

**DİFERANSİYEL DÖNÜŞÜM METODUNUN KULLANILARAK
ISI İLETİMİ MODELLEMESİ**

Serpil SALINAN

**Ağustos 2008
DENİZLİ**

**DİFERANSİYEL DÖNÜŞÜM METODUNUN KULLANILARAK
ISI İLETİMİ MODELLEMESİ**

**Pamukkale Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Yüksek Lisans Tezi
Matematik Anabilim Dalı**


Serpil SALINAN

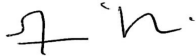
Danışman: Yrd. Doç. Dr. Murat SARI


**Ağustos, 2008
DENİZLİ**

YÜKSEK LİSANS TEZİ ONAY FORMU

Serpil SALINAN tarafından Yrd. Doç. Dr. Murat SARI yönetiminde hazırlanan “**Diferansiyel Dönüşüm Metodunun Kullanılarak Isı İletimi Modellemesi**” başlıklı tez tarafımızdan okunmuş, kapsamı ve niteliği açısından bir yüksek lisans tezi olarak kabul edilmiştir.


Yrd. Doç. Dr. Murat SARI
Jüri Başkanı



Prof. Dr. İdris DAĞ
Jüri Üyesi


Yrd. Doç. Dr. H. Hüseyin KART
Jüri Üyesi

Pamukkale Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun
27/08/2008 Tarih ve 14/23 sayılı kararıyla onaylanmıştır.

Prof. Dr. Mehmet Ali SARIGÖL
Müdür

Bu tezin tasarımı, hazırlanması, yürütülmesi, araştırmalarının yapılması ve bulgularının analizlerinde bilimsel etiğe ve akademik kurallara özenle riayet edildiğini; bu çalışmanın doğrudan birincil ürünü olmayan bulguların, verilerin ve materyallerin bilimsel etiğe uygun olarak kaynak gösterildiğini ve alıntı yapılan çalışmalara atfedildiğini beyan ederim.

İmza : 
Öğrenci Adı Soyadı : Serpil SALINAN

TEŐEKKÜR

Bu çalışmanın hazırlanmasında, kaynakların temininde öncelikle çok büyük katkısı olan değerli hocam Yrd. Doç. Dr. Murat Sarı'ya, Pamukkale Üniversitesi Fen Edebiyat Fakóltesi Matematik Bölümü öğretim elemanlarına ve Mühendislik Fakóltesi Elektrik-Elektronik Mühendislięi'ndeki araştırma görevlisi hocama teőekkürlerimi sunarım.

Ayrıca tezimin hazırlanma sürecinde benden maddi ve manevi desteğini esirgemeyen anneme sonsuz teőekkürlerimi bir borç bilirim.

ÖZET**DİFERANSİYEL DÖNÜŞÜM METODUNUN KULLANILARAK
ISI İLETİMİ MODELLEMESİ**

Salınan, Serpil
Yüksek Lisans Tezi, Matematik ABD
Tez Yöneticisi: Yrd. Doç. Dr. Murat SARI

Ağustos 2008, 57 sayfa

Bu çalışmada fiziksel, biyolojik, sosyal ve yer bilimlerinde pek çok problemi temsil eden ve ısının dinamik hareketini analiz etmede kuvvetli bir araç olan ısı iletimi denklemi, çeşitli yapılar için, DD yöntemi kullanılarak modellendi. Bu modellemede, rakiplerine göre yeni ve kısmen etkin olan diferansiyel dönüşüm metodu kullanıldı. Bu yöntem kullanılarak linear ve non-linear matematiksel modeller, bir-, iki- ve üç boyutlu ısı iletimi denklemi çözüldü.

Sonuçların davranışları MATLAB, MATHEMATICA ve SURFER programlarında çizilen grafiklerde gözlenmiştir.

DD sonuçlarının analitik sonuçlarla kalitatif uyumu genelde çok iyi olsa da kantitatif uyumu kimi problemlerde ilerleyen zamanlar için kaybolmaktadır.

Anahtar Kelimeler: Diferansiyel Dönüşüm Metodu, Isı İletimi Denklemi, Kısmi Diferansiyel Denklem, Modelleme.

Prof. Dr. İdris DAĞ
Assist. Prof. Dr. Murat SARI
Assist. Prof. Dr. H. Hüseyin KART

ABSTRACT**HEAT CONDUCTION MODELLING USING THE DIFFERENTIAL
TRANSFORMATION METHOD**

Salman, Serpil

M. Sc. Thesis in Mathematics

Supervisor: Assist. Prof. Dr. Murat SARI

August, 2008, 57 Pages

In this work; the heat equation being a powerful tool in analyzing the dynamic motion of heat as well as for representing many problems in physical sciences, biological sciences, social sciences and earth sciences, was modelled in various structures. In this modelling, the differential transform method which is new and partially effective comparison to its rivals was used. With the use of this method, linear and non-linear mathematical models, one-, two- and three- dimensional heat conduction equation were solved.

Behaviours of the results were observed in graphs drawn in MATLAB, MATHEMATICA and SURFER.

Although the qualitative agreement between the DD results and analytical solution, in general, is very good, the quantitative agreement for some problems disappears for further times.

Keywords: Differential Transformation Method, Heat Conduction Equation, Partial Differential Equation, Modelling.

Prof. Dr. İdris DAĞ

Assist. Prof. Dr. Murat SARI

Assist. Prof. Dr. H. Hüseyin KART

İÇİNDEKİLER

	Sayfa
İçindekiler.....	vi
Şekiller Dizini.....	vii
Tablolar Dizini.....	viii
Simgeler ve Kısaltmalar Dizini.....	ix
BÖLÜM 1 ISI VE ISI İLETİMİ.....	1
1.1. Giriş.....	1
1.2. Isı İletimi Denkleminin Tarihçesi.....	4
1.3. Tez Planı.....	6
1.4. Isı İletimi Denkleminin Çıkarılışı.....	6
1.5. Özet.....	10
BÖLÜM 2 BİR BOYUTLU ISI İLETİMİNİN DİFERANSİYEL DÖNÜŞÜM METODU İLE ÇÖZÜMÜ.....	11
2.1. Bir Boyutlu Problemler için Diferansiyel Dönüşüm Formülasyonu.....	19
2.2. Isı İletimi Problemi.....	23
2.3. Isı İletimi Probleminin DD Metodu ile Çözümü ve Karşılaştırılması.....	24
2.4. Sonuç.....	35
BÖLÜM 3 İKİ BOYUTLU ISI DENKLEMİNİN DİFERANSİYEL DÖNÜŞÜM METODU İLE ÇÖZÜMÜ.....	36
3.1. İki Boyutlu Problemler için Diferansiyel Dönüşüm Formülasyonu.....	36
3.2. Isı İletimi Problemi.....	38
3.3. Isı İletimi Probleminin Diferansiyel Dönüşüm Metodu ile Çözümü	39
3.4. Sonuç	43
BÖLÜM 4 ÜÇ BOYUTLU ISI İLETİMİNİN DİFERANSİYEL DÖNÜŞÜM METODU İLE ÇÖZÜMÜ.....	44
4.1. Üç Boyutlu Problemler için Diferansiyel Dönüşüm Formülasyonu.....	44
4.2. Isı İletimi Problemi.....	46
4.3. Isı İletimi Probleminin Diferansiyel Dönüşüm Metodu ile Çözümü ve Karşılaştırılması.....	47
4.4. Sonuç	49
BÖLÜM 5 SONUÇ VE ÖNERİLER.....	50
KAYNAKLAR.....	51
ÖZGEÇMİŞ.....	57

ŞEKİLLER DİZİNİ

Sayfa

Şekil 1 $w(x, y, z, t)$ sıcaklık dağılımının Kartezyen koordinatlardaki gösterimi.....	7
Şekil 2 Her bir alt bölgedeki yaklaşım fonksiyonları.....	13
Şekil 3 Linear başlangıç-değer probleminin grafiği.....	17
Şekil 4 Non-linear başlangıç-değer probleminin grafiği.....	19
Şekil 5 Bir boyutlu ısı denkleminin geometrik ifadesi.....	24
Şekil 6 Isı denkleminin $t = 0.1$ anındaki çözümü ($n = 6$ için).....	27
Şekil 7 Isı denkleminin $t = 0.1$ anındaki çözümü ($n = 8$ için).....	28
Şekil 8 Isı denkleminin $t = 0.5$ anındaki çözümü ($n = 20$ için).....	29
Şekil 9 Isı denkleminin $t = 0.5$ anındaki çözümü ($n = 22$ için).....	30
Şekil 10 Isı denkleminin $t = 0.9$ anındaki çözümü ($n = 33$ için).....	31
Şekil 11 Isı denkleminin $t = 0.9$ anındaki çözümü ($n = 35$ için).....	32
Şekil 12 Isı denkleminin $t = 0.9$ anındaki çözümü ($n = 45$ için).....	33
Şekil 13 Isı denkleminin farklı t anlarındaki çözümü	34
Şekil 14 İki boyutlu ısı denkleminin geometrik ifadesi.....	38
Şekil 15 İki boyutlu ısı denkleminin analitik çözümünün $x \in [0,1]$, $y \in [0,1]$ ve $t = 0.1$ için grafiği.....	42
Şekil 16 İki boyutlu ısı denkleminin $t = 0.1$ için DD çözümünün grafiği.....	42
Şekil 17 Üç boyutlu ısı denkleminin geometrik ifadesi.....	46

TABLolar DİZİNİ**Sayfa**

Tablo 1 Linear başlangıç- değer probleminin çözüm.....	16
Tablo 2 Non-linear başlangıç- değer probleminin çözümü.....	18
Tablo 3 Bir boyutlu ısı iletimi probleminin DDM ve analitik çözümlerinin karşılaştırılması.....	34
Tablo 4 İki boyutlu ısı iletimi probleminin DDM ve analitik çözümlerinin karşılaştırılması.....	41
Tablo 5 Üç boyutlu ısı iletimi probleminin DDM ve analitik çözümlerinin karşılaştırılması.....	49

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

c_p	sabit basınçta özgül ısı, J/kg.K
k	ısı iletim katsayısı, W/m.K
q	ısı geçişi, W
q'	birim uzunlukta ısı geçişi, W/m
q''	ısı akısı, W/m ²
T	sıcaklık, K
t	zaman, s
q_{x+dx}	$x + dx$ 'deki ısı iletimi
q_x	x 'teki değer
$\frac{\partial q_x}{\partial x} dx$	dx uzunluğundaki değişim
\dot{q}	birim hacimdeki ısı üretimi, W/m ³
\dot{E}_{st}	kontrol hacmi içinde depolanan enerjide birim zamandaki değişme, W
$\rho c_p \frac{\partial w}{\partial t}$	ortamın ısı enerjisinin birim hacimde, birim zamanda değişimi
\dot{E}_i	enerji girişi
\dot{E}_g	enerji(ısı) üretimi, W
\dot{E}_o	enerji çıkışı
α	ısı yayılma katsayısı, m ² /s
DDM	Diferansiyel Dönüşüm Metodu

BÖLÜM 1 ISI VE ISI İLETİMİ

1.1 Giriş

Diferansiyel denklemler, fonksiyon veya fonksiyonların, bir veya birden çok değişkene göre türevlerini ilişkilendiren denklemlerdir. Uygulamalı bilim dallarında matematiksel modeller genellikle diferansiyel denklemler kullanılarak ifade edilirler.

Isı miktarıyla sıcaklık doğru orantılıdır. Bir cismin üzerindeki ısı arttıkça o cismin sıcaklığı da artar. Dünyamızda geçen hemen hemen her olayda ısı önemli bir yer tutar. İnsanların yeryüzünde ilk olarak karşılaştıkları tabiat olaylarından biri de ısı olmuştur. İnsanlar, tabiat olaylarının sebeplerini, kanunlarını araştırmaya başladıktan sonra, ısının ne olduğunu da merak ettiler. Isıyı önceleri insanlar cisim sansalar da çeşitli deneysel çalışmalarla cisim olmadığı sonucuna varmışlardır. O halde ısı nedir? Bugün artık herkesin kabul ettiği kurama göre ısı, bir tür enerjidir. Bilindiği gibi bütün cisimler moleküllerden, onlar da atomlardan meydana gelirler. Bu moleküller de değişmez değillerdir; sürekli olarak hareket halindedirler, kaynaşırlar. Bu kaynaşmaları moleküllerde kinetik enerji bulunduğunu gösterir. Bazı moleküllerde potansiyel enerji de vardır. Bir cisme dışardan ısı enerjisi verilirse, cismin toplam kinetik ve potansiyel enerjisinde bir değişme olmaz. Bu enerji moleküllere geçer, onların hareketini güçleştirir. Bu yüzden, birbirine sürtülen iki cisim ısınır. Sürtünmeyle verilen enerji, moleküllerin hareketini artırır, bunun sonunda da cisimler ısınır. Çekiçle dövülen demirin ısınması da bundandır. Vurma sırasında cisimlere verilen enerji onların moleküllerini artırmış, dolayısıyla cisimleri ısıtmıştır. Demek ki ısı bir enerjidir. Katı ve sıvı cisimlere verilirse onların moleküllerinin hem kinetik, hem de potansiyel enerjilerini artırır. Gaz halindeki cisimlere verilirse moleküllerin yalnız kinetik enerjisi artar.

Isının Cisimler Üzerindeki Etkileri:

Katı bir cisme ısı verilirse o cismin sıcaklık derecesi yükselir. Bunun için cisimlerin sıcaklık derecesi belirtilmiştir. Saf suyun donduğu sıcaklık derecesi 0, kaynadığı sıcaklık derecesi de 100 kabul edilmiştir. Genel olarak, cisimlere ısı verilince boyutları

uzar. Sıvılar da genel olarak ısı aldıkları zaman hacimce genişirler. Yalnız, sıvıların belli bir hacimleri olmadığı için bir kap içinde bulundurulurlar. Isıyla hacim değişmesini incelerken kabın genişmesini de göz önünde bulundurmak gereklidir. Katı bir cismin birim kütesini, sıcaklığını değiştirmeden eritmek için verilmesi gereken ısı miktarına o cismin erime ısısı denir. Bir sıvının donma noktası sıvı üzerine yapılan basınçla değişir. Donma sırasında büzülen sıvılarda basınç arttıkça donma noktası daha büyük değerlere kayar. Donma sırasında genişleyen sıvılarda ise durum tersleşir. Onun için, ısı problemlerinde basıncın da göz önünde tutulması gereklidir. Kolaylık için normal şartlar tarif edilmiştir.

Bir cismin gaz haline geçmesine buharlaşma olayı denir. Üç bölümü vardır;

1) Buharlaşma: Sıvının sadece yüzeyindeki kısımlarının buhar haline geçmesidir.

2) Kaynama: Sıvının yalnız yüzeyinde kalmayıp bütününe yayılan buharlaşmadır.

Kaynama sonunda bütün sıvı buhar haline geçer. Bir sıvıyı kaynatmak için ona ısı verilmesi gerekir. Bir sıvının birim kütesinin sıcaklığı değişmeksizin, buhar haline geçirmek için verilmesi gereken ısıya buharlaşma ısısı denir.

3) Süblimleşme: Belli sıcaklık ve basınç altında bir cismin, katı halinden, doğrudan doğruya gaz haline geçmesidir.

Bir gazın durumu üç değişkenle belli olur. Sıcaklığı, uyguladığı basıncı, kapladığı hacim. Bu üç değer arasında bütün gazlar için doğru olan bağıntılar vardır. Gazları ya sabit basınç altında, ya da sabit hacim altında ısıtabiliriz.

Isı İletimi:

Isıyı insanlığa yararlı şekilde kullanmak için elde ettikten sonra kullanma yerine iletmek gereklidir. Bunun birçok yolu vardır. Yalnız ısı iletimi yöntemlerinde kayıpların az olmasına çalışılır.

Cisimler, ısıyı bir yerden bir yere iletme bakımından çeşitlilik gösterirler. Madenler ısıyı iyi iletirler. Buna karşılık hava kötü iletkenidir. Dolayısıyla, içinde hava bulunan maddeler de kötü iletkenidir. Böylece, cisimler; iletken, kötü iletken ve yalıtkan olmak üzere çeşitli bölümlere ayrılırlar. Bazen ısının iletilmesi, bazen de dışarıya verilmeyip korunması istenir. Duruma göre ya iletken, ya yalıtkan cisimler kullanılır. Evlerin, iş yerlerinin, fabrikaların ısıtılmasında, soğutulmasında ısı iletiminin önemli bir payı vardır. Bu bakımdan ısının iletim kanunları araştırılmıştır. Isının cisimlerin içinden, ya da bir cisimden başka bir cisme geçişi üç yolla olur:

1) İletim (kondüksiyon); 2) Çevirim (konveksiyon); 3) Işınım (radyasyon).

Çevirim ve ışıınım bizim ilgimiz dışındadır. İletim yoluyla ısı geçişinde, cismin ısı geçiren bir cisim olması gereklidir. Ya cismin bir parçası ısı kaynağına değer, ya da cisim sıcak başka bir cisme değer. Bu durumda ısı cismin soğuk yerlerine de yayılır. Bu çeşit ısı iletimini soba içine sokulan bir demir çubuğun öbür ucunun ısınmasıyla görürüz. Olayın açıklanmasında moleküllerden yararlanır. Sobaya sokulan uçtaki moleküllerin hareketi şiddetlenir. Bu moleküller yanlarındaki moleküllere çarparak onların titreşmesini de arttırlar. Böylece çubuğun öteki ucu ısınır. Isıtılan cismin yaydığı ısı dalgaları uzayda dağılır. Cisimlerin ışıınım yoluyla enerji salmaları Kuantum Teorisi ile açıklanmıştır.

O halde ısı, sıcak maddenin yüksek enerjili moleküllerinden soğuk maddenin düşük enerjili moleküllerine aktarımıdır. Eğer bir cismin bir bölümü öbür bölümlerinden daha sıcaksa, bu enerji aktarımı iletim yoluyla olur. Bu süreçte, yüksek enerjili moleküllerin hareketi komşu moleküllerin hızlanmasına yol açar ve bu etki bütün cisme yayılır. Bir maddenin iyi bir ısı iletkeni olması demek, o maddede iletim yoluyla ısı aktarımının kolayca gerçekteşmesi demektir. Akışkanlarda, yani sıvılarda ve gazlarda ısı aktarımı daha çok konveksiyon ya da taşınım yoluyla olur. Bu süreçte, akışkanın ısınan bölümleri genleşir; genleştiği için de yoğunluğu azalır. Böylece hafifleyen moleküller yükselirken akışkanın daha soğuk molekülleri alçalarak bunların yerini alır ve bu hareketten doğan konveksiyon akımları ısı enerjisini akışkanın her yanına taşır. İki cismin arasında, ışıma yoluyla sıcak cisimden soğuk cisme ısı aktarılabilir. Bir cismin molekülleri elektromagnetik ışıınım yayar; bu ışıınım dalga boyu cismin sıcaklığına bağlıdır. Cisim ne kadar sıcaksa yaydığı ışıınım dalga boyu da o kadar kısa olur.

Birbiriyle temas halinde bulunan sıcaklıkları farklı iki madde arasında ısı alışverişi olur. Sıcak madde ısı vererek soğurken, soğuk madde de bu ısıyı alarak sıcaklığı artar. Bu olay sıcaklıklar eşitleninceye kadar devam eder.

Buradan ise ısının, bir maddenin bütün moleküllerinin sahip olduğu çekim potansiyel enerjileri ile kinetik enerjilerinin toplamı olduğu söylenebilir. Bir enerji türü olan ısı, diğer enerjilere dönüşebilir. Sıcaklık, bir maddenin moleküllerinin ortalama kinetik enerjilerinin bir ölçüsü olup enerji değildir. Isı kalorimetre kabı, sıcaklık termometre ile ölçülür. Sıcaklık birimi günlük hayatta $^{\circ}C$, teknikte Kelvin (K).

Isı, malzemeyi teşkil eden en küçük parçacıkların (atom ve moleküller) titreşimiyle meydana gelir. Eğer bir malzeme ısıtılırsa bu küçük parçacıkların titreşimi hızlanır, tersine soğutulursa titreşim azalır. Bu konuya ilişkin geniş bilgi için Incropera ve Dewitt (2001)'e başvurulabilir.

1.2. Isı İletimi Denkleminin Tarihçesi

Katılardaki ısı iletimini tanımlayan bu denklem, iki yüzyılı aşkın bir zamandır, fiziksel, biyolojik, sosyal ve yer bilimlerinde geniş bir yelpazedeki problemlerin modellenmesine ek olarak ısının dinamik hareketini analiz etmek için kuvvetli bir araç olduğu görülmektedir. Bir kısmi diferansiyel denklemle tanımlanan zamana bağlı ısı iletimi süreci, ilk kez Fourier tarafından 1807 yılında, “Isının Analitik Teorisi” adlı eserinde formülize edildi (Narasimhan, 1999).

Bernoulli, Euler, Lagrange ve D’Alembert, denklemin çözümüne ilişkin daha önce çalışmalar yapmış olsalar da belki de en dikkat çekici ve en kabul edilebilir olanı Fourier’in çözüm metodudur. Isı iletimi denkleminin tarihçesi, etkileri ve bağlantılı olduğu bilimlere ilişkin geniş ve derinlemesine bilgi için Narasimhan’ın (1999) güzel çalışmasına başvurulabilir.

Isı iletimi denklemi yukarıda işaret edildiği gibi pek çok uygulama alanına sahiptir. Söz konusu bu problemleri temsil eden ısı iletimi denklemi çok farklı nümerik ya da analitik yöntemlerle direkt olarak çözülmüştür (örneğin Chen, 1992; Ellison, 1995; Chen, 1999; Korneyev, 2002; Liao, 2002; Shen ve Han, 2002; Shuja, 2002; Yilbas ve Kalyon, 2002; Gu ve ark., 2002; Pepper, 2002; Wang ve Chen, 2002; Lam ve Yeung, 2002; Murthy ve Mathur, 2003; Tsourkas ve Rubinsky, 2003; Sladek ve ark., 2003; Beck ve ark., 2006; Sadat, 2006; Chen ve ark., 2006; Tadeu ve Simões, 2006; Su ve ark., 2007; Kuddusi ve Denton, 2007; Beck ve Cole, 2007; Ge ve ark., 2008; Yiğit, 2008; Zhou ve ark., 2008; Valtchev ve Roberty, 2008; Wu ve Tao, 2008; Shijun ve Zhanqiang, 2008; Beck ve ark., 2008).

Isı iletimi denkleminin invers çözümleri (örneğin Kim ve Lee, 2002; Ghojel, 2002; Moultanovsky ve Rekada, 2002; Chen ve Tuan, 2002; Kim ve Daniel, 2003; Ling ve ark., 2003; Vynnycky ve ark., 2003; Woodfield ve ark., 2007) de mevcut olmakla birlikte bunlar bizim çalışma alanımızın dışındadır.

Yukarıda belirtildiği gibi pek çok etkili çözüm metotları ısı iletimi denkleminin çözümü için söz konusu olsa da bu çalışmada oldukça yeni ve dikkat çekecek kadar da etkili olan Diferansiyel Dönüşüm yöntemini kullanacağız. Bu yöntemin ısı iletimi problemlerinin (Jang ve ark., 2001; Kurnaz ve ark., 2005; Bildik ve ark., 2006; Bert, 2002) yanı sıra çeşitli problemlere ilişkin uygulamaları (Jang ve ark., 2001; Jang ve

ark., 2003; Kurnaz ve ark., 2005; Bildik ve ark., 2006; Ertürk, 2006) literatürde irdelenmiştir. Bu konuda ayrıntılı bilgi için, örneğin, Goldstein ve ark. (2005) ve Goldstein ve ark. (2006) çalışmalarına başvurulabilir.

Birçok uygulamada fiziksel sistemi tanımlayan lineer veya non-lineer kısmi türevli denklemlerle karşılaşılır. Diferansiyel denklemlerin çözümlerini bulmak için çeşitli metotlar (tam ve/veya nümerik yöntemler) uygulanabilir. Çoğu kez bu denklemleri analitik olarak çözmek çok karmaşık olabilir. Laplace ve Fourier dönüşümleri gibi integral dönüşümler, bu gibi denklemleri çözmek için yaygın olarak kullanılmaktadır. Bu integral dönüşümlerin kullanışlılığı diferansiyel denklemleri basit ve sistematik çözüm işlemlerine imkan veren cebirsel denklemlere dönüştürmekte yatar. Halbuki non-lineer problemlerde integral dönüşümü kullanmak karmaşıklılığını artırır. Alternatif olarak nümerik metotlar, problemlerin analitik çözümlerinden ziyade yaklaşık çözümler sağlar. Bu metotların farklı durumları birçok araştırmada analiz edilmiştir, örneğin Adomian ayrıştırma metodu (Evans ve ark., 2003; Inc ve Evans, 2004) gibi. Kurnaz ve ark. (2005)'nin da işaret ettiği gibi diferansiyel dönüşüm metodu; diferansiyel denklemler veya diferansiyel denklem sistemlerini çözmede etkili olarak kullanılan nümerik bir metottur.

Diferansiyel dönüşüm metodu ilk kez Zhou (1986) tarafından kullanıldı. Asıl uygulaması, elektrik devre analizindeki lineer ve non-lineer başlangıç değer problemlerini çözmeye aittir. Kimi araştırmacılar (Chen ve Ho, 1999; Jang ve ark., 2001; Hassan, 2002; Ayaz, 2003, 2004; Kurnaz ve ark., 2005) kısmi türevli denklemler için bu metodu geliştirdiler. Linear ve non-linear başlangıç-değer problemleri için kapalı form seri çözümleri elde ettiler. Bu metot polinom formunda bir analitik çözüm oluşturur. Veri fonksiyonlarının gerekli türevlerinin sembolik hesaplamasını gerektiren yüksek mertebeden Taylor seri metodundan farklıdır. Taylor seri metodu yüksek mertebeler için hesaplama yönünden maliyetlidir. Diferansiyel dönüşüm; diferansiyel denklemlerin analitik Taylor seri çözümlerini elde etmede bir iteratif prosedürdür (Jang ve ark., 2001; Hassan, 2008).

Bu çalışmanın amacı farklı boyutlardaki fiziksel ortamlarda ısı iletiminin, DD yönteminin kullanılarak, modellenmesi ve bu çerçevede elde edilen ısı yayılımı sonuçlarının analitik çözümle karşılaştırılmasıdır.

1.3. Tez Planı

Birinci bölümde, ısı, ısı iletiminin fiziği hakkında bilgiler verilmekte olup ısı denkleminin tarihçesi verilmiştir. Bir, iki ve üç boyutlu ısı iletimi denklemlerinin çıkarılışı fiziksel olarak gösterilmiştir. Isı iletim denkleminin çözümüne ilişkin literatür çalışmasına bu bölümde yer verilmiştir.

İkinci bölümde, bir boyutlu diferansiyel dönüşümün tanım ve işlemleri verilir ve bunlar yardımıyla adi diferansiyel denklemler çözülür. Ayrıca iki boyutlu diferansiyel dönüşüm metodunun formülasyonlarına yer verilir. Bir boyutlu ısı iletimi denklemi iki boyutlu DDM ile çözülmüştür.

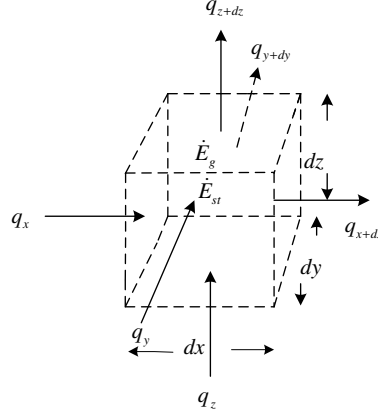
Üç boyutlu diferansiyel dönüşüm metoduna üçüncü bölümde yer verilir. Uygulama olarak iki boyutlu ısı iletimi denklemi üç boyutlu DDM ile çözülmüştür ve analitik çözümle karşılaştırılmıştır.

Dördüncü bölümde, dört boyutlu diferansiyel dönüşüm metodunun formülasyonlarına dayalı olarak üç boyutlu ısı iletimi denklemi çözülmüştür.

Beşinci bölümde; farklı boyuttaki geometriler için ısı iletimi denklemlerinin DDM sonuçları matematiksel ve fiziksel olarak ele alınmış ve tartışılmıştır.

1.4 Isı İletimi Denkleminin Çıkarılışı

Isı iletim çözümlemesinde asıl amaç, verilen sınır koşulları için bir ortamda sıcaklık dağılımını belirlemektir. Başka bir ifadeyle, ortamda sıcaklığın yerel olarak nasıl değiştiği bulunmak istenir. Bu dağılım bilindiğinde, ortam içinde veya yüzeyinde herhangi bir noktadaki iletimle ısı akısı Fourier yasasından hesaplanabilir.



Şekil 1 $w(x, y, z, t)$ sıcaklık dağılımının Kartezyen koordinatlardaki gösterimi

İçinde kütleli hareket olmayan ve bir t anında $w(x, y, z, t)$ sıcaklık dağılımının Kartezyen koordinatlarda gösterilen homojen bir ortam ele alınsın (bkz. Şekil 1). Enerji korunumu uygulanarak, sonsuz küçük bir kontrol hacmi $dx \cdot dy \cdot dz$ olarak tanımlanır. İkinci adım bu kontrol hacmi ile ilgili enerji etkileşimlerini ele almaktır. Sıcaklık gradyanları varsa kontrol yüzeylerinin her biri üzerinde iletimle ısı geçişi olacaktır. x , y ve z eksenleri üzerindeki kontrol yüzeylerinin her birine dik ısı iletimi sırasıyla q_x , q_y ve q_z terimleri ile gösterilir. Karşı yüzeylerdeki ısı iletimi ise yüksek mertebeden terimlerin atıldığı bir Taylor seri açılımı ile ifade edilir.

$$\begin{aligned}
 q_{x+dx} &= q_x + \frac{\partial q_x}{\partial x} dx \\
 q_{y+dy} &= q_y + \frac{\partial q_y}{\partial y} dy \\
 q_{z+dz} &= q_z + \frac{\partial q_z}{\partial z} dz
 \end{aligned} \tag{1}$$

Burada q_{x+dx} , $x + dx$ 'deki ısı iletimini ve $\frac{\partial q_x}{\partial x} dx$, dx uzunluğundaki değişimi

verir.

Ortam içinde ısı enerjisi üretimi ile ilgili olarak bir enerji kaynağı terimi de bulunabilir.

Bu terim,

$$\dot{E}_g = \dot{q} dx dy dz .$$

Ayrıca, kontrol hacminde malzeme tarafından depolanan ısı iç enerjide değişimler olabilir. Malzemede bir faz değişimi olmuyorsa gizli ısı etkileri yoktur ve enerji depolama terimi

$$\dot{E}_{st} = \rho c_p \frac{\partial w}{\partial t} dx dy dz$$

olarak yazılır. Burada w sıcaklık, t zaman, c_p sabit basınçta özgül ısı, \dot{E}_{st} kontrol hacmi içinde depolanan enerjide birim zamandaki değişim $\left(\frac{dE_{st}}{dt}\right)$, $\rho c_p \frac{\partial w}{\partial t}$ ortamın ısı enerjisinin birim hacimde, birim zamanda değişimidir.

Materyaldeki ısı enerjisi diğer bazı enerji türlerinin tüketimi sonucunda üretiliyorsa terim (\dot{E}_g) artıdır (kaynak); ısı enerjisi tüketiliyorsa bu terim eksidir (kuyu).

$$\dot{E}_i + \dot{E}_g - \dot{E}_0 = \dot{E}_{st}$$

\dot{E}_i enerji girişi, \dot{E}_g enerji (ısı) üretimi, \dot{E}_0 enerji çıkışıdır. Enerji korunumunun an denklemini olan bu son ifadede \dot{E}_s ve \dot{E}_{st} eşitliklerinden yararlanılırsa,

$$q_x + q_y + q_z + \dot{q} dx dy dz - q_{x+dx} - q_{y+dy} - q_{z+dz} = \rho c_p \frac{\partial w}{\partial t} dx dy dz$$

elde edilir. \dot{q} birim hacimdeki ısı üretimidir. Buradan (1) eşitlikleri kullanılırsa

$$-\frac{\partial q_x}{\partial x} dx - \frac{\partial q_y}{\partial y} dy - \frac{\partial q_z}{\partial z} dz + \dot{q} dx dy dz = \rho c_p \frac{\partial w}{\partial t} dx dy dz \quad (2)$$

bulunur.

Isı iletimi Fourier Yasası ile yazılabilir:

$$q_x'' = -k \frac{\partial w}{\partial x}, \quad q_y'' = -k \frac{\partial w}{\partial y}, \quad q_z'' = -k \frac{\partial w}{\partial z}$$

Bu ifadelerin her biri, bir yüzeydeki ısı akısının yüzeye dik yöndeki sıcaklık gradyanı ile ilişkisini göstermektedir. Burada k ısı iletim katsayısı, q'' ısı akısıdır.

Geçen ısıyı elde etmek için her bir ısı akısı bileşeni uygun kontrol yüzey alanı ile çarpılır.

$$q_x = -kdydz \frac{\partial w}{\partial x}$$

$$q_y = -kdx dz \frac{\partial w}{\partial y}$$

$$q_z = -kdx dy \frac{\partial w}{\partial z}$$

eşitlikleri (2)'de yerine yazılırsa,

$$kdydz \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right) dx + kdx dz \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right) dy + kdx dy \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial w}{\partial z} \right) dz + \dot{q} dx dy dz = \rho c_p \frac{\partial w}{\partial t} dx dy dz$$

olur. Her iki taraf $dx dy dz$ ile bölüldüğünde

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial w}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k \frac{\partial w}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(k \frac{\partial w}{\partial z} \right) + \dot{q} = \rho c_p \frac{\partial w}{\partial t}$$

elde edilir. Isı yayılım denkleminin Kartezyen koordinatlardaki genel biçimidir (ısı denklemdir). Isı iletimi çözümlemesinin temel aracıdır. Bu denklemin çözümünden $w(x, y, z)$ sıcaklık dağılımı zamanın bir fonksiyonu olarak elde edilebilir. Bu ifade karmaşık gibi görünse de önemli bir fiziksel olguyu, enerjinin korunumunu ortaya koymaktadır. Denklemden;

$\frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial w}{\partial x} \right)$ terimi x yönünde kontrol hacmine net iletim akısını belirtmektedir. dx ile çarpıldığında

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial w}{\partial x} \right) dx = q_x'' - q_{x+dx}''$$

olup y ve z yönündeki akılar için benzer ifadeler yazılabilir.

Isı denklemini, ortamın herhangi bir noktasında birim hacme iletimle geçen enerji ile birim hacimde üretilen ısı enerjinin toplamının hacim içersinde depolanan ısı enerjinin değişimine eşit olması gerektiğini ifade etmektedir.

Isı denkleminde ısı iletim katsayısı sabitse, ısı denklemini

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + \frac{\dot{q}}{k} = \frac{\rho c_p}{k} \frac{\partial w}{\partial t} ; \alpha = \frac{k}{\rho c_p}$$

haline gelir. Burada α ısı yayılma katsayısıdır.

Isı denklemi bir boyutlu ise yani sadece x yönünde ise, ısı üretiminin olmadığı ve ısı iletim katsayısının sabit alındığı durum için denklem;

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial w}{\partial t} ; \alpha = \frac{k}{\rho c_p}$$

biçiminde bir boyutlu geometri için ısı denklemi elde edilir.

Isı denklemi iki boyutlu ise yani sadece x , y yönünde ise, ısı üretiminin olmadığı ve ısı iletim katsayısının sabit alındığı durum için denklem;

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial w}{\partial t} ; \alpha = \frac{k}{\rho c_p}$$

formunda iki boyutlu geometri için ısı denklemi elde edilir.

Isı denklemi üç boyutlu ise ısı üretiminin olmadığı ve ısı iletim katsayısının sabit alındığı durum için denklem;

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial w}{\partial t} ; \alpha = \frac{k}{\rho c_p}$$

şeklinde üç boyutlu geometri için ısı iletimi denklemi elde edilir (Incropera ve Dewitt, 2001).

1.5. Özet

Bu bölümde ısı iletimi denkleminin çıkarılışı ile ısı iletimi denkleminin temsil ettiği fiziksel problemler ve denklemin çözümüne ilişkin kısa tarihsel gelişimi ele alındı.

Gelecek bölümde ise ısı iletimi denkleminin diferansiyel dönüşüm metodu çözümüne geçmeden önce kısmen daha kolay olan adi türevli denklemlerin diferansiyel dönüşüm çözümleri ele alınacaktır.

BÖLÜM 2 BİR BOYUTLU ISI İLETİMİNİN DİFERANSİYEL DÖNÜŞÜM METODU İLE ÇÖZÜMÜ

Bu bölümde bir boyutlu ısı denkleminin formülasyon ve çözümüne geçmeden önce adi diferansiyel denklemlere ilişkin bazı örnekler alınarak kısmen daha kolay problemler ve formülasyonları ile başlayacağız.

Bir boyutlu diferansiyel dönüşümün temel tanımları ve işlemleri literatürde (Jang ve ark., 2000; Jang ve ark., 2001; Chen ve Liu, 1998; Chen ve Ho, 1999; Jang ve Chen, 1997; Zhou, 1986; Hassan, 2004; Malik ve Dang, 1998; Bildik ve ark., 2006; Chen ve Ho, 1996; Kurnaz ve ark., 2005; Chu ve Chen, 2007) çeşitli çalışmalarda ele alınmıştır. Adi diferansiyel denklemler için formülasyon aşağıdaki gibidir:

Tanım 1: $y(t)$, L zaman bölgesinde analitik ise

$$\varphi(t, k) = \frac{d^k y(t)}{dt^k}, \forall t \in L. \quad (3)$$

$t = t_i$ için, $\varphi(t, k) = \varphi(t_i, k)$, $t_i = a + ih$, $i = 0, 1, \dots, N$ ve $h = \frac{b-a}{N}$.

burada k , K bölgesi ile gösterilen negatif olmayan tamsayılar kümesine aittir. Bundan dolayı (3) denklemini

$$Y_i(k) = \varphi(t_i, k) = \left[\frac{d^k y(t)}{dt^k} \right]_{t=t_i}, \forall k \in K \quad (4)$$

olarak yazılabilir. Burada $Y(k)$, K bölgesinde $t = t_i$ noktasında $y(t)$ 'nin spektrumu olarak adlandırılır.

Tanım 2: $y(t)$ analitik ise

$$y(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(t-t_i)^k}{k!} Y(k) \quad (5)$$

olarak temsil edilebilir. (5) denklemini $Y(k)$ 'nin ters dönüşümüdür.

$$Y(k) = M(k) \left[\frac{d^k q(t) y(t)}{dt^k} \right]_{t=t_0}, k = 0, 1, 2, \dots \quad (6)$$

olarak tanımlanırsa

$$y(t) = \frac{1}{q(t)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(t-t_0)^k}{k!} \frac{Y(k)}{M(k)}, M(k) \neq 0 \text{ ve } q(t) \neq 0 \quad (7)$$

olur. Burada $M(k)$ ağırlık çarpanı ve $q(t)$, $y(t)$ ' ye benzer bir çekirdek olarak kabul edilir. $M(k)=1$ ve $q(t)=1$ ise (4) ve (6) eşittir. (5) denklemi, (7) denkleminin

özel bir durumudur. Burada $M(k) = \frac{H^k}{k!}$ ve $q(t)=1$ dönüşümü uygulanır. Burada H ilgilenilen zaman bölgesidir. Sonra (6) denklemi

$$Y(k) = \frac{H^k}{k!} \left[\frac{d^k y(t)}{dt^k} \right]_{t=t_0}, k = 0, 1, 2, \dots$$

şekline gelir.

Diferansiyel dönüşüm kullanılarak, ilgilenilen bölgedeki bir diferansiyel denklem K bölgesindeki bir cebirsel denkleme dönüştürülebilir ve $y(t)$, kalan terimle birlikte sonlu terimli Taylor serilerince

$$y(t) = \frac{1}{q(t)} \sum_{k=0}^n \frac{(t-t_0)^k}{k!} \frac{Y(k)}{M(k)} + R_{n+1}(t) = \sum_{k=0}^n \left(\frac{t-t_0}{H} \right)^k Y(k) + R_{n+1}(t)$$

olarak elde edilir.

Yakınsama oranını ve hesaplamanın geçerliliğini hızlandırmak için t 'nin tüm bölgesi alt bölgelere ayrılmayı gerektirir (Jang ve Chen, 1997; Jang ve ark., 2001).

Yukarıdaki tanımlardan, diferansiyel dönüşümünün içeriğinin Taylor seri açılımından türetildiği kolayca görülmektedir (Kurnaz ve ark., 2005).

Bir boyutlu diferansiyel dönüşümün tanımından temel matematiksel işlemler elde edilir ve aşağıdaki teoremlerle (Kurnaz ve Oturanç, 2005; Hassan, 2007; Hassan, 2008; Arikoğlu ve Özkol, 2005) verilir:

Teorem 1: $w(t) = y(t) \pm v(t)$ ise $W(k) = Y(k) \pm V(k)$.

Teorem 2: $w(t) = \alpha \cdot y(t)$ ise $W(k) = \alpha \cdot Y(k)$, α bir sabit.

Teorem 3: $w(t) = \frac{d^m y(t)}{dt^m}$ ise $W(k) = (k+1)(k+2)\dots(k+m)Y(k+m)$.

Teorem 4: $w(t) = t^n$ ise $W(k) = \delta(k-n)$, $\delta(k-n) = \begin{cases} 1, & k = n \\ 0, & k \neq n \end{cases}$.

Teorem 5: $w(t) = y(t) \cdot v(t)$ ise $W(k) = Y(k) \otimes V(k) = \sum_{r=0}^k V(r) \cdot Y(k-r)$.

Sabit Grid Genişlikli DD Metodu:

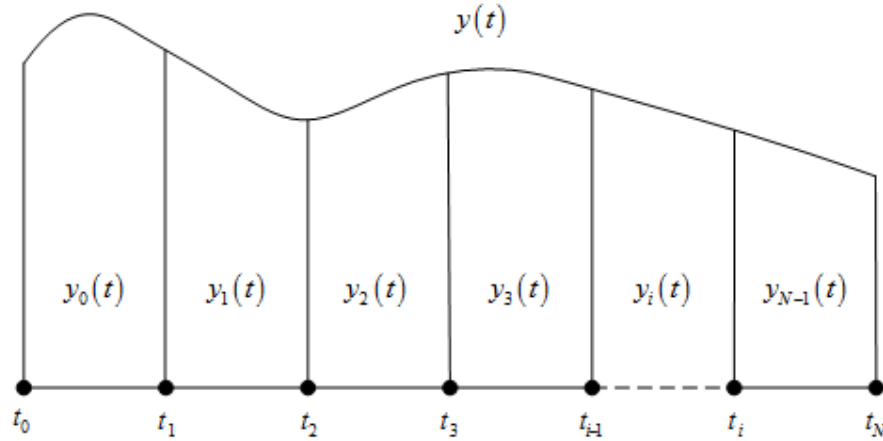
$$\begin{aligned} \frac{dy}{dt} &= f(t, y), \quad a \leq t \leq b \\ y(a) &= \alpha \end{aligned} \quad (8)$$

başlangıç-değer problemi ele alınsın.

(8) denkleminin $\{t_0, t_1, t_2, \dots, t_N\}$ eşit ayrılmış ayırık noktadaki çözümü bulunacaktır.

Burada $t_i = a + ih$, $i = 0, 1, \dots, N$ ve $h = \frac{b-a}{N}$.

İlgilenilen bölge $[a, b]$ kapalı aralığı, N alt bölgeye bölünür ve her bir alt bölgedeki yaklaşım fonksiyonları $y_i(t)$ ($i = 0, 1, 2, \dots, N-1$) ler Şekil 2' de gösterilmiştir (Jang ve ark., 2000).



Şekil 2 Her bir alt bölgedeki yaklaşım fonksiyonları

(8)' in diferansiyel dönüşümü alınırsa dönüşüm denklemi $y(t)$ spektrumu arasındaki ilişki

$$(k+1)Y(k+1) = F(Y(k)) \quad (9)$$

olarak tanımlanır. Burada $F(\cdot)$, $f(t, y(t))$ ' nin dönüşüm fonksiyonunu gösterir.

Başlangıç koşulundan,

$$Y(0) = \alpha \quad (10)$$

elde edilir.

İlk alt bölgede, $y(t)$ $y_0(t)$ ile tanımlanır. (9) ve (10)' den $y_0(t)$, a noktası etrafındaki n . mertebeden Taylor polinomu yardımıyla ifade edilebilir.

$$y_0(t) = Y_0(0) + Y_0(1)(t-a) + Y_0(2)(t-a)^2 + \dots + Y_0(n)(t-a)^n$$

Buradaki 0 alt indisi, Taylor polinomunun $t_0 = a$ etrafında açılacağını gösterir. Bir kere Taylor polinomu elde edildiğinde, $y(t_1)$

$$\begin{aligned} y(t_1) &\approx y_0(t_1) \\ &= Y_0(0) + Y_0(1)(t_1 - a) + Y_0(2)(t_1 - a)^2 + \dots + Y_0(n)(t_1 - a)^n \\ &= Y_0(0) + Y_0(1)h + Y_0(2)h^2 + \dots + Y_0(n)h^n \\ &= \sum_{j=0}^n Y_0(j)h^j \end{aligned} \quad (11)$$

olarak hesaplanır.

İlk alt bölgenin son değeri $y_0(t_1)$, ikinci alt bölgenin başlangıç değeridir. Yani $y_1(t_1) = Y_1(0) = y_0(t_1)$. Benzer şekilde $y(t_2)$

$$\begin{aligned} y(t_2) &\approx y_1(t_2) \\ &= Y_1(0) + Y_1(1)(t_2 - t_1) + Y_1(2)(t_2 - t_1)^2 + \dots + Y_1(n)(t_2 - t_1)^n \\ &= Y_1(0) + Y_1(1)h + Y_1(2)h^2 + \dots + Y_1(n)h^n \\ &= \sum_{j=0}^n Y_1(j)h^j \end{aligned} \quad (12)$$

olarak ifade edilebilir. Dolayısıyla (t_{i+1}) ' deki grid noktalarındaki çözüm;

$$\begin{aligned} y(t_{i+1}) &\approx y_i(t_{i+1}) \\ &= Y_i(0) + Y_i(1)(t_{i+1} - t_i) + Y_i(2)(t_{i+1} - t_i)^2 + \dots + Y_i(n)(t_{i+1} - t_i)^n \\ &= Y_i(0) + Y_i(1)h + Y_i(2)h^2 + \dots + Y_i(n)h^n \end{aligned}$$

$$= \sum_{j=0}^n Y_i(j) h^j \quad (13)$$

olarak elde edilir.

Linear ve non-linear olmak üzere iki başlangıç değer problemini yukarıdaki tanımlardan ve teoremlerden yararlanarak çözelim:

Problem 1 (Jang ve ark., 2000)

$y'(t) = y(t) - t^2 + 1$, $0 \leq t \leq 2$ $y(0) = 0.5$ linear başlangıç-değer problemi ele alınsın.

$N = 10$ ve $h = 0.2$ olsun. t_i ve t_{i+1} arasındaki bir sistemin diferansiyel denklemi

$$y'(t^*) = y(t^*) - t^{*2} - 2t_i t^* + (1 - t_i^2), \quad t^* = t - t_i \quad (14)$$

olarak yazılabilir. (14)'ün diferansiyel dönüşümü alınırsa;

Teorem 3'te $m = 1$ için $w(t) = \frac{dy(t^*)}{d(t^*)}$ olduğundan $W(k) = (k+1)Y_i(k+1)$.

Teorem 2'de $\alpha = 1$ için $w(t) = y(t^*)$ olduğundan $W(k) = Y_i(k)$.

Teorem 4'te $n = 2$ için $w(t) = (t^*)^2$ olduğundan

$$W(k) = \delta(k-2), \quad \delta(k-2) = \begin{cases} 1, & k = 2 \\ 0, & k \neq 2. \end{cases}$$

Teorem 4'te $n = 1$ için $w(t) = t^*$ olduğundan

$$W(k) = \delta(k-1), \quad \delta(k-1) = \begin{cases} 1, & k = 1 \\ 0, & k \neq 1. \end{cases}$$

Teorem 4'te $n = 0$ için $w(t) = (t^*)^0$ olduğundan

$$W(k) = \delta(k), \quad \delta(k) = \begin{cases} 1, & k = 0 \\ 0, & k \neq 0. \end{cases}$$

$$Y_i(k+1) = \left[Y_i(k) - \delta(k-2) - 2t_i \delta(k-1) + (1 - t_i^2) \cdot \delta(k) \right] / (k+1)$$

ve $Y_0(0) = 0.5$ (15)

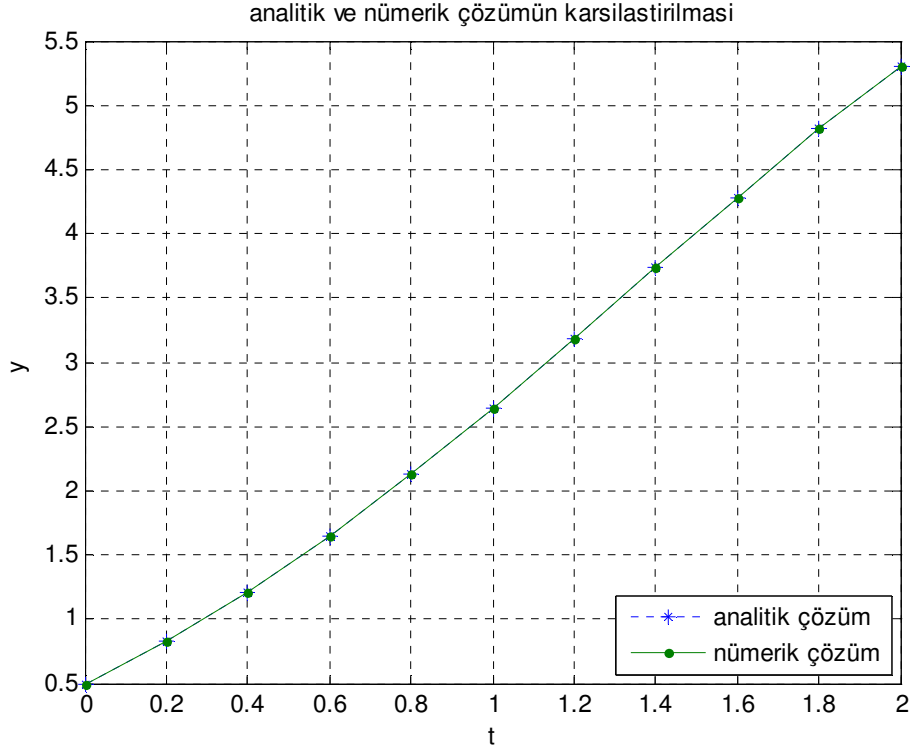
elde edilir. Grid noktalarındaki $y(t)$ yaklaşımı (13) ve (15)'ten elde edilir.

Problemin tam çözümü kolaylıkla $y(t) = (t+1)^2 - \frac{1}{2}e^t$ olarak elde edilir.

Tablo 1 Linear başlangıç- değer probleminin çözümü (Problem 1)

DD4	Analitik çözüm
$Y_0(0) = 0.500000$	$y(0) = 0.500000$
$y_0(0.2) = 0.829300$	$y(0.2) = 0.829299$
$y_1(0.4) = 1.214091$	$y(0.4) = 1.214088$
$y_2(0.6) = 1.648947$	$y(0.6) = 1.648941$
$y_3(0.8) = 2.127240$	$y(0.8) = 2.127230$
$y_4(1) = 2.640874$	$y(1) = 2.640859$
$y_5(1.2) = 3.179964$	$y(1.2) = 3.179942$
$y_6(1.4) = 3.732432$	$y(1.4) = 3.732400$
$y_7(1.6) = 4.283529$	$y(1.6) = 4.283484$
$y_8(1.8) = 4.815238$	$y(1.8) = 4.815176$
$y_9(2) = 5.305555$	$y(2) = 5.305472$

Tablo 1'den görüldüğü gibi linear olan bu problemin analitik ve $t \in [0, 2]$, $N = 10$ ve $h = 0.2$ için elde edilen DD çözümleri arasındaki uyum oldukça güzeldir. Bu uyum Şekil 3'te de kalitatif olarak görülmektedir.



Şekil 3 Linear başlangıç-değer probleminin grafiği (Problem 1)

Problem 2 (Jang ve ark., 2000)

$y' = -(y+1)(y+3)$, $0 \leq t \leq 3$ $y(0) = -2$ non-linear başlangıç-değer problemini alalım.

$N=10$ ve $h=0.3$ olsun. Non-linear problemler, linear problemlere göre fiziksel problemleri daha iyi temsil ettikleri için non-linear olan bu problem bu yöntem için önemli bir test olacaktır. Verilen denklemin diferansiyel dönüşümü alınırsa,

Teorem 3'te $m=1$ için $w(t) = \frac{dy(t)}{dt}$ olduğundan $W(k) = (k+1)Y_i(k+1)$.

Teorem 4'te $n=0$ için $w(t) = t^0$ olduğundan $W(k) = \delta(k)$, $\delta(k) = \begin{cases} 1, & k=0 \\ 0, & k \neq 0. \end{cases}$

Teorem 5'ten $w(t) = (y+1)(y+3)$ olduğundan

$$W(k) = (Y_i(k) + \delta(k)) \otimes (Y_i(k) + 3\delta(k)) = \sum_{r=0}^k (Y_i(r) + \delta(r)) \cdot (Y_i(k-r) + 3\delta(k-r)).$$

$$\begin{aligned}
Y_i(k+1) &= -\left[(Y_i(k) + \delta(k)) \otimes (Y_i(k) + 3\delta(k))\right]/(k+1) \\
&= -\left[\sum_{r=0}^k (Y_i(r) + \delta(r)) \cdot (Y_i(k-r) + 3\delta(k-r))\right]/(k+1)
\end{aligned}$$

ve (16)

$$Y_0(0) = -2 .$$

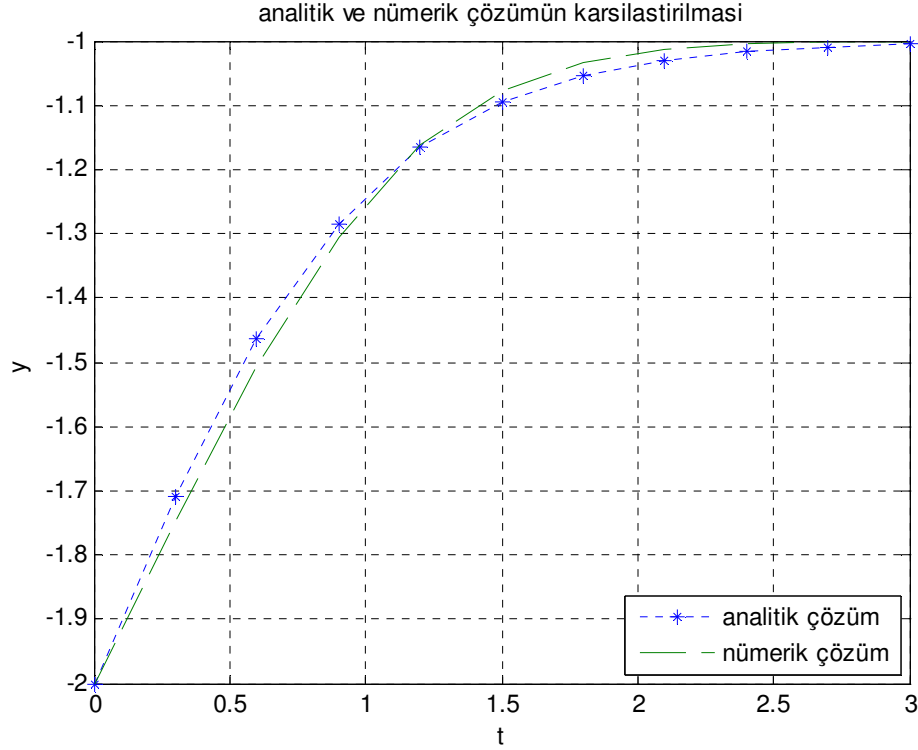
Grid noktalarındaki $y(t)$ yaklaşımı (13) ve (16) ' dan elde edilir. Problemin tam çözümü

$$y(t) = -3 + 2(1 + e^{-2t})^{-1} .$$

Tablo 2 Non-linear başlangıç- değer probleminin çözümü (Problem 2)

DD4	Analitik çözüm
$Y_0(0) = -2.000000$	$y(0) = -2.000000$
$y_0(0.3) = -1.747264$	$y(0.3) = -1.708687$
$y_1(0.6) = -1.507598$	$y(0.6) = -1.462950$
$y_2(0.9) = -1.306902$	$y(0.9) = -1.283702$
$y_3(1.2) = -1.163332$	$y(1.2) = -1.166345$
$y_4(1.5) = -1.077404$	$y(1.5) = -1.094852$
$y_5(1.8) = -1.033757$	$y(1.8) = -1.053194$
$y_6(2.1) = -1.014043$	$y(2.1) = -1.029548$
$y_7(2.4) = -1.005711$	$y(2.4) = -1.016325$
$y_8(2.7) = -1.002300$	$y(2.7) = -1.008993$
$y_9(3) = -1.000923$	$y(3) = -1.004945$

Problem 2 için üretilen DD çözümleri ile analitik çözüm arasındaki uyum kendisini Şekil 4'te görüldüğü gibi kalitatif olarak da göstermektedir. Burada ele alınan problem non-linear olduğu için üretilen çözümler, linear probleme göre (Problem 1) daha az hassastır. Yine burada da N artırılarak ve h küçültülerek hassasiyet artırılabilir.



Şekil 4 Non-linear başlangıç-değer probleminin grafiği (Problem 2)

Bu linear ve non-linear şekillerinden anlaşılacağı gibi, Taylor seri mertebesi arttığında hesaplama hatası azalır. Spesifik bir tolerans altında başlangıç-değer problemlerini çözmek için DDM' nin uygulanmasında ne kadar yüksek mertebeden Taylor serileri kullanılırsa o kadar uzun grid genişliği alınabilir (Jang ve ark., 2000). Bundan dolayı Taylor serilerinin mertebesi seçimi ve grid genişliği arasında bir ilişki vardır.

2.1. Bir Boyutlu Problemler için Diferansiyel Dönüşüm Formülasyonu

İki boyutlu diferansiyel dönüşümün temel tanım ve teoremleri Chen ve Ho (1999); Jang ve ark. (2001); Ayaz (2003, 2004) çalışmalarında aşağıdaki gibi ele alınmıştır.

Tanım 3: $w(x, y)$ fonksiyonunun iki boyutlu diferansiyel dönüşümü

$$W(k, h) = \frac{1}{k!h!} \left[\frac{\partial^{k+h} w(x, y)}{\partial x^k \partial y^h} \right]_{(0,0)} \quad (17)$$

olarak tanımlanır. Burada $w(x, y)$ orijinal fonksiyon ve $W(k, h)$ dönüşüm fonksiyonudur. Küçük harfler orijinal fonksiyonları, büyük harfler dönüşüm fonksiyonlarını temsil etmede kullanılmaktadır. $W(k, h)$ ' ın diferansiyel ters dönüşümü

$$w(x, y) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{h=0}^{\infty} W(k, h) x^k y^h \quad (18)$$

olarak tanımlanır. (17) ve (18)' den

$$w(x, y) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{h=0}^{\infty} \frac{1}{k!h!} \left[\frac{\partial^{k+h} w(x, y)}{\partial x^k \partial y^h} \right]_{(0,0)} x^k y^h \quad (19)$$

elde edilir. (19) denklemi iki boyutlu diferansiyel dönüşümün içeriğinin iki boyutlu Taylor seri açılımından türetildiğini gösterir.

İki boyutlu dönüşümün temel teoremleri (17) ve (18) tanımlarından yararlanarak ispatlanabilir.

Teorem 6: $w(x, y) = u(x, y) \pm v(x, y)$ ise $W(k, h) = U(k, h) \pm V(k, h)$.

İspat: Tanım 3' ten

$$U(k, h) = \frac{1}{k!h!} \left[\frac{\partial^{k+h} u(x, y)}{\partial x^k \partial y^h} \right]_{(0,0)}, \quad (20)$$

$$V(k, h) = \frac{1}{k!h!} \left[\frac{\partial^{k+h} v(x, y)}{\partial x^k \partial y^h} \right]_{(0,0)}, \quad (21)$$

$$W(k, h) = \frac{1}{k!h!} \left[\frac{\partial^{k+h}}{\partial x^k \partial y^h} [u(x, y) + v(x, y)] \right]_{(0,0)} \quad (22)$$

(20)-(22)' den

$$W(k, h) = U(k, h) \pm V(k, h) \quad (23)$$

elde edilir.

Teorem 7: $w(x, y) = \lambda \cdot u(x, y)$ ise $W(k, h) = \lambda \cdot U(k, h)$, λ keyfi bir sabit.

İspat: Tanım 3' ten

$$U(k, h) = \frac{1}{k!h!} \left[\frac{\partial^{k+h} u(x, y)}{\partial x^k \partial y^h} \right]_{(0,0)}, \quad (24)$$

$$W(k, h) = \frac{1}{k!h!} \left[\frac{\partial^{k+h}}{\partial x^k \partial y^h} [\lambda \cdot u(x, y)] \right]_{(0,0)} \quad (25)$$

(24) ve (25) ' den

$$W(k, h) = \lambda \cdot U(k, h)$$

elde edilir.

Teorem 8: $w(x, y) = \frac{\partial u(x, y)}{\partial x}$ ise $W(k, h) = (k+1)U(k+1, h)$.

İspat: Tanım 3' ten

$$W(k, h) = \frac{1}{k!h!} \left[\frac{\partial^{k+h}}{\partial x^k \partial y^h} \left[\frac{\partial u(x, y)}{\partial x} \right] \right]_{(0,0)} = \frac{(k+1)}{(k+1)!h!} \left[\frac{\partial^{k+h+1}}{\partial x^{k+1} \partial y^h} u(x, y) \right]_{(0,0)}.$$

O halde

$$W(k, h) = (k+1)U(k+1, h)$$

elde edilir.

Teorem 9: $w(x, y) = \frac{\partial u(x, y)}{\partial y}$ ise $W(k, h) = (h+1)U(k, h+1)$.

İspat: Tanım 3' ten

$$\begin{aligned} W(k, h) &= \frac{1}{k!h!} \left[\frac{\partial^{k+h}}{\partial x^k \partial y^h} \left[\frac{\partial u(x, y)}{\partial y} \right] \right]_{(0,0)} \\ &= \frac{(h+1)}{k!(h+1)!} \left[\frac{\partial^{k+h+1}}{\partial x^k \partial y^{h+1}} u(x, y) \right]_{(0,0)}, \end{aligned}$$

$$W(k, h) = (h+1)U(k, h+1).$$

Teorem 10: $w(x, y) = \frac{\partial^{r+s} u(x, y)}{\partial x^r \partial y^s}$ ise

$$W(k, h) = (k+1)(k+2)\dots(k+r)(h+1)(h+2)\dots(h+s)U(k+r, h+s).$$

İspat: Tanım 3' ten

$$W(k, h) = \frac{1}{k!h!} \left[\frac{\partial^{k+h}}{\partial x^k \partial y^h} \left[\frac{\partial^{r+s} u(x, y)}{\partial x^r \partial y^s} \right] \right]_{(0,0)}$$

$$= \frac{(k+1)(k+2)\dots(k+r)(h+1)(h+2)\dots(h+s)}{(k+r)!(h+s)!} \left[\frac{\partial^{k+h+r+s} u(x, y)}{\partial x^{k+r} \partial y^{h+s}} \right]_{(0,0)},$$

$$W(k, h) = (k+1)(k+2)\dots(k+r)(h+1)(h+2)\dots(h+s)U(k+r, h+s).$$

Teorem 11: $w(x, y) = u(x, y)v(x, y)$ ise $W(k, h) = \sum_{r=0}^k \sum_{s=0}^h U(r, h-s)V(k-r, s)$.

İspat: Tanım 3' ten

$$W(0, 0) = [u(x, y)v(x, y)]_{(0,0)} = U(0, 0)V(0, 0)$$

$$\begin{aligned} W(1, 0) &= \frac{1}{1!0!} \frac{\partial}{\partial x} [u(x, y)v(x, y)]_{(0,0)} \\ &= \left[\frac{\partial u(x, y)}{\partial x} v(x, y) + u(x, y) \frac{\partial v(x, y)}{\partial x} \right]_{(0,0)} \\ &= U(1, 0)V(0, 0) + U(0, 0)V(1, 0) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} W(2, 0) &= \frac{1}{2!0!} \frac{\partial^2}{\partial x^2} [u(x, y)v(x, y)]_{(0,0)} \\ &= U(2, 0)V(0, 0) + U(1, 0)V(1, 0) + U(0, 0)V(2, 0) \end{aligned}$$

$$W(0, 1) = U(0, 1)V(0, 0) + U(0, 0)V(0, 1)$$

$$W(1, 1) = U(1, 1)V(0, 0) + U(1, 0)V(0, 1) + U(0, 1)V(1, 0) + U(0, 0)V(1, 1)$$

$$\begin{aligned} W(1, 2) &= U(1, 2)V(0, 0) + U(1, 1)V(0, 1) + U(1, 0)V(0, 2) + U(0, 2)V(1, 0) \\ &\quad + U(0, 1)V(1, 1) + U(0, 0)V(1, 2) \end{aligned}$$

$$W(0, 2) = U(0, 2)V(0, 0) + U(0, 1)V(0, 1) + U(0, 0)V(0, 2)$$

$$\begin{aligned} W(2, 1) &= U(2, 1)V(0, 0) + U(2, 0)V(0, 1) + U(1, 1)V(1, 0) \\ &\quad + U(1, 0)V(1, 1) + U(0, 1)V(2, 0) + U(0, 0)V(2, 1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} W(2, 2) &= U(2, 2)V(0, 0) + U(2, 1)V(0, 1) + U(2, 0)V(0, 2) + U(1, 2)V(1, 0) \\ &\quad + U(1, 1)V(1, 1) + U(1, 0)V(1, 2) + U(0, 2)V(2, 0) + U(0, 1)V(2, 1) \\ &\quad + U(0, 0)V(2, 2). \end{aligned}$$

Genelleştirme yapılırsa,

$$W(k, h) = \sum_{r=0}^k \sum_{s=0}^h U(r, h-s) V(k-r, s).$$

Teorem 12: $w(x, y) = x^m y^n$ ise $W(k, h) = \delta(k-m, h-n) = \begin{cases} 1, & k = m \text{ ve } h = n \\ 0, & \text{aksi durumda} \end{cases}$.

İspat:

$$\left[\frac{\partial^{k+h} w(x, y)}{\partial x^k \partial y^h} \right]_{(0,0)} = \begin{cases} k!h!, & k = m \text{ ve } h = n \\ 0, & k \neq m \text{ veya } h \neq n \end{cases}$$

eşitliğinden,

$$\begin{aligned} W(k, h) &= \frac{1}{k!h!} \left[\frac{\partial^{k+h} w(x, y)}{\partial x^k \partial y^h} \right]_{(0,0)} \\ &= \delta(k-m, h-n) \\ &= \delta(k-m) \delta(h-n) \end{aligned}$$

elde edilir. Burada

$$\delta(k-m) = \begin{cases} 1, & k = m \\ 0, & k \neq m \end{cases}, \quad \delta(h-n) = \begin{cases} 1, & h = n \\ 0, & h \neq n \end{cases}.$$

2.2. Isı İletimi Problemi (Sun ve Zhang, 2003)

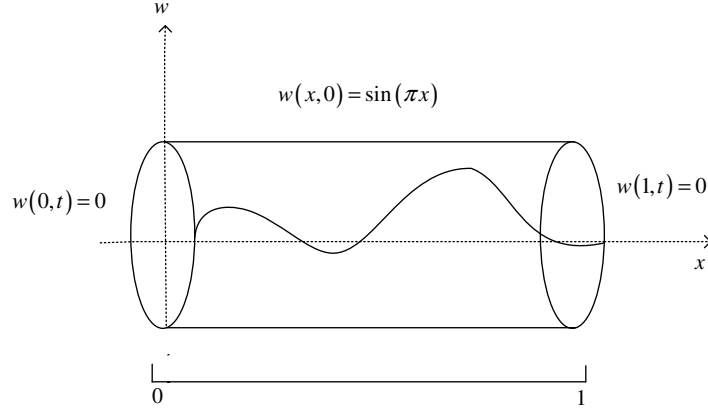
Zamana bağlı ısı iletimi birçok uygulama alanında önem kazanır ve değişik yöntemlerle çözülebilir (Incropera ve Dewitt, 2001).

$$\frac{\partial w(x, t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial x^2} \quad 0 < x < 1, t > 0$$

bir boyutlu ısı denkleminin

$$w(x, 0) = \sin(\pi x), 0 < x < 1, \quad w(0, t) = w(1, t) = 0, t \geq 0$$

başlangıç ve sınır koşulları altındaki çözümü DD metodu ile bulunur. Problemin geometrisi Şekil 5'te verilmiştir.



Şekil 5 Bir boyutlu ısı denkleminin geometrik ifadesi

2.3. Isı İletimi Probleminin DD Metodu ile Çözümü ve Karşılaştırılması

Bir boyutlu ısı denkleminin diferansiyel dönüşümü alınır. İki boyutlu diferansiyel dönüşümdeki teoremlerden yararlanılırsa (Teorem 10'da $r = 2, s = 0$ alınır ve Teorem 9'dan);

$$(k+1)W(i, k+1) = (i+1)(i+2)W(i+2, k) \quad (26)$$

elde edilir. Başlangıç koşulu $w(x, 0) = \sin \pi x$ 'den

$$\begin{aligned} w(x, 0) &= \sum_{i=0}^{\infty} W(i, 0)x^i \\ &= \sin(\pi x); \sin x = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^{i+1}}{(2i-1)!} x^{2i-1} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^{i+1}}{(2i-1)!} \pi^{2i-1} x^{2i-1} \end{aligned}$$

olur.

$$\sum_{i=0}^{\infty} W(i, 0)x^i = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^{i+1}}{(2i-1)!} \pi^{2i-1} x^{2i-1}$$

ya da

$$W(0, 0) + W(1, 0)x + W(2, 0)x^2 + W(3, 0)x^3 + \dots = \pi x - \frac{(\pi x)^3}{3!} + \frac{(\pi x)^5}{5!} - \frac{(\pi x)^7}{7!} + \dots$$

$$\Rightarrow W(0,0)=0, \quad W(1,0)=\pi, \quad W(2,0)=0, \quad W(3,0)=-\frac{\pi^3}{3!}, \dots$$

$$\sum_{i=0}^{\infty} W(i,0)x^i = \sum_{i=1,3,\dots}^{\infty} \frac{(-1)^{\frac{i-1}{2}}}{i!} \pi^i x^i$$

$$W(i,0) = \begin{cases} 0 & , \quad i \text{ çift ise} \\ \frac{(-1)^{\frac{(i-1)}{2}}}{i!} \pi^i & , \quad i \text{ tek ise .} \end{cases} \quad (27)$$

(26)'da $k=0$ için $W(i,1) = (i+1)(i+2)W(i+2,0)$.

(27)'de $i \rightarrow i+2$ yazılırsa

$$W(i,1) = (i+1)(i+2) \frac{(-1)^{\frac{(i+1)}{2}}}{(i+2)!} \pi^{i+2}$$

$$W(i,1) = \begin{cases} 0 & , \quad i \text{ çift ise} \\ \frac{(-1)^{\frac{(i+1)}{2}}}{i!} \pi^{i+2} & , \quad i \text{ tek ise .} \end{cases}$$

(26)'da $k=1$ için $2.W(i,2) = (i+1)(i+2)W(i+2,1)$

$W(i,1)$ 'de $i \rightarrow i+2$ yazılırsa

$$W(i,2) = \frac{1}{2} \frac{(-1)^{\frac{(i+3)}{2}}}{i!} \pi^{i+4}$$

$$W(i,2) = \begin{cases} 0 & , \quad i \text{ çift ise} \\ \frac{1}{2} \frac{(-1)^{\frac{(i+3)}{2}}}{i!} \pi^{i+4} & , \quad i \text{ tek ise} \end{cases}$$

(26)'da $k=2$ için $3.W(i,3) = (i+1)(i+2)W(i+2,2)$

$W(i,2)$ 'de $i \rightarrow i+2$ yazılırsa

$$W(i,3) = \begin{cases} 0 & , i \text{ çift ise} \\ \frac{1}{2} \frac{1}{3} \frac{(-1)^{\frac{(i+5)}{2}}}{i!} \pi^{i+6} & , i \text{ tek ise} \end{cases}$$

(26)'da $k=3$ için $4.W(i,4) = (i+1)(i+2)W(i+2,3)$

$W(i,3)$ 'de $i \rightarrow i+2$ yazılırsa

$$W(i,4) = \begin{cases} 0 & , i \text{ çift ise} \\ \frac{1}{2} \frac{1}{3} \frac{1}{4} \frac{(-1)^{\frac{(i+7)}{2}}}{i!} \pi^{i+8} & , i \text{ tek ise} \end{cases}$$

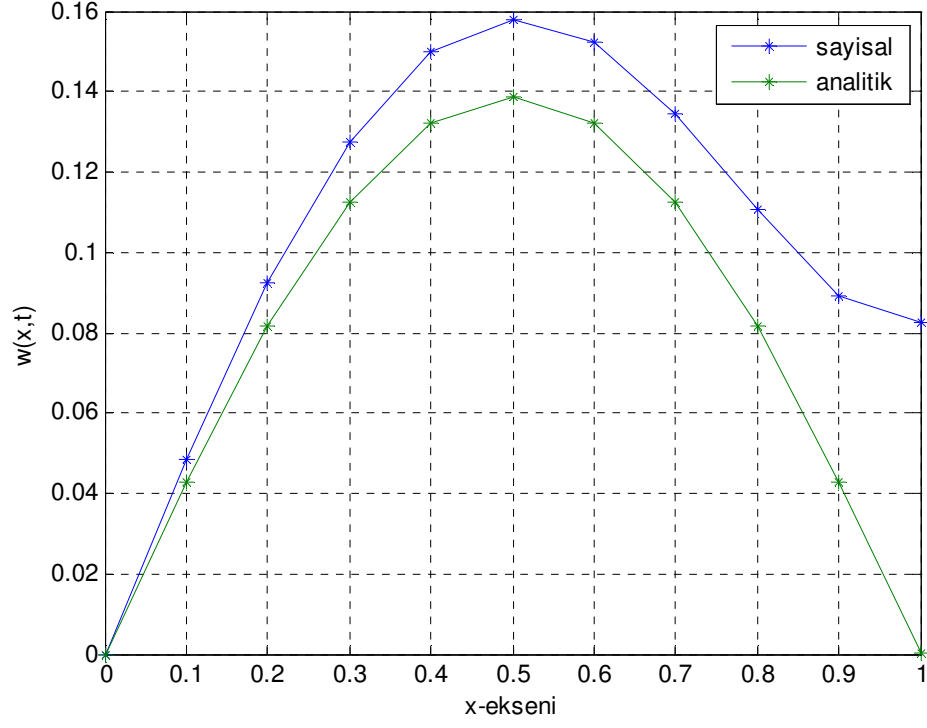
\vdots

$$W(i,k) = \begin{cases} 0 & , i \text{ çift ise} \\ \frac{(-1)^{\frac{(i+2k-1)}{2}}}{k!i!} \pi^{i+2k} & , i \text{ tek ise} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} w(x,t) &= \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} W(i,k) x^i t^k \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{\frac{(i+2k-1)}{2}}}{k!i!} \pi^{i+2k} x^i t^k \end{aligned}$$

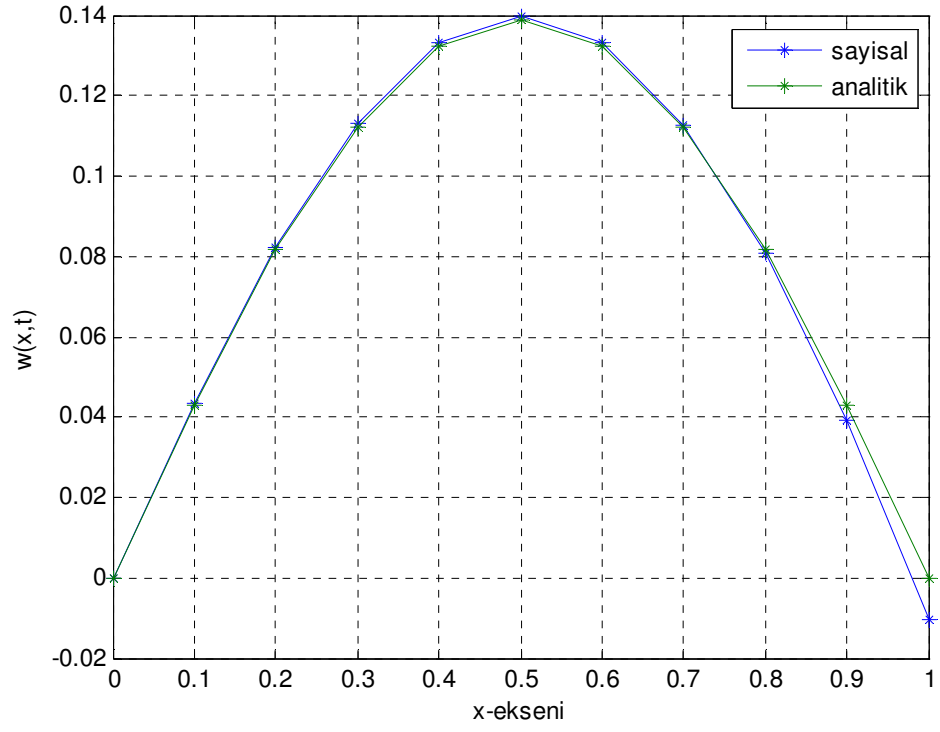
çözümü elde edilir. Analitik çözüm ise $w(x,t) = \sin(\pi x).e^{-\pi^2 t}$.

Serideki terim sayısına bağılı olarak analitik çözümle sayısal çözüm arasındaki fark incelenmiştir. Terim sayısı $n=6$ için $t=0.1$ saniyedeki sıcaklık dağılımı Şekil 6'da gösterilmiştir.



Şekil 6 Isı denkleminin $t=0.1$ anındaki çözüm ($n=6$ için)

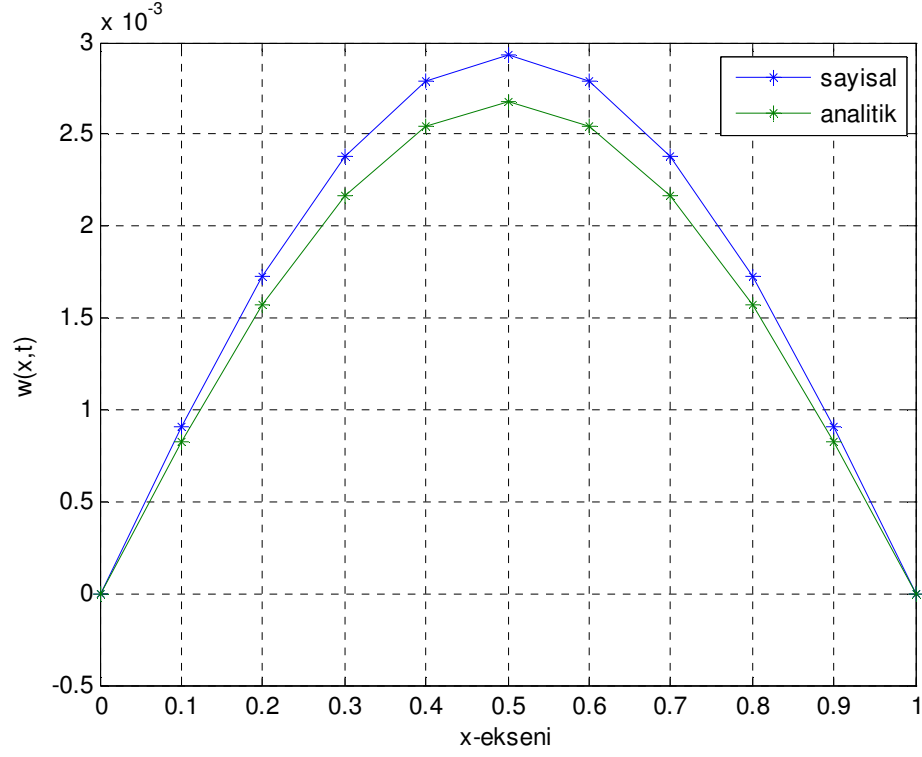
Terim sayısı $n = 8$ için $t = 0.1$ saniyedeki sıcaklık dağılımı Şekil 7’de verilmiştir.



Şekil 7 Isı denkleminin $t = 0.1$ anındaki çözümü ($n = 8$ için)

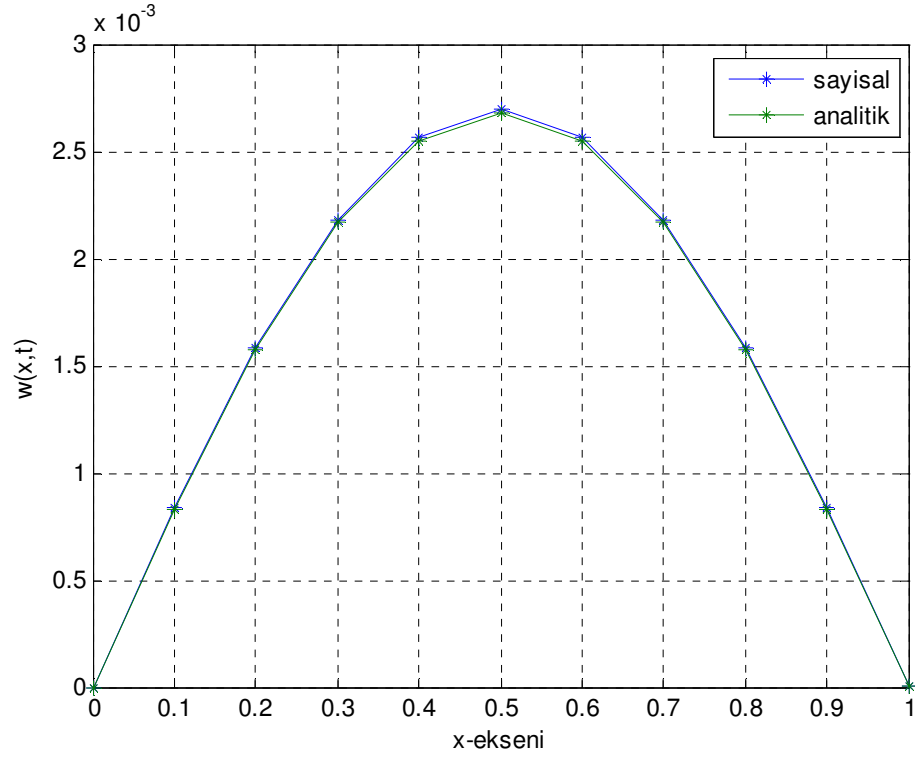
Terim sayısı arttıkça analitik çözümle sayısal çözüm arasındaki fark azalmaktadır.

Terim sayısı $n = 20$ için $t = 0.5$ saniyedeki sıcaklık dağılımı Şekil 8'de gösterilmiştir.



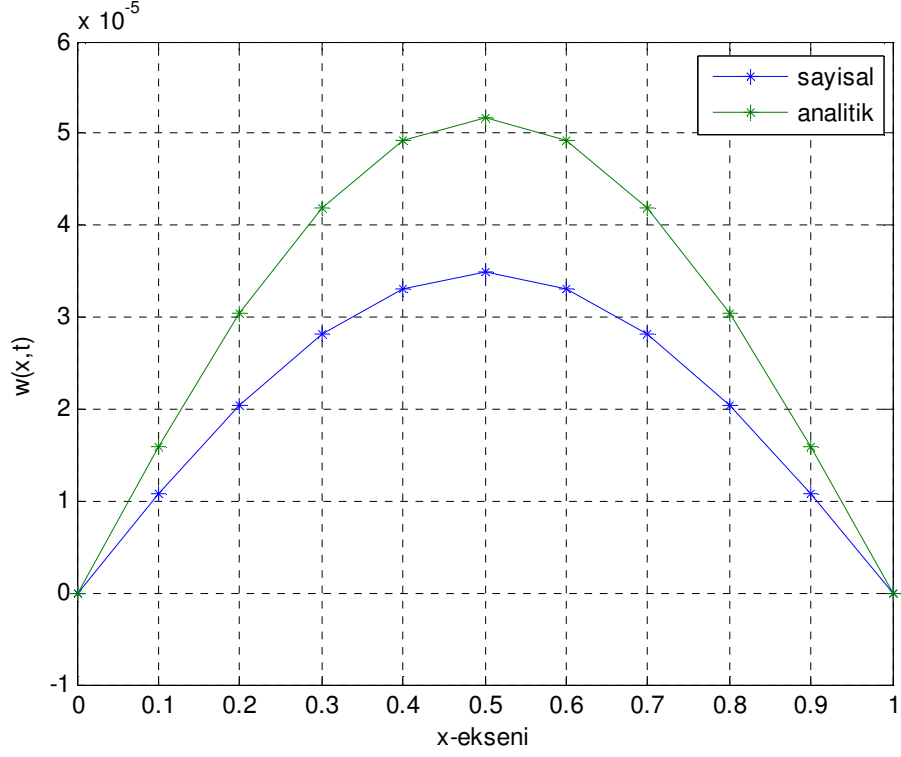
Şekil 8 Isı denkleminin $t = 0.5$ anındaki çözümü ($n = 20$ için)

Terim sayısı $n = 22$ için $t = 0.5$ saniyedeki sıcaklık dağılımı Şekil 9'da gösterilmiştir.



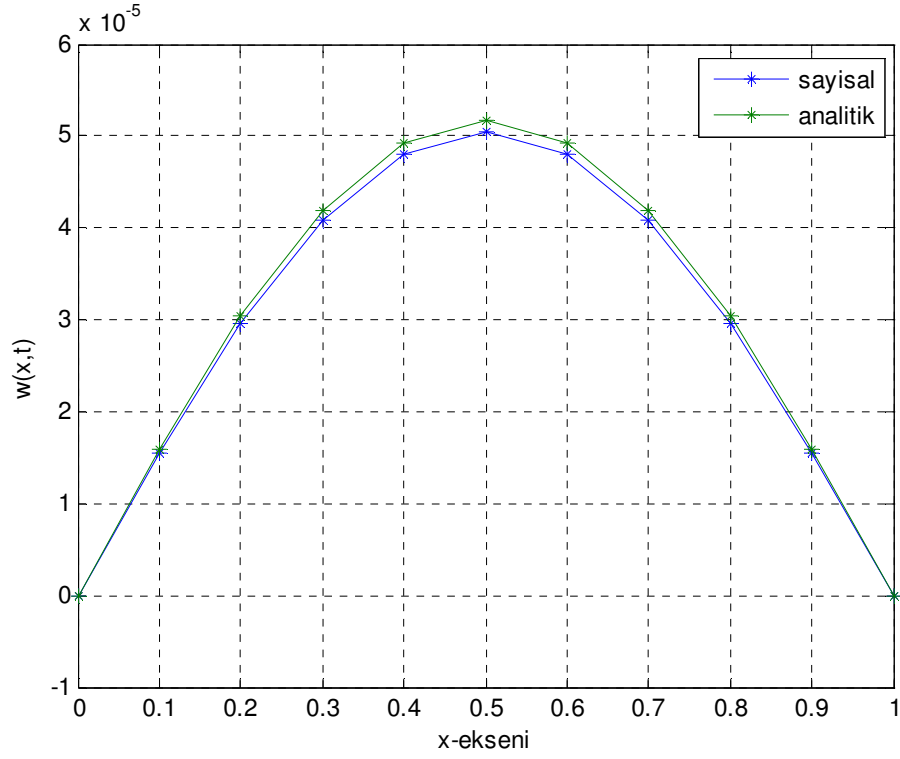
Şekil 9 Isı denkleminin $t = 0.5$ anındaki çözümü ($n = 22$ için)

Terim sayısı $n=33$ için $t=0.9$ saniyedeki sıcaklık dağılımı aşağıdaki şekilde görülmektedir.



Şekil 10 Isı denkleminin $t=0.9$ anındaki çözümü ($n=33$ için)

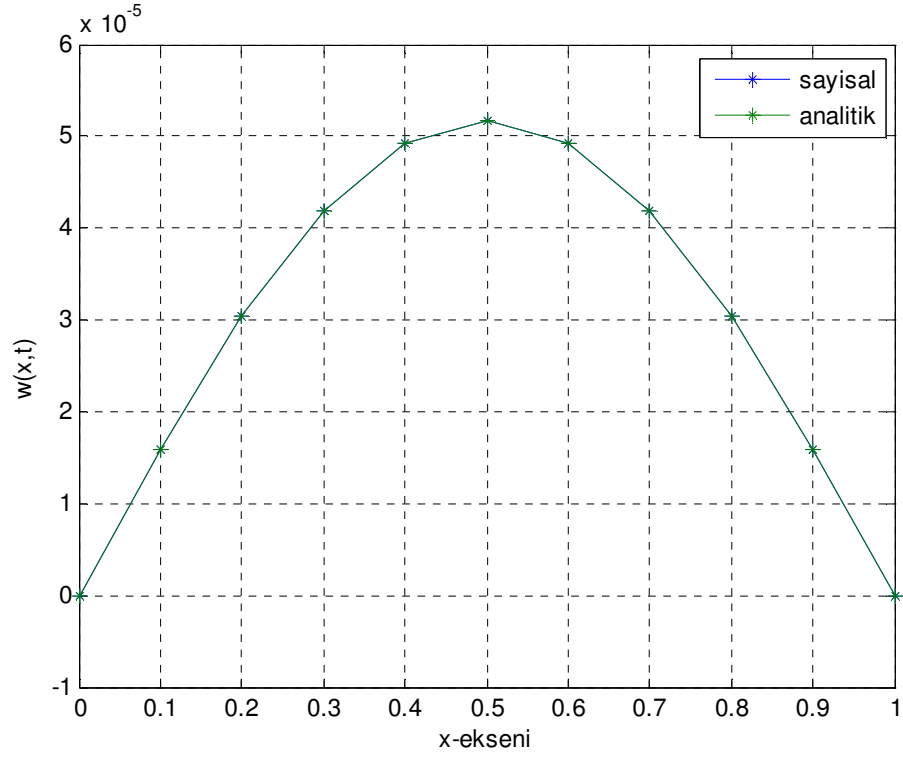
Terim sayısı $n = 35$ için $t = 0.9$ saniyedeki sıcaklık dağılımı Şekil 11’de verilmektedir.



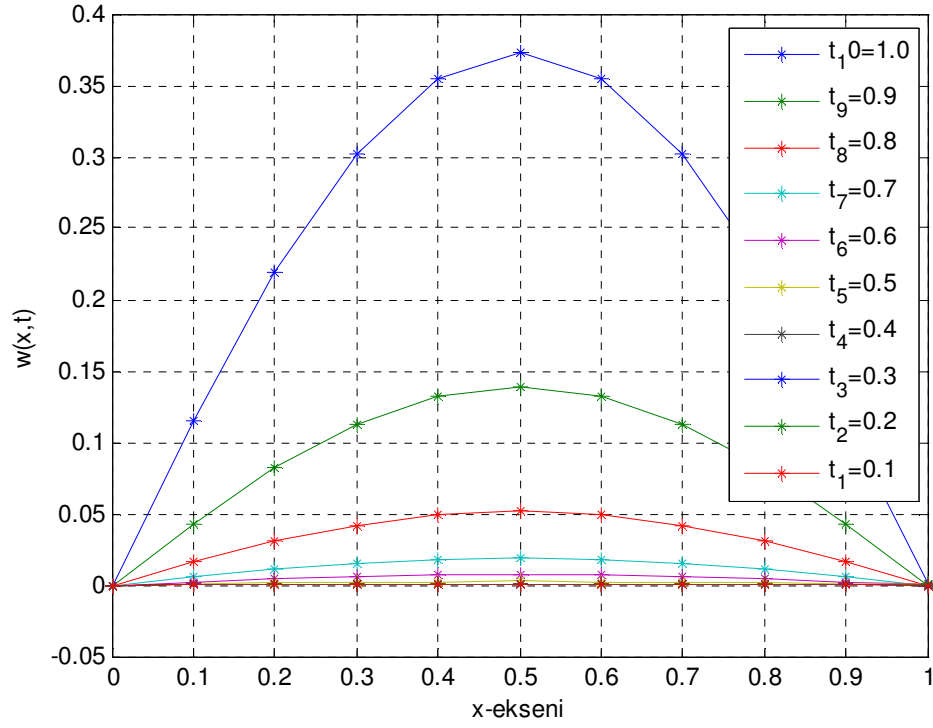
Şekil 11 Isı denkleminin $t = 0.9$ anındaki çözümü ($n = 35$ için)

Yukarıdaki şekillerden de görüldüğü gibi zaman ilerledikçe kullanılması gereken terim sayısı da artar.

Terim sayısı $n = 45$ için $t = 0.9$ saniyedeki sıcaklık dağılımı Şekil 12'de görülmektedir.



Şekil 12 Isı denkleminin $t = 0.9$ anındaki çözümü ($n = 45$ için)



Şekil 13 Isı denkleminin farklı t anlarındaki çözümü

Tablo 3 Bir boyutlu ısı iletimi probleminin DDM ve analitik çözümlerinin karşılaştırılması

x	t	DDM	Analitik	Hata
0.10	0.40	596.28855×10^{-5}	596.28855×10^{-5}	0×10^{-10}
0.20	0.60	157.55415×10^{-5}	157.55415×10^{-5}	0×10^{-10}
0.20	0.70	58.72167×10^{-5}	58.72167×10^{-5}	0×10^{-10}
0.20	0.90	8.15709×10^{-5}	8.15709×10^{-5}	0×10^{-10}
0.30	0.80	30.12353×10^{-5}	30.12353×10^{-5}	0×10^{-10}
0.40	0.70	95.01365×10^{-5}	95.01365×10^{-5}	0×10^{-10}
0.50	0.60	268.04713×10^{-5}	268.04713×10^{-5}	0×10^{-10}
0.60	0.20	$13211.23384 \times 10^{-5}$	$13211.23384 \times 10^{-5}$	0×10^{-10}
0.70	0.70	80.82344×10^{-5}	80.82344×10^{-5}	0×10^{-10}
0.70	1.00	4.18449×10^{-5}	4.18449×10^{-5}	0×10^{-10}
0.80	0.30	$3043.15635 \times 10^{-5}$	$3043.15635 \times 10^{-5}$	0×10^{-10}
0.80	0.90	8.15709×10^{-5}	8.15709×10^{-5}	0×10^{-10}
0.90	0.20	$4292.59008 \times 10^{-5}$	$4292.59008 \times 10^{-5}$	0×10^{-10}
0.90	0.50	222.24142×10^{-5}	222.24142×10^{-5}	0×10^{-10}

2.4. Sonuç

Bir boyutlu diferansiyel dönüşümün tanım ve temel işlemlerinden yararlanılarak linear ve non-linear başlangıç-değer problemlerinin DDM çözümleri elde edildi ve analitik sonuçlarla karşılaştırıldı.

İki boyutlu diferansiyel dönüşümün tanım ve teoremlerinden yararlanılarak bir boyutlu ısı iletimi problemi çözülmüştür. MATLAB 7.1 kullanılarak elde edilen değerler analitik çözümle karşılaştırılmıştır.

Takip eden bölümde ise ısı denklemi fiziksel olarak bir boyuta göre daha gerçekçi olan iki boyutta ele alınıp çözülmüştür.

BÖLÜM 3

İKİ BOYUTLU ISI DENKLEMİNİN DİFERANSİYEL DÖNÜŞÜM METODU İLE ÇÖZÜMÜ

Bu bölümde ısı iletimi denkleminin DD çözümleri bir boyutlu geometriye göre daha gerçekçi olan iki boyutlu geometride irdelenecektir. Bunlara ilişkin formülasyonlar Ayaz (2004) tarafından ele alınmıştır.

3.1 İki Boyutlu Problemler için Diferansiyel Dönüşüm Formülasyonu

İki boyutlu diferansiyel dönüşümde olduğu gibi aynı teori kullanılarak üç boyutlu duruma ulaşılabilir. Üç boyutlu diferansiyel dönüşümün temel tanımları aşağıda verilir.

Tanım 4: $w(x, y, t)$ fonksiyonunun üç boyutlu diferansiyel dönüşümü;

$$W(k, h, m) = \frac{1}{k!h!m!} \left[\frac{\partial^{k+h+m} w(x, y, t)}{\partial x^k \partial y^h \partial t^m} \right]_{(0,0,0)} \quad (28)$$

olarak tanımlanır. Burada $w(x, y, t)$ orijinal fonksiyon ve $W(k, h, m)$ dönüşüm fonksiyonudur.

Tanım 5: $W(k, h, m)$ 'nin diferansiyel ters dönüşümü

$$w(x, y, t) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{h=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} W(k, h, m) x^k y^h t^m \quad (29)$$

olarak tanımlanır. (28) ve (29)'dan

$$w(x, y, t) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{h=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{k!h!m!} \left[\frac{\partial^{k+h+m} w(x, y, t)}{\partial x^k \partial y^h \partial t^m} \right]_{(0,0,0)} x^k y^h t^m$$

elde edilir. Üç boyutlu durum için fundamental teoremler aşağıda verilmiştir.

Teorem 13: $w(x, y, t) = u(x, y, t) \pm v(x, y, t)$ ise $W(k, h, m) = U(k, h, m) \pm V(k, h, m)$.

İspat: Tanım 4'ten

$$U(k, h, m) = \frac{1}{k!h!m!} \left[\frac{\partial^{k+h+m} u(x, y, t)}{\partial x^k \partial y^h \partial t^m} \right]_{(0,0,0)},$$

$$V(k, h, m) = \frac{1}{k!h!m!} \left[\frac{\partial^{k+h+m} v(x, y, t)}{\partial x^k \partial y^h \partial t^m} \right]_{(0,0,0)},$$

$$W(k, h, m) = \frac{1}{k!h!m!} \left[\frac{\partial^{k+h+m}}{\partial x^k \partial y^h \partial t^m} [u(x, y, t) + v(x, y, t)] \right]_{(0,0,0)}$$

Buradan

$$W(k, h, m) = U(k, h, m) \pm V(k, h, m)$$

elde edilir.

Teorem 14: $w(x, y, t) = c \cdot u(x, y, t)$ ise $W(k, h, m) = c \cdot U(k, h, m)$, c keyfi bir sabit.

İspat: Tanım 4'ten

$$U(k, h, m) = \frac{1}{k!h!m!} \left[\frac{\partial^{k+h+m} u(x, y, t)}{\partial x^k \partial y^h \partial t^m} \right]_{(0,0,0)},$$

$$W(k, h, m) = \frac{1}{k!h!m!} \left[\frac{\partial^{k+h+m}}{\partial x^k \partial y^h \partial t^m} [c \cdot u(x, y, t)] \right]_{(0,0,0)}$$

$$W(k, h, m) = c \cdot U(k, h, m)$$

elde edilir.

Teorem 15: $w(x, y, t) = \frac{\partial u(x, y, t)}{\partial x}$ ise $W(k, h, m) = (k+1)U(k+1, h, m)$.

İspat: Tanım 4'ten

$$U(k, h, m) = \frac{1}{k!h!m!} \left[\frac{\partial^{k+h+m}}{\partial x^k \partial y^h \partial t^m} \left[\frac{\partial u(x, y, t)}{\partial x} \right] \right]_{(0,0,0)}$$

$$W(k, h, m) = \frac{(k+1)}{(k+1)!h!m!} \left[\frac{\partial^{k+1+h+m}}{\partial x^{k+1} \partial y^h \partial t^m} u(x, y, t) \right]_{(0,0,0)}$$

$$W(k, h, m) = (k+1)U(k+1, h, m)$$

elde edilir.

Teorem 16: $w(x, y, t) = \frac{\partial u(x, y, t)}{\partial y}$ ise $W(k, h, m) = (h+1)U(k, h+1, m)$

ve

$$w(x, y, t) = \frac{\partial u(x, y, t)}{\partial t} \text{ ise } W(k, h, m) = (m+1)U(k, h, m+1).$$

Teorem 17: $w(x, y, t) = \frac{\partial^{r+s+p} u(x, y, t)}{\partial x^r \partial y^s \partial t^p}$ ise

$$W(k, h, m) = (k+1)(k+2)\dots(k+r)(h+1)(h+2)\dots(h+s)(m+1)$$

$$\times (m+2)\dots(m+p)U(k+r, h+s, m+p).$$

İspat: Tanım 4'ten

$$\begin{aligned} W(k, h, m) &= \frac{1}{k!h!m!} \left[\frac{\partial^{k+h+m}}{\partial x^k \partial y^h \partial t^m} \left[\frac{\partial^{r+s+p} u(x, y, t)}{\partial x^r \partial y^s \partial t^p} \right] \right]_{(0,0,0)} \\ &= \frac{(k+1)\dots(k+r)(h+1)\dots(h+s)(m+1)\dots(m+p)}{(k+r)!(h+s)!(m+p)!} \\ &\quad \times \left[\frac{\partial^{k+r+h+s+m+p}}{\partial x^{k+r} \partial y^{h+s} \partial t^{m+p}} u(x, y, t) \right]_{(0,0,0)} \\ &= (k+1)(k+2)\dots(k+r)(h+1)(h+2)\dots(h+s) \\ &\quad \times (m+1)(m+2)\dots(m+p)U(k+r, h+s, m+p). \end{aligned}$$

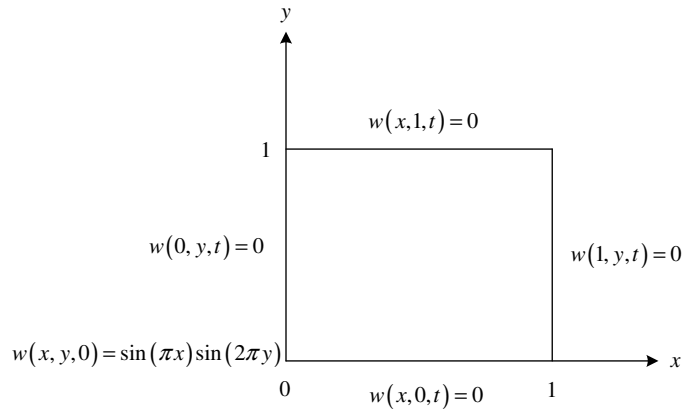
3.2. Isı İletimi Problemi (Akman, 2003)

$$\frac{\partial w(x, y, t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 w(x, y, t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w(x, y, t)}{\partial y^2}, \quad 0 < x < 1, \quad 0 < y < 1 \text{ iki boyutlu ısı denkleminin}$$

$w(x, y, 0) = \sin(\pi x) \sin(2\pi y)$ başlangıç koşulu ve

$$\left. \begin{aligned} w(0, y, t) = 0, \quad w(1, y, t) = 0 \\ w(x, 0, t) = 0, \quad w(x, 1, t) = 0 \end{aligned} \right\} \text{Dirichlet sınır koşulları altındaki çözümü DDM ile}$$

bulunur. Problemin geometrisi Şekil 14'te verilmiştir.



Şekil 14 İki boyutlu ısı denkleminin geometrik ifadesi

3.3. Isı İletimi Probleminin Diferansiyel Dönüşüm Metodu ile Çözümü

İki boyutlu diferansiyel denklemin diferansiyel dönüşümü alınır. Bunun için Teorem 17'de $r = 2$ ve $s = 2$ yazılır ve Teorem 16'dan yararlanır. Aşağıdaki eşitlik elde edilir:

$$(m+1)W(k, l, m+1) = (k+1)(k+2)W(k+2, l, m) + (l+1)(l+2)W(k, l+2, m) \quad (30)$$

Başlangıç koşulu,

$$\begin{aligned} w(x, y, 0) &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} W(k, l, 0) x^k y^l \\ &= \sin(\pi x) \sin(2\pi y) \\ &= \left(\sum_{k=1,3,\dots}^{\infty} \frac{(-1)^{\frac{(k-1)}{2}}}{k!} \pi^k x^k \right) \cdot \left(\sum_{l=1,3,\dots}^{\infty} \frac{(-1)^{\frac{(l-1)}{2}}}{l!} 2^l \pi^l y^l \right) \end{aligned}$$

$$W(k, l, 0) = \begin{cases} 0 & , \quad k \text{ veya } l \text{ çift ise} \\ \frac{(-1)^{\frac{(k+l-2)}{2}}}{k!l!} \pi^k 2^l \pi^l, & k \text{ ve } l \text{ tek ise .} \end{cases} \quad (31)$$

(30)'da $m = 0$ için

$$W(k, l, 1) = (k+1)(k+2)W(k+2, l, 0) + (l+1)(l+2)W(k, l+2, 0)$$

$W(k, l, 0)$ 'da $k \rightarrow k+2$ ve $l \rightarrow l+2$ yazılırsa

$$W(k, l, 1) = (k+1)(k+2) \frac{(-1)^{\frac{k+l}{2}}}{(k+2)!l!} \pi^{k+2} 2^l \pi^l + (l+1)(l+2) \frac{(-1)^{\frac{k+l}{2}}}{k!(l+2)!} \pi^k 2^{l+2} \pi^{l+2}$$

$$W(k, l, 1) = \frac{(-1)^{\frac{k+l}{2}}}{k!l!} \pi^{k+l+2} \cdot 2^l + \frac{(-1)^{\frac{k+l}{2}}}{k!l!} \pi^{k+l+2} 2^l \cdot 4$$

$$W(k, l, 1) = 5 \cdot \frac{(-1)^{\frac{k+l}{2}}}{k!l!} \pi^{k+l+2} \cdot 2^l$$

(30)'da $m = 1$ için

$$2 \cdot W(k, l, 2) = (k+1)(k+2)W(k+2, l, 1) + (l+1)(l+2)W(k, l+2, 1)$$

$W(k+2, l, 1)$ 'de $k \rightarrow k+2$ ve $W(k, l+2, 1)$ 'de $l \rightarrow l+2$ yazılırsa

$$2 \cdot W(k, l, 2) = (k+1)(k+2)5 \cdot \frac{(-1)^{\frac{(k+l+2)}{2}}}{(k+2)!l!} \pi^{k+l+4} 2^l + (l+1)(l+2)5 \cdot \frac{(-1)^{\frac{(k+l+2)}{2}}}{k!(l+2)!} \pi^{k+l+4} 2^{l+2}$$

$$W(k, l, 2) = \frac{25}{2} \cdot \frac{(-1)^{\frac{(k+l+2)}{2}}}{k!l!} \pi^{k+l+4} 2^l$$

(30)'da $m = 2$ için

$$3 \cdot W(k, l, 3) = (k+1)(k+2)W(k+2, l, 2) + (l+1)(l+2)W(k, l+2, 2)$$

$$W(k, l, 3) = \frac{125}{6} \cdot \frac{(-1)^{\frac{(k+l+4)}{2}}}{k!l!} \pi^{k+l+6} 2^l$$

$m = 3$ için

$m = 4$ için

⋮

genelleştirilir. O halde

$$W(k, l, m) = \begin{cases} 0 & , k \text{ veya } l \text{ çift ise} \\ \frac{5^m}{m!} \frac{(-1)^{\frac{(k+l+2m-2)}{2}}}{k!l!} \pi^{k+l+2m} 2^l & , k \text{ ve } l \text{ tek ise .} \end{cases}$$

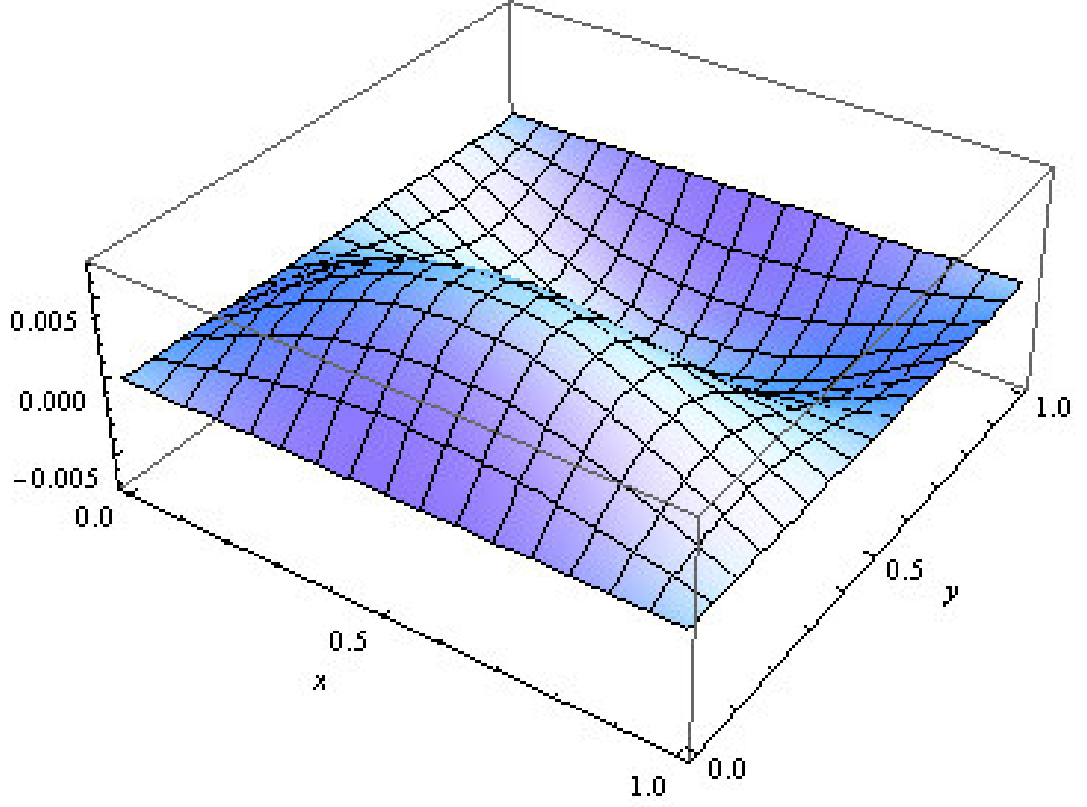
$$w(x, y, t) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} W(k, l, m) x^k y^l t^m$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} 5^m \frac{(-1)^{\frac{k+l+2m-2}{2}}}{k!!m!} \pi^{k+l+2m} 2^l x^k y^l t^m$$

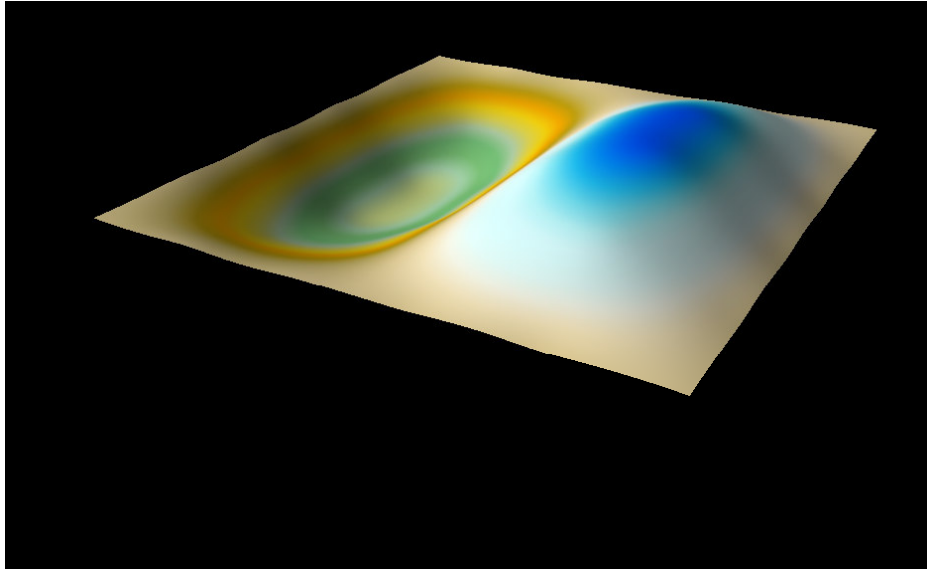
çözümü elde edilir. Analitik çözüm ise $w(x, y, t) = \sin(\pi x) \sin(2\pi y) e^{-5\pi^2 t}$.

Tablo 4 İki boyutlu ısı iletimi probleminin DDM ve analitik çözümlerinin karşılaştırılması

x	y	t	DDM	Analitik	Hata
0.2	0.2	0.1	0.00402039	0.00402039	0×10^{-8}
0.2	0.6	0.1	-0.00248473	-0.00248473	0×10^{-8}
0.6	0.4	0.1	0.00402039	0.00402039	0×10^{-8}
0.4	0.2	0.1	0.00650512	0.00650512	0×10^{-8}
0.8	0.6	0.1	-0.00248473	-0.00248473	0×10^{-8}
0.4	0.8	0.1	-0.00650512	-0.00650512	0×10^{-8}
0.2	0.2	0.5	1.41388×10^{-6}	1.07557×10^{-11}	1.4139×10^{-6}
0.4	0.2	0.5	3.48159×10^{-6}	1.74031×10^{-11}	3.4816×10^{-6}
0.4	0.8	0.5	0.0000371815	-1.74031×10^{-11}	3.7182×10^{-5}
0.8	0.4	0.5	0.0000378119	6.64738×10^{-12}	3.7812×10^{-5}
0.2	0.2	1.0	-4.64461×10^9	2.06943×10^{-22}	4.6446×10^9
0.8	0.6	1.0	2.87236×10^9	-1.27898×10^{-22}	2.8724×10^9
0.2	0.4	1.0	-2.8705×10^9	1.27898×10^{-22}	2.8705×10^9
0.2	0.8	1.0	4.64579×10^9	-2.06943×10^{-22}	4.6458×10^9



Şekil 15 İki boyutlu ısı denkleminin analitik çözümünün $x \in [0,1]$, $y \in [0,1]$ ve $t=0.1$ için grafiği



Şekil 16 İki boyutlu ısı denkleminin $t=0.1$ için DD çözümünün grafiği

3.4. Sonuç

İki boyutlu ısı iletimi problemi üç boyutlu diferansiyel dönüşümün tanım ve teoremlerinden yararlanılarak çözülmüştür. MATHEMATICA 6.0 kullanılarak elde edilen DD çözümleri analitik çözümle karşılaştırılmıştır. Grafikler de MATHEMATICA 6.0 ve SURFER ortamlarında çizdirilmiştir. Burada $k = l = m = 103$ kullanılmıştır. Küçük zamanlar için iyi sonuçlar elde edilse de zaman ilerledikçe bu sonuçlar tamlığını kaybetmektedir.

BÖLÜM 4 ÜÇ BOYUTLU ISI İLETİMİNİN DİFERANSİYEL DÖNÜŞÜM METODU İLE ÇÖZÜMÜ

Bu bölümde değineceğimiz problemin ve çıkaracağımız formülasyonun boyutunu geçen bölüme göre birer artırarak çalışacağız.

4.1 Üç Boyutlu Problemler için Diferansiyel Dönüşüm Formülasyonu

Dört boyutlu diferansiyel dönüşümün temel tanımları aşağıdaki gibi verilir (Kurnaz ve ark., 2005).

Tanım 6: $w(x, y, z, t)$ fonksiyonunun dört boyutlu diferansiyel dönüşümü;

$$W(k, l, m, n) = \frac{1}{k!l!m!n!} \left[\frac{\partial^{k+l+m+n} w(x, y, z, t)}{\partial x^k \partial y^l \partial z^m \partial t^n} \right]_{(0,0,0,0)} \quad (32)$$

olarak tanımlanır. Burada $w(x, y, z, t)$ orijinal fonksiyon ve $W(k, l, m, n)$ dönüşüm fonksiyonudur.

Tanım 7: $W(k, l, m, n)$ 'nin diferansiyel ters dönüşümü

$$w(x, y, z, t) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} W(k, l, m, n) x^k y^l z^m t^n \quad (33)$$

olarak tanımlanır. (32) ve (33)'ten

$$w(x, y, z, t) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{k!l!m!n!} \left[\frac{\partial^{k+l+m+n} w(x, y, z, t)}{\partial x^k \partial y^l \partial z^m \partial t^n} \right]_{(0,0,0,0)} x^k y^l z^m t^n$$

elde edilir. Dört boyutlu durum için fundamental teoremler aşağıda verilmiştir.

Teorem 18: $w(x, y, z, t) = u(x, y, z, t) \pm v(x, y, z, t)$ ise

$$W(k, l, m, n) = U(k, l, m, n) \pm V(k, l, m, n).$$

İspat: Tanım 6'dan

$$U(k, l, m, n) = \frac{1}{k!l!m!n!} \left[\frac{\partial^{k+l+m+n} u(x, y, z, t)}{\partial x^k \partial y^l \partial z^m \partial t^n} \right]_{(0,0,0,0)},$$

$$V(k, l, m, n) = \frac{1}{k!l!m!n!} \left[\frac{\partial^{k+l+m+n} v(x, y, z, t)}{\partial x^k \partial y^l \partial z^m \partial t^n} \right]_{(0,0,0,0)},$$

$$W(k, l, m, n) = \frac{1}{k!l!m!n!} \left[\frac{\partial^{k+l+m+n}}{\partial x^k \partial y^l \partial z^m \partial t^n} [u(x, y, z, t) + v(x, y, z, t)] \right]_{(0,0,0,0)}$$

Buradan

$$W(k, l, m, n) = U(k, l, m, n) \pm V(k, l, m, n)$$

elde edilir.

Teorem 19: $w(x, y, z, t) = c \cdot u(x, y, z, t)$ ise $W(k, l, m, n) = c \cdot U(k, l, m, n)$, c keyfi bir sabit.

İspat: Tanım 6'dan

$$U(k, l, m, n) = \frac{1}{k!l!m!n!} \left[\frac{\partial^{k+l+m+n} u(x, y, z, t)}{\partial x^k \partial y^l \partial z^m \partial t^n} \right]_{(0,0,0,0)},$$

$$W(k, l, m, n) = \frac{1}{k!l!m!n!} \left[\frac{\partial^{k+l+m+n}}{\partial x^k \partial y^l \partial z^m \partial t^n} [c \cdot u(x, y, z, t)] \right]_{(0,0,0,0)}$$

$$W(k, l, m, n) = c \cdot U(k, l, m, n)$$

elde edilir.

Teorem 20: $w(x, y, z, t) = \frac{\partial^{r+s+p+q} u(x, y, z, t)}{\partial x^r \partial y^s \partial z^p \partial t^q}$ ise

$$W(k, l, m, n) = (k+1)(k+2)\dots(k+r)(l+1)(l+2)\dots(l+s)(m+1) \\ \times (m+2)\dots(m+p)(n+1)(n+2)\dots(n+q) U(k+r, l+s, m+p, n+q).$$

İspat: Tanım 6'dan

$$W(k, l, m, n) = \frac{1}{k!l!m!n!} \left[\frac{\partial^{k+l+m+n}}{\partial x^k \partial y^l \partial z^m \partial t^n} \left[\frac{\partial^{r+s+p+q} u(x, y, z, t)}{\partial x^r \partial y^s \partial z^p \partial t^q} \right] \right]_{(0,0,0,0)} \\ = \frac{(k+1)\dots(k+r)(l+1)\dots(l+s)(m+1)\dots(m+p)(n+1)\dots(n+q)}{(k+r)!(l+s)!(m+p)!(n+q)!}$$

$$\begin{aligned}
& \times \left[\frac{\partial^{k+r+l+s+m+p+n+q}}{\partial x^{k+r} \partial y^{l+s} \partial z^{m+p} \partial t^{n+q}} u(x, y, z, t) \right]_{(0,0,0,0)} \\
& = (k+1)(k+2)\dots(k+r)(l+1)(l+2)\dots(l+s)(m+1) \\
& \times (m+2)\dots(m+p)(n+1)(n+2)\dots(n+q) U(k+r, l+s, m+p, n+q).
\end{aligned}$$

4.2. Isı İletimi Problemi (Kurnaz ve ark.,2005)

$$\frac{\partial w(x, y, z, t)}{\partial t} = \alpha \left[\frac{\partial^2 w(x, y, z, t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w(x, y, z, t)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w(x, y, z, t)}{\partial z^2} \right]$$

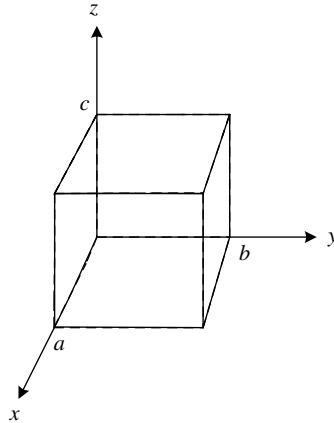
$$w(x, y, z, 0) = \sin x \sin y \sin z; 0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq b, 0 \leq z \leq c$$

başlangıç koşulu ve

$$w(0, y, z, t) = w(a, y, z, t) = w(x, 0, z, t) = 0$$

$$w(x, b, z, t) = w(x, y, 0, t) = w(x, y, c, t) = 0$$

sınır koşulları altında linear üç boyutlu ısı denkleminin çözümü DD metodu ile bulunur. Problemin geometrisi aşağıda gösterilmiştir.



Şekil 17 Üç boyutlu ısı denkleminin geometrik ifadesi

4.3. Isı İletimi Probleminin Diferansiyel Dönüşüm Metodu ile Çözümü ve Karşılaştırılması

Teorem 20'de $r = s = p = 0$ ve $q = 1$,

$$\frac{\partial w}{\partial t} = (n+1)W(k, l, m, n+1)$$

Teorem 20'de $r = 2$ ve $s = p = q = 0$,

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = (k+1)(k+2)W(k+2, l, m, n)$$

Teorem 20'de $s = 2$ ve $r = p = q = 0$,

$$\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = (l+1)(l+2)W(k, l+2, m, n)$$

Teorem 20'de $p = 2$ ve $r = s = q = 0$ yazılırsa

$$\frac{\partial^2 w}{\partial z^2} = (m+1)(m+2)W(k, l, m+2, n)$$

ifadeleri elde edilir. Bu eşitlikler üç boyutlu ısı denkleminde yerlerine yazılır.

$$(n+1)W(k, l, m, n+1) = \alpha[(k+1)(k+2)W(k+2, l, m, n) + (l+1)(l+2)W(k, l+2, m, n) + (m+1)(m+2)W(k, l, m+2, n)] \quad (34)$$

elde edilir. Başlangıç koşulu,

$$\begin{aligned} w(x, y, z, 0) &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} W(k, l, m, 0) x^k y^l z^m \\ &= \sin x \sin y \sin z \\ &= \left(\sum_{k=1,3,\dots}^{\infty} \frac{(-1)^{\frac{(k-1)}{2}}}{k!} x^k \right) \left(\sum_{l=1,3,\dots}^{\infty} \frac{(-1)^{\frac{(l-1)}{2}}}{l!} y^l \right) \left(\sum_{m=1,3,\dots}^{\infty} \frac{(-1)^{\frac{(m-1)}{2}}}{m!} z^m \right) \\ \Rightarrow W(k, l, m, 0) &= \begin{cases} 0 & , k \text{ veya } l \text{ veya } m \text{ çift ise} \\ \frac{(-1)^{\frac{k+l+m-3}{2}}}{k!l!m!} & , k \text{ ve } l \text{ ve } m \text{ tek ise} \end{cases} \quad (35) \end{aligned}$$

(34)'te $n = 0$ için

$$W(k, l, m, 1) = \alpha[(k+1)(k+2)W(k+2, l, m, 0) + (l+1)(l+2)W(k, l+2, m, 0)$$

$$+(m+1)(m+2)W(k, l, m+2, 0)]$$

(35)'te $k \rightarrow k+2$, $l \rightarrow l+2$ ve $m \rightarrow m+2$ yazılır.

$$\begin{aligned} W(k, l, m, 1) &= \alpha[(k+1)(k+2) \frac{(-1)^{\frac{k+l+m-1}{2}}}{(k+2)!l!m!} + (l+1)(l+2) \frac{(-1)^{\frac{k+l+m-1}{2}}}{k!(l+2)!m!} \\ &\quad + (m+1)(m+2) \frac{(-1)^{\frac{k+l+m-1}{2}}}{k!l!(m+2)!}] \\ &= \alpha \left[\frac{(-1)^{\frac{k+l+m-1}{2}}}{k!l!m!} + \frac{(-1)^{\frac{k+l+m-1}{2}}}{k!l!m!} + \frac{(-1)^{\frac{k+l+m-1}{2}}}{k!l!m!} \right] \\ &= 3\alpha \left[\frac{(-1)^{\frac{k+l+m-3}{2}} (-1)}{k!l!m!} \right] \end{aligned}$$

(34)'te $n=1$ için

$$\begin{aligned} 2.W(k, l, m, 2) &= \alpha[(k+1)(k+2)W(k+2, l, m, 1) + (l+1)(l+2)W(k, l+2, m, 1) \\ &\quad + (m+1)(m+2)W(k, l, m+2, 1)] \\ &= \alpha[(k+1)(k+2)3\alpha \frac{(-1)^{\frac{k+l+m-1}{2}} (-1)}{(k+2)!l!m!} + (l+1)(l+2)3\alpha \frac{(-1)^{\frac{k+l+m-1}{2}}}{k!(l+2)!m!} \\ &\quad + (m+1)(m+2)3\alpha \frac{(-1)^{\frac{k+l+m-1}{2}} (-1)}{k!l!(m+2)!}] \\ \Rightarrow W(k, l, m, 2) &= 3^2 \alpha^2 \frac{(-1)^{\frac{k+l+m-3}{2}} (-1)^2}{2.k!l!m!} \end{aligned}$$

$$n=2$$

$$n=3$$

⋮

için genelleştirilir.

$$W(k, l, m, n) = 3^n \alpha^n \frac{(-1)^{\frac{k+l+m-3}{2}} (-1)^n}{k!l!m!n!}$$

$$W(k, l, m, n) = \begin{cases} 0 & , k \text{ veya } l \text{ veya } m \text{ çift ise} \\ 3^n \alpha^n \frac{(-1)^{\frac{k+l+m-3}{2}} (-1)^n}{k!l!m!n!} & , k \text{ ve } l \text{ ve } m \text{ tek ise} \end{cases}$$

olur.

$$\begin{aligned} w(x, y, z, t) &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} W(k, l, m, n) x^k y^l z^m t^n \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} 3^n \alpha^n \frac{(-1)^{\frac{k+l+m-3}{2}} (-1)^n}{k!l!m!n!} x^k y^l z^m t^n \end{aligned}$$

çözümü elde edilir. Analitik çözüm ise $w(x, y, z, t) = e^{-3\alpha t} \sin x \sin y \sin z$.

Tablo 5 Üç boyutlu ısı iletimi probleminin DDM ve analitik çözümlerinin karşılaştırılması

α	x	y	z	t	DDM	Analitik
1	1	1	1	1	2.96643×10^{-2}	2.96643×10^{-2}
1	1	2	3	-1	2.16879	2.16879
2	π	2	5	-1	-3.18627×10^{-13}	0
$e/3$	$\pi/2$	$\pi/2$	$\pi/2$	-1	1.51543×10^1	1.51543×10^1
1	0.1	0.1	0.1	0.1	7.37122×10^{-4}	7.37122×10^{-4}
1	0.1	0.1	0.1	0.4	2.99691×10^{-4}	2.99691×10^{-4}
1	0.1	0.1	0.1	1.0	4.95387×10^{-5}	4.95387×10^{-5}
-1	5	10	3	1	$14786.72867 \times 10^{-4}$	1.478672867
2	5	10	3	2	3.65723×10^{-7}	4.52329×10^{-7}

4.4. Sonuç

Üç boyutlu ısı iletimi problemi dört boyutlu diferansiyel dönüşüm metodundan yararlanılarak çözülmüştür. MATHEMATICA 6.0 kullanılarak elde edilen değerler analitik çözümle karşılaştırılmıştır. İki boyutlu problemlerde olduğu gibi üç boyutlu problemde de sonuçların büyük zaman değerlerine karşı olan hassasiyeti sürmektedir. Burada $k = l = m = n = 41$ kullanılmıştır.

BÖLÜM 5 SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu çalışmanın çarpıcı ve faydacı amacı rakiplerine nazaran yeni ve kısmen de etkin olan DD yöntemini kullanarak ısı iletimini çeşitli homojen fiziksel yapılarda modellemektir.

Söz konusu yöntem kullanılarak;

- linear ve non-linear matematiksel modeller,
- bir-boyutlu ısı iletimi denklemi,
- iki-boyutlu ısı iletimi denklemi,
- üç-boyutlu ısı iletimi denklemi,

genellikle etkili bir şekilde çözülebildiği görüldü.

Bu sonuçların etkinliği kimi ısı iletimi problemlerinde ilerleyen zamanlarda kaybolmaktadır. İleriki çalışmalarda aynı problemler, nonlinear olan modeller de çoğaltılarak, DD ile diğer etkin nümerik metotların hibritleştirilmesi ile çözülebilir.

KAYNAKLAR

- Akman, Makbule (2003) Differential Quadrature Method for Time-Dependent Diffusion Equation, **Yüksek Lisans Tezi**, Orta Doğu Teknik Üniversitesi, Ankara, 75s.
- Arikoğlu, A. ve Özkol, İ. (2005) Inner-Outer Matching Solution of Blasius Equation by DTM, **Aircraft Engineering and Aerospace Technology: An International Journal**, 77(4): 298-301.
- Ayaz, F. (2003) On The Two-Dimensional Differential Transform Method, **Applied Mathematics and Computation**, 143: 361-374.
- Ayaz, F. (2004) Solutions of The System of Differential Equations by Differential Transform Method, **Applied Mathematics and Computation**, 147: 547-567.
- Beck, J. V., McMasters, R., Dowding, K. J. and Amos, D. E. (2006) Intrinsic Verification Methods in Linear Heat Conduction, **International Journal of Heat and Mass Transfer**, 49 (17-18): 2984-2994.
- Beck, J. V. and Cole, K. D. (2007) Improving Convergence of Summations in Heat Conduction, **International Journal of Heat and Mass Transfer**, 50(1-2): 257-268.
- Beck, J. V., Wright, N. T. and A. Haji-Sheikh (2008) Transient power variation in surface conditions in heat conduction for plates, **International Journal of Heat and Mass Transfer**, 51(9-10): 2553-2565.
- Bert, C. W. (2002) Application of Differential Transform Method to Heat Conduction in Tapered Fins, **Journal of Heat Transfer**, 124 (1): 208-209.
- Bildik, N., Konuralp, A., Bek, F. O. ve Küçükarslan, S. (2006) Solution of Different Type of The Partial Differential Equation by Differential Transform Method and Adomian's Decomposition Method, **Applied Mathematics and Computation**, 172: 551-567.
- Chen, T. M. (1992) A Modified Hybrid Laplace Transform/Finite Element Method for Transient Heat Conduction Problems, **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, 98 (2): 261-272.
- Chen, C. L. and Liu, Y. C. (1998) Solution of Two-Point Boundary-Value Problems Using The Differential Transformation Method, **Journal of Optimization Theory and Applications**, 99 (1): 23-35.
- Chen, C. K. and Ho, S. H. (1999) Solving Partial Differential Equations by Two-Dimensional Differential Transform Method, **Applied Mathematics and Computation**, 106: 171-179.

- Chen, C. N. (1999) The Development of Irregular Elements for Differential Quadrature Element Method Steady-State Heat Conduction Analysis, **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, 170(1-2): 1-14.
- Chen, T. C. and Tuan, P. C. (2002) Inverse Problem of Estimating Interface Conductance Between Periodically Contacting Surfaces Using The Weighting Input Estimation Method, **Numerical Heat Transfer Part B: Fundamentals**, 41 (5): 477-492.
- Chen, J. Y., Chow, Y. and Hsie, J. (2006) Some Results on A Heat Conduction Problem by Myshkis, **Journal of Computational and Applied Mathematics**, 190 (1-2): 190-199.
- Chu, H. P. and Chen, C. L. (2008) Hybrid Differential Transform and Finite Difference Method to Solve The Nonlinear Heat Conduction Problem, **Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation**, 13 (8): 1605-1614.
- Chu, H. P. and Lo, C. Y. (2008) Application of The Hybrid Differential Transform-Finite Difference Method to Nonlinear Transient Heat Conduction Problems, **Numerical Heat Transfer**, Part A, 53: 295-307.
- Ellison, G. N. (1995) Thermal Analysis of Microelectric Packages and Printed Circuit Boards Using An Analytic Solution to The Heat Conduction Equation, **Advances in Engineering Software**, 22(2): 99-111.
- Ertürk, V. S. (2006) Differential Transform Method for Solving A Class of Singular Two-Point Boundary Value Problems, SDÜ Fen Edebiyat Fakültesi, **Fen Dergisi (E-Dergi)**, 1(1): 70-76.
- Evans, D. J., Ergüt, M. and Bulut, H. (2003), **International Journal of Computer Mathematics**, 80(9): 1189-1198.
- Ge, X. Y., Wadati, M. and Yan, G. G. Analytical Solutions for Time-Dependent Heat Conduction Equation of Soil Moisture, **Nonlinear Analysis: Real World Applications**, (in Press).
- Ghojel, J. (2002) Application of Inverse Analysis to thermal Contact Resistance Between Very Rough Nonconforming Surfaces, **Inverse Problems in Engineering**, 10 (4): 323- 334.
- Goldstein, R. J., Eckert, E. R. G., Ibele, W. E., Patankar, S. V., Simon, T. W., Kuehn, T. H., Strykowski, P. J., Tamma, K. K., A. Bar-Cohen, Heberlein, J. V. R., Davidson, J. H., Bischof, J., Kulacki, F. A., Kortshagen, U., Garrick, S. and Srinivasan, V. (2005) Heat Transfer- A Review of 2002 Literature, **International Journal of Heat and Mass Transfer**, 48 (5): 819-927.
- Goldstein, R. J., Ibele, W. E., Patankar, S. V. , Simon, T. W., Kuehn, T. H., Strykowski, P. J., Tamma, K. K., Heberlein, J. V. R., Davidson, J. H., Bischof, J., Kulacki, F. A., Kortshagen, U., Garrick, S. and Srinivasan, V. (2006) Heat Transfer- A Review of 2003 Literature, **International Journal of Heat and Mass Transfer**,

49 (3-4): 451-534.

Gu, Y. X., Chen, B. S., Zhang, H. W. and Grandhi, R. (2002) A Sensitivity Analysis Method for Linear and Nonlinear Transient Heat Conduction with Precise Time Integration, **Structural and Multidisciplinary Optimization**, 24 (1): 23–37.

Hassan, I. H. A. H. (2002) Different Applications for The Differential Transformation in The Differential Equations, **Applied Mathematics and Computation**, 129: 183–201.

Hassan, I. H. A. H. (2007) Application to Differential Transformation Method for Solving Systems of Differential Equations, **Applied Mathematical Modelling**, (in Press).

Hassan, I. H. A. H. (2008) Comparison Differential Transformation Technique with Adomian Decomposition Method for Linear and Nonlinear Initial Value Problems, **Chaos Solitons and Fractals**, 36: 53-65.

Inc, M. and Evans, D. J. (2004), **International Journal of Computer Mathematics**, 81(6): 685-692

Incropera, F. P. and Dewitt, D. P. (2001) Isı ve Kütle Geçişinin Temelleri, **Ekonomik Baskı**, Dördüncü Basımdan Çeviri, İstanbul, 960s.

Jang, M. J., Chen, C. L. ve Liu, Y. C. (2000) On Solving The Initial-Value Problems Using The Differential Transformation Method, **Applied Mathematics and Computation**, 115: 145-160.

Jang, M. J., Chen, C. L. and Liu, Y. C. (2001) Two-Dimensional Differential Transform for Partial Differential Equations, **Applied Mathematics and Computation**, 121: 261-270.

Jang, M. J., Wang, J. S. and Liu, Y. C. (2003) Applying Differential Transformation Method to Parameter Identification Problems, **Applied Mathematics and Computation**, 139(2-3): 491-502.

Kakaç, S. ve Yener, Y. (1993) Heat Conduction, **Taylor & Francis**, Third Edition, USA

Kim, S. K. and Lee, W. I. (2002) Solution of Inverse Heat Conduction Problems Using Maximum Entropy Method, **International Journal Heat Mass Transfer**, 45 (2): 381–391.

Kim, S. K. and Daniel, I. M. (2003) Solution to Inverse Heat Conduction Problem in Nanoscale Using Sequential Method, **Numerical Heat Transfer Part B: Fundamentals**, 44 (5): 439–456.

Korneyev, S. A. (2002) The Joint Analysis of General Aspects of The Phenomenological Thermodynamics and The Kinetic Boltzmann Theory, **International Journal Heat Mass Transfer**, 45 (17): 3643–3649.

- Kuddusi, L. and Denton, J. C. (2007) Analytical Solution for Heat Conduction Problem in Composite Slab and its Implementation in Constructal Solution for Cooling of Electronics, **Energy Conversion and Management**, 48 (4): 1089-1105.
- Kurnaz, A., Oturanç G. ve Kiriş M. E. (2005) n -Dimensional Differential Transformation Method for Solving PDEs, **International Journal of Computer Mathematics**, 82 (3): 369-380.
- Kurnaz, A. ve Oturanç, G. (2005) The Differential Transform Approximation for The System of Ordinary Differential Equations, **International Journal of Computer Mathematics**, 82 (6): 709-719.
- Lam, T. T. and Yeung, F. K. (2002) A Numerical Scheme for Non-Fourier Heat Conduction, Part II: Two-Dimensional Problem Formulation and Verification, **Numerical Heat Transfer Part B: Fundamentals**, 41 (6): 543–564.
- Liao, S. J. (2002) A Direct Boundary Element Approach for Unsteady Non-Linear Heat Transfer Problems, **Engineering Analysis with Boundary Elements**, 26 (1): 55–59.
- Ling, X. W., Keanini, R. G. and Cherukuri, H. P. (2003) A Non-Iterative Finite Element Method for Inverse Heat Conduction Problems, **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, 56 (9): 1315–1334.
- Moultanovsky, A. V. and Rekada, M. (2002) Inverse Heat Conduction Problem Approach to Identify The Thermal Characteristics of Super-Hard Synthetic Materials, **Inverse Problems in Engineering**, 10 (1): 19–39.
- Murthy, J. Y. and Mathur, S. R. (2003) An Improved Computational Procedure for Sub-Micron Heat Conduction, **Journal of Heat Transfer**, 125 (5): 904–910.
- Narasimhan, T. N. (1999) Fourier's Heat Conduction Equation: History, Influence, and Connections, *Reviews of Geophysics*, 37(1), 151-172.
- Pala, Y. (2006) Modern Uygulamalı Diferansiyel Denklemler, **Nobel Yayın Dağıtım**, Ankara, Birinci Basım, 706s.
- Pepper, D. W. (2002) Computational Heat Transfer Using The Method of Second Moments, **Numerical Heat Transfer Part B: Fundamentals**, 42 (3): 189–201.
- Sadat, H. (2006) A Second Order Model for Transient Heat Conduction in A Slab with Convective Boundary Conditions, **Applied Thermal Engineering**, 26 (8-9): 962-965.
- Shen, W. S. and Han, S. (2002) An Explicit TVD Scheme for Hyperbolic Heat Conduction in Complex Geometry, **Numerical Heat Transfer Part B: Fundamentals**, 41 (6): 565–590.
- Shijun, Z. and Zhanqiang, L. (2008) Analytical and Numerical Solutions of Transient

- Heat Conduction in Monolayer Coated Tools, **Journal of Materials Processing Technology**, (in Press).
- Shuja, S. Z. (2002) Laser Heating of A Moving Slab in The Presence of An Impinging Gas Jet: Influence of Slab Velocity, **Numerical Heat Transfer Part A: Applications**, 42 (7): 757–775.
- Sladek, J., Sladek, V. and Zhang, C. (2003) Transient Heat Conduction Analysis in Functionally Graded Materials by The Meshless Local Boundary Integral Equation Method, **Computational Materials Science**, 28 (3-4): 494-504.
- Su, G., Tan, Z. and Su, J. (2007) Improved Lumped Models for Transient Heat Conduction in a Slab with Temperature-Dependent Thermal Conductivity, **Applied Mathematical Modelling**, (in Press).
- Sun, H. and Zhang, J. (2003) A High-Order Compact Boundary Value Method for Solving One-Dimensional Heat Equations, **Wiley InterScience**, 19(6): 846-857.
- Tadeu, A. and Simões, N. (2006) Three- Dimensional for Transient Heat Transfer by Conduction in An Unbounded Medium, Half- Space, Slab(levha) and Layered Media(tabakalandırılmış ortam), **Engineering Analysis with Boundary Elements**, 30 (5): 338-349.
- Tsourkas, P. and Rubinsky, B. (2003) Evolutionary-Genetic Algorithm for Solving 2-D Steady-State Conduction Problems, **Numerical Heat Transfer Part B: Fundamentals**, 43 (2): 99–115.
- Valtchev, S. S. and Roberty, N. C. (2008) A Time-Marching MFS Scheme for Heat Conduction Problems, **Engineering Analysis with Boundary Elements**, 32 (6): 480-493.
- Vynnycky, M., Ferrari, J. and Lior, N. (2003) Some Analytical and Numerical Solutions to Inverse Problems Applied to Optimizing Phase-Transformation Tracking in Gas Quenching, **Journal of Heat Transfer**, 125 (1): 1–10.
- Wang, S. W. and Chen, Y. M. (2002) A Simple Procedure for Calculating Thermal Response Factors and Conduction Transfer Functions of Multilayer Walls, **Applied Thermal Engineering**, 22 (3): 333–338.
- Woodfield, P. L., Monde, M. and Mitsutake, Y. (2007) On Estimating Thermal Diffusivity Using Analytical Inverse Solution for Unsteady One-Dimensional Heat Conduction, **International Journal of Heat and Mass Transfer**, 50 (5-6) : 1202-1205.
- Wu, X. H. and Tao, W. Q. (2008) Meshless Method Based on The Local Weak-Forms for Steady-State Heat Conduction Problems, **International Journal International Journal of Heat and Mass Transfer**, 51 (11-12): 3103-3112.
- Yang, X., Liu, Y. and Bai, S. (2006) A Numerical Solution of Second-Order Linear Partial Differential Equations by Differential Transform, **Applied Mathematics and**

Computation, 173 (2): 792-802.

Yiğit, F. (2008) Approximate Analytical Solution of A Two-Dimensional Heat Conduction Problem with Phase-Change on A Sinusoidal Mold, **Applied Thermal Engineering**, 28 (10): 1196-1205.

Yilbas, B. S. and Kalyon, M. (2002) Analytical Solution for Pulsed Laser Heating Process: Convective Boundary Condition Case, **International Journal of Heat and Mass Transfer**, 45 (7): 1571–1582.

Yilbas, B. S. and Kalyon, M. (2002) Parametric Variation of The Maximum Surface Temperature During Laser Heating with Convective Boundary Conditions, **Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers Part C-Journal of Mechanical Engineering Science**, 216 (6): 691–700.

Zhou, J. K. (1986) Differential Transformation and Its Applications for Electrical Circuits, **Huarjung University Press**, Wuuhahn, China, (in Chinese).

Zhou, J. H., Yu, A.B. and Horio, M. (2008) Finite Element Modeling of The Transient Heat Conduction Between Colliding Particles, **Chemical Engineering Journal**, 139 (3): 510-516.

ÖZGEÇMİŞ

Serpil SALINAN

10 Kasım 1981 yılında Denizli’de doğdu. İlköğrenimini 1988–1992 yıllarında Namık Kemal İlkokulu’nda, orta ve lise öğrenimini 1993-2000’de Denizli Anadolu Lisesi’nde tamamladı. 2000 yılında Pamukkale Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü’nü kazandı. 2004’te ise üniversiteden mezun olup, 2004-2005’te özel bir dershanede Matematik öğretmenliği yaptı. 2005’te kısa süreliğine Milli Eğitim’de bir okula vekil öğretmenlik görevine atandı. 2005 yılında Pamukkale Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü’nde Matematik Anabilim dalında yüksek lisans öğrenimine başladı ve yine aynı yıl Pamukkale Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü’ne Araştırma Görevlisi olarak atandı. Halen Araştırma Görevliliği’ne devam etmektedir.