_i olarak yeniden isimlendirelim. Verilen w_0 aynı çözümünü kullanarak ama λ 'nın iki farklı değeriyle (λ_1 ve λ_2), Bäcklund dönüşümünden w_1 ve w_2 iki çözümü ürettiğimizi varsayalım. Böylece (2.9) denklemini

$$\begin{aligned}(w_1 + w_0)_x &= 2\lambda_1 + \frac{1}{2}(w_1 - w_0)^2 \\ (w_2 + w_0)_x &= 2\lambda_2 + \frac{1}{2}(w_2 - w_0)^2\end{aligned}\quad (2.15)$$

şeklinde iki formda yazabiliriz. Şimdi w_1 ve λ_2 'den diğer çözüm olan w_{12} ve benzer şekilde w_2 ve λ_1 'den bir w_{21} çözümünü oluştururuz. Böylece,

$$\begin{aligned}(w_{12} + w_1)_x &= 2\lambda_2 + \frac{1}{2}(w_{12} - w_1)^2 \\ (w_{21} + w_2)_x &= 2\lambda_1 + \frac{1}{2}(w_{21} - w_2)^2\end{aligned}\quad (2.16)$$

elde edilir.



Şekil 2.2: Bianchi'nin değiştirilebilirlik teoreminin diyagram ile temsil edilişi.

Devam etmeden önce Bäcklund dönüşümlerinin teorisinden önemli bir sonuca ihtiyacımız vardır. Bianchi'nin değiştirilebilirlik teoremi (Eisenhart 1909), ifade eder ki eğer w_{12} ve w_{21} yukarıdaki gibi belirtilirse, o zaman

$$w_{12} = w_{21} \quad (2.17)$$

dir (Teorem Şekil 2.2'deki diyagram ile temsil edilmiştir). Bu teorem geniş çapta uygulanabilir ve özellikle şimdi göreceğimiz gibi oluşum (evolution) denkleminin çoklu soliton çözümlerinin üretiminde kullanılır.

(2.16) denklemlerinin farkından (2.15) denklemlerinin farkını çıkarırız.

$$0 = 4(\lambda_2 - \lambda_1) + \frac{1}{2} \left\{ (w_{12} - w_1)^2 - (w_{21} - w_2)^2 - (w_1 - w_0) + (w_2 - w_0)^2 \right\}$$

denkleminin sol tarafını sıfır yapmak için (2.17) denklemini kullanırız. (2.17) denklemini tekrar kullanarak $w_{12}(=w_{21})$ için çözmek, basit cebirsel terim olarak ifade edilen w_{12} 'yi aşağıdaki gibi elde etmemizi sağlar:

$$w_{12} = w_0 - \frac{4(\lambda_1 - \lambda_2)}{w_1 - w_2}. \quad (2.18)$$

İşlem tam olarak çalışmasa da, açık biçimdeki KdV denkleminin çözümlerini oluşturmak mümkündür. (2.18) denklemi, KdV denkleminin çözümlerini üretmek için bir nonlineer süperpozisyon prensibini oluşturur.

$\lambda = -\kappa^2 (< 0)$ olarak alındığını göz önünde bulundurarak, (2.18) denkleminin kullanılmasına örnek olarak $w_0 = 0$, $w_1 = -2\tanh(x-4t)$ ve $w_2 = -4\coth(2x-32t)$ alalım. Böylece λ_1 ve λ_2 sırasıyla -1 ve -4 'tür. Dolayısıyla

$$w_{12}(x,t) = -6 / \{2\coth(2x-32t) - \tanh(x-4t)\}$$

elde ederiz. KdV denkleminin karşılık gelen çözüm $u_{12} = \partial w_{12} / \partial x$ olacak şekilde elde edilir ki bu iki-soliton çözümdür.

$$\begin{aligned} u_{12} &= -6 \frac{4\operatorname{cosech}^2(2x-32t) + \operatorname{sech}^2(x-4t)}{\{2\coth(2x-32t) - \tanh(x-4t)\}^2} \\ &= -6 \frac{4\cosh^2(x-4t) + \sinh^2(2x-32t)}{\{2\cosh(2x-32t)\cosh(x-4t) - \sinh(x-4t)\sinh(2x-32t)\}^2} \\ &= -12 \frac{3 + 4\cosh(2x-8t) + \cosh(4x-64t)}{\{3\cosh(x-28t) + \cosh(3x-36t)\}^2} \end{aligned}$$

biçiminde elde edilir. KdV denkleminin bu tekil olmayan çözümü, (2.18) denkleminde bir tekil olan bir de tekil olmayan çözümün kombinasyonuna ihtiyaç duyar.

2.2 Ters Saçılma Dönüşüm Yöntemi

Ters saçılma dönüşüm metodu bazı nonlineer kısmi diferansiyel denklemlerin çözümünde kullanılır. Metot üzerine matematiksel fizikteki gelişmeler son 40 yılda

karşımıza çıkar. Bu metot Fourier dönüşümünün nonlinear bir benzeridir ve Gardner, Greene, Kruskal ve Miura (1967, 1974) tarafından ileri sürülmüştür.

İlk olarak

$$u_t - 6uu_x + u_{xxx} = 0 \quad -\infty < x < \infty \quad (2.19)$$

formundaki KdV denklemini ele alalım. Daha sonra Sturm-Liouville problemi ile bir bağıntısının var olduğunu gösterelim. Bunu göstermenin basit yollarından bir tanesi $v(x,t)$ fonksiyonunu

$$u = v^2 + v_x \quad (2.20)$$

olacak şekilde ifade etmektir. Bu dönüşümün Miura dönüşümü adı verildiğini hatırlayalım. (2.20), (2.19) denkleminde yerine yazıldığında

$$2vv_t + v_{xt} - 6(v^2 + v_x)(2vv_x + v_{xx}) + 6v_x v_{xx} + 2vv_{xxx} + v_{xxxx} = 0$$

elde edilir. Denklem düzenlendiğinde

$$\left(2v + \frac{\partial}{\partial x}\right)(v_t - 6v^2 v_x + v_{xxx}) = 0 \quad (2.21)$$

şeklini alır. Dolayısıyla v ,

$$v_t - 6v^2 v_x + v_{xxx} = 0 \quad (2.22)$$

denkleminin (değiştirilmiş KdV denkleminin) bir çözümü ise o zaman (2.20) denkleminin, (2.19) KdV denkleminin bir çözümünü ifade eder. ((2.19) denkleminin bir çözümü (2.22) denkleminin bir çözümünü ifade etmediğine dikkat edelim. Çünkü (2.21) denkleminin ek operatör içermektedir.)

(2.20) denkleminin Riccati tipi diferansiyel denklemdir.⁵ Diferansiyellenebilir fonksiyon olan $\psi(x;t) = 0$ için

$$v = \psi_x / \psi \quad (2.23)$$

⁵ $v' + P(x)v + Q(x)v^2 = R(x)$ denkleminin Riccati denkleminin denir.

dönüşümüyle (2.20) denklemini lineerleştirebiliriz. (2.20)'deki t (zaman), sadece parametrik olarak çıktığından ψ notasyonumuzda noktalı virgül kullanımı yer alır. (2.20) denklemi (2.23) dönüşümüyle ψ için

$$\psi_{xx} - u\psi = 0$$

zamandan bağımsız Sturm-Liouville denklemi haline gelir. Bağlantı KdV denkleminin Galile tipi invaryant olarak alınmasıyla tamamlanmış olur. Yani

$$u(x, t) \rightarrow \lambda + u(x + 6\lambda t, t), \quad -\infty < \lambda < \infty$$

ifadesi keyfi (reel) bir λ için (2.19) denklemini değişmez kılar. Çünkü x -bağımlılığı bu dönüşüm altında değişmezdir (ve t parametre olarak rol oynar). u yerine $u - \lambda$ olarak alabiliriz. ψ için denklem

$$\psi_{xx} + (\lambda - u)\psi = 0 \quad -\infty < x < \infty \quad (2.24)$$

olur. Bu ise u potansiyelli ve λ özdeğerli Sturm-Liouville denklemdir. Bu denklemi ψ için çözebilirsek (2.23) ve (2.20) denklemlerinden u 'yu yeniden bulabiliriz. Bununla birlikte yöntem açıklıktan uzaktır. Çünkü (2.24) denklemi, belirlemeye çalıştığımız u fonksiyonunu zaten içermektedir. Bu ikilemden kaçınmamızın bir yolu u potansiyeli ile saçılma açısından problemi yorumlamaktır.

Şimdi ters saçılma dönüşümünün, KdV denklemi için başlangıç değer probleminin çözümünün bulunmasında nasıl kullanılacağını tarif edeceğiz. $u(x, 0) = f(x)$ koşulu ile

$$u_t - 6uu_x + u_{xxx} = 0 \quad -\infty < x < \infty$$

KdV denklemini çözmek istiyoruz. Öncelikle $t=0$ 'da verilen $u(x, 0)$ değeri için saçılma problemini çözebiliriz. (2.24)'deki Sturm-Liouville denkleminin spektrumu, $\lambda > 0$ için $\lambda = k^2$, ($n=1, 2, \dots, N$) ve $\lambda < 0$ için $\lambda = -\kappa_n^2$ şeklinde sonlu sayıda özdeğerden oluşmaktadır. Bu özdeğerlere karşılık gelen özfonksiyonlar hesaplanabilir ve bunların asimptotik davranışları aşağıda görüldüğü gibidir:

$0 < \lambda = k^2$ ile

$$x \rightarrow \infty \text{ iken, } \psi(x, t) \sim e^{-ikx} + b(k, t)e^{ikx}$$

$$x \rightarrow -\infty \text{ iken, } \psi(x, t) \sim a(k, t)e^{-ikx}$$

ve $0 > \lambda = -\kappa_n^2$ ile

$$x \rightarrow +\infty \text{ iken, } \psi_n(x, t) \sim c_n \exp(-\kappa_n x).$$

Böylece $t = 0$ anındaki saçılma verisi

$$S(\lambda, 0) = \left\{ (\kappa_n, c_n(0))_{n=1}^N, b(k, 0), a(k, 0) \right\}$$

olarak elde edilir. Burada $-\kappa_n^2$ ayrık spektrumu, $c_n(0)$ normalleştirme sabitlerini, $b(k, 0)$ ve $a(k, 0)$ ise yansıma ve iletim katsayılarını temsil eder. Bulunan bu saçılma verisinin *zamana bağlı gelişimi* (time evolution) belirlenebilirse, o zaman herhangi ileriki bir zamandaki saçılma verisini bilebiliriz. Dolayısıyla $t > 0$ anındaki saçılma verisini aşağıdaki gibi belirleyebiliriz:

$$\kappa_n = \text{sabit,}$$

$$c_n(t) = c_n(0) \exp(4\kappa_n^3 t),$$

$$a(k, t) = a(k, 0),$$

$$b(k, t) = b(k, 0) \exp(8ik^3 t).$$

Böylece $t > 0$ anındaki saçılma verisi

$$S(\lambda, t) = \left\{ (\kappa_n, c_n(t))_{n=1}^N, b(k, t), a(k, t) \right\}$$

olarak bulunur. $S(t)$ saçılma verisinden $u(x, t)$ potansiyelinin bulunması, Sturm-Liouville denklemi için ters saçılma problemi olarak adlandırılır. Bunun için öncelikle saçılma verisi kullanılarak

$$F(X; t) = \sum_{n=1}^N c_n^2(0) \exp(8\kappa_n^3 t - \kappa_n X) + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} b(k; 0) \exp(8ik^3 t + ikX) dk$$

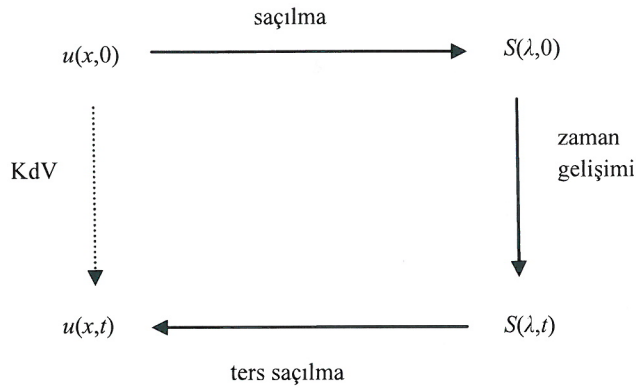
denklemini elde edilir. Bu denklemde Marchenko denklemini gerekli kılar. $K(x, z; t)$ için Marchenko denklemi

$$K(x, z; t) + F(x + z; t) + \int_x^\infty K(x, y; t)F(y + z; t)dy = 0$$

şeklindedir. Son olarak da

$$u(x, t) = -2 \frac{\partial}{\partial x} \hat{K}(x, t) \quad \text{ve} \quad \hat{K}(x, t) = K(x, x, t)$$

eşitlikler yardımıyla $u(x, t)$ potansiyeli bulunur. Anlatılan ters saçılma dönüşümü Şekil 2.3'te şematik olarak gösterilmiştir.



Şekil 2.3: KdV denklemi için ters saçılma dönüşümünün gösterilmesi.

Şimdi de Şekil 2.3'te gösterilen dönüşümün, lineer kısmi diferansiyel denklemlerin çözümü için kullanılan Fourier dönüşümüyle paralellik gösterdiğini ifade edelim. Bunun için de KdV denkleminin bir lineerleştirilmesi olan

$$u_t + u_x + u_{xxx} = 0$$

örneğini düşünelim. Eğer $u(x, 0) = f(x)$ ise o zaman

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} A(k) e^{ikx} dk$$

veya

$$A(k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ikx} dx$$

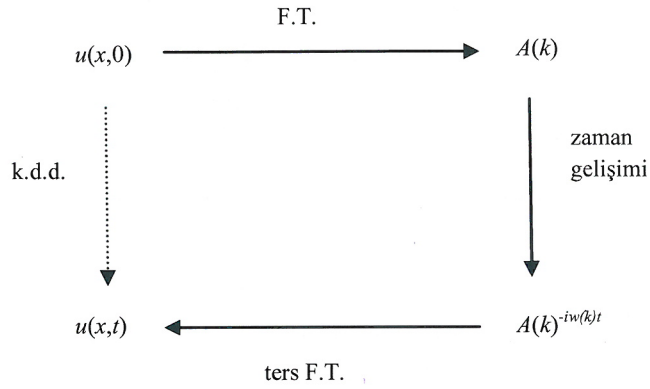
şeklinde yazılabilir. $A(k)$ saçılma verisi olan $S(0)$ 'a benzerdir. Dahası $w = w(k)$ olmak üzere

$$u(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} A(k)e^{i(kx-wt)} dk$$

ise o zaman

$$w(k) = k - k^3$$

tür. w 'nin içindeki terim saçılma verisinin zamana bağlı gelişimini ifade eder. Bu durum Şekil 2.4'te gösterilmiştir.



Şekil 2.4: Bir lineer kısmi diferansiyel denklem için Fourier dönüşüm kullanımının gösterilmesi.

Sonuç olarak diyebiliriz ki göstermiş olduğumuz ters saçılma metodu bir nonlineer kısmi diferansiyel denklem çözümünü iki lineer problem (ikinci mertebeden adi diferansiyel denklem ve adi integral denklem) çözümüne indirger. Ayrıca $u(x,0) = -2\text{sech}^2 x$ başlangıç koşullu KdV denkleminin tek dalga çözümü

$$u(x,t) = -2\text{sech}^2(x-4t)$$

şeklinde elde edilirken, $u(x,0) = -6\text{sech}^2 x$ başlangıç koşullu KdV denkleminin iki-soliton çözümü de

$$u(x,t) = -12 \frac{3 + 4 \cosh(2x-8t) + \cosh(4x-64t)}{(3 \cosh(x-28t) + \cosh(3x-36t))^2}$$

şeklinde elde edilir. Daha fazla bilgi için Drazin ve Johnson (1989) kaynağına bakılabilir.

2.3 Sinüs-Kosinüs Yöntemi

KdV denklemini

$$u_t + auu_x + u_{xxx} = 0 \quad (2.25)$$

şeklinde ele alalım. c dalga hızı olmak üzere $\xi = x - ct$ dalga değişkenini ileri sürelim. Böylece

$$u(x, t) = u(\xi) \quad (2.26)$$

yazılabilir. (2.26)'yı (2.25) denkleminde yerine yazdığımızda

$$-c \frac{du}{d\xi} + au \frac{du}{d\xi} + \frac{d^3u}{d\xi^3} = 0$$

adi diferansiyel denklemi oluşur. Bu denklemin integrali alınarak, integral sabiti sıfır kabul edildiğinde

$$-cu + \frac{a}{2}u^2 + u''' = 0 \quad (2.27)$$

elde edilir.

Şimdi anlatacağımız sinüs-kosinüs metodu (Wazwaz 2009),

$$u(x, t) = \lambda \cos^\beta(\mu\xi), \quad |\xi| \leq \frac{\pi}{2\mu}, \quad (2.28)$$

ve

$$u(x, t) = \lambda \sin^\beta(\mu\xi), \quad |\xi| \leq \frac{\pi}{\mu}, \quad (2.29)$$

formlarında çözümlerin kullanılmasını kabul eder. Burada λ, β ve μ belirlenecek olan parametrelerdir. (2.28) ve (2.29)'un n . kuvvetleri alınıp türevlenmesiyle

$$\frac{d}{d\xi}(u^n) = -n\beta\mu\lambda^n \cos^{n\beta-1}(\mu\xi) \sin(\mu\xi),$$

$$\frac{d^2}{d\xi^2}(u^n) = -n^2\mu^2\beta^2\lambda^n \cos^{n\beta}(\mu\xi) + n\mu^2\lambda^n\beta(n\beta-1)\cos^{n\beta-2}(\mu\xi),$$

ve

$$\begin{aligned}\frac{d}{d\xi}(u^n) &= n\beta\mu\lambda^n \sin^{n\beta-1}(\mu\xi) \cos(\mu\xi), \\ \frac{d^2}{d\xi^2}(u^n) &= -n^2\mu^2\beta^2\lambda^n \sin^{n\beta}(\mu\xi) + n\mu^2\lambda^n\beta(n\beta-1)\sin^{n\beta-2}(\mu\xi),\end{aligned}$$

elde edilir.

Şimdi (2.28)'deki kosinüslü ifadeyi ele alalım. (2.28)'in (2.27) denkleminde yazılmasıyla

$$-c\lambda \cos^\beta(\mu\xi) + \frac{a}{2}\lambda^2 \cos^{2\beta}(\mu\xi) - \lambda\mu^2\beta^2 \cos^\beta(\mu\xi) + \lambda\mu^2\beta(\beta-1)\cos^{\beta-2}(\mu\xi) = 0$$

bulunur. Bulunan bu denklem için

$$\begin{aligned}\beta - 1 &\neq 0 \\ 2\beta &= \beta - 2\end{aligned}\tag{2.30}$$

kabul edilerek kosinüslü terimlerin katsayıları sıfıra eşitlenir. Böylece

$$\begin{aligned}\mu^2\beta^2\lambda &= -c\lambda, \\ \frac{a}{2}\lambda^2 &= -\lambda\mu^2\beta(\beta-1)\end{aligned}\tag{2.31}$$

denklem sistemi bulunur. (2.30) ve (2.31) denklemlerinden

$$\beta = -2, \quad \mu = \frac{\sqrt{-c}}{2}, \quad \lambda = \frac{3c}{a},\tag{2.32}$$

elde edilir. Ayrıca (2.29)'daki sinüslü ifade kullanılarak da (2.32)'deki sonuçlar kolaylıkla elde edilebilir. Bu durumda

$$u(x,t) = \frac{3c}{a} \sec^2 \left[\frac{\sqrt{-c}}{2}(x-ct) \right], \quad c < 0$$

ve

$$u(x,t) = \frac{3c}{a} \csc^2 \left[\frac{\sqrt{-c}}{2}(x-ct) \right], \quad c < 0$$

çözümleri elde edilir. Bulunan bu çözümler $c < 0$ olduğunda geçerlidir. $c > 0$ olduğunda ise

$$u(x,t) = \frac{3c}{a} \operatorname{sech}^2 \left[\frac{\sqrt{c}}{2} (x-ct) \right], \quad c > 0$$

ve

$$u(x,t) = -\frac{3c}{a} \operatorname{csc h}^2 \left[\frac{\sqrt{c}}{2} (x-ct) \right], \quad c > 0$$

çözümleri bulunur.

2.4 Tanh Yöntemi

Tanh metodu Malfliet (1992) tarafından geliştirilmiştir. Tanh metodunda öncelikle $\xi = x - ct$ dalga değişkeni yardımıyla herhangi bir kısmi diferansiyel denklem adi diferansiyel denkleme dönüştürülür. Daha sonra

$$Y = \tanh(\mu\xi), \quad \xi = x - ct$$

şeklinde bir değişken ileri sürülür. Burada μ dalga sayısını belirtir. Bu değişkenin türevi alındığında aşağıdakiler elde edilir:

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\xi} &= \mu(1-Y^2) \frac{d}{dY}, \\ \frac{d^2}{d\xi^2} &= -2\mu^2 Y(1-Y^2) \frac{d}{dY} + \mu^2 (1-Y^2)^2 \frac{d^2}{dY^2}, \\ \frac{d^3}{d\xi^3} &= 2\mu^3 (1-Y^2)(3Y^2-1) \frac{d}{dY} - 6\mu^3 Y(1-Y^2)^2 \frac{d^2}{dY^2} + \mu^3 (1-Y^2)^3 \frac{d^3}{dY^3}. \end{aligned} \quad (2.33)$$

Tanh-coth metodu (Wazwaz 2006), M çoğu durumda belirlenebilen bir pozitif tamsayı olmak üzere

$$u(\mu\xi) = S(Y) = \sum_{k=0}^M a_k Y^k + \sum_{k=1}^M b_k Y^{-k} \quad (2.34)$$

sonlu açılım kullanımını temsil eder. M 'nin tamsayı olmaması durumunda bu zorluğu gidermek için bir dönüşüm formülü kullanılır. (2.34)'deki açılımda $b_k = 0$ ve $0 \leq k \leq M$ alınmasıyla tanh metoduna indirgenir. Bu açılım adi diferansiyel denklemde yerine yazılmasıyla Y 'nin kuvvetlerinden oluşan bir cebirsel denklem elde edilir.

Denge yöntemini gerçekleştirmek için (2.33) ve (2.34)'den u fonksiyonunun en yüksek kuvvetleri ve türevleri için aşağıdakiler alınır:

$$\begin{aligned} u &\rightarrow M, \\ u^n &\rightarrow nM, \\ u' &\rightarrow M+1, \\ u'' &\rightarrow M+2, \\ u^{(r)} &\rightarrow M+r. \end{aligned}$$

M parametresini belirlemek için, adi diferansiyel denklemde en yüksek mertebeden lineer terim ile en yüksek mertebeden lineer olmayan terim yukarıda verilenler kullanılarak dengelenir. Daha sonra Y 'nin kuvvetlerinden oluşan denklemde Y 'nin aynı kuvvetlerinin katsayıları toplanır ve her bir katsayı sıfıra eşitlenir. Bu da a_k, b_k, μ ve c parametrelerini içeren cebirsel denklemlerin bir sistemini verir. Bu parametreler belirlenerek kapalı formdaki $u(x,t)$ analitik çözümü elde edilir. Çözümler sech^2 terimli solitonlar veya tanh terimli kinkler⁶ şeklinde bulunabilir. Bununla birlikte bu metot periyodik çözümler de verir.

Şimdi tanh metodunu

$$u_t + (au^n - bu^{2n})u_x + u_{xxx} = 0 \quad (2.35)$$

şeklindeki iki lineer olmayan terimli genelleştirilmiş KdV denklemine uygulayalım. $\xi = x - ct$ dalga değişkenini kullanarak ve bir defa integrali alınarak (2.35) denklemi

$$-cu + \frac{a}{n+1}u^{n+1} - \frac{b}{2n+1}u^{2n+1} + u'' = 0 \quad (2.36)$$

⁶ Kink çözüm, yürüyen dalga çözüm çeşitlerinden biridir. Kink dalgalar bir asimtotik durumdan diğerine yükselen veya alçalan yürüyen dalgalarıdır. Kink çözüm sonsuzda bir sabite yaklaşır.

adi diferansiyel denkleme dönüşür. (2.36) denkleminde u^{2n+1} ve u'' dengelenmesiyle

$$M + 2 = (2n + 1)M$$

elde edilir. Böylece

$$M = 1/n$$

bulunur. Kapalı analitik çözümü elde etmek için, M tam sayı olmalıdır. Dolayısıyla

$$u = v^{1/n} \quad (2.37)$$

dönüşümü uygulanır. (2.36)'da (2.37) dönüşümü uygulanmasıyla

$$\begin{aligned} -cn^2(2n+1)(n+1)v^2 + an^2(2n+1)v^3 - bn^2(n+1)v^4 \\ + n(2n+1)(n+1)vv'' + (1-n^2)(2n+1)(v')^2 = 0 \end{aligned} \quad (2.38)$$

elde edilir. vv'' ile v^4 dengelenmesiyle

$$M + M + 2 = 4M$$

bulunur. Buradan da $M = 1$ elde edilir. Tanh metodu

$$v(\xi) = a_0 + a_1 Y \quad (2.39)$$

sonlu açılımın kullanılmasını kabul eder. v 'nin türevleri

$$\frac{dv}{dY} = a_1, \quad \frac{d^2v}{dY^2} = 0$$

olarak bulunur. (2.33)'e göre de

$$\begin{aligned} v' &= \mu(1 - Y^2)a_1 \\ v'' &= -2\mu^2 Y(1 - Y^2)a_1 \end{aligned} \quad (2.40)$$

elde edilir. (2.39) ve (2.40)'da bulunanlar (2.38)'de yerine yazılır. Elde edilen denklemde Y 'nin kuvvetlerinin katsayıları sıfıra eşitlendiğinde aşağıdakiler bulunur:

$$\begin{aligned}
Y^0 : & -cn^2(2n+1)(n+1)a_0^2 + an^2(2n+1)a_0^3 - bn^2(n+1)a_0^4 \\
& + (1-n^2)(2n+1)\mu^2 a_1^2 = 0, \\
Y^1 : & -2cn^2(2n+1)(n+1)a_0 a_1 + 3an^2(2n+1)a_0^2 - 4bn^2(n+1)a_0^3 a_1 = 0, \\
Y^2 : & (-cn^2(2n+1)(n+1) - 2(1-n^2)(2n+1)\mu^2)a_1^2 - 6bn^2(n+1)a_0^2 a_1^2 \\
& (3an^2(2n+1) - 2n(2n+1)(n+1)\mu^2)a_0 a_1^2 = 0, \\
Y^3 : & an^2(2n+1)a_1^3 - 4bn^2(n+1)a_0 a_1^3 = 0, \\
Y^4 : & -bn^2(n+1)a_1^4 - 2n(2n+1)(n+1)\mu^2 a_0 a_1^2 + (1-n^2)(2n+1)\mu^2 a_1^2 = 0.
\end{aligned}$$

Buradan da aşağıdaki çözümler elde edilir:

$$a_0 = \frac{a(2n+1)}{2b(n+2)}, \quad a_1 = \pm \frac{a(2n+1)}{2b(n+2)}, \quad \mu = \pm \frac{an}{2(n+2)} \sqrt{\frac{2n+1}{b(n+1)}}.$$

Sonuç olarak

$$v_1(x,t) = \frac{a(2n+1)}{2b(n+2)} \left(1 \pm \tanh \left[\frac{an}{2(n+2)} \sqrt{\frac{2n+1}{b(n+1)}} \left(x - \frac{a^2(2n+1)}{b(n+1)(n+2)^2} t \right) \right] \right)$$

şeklinde kink çözüm ve

$$v_2(x,t) = \frac{a(2n+1)}{2b(n+2)} \left(1 \pm \coth \left[\frac{an}{2(n+2)} \sqrt{\frac{2n+1}{b(n+1)}} \left(x - \frac{a^2(2n+1)}{b(n+1)(n+2)^2} t \right) \right] \right)$$

şeklinde yürüyen dalga çözümü elde edilir. $u = v^{1/n}$ olduğunu hatırlayalım. Buna dayanarak (2.35)'deki genelleştirilmiş KdV denklemi için

$$u_1(x,t) = \left\{ \frac{a(2n+1)}{2b(n+2)} \left(1 \pm \tanh \left[\frac{an}{2(n+2)} \sqrt{\frac{2n+1}{b(n+1)}} \left(x - \frac{a^2(2n+1)}{b(n+1)(n+2)^2} t \right) \right] \right) \right\}^{1/n}$$

şeklinde kink çözüm ve

$$u_2(x,t) = \left\{ \frac{a(2n+1)}{2b(n+2)} \left(1 \pm \coth \left[\frac{an}{2(n+2)} \sqrt{\frac{2n+1}{b(n+1)}} \left(x - \frac{a^2(2n+1)}{b(n+1)(n+2)^2} t \right) \right] \right) \right\}^{1/n}$$

şeklinde yürüyen dalga çözümü elde edilir. $n=1$ için $u_1(x,t)$ ve $u_2(x,t)$ çözümleri Gardner denklemi için çözümler olur.

Ayrıca tanh metodunun kompleks değiştirilmiş KdV denklemi ve genelleştirilmiş KdV denklemi üzerinde uygulandığı, Wazwaz'ın (2005) makalesinde incelenmiştir. Daha geniş bilgi için Wazwaz'ın (2009) kitabına bakılabilir.

2.5 Üstel Fonksiyon Yöntemi

Üstel fonksiyon metodu çok kolay ve anlaşılır bir metottur. Üstel fonksiyon ifadesi sinh ve tanh fonksiyonundan çok daha geneldir. Böylece metot ile daha genel çözümler bulabiliriz. Bu metodu göstermek için

$$u_t + u^2 u_x + u_{xxx} = 0 \quad (2.41)$$

değiştirilmiş KdV denklemini ele alalım. Bu denkleme k ve w keyfi sabitler olmak üzere

$$\eta = kx + wt$$

dönüşümünü uygulayalım. Burada k dalga sayısını, w ise dalganın hızını göstermektedir. İfadenin η 'ye göre türevi alınır ve aşağıdaki gibi dönüşümler yapılır:

$$\begin{aligned} u_t &= \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial t} = w \frac{\partial u}{\partial \eta} = wu' \\ u_x &= \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} = k \frac{\partial u}{\partial \eta} = ku' \\ u_{xxx} &= k^3 \frac{\partial^3 u}{\partial \eta^3} = k^3 u''' \end{aligned}$$

Bulunan bu ifadeler (2.41) denkleminde yerine yazıldığında

$$wu' + ku^2 u' + k^3 u''' = 0 \quad (2.42)$$

elde edilir.

Üstel fonksiyon metodu çok açık ve kolay bir metottur. Bu metot ile c, d, p ve q pozitif tam sayılar, a_n ve b_m bilinmeyen sabitler olmak üzere hareketli dalga çözümleri

$$u(\eta) = \frac{\sum_{n=-d}^c a_n \exp(n\eta)}{\sum_{m=-q}^p b_m \exp(m\eta)}$$

formunda ifade edilebilir.

(2.42) denkleminin çözümünün

$$u(\eta) = \frac{a_c \exp(c\eta) + \dots + a_{-d} \exp(-d\eta)}{b_p \exp(p\eta) + \dots + a_{-q} \exp(-q\eta)} \quad (2.43)$$

olarak ifade edildiğini varsayalım. c ve p değerlerini belirlemek için (2.42) denkleminde en yüksek mertebeden terim ile en yüksek mertebeden nonlinear terimi dengeleyelim. O zaman

$$u''' = \frac{c_1 \exp[(7p+c)\eta] + \dots}{c_2 \exp[8p\eta] + \dots} \quad (2.44)$$

ve

$$u^2 u' = \frac{c_3 \exp[(p+3c)\eta] + \dots}{c_4 \exp[4p\eta] + \dots}$$

buluruz. Burada c_i 'ler katsayıları hesaplamalarda karşılaşılan sabitleri temsil eder. $u^2 u'$ terimini u''' ile dengelemek için paydaları eşitlemeliyiz. Böylece $u^2 u'$ ifadesini $e^{4p\eta}$ ile çarparsak

$$u^2 u' = \frac{c_3 \exp[(5p+3c)\eta] + \dots}{c_4 \exp[8p\eta] + \dots} \quad (2.45)$$

elde edilir. (2.44) ve (2.45) denklemlerinde üstel fonksiyonun en yüksek mertebeleri dengelendiğinde

$$7p + c = 5p + 3c$$

elde ederiz. Böylece

$$p = c$$

sonucu ortaya çıkar. Benzer şekilde d ve q değerlerini belirlemek için (2.42) denkleminde en düşük mertebeden lineer terim ile en düşük mertebeden nonlinear terimi dengeleyelim. d_i 'ler katsayıları belirtmek üzere

$$u''' = \frac{\dots + d_1 \exp[-(7q+d)\eta]}{\dots + d_2 \exp[-8q\eta]} \quad (2.46)$$

ve

$$u^2 u' = \frac{\dots + d_3 \exp[-(q+3d)\eta]}{\dots + d_4 \exp[-4q\eta]} = \frac{\dots + d_3 \exp[-(5q+3d)\eta]}{\dots + d_4 \exp[-8q\eta]} \quad (2.47)$$

buluruz. (2.46) ve (2.47) denklemlerinde üstel fonksiyonun en düşük mertebeleri dengelendiğinde

$$-(7q+d) = -(5q+3d)$$

elde ederiz. Böylece

$$q = d$$

sonucu ortaya çıkar. İşlemleri basitleştirmek için $p = c = 1$ ve $q = d = 1$ alınır. Bu eşitlikleri (2.43) denkleminde yerine yazarsak çözüm

$$u(\eta) = \frac{a_1 \exp(\eta) + a_0 + a_{-1} \exp(-\eta)}{\exp(\eta) + b_0 + b_{-1} \exp(-\eta)} \quad (2.48)$$

bulunur. (2.48) denklemini (2.42) denkleminde yerine yazılır ve $\exp(n\eta)$ ($n = -3, \dots, 3$) şeklinde düzenlenir. Oluşan yeni ifadelerdeki üstel fonksiyonların katsayıları sıfıra eşitlenerek elde edilen sistemin çözümünden

$$\begin{aligned} a_0 &= a_1 b_0 + \frac{3k^2 b_0}{a_1}, & a_{-1} &= \frac{b_0^2 (3k^2 + 2a_1^2)}{8a_1}, \\ b_{-1} &= \frac{b_0^2 (3k^2 + 2a_1^2)}{8a_1^2}, & w &= -ka_1^2 - k^3 \end{aligned} \quad (2.49)$$

bulunur. Burada a_1 ve b_0 bağımsız parametrelerdir. Dolayısıyla

$$\begin{aligned}
u(x,t) &= \frac{a_1 \exp\left[kx - (ka_1^2 k^3)t\right] + a_1 b_0 + \frac{3k^2 b_0}{a_1} + \frac{b_0^2(3k^2 + 2a_1^2)}{8a_1} \exp\left(-kx + (ka_1^2 + k^3)t\right)}{\exp\left[kx - (ka_1^2 + k^3)t\right] + b_0 + \frac{b_0^2(3k^2 + 2a_1^2)}{8a_1^2} \exp\left(-kx + (ka_1^2 + k^3)t\right)} \\
&= a_1 + \frac{\frac{3k^2 b_0}{a_1}}{\exp\left[kx - (ka_1^2 + k^3)t\right] + b_0 + \frac{b_0^2(3k^2 + 2a_1^2)}{8a_1^2} \exp\left(-kx + (ka_1^2 + k^3)t\right)} \quad (2.50)
\end{aligned}$$

çözümü bulunur. Genellikle a_1, b_0 ve k reel sayılardır ve (2.50)'de elde edilen çözüm genelleştirilmiş bir solitonumsu (solitary) çözümdür. k 'nın bir sanal sayı olması durumunda elde edilen solitonumsu çözüm, periyodik çözüm veya compact-like çözüme dönüştürülebilir.

$$k = iK$$

dönüşümünü ele alalım. Bu dönüşümü kullanarak

$$\begin{aligned}
\exp\left[kx - (ka_1^2 + k^3)t\right] &= \exp\left[iKx - i(Ka_1^2 - K^3)t\right] \\
&= \cos\left[Kx - (Ka_1^2 - K^3)t\right] + i \sin\left[Kx - (Ka_1^2 - K^3)t\right]
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
\exp\left[-kx + (ka_1^2 + k^3)t\right] &= \exp\left[-iKx + i(Ka_1^2 - K^3)t\right] \\
&= \cos\left[Kx - (Ka_1^2 - K^3)t\right] - i \sin\left[Kx - (Ka_1^2 - K^3)t\right]
\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece $p = b_0^2(-3K^2 + 2a_1^2)/8a_1^2$ olmak üzere (2.50) denklemi

$$u(x,t) = a_1 + \frac{-3K^2 b_0 / a_1}{(1+p) \cos\left[Kx - (Ka_1^2 - K^3)t\right] + b_0 + i(1-p) \sin\left[Kx - (Ka_1^2 - K^3)t\right]} \quad (2.51)$$

haline gelir.

Eğer bir periyodik çözüm veya compact-like çözümü için (2.51) denklemini incelersek paydadaki sanal kısım sıfır olması gerekir. Öyle ki

$$1-p = 1 - \frac{b_0^2(-3K^2 + 2a_1^2)}{8a_1^2} = 0 \quad (2.52)$$

gerek duyulur. (2.52) denkleminde b_0 çözülerek

$$b_0 = \pm \sqrt{\frac{8}{(-3K^2 + 2a_1^2)}} \quad (2.53)$$

elde edilir. (2.53) denkleminin (2.51) denkleminde yerine yazılmasıyla bir compact-like çözüm olan

$$\begin{aligned} u(x,t) &= a_1 + \frac{\pm 3K^2 \sqrt{\frac{8}{(-3K^2 + 2a_1^2)}}}{2 \cos \left[Kx - (Ka_1^2 - K^3)t \right] \pm \sqrt{\frac{8}{(-3K^2 + 2a_1^2)}} a_1} \\ &= a_1 + \frac{\pm 3K^2 \sqrt{\frac{2}{(-3K^2 + 2a_1^2)}}}{\cos \left[Kx - (Ka_1^2 - K^3)t \right] \pm \sqrt{\frac{2}{(-3K^2 + 2a_1^2)}} a_1} \end{aligned} \quad (2.54)$$

bulunur. Burada a_1 ve K bağımsız parametrelerdir ve $2a_1^2 > 3K^2$ olmasına gerek duyulur.

(2.54) denkleminde bulunan sonuç literatürde açık olarak verilen Zhu ve diğ.'nin (2005, 2006)

$$u(x,t) = \frac{4\sqrt{2}k \sin^2(kx - 4k^3t)}{3 - 2 \sin^2(kx - 4k^3t)}$$

ve

$$u(x,t) = \frac{4\sqrt{2}k \cos^2(kx - 4k^3t)}{3 - 2 \cos^2(kx - 4k^3t)}$$

çözümleriyle karşılaştırılır. Bu denklemleri yeniden düzenlediğimizde sırasıyla

$$u(x,t) = -2\sqrt{2}k + \frac{6\sqrt{2}k}{2 + \cos(2kx - 8k^3t)}$$

ve

$$u(x, t) = -2\sqrt{2}k + \frac{6\sqrt{2}k}{2 - \cos(2kx - 8k^3t)}$$

elde edilir. Eğer $a_1 = -2\sqrt{2}k$ seçersek (2.54) ile verilen çözüm, yukarıdaki denklemlerde ifade edildiği gibi Zhu ve diğ.'nin çözümlerini meydana getirir.

Böylece önerilen üstel fonksiyon metoduyla lineer olmayan dalga çözümleri için kolayca geliştirilmiş solitonsu çözüm ve compact-like çözüm elde edilebilir.

Ayrıca KdV-mKdV kombinasyonlu denkleme üstel fonksiyon metodunun uygulanmasını Wu ve He (2007) makalesinden bakılabilir. Daha fazla bilgi için He ve Wu (2006) makalesi incelenebilir.

2.6 (G'/G)- Açılım Yöntemi

(G'/G)-açılım metodu yürüyen dalga çözümlerinin oluşturulmasında başarılı bir şekilde kullanılır. Birçok iyi bilinen lineer olmayan dalga denklemleri bu metotla ele alınır. (G'/G)-açılım metodu güvenilir, etkili ve fazla çözümler verir (Bekir 2008).

(G'/G)-metodu için yüzey su dalgaları veya plazma içindeki iyon ses dalgaları gibi birçok fiziksel problemde karşımıza çıkan

$$u_t + uu_x + \delta u_{xxx} = 0 \quad (2.55)$$

formlu KdV denklemini ele alalım. (2.55) denklemini

$$u(x, t) = u(\xi), \quad \xi = x - Vt$$

yürüyen dalga değişkeni yardımıyla $u = u(\xi)$ için

$$-Vu' + uu' + \delta u''' = 0$$

adi diferansiyel denklemine dönüşür. Bu denklem ξ 'ye göre integrali alındığında

$$C - Vu + \frac{1}{2}u^2 + \delta u'' = 0 \quad (2.56)$$

şeklinde elde edilir. Burada C daha sonra belirlenecek olan bir integrasyon sabitidir. (2.56) denkleminin çözümü

$$u(\xi) = \alpha_m \left(\frac{G'}{G} \right)^m + \dots \quad (2.57)$$

olarak ifade edilir. $G = G(\xi)$,

$$G'' + \lambda G' + \mu G = 0 \quad (2.58)$$

formundaki ikinci mertebeden lineer adi diferansiyel denklemi sağlar. (2.57) ve (2.58) kullanılarak kolayca

$$u^2 = \alpha_m^2 \left(\frac{G'}{G} \right)^{2m} + \dots \quad (2.59)$$

$$u' = -m\alpha_m \left(\frac{G'}{G} \right)^{m+1} + \dots$$

$$u'' = m(m+1)\alpha_m \left(\frac{G'}{G} \right)^{m+2} + \dots \quad (2.60)$$

elde edilir. (2.56) denkleminde u^2 ve u'' arasında (2.59) ve (2.60)'a dayanarak bir homojen denge kurulur. Öyle ki

$$2m = m + 2$$

$$m = 2.$$

Bu yüzden (2.57) açılımı

$$u(\xi) = \alpha_2 \left(\frac{G'}{G} \right)^2 + \alpha_1 \left(\frac{G'}{G} \right) + \alpha_0, \quad \alpha_2 \neq 0 \quad (2.61)$$

olarak yazılır. Dolayısıyla

$$u^2(\xi) = \alpha_2^2 \left(\frac{G'}{G} \right)^4 + 2\alpha_2\alpha_1 \left(\frac{G'}{G} \right)^3 + (\alpha_1^2 + 2\alpha_2\alpha_0) \left(\frac{G'}{G} \right)^2 + 2\alpha_1\alpha_0 \left(\frac{G'}{G} \right) + \alpha_0^2 \quad (2.62)$$

bulunur. (2.61) ve (2.58) kullanılarak

$$u''(\xi) = 6\alpha_2 \left(\frac{G'}{G}\right)^4 + (2\alpha_1 + 10\alpha_2\lambda) \left(\frac{G'}{G}\right)^3 + (8\alpha_2\mu + 3\alpha_1\lambda + 4\alpha_2\lambda^2) \left(\frac{G'}{G}\right)^2 + (6\alpha_2\lambda\mu + 2\alpha_1\mu + \alpha_1\lambda^2) \left(\frac{G'}{G}\right) + 2\alpha_2\mu^2 + \alpha_1\lambda\mu \quad (2.63)$$

elde edilir.

(2.61), (2.62) ve (2.63) denklemleri (2.56) denklemine yerine yazılır ve (G'/G) 'nin aynı kuvvetli bütün terimleri toplanır. Daha sonra (G'/G) 'nin kuvvetlerinin katsayıları sıfıra eşitlenir. $\alpha_2, \alpha_1, \alpha_0, V, \lambda, \mu$ ve C için cebirsel denklemler kurulduğunda elde edilen sonuçlar aşağıdaki gibidir.

$$\begin{aligned} 0: & C - V\alpha_0 + \frac{1}{2}\alpha_0^2 + \delta(2\alpha_2\mu^2 + \alpha_1\lambda\mu) = 0, \\ 1: & -V\alpha_1 + \alpha_1\alpha_0 + \delta(6\alpha_2\lambda\mu + 2\alpha_1\mu + \alpha_1\lambda^2) = 0, \\ 2: & -V\alpha_2 + \frac{1}{2}(\alpha_1^2 + 2\alpha_2\alpha_0) + \delta(8\alpha_2\mu + 3\alpha_1\lambda + 4\alpha_2\lambda^2) = 0, \\ 3: & \alpha_2\alpha_1 + \delta(2\alpha_1 + 10\alpha_2\lambda) = 0, \\ 4: & \frac{1}{2}\alpha_2^2 + 6\delta\alpha_2 = 0. \end{aligned}$$

Yukarıdaki cebirsel denklemler çözüldüğünde λ, μ ve α_0 keyfi sabitler olmak üzere

$$\begin{aligned} \alpha_2 &= -12\delta, \quad \alpha_1 = -12\delta\lambda, \quad V = \alpha_0 + 8\delta\mu + \delta\lambda^2, \\ C &= \frac{1}{2}\alpha_0^2 + (8\delta\mu + \delta\lambda^2)\alpha_0 + 24\delta^2\mu^2 + 12\delta^2\lambda^2\mu \end{aligned} \quad (2.64)$$

elde edilir.

(2.64) kullanılarak $\xi = x - (\alpha_0 + 8\delta\mu + \delta\lambda^2)t$ olmak üzere (2.61) açılımı

$$u(\xi) = -12\delta \left(\frac{G'}{G}\right)^2 - 12\delta\lambda \left(\frac{G'}{G}\right) + \alpha_0 \quad (2.65)$$

şeklinde yazılabilir. (2.56) denklemine C integrasyon sabiti (2.64)'deki gibi alınması şartıyla, (2.65) denklemini (2.56) denkleminin bir çözümünün formülüdür.

(2.58) denkleminin genel çözümleri (2.65) denkleminde yerine yazılmasıyla aşağıdaki gibi KdV denkleminin yürüyen dalga çözümlerinin üç tipi bulunur:

$$\lambda^2 - 4\mu > 0 \text{ iken,}$$

$$u_1(\xi) = -3\delta(\lambda^2 - 4\mu) \left(\frac{C_1 \sinh \frac{1}{2} \sqrt{\lambda^2 - 4\mu} \xi + C_2 \cosh \frac{1}{2} \sqrt{\lambda^2 - 4\mu} \xi}{C_1 \cosh \frac{1}{2} \sqrt{\lambda^2 - 4\mu} \xi + C_2 \sinh \frac{1}{2} \sqrt{\lambda^2 - 4\mu} \xi} \right)^2 + 3\delta\lambda^2 + \alpha_0$$

elde edilir. Burada $\xi = x - (\alpha_0 + 8\delta\mu + \delta\lambda^2)t$ 'dir ve C_1, C_2 keyfi sabitlerdir.

C_1 ve C_2 özel değerler olarak alınır, literatürde bilinen çeşitli sonuçlar yeniden keşfedilebilir. Örneğin $C_1 > 0$, $C_1^2 > C_2^2$ ise o zaman $u_1 = u_1(\xi)$,

$$u_1(\xi) = 3\delta(\lambda^2 - 4\mu) \operatorname{sech}^2 \left(\frac{1}{2} \sqrt{\lambda^2 - 4\mu} \xi + \xi_0 \right) + 12\delta\mu + \alpha_0$$

olarak yazılabilir. Bu da (2.55) KdV denkleminin iyi bilinen soliter dalga çözümüdür. Burada $\xi_0 = \tanh^{-1}(C_2/C_1)$, $\xi = x - (\alpha_0 + 8\delta\mu + \delta\lambda^2)t$ 'dir.

$$\lambda^2 - 4\mu < 0 \text{ iken,}$$

$$u_2(\xi) = -3\delta(4\mu - \lambda^2) \left(\frac{-C_1 \sin \frac{1}{2} \sqrt{4\mu - \lambda^2} \xi + C_2 \cos \frac{1}{2} \sqrt{4\mu - \lambda^2} \xi}{C_1 \cos \frac{1}{2} \sqrt{4\mu - \lambda^2} \xi + C_2 \sin \frac{1}{2} \sqrt{4\mu - \lambda^2} \xi} \right)^2 + 3\delta\lambda^2 + \alpha_0$$

elde edilir. Burada $\xi = x - (\alpha_0 + 8\delta\mu + \delta\lambda^2)t$ 'dir ve C_1, C_2 keyfi sabitlerdir.

$$\lambda^2 - 4\mu = 0 \text{ iken,}$$

$$u_3(\xi) = -12\delta \frac{C_2^2}{(C_1 + C_2\xi)} + 3\delta\lambda^2 + \alpha_0,$$

$$\xi = x - (\alpha_0 + 3\delta\lambda^2)t$$

elde edilir. C_1 ve C_2 keyfi sabitlerdir.

Zhang ve diğ.'nin (2008) makalesinde değişken katsayılı değiştirilmiş KdV denkleminde genelleştirilmiş (G'/G) -açılım metodu ve Zhu (2010)

makalesinde değiştirilmiş KdV denklemi üzerinde genişletilmiş (G'/G) -açılım metodu kullanılmasına bakılabilir. Ayrıca daha geniş bilgi için Wang ve diğ.'nin (2008) makalesi incelenebilir.

2.7 Jacobi Eliptik Fonksiyon Açılım Yöntemi

KdV denklemini

$$u_t + uu_x + \beta u_{xxx} = 0 \quad (2.66)$$

olarak ele alalım. k ve c sırasıyla dalga sayısı ve dalga hızı olmak üzere

$$u = u(\xi), \quad \xi = k(x - ct)$$

dalga dönüşümünün (2.66) denkleminde uygulanmasıyla

$$-cu' + uu' + \beta k^2 u''' = 0 \quad (2.67)$$

elde edilir. (2.66) denkleminin çözümünü, $\text{sn} \xi$ Jacobi eliptik fonksiyonun sonlu bir serisi olarak

$$u(\xi) = \sum_{j=0}^n a_j \text{sn}^j \xi \quad (2.68)$$

formunda kabul edelim. (2.68)'in en yüksek derecesi

$$O(u(\xi)) = n$$

şeklindedir. Burada n , (2.68)'in çeşitli mertebeden türevlerini (2.67)'de yerine yazılmasıyla oluşan lineer olmayan denklemde en yüksek mertebeden türevli terim ile en yüksek dereceden lineer olmayan terim arasındaki denge kurularak bulunur. (2.68) denkleminin türevi

$$\frac{du}{d\xi} = \sum_{j=0}^n j a_j \text{sn}^{j-1} \xi \text{cn} \xi \text{dn} \xi$$

şeklindedir. Burada $\text{sn}\xi$, $\text{cn}\xi$ ve $\text{dn}\xi$ standart Jacobi eliptik fonksiyonlarıdır. Daha yüksek türevler için $0 < m < 1$ olmak üzere

$$\text{cn}^2\xi = 1 - \text{sn}^2\xi, \quad \text{dn}^2\xi = 1 - m^2\text{sn}^2\xi$$

ve

$$\frac{d}{d\xi}\text{sn}\xi = \text{cn}\xi\text{dn}\xi, \quad \frac{d}{d\xi}\text{cn}\xi = -\text{sn}\xi\text{dn}\xi, \quad \frac{d}{d\xi}\text{dn}\xi = -m^2\text{sn}\xi\text{cn}\xi$$

özellikleri kullanılır. $\frac{d^p u}{d\xi^p}$ 'nin en yüksek derecesi

$$O\left(\frac{d^p u}{d\xi^p}\right) = n + p, \quad p = 1, 2, 3, \dots \quad (2.69)$$

ve

$$O\left(u^q \frac{d^p u}{d\xi^p}\right) = (q+1)n + p, \quad q = 0, 1, 2, \dots, \quad p = 1, 2, 3, \dots \quad (2.70)$$

olarak alınır. Böylece (2.69) ve (2.70)'den

$$O(uu_\xi) = 2n + 1, \quad O\left(\frac{d^3 u}{d\xi^3}\right) = n + 3$$

bulunur. Buna göre $n = 2$ elde edilir. (2.68)'de yerine yazılmasıyla (2.66) ile verilen KdV denkleminin çözümü

$$u(\xi) = a_0 + a_1\text{sn}\xi + a_2\text{sn}^2\xi \quad (2.71)$$

formunda bulunur. (2.71) için gerekli olan türevler aşağıdaki gibi elde edilir:

$$u' = (a_1 + 2a_2\text{sn}\xi)\text{cn}\xi\text{dn}\xi,$$

$$uu' = [a_0a_1 + (a_1^2 + 2a_0a_2)\text{sn}\xi + 3a_1a_2\text{sn}^2\xi + 2a_2^2\text{sn}^3\xi]\text{cn}\xi\text{dn}\xi,$$

$$u'' = 2a_2 - (1 + m^2)a_1\text{sn}\xi - 4(1 + m^2)a_2\text{sn}^2\xi + 2m^2a_1\text{sn}^3\xi + 6m^2a_2\text{sn}^4\xi,$$

$$u''' = [-(1 + m^2)a_1 - 8(1 + m^2)a_2\text{sn}\xi + 6m^2a_1\text{sn}^2\xi + 24m^2a_2\text{sn}^3\xi]\text{cn}\xi\text{dn}\xi.$$

Gerekli mertebeden türevler (2.67)'de yerine yazılmasıyla

$$-\left[c - a_0 + (1 + m^2)\beta k^2 \right] a_1 \operatorname{cn} \xi \operatorname{dn} \xi + \left\{ a_1^2 - 2 \left[c - a_0 + 4(1 + m^2)\beta k^2 \right] a_2 \right\} \operatorname{sn} \xi \operatorname{cn} \xi \operatorname{dn} \xi + 3a_1(a_2 + 2m^2\beta k^2) \operatorname{sn}^2 \xi \operatorname{cn} \xi \operatorname{dn} \xi + 2a_2(a_2 + 12m^2\beta k^2) \operatorname{sn}^3 \xi \operatorname{cn} \xi \operatorname{dn} \xi = 0$$

elde edilir. Böylece katsayı değerleri

$$a_1 = 0, \quad a_2 = -12m^2\beta k^2, \quad a_0 = c + 4(1 + m^2)\beta k^2 \quad (2.72)$$

olarak bulunur. (2.72), (2.71)'de yerine yazıldığında

$$u = c + 4(1 + m^2)\beta k^2 - 12m^2\beta k^2 \operatorname{sn}^2 \xi = c + 4(1 - 2m^2)\beta k^2 + 12m^2\beta k^2 \operatorname{cn}^2 \xi \quad (2.73)$$

şeklinde bir çözüm elde edilir. Bu da (2.66)'da belirtilen KdV denklemi için tam periyodik çözümdür. Genellikle KdV denkleminin knoidal⁷ (cnoidal) dalga çözümü olarak adlandırılır.

$m = 1$ alınarak (2.73) çözümü

$$u = c - 4\beta k^2 + 12\beta k^2 \operatorname{sech}^2 \xi \quad (2.74)$$

çözümüne indirgenir. Bu da KdV denkleminin soliter dalga çözümüdür. Özel olarak $c = 4\beta k^2$ alındığında (2.74) çözümü

$$u = 3c \operatorname{sech}^2 \left(\sqrt{\frac{c}{4\beta}} (x - ct) \right)$$

haline gelir.

Ayrıca Fu ve diğ.'nin (2001) makalesinden standart Jacobi eliptik fonksiyon açılımlarına bakılabilir. Daha geniş bilgi için de Li ve diğ.'nin (2001) makalesi incelenebilir.

⁷ Cnoidal çözüm Jacobi eliptik fonksiyon olan cn 'den dolayı cnoidal dalgalar diye adlandırılmıştır. Dalga derinliği ile karşılaştırıldığından oldukça uzun dalga boylarının yerçekim dalgalarının yüzeyini tarif etmede kullanılır.

3. KdV DENKLEMİ İÇİN YAKLAŞIK YÖNTEMLER

Bu bölümde KdV denklemi üzerinde sırasıyla Adomian ayrışım, varyasyonel iterasyon, diferansiyel dönüşüm, indirgenmiş diferansiyel dönüşüm, homotopi pertürbasyon ve homotopi analiz metotları kullanılarak yaklaşık çözümler elde edilecektir.

3.1 Adomian Ayrışım Yöntemi

Adomian ayrışım metodu ilk olarak G. Adomian¹ tarafından ele alınmıştır. Metot için

$$u_t + 6u^m u_x + u_{xxx} = 0 \quad (3.1)$$

formundaki genelleştirilmiş KdV denklemini ele alalım. L diferansiyel operatörü

$$L \equiv \frac{\partial}{\partial t}$$

ve L^{-1} ters operatörü de

$$L^{-1}(\cdot) = \int_0^t (\cdot) dt \quad (3.2)$$

integral operatörünü vermek üzere (3.1) denkleminin operatör formu

$$\begin{aligned} Lu &= -6u^m u_x - u_{xxx} \\ u(x, 0) &= f(x) \end{aligned} \quad (3.3)$$

şeklindedir. Adomian ayrışım metodunda (Adomian 1994, Adomian 1998, Wazwaz 2000), $u(x, t)$ bilinmeyen fonksiyonu için

$$u(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x, t) \quad (3.4)$$

¹ George Adomian (1922-1996), Amerikan matematikçi ve uçak mühendisi.

şeklinde seri çözümü varsayılır ve $F(u) = u^m u_x$ lineer olmayan terimi

$$F(u) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \quad (3.5)$$

biçiminde polinomların sonsuz serisine ayrıştırılabilir. Burada $u_n(x, t)$ terimleri yinelemeli olarak belirlenecektir. $u_0, u_1, u_2, \dots, u_n$ 'in Adomian polinomları A_n ;

$$A_n = \frac{1}{n!} \frac{d^n}{d\lambda^n} \left[F \left(\sum_{i=0}^{\infty} \lambda^i u_i \right) \right]_{\lambda=0}$$

şeklinde tanımlanır ve bu polinomlar Adomian (1994, 1998) tarafından verilen algoritmalara göre, her çeşit lineer olmama durumu için hesaplanabilir. Son zamanlarda da Wazwaz (2000) tarafından alternatif bir yaklaşım geliştirilmiştir.

(3.3)'ün her iki tarafında L^{-1} integral operatörü işleme konularak ve başlangıç koşulunu kullanarak

$$u(x, t) = f(x) + L^{-1}(-6u^m u_x - u_{xxx}) \quad (3.6)$$

bulunur. (3.4) ve (3.5), (3.6) fonksiyonel denkleminde yerine yazılmasıyla

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x, t) = f(x) + L^{-1} \left(-6 \left(\sum_{n=0}^{\infty} A_n \right) - \left(\sum_{n=0}^{\infty} u_n \right)_{xxx} \right)$$

elde edilir.

Adomian ayrışım metodu, sıfıncı terim $u_0(x, t)$ 'nin başlangıç koşullarından ve kaynak terimlerinden ortaya çıkan tüm terimler ile belirleneceğini kabul eder. Sonuç olarak $u_n(x, t)$, $n \geq 1$ için terimleri

$$u_0(x, t) = f(x)$$

$$u_{k+1}(x, t) = L^{-1} \left(-6A_k - (u_k)_{xxx} \right), \quad k \geq 0$$

kullanılarak belirlenebilir. Burada A_k , $(u^m u_x)$ lineer olmayan terimi temsil eden Adomian polinomlarıdır ve

$$\begin{aligned}
A_0 &= u_0^m u_{0_x}, \\
A_1 &= m u_0^{m-1} u_{0_x} u_1 + u_0^m u_{1_x}, \\
A_2 &= m u_0^{m-1} u_1 u_{1_x} + \frac{1}{2} m(m-1) u_{0_x} u_0^{m-2} u_1^2 + m u_{0_x} u_0^{m-1} u_2 + u_0^m u_{2_x}, \\
A_3 &= \frac{1}{2} m(m-1) u_0^{m-2} u_1 u_{1_x}^2 + m(m-1) u_{0_x} u_0^{m-2} u_1 u_2 + m u_0^{m-1} u_1 u_{2_x} + m u_0^{m-1} u_1 u_2, \\
&\quad \frac{1}{2} m(m-1)(m-2) u_{0_x} u_0^{m-3} u_1^3 + m u_{0_x} u_0^{m-1} u_3 + u_0^m u_{3_x}
\end{aligned}$$

ile verilir. Diğer polinomlar da bu şekilde üretilebilir. İlk birkaç $u_n(x, t)$ terimi aşağıdaki gibidir:

$$\begin{aligned}
u_0(x, t) &= f(x), \\
u_1(x, t) &= L^{-1}(-6A_0 - (u_0)_{xxx}), \\
u_2(x, t) &= L^{-1}(-6A_1 - (u_1)_{xxx}), \\
u_3(x, t) &= L^{-1}(-6A_2 - (u_2)_{xxx}), \\
u_4(x, t) &= L^{-1}(-6A_3 - (u_3)_{xxx}).
\end{aligned} \tag{3.7}$$

Sonuç olarak $\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x, t)$ serisinin bütün terimleri bu şekilde belirlenebilir.

(3.7)'nin (3.4)'de yerine yazılmasıyla

$$u(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x, t) = u_0(x, t) + u_1(x, t) + u_2(x, t) + u_3(x, t) + u_4(x, t) + \dots$$

şeklinde Adomian ayrışım metoduyla genelleştirilmiş KdV denkleminin bir seri çözümü elde edilmiş olur. Dikkat edelim ki seri çözümü sadece başlangıç koşulu kullanılarak elde edildi. Daha fazla bilgi için Helal ve Mehanna (2007) makalesine bakılabilir.

Şimdi bahsettiğimiz Adomian ayrışım metodunu Wazwaz (2001) kaynağı ele alarak,

$$\begin{aligned}
u_t - 6uu_x + u_{xxx} &= 0, \quad x \in \mathbb{R} \\
u(x, 0) &= f(x) = -2(k^2 e^{kx}) / (1 + e^{kx})^2
\end{aligned} \tag{3.8}$$

başlangıç değer problemi üzerinde uygulayalım. Burada $u = u(x, t)$, yeterli miktarda diferansiyellenebilir fonksiyon ve $f(x)$ sınırlıdır. Daha önce gösterildiği gibi $x \rightarrow \infty$ 'a giderken türevleriyle birlikte $u(x, t)$ çözümünün sıfıra gittiğini kabul edeceğiz.

(3.2)'deki ters operatör L^{-1} 'yi (3.8)'in her iki tarafında uygulanmasıyla ve de (3.4) ve (3.5) serilerinin kullanılmasıyla

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x,t) = -2 \frac{k^2 e^{kx}}{(1+e^{kx})^2} + L^{-1} \left(6 \left(\sum_{n=0}^{\infty} A_n \right) - \left(\sum_{n=0}^{\infty} u_n \right)_{xxx} \right)$$

elde edilir. Daha önce gösterildiği gibi Adomian ayrışım metodu,

$$u_0(x,t) = -2 \frac{k^2 e^{kx}}{(1+e^{kx})^2},$$

$$u_{k+1}(x,t) = L^{-1} (6A_k - u_{k,xxx}), \quad k \geq 0$$

şeklinde yineleme bağıntısı verir. Burada A_k 'lar Adomian polinomlarıdır ve uu_x lineer olmayan terimi temsil eder. $m=1$ için şu şekilde hesaplanır:

$$A_0 = u_{0,x} u_0,$$

$$A_1 = u_{0,x} u_1 + u_{1,x} u_0,$$

$$A_2 = u_{0,x} u_2 + u_{1,x} u_1 + u_{2,x} u_0,$$

$$A_3 = u_{0,x} u_3 + u_{1,x} u_2 + u_{2,x} u_1 + u_{3,x} u_0,$$

$$A_4 = u_{0,x} u_4 + u_{1,x} u_3 + u_{2,x} u_2 + u_{3,x} u_1 + u_{4,x} u_0.$$

Diğer polinomlar da aynı şekilde üretilebilir. Sonuç olarak aşağıdaki terimler elde edilir:

$$u_0(x,t) = -2 \frac{k^2 e^{kx}}{(1+e^{kx})^2},$$

$$u_1(x,t) = L^{-1} (6A_0 - u_{0,xxx}) = -2 \frac{k^5 e^{kx} (e^{kx} x - 1)}{(1+e^{kx})^3} t,$$

$$u_2(x,t) = L^{-1} (6A_1 - u_{1,xxx}) = -\frac{k^8 e^{kx} (e^{2kx} - 4e^{kx} + 1)}{(1+e^{kx})^4} t^2, \quad (3.9)$$

$$u_3(x,t) = L^{-1} (6A_2 - u_{2,xxx}) = -\frac{1}{3} \frac{k^{11} e^{kx} (e^{3kx} - 11e^{2kx} + 11e^{kx} - 1)}{(1+e^{kx})^5} t^3,$$

$$u_4(x,t) = L^{-1} (6A_3 - u_{3,xxx}) = -\frac{1}{12} \frac{k^{14} e^{kx} (e^{4kx} - 26e^{3kx} + 66e^{2kx} - 26e^{kx} + 1)}{(1+e^{kx})^6} t^4.$$

(3.9)'a göre,

$$u(x,t) = -2 \frac{k^2 e^{kx}}{(1+e^{kx})^2} - 2 \frac{k^5 e^{kx} (e^{kx} x - 1)}{(1+e^{kx})^3} t - \frac{k^8 e^{kx} (e^{2kx} - 4e^{kx} + 1)}{(1+e^{kx})^4} t^2 - \frac{1}{3} \frac{k^{11} e^{kx} (e^{3kx} - 11e^{2kx} + 11e^{kx} - 1)}{(1+e^{kx})^5} t^3 - \frac{1}{12} \frac{k^{14} e^{kx} (e^{4kx} - 26e^{3kx} + 66e^{2kx} - 26e^{kx} + 1)}{(1+e^{kx})^6} t^4 + \dots$$

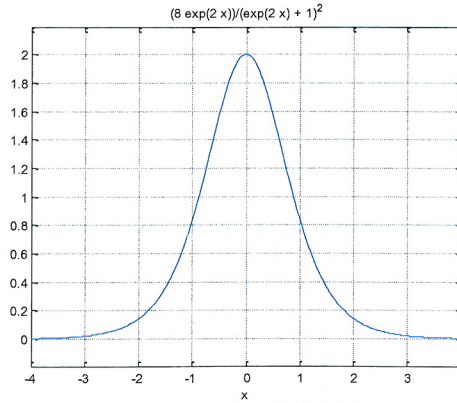
şeklinde seri formülü çözüm ve Taylor serisi kullanılarak kolayca

$$u(x,t) = -2 \frac{k^2 e^{k(x-k^2 t)}}{(1+e^{k(x-k^2 t)})^2}$$

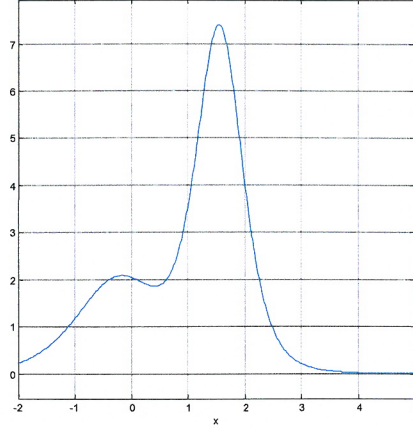
şeklinde tam çözüm elde edilir. Bu çözüm $k = 2$ ve $t = 0$ için

$$u(x,t) = \frac{-8e^{2x}}{(1+e^{2x})^2} \quad (3.10)$$

haline gelir. (3.10) tek soliton çözümü Şekil 3.1'de $-u$ olarak gösterilmiştir.



Şekil 3.1: $k = 2$, $t = 0$ ve $-4 \leq x \leq 4$ için KdV denkleminin tek soliton çözümü



Şekil 3.2: $t = 0.008$, $-2 \leq x \leq 5$ için KdV denkleminin iki-soliton çözümü

Eğer (3.8) başlangıç değer probleminde başlangıç koşulunu $u(x, 0) = -6\text{sech}^2 x$ olarak alır ve aynı metot ile çözersek,

$$u(x, t) = 12 \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{e^{8t-2x} + 2e^{64t-4x} + e^{72t-6x}}{1 + 3e^{8t-2x} + 3e^{64t-4x} + e^{72t-6x}} \right)$$

şeklinde bir çözüm elde edilir. Bu iki-soliton çözümü de $-u$ alınarak, Şekil 3.2’de gösterilmiştir.

Ayrıca (3.1) denkleminin farklı m değerleri için oluşturulan başlangıç değer problemlerinin çözümü için, Helal ve Mehanna (2007) makalesine bakılabilir.

3.2 Varyasyonel İterasyon Yöntemi

Varyasyonel iterasyon metodu J. H. He tarafından geliştirilmiştir. Adomian ayrışım metodunda lineer olmayan terimle ilgili hesaplama algoritması kullanılırken, bunun aksine varyasyonel iterasyon metodunda böyle bir kısıtlama olmadan doğrudan kullanılır. Diğer bir avantajı da yüksek doğrulukta nümerik çözümleri sağlarken hesaplama boyutunu büyük ölçüde azaltmayı sağlamasıdır.

$$Lu + Nu = g(t) \quad (3.11)$$

diferansiyel denklemini düşünelim. L ve N sırasıyla lineer ve lineer olmayan operatörlerdir ve $g(t)$ homojen olmayan kaynak terimidir. He tarafından ortaya atılan varyasyonel iterasyon metoduna göre (3.11) denklemi için düzeltme fonksiyoneli

$$u_{n+1}(t) = u_n(t) + \int_0^t \lambda (Lu_n(\xi) + N\tilde{u}_n(\xi) - g(\xi)) d\xi$$

olarak yazılabilir. Burada λ , genel Lagrange çarpanı olup varyasyon teorisinden hareketle uygun olarak belirlenebilir. \tilde{u}_n sınırlanmış varyasyon olup $\delta\tilde{u}_n = 0$ 'dır. Bu metotla ilk olarak uygun şekilde tespit edilecek olan λ Lagrange çarpanının belirlenmesi gerekir. u çözümünün u_{n+1} , $n \geq 0$ ardışık yaklaşımları, herhangi bir seçici u_0 fonksiyonu ve belirlenmiş Lagrange çarpanı kullanılarak kolayca elde edilir. Sonuç olarak çözüm

$$u = \lim_{n \rightarrow \infty} u_n \quad (3.12)$$

ile verilir.

Şimdi varyasyonel iterasyon metodunu

$$u_t - 6uu_x + u_{xxx} = 0$$

standart KdV denklemi üzerinde uygulayalım. Denkleminde lineer olmayan kısmı $(-3(u^2)_x)$ olarak düşünebiliriz. O halde KdV denklemini

$$u_t - 3(u^2)_x + u_{xxx} = 0, \quad u(x, 0) = 6x \quad (3.13)$$

olarak ele alalım. (3.13) için düzeltme fonksiyoneli

$$u_{n+1}(x, t) = u_n(x, t) + \int_0^t \lambda(\xi) \left(\frac{\partial u_n(x, \xi)}{\partial \xi} - 3 \frac{\partial (\tilde{u}_n)^2(x, \xi)}{\partial x} + \frac{\partial^3 (\tilde{u}_n)(x, \xi)}{\partial x^3} \right) d\xi \quad (3.14)$$

şeklindedir. Bu

$$\lambda' = 0, \quad 1 + \lambda = 0$$

durağan koşulları (stationary conditions) sağlar. Dolayısıyla buradan

$$\lambda = -1$$

bulunur. Lagrange çarpanının değeri (3.14) fonksiyoneline yerine yazılmasıyla

$$u_{n+1}(x, t) = u_n(x, t) - \int_0^t \left(\frac{\partial u_n(x, \xi)}{\partial \xi} - 3 \frac{\partial (\tilde{u}_n)^2(x, \xi)}{\partial x} + \frac{\partial^3 (\tilde{u}_n)(x, \xi)}{\partial x^3} \right) d\xi, \quad n \geq 0 \quad (3.15)$$

iterasyon formülü bulunur. $u_0(x, t)$ için $u(x, 0) = 6x$ başlangıç değerinin seçilmesi ve (3.15)'in kullanılmasıyla aşağıdaki ardışık yaklaşımları elde ederiz:

$$\begin{aligned} u_0(x, t) &= 6x, \\ u_1(x, t) &= 6x(1 + 36t), \\ u_2(x, t) &= 6x(1 + 36t + 1296t^2 + 15552t^3), \\ u_3(x, t) &= 6x(1 + 36t + 1296t^2 + 15552t^3 + 1119744t^4 + 20155392t^5) + \text{küçük terimler}, \\ u_4(x, t) &= 6x(1 + 36t + 1296t^2 + 46656t^3 + 1679616t^4 + 60466176t^5 + 217678233t^6) + \text{küçük terimler}, \\ &\vdots \\ u_n(x, t) &= 6x(1 + 36t + 1296t^2 + 46656t^3 + 1679616t^4 + 60466176t^5 + 217678233t^6 \\ &\quad + 78364164096t^7 + \dots). \end{aligned}$$

Son olarak (3.12) işlemine göre

$$u(x, t) = \frac{6x}{1 - 36t}, \quad |36t| < 1$$

çözümü bulunur. Daha geniş bilgi için Wazwaz (2007) kaynağı incelenebilir.

Yine aynı metot yardımıyla

$$u(x, 0) = \frac{12k^2 m^2}{\alpha} \text{cn}^2[kx, m]$$

başlangıç koşulu altındaki

$$u_t + \alpha u u_x + u_{xxx} = 0$$

ve

$$u_t + 6u^2 u_x + u_{xxx} = 0$$

KdV denklemlerinin çözümleri için Inc (2007) kaynağına bakılabilir.

3.3 Diferansiyel Dönüşüm Yöntemi

Diferansiyel dönüşüm metodu, ilk olarak Çin’li bir bilim adamı olan J. K. Zhou tarafından elektrik devre analizinde ortaya çıkan problemleri çözmeye kullanılmıştır (Keskin 2010).

İki boyutlu diferansiyel dönüşümün temel tanım ve işlemleri aşağıdaki gibi verilmiştir:

Eğer $u(x,t)$ ilgilendiğimiz bölgede analitik ve y ’ye göre sürekli integrallenebilir ise, o halde

$$U(k,h) = \frac{1}{k!h!} \left[\frac{\partial^{k+h} u(x,t)}{\partial x^k \partial t^h} \right]_{\substack{x=x_0 \\ t=t_0}} \quad (3.16)$$

olur. Burada $U(k,h)$ spektrumu dönüştürülmüş (transformed) fonksiyondur ve kısaca T-fonksiyonu olarak adlandırılır. Büyük harfle belirtilen $U(k,h)$ dönüştürülmüş fonksiyonu (T-fonksiyonu) temsil ederken, küçük harfle belirtilen $u(x,t)$ orijinal fonksiyonu temsil eder.

$U(k,h)$ ’ın diferansiyel ters dönüşümü aşağıdaki gibidir:

$$u(x,t) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{h=0}^{\infty} U(k,h) (x-x_0)^k (t-t_0)^h. \quad (3.17)$$

(3.16) ve (3.17)’nin birleştirilmesiyle

$$u(x,t) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{h=0}^{\infty} \frac{1}{k!h!} \left[\frac{\partial^{k+h} u(x,t)}{\partial x^k \partial t^h} \right]_{\substack{x=x_0 \\ t=t_0}} (x-x_0)^k (t-t_0)^h \quad (3.18)$$

elde edilebilir. (x_0, t_0) , $(0,0)$ olarak alındığında (3.18) denklemi

$$u(x,t) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{h=0}^{\infty} \frac{1}{k!h!} \left[\frac{\partial^{k+h} u(x,t)}{\partial x^k \partial t^h} \right]_{\substack{x=x_0 \\ t=t_0}} x^k t^h \quad (3.19)$$

olarak ifade edilir ve (3.19) denklemi

$$u(x,t) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{h=0}^{\infty} U(k,h)x^k t^h \quad (3.20)$$

olarak gösterilir. (3.20) çözümü uygulamalarda sonlu seri haline gelir ve

$$u(x,t) = \sum_{k=0}^n \sum_{h=0}^m U(k,h)x^k t^h$$

şeklinde yazılabilir. Bu (3.20)'in kalan kısmı $\sum_{k=n+1}^{\infty} \sum_{h=m+1}^{\infty} U(k,h)x^k t^h$, ihmal edilebilecek kadar küçük olmasını gerektirir. Genellikle n ve m değerleri, seri katsayılarının yakınsaklığından belirlenir.

Diferansiyel dönüşüm metodunun temel işlemleri Tablo 3.1'de verilmiştir.

Tablo 3.1: Diferansiyel Dönüşüm Tablosu

Orijinal fonksiyon	Dönüştürülmüş fonksiyon
$u(x,t) \pm v(x,t)$	$U(k,h) \pm V(k,h)$
$\lambda u(x,t)$	$\lambda U(k,h)$, λ bir sabittir.
$\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}$	$(k+1)U(k+1,h)$
$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}$	$(h+1)U(k,h+1)$
$\frac{\partial^{r+s} u(x,t)}{\partial x^r \partial t^s}$	$(k+1)(k+2)\dots(k+r)$ $(h+1)(h+2)\dots(h+s)U(k+r,h+s)$
$u(x,t) = x^m t^n$	$U(k,h) = \delta(k-m, h-n) = \delta(k-m)\delta(h-n)$ $\delta(k-m, h-n) = \begin{cases} 1, & k=m \text{ ve } h=n \\ 0, & \text{aksi halde} \end{cases}$
$u(x,t)v(x,t)$	$\sum_{r=0}^k \sum_{s=0}^h U(r,h-s)V(k-r,s)$
$u(x,t)v(x,t) \frac{\partial^2 c^2(x,t)}{\partial x^2}$	$\sum_{r=0}^k \sum_{t=0}^{k-r} \sum_{s=0}^h \sum_{p=0}^{h-s} (k-r-t+2)(k-r-t+1)$ $U(r,h-s-p)V(t,s)C(k-r-t+2,p)$
$\frac{\partial u(x,t)}{\partial x} \frac{\partial v(x,t)}{\partial x}$	$\sum_{r=0}^k \sum_{s=0}^h (r+1)(k-r+1)U(r+1,h-s)V(k-r+1,s)$
$u(x,t) \frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial x^2}$	$\sum_{r=0}^k \sum_{s=0}^h (k-r+2)(k-r+1)U(r,h-s)V(k-r+2,s)$
$u(x,t)v(x,t)q(x,t)$	$\sum_{r=0}^k \sum_{t=0}^{k-r} \sum_{s=0}^h \sum_{p=0}^{h-s} U(r,h-s-p)V(t,s)Q(k-r-t,p)$

Şimdi

$$u(x, 0) = -2 \frac{k^2 e^{kx}}{(1 + e^{kx})^2} \quad (3.21)$$

başlangıç koşulu ile birlikte

$$u_t - 6uu_x + u_{xxx} = 0, \quad x \in \mathbb{R} \quad (3.22)$$

KdV denklemini ele alalım. Burada $u = u(x, t)$, yeterli miktarda diferansiyellenebilen bir fonksiyondur. $x \rightarrow \infty$ giderken türevleriyle birlikte $u(x, t)$ çözümünün sıfıra gittiğini kabul edeceğiz.

Tablo 3.1'de belirttiğimiz dönüşümleri kullanarak (3.22) denkleminin iki boyutlu dönüşümü alındığında

$$(h+1)U(k, h+1) = 6 \sum_{r=0}^k \sum_{s=0}^h (k+1-r)U(r, h-s)U(k+1-r, s) - (k+1)(k+2)(k+3)U(k+3, h) \quad (3.23)$$

elde edilir. (3.21) koşulunun (3.20) çözümüne eşitlenmesiyle $U(k, 0)$, ($k = 0, 1, \dots$) başlangıç dönüşüm katsayıları aşağıdaki gibi elde edilir:

$$\begin{aligned} k = 1, 3, 5, \dots \text{ ise } U(k, 0) &= 0, \\ U(0, 0) &= -\frac{1}{2}k^2, \quad U(2, 0) = \frac{1}{8}k^4, \quad U(4, 0) = -\frac{1}{48}k^6. \end{aligned} \quad (3.24)$$

(3.24) denklemlerini (3.23) denkleminde uygulayarak $U(k, h)$ 'ın bazı değerlerini aşağıdaki gibi elde ederiz:

$$\begin{aligned} k = 0, 2, 4, \dots \text{ ise } U(k, 1) &= 0, \\ k = 1, 3, 5, \dots \text{ ise } U(k, 2) &= 0, \\ k = 1, 3, 5, \dots \text{ ise } U(k, 3) &= 0. \end{aligned}$$

Böylece yinelemeli metot ile $U(k, h)$ 'ın diğer değerlerini hesaplayabiliriz ve bazı sonuçlar aşağıda verilmiştir:

$$\begin{aligned} U(1, 1) &= -\frac{1}{4}k^6 & U(3, 1) &= \frac{1}{12}k^8 & U(5, 1) &= -\frac{17}{960}k^{10} & U(7, 1) &= \frac{31}{10080}k^{12} \\ U(9, 1) &= -\frac{691}{1451520}k^{14} & U(11, 1) &= \frac{5461}{79833600}k^{16} & U(0, 2) &= \frac{1}{8}k^8 & U(2, 2) &= -\frac{1}{8}k^{10} \\ U(4, 2) &= \frac{17}{384}k^{12} & U(6, 2) &= -\frac{31}{2880}k^{14} & U(8, 2) &= \frac{691}{322560}k^{16} & U(10, 2) &= -\frac{5461}{14515200}k^{18} \end{aligned}$$

Sonuç olarak bütün $U(k, h)$ (3.20) çözümünde yerine yazılır ve birkaç işlem uygulandıktan sonra (3.21) başlangıç koşullu (3.22) KdV denkleminin seri formundaki çözümünü

$$\begin{aligned}
u(x, t) = & \left\{ -\frac{1}{2}k^2 + \frac{1}{8}k^4x^2 - \frac{1}{48}k^6x^4 + \frac{17}{5760}k^8x^6 - \frac{31}{80640}k^{10}x^8 + \dots \right\} \\
& + \left\{ -\frac{1}{4}k^6xt + \frac{1}{12}k^8x^3t - \frac{17}{960}k^{10}x^5t + \frac{31}{10080}k^{12}x^7t - \frac{691}{1451520}k^{14}x^9t + \frac{5461}{79833600}k^{16}x^{11}t + \dots \right\} \\
& + \left\{ \frac{1}{8}k^8t^2 - \frac{1}{8}k^{10}x^2t^2 + \frac{17}{384}k^{12}x^4t^2 - \frac{31}{2880}k^{14}x^6t^2 + \frac{691}{322560}k^{16}x^8t^2 - \frac{5461}{14515200}k^{18}x^{10}t^2 + \dots \right\} \\
& + \left\{ \frac{5}{3}k^{11}t^3 + \left(-\frac{92}{3}k^{12}e^k + 29k^{12}(e^k)^2 + \frac{79}{2}k^{13} \right) x^2t^3 + \left(-\frac{106}{9}k^{14}e^k + \frac{183}{2}k^{13}(e^k)^2 \right. \right. \\
& \left. \left. - \frac{574}{3}k^{12}(e^k)^3 - \frac{55}{24}k^{15} + 135k^{11}(e^k)^4 \right) x^4t^3 \right\} + \dots
\end{aligned}$$

olarak elde ederiz. Yukarıdaki küme parantezi içindeki sonsuz ifadelerin kapalı formları

$$\begin{aligned}
u_0(x, t) &= -2k^2 e^{kx} / (1 + e^{kx})^2, \\
u_1(x, t) &= \left[-\frac{4k^5 (e^{kx})^2}{(1 + e^{kx})^3} + \frac{2k^5 e^{kx}}{(1 + e^{kx})^2} \right] t, \\
u_2(x, t) &= \left[\frac{2k^8 (e^{kx})^2}{(1 + e^{kx})^4} - \frac{2k^8 (e^{kx})^3}{(1 + e^{kx})^4} - \frac{k^8 e^{kx}}{(1 + e^{kx})^2} + \frac{4k^8 (e^{kx})^2}{(1 + e^{kx})^3} \right] t^2, \\
u_3(x, t) &= \left[\frac{4k^{11} (e^{kx})^3}{(1 + e^{kx})^4} - \frac{2k^{11} (e^{kx})^2}{(1 + e^{kx})^4} - \frac{2k^{11} (e^{kx})^2}{(1 + e^{kx})^3} + \frac{14k^{11} (e^{kx})^3}{3(1 + e^{kx})^5} - \frac{8k^{11} (e^{kx})^4}{3(1 + e^{kx})^5} \right. \\
& \left. - \frac{2k^{11} (e^{kx})^2}{3(1 + e^{kx})^5} + \frac{1k^{11} e^{kx}}{3(1 + e^{kx})^2} \right] t^3
\end{aligned}$$

şeklindedir ve bu şekilde devam eder. Dolayısıyla yukarıdaki denklemlerin toplanmasıyla (3.21) başlangıç koşuluyla (3.22) KdV denkleminin kapalı formulu çözümü

$$u(x, t) = -2k^2 e^{k(x-k^2t)} / (1 + e^{k(x-k^2t)})^2$$

olarak elde edilebilir.

(3.22) KdV denkleminin $u(x, 0) = -6\text{sech}^2 x$ başlangıç koşulu altındaki çözümü ve metotla ilgili daha ayrıntılı bilgi için Kangalgil ve Ayaz (2009) kaynağı incelenebilir.

3.4 İndirgenmiş Diferansiyel Dönüşüm Yöntemi

İndirgenmiş diferansiyel dönüşüm metodunu uygulamak için

$$u_t + (p+1)(p+2)u^p u_x + u_{xxx} = g(x,t) \quad (3.25)$$

şeklinde genelleştirilmiş KdV denklemini ele alalım. Burada $g(x,t)$, verilen bir fonksiyon ve $|x| \rightarrow \infty$ iken $u, u_x, u_{xxx} \rightarrow 0$ ile $p=1,2,\dots$ dir. Eğer $p=0$, $p=1$ ve $p=2$ ise (3.25) denklemi sırasıyla lineerleştirilmiş KdV, lineer olmayan KdV ve değiştirilmiş KdV denklemi olur.

İndirgenmiş diferansiyel dönüşüm metodunun temel tanımları aşağıdaki gibi sunulmuştur:

Eğer $u(x,t)$ fonksiyonu ilgilendiğimiz bölgede x uzayı ve t zamanına göre sürekli diferansiyellenebilir ise, o zaman

$$U_k(x) = \frac{1}{k!} \left[\frac{\partial^k}{\partial t^k} u(x,t) \right]_{t=0} \quad (3.26)$$

olur. Burada t - boyutlu spektrum fonksiyonu $U_k(x)$, dönüştürülmüş fonksiyondur. Büyük harfle belirtilen $U_k(x)$ dönüştürülmüş fonksiyonu temsil ederken, küçük harfle belirtilen $u(x,t)$ orijinal fonksiyonu temsil eder.

$U_k(x)$ 'nın diferansiyel ters dönüşümü aşağıdaki gibidir:

$$u(x,t) = \sum_{k=0}^{\infty} U_k(x) t^k. \quad (3.27)$$

(3.26) ve (3.27) denklemlerinin birleştirilmesiyle

$$u(x,t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \left[\frac{\partial^k}{\partial t^k} u(x,t) \right]_{t=0} t^k$$

Yukarıdaki tanımlara göre indirgenmiş diferansiyel dönüşüm metot kavramı, kuvvet seri açılımının türetilmesinden bulunabilir.

Metodu örneklemek için

$$u(x, 0) = f(x) \quad (3.28)$$

başlangıç koşulu ile

$$L(u(x, t)) + R(u(x, t)) + N(u(x, t)) = g(x, t)$$

standart operatör formundaki genelleştirilmiş KdV denklemini yazabiliriz. Burada

$L = \partial/\partial t$ ve $R = \partial^3/\partial x^3$ kısmi türevli lineer operatörlerdir.

$N(u(x, t)) = (p+1)(p+2)u^p u_x$ lineer olmayan terim ve $g(x, t)$ homojen olmayan terimdir.

İndirgenmiş diferansiyel metodunun temel işlemleri Tablo 3.2'de verilmiştir.

Tablo 3.2: İndirgenmiş Diferansiyel Dönüşüm Tablosu

Fonksiyonel form	Dönüştürülmüş form
$u(x, t)$	$U_k(x) = \frac{1}{k!} \left[\frac{\partial^k}{\partial t^k} u(x, t) \right]_{t=0}$
$u(x, t) \pm v(x, t)$	$U_k(x) \pm V_k(x)$
$\alpha u(x, t)$	$\alpha U_k(x)$ (α bir sabittir.)
$u(x, t) = x^m t^n$	$U_k(x) = x^m \delta(k-n)$, $\delta(k) = \begin{cases} 1, & k=0 \\ 0, & k \neq 0 \end{cases}$
$u(x, t) = x^m t^n u(x, t)$	$U_k(x) = x^m W_{k-n}(x)$
$u(x, t)v(x, t)$	$\sum_{r=0}^k V_r(x)U_{k-r}(x) = \sum_{r=0}^k U_r(x)V_{k-r}(x)$
$\frac{\partial^r}{\partial t^r} u(x, t)$	$(k+1)\dots(k+r)U_{k+1}(x) = \frac{(k+r)!}{k!} U_{k+r}(x)$
$\frac{\partial}{\partial x} u(x, t)$	$\frac{\partial}{\partial x} U_k(x)$

İndirgenmiş diferansiyel dönüşüm metodu ve yukarıdaki dönüşümlere göre

$$(k+1)U_{k+1}(x) = G_k(x) - R(U_k(x)) - N(U_k(x)) \quad (3.29)$$

iterasyon formülünü oluşturabiliriz. $R(U_k(x))$, $N(U_k(x))$ ve $G_k(x)$ sırasıyla

$R(u(x, t))$, $N(u(x, t))$ ve $g(x, t)$ fonksiyonlarının dönüşümleridir.

Lineer olmayan ilk birkaç terimi aşağıdaki gibi verebiliriz:

$$\begin{aligned}
 N_0 &= (p+1)(p+2)U_0^p(x) \frac{\partial}{\partial x} U_0(x), \\
 N_1 &= (p+1)(p+2) \left(pU_0^{p-1}(x)U_1(x) \frac{\partial}{\partial x} U_0(x) + U_0^p(x) \frac{\partial}{\partial x} U_1(x) \right), \\
 N_2 &= (p+1)(p+2) \left(pU_0^{p-1}(x)U_2(x) \frac{\partial}{\partial x} U_0(x) + \frac{p(p-1)}{2} U_0^{p-2}(x)U_1^2(x) \frac{\partial}{\partial x} U_1(x) \right. \\
 &\quad \left. + pU_0^{p-1}(x)U_1(x) \frac{\partial}{\partial x} U_1(x) + U_0^p(x) \frac{\partial}{\partial x} U_2(x) \right).
 \end{aligned}$$

(3.28) başlangıç koşulundan

$$U_0(x) = f(x) \quad (3.30)$$

yazarız. (3.30)'u (3.29)'da yerine yazarak ve yinelemeli hesaplar yaparak, $U_k(x)$ değerlerini elde ederiz. Bu durumda $\{U_k(x)\}_{k=0}^n$ değerler kümesinin ters dönüşümü,

$$\tilde{u}_n(x, t) = \sum_{k=0}^n U_k(x) t^k$$

şeklinde yaklaşık çözümü verir. Burada n yaklaşık çözümün mertebesidir. Dolayısıyla problemin tam çözümü

$$u(x, t) = \lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{u}_n(x, t)$$

şeklinde dir.

Şimdi metodu bir örnek üzerinde uygulayalım.

$$u(x, 0) = \frac{1}{2} \operatorname{sech}^2\left(\frac{x}{2}\right) \quad (3.31)$$

başlangıç koşuluyla

$$u_t + 6uu_x + u_{xxx} = 0, \quad x \in \mathbb{R} \quad (3.32)$$

formlu KdV denklemini ele alalım. Burada $u = u(x, t)$, x ve t değişkenli bir fonksiyondur.

İndirgenmiş diferansiyel dönüşüm metodunun temel özelliklerini kullanarak, (3.32) denkleminin dönüştürülmüş formunu $k = 1, 2, \dots$ için

$$(k+1)U_{k+1}(x) = -6 \sum_{r=0}^k U_{k-r}(x) \frac{\partial}{\partial x} U_r(x) - \frac{\partial^3}{\partial x^3} U_k(x) \quad (3.33)$$

şeklinde bulabiliriz. Burada t -boyutlu spektrum fonksiyonu $U_k(x)$, dönüştürülmüş fonksiyondur.

(3.31) başlangıç koşulundan

$$U_0(x) = \frac{1}{2} \operatorname{sech}^2 \left(\frac{x}{2} \right) \quad (3.34)$$

yazarız. (3.34)'ü (3.33)'de yerine yazarsak $U_k(x)$ değerlerini ardışık olarak aşağıdaki gibi elde ederiz:

$$\begin{aligned} U_1(x) &= \frac{1}{2} \frac{\sinh \left(\frac{x}{2} \right)}{\cosh \left(\frac{x}{2} \right)^3}, \\ U_2(x) &= \frac{1}{8} \frac{\left(2 \cosh \left(\frac{x}{2} \right)^2 - 3 \right)}{\cosh \left(\frac{x}{2} \right)^4}, \\ U_3(x) &= \frac{1}{12} \frac{\sinh \left(\frac{x}{2} \right) \left(\cosh \left(\frac{x}{2} \right)^2 - 3 \right)}{\cosh \left(\frac{x}{2} \right)^5}, \\ U_4(x) &= \frac{1}{96} \frac{\left(2 \cosh \left(\frac{x}{2} \right)^4 + 15 - 15 \cosh \left(\frac{x}{2} \right)^2 \right)}{\cosh \left(\frac{x}{2} \right)^6}, \\ &\vdots \\ U_k(x) &= \frac{1}{k!} \left[\frac{\partial^k}{\partial t^k} \left(\frac{1}{2} \operatorname{sech}^2 \left(\frac{x-t}{2} \right) \right) \right]_{t=0}. \end{aligned}$$

O halde $\{U_k(x)\}_{k=0}^n$ değerler kümesinin ters dönüşümü, n terimli yaklaşık çözümünü

$$\begin{aligned} \tilde{u}_n(x, t) &= \sum_{k=0}^n U_k(x) t^k = \frac{1}{2} \frac{1}{\cosh \left(\frac{x}{2} \right)^2} + \frac{1}{2} \frac{\sinh \left(\frac{x}{2} \right)}{\cosh \left(\frac{x}{2} \right)^3} t \\ &\quad + \frac{1}{96} \frac{\left(24 \cosh \left(\frac{x}{2} \right)^2 - 36 \right)}{\cosh \left(\frac{x}{2} \right)^6} t^2 + \dots + \frac{1}{n!} \left[\frac{\partial^n}{\partial t^n} \left(\frac{1}{2} \operatorname{sech}^2 \left(\frac{x-t}{2} \right) \right) \right]_{t=0} t^n \end{aligned}$$

şeklinde verir. Dolayısıyla problemin tam çözümü

$$u(x, t) = \lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{u}_n(x, t)$$

şeklinde verilir.

Farklı başlangıç koşulları altındaki farklı KdV denklemlerinin çözümleri ve metodla ilgili daha ayrıntılı bilgi için Keskin ve Oturanç (2010) kaynağına bakılabilir. Ayrıca Keskin (2010) kaynağından da metodun örnekler üzerindeki uygulaması incelenebilir.

3.5 Homotopi Pertürbasyon Yöntemi

Homotopi pertürbasyon metodu ilk olarak He tarafından tasarlanmıştır. He (1999) kaynağına göre bu metodu inceleyelim.

Homotopi pertürbasyon metodunu,

$$B(u, \partial u / \partial n) = 0, \quad r \in \Gamma$$

sınır şartıyla

$$A(u) - g(r) = 0, \quad r \in \Omega \quad (3.35)$$

şeklindeki lineer olmayan diferansiyel denklemde uygulayalım. Burada A bir genel diferansiyel operatörü, B bir sınır operatörü, $g(r)$ analitik fonksiyonu ve Γ 'da Ω alanının sınırıdır.

(3.35) deklemindeki A operatörü genel olarak, L bir lineer operatör ve N bir lineer olmayan operatör olmak üzere iki bölüme ayrılabilir. Dolayısıyla

$$L(u) + N(u) - g(r) = 0$$

olarak yazılabilir. Homotopi tekniğiyle,

$$H(v, p) = (1 - p)[L(v) - L(u_0)] + p[A(v) - g(r)] = 0, \quad p \in [0, 1], \quad r \in \Omega \quad (3.36)$$

veya

$$H(v, p) = L(v) - L(u_0) + pL(u_0) + p[N(v) - g(r)] = 0$$

sağlayan bir $v(r, p): \Omega \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ homotopi kurarız. Burada $p \in [0, 1]$ bir gömme parametresidir. u_0 , sınır şartlarını sağlayan (3.35) denkleminin bir başlangıç yaklaşımıdır. Yukarıdaki denklemlerden açık olarak

$$\begin{aligned} H(v, 0) &= L(v) - L(u_0) = 0 \\ H(v, 1) &= A(v) - g(r) = 0 \end{aligned}$$

elde edilir. p 'nin 0'dan 1'e değişim süreci, $v(r, p)$ 'de sadece $u_0(r)$ 'den $u(r)$ 'yedir. Topolojide buna deformasyon denir ve $L(v) - L(u_0)$, $A(v) - g(r)$ 'ler homotopik olarak adlandırılır.

Metoda göre ilk kullanılan p gömme parametresi bir "küçük parametre"dir ve (3.36) denkleminin çözümü, p 'nin bir kuvvet serisi olarak

$$v = v_0 + pv_1 + p^2v_2 + \dots \quad (3.37)$$

şeklinde varsayılır. $p = 1$ için (3.35) denkleminin yaklaşık çözümü

$$u = \lim_{p \rightarrow 1} v = v_0 + v_1 + v_2 + \dots \quad (3.38)$$

şeklinindedir.

Geleneksel pertürbasyon metotlarının sınırlamalarını ortadan kaldıran homotopi pertürbasyon metodu, pertürbasyon metodu ve homotopi metodunun birleşiminden oluşur. Buna karşılık önerilen yöntem, geleneksel pertürbasyon tekniklerinin bütün avantajlarını sunabilir.

(3.38) serisi çoğu durumda yakınsaktır. Bununla birlikte yakınsaklık oranı $A(v)$ lineer olmayan operatörüne bağlıdır.

Şimdi Wang (2007) kaynağı dikkate alarak bahsettiğimiz metodu bir örnek üzerinde göstereyim.

$$u(x, 0) = f(x) = 2k^2 \operatorname{sech}^2(kx)$$

başlangıç koşullu

$$u_t + 6uu_x + u_{xxx} = 0 \quad (3.39)$$

KdV denklemini ele alalım. Bu KdV denkleminin operatör formu

$$D_t u + 6u D_x u + D_x^3 u = 0$$

şeklindedir. Homotopi pertürbasyon metoduna göre basit bir homotopiyi aşağıdaki gibi kurarız:

$$(1-p)D_t u + p(D_t u + 6u D_x u + D_x^3 u) = 0$$

veya

$$D_t u + p(6u D_x u + D_x^3 u) = 0. \quad (3.40)$$

Burada $p \in [0,1]$ bir gömme parametresidir. $D_t u$, $D_t u + 6u D_x u + D_x^3 u$ 'ler homotopiklerdir. (3.37) ve (3.38)'de gösterildiği gibi p homotopi parametresi,

$$u = u_0 + p u_1 + p^2 u_2 + p^3 u_3 + \dots \quad (3.41)$$

çözümünü genişletmek için kullanılır. Yaklaşık çözümler de $p=1$ alınarak

$$u = u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + \dots$$

şeklinde elde edilir. (3.41)'in ilk dört terimi (3.40)'da yerine yazıldığında,

$$\begin{aligned} & \frac{\partial u_0}{\partial t} + p \frac{\partial u_1}{\partial t} + p^2 \frac{\partial u_2}{\partial t} + p^3 \frac{\partial u_3}{\partial t} + p \left[6(u_0 + p u_1 + p^2 u_2 + p^3 u_3) \right. \\ & \left. \left(\frac{\partial u_0}{\partial x} + p \frac{\partial u_1}{\partial x} + p^2 \frac{\partial u_2}{\partial x} + p^3 \frac{\partial u_3}{\partial x} \right) + \frac{\partial^3 u_0}{\partial x^3} + p \frac{\partial^3 u_1}{\partial x^3} + p^2 \frac{\partial^3 u_2}{\partial x^3} + p^3 \frac{\partial^3 u_3}{\partial x^3} \right] = 0 \end{aligned}$$

elde edilir. Bu denkleme göre p 'nin aynı kuvvetli terimlerinin eşitliğinden elde edilen denklemlerin operatör formlu halleri aşağıdaki gibi yazılır:

$$\begin{aligned} D_t u_0 &= 0, \\ D_t u_1 + 6u_0 D_x u_0 + D_x^3 u_0 &= 0, \\ D_t u_2 + 6u_0 D_x u_1 + 6u_1 D_x u_0 + D_x^3 u_1 &= 0, \\ D_t u_3 + 6u_0 D_x u_2 + 6u_1 D_x u_1 + 6u_2 D_x u_0 + D_x^3 u_2 &= 0. \end{aligned} \quad (3.42)$$

Metot D_t 'nin ters operatörü olan J operatörünün uygulanmasına dayanır. (3.42)'nin tüm denklemlerinin her iki tarafında ters operatör uygulanmasıyla

$$\begin{aligned} u_0 &= f_0(x), \\ u_1 &= f_1(x) - h_1(x) \frac{t}{1!}, \\ u_2 &= f_2(x) - h_2(x) \frac{t}{1!} + h_3(x) \frac{t^2}{2!}, \\ u_3 &= f_3(x) - h_4(x) \frac{t}{1!} + h_5(x) \frac{t^2}{2!} - h_6(x) \frac{t^3}{3!} \end{aligned} \quad (3.43)$$

elde edilir. Burada

$$\begin{aligned} f_i(x) &= u_i(x, 0), \quad \sum_{i=0}^{\infty} f_i(x) = f(x), \\ h_1 &= 6f_0 D_x f_0 + D_x^3 f_0, \\ h_2 &= 6(f_0 D_x f_1 + f_1 D_x f_0) + D_x^3 f_1, \\ h_3 &= 6(f_0 D_x h_1 + h_1 D_x f_0) + D_x^3 h_1 \end{aligned} \quad (3.44)$$

alınır. (3.44)'e göre

$$f_0(x) + f_1(x) + f_2(x) + f_3(x) = f(x)$$

olduğunu biliyoruz. Genelliği bozmadan KdV denklemini çözmek için

$$f_0(x) = f(x) = 2k^2 \operatorname{sech}^2(kx), \quad f_1(x) = f_2(x) = f_3(x) = 0$$

olduğunu farz edelim. Böylece (3.43) indirgenerek aşağıdaki formlar bulunur:

$$\begin{aligned} u_0 &= f_0(x) = 2k^2 \operatorname{sech}^2(kx) \\ u_1 &= -h_1(x) \frac{t}{1!} = \left(48k^5 \frac{\sinh^3(kx)}{\cosh^3(kx)} - 32k^5 \frac{\sinh(kx)}{\cosh^3(kx)} + 48k^5 \frac{\sinh(kx)}{\cosh^5(kx)} \right) t, \\ u_2 &= h_3(x) \frac{t^2}{2!}, \quad u_3 = -h_6(x) \frac{t^3}{3!}. \end{aligned}$$

Burada

$$\begin{aligned} h_1 &= 6f_0 D_x f_0 + D_x^3 f_0, \quad h_3 = 6(f_0 D_x h_1 + h_1 D_x f_0) + D_x^3 h_1, \\ h_4 &= 6 \left(f_0 D_x h_2 + h_2 D_x f_0 + h_1 D_x h_1 \frac{2!}{3!} \right) + D_x^3 h_2 \end{aligned}$$

alınır. Böylece (3.39) denkleminin yaklaşık çözümü

$$u(x,t) = u_0 + u_1 + u_2 + u_3 = 2k^2 \operatorname{sech}^2(kx) + \left(48k^5 \frac{\sinh^3(kx)}{\cosh^3(kx)} - 32k^5 \frac{\sinh(kx)}{\cosh^3(kx)} + 48k^5 \frac{\sinh(kx)}{\cosh^5(kx)} \right) t + h_2(x) \frac{t^2}{2!} - h_3(x) \frac{t^3}{3!}$$

şeklinde sonlu seri formundadır.

3.6 Homotopi Analiz Yöntemi

Homotopi analiz metodu (HAM) ilk olarak Liao tarafından sunulmuştur.

Bu metodu verecek olursak; N bir lineer olmayan operatör ve $u(r,t)$ bir bilinmeyen fonksiyon olmak üzere

$$N[u(r,t)] = 0 \quad (3.45)$$

formunda lineer olmayan bir denklem düşünelim. $p \in [0,1]$ bir gömme parametresi olmak üzere

$$(1-p)L[\Phi(r,t;p) - u_0(r,t)] = pHH(r,t)N[\Phi(r,t;p)] \quad (3.46)$$

şeklinde *sıfırıncı mertebeden deformasyon denklemi* diye adlandırılan denklem oluşur. Burada $u_0(r,t)$, $u(r,t)$ tam çözümünün bir başlangıç tahminini, $h \neq 0$ bir yardımcı parametreyi, $H(r,t) \neq 0$ bir yardımcı fonksiyonu ve L 'de bir yardımcı lineer operatörü belirtir. Homotopi analiz metodunda yardımcı nesnelere serbest şekilde seçilmesi büyük önem taşır. Açıkça, $p = 0,1$ seçildiğinde sırasıyla

$$\Phi(r,t;0) = u_0(r,t), \quad \Phi(r,t;1) = u(r,t)$$

oluşur. Bunun üzerine p , 0'dan 1'e arttıkça, $\Phi(r,t;p)$ çözümü $u_0(r,t)$ başlangıç tahmininden $u(r,t)$ tam çözümüne değişir. Topolojide buna deformasyon denir (Hassan ve Tawil 2007).

Liao (2003) Taylor teoremi yardımıyla $\Phi(r,t;p)$ 'yi p 'nin bir kuvvet serisine aşağıdaki gibi açmıştır:

$$\Phi(r,t;p) = \Phi(r,t;0) + \sum_{m=1}^{\infty} u_m(r,t)p^m. \quad (3.47)$$

Burada

$$u_m(r,t) = \frac{1}{m!} \left. \frac{\partial^m \Phi(r,t;p)}{\partial p^m} \right|_{p=0} \quad (3.48)$$

şeklindedir.

(3.47) serisinin yakınsaklığı yardımcı parametre h 'ye, yardımcı fonksiyon $H(r,t)$ 'ye, başlangıç tahmini $u_0(r,t)$ 'ye ve yardımcı lineer operatör L 'ye bağlıdır. Eğer bunlar uygun bir şekilde seçilirse (3.47) serisi $p=1$ 'de yakınsar ve

$$u(r,t) = u_0(r,t) + \sum_{m=1}^{\infty} u_m(r,t) \quad (3.49)$$

haline gelir.

$$\overline{u_n(r,t)} = \{u_0(r,t), u_1(r,t), \dots, u_n(r,t)\}$$

vektörü tanımlansın. Sıfırncı mertebeden deformasyon denklemi olan (3.46)'nın p 'ye göre m kez diferansiyellenip ve $m!$ ile bölüldükten sonra son olarak $p=0$ alındığında, m . mertebeden deformasyon denklemi olarak adlandırılan

$$L[u_m(r,t) - \chi_m u_{m-1}(r,t)] = hH(r,t)\mathfrak{R}_m(u_{m-1}, r, t)$$

denklemini elde edilir. Burada

$$\chi_m = \begin{cases} 0, & m \leq 1, \\ 1, & m > 1, \end{cases}$$

$$\mathfrak{R}_m(u_{m-1}, r, t) = \frac{1}{(m-1)!} \left\{ \frac{\partial^{m-1}}{\partial p^{m-1}} N \left[\sum_{m=0}^{\infty} u_m(r,t)p^m \right] \right\} \Bigg|_{p=0}$$

şeklinde alınır.

Teorem 3.1: (3.49) serisi yakınsadıkça, (3.45)'in tam çözümüne yakınsar (Liao 2003).

Şimdi de homotopi analiz metodunu

$$u_t - 6uu_x + u_{xxx} = 0, \quad x \in \mathbb{R} \quad (3.50)$$

KdV denkleminde uygulayalım. (3.50) KdV denkleminin HAM yardımıyla çözümü için

$$u_0(x,t) = -2e^x / (1+e^x)^2$$

şeklinde başlangıç tahminini ve c bir sabit olmak üzere $L[c] = 0$ eşitliğini sağlayan

$$L[u(x,t;p)] = \frac{\partial u(x,t;p)}{\partial t}$$

şeklinde yardımcı lineer operatör seçelim. Yardımcı fonksiyonu

$$H(r,t) = 1$$

olarak düşünelim. O zaman *sıfırıncı mertebeden deformasyon problemi*

$$(1-p)L[u(x,t;p) - u_0(x,t)] = phN[u(x,t;p)],$$

$$u_0(x,t) = -2 \frac{e^x}{(1+e^x)^2},$$

$$N[u(x,t;p)] = \frac{\partial u(x,t;p)}{\partial t} - 6u(x,t;p) \frac{\partial u(x,t;p)}{\partial x} + \frac{\partial^3 u(x,t;p)}{\partial x^3}$$

olarak elde edilir. m . mertebeden deformasyon problemi de

$$L[u_m(x,t) - \chi_m u_m(x,t)] = ph \left[\frac{\partial u_{m-1}}{\partial t} - 6 \sum_{i=0}^{m-1} u_i \frac{\partial u_{m-1-i}}{\partial x} + \frac{\partial^3 u_{m-1}}{\partial x^3} \right], \quad (3.51)$$

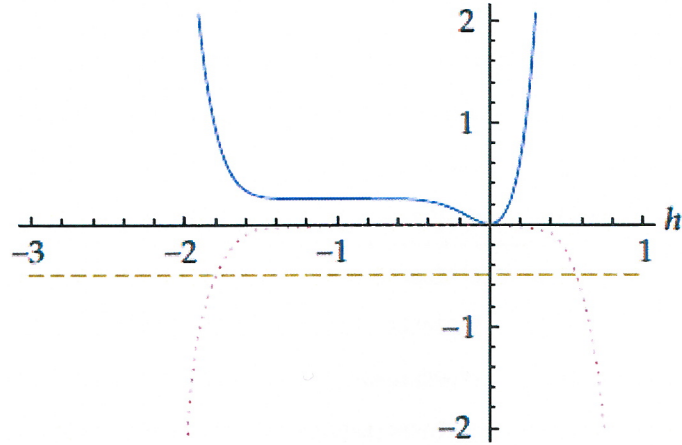
$$u_m(x,0) = 0, \quad (m \geq 1) \quad (3.52)$$

şeklinde olur. (3.52) koşullu (3.51) denkleminin çözümü için Mathematica programı kullanılabilir. Böylece seri formundaki çözüm

$$u(x,t) = -2 \frac{e^x}{(1+e^x)^2} + \frac{2e^x(-1+e^x)ht \text{Log}[e](12e^x + \text{Log}[e]^2 - 10e^x \text{Log}[e]^2 + e^{2x} \text{Log}[e]^2)}{(1+e^x)^5} + \dots \quad (3.53)$$

olarak elde edilir.

(3.53)'de verilen analitik çözüm h yardımcı parametresini içerir, ki bu parametre HAM çözümü için yaklaşım oranını ve yakınsama bölgesinin etkiler. Şekil 3.3'de h eğrileri 8.mertebeden yaklaşımda $x=t=0.01$ iken, $u(x,t)$, $\dot{u}(x,t)$, $\ddot{u}(x,t)$ için çizilmiştir.



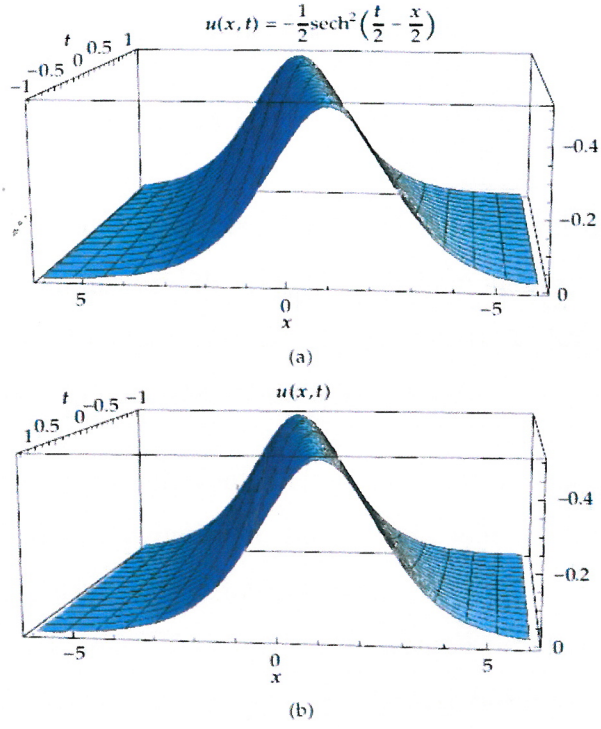
Şekil 3.3: Kesik nokta $u(0.01,0.01)$, düz doğru $\dot{u}(0.01,0.01)$ ve kesik doğru $\ddot{u}(0.01,0.01)$ olmak üzere 8. mertebeden yaklaşımın h eğrisi.

Liao (2003) tarafından işaret edildiği gibi h 'nin geçerli bölgesi bir yatay doğru parçasıdır. Bu durum için geçerli bölgenin $-1.15 < h < -0.6$ olduğu açıktır. Teorem 3.6.1'e göre yakınsadıkça (3.53) çözümü tam çözüm olmalıdır. Bu durumda $-1 < t < 1$ ve $h = -1$ için tam çözüm ve HAM çözümü, Şekil 3.4'de gösterildiği gibi aynı olurlar. Nümerik sonuçlar Tablo 3.3'de özetlenmiştir.

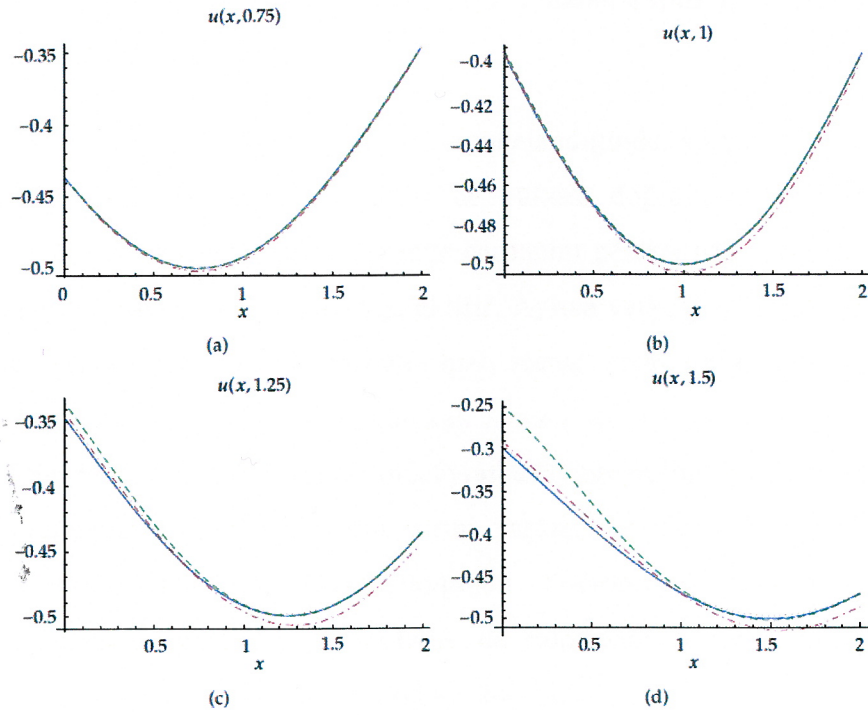
Tablo 3.3: $h = -1$ için HAM çözümle tam çözümün karşılaştırılması

t	x	Tam Çözüm	HAM Çözüm	Mutlak Hata
	-6	-0.004693564364865844	-0.0046935643648653635	$4.80518402845575 \times 10^{-16}$
0.05	-3	-0.08634570715015544	-0.08634570715015137	$4.06619182768963 \times 10^{-15}$
	2	-0.21807963830331248	-0.21807963830330718	$5.30131494258512 \times 10^{-15}$
	5	-0.01396823161345761	-0.013968231613456493	$1.11716191852906 \times 10^{-15}$
	-6	-0.003846044713671389	-0.0038460447137292153	$5.782613970994888 \times 10^{-14}$
0.25	-3	-0.07186718166243183	-0.07186718165065627	$1.17755666328989 \times 10^{-11}$
	2	-0.2522584503864486	-0.25225845037331035	$1.31382682511116 \times 10^{-11}$
	5	-0.017007824315900595	-0.017007824315379085	$5.21509918582907 \times 10^{-13}$
	-6	-0.0029978573890808136	-0.002997857417138099	$2.805728522778383 \times 10^{-11}$
0.5	-3	-0.056906053378639285	-0.05690604775947111	$5.619168172432687 \times 10^{-9}$
	2	-0.29829291297695726	-0.2982929041406657	$8.836291531810758 \times 10^{-9}$
	5	-0.02173245972250237	-0.02173245944445047	$2.78051900948206 \times 10^{-10}$
	-6	-0.002336284005515009	-0.0023362850215908897	$1.016075880551359 \times 10^{-9}$
0.75	-3	-0.044899022133116494	-0.04489882076408693	$2.013690295621373 \times 10^{-7}$
	2	-0.3462100376919465	-0.3462095739849941	$4.637069524471293 \times 10^{-7}$
	5	-0.027731694033315973	-0.02773168287526794	$1.115804803414333 \times 10^{-8}$
	-6	-0.0018204295917628886	-0.001820442360243653	$1.276848076445583 \times 10^{-8}$
1	-3	-0.03532791434845481	-0.03532541242658223	$2.50192187 \times 10^{-7}$
	2	-0.3932319186044759	-0.3932238664829637	$8.052121512225341 \times 10^{-7}$
	5	-0.03532556752567461	-0.03532541242658223	$1.550990923818163 \times 10^{-7}$

Şekil 3.5'de (3.50)'nin tam çözümü ile $h = -0.5$, $h = -0.75$ ve $h = -1$ için HAM yardımıyla elde edilen sonuçların karşılaştırılması gösterilmiştir. Burada en iyi h değerinin $h = -1$ değeri olduğu görülür. Daha fazla bilgi için Nazari ve diğ.'nin (2012) makalesi incelenebilir.



Şekil 3.4: $h = -1$ olduğunda (a) tam çözüm ve (b) HAM çözüm olmak üzere, $u(x, t)$ 'nin HAM çözümü ile tam çözümünün karşılaştırılması.



Şekil 3.5: $h = [-0.5; -0.75; -1]$ için 8. mertebeden yaklaşımla elde edilen sonuçlardır. Burada tam çözüm düz doğruyu, $h = -0.5$ için büyük kesikli doğruyu, $h = -0.75$ için küçük kesikli doğruyu ve $h = -1$ için küçük kesikli doğruyu ifade eder.

4. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu tez çalışmasında lineer olmayan kısmi diferansiyel denklemlerden KdV denklemi üzerinde durulmuştur. İlk olarak denklemin tarihsel gelişim sürecinden bahsedilip fiziksel yorumu yapılmıştır. Denklemin türleri verilerek bu türler üzerinde bazı analitik ve yaklaşık çözüm yöntemleri uygulanmıştır.

Tezde kullanılan analitik yöntemlere bakıldığında, Bäcklund dönüşümünde KdV denkleminin sonlu çözümlerini bulabilmek için nonlinear süperpozisyon prensibini kullanmak daha avantajlıdır. Böylece çözüm bulmada fazla türev ve integral almaya gerek kalmaz. Ters saçılma dönüşümü ile lineer kısmi diferansiyel denklem çözümünde kullanılan Fourier dönüşümleri birbiriyle paralellik gösterir. Bäcklund ve ters saçılma dönüşüm yöntemleri birbiriyle ilişkilidir. Her ikisinde de miura dönüşümünden yararlanır. Sinüs-kosinüs ve tanh yöntemlerinin her ikisi de güvenilir ve birbirinin tamamlayıcısıdır. Tanh yöntemi, tanh-coth yönteminin indirgenmiş halidir. Üstel fonksiyon yöntemi ile genelleştirilmiş solitonumsu ve periyodik çözümlerin her ikisi de elde edilirken, jakobi eliptik fonksiyon yöntemi ile periyodik çözümler elde edilir.

Tezdeki yaklaşık çözüm yöntemleri incelendiğinde, varyasyonel iterasyon ve Adomian ayrışım yönteminin her ikisi de yüksek doğrulukta yaklaşımlar verir. Varyasyonel iterasyon yöntemi λ lagrange çarpanını gerektirirken, Adomian ayrışım yöntemi ise Adomian polinomlarını gerektirir. Ayrıca varyasyonel iterasyon yöntemi Adomian ayrışım yöntemine göre daha hızlı sonuç verir. İndirgenmiş diferansiyel yöntemi fonksiyonların türevini kullanarak sonuca ulaşırken, Adomian ayrışım ve varyasyonel iterasyon yöntemleri fonksiyonların integralini kullanır. Bu nedenle integrali alınamayan fonksiyonlarda sorun yaşanabilir. Bununla birlikte çok zor integrallenebilen ifadelerle karşılaşıldığında diferansiyel dönüşüm yöntemini kullanmak daha avantajlıdır. Son olarak da homotopi pertürbasyon yönteminin aslında homotopi analiz yönteminin özel bir hali olduğu söylenebilir.

Sonuç olarak söyleyebiliriz ki burada sunulan yöntemler farklı kısmi diferansiyel denklemlere de uygulanabilir.

5. KAYNAKLAR

Ablowitz, M. J. ve Clarkson, P. A., *Solitons, nonlinear evolution equations and inverse scattering*, New York: Cambridge University Press, (1991).

Ablowitz, M. J. ve Segur, H., *Solitons and the inverse scattering transform*, Philadelphia: Society for Industrial and Applied Mathematics, (1981).

Adomian, G., *Solving frontier problems of physics: the decomposition method*, Boston: Kluwer Academic Publishers, (1994).

Adomian, G., "A review of the decomposition method in applied mathematics", *J. Math. Anal. Appl.*, 135, 501-544, (1988).

Bekir, A., "Application of the (G'/G) -expansion method for nonlinear evolution equations", *Phys. Lett. A*, 372, 3400-3406, (2008).

Bona, J. ve Smith, R., "The initial-value problem for the korteweg-de vries equation", *Philos. Trans. Roy. Soc. London*, 278, 555-601, (1975).

Crighton, D. G., "Applications of KdV", *Kluwer Academic Publishers*, 39, 39-67, (1995).

Drazin, P. G., *Solitons*, New York: Cambridge University Press, (1983).

Drazin, P. G. ve Johnson R. S., *Solitons: an introduction*, New York: Cambridge University Press, (1989).

Eisenhart, L. P., *A treatise on the differential geometry of curves and surfaces*, Boston: Ginn and Company, (1909).

Faddeev, L. D., "On the relation between the s-matrix and potential for the one-dimensional schrödinger operator", *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 121, 6-63, "An expanded English version is in amer", *Math. Soc. Transl.*, 66-139, (1958).

Fu, Z., Liu, S., Liu Sh. ve Zhao, Q., "New jacobi elliptic function expansion method and new periodic solutions of nonlinear wave equations", *Phys. Lett. A*, 290, 72-76, (2001).

Gardner, C. S., Greene, J. M., Kruskal, M. D., ve Miura, R. M., "Method for solving the korteweg-de vries equation", *Phys. Rev. Lett.*, 19, 1095-1097, (1967).

Gardner, C. S., Greene, J. M., Kruskal, M. D. ve Miura, R. M., "Korteweg-de vries equation and generalizations", *VI. Comm. Pure Appl. Math.*, 27, 97-133, (1974).

Hassan, H. N. ve El-Tawil, M. A., "A new technique of using homotopy analysis method for second order nonlinear differential equations", *Appl. Math. Comput.*, 219, 708-728, (2007).

He, J. H., "Homotopy perturbation technique", *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 178, 257-262. (1999).

He, J. H. ve Wu, X. H., "Exp-function method for nonlinear wave equations", *Chaos, Solitons and Fractals*, 30, 700-708, (2006).

Helal, M. A. ve Mehanna, M. S., "A comparative study between two different methods for solving the gKdV equation", *Chaos, Solitons and Fractals*, 33, 725-739, (2007).

Inc, M., "Numerical simulation of KdV and mKdV equations with initial conditions by the variational iteration method", *Chaos, Solitons and Fractals*, 34, 1075-1081, (2007).

Kametaka, Y., "Korteweg-de vries equation I. global existence of smooth solutions", *Proc. Japan Acad. Sci.*, 45, 552-555, (1969).

Kangalgil, F. ve Ayaz, F., "Solitary wave solutions for the KdV and mKdV equations by differential transform method", *Chaos, Solitons and Fractals*, 41, 464-472, (2009).

Keskin, Y., "İndirgenmiş diferansiyel dönüşüm yöntemi", II. Ulusal Konya Ereğli Akman Meslek Yüksekokulu Tebliğ Günleri, 2 (1), 321-333, (2010).

Keskin, Y. ve Oturaç, G., "Reduced differential transform method for generalized KdV equations", *Math. and Com. Appl.*, 15, 382-393, (2010).

Kox, A. J., "Korteweg, de vries, and dutch science at the turn of the century", *Kluwer Academic Publishers*, 39, 91-92, (1995).

Liao, S. J., *Beyond perturbation: introduction to the homotopy analysis method*, London: CRC Press, (2003).

Liu, S., Fu, Z., Liu Sh. ve Zhao, Q., “Jacobi elliptic function expansion method and periodic wave solutions of nonlinear wave equations”, *Phys. Lett. A*, 289, 69-74, (2001).

Malfliet W., “Solitary wave solutions of nonlinear wave equations”, *Am. J. Phys.*, 60 (7), 650-654, (1992).

Miura, R., Gardner C. ve Kruskal, M., “Existence of conservation laws and constants of motion”, *J. Math. Phys.*, 9 (8), 1204-1209, (1968).

Nazari, M., Salah, F., Aziz, Z. A. ve Nilashi, M., “Approximate analytic solution for the KdV and Burger equations with the homotopy analysis method”, *J. Appl. Math.*, 1-13, (2012).

Özdemir, E., “Korteweg-de vries denklemi üzerine bir çalışma”, Yüksek Lisans Tezi, *Sakarya Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü*, Sakarya, (2009).

Porter, M. A., Zabusky, N. J., Hu B. ve Campbell, D. K., “Fermi, Pasta, Ulam and the birth of experimental mathematics”, *Sigma Xi*, (2009).

Russell, J. S., *Report of the fourteenth meeting of British Association for the advancement of science*, London, 311-390, (1845).

Temam, R., “Sur un problème non linéaire”, *J. Math. Pures Appl.*, 48, 159-172, (1969).

Ton, B. A., “Initial boundary-value problems for the Korteweg-de Vries equation”, *Academic Press*, 25, 288-309, (1977).

Wahlquist, H. D., ve Estabrook, F. B., “Bäcklund transformation for solutions of the Korteweg-de Vries equation”, *Phys. Rev. Lett.*, 31, 1386-1390, (1973).

Wang, Q., “Homotopy perturbation method for fractional KdV equation”, *Appl. Math. Comput.*, 190, 1795-1802, (2007).

Wang, M., Li, X. ve Zhang, J., “The (G'/G) - expansion method and traveling wave solutions of nonlinear evolutions in mathematical physics”, *Phys. Lett. A*, 372, 417-423, (2008).

Wazwaz, A. M., "A new algorithm for calculating adomian polynomials for nonlinear operators". *Appl. Math. Comput.*, 111, 53-69, (2000).

Wazwaz, A. M., "Construction of solitary wave solutions and rational solutions for the KdV equation by adomian decomposition method", *Chaos, Solitons and Fractals*, 12, 2283-2293, (2001).

Wazwaz, A. M., "The tanh and the sine-cosine methods for the complex modified KdV and generalized KdV equations", *Comput. And Math. Appl.*, 49, 1101-1112, (2005).

Wazwaz, A. M., "Peakons, kinks, compactons and solitary patterns solutions for a family of camassa-holm equations by using new hyperbolic schemes", *Appl. Math. Comput.*, 182 (1), 412-424, (2006).

Wazwaz, A. M., "The variational iteration method for rational solutions for KdV, K(2,2), burgers, and cubic boussinesq equations", *J. Comput. Appl. Math.*, 207, 18-23, (2007).

Wazwaz, A. M., *Partial differential equations and solitary waves theory*, Beijing and Springer- Verlag Berlin Heidelberg: Higher Education Press, (2009).

Wu, XH. ve He, JH., "Solitary solutions, periodic solutions and compacton-like solutions using the exp-function method", *Comput. Math. Appl.*, 54, 966-986, (2007).

Zabusky, N. J. ve Kruskal, M. D., "Interaction of solitons in a collisionless plasma and initial states", *Phys. Rev. Lett*, 15 (6), 240-243, (1965).

Zhang, S., Tong JL. ve Wang, W., "A generalized (G'/G) -expansion method for the mKdV equation with variable coefficients", *Phys. Lett. A*, 372, 2254-2257, (2008).

Zhu, S., "The extended (G'/G) -expansion method and travelling wave solutions of nonlinear evolution equations", *Math. Comput. Appl.*, 15 (5), 924-929, (2010).

Zhu, Y., Chang Q. ve Wu, S., "Exact solitary-wave solutions with compact support for the modified KdV equation", *Chaos, Solitons & Fractals*, 24 (1), 365-369, (2005).

6. ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı : Sevil ÇULHA
Doğum Yeri ve Tarihi : Denizli, 03.02.1989
Lisans Üniversite : Celal Bayar Üniversitesi
Elektronik Posta : sevilculha_89@hotmail.com
Yayın Listesi : -