PAMUKKALE ÜNİVERSİTESİ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

İKİ BOYUTTA DİLATON KÜTLEÇEKİM TARAFINDAN OLUŞTURULAN NONMETRİSİTİ VE BURULMA

YÜKSEK LİSANS

Hatice Yeliz ATALAY

Anabilim Dalı : Fizik

Programı : Matematik Fizik

Tez Danışmanı: Doç. Dr. Muzaffer ADAK

OCAK-2013

YÜKSEK LİSANS TEZ ONAY FORMU

Pamukkale Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü **091401007**'nolu öğrencisi **Hatice Yeliz ATALAY** tarafından hazırlanan "**İKİ BOYUTTA DİLATON KÜTLE-ÇEKİM TARAFINDAN OLUŞTURULAN NONMETRİSİTİ VE BURULMA**" başlıklı tez tarafımızdan okunmuş, kapsamı ve niteliği açısından bir Yüksek Lisans tezi olarak kabul edilmiştir.

Tez Danışamnı: **Doç.Dr. Muzaffer ADAK(PAÜ)**
(Jüri Başkanı)

(Jüri Üyesi): **Doç.Dr. Mestan KALAY(PAÜ)**

(Jüri Üyesi): **Doç.Dr. Uğur YÜCEL (PAÜ)**

Pamukkale Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun
06/02/2013 tarih ve ..03/28... sayılı kararıyla onaylanmıştır.

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü
Prof.Dr.Nuri KÖLSUZ

Bu tezin tasarımı, hazırlanması, yürütülmesi, araştırmalarının yapılması ve bulgularının analizlerinde bilimsel etiğe ve akademik kurallara özenle riayet edildiğini; bu çalışmanın doğrudan birincil ürünü olmayan bulguların, verilerin ve materyallerin bilimsel etiğe uygun olarak kaynak gösterildiğini ve alıntı yapılan çalışmalara atfedildiğine beyan ederim.

İmza: H. Yeliz Atalay

Öğrenci Adı Soyadı: Hatice Yeliz ATALAY

ÖNSÖZ

Tez çalışmalarımda, konu tespitimden sonuçlanmasına kadar özverili şekilde her zaman bana yol gösteren yardımlarını benden esirgemeyen lisans tezim ve yüksek lisans tezim boyunca öğrencisi olmaktan onur duyduğum tez danışmanım sayın Doç. Dr. Muzaffer ADAK'a teşekkürü borç bilirim. Nefes aldığım her andan itibaren rahat ve refah bir şekilde eğitim yaşamı sağlayan, sabırlarını, maddi ve manevi her türlü problemimde müsamaha gösteren değerli ve kıymetli aileme en derin şükran minnetlerimi sunarım.

Ocak-2013 Hatice Yeliz ATALAY

İçindekiler

SİMGELER DİZİNİ

M	:	Manifold
g	:	Metrik
∇	:	Bağlantı
$\{x^\mu\}$	:	Koordinat Fonksiyonları
$\imath$	:	İç Çarpım
T(M)	:	Teğet Uzayı
$T^\star(M)$	:	Koteğet Uzayı
η_{ab}	:	Minkowski Metriği
$\{e^a\}$	:	Ortonormal Baz 1-formları
$\{X_b\}$	:	Ortonormal Referans Çerçevesi
$\wedge$	:	Dış Çarpım
$\Lambda^p(M)$	:	p-formları Uzayı
d	:	Dış Türev Operatürü
$\Lambda^a{}_b$	:	Bağlantı 1-formları
D	:	Kovaryant Dış Türev Operatörü
T^a	:	Burulma 2-formları
$\omega^a{}_b$	:	Levi-Civita Bağlantı 1-formları
$K^a{}_b$	:	Ko-burulma 1-formları
$R^a{}_b$	:	Eğrilik 2-formları
L	:	Lagrange 2-formu
$\mathcal{L}$	:	Lagrange Fonksiyonu
$*$	:	Hodge Dualite Operatörü
δ	:	Sonsuz Küçük Varyasyon
$\rho^a{}_b$	:	Lagrange Çarpanı 1-formu
λ_a	:	Lagrange Çarpanı 0-formu

ÖZET

İKİ BOYUTTA DİLATON KÜTLEÇEKİM TARAFINDAN OLUŞTURULAN NONMETRİSİTİ ve BURULMA

Dirac spinörü, dilaton ve Riemannsal olmayan kütleçekimi arasında çiftlenimler olan bir teori geliştiriyoruz. Teori, Levi-Civita bağlantı terimleriyle yeniden formüllendiğinde, bağlantı vasıtasıyla ortaya çıkan dilatonun kütleçekimiyle ve Dirac spinörüyle olan çiftlenimlerinin doğasını keşfediyoruz. Spinörsüz bazı tam çözümleri sunduktan sonra modele minimal spinör çiftlenimlerini araştırıyoruz. Sonuçta, spinöre herhangi bir yeni dilaton çiftlenimi bulamıyoruz.

Anahtar Kelimeler : Bağlantı, Kütleçekimine dilaton çiftlenimleri

SUMMARY

NONMETRICITY and TORSION INDUCED by DILATON GRAVITY in TWO DIMENSION

We develop a theory in which there are couplings amongst Dirac spinor, dilaton and non-Riemannian gravity and explore the nature of connection induced dilaton couplings to gravity and Dirac spinor, when the theory is reformulated in terms of the Levi-Civita connection. After presenting some exact solutions without spinors, we investigate the minimal spinor couplings to the model and in conclusion we cannot find any nontrivial dilaton couplings to spinor.

Key Words : Connection, Induced dilaton couplings to gravity

Bölüm 1

GİRİŞ

Dilaton kütleçekimi teorileri, etkin sicim modellerinde karadeliklerle bağlantılı olduğu ve dilaton ile madde etkileşimlerinin bazı özel seçimlerinde daha yüksek boyutlu kütleçekim teorileriyle ilişkili olabileceği için çalışılmaya değer. Riemannsal uzay-zamanlarda yeni dilaton kütleçekimi modelleri yazmak için iki yol izlenebilir. Birinci yöntemde $D > 2$ boyutta Levi-Civita bağlantılı basit bir lagranj D-formu, L, tahmin edilir ve Kaluza-Klein boyut alçaltma işlemiyle yeni bir lagranj $(D-1)$-formu, $\mathcal{L}$, elde edilir. Boyut alçaltma işleminde Levi-Civita bağlantısı $(D-1)$-boyutlu metrik, g, ayar potansiyelleri, A, (vektör alanının bileşenleri) ve dilatonlar, ϕ, (skaler alanlar) içeren özel bir D-boyutlu metrikten, G, tek olarak hesaplanır. [Dereli ve ark.,1982], [Adak ve ark.,2004]

$$\begin{aligned}\overset{(D)}{G} &= \overset{(D-1)}{g} + f^2(\phi)A \otimes A + f^2(\phi)(dy \otimes A + A \otimes dy) \\ &\quad + f^2(\phi)dy \otimes dy \longrightarrow \overset{(D)}{\mathcal{L}} = \overset{(D-1)}{L} \wedge dy\end{aligned}$$

burada y sadece D-boyutlu manifoltta yaşayan bir koordinat fonksiyonudur. Daha düşük boyutlar için bu işlem ard arda üç beş defa uygulanabilir. İkinci yaklaşımda tüm bağlantının, $\Lambda^a{}_b$, Levi-Civita, $\omega^a{}_b$, burulma, T^a, ve nonmetrisiti, $Q^a{}_b$, katkıları içerdiği Riemannsal olmayan geometri kullanılır. Burada nonmetrisiti ve burulma üzerinde kısıtlamalar olan varyasyon hesabı gereklidir. Riemannsal olmayan bir langranj D-formu yazıldıktan sonra ilk olarak kısıtlama denklemleri aracılığıyla tüm bağlantı, Levi-Civita artı dilaton terimleri, $\Lambda \approx \omega + \phi$, olarak hesaplanır ve ardından çözülen bağlantı diğer varyasyonel denklemlere yerleştirilerek standart Levi-Civita bağlantılı denklemler elde edilir. Şimdi işlemler ters sırada tekrarlanır, yani ilk olarak çözülen bağlantı yardımıyla Riemannsal olmayan lagranj ayrıştırılır, ve ardından yeni lagranjdan alan denklemleri türetilir [Dereli ve ark.,1994]. Bu yaklaşımda teorinin Levi-Civita terimleriyle yeniden yazılabildiği görülür. Böylece burulma ve nonmetrisiti tensörleri Riemannsal kütleçekimi için maddenin ortaya çıkardığı çiftlenimler olarak yorumlanır. Süperkütleçekim modelleri Levi-Civita bağlantısına göre genellikle karmaşık madde çiftlenimleri içerdikleri için bu çalışmadaki taktik süperkütleçekimine uygulanabilir. Sonuçta, o karmaşık modeller burulmalı ve nonmetrisitili tüm bağlantı terimleriyle yeniden yazıldığında çok daha derli toplu bir biçime sahip olabilirler. Bu makalede, sıfırdan farklı bir burulma ekleyerek [Dereli ve ark.,1994] makalesini genelliyoruz. O makalede, yazarlar dilaton kütleçekimi teorilerinin sıfır burulmalı nonmetrisitili bağlantı terimleriyle nasıl inşa edilebileceklerini göstermişlerdir ve teori Levi-Civita bağlantı terimleriyle yeniden formüllendiğinde bağlantının ortaya çıkardığı çiftlenimlerin sebep olduğu renormalizasyon bulmuşlardır. Ardından bazı çözümleri tartışıyoruz ve son olarak Dirac lagranjını ele alarak spinöre yeni dilaton çiftlenimlerinin olup olmadığını araştırıyoruz. Bu çalışmada kullandığımız gösterim ve gelenekler şöyledir. 2-boyutlu metriğin izinin $(-,+)$ olduğu kabul ediliyor. Latin indisleri, $a, b, \cdots = 0, 1$, ortonormal çerçeve bileşenlerini etiketlerken, Yunan indisleri, $\alpha, \beta, \cdots = \hat{0}, \hat{1}$, koordinat çerçeve bileşenlerini gösterir. Ortonormal koçerçeve 1-formları e^a ve dış çarpım $\wedge$ ile birlikte $e^a \wedge e^b = e^{ab}$ kısaltma gösterimini kullanacağız. Ayrıca, $*1 = e^{01}$ hacim 2-formu olmak üzere uzay-zaman yönelimini Hodge yıldızıyla tanımlıyoruz.

Bölüm 2

UZAY-ZAMAN GEOMETRİSİ

2.1 Temel Kavramlar

Bu çalışmada uzay-zaman $\{M, g, \nabla\}$ ile gösterilmektedir. Burada M 4-boyutlu diferansiyellenebilir ve yönlenebilir bir manifold, g bunun üzerinde verilmiş (0,2)-tipi metrik tensörü, ∇ tensörlerin ve spinörlerin paralel taşınmasında kullanılan bağlantıdır. Uzay-zamanın herhangi bir $p \in M$ noktasında kurulan koordinat sistemini $\{x^\mu(p)\}$, $\mu = \hat{0}, \hat{1}$, koordinat fonksiyonları ile verelim. Bu koordinat sistemi $\{\frac{\partial}{\partial x^\mu}(p)\}$ şeklinde veya kısaca ∂_μ ile gösterilen bir koordinat refarans çerçevesi oluşturur. Bu referans çerçevesi, $T_p(M)$ teğet uzayı için p noktasında bir baz vektör kümesidir. Benzer olarak, $\{x^\mu(p)\}$ koordinat fonksiyonlarının diferansiyeli olan $\{dx^\mu(p)\}$, $T_p{}^*(M)$ koteğet uzayının bir p noktasında koordinat referans koçerçevesini oluşturur. M manifoldu üzerindeki fonksiyonlar (0,0)-tipi tensörler, vektörler (1,0)-tipi (kontravaryant) tensörler, kovektörler ise (0,1)-tipi (kovaryant) tensörlerdir. Teğet uzayının baz vektörleri ile koteğet uzayının baz kovektörlerinin " iç çarpımı " Kronecker sembolü ile belirlenir

$$dx^\mu\left(\frac{\partial}{\partial x^\nu}\right) \equiv \imath_{\frac{\partial}{\partial x^\nu}} dx^\mu = \delta^\mu{}_\nu \quad . \tag{2.1}$$

$T_p(M)$ teğet uzayında herhangi bir lineer bağımsız vektörler kümesi ortonormal yapılabilir. Böyle bir kümeyi $\{X_a\}$, $a = 0, 1$, ile gösterelim ve " ortonormal referans çerçevesi " olarak adlandıralım. Bu durumda M manifoldu üzerinde verilen metrik $g(X_a, X_b) = \eta_{ab}$ bağıntısını sağlar ki burada η_{ab} Minkowski metriği olarak bilinir ve köşegen elemanları $-1, 1$, ve diğer terimleri sıfır 2×2'lik bir matristir. Ortonormal referans çerçevesinin dualinin oluşturduğu baz e^a ile gösterilir. X_a ile bunun dual çerçevesi e^a

$$e^a(X_b) \equiv \imath_{X_b}(e^a) = \delta^a_b \tag{2.2}$$

eşitliğini sağlar ki bu (2.1) eşitliğinin bir diğer gösterimidir. Bu tez de aşağıdaki notasyonu kullanıyoruz: Yunan alfabesi ile gösterilen indisler kordinat (holonomik) indisleri ve Latin alfabesi ile gösterilen indisler çerçeve (anholonomik) indisleridir. Ortonormal çerçeve, $X_a(p)$, koordinat çerçevesi $\partial_a(p)$ cinsiden iki ayak $h^\alpha{}_a(p)$ vasıtasıyla açılabilir;

$$X_a(p) = h^\alpha{}_a(p)\partial_a(p). \tag{2.3}$$

Burada X_a'nın anholonomik bir baz olabilmesi için $h^\alpha{}_a(p)$'nin dejenere olmaması gerekir: $det(h^\alpha{}_a(p)) \neq 0$. Benzer olarak,

$$e^a(p) = h^a{}_\alpha(p)dx^\alpha(p) \tag{2.4}$$

yazılabilir, dahası iki ayaklar aşağıdaki eşitliği sağlarlar

$$\imath_a e^b = h^\alpha{}_a(p)h^b{}_\alpha(p) = \delta^b{}_a \quad . \tag{2.5}$$

2.1.1 Dış Cebir Uzayı

Anti-simetrik tensör çarpımına " dış çarpım " adı verilir ve $\wedge$ simgesiyle gösterilir. M üzerinde tanımlanmış p mertebesinden tümüyle anti-simetrik kovaryant tensörlerin uzayı $\Lambda^p(M)$ ile gösterilir. $\Lambda^p(M)$ uzayının elemanlarına " p-form " adı verilir. $\Lambda^1(M)$ uzayı $T^*(M)$ koteğet demetine özdeştir. Bu nedenle, kovektörlere 1-formlar da denilmektedir. x^μ koordinat haritasında bir ω p-formu

$$\omega = \frac{1}{p!}\omega_{[\mu_1\mu_2\ldots\mu_p]}dx^{\mu_1} \wedge dx^{\mu_2} \wedge \ldots \wedge dx^{\mu_p} \tag{2.6}$$

şeklinde açılır. Bunu ortonormal 1-formlar cinsinden de yazabiliriz;

$$\omega = \frac{1}{p!}\omega_{[i_1 i_2 \ldots \wedge i_p]} e^{i_1} \wedge e^{i_2} \wedge \ldots \wedge e^{i_p} \tag{2.7}$$

Buna göre, dış çarpımda sıra önemlidir

$$\omega \wedge \psi = (-1)^{p.q} \psi \wedge \omega \quad . \tag{2.8}$$

Burada $\omega \in \Lambda^p(M)$ve $\psi \in \Lambda^q(M)$. $\Lambda^p(M)$ uzayı dış çarpım altında kapalı olmadığı için bir cebir oluşturmaz. Ancak

$$\Lambda(M) = \Lambda^0(M) \oplus \Lambda^1(M) \oplus \ldots \oplus \Lambda^n(M)$$

biçiminde tanımlanan $\Lambda(M) = \bigoplus_{p=0}^{n} \Lambda^p(M)$ direkt toplamı bir cebir oluşturur . Bu cebir " dış cebir " olarak adlandırılır. Dış cebir uzayında tanımlı $\omega_1 \in \Lambda^p(M)$, $\omega_2 \in \Lambda^q(M)$, $\omega_3 \in \Lambda^r(M)$ ve α reel bir sabit olmak üzere şu bağıntılar sağlanır.

1. $(\alpha\omega_1) \wedge \omega_2 = \omega_1 \wedge (\alpha\omega_2) = \alpha(\omega_1 \wedge \omega_2)$

2. $(\omega_1 + \omega_2) \wedge \omega_3 = \omega_1 \wedge \omega_3 + \omega_2 \wedge \omega_3$

3. $\omega_1 \wedge (\omega_2 \wedge \omega_3) = (\omega_1 \wedge \omega_2) \wedge \omega_3$

4. $\omega_1 \wedge \omega_2 = (-1)^{p.q} \omega_2 \wedge \omega_1$

2.1.2 Dış Türev Operatörü

p-formları $(p+1)$-formlarına götüren

$$d : \Lambda^p(M) \longrightarrow \Lambda^{p+1}(M) \tag{2.9}$$

lineer gönderimine dış türev adı verilir ve x^μ koordinat haritasında

$$d\omega = \tfrac{1}{p!} \tfrac{\partial \omega_{\mu_1 \ldots \mu_p}}{\partial x^\mu} dx^\mu \wedge dx^{\mu_1} \wedge \ldots \wedge dx^{\mu_p}$$

ifadesiyle tanımlanır. Dış türev işlemi türevin dış cebir üzerine tek genellemesidir ve $f \in \Lambda^0(M)$, $\omega_1 \in \Lambda^p(M)$, $\omega_2 \in \Lambda^q(M)$ olmak üzere aşağıdaki özellikleri sağlar.

1. $df = (\partial_\mu f) dx^\mu$

2. $d(\omega_1 + \omega_2) = d\omega_1 + d\omega_2$

3. $d(\omega_1 \wedge \omega_2) = d\omega_1 \wedge \omega_2 + (-1)^p \omega_1 \wedge d\omega_2$

4. $d^2\omega = 0$

Dört numaralı özelliğe " Poincaré Leması " denir. Eğer $d\omega = 0$ ise ω formuna kapalıdır denir. Eğer $\omega_1 = d\omega_2$ olarak yazılabiliyorsa ω_1 tamdır denir. Her tam form kapalıdır. Bu lemanın tersi ancak yerel olarak doğrudur.

2.1.3 İç Çarpım Operatörü

Y bir vektör alanını göstermek üzere bir p-formu $(p-1)$-forma gönderen

$$\imath_Y : \Lambda^p(M) \longrightarrow \Lambda^{p-1}(M) \tag{2.10}$$

lineer gönderimi Y vektörüne göre iç çarpım işlemi ile tanımlanır. Eğer ω bir p-formsa, X_i ortonormal bazda

$$\imath_Y \omega = \frac{1}{(p-1)!} Y^{i_1} \omega_{i_1 i_2 \ldots i_p} e^{i_2} \wedge \ldots \wedge e^{i_p}$$

olduğu görülür. Burada $Y = Y^i X_i$ yazılır ve $f \in \Lambda^0(M)$, $\omega_1 \in \Lambda^p(M)$ ve $\omega_2 \in \Lambda^q(M)$ olmak üzere aşağıdaki özellikler kullanılır.

1. $\imath_Y f = 0$

2. $\imath_{X_j} e^i = e^i(X_j) = \delta^i{}_j$

3. $\imath_{fY} \omega_1 = f \imath_Y \omega_1$

4. $e^i \wedge \imath_{X_i} \omega_1 = p\omega_1$

5. $\imath_{X_i} \imath_{X_j} \omega_1 = -\imath_{X_j} \imath_{X_i} \omega_1$

6. $\imath_{X_i}(\omega_1 \wedge \omega_2) = (\imath_{X_i}\omega_1) \wedge \omega_2 + (-1)^p \omega_1 \wedge (\imath_{X_i \omega_2})$

7. $^*(\omega_1 \wedge e_i) = \imath_{X_i} {}^*\omega_1$

$\imath_{X_i}$ yerine kısaca $\imath_i$ sembolü kullanılır.

Levi-Civita Tensörü

M_n üzerinde tanımlı $\Lambda(M)$ dış cebir uzayı içinde bir tane n-form vardır ve bu da koordinat haritasından bağımsız olarak ortonormal 1-formlar cinsinden

$$e^1 \wedge \ldots \wedge e^n = \frac{1}{n!}\epsilon_{i_1 \ldots i_n} e^{i_1} \wedge \ldots \wedge e^{i_n} \tag{2.11}$$

ifadesiyle verilebilir. Buna hacim formu denilmektedir ve ^{*1} ile gösterilmektedir. Burada $\epsilon_{12\ldots n} = +1$ olarak normalize edilen ve tümüyle anti-simetrik olan $\epsilon_{i_1 i_2 \ldots i_n}$ niceliğine Levi-Civita tensörü denir.

$$\varepsilon_{i_1 i_2 \ldots i_n} = \begin{cases} 0 & \text{herhangi iki indis eşit} \\ +1 & (i_1 i_2 \ldots i_n) \text{ dizilişi } (1, 2 \ldots n) \text{ dizilişinin çift permütasyonu} \\ -1 & (i_1 i_2 \ldots i_n) \text{ dizilişi } (1, 2 \ldots n) \text{ dizilişinin tek permütasyonu} \end{cases}$$

2.1.4 Hodge Star Operatörü

Levi-Civita Tensörü yardımıyla $\Lambda^p(M)$ uzayı ile $\Lambda^{n-p}(M)$ uzayı arasında kanonik bir izomorfizim kurulur.

$$^* : \Lambda^p(M) \longrightarrow \Lambda^{n-p}(M) \tag{2.12}$$

ile gösterilen bu izomorfizme Hodge dualite gönderimi adı verilir. ω bir p-form olmak üzere Hodge gönderimi, ω p-formuna

$$^*\omega = \tfrac{1}{(n-p)!}\epsilon^{i_1 \ldots i_p}{}_{i_{p+1} \ldots i_n} \omega_{[i_1 \ldots i_p]} e^{i_{p+1}} \wedge \ldots \wedge e^{i_n}$$

ifadesiyle belirlenen $(n-p)$-formunu karşı getirir. Yukarıdaki ifade incelediğinde görülecektir ki Hodge gönderiminin tanımlanabilmesi ancak M_n üzerinde bir g metrik tensörünün belirlenmiş olması halinde mümkündür. $\omega, \psi \in \Lambda^p(M)$ olarak aşağıdaki üç temel özelliğe sahiptir.

1. $\omega \wedge^* \psi = \psi \wedge^* \omega$
2. $^*\omega \wedge \psi =^* \psi \wedge \omega$
3. $^{**}\omega = \pm\omega$

2.1.5 Çerçeve Dönüşümü

M manifoldu üzerinde her gözlemci kendi referans çerçevesine göre gözlem yapar. Bu durumda, bir $p \in M$ noktasında O gözlemcisi $\{X_a\}$ referans çerçevesini ve O' gözlemcisi de yine aynı noktada $\{X'_a\}$ referans çerçevesini kurmuş olsunlar. ${L^{-1}}^b{}_a$ yerel Lorentz dönüşüm matrisi olmak üzere, bu iki gözlemcinin ortonormal referans vektörleri

$$X_{a'}(p) = X_b(p){L^{-1}}^{b'}{}_a(p) \tag{2.13}$$

şeklinde biribirine dönüştürülebilir. Lorentz dönüşümü koordinatlardan bağımsız ise bu dönüşüm genel (veya sabit) bir dönüşümdür. Ortonormal referans koçerçevesinin dönüşümü ise

$$e^{a'}(p) = L^{a'}{}_b(p)e^b(p) \tag{2.14}$$

ile verilir. Ayrıca,

$$X_{a'}e^{a'} = X_c{L^{-1}}^c{}_{a'}(L^{a'}{}_d e^d) = X_c\delta^c{}_d e^d = X_c e^c = X_a e^a \tag{2.15}$$

iç çarpımı için Lorentz invaryantlığın sağlandığı görülür.

2.1.6 Bağlantı

Kovaryant bir e^a bazının dış türevinin Lorentz dönüşümüne bakıldığında,

$$de^{a'} = d(e^b L^{a'}{}_b) = dL^{a'}{}_b \wedge e^b + L^{a'}{}_b de^b$$

Burada $dL^{a'}{}_b \wedge e^b$ terimi nedeniyle de^a 'nın dönüşümü için invaryantlık sağlanmaz. Bu fazla terimden kurtulmak için bağlantı 1-formları tanımlanır. Bağlantının yerel Lorentz dönüşümü de

$$\Lambda^{a'}{}_{b'} = L^{a'}{}_c\Lambda^c{}_f{L^{-1}}^f{}_{b'} + L^{a'}{}_c d{L^{-1}}^c{}_{b'} \tag{2.16}$$

ifadesi ile verilir. Bu eşitliğin sağ tarafındaki ikinci terim bağlantı 1-formlarının en genelde tensör nicelikler olmadığını gösterir.

2.1.7 Kovaryant Dış Türev Operatörü

A, bir vektör veya daha genel olarak bir tensör olmak üzere, bağlantı 1-formları cinsinden kovaryant dış türev operatörü aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$DA := (d \mp \Lambda)A \tag{2.17}$$

Daha önce $de^{a'} \neq L^{a'}{}_b de^b$ olduğu gösterilmiştir. Fakat şimdi kovaryant baz e^a'nın kovaryant dış türevinin

$$De^a = de^a + \Lambda^a{}_b \wedge e^b \tag{2.18}$$

dönüşümünü yazalım.

$$\begin{aligned}
De^{a'} &= d(L^{a'}{}_b e^b) + (L^{a'}{}_c \Lambda^c{}_f L^{-1f'}{}_b + L^{a'}{}_c dL^{-1c'}{}_b) \wedge L^{b'}{}_k e^k \\
De^{a'} &= dL^{a'}{}_b \wedge e^b + L^{a'}{}_b de^b + L^{a'}{}_c \Lambda^c{}_f L^{-1f'}{}_b L^{b'}{}_k \wedge e^k + L^{a'}{}_c dL^{-1c'}{}_b L^{b'}{}_k \wedge e^k \\
&= dL^{a'}{}_b \wedge e^b + L^{a'}{}_b de^b + L^{a'}{}_c \Lambda^c{}_k \wedge e^k - dL^{a'}{}_k \wedge e^k \\
&= L^{a'}{}_b (de^b + \Lambda^b{}_k \wedge e^k) \\
&= L^{a'}{}_b De^b
\end{aligned} \tag{2.19}$$

(2.18) ile sadece $(0,1)$-tipi bir tensörün dış kovaryant türevi tanımlanmıştır. Genel olarak bir (p,q)-tipi tensörü kovaryant dış türevi aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$\begin{aligned}
DR^{a_1\cdots a_p}{}_{b_1\cdots b_q} &= dR^{a_1\cdots a_p}{}_{b_1\cdots b_q} + \Lambda^{a_1}{}_c \wedge R^{ca_2\cdots a_p}{}_{b_1\cdots b_q} + \cdots + \Lambda^{a_p}{}_c \wedge R^{a_1\cdots c}{}_{b_1\cdots b_q} \\
&\quad -\Lambda^c{}_{b_1} \wedge R^{a_1\cdots a_p}{}_{cb_1\cdots b_2} - \cdots - \Lambda^c{}_{b_q} \wedge R^{a_1\cdots a_p}{}_{b_1\cdots c}
\end{aligned} \tag{2.20}$$

Bu genel tanımdan sonra η_{ab} metriğinin, e^a ortonormal baz 1-formlarının ve $\Lambda^a{}_b$ bağlantı 1-formlarının kovaryant dış türevi incelenir. Bu ifadeler Cartan Yapı denklemleridir.

2.2 Nonmetrisiti Tensörü

Metriğin kovaryant dış türevi nonmetrisiti 1-formu Q_{ab} olarak tanımlanır,

$$Q_{ab} = -\frac{1}{2}Dg_{ab} = \frac{1}{2}(\Lambda_{ba} + \Lambda_{ab}). \tag{2.21}$$

Bu tanım aynı zamanda *Birinci Cartan Yapı Denklemi* olarak da ifade edilir. Tanım gereği simetrik olan $Q_{ab} = Q_{ba}$ nonmetrisiti 1-formu $(1,2)$-tipi tensörü temsil eder, $Q^a{}_b = Q_{c},{}^a{}_b e^c$. (2.21) denkleminin sağ tarafında $g_{ab} = 0, \pm 1$ olduğu için $dg_{ab} = 0$ olması kullanılır. Ayrıca $Q^a{}_b = 0$ ise bağlantıya *metrik uyumlu bağlantı* denir. Geometrik olarak nonmetrisiti tensörü, paralel taşıma süresince uzunluk ve açı standartlarındaki deformasyonu ölçer.

2.3 Burulma Tensörü

Baz 1-formlarının kovaryant dış türevi burulma 2-form T^a olarak tanımlanır

$$T^a := De^a = de^a + \Lambda^a{}_b \wedge e^b \quad . \tag{2.22}$$

Bu *İkinci Cartan Yapı Denklemi* olarak da ifade edilir. Burulma 2-formu $(1,2)$-tipi burulma tensörünü temsil eder, $T^a = \frac{1}{2}T_{bc},{}^a e^b \wedge e^c$. En genel de herhangi bir 2-form antismetrik bir 1-formdan türetilir

$$K^a{}_b \wedge e^b = T^a \quad . \tag{2.23}$$

Burada $K_{ab} = -K_{ba}$ koburulma 1-formudur. Bu ifadenin tersi

$$2K_{ab} = \imath_a T_b - \imath_b T_a - (\imath_a \imath_b T_c)e^c \tag{2.24}$$

olarak yazılır. Metrik uyumlu bağlantıda burulmayı da sıfır kabul yaparsak bağlantı artık *Levi-Civita bağlantısı* olur.

2.4 Eğrilik Tensörü

Metriğin ve baz 1-formların kovaryant dış türevlerini birer tensör olarak tanımladığı gibi tüm bağlantı 1-formlarının kovaryant dış türevini de eğrilik 2-formu $R^a{}_b$ olarak tanımlayalım

$$R^a{}_b(\Lambda) := D\Lambda^a{}_b := d\Lambda^a{}_b + \Lambda^a{}_c \wedge \Lambda^c{}_b. \qquad (2.25)$$

Bağlantı tanım olarak tensör olmadığı için " bağlantının kovaryant dış türevi " de tamamen biçimsel bir ifadedir. (2.25) denklemi *Üçüncü Cartan Yapı Denklemi* olarak ifade edilir. Eğrilik 2-formu (1,3)-tipi eğrilik tensörünü temsil eder $R^a{}_b = \frac{1}{2}R_{cd},{}^a{}_b e^c \wedge e^d$.

2.5 Bianchi Özdeşlikleri

Bu bilgiler ve tanımlardan sonra aşağıdaki özdeşlikler hesaplarda kullanılır.

1. $D^*e_a = -Q \wedge^* e_a +^* e_{ab} \wedge T^a$
2. $D^*e_{ab} = -Q \wedge^* e_{ab} +^* e_{abc} \wedge T^c$
3. $D^*e_{abc} = -Q \wedge^* e_{abc} +^* e_{abcd} \wedge T^d$
4. $D^*e_{abcd} = -Q \wedge^* e_{abcd}$

Burada $Q := Q^a{}_a$ Weyl 1-formu olarak bilinir. Ayrıca, nonmetrisiti 1-formunun, burulma 2-formunun ve eğrilik 2-formunun kovaryant dış türevleri ile Bianchi Özdeşlikleri elde edilir:

- Birinci Bianchi Özdeşliğini bulmak için burulmanın dış türevi alınır.

  $$dT^a = d(de^a) + d(\Lambda^a{}_b \wedge e^b)$$

  Burada (2.22) ve (2.25) denklemleri kullanılırsa;

  $$dT^a + \Lambda^a{}_b \wedge T^b = R^a{}_b \wedge e^b$$

  $$DT^a = R^a{}_b \wedge e^b \qquad (2.26)$$

  sonucu elde edilir ki bu *Birinci Bianchi Özdeşliği*dir.

- İkinci Bianchi Özdeşliğini bulmak için eğriliğin dış türevi alınıp, (2.25) denklemi kullanılırsa;

$$dR^a{}_b = R^a{}_c \wedge \Lambda^c{}_b - \Lambda^a{}_c \wedge R^c{}_b$$

$$DR^a{}_b = 0 \tag{2.27}$$

İkinci Bianchi Özdeşliği elde edilir.

- Üçüncü Bianchi Özdeşliğini bulmak için (2.21) denkleminin dış türevini alalım.

$$2dQ_{ab} = (d\Lambda^c{}_a)\eta_{cb} + (d\Lambda^c{}_b)\eta_{ac}$$

Burada (2.25) denklemi kullanılırsa;

$$R_{ab} + R_{ba} = 2DQ_{ab} \tag{2.28}$$

Üçüncü Bianchi Özdeşliği elde edilir.

2.6 Bağlantının Ayrışması

Riemannsal olmayan geometrilerde bağlantı en genelde Riemannsal ve Riemannsal olmayan parçalar biçiminde ayrıştırılır:

$$\Lambda_{ab} = \underbrace{\omega_{ab}}_{\text{Riemann}} + \underbrace{K_{ab}}_{\text{Burulma}} + \underbrace{q_{ab} + Q_{ab}}_{\text{Nonmetrisiti}} \tag{2.29}$$

Burada simetrik kısım (2.21) denkleminden gelirken

$$\Lambda_{(ab)} = Q_{ab} \tag{2.30}$$

kalan parça antisimetriktir

$$\Lambda_{[ab]} = \omega_{ab} + K_{ab} + q_{ab} \quad . \tag{2.31}$$

(2.31) denklemindeki antisimetrik tensör bağlantı 1-formu q_{ab} ile simetrik tensör $Q^a{}_b$ arasında şöyle bir ilişki vardır;

$$q_{ab} = -(\imath_a Q_{bc}) \wedge e^c + (\imath_b Q_{ac}) \wedge e^c \quad . \tag{2.32}$$

Eğer $Q^a{}_b = 0$ ise bağlantı metrik uyumludur. İlaveten $T^a = 0$ olursa tam bağlantı Levi-Civita bağlantı 1-formuna dönüşür ve $\omega^a{}_b$ ile gösterilir,

$$\Lambda^a{}_b \longrightarrow \omega^a{}_a \tag{2.33}$$

(2.29) ayrışımının kendi için tutarlı olduğu aşağıdaki gibi gösterilebilr. Bunun için önce (2.29) denklemi sağdan e^b ile çarpılır

$$\Lambda^a{}_b \wedge e^b = \omega^a{}_b \wedge e^b + K^a{}_b \wedge e^b + q^a{}_b \wedge e^b + Q^a{}_b \wedge e^b. \tag{2.34}$$

Burada (2.22) ve (2.23) denklemlerini kullanırsa

$$-de^a = \omega^a{}_b \wedge e^b + q^a{}_b \wedge e^b + Q^a{}_b \wedge e^b \tag{2.35}$$

$$\begin{aligned} -(de^a + \omega^a{}_b \wedge e^b) &= (-\imath^a Q^c{}_b e^c + \imath_b Q^a{}_c e^c) \wedge e^b + Q^a{}_b \wedge e^b \\ &= -Q^a{}_c \wedge e^c + Q^a{}_b \wedge e^b \end{aligned}$$

$$de^a + \omega_{ab} \wedge e^b = 0 \tag{2.36}$$

olur. (2.36)'dan ω_{ab} çözülebilir,

$$\omega_{ab} = -\frac{1}{2}\imath_a(de_b) + \frac{1}{2}\imath_b(de_a) + \frac{1}{2}\imath_a\imath_b(de_c)e^c \quad . \tag{2.37}$$

Bu bağıntıyı ispatlamak için önce (2.36) denklemi $\imath_b$ ile çarpılır,

$$\imath_b de_a = -\imath_b\omega_{ac}e^c + \omega_{ac}\imath_b e^c \longrightarrow \imath_b de_a + \imath_b\omega_{ac}e^c = \omega_{ab} \tag{2.38}$$

Burada $a \longleftrightarrow b$ dönüşümü yapılıp düzenlenirse,

$$-\imath_a de_b - \imath_a\omega_{bc}e^c = \omega_{ab} \tag{2.39}$$

elde edilir. Bu iki denklemin toplamı

$$2\omega_{ab} = -\imath_a de_b + \imath_b de_a + (\imath_a\omega_{cb} - \imath_b\omega_{ca})e^c \tag{2.40}$$

sonucunu verir. (2.38) denklemi $\imath_k$ ile çarpılır,

$$\imath_k\imath_b de_a = -\imath_b\omega_{ak} + \imath_k\omega_{ab}$$

ve düzenlenir

$$\imath_a \imath_b de_c = \imath_a \omega_{cb} - \imath_b \omega_{ca} \quad . \tag{2.41}$$

Bu (2.40)'e yerleştirilirse ,

$$2\omega_{ab} = -(\imath_a de_b) + (\imath_b de_a) + (\imath_a \imath_b de_c) e^c. \tag{2.42}$$

sonucu bulunur. Burada ω_{ab} 1-formuna benzer olarak $K^a{}_a$ ko-burulma 1-formu şöyle bir bağıntıyı sağlar :

$$2K_{ab} = \imath_a T_b - \imath_b T_a - (\imath_a \imath_b T_c) e^c \tag{2.43}$$

Ayrıca $\Lambda^a{}_b$ bağlantısı boyutsuzdur . Buna göre $T^a = [L]^1$ boyutunda olmalıdır.

Bölüm 3

RIEMANNSAL OLMAYAN GEOMETRİDE DİLATON KÜTLEÇEKİMİ

3.1 Riemannsal Olmayan Geometride Dilaton Kütleçekimi

İki boyutlu bir uzay-zaman, Lorentzsel bir metrikle g ve vektörlerin (daha genel olarak spinörlerin) paralel taşınmasını tanımlayan lineer bir bağlantıyla ∇ donatılmış türevlenebilir bir manifolttan M oluşur. Ortonormal bir baz X_a verildiğinde metrik

$$g = \eta_{ab} e^a \otimes e^b = -e^0 \otimes e^0 + e^1 \otimes e^1 \tag{3.1}$$

olarak yazılabilir. İki boyutta en genel Rimennsal olmayan kütleçekim üzerine literatür [Obukhov 2004] makalesinde bulunabilir. İlgili makalede nonmetrisisti ve burulma mevcut olup yazar modelinde dilaton çiftlenimlerini tartışmamıştır. İlaveten, iki boyutta en basit dilaton kütleçekimi modeli, bir dilaton skalerinin ϕ eğrilik skalerine çiftlenimi olarak yazılabilecekken, biz

$$Q^b{}_a = \delta^b{}_a (k d\phi + l^* d\phi) \tag{3.2}$$

ile belirlenen nonmetrisiti ([Dereli ve ark.,1994] ile aynı) ve

$$T^a = e^a \wedge (p d\phi + q^* d\phi) \tag{3.3}$$

ile belirlenen burulma içeren bağlantılı bir teori geliştireceğiz. Burada k,l,p ve q temel çiftlenim sabitleridir. [Katanaev 2002] makalesi kısım 6'da yazar, genel bir iki-boyutlu dilaton kütleçekiminin birinci mertebe Hamilton formalizmiyle burulmalı iki-boyutlu kütleçekimine eşdeğer olduğunu ispatlamıştır. Burulma için yaptığımız temeli olmayan kabülün o analizin hareket denklemleri tarafından öngörüldüğünü fark ediyoruz. Teorimiz

$$L = \frac{1}{2}\phi^2 R^a{}_b \wedge {}^*e^a{}_b + \frac{\alpha}{2} d\phi \wedge {}^*d\phi + \frac{\beta}{2}\phi^{2*}1 + \frac{\mu}{4} Q^a{}_b \wedge {}^*Q^b{}_a + \frac{\nu}{2} T^a \wedge {}^*T_a$$
$$+\rho^a{}_b \wedge (Q^b{}_a - k\delta^b{}_a d\phi - l\delta^b{}_a{}^*d\phi) + \lambda_a(T^a - pe^a \wedge d\phi - qe^a \wedge {}^*d\phi) \tag{3.4}$$

lagranj 2-formuna dayanır. Burada α, β, μ, ν çiftlenim sabitleri, $\rho^a{}_b$ nonmetrisitiyi (3.2) denklemine kısıtlayan simetrik lagranj çarpan 1-formları ve λ_a burulmayı (3.3) denklemine kısıtlayan lagranj çarpan 0-formlarıdır. Bundan sonra $\rho \equiv \rho^a{}_b$ ve $\lambda \equiv \lambda_a e^a$. $\Lambda^a{}_b$, ϕ ve e^a varyasyonları aşağıdaki alan denklemlerini verirler.

$$\frac{1}{2} d\phi^2 \wedge {}^*e_a{}^b + \frac{\phi^2}{2}(2Q^{bc} \wedge {}^*e_{ac} - Q \wedge {}^*e_a{}^b)\frac{\mu}{2}{}^*Q^b{}_a - \rho^b{}_a + \lambda_a e^b + \nu e^{b*}T_a = 0 \tag{3.5}$$

$$\phi R^a{}_b \wedge {}^*e_a{}^b - \alpha d^*d\phi + \beta\phi^*1 - kd\rho + ld^*\rho - \rho d\lambda_a + qd^*\lambda = 0 \tag{3.6}$$

$$-\frac{\alpha}{2}\tau_a[\phi] + \frac{\beta}{2}\phi^{2*}e_a - \frac{\mu}{4}\tau_a[Q] + l[(\imath_a d\phi)^*\rho + (\imath_a{}^*d\phi\rho)] + \nu D^*T_a - \frac{\nu}{2}(\imath_a T^b)^*T_b$$
$$+D\lambda_a - p\lambda_a d\phi - q\lambda_a{}^*d\phi + q[(\imath_a d\phi)^*\lambda + (\imath_a{}^*d\phi)\lambda] = 0 \tag{3.7}$$

Burada gerilme formları;

$$\tau_a[\phi] = (\imath_a d\phi)^*d\phi + (\imath_a{}^*d\phi)d\phi \tag{3.8}$$

ve

$$\tau_a[Q] = (\imath_a Q^b{}_c)^*Q^c{}_b + (\imath_a{}^*Q^c{}_b)Q^b{}_c. \tag{3.9}$$

ile verilmektedir. İlk olarak (3.2) ve (3.3) denklemlerini (3.5) denklemine yerleştirerek çarpanları çözebiliriz.

$$\frac{1}{2}d\phi^2 \wedge {}^*e_a{}^b + \frac{\mu}{2}\eta_{ab}(k^*d\phi + ld\phi) -$$
$$\nu e_b \wedge [p(\imath_a{}^*d\phi + q(\imath_a d\phi))] + \lambda_a e_b - \rho_{ab} = 0 \tag{3.10}$$

Şimdi (3.10) denklemini $\imath^a$ ile ve $\imath^b$ ile çarptıktan sonra indisleri uygun biçimde yeniden adlandırıp bu denklemleri taraf tarafa çıkararak

$$\lambda_a = \imath_a(2\phi^* d\phi + \nu p^* d\phi + \nu q d\phi) \tag{3.11}$$

ve

$$\lambda = 2\phi^* d\phi + \nu p^* d\phi + \nu q d\phi. \tag{3.12}$$

sonuçlarını elde ediyoruz[1]. Ardından (3.11) denklemini (3.10) denklemine yerleştirerek

$$\rho = \mu l d\phi + \mu k^* d\phi + 2\phi^* d\phi. \tag{3.13}$$

denklemine ulaşıyoruz. Bu sonuçları (3.6) denklemine ve (3.7) denklemine koymak (3.4)'deki lagranjdan türetilen dilaton ve metrik alan denklemlerine sebep olur.

3.2 Levi-Civita Bağlantılı Bir Teoriye İnme

(3.2) ve (3.3) denklemler (2.29) denklemine yerleştirilerek tüm bağlantı 1-formları Levi-Civita 1-formları ve dilaton katkıları cinsinden yazılabilir

$$\Lambda^a{}_b = \omega^a{}_b + e^a{}_b[(k+p)^* d\phi + (l+q)d\phi] + \delta^a{}_b(kd\phi + l^* d\phi) \quad . \tag{3.14}$$

Aynı biçimde eğrilik 2-formu aşağıdaki gibi ayrıştırılabilir;

$$R^a{}_b(\Lambda) = R^a{}_b(\omega) + [(k+p)e^a{}_b + l\delta^a{}_b] d^* d\phi. \tag{3.15}$$

O halde Einstein-Hilbert terimi

$$R^a{}_b \wedge {}^*e_a{}^b = R^a{}_b(\omega) \wedge {}^*e_a{}^b - 2(k+p)d^* d\phi \tag{3.16}$$

biçimini alır ve benzer olarak

$$\tau_a[Q] = 2(k^2 + l^2)\tau_a[\phi] + 4kl^* \tau_a[\phi] \tag{3.17}$$

$$(\imath_a T^b)^* T_b = (p^2 - q^2)(\imath_a d\phi)^* d\phi - (p^2 - q^2)(\imath_a {}^* d\phi) d\phi \tag{3.18}$$

[1] [Dereli ve ark.,1994] makalesinin (44) denklemindeki son iki terim yanlış yazılmıştır. Şanstan, bu yanlış yazım sonuçları değiştirmiyor.

$$D^*T_a = D(\omega)^*T_a + (pk+ql)\tau_a[\phi] + (kq+pq+pl)^*\tau_a[\phi]$$
$$+p^2(\imath_a d\phi)^{*d\phi} + q^2(\imath_a{}^*d\phi)d\phi \tag{3.19}$$

$$D\lambda_a = D(\omega)\lambda_a - (2k\phi+\nu pk+\nu ql)\tau_a[\phi] - (2l\phi+\nu pq+\nu qk)^*\tau_a[\phi]$$
$$-(2p\phi+\nu p^2)(\imath_a d\phi)^*d\phi - \nu q^2(\imath_a{}^*d\phi)d\phi - 2q\phi(\imath_a d\phi)d\phi \tag{3.20}$$

olur. Burada $D(\omega)$ Levi-Civita'ya göre kovaryant dış türev gösterir. Bu ifadeleri (3.6) ve (3.7) denklemlerinde kullanarak, dilaton ile metrik için alan denklemlerinin yalnızca Levi-Civita bağlantısı cinsinden yeniden yazılabileceğini görüyoruz.

$$\phi R^a{}_b(\omega)^*e_a{}^b - 4(k+p)\phi d^*d\phi - 2(k+p)d\phi\wedge{}^*d\phi$$
$$-[\alpha+\mu(k^2-l^2)+\nu(p^2-q^2)]d^*d\phi + \beta\phi^*1 = 0 \tag{3.21}$$

$$D(\omega)(\imath_a{}^*d\phi^2) + \frac{\beta}{2}\phi^{2*}e_a - 2(k+p)\phi\tau_a[\phi]$$
$$-\frac{1}{2}[\alpha+\mu(k^2-l^2)+\nu(p^2-q^2)]\tau_a[\phi] = 0 \tag{3.22}$$

Şimdi yukarıdaki sonuçları kullanarak aşağıdakileri ayrıştırıyoruz.

$$\phi^2 R^a{}_b\wedge{}^*e_a{}^b = \phi^2 R^a{}_b(\omega)\wedge{}^*e_a{}^b + 4(k+p)\phi d\phi\wedge{}^*d\phi \tag{3.23}$$

$$Q^a{}_b\wedge{}^*Q^b{}_a = 2(k^2-l^2)d\phi\wedge{}^*d\phi \tag{3.24}$$

$$T^a\wedge{}^*T_a = (p^2-q^2)d\phi\wedge{}^*d\phi \tag{3.25}$$

Bu sonuçları (3.4) denklemine yerleştirmek Levi-Civita bağlantılı yeni lagranja sebep olur.

$$L = \frac{1}{2}\phi^2 R^a{}_b(\omega)\wedge{}^*e_a{}^b + \frac{\beta}{2}\phi^{2*}1 + \lambda_a T^a + \rho^a{}_b\wedge Q^b{}_a$$
$$+\{2(k+p)\phi + \frac{1}{2}[\alpha+\mu(k^2-l^2)+\nu(p^2-q^2)]\}d\phi\wedge{}^*d\phi \tag{3.26}$$

Biz aynı zamanda yeni lagranjın (3.21) ve (3.22)'daki alan denklemlerini verdiğini de doğruladık. Nonmetrisiti ile burulma tensörlerinin nasıl skaler alanın kinetik terimlerine sebep olduğu ve sonra skaler alanın gerilme formlarını yeniden ölçeklediği ve son olarak $k+p \neq 0$ için yeni bir tür skaler etkileşmesi ürettiği gözlemine işaret ediyoruz. Ayrıca, aşağıdaki potansiyel tanımları altında bizim modelimizin [Grumiller ve ark.,2002] makalesinde sadece Riemannsal geometri terimleriyle formüllenen modelin bir altdurumu olduğuna dikkat ediyoruz.

$$U(X) = -\frac{k+p}{\sqrt{X}} - \frac{\alpha + \mu(k^2 - l^2) + \nu(p^2 - q^2)}{4X} \tag{3.27}$$

$$V(X) = \frac{\beta}{2} X \tag{3.28}$$

Burada bizim dilaton onlarınkisiyle $\phi^2 = X$ vasıtasıyla ilişkilidir. İlaveten k, l, p, q, α, β, μ, ν parametrlerinin sabit olmasından ziyade dilaton alanının keyfi fonksiyonları olmalarına izin vererek bizim modelimiz genişletilebilecek gibi gözükmektedir. Sonra,(3.26) lagranjı esasında [Grumiller ve ark., 2002] makalesindeki (1.1) lagranjına eşdeğer olacaktır. Dilaton kütleçekim teorileri ve onların karadelik fiziği ile sicim modellerine uygulamalarıyla ilgili daha fazlası için [Witten 1991]-[de Alfaro ve ark.,] çalışmalarına başvurulabilir.

3.3 Çözümler Üzerine Tartışma

Model sekiz reel parametreye ($\alpha, \beta, \mu, \nu, k, l, p, q$) bağlıdır ve [Dereli ve ark.,1994] makalesinden daha geneldir. İlk olarak statik çözümler araştırıyoruz.

$$e^0 = F(x)dt, \quad e^1 = \tfrac{dx}{F(x)}, \quad \phi = \phi(x)$$

Bu durumda, (3.21) denklemi ile (3.22) denkleminin sıfırıncı ve birinci bileşenleri, sırasıyla;

$$\begin{aligned} &\phi(F^2)'' + \{2(k+p)(\phi^2)' + [\alpha + \mu(k^2 - l^2) \\ &+\nu(p^2 - q^2)]\phi'\}(F^2)' + \{2(k+p)(\phi')^2 + 4(k+p)\phi\phi'' \\ &+[\alpha + \mu(k^2 - l^2) + \nu(p^2 - q^2)]\phi''\}F^2 = \beta\phi \end{aligned} \tag{3.29}$$

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2}(\phi^2)'(F^2)' + [2(\phi')^2 + 2\phi\phi'']F^2 - \{2(k+p)\phi + \\ &\frac{1}{2}[\alpha + \mu(k^2 - l^2) + \nu(p^2 - q^2)]\}(\phi')^2 F^2 = \frac{\beta}{2}\phi^2 \end{aligned} \tag{3.30}$$

$$\frac{1}{2}(\phi^2)'(F^2)' + \{2(k+p)\phi + \frac{1}{2}[\alpha + \mu(k^2 - l^2) + \nu(p^2 - q^2)]\}(\phi')^2 F^2 = \frac{\beta}{2}\phi^2 \quad (3.31)$$

denklemlerini verir. Burada üssü x'e göre türevi gösterir. İlk olarak (3.30) denklemi ile (3.31) denklemi toplanır.

$$(\phi')^2 F^2 = \frac{\beta}{2}\phi^2 - \phi\phi'' F^2 - \frac{1}{2}(\phi^2)'(F^2)' \quad (3.32)$$

Ardından bu sonuç (3.29) denklemine yerleştirilerek

$$\phi(F^2)'' + \{(k+p)(\phi^2)' + [\alpha + \mu(k^2 - l^2) + \nu(p^2 - q^2)]\phi'\}(F^2)'$$
$$+\{2(k+p)\phi\phi'' + [\alpha + \mu(k^2 - l^2) + \nu(p^2 - q^2)]\phi''\}F^2 = \beta\phi \quad (3.33)$$

elde edilir. Bu bizim en genel denklemimizdir ve genel olarak çözmek imkansız gözükmektedir. Bu nedenle bazı özel durumlara bakıyoruz.

$$\textit{Özel Durum1}: \quad k+p=0 \quad ve \quad \alpha + \mu(k^2 - l^2) + \nu(p^2 - q^2) = 4$$

Burada ilk olarak ϕ de lineer olmayan bütün terimleri düşürüyoruz ve çözüm buluyoruz.

$$\phi(x) = e^{c_1 x}, \quad F^2(x) = \frac{\beta + 4c_1^2 c_2 \phi^{-2}(x)}{4c_1^2}$$

Burada c_1, c_2 sabitlerdir. Bu dilaton karadelik olarak bilinir [Witten 1991]. Parametreler üzerindeki kısıtlamalarımız [Dereli ve ark.,1994] makalesinde tartışılan ilgili durumları ve daha fazlasını içerir.

$$\textit{Özel Durum 2}: \quad k+p=0 \quad ve \quad F^2 = 1$$

Bu durumu yorumlarken dikkat edilmelidir. İlk bakışta Minkowski uzay-zamanında çalışıyoruz gibi gözüküyor. Eğer teoriyi (3.26) lagranjındaki gibi nonmetrisiti ile burulmayı düşünmeksizin sadece Levi-Civita terimleriyle yazarsak bu doğrudur. Fakat nonmetrisiti ile burulmayı hesaba alırsak durum oldukça farklı olur. Bu durumda, Riemannsal eğrilik sıfır olmasına rağmen, Riemannsal olmayan eğrilik (3.15) denkleminden dolayı genel olarak $l \neq 0$ olduğu müddetçe sıfır değildir ve böylece biz hala eğrilikli, burulmalı ve nonmetrisitili bir uzay-zamanındayızdır. Teknik olarak konuşmak gerekirse; *k=l=p=q=0*, çiftlenim limitinde deneme parçacıklarının dünya çizgileri jeodeziklerle örtüşürken, sıfırdan farklı k,l,p,q sabitleri durumlarında tüm bağlantının otoparalelleri jeodeziklerden saparlar ve sonrasında bizde bu sapmaları nonmetrisiti ve burulma olarak yorumlarız. Şimdi çözümü yazıyoruz

$$\phi(x) = c_1 e^{x\sqrt{-\frac{\beta}{c_3}}} + c_2 e^{-x\sqrt{-\frac{\beta}{c_3}}}, \quad F^2(x) = 1, \quad . \tag{3.34}$$

Burada c_1 ve c_2 keyfi sabitler ve $c_3 = \alpha + \mu(k^2 - l^2) + \nu(l^2 - q^2)$. Eğer β ve c_3 aynı işaretliyse çözümün periyodik olduğunu, zıt işaretli olduklarında çözümün hiperbolik olduğunun gözlemek ilginçtir.

$$\textit{Özel Durum 3}: \quad \alpha + \mu(k^2 - l^2) + \nu(p^2 - q^2) = 0 \quad ve \quad F^2 = 1$$

Bu durumda şu çözümü elde ederiz

$$\phi(x) = -\frac{1}{k+p} + c_1 e^{x\sqrt{-\frac{\beta}{2}}} + c_2 e^{-x\sqrt{\frac{-\beta}{2}}}, \quad F^2(x) = 1 \quad . \tag{3.35}$$

Burada c_1, c_2 keyfi sabitlerdir. Çözümün $k + p$'ye hassas biçimde bağlı olduğuna ve periyodikliğin β'nın işaretiyle belirlendiğine işaret ediyoruz. Burada Riemannsal manada yine Minkowski uzay-zamanındayken Riemannsal olmayan manada nonmetrisitili ve burulmalı eğri bir uzay-zamandayızıdır. Son olarak kozmolojik türde çözümler deniyoruz:

$$e^0 = dt, \quad e^1 = F(x)dx, \quad \phi = \phi(t)$$

Bu kez (3.21) denklemi, (3.22) denkleminin sıfırıncı ve birinci bileşenleri aşağıdaki denklemleri verirler

$$\begin{aligned} &2\phi\ddot{F} + \{4(k+p)\phi\dot{\phi} + [\alpha + \mu(k^2 - l^2) + \nu(p^2 - q^2)]\dot{\phi}\}\dot{F} + \{4(k+p)\phi\ddot{\phi} \\ &+[\alpha + \mu(k^2 - l^2) + \nu(p^2 - q^2)]\ddot{\phi} + 2(k+p)(\dot{\phi})^2 + \beta\phi\}F = 0 \end{aligned} \tag{3.36}$$

$$2\phi\dot{\phi}\dot{F} + \{2(k+p)\phi + \frac{1}{2}[\alpha + \mu(k^2 - l^2) + \nu(p^2 - q^2)]\}(\dot{\phi})^2 F + \frac{\beta}{2}\phi^2 F = 0 \tag{3.37}$$

$$2\phi\ddot{\phi} + 2(\dot{\phi})^2 - \{2(k+p)\phi + \frac{1}{2}[\alpha + \mu(k^2 - l^2) + \nu(p^2 - q^2)]\}(\dot{\phi})^2 + \frac{\beta}{2}\phi^2 = 0 \tag{3.38}$$

Burada nokta t'ye göre türev tanımlar. (3.38) denklemi F ile çarpıldıktan sonra (3.37) ve (3.38)'daki denklemlerinin toplanması

$$\phi\dot{\phi}\dot{F} = -[\phi\ddot{\phi} + (\dot{\phi})^2 + \frac{\beta}{2}\phi^2]F \tag{3.39}$$

ifadesini üretir ve sonrasında bunun (3.36) denklemine yerleştirilmesi

$$\begin{aligned} &2\phi\ddot{F} + [\alpha + \mu(k^2 - l^2) + \nu(p^2 - q^2)]\dot{\phi}\dot{F} + \{[\alpha + \mu(k^2 - l^2) \\ &+\nu(p^2 - q^2)]\ddot{\phi} - 2(k+p)(\dot{\phi})^2 - 2(k+p)\beta\phi^2 + \beta\phi\}F = 0 \end{aligned} \tag{3.40}$$

sonucunu verir. Eğer $\alpha + \mu(k^2 - l^2) + \nu(p^2 - q^2) = 6$ alırsak, sonrasında

$$\phi(t) = \frac{\beta}{4(k+p)}t^2, \quad F(t) = c\frac{e^{\frac{1}{4}\beta t^2}}{t^3} \tag{3.41}$$

elde ederiz. Burada c intergal sabitidir. Son olarak, $k + p = 0$ için enflasyon türü çözüme sahip oluruz

$$\phi(t) = e^{-\frac{c_1}{2}t}, \quad F(t) = e^{c_1 t} \quad .$$

Burada;

$$c_1 = \pm\sqrt{\frac{4\beta}{\alpha+\mu(k^2-l^2)+\nu(k^2-q^2)-8}}$$

3.4 Modele Spinör Çiftlenimleri Üzerinde Tartışma

Bu bölümde dilaton alanına yeni spinör çiftlenimlerinin olup olmadığını araştırıyoruz. Clifford cebirinin $Cl_{1,1}$ üreticileri olarak aşağıdaki Dirac matristlerini kullanıyoruz.

$$\gamma_0 = i\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad \gamma_1 = i\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \tag{3.42}$$

Bunlar antikomütasyon bağınıtısını

$$\{\gamma_a, \gamma_b\} = 2\eta_{ab} \tag{3.43}$$

ve komütasyon bağıntısını

$$[\gamma_a, \gamma_b] = 4\sigma_{ab} \tag{3.44}$$

sağlar. Burada σ_{ab} Lorentz grubundan üreticileridir. $Cl_{1,1}$ cebirinin 2×2 matris temsilini kullandığımız için Dirac spinörü ψ'yi 2-bileşenli kompleks değerli sütun matrisi olarak temsil ediyoruz. ψ'nin kovaryant dış türevi açıkça

$$D\psi = d\psi + \frac{1}{2}\Lambda^{[ab]}\sigma_{ab}\psi + \frac{1}{4}Q\psi \tag{3.45}$$

biçiminde yazılır [Adak ve ark.,2003]. Burada $Q = Q^a{}_a$ Weyl 1-formudur. Son olarak; spinör demetinin eğriliği

$$D(D\psi) = \frac{1}{2}R^{[ab]}\sigma_{ab}\psi - \frac{1}{2}Q^a{}_c \wedge Q^{cb}\sigma_{ab}\psi + \frac{1}{4}dQ\psi \tag{3.46}$$

ile verilir. Weyl geometrisinde, yani $Q_{ab} = \eta_{ab}d\psi$ burada ψ herhangi bir skaler alan, son iki terimi yok olur. Dirac lagranj 2-formu $Cl_{1,1}$ değerli 1-formlar $\gamma = \gamma^a e_a$ ve Compton dalga boyunun tersi $M = \frac{mc}{\hbar}$ terimleriyle şöyle yazılır

$$L_D = \frac{i}{2}(\overline{\psi}{}^*\gamma \wedge D\psi + \overline{D\psi} \wedge {}^*\gamma\psi) + iM\overline{\psi}\psi{}^*1 \quad . \tag{3.47}$$

Burada; bir spinörün Dirac eşleniği şöyle tanımlanıyor; $\overline{\psi} = \psi^\dagger\gamma_0$. $\gamma_5 = \gamma_0\gamma_1$ tanımıyla beraber $\gamma_5\gamma_a + \gamma_a\gamma_5 = 0$ olduğu için $\Lambda^a{}_b$'ye göre varyasyon (3.5) denklemine hiçbir katkı vermezken e^a varyasyonundan sonra (3.7) denklemine aşağıdaki katkı elde edilir.

$$\tau_a[\psi] = \frac{i}{2}[\overline{\psi}(\imath_a{}^*\gamma) \wedge D\psi - \overline{D\psi} \wedge (\imath_a{}^*\gamma)\psi] + iM\overline{\psi}\psi{}^*e_a \tag{3.48}$$

Son olarak, $\overline{\psi}$ varyasyonu Dirac denklemini verir

$${}^*\gamma \wedge D\psi + M\psi{}^*1 - \frac{1}{2}{}^*\gamma \wedge T\psi - \frac{3}{4}{}^*\gamma \wedge Q\psi - \frac{1}{2}\gamma_a Q^{ab} \wedge {}^*e_b\psi = 0 \quad . \tag{3.49}$$

Burada $T = \imath_a T^a$. (3.14) sonucunu (3.45) denklemine yerleştirdiğimizde spinörün ayrışmış kovaryant türevini elde ederiz

$$D\psi = D(\omega)\psi - \frac{1}{2}[(k+p)^*d\phi + (l+q)d\phi]\gamma_5\psi + \frac{1}{2}(kd\phi + l^*d\phi)\psi \quad . \tag{3.50}$$

Bunun (3.47) denklemine yerleştirilmesi

$$L_D = \frac{i}{2}(\overline{\psi}{}^*\gamma \wedge D(\omega)\psi + \overline{D(\omega)\psi} \wedge {}^*\gamma\psi) + iM\overline{\psi}\psi{}^*1 \tag{3.51}$$

denklemine sebep olur. Bu da aşağıdaki varyasyonel alan denklemine neden olur

$${}^*\gamma \wedge D(\omega)\psi + M\psi{}^*1 = 0 \quad . \tag{3.52}$$

(3.50) denklemi (3.49) denklemine konduğunda bu denklemin elde edildiğini de doğruladık. Böylece, bu modelde nonmetrisiti ile burulmanın madde-dialton çiftlenimi yorumlarının herhangi bir yeni spinör-dilaton çiftlenimi üretmediğini gösterdik.

Bölüm 4

SONUÇLAR

4.1 Sonuçlar

Dereli ve arkadaşının 1994 tarihli makalesinde yazarlar 2-boyutlu dilaton kütleçekimi teorisi geliştirilmiştir. Teorilerinde sıfır burulma fakat iki parametreli non-metrisiti tarafından belirlenen metrik uyumlu olmayan bağlantı vardır. Biz ilave iki parametre tarafından belirlenen sıfır olmayan burulma ekleyerek o çalışmayı genelledik. Lagrangj çarpanlarını alan denklemlerinden cebirsel olarak çözdükten sonra bazı statik ve kozmolojik türde tam çözümler hakkında tartışma yaptık. Bu tür modellerin ilave klasik çözümleri için köşegen ayardan farklı bir ayarın kullanıldığı [Grumiller ve ark.,2002] makalesine bakılabilir. Temel olarak, modele bu tür burulma katkısı basit bir şekilde çiftlenim sabitlerini kaydırır. Ayrıca, Riemannsal olmayan formülasyon tarafından ortaya çıkarılan dilaton çiftlenimlerinin biçimini görmek için teoriyi Levi-Civita bağlantısı cinsinden yeniden yazdık. Böylece deneme parçacıklarının dünya çizgilerinin Levi-Civita bağlantısının jeodeziklerinden sapmalarını non-metrisiti ve burulma ilişkili etkiler olarak yorumladık. Son olarak modele muhtemel spinör çiftlenimlerini irdeledik ve iki boyutta Dirac spinörlerine yeni dilaton çiftlenimlerinin olmadığını bulduk. İki boyutta spinörlere yeni dilaton çiftlenimleriyle ilgilenen kişiler Kaluza-Klein boyut indirme yönteminin kullanıldığı [Adak ve ark.,2004] makalesine müracat etsinler.

Kaynakça

Adak,M.,2006. Nonmetricity and Torsion Induced by Dilaton Gravity in Two Timension, Gen.Rel.Grav.38,971-980.

Adak,M.,Dereli,T.,2004. Spinor Couplings to Dilaton Gravity Induced by The Dimensional Reduction of Topologically Massive Gravity Class.Quant.Grav., 21,2275-2280.

Adak,M.,Dereli,T.,Ryder,L.H.,2003. Dirac Equation in Spacetimes with Torsion, Int.J.ModPhys.D12,145-156.

Cavaglia,M.,1999. Geometrodynamical Formulation of Two-Dimensional Dilaton Gravity, Physical.Review D59.,084011.

Dereli,T.,Tucker,R.W.,1982. A Spin Gauge Theory Model with Kaluza-Klein Symmetry, Nuclear Physical, B 209, 217-230.

Dereli,T.,Tucker,R.W.,1994. Non Metricity Induced by Dilaton Gravity in Two Dimensions, Class. Quan. Grav., 11, 2575-2583.

Dereli,T.,Önder,M.,Schray,J.,Tucker,R.W.,and Wang,C.,1996. Non-Riemannian Gravity and the Einstein-Proca system, Class.Quantum Grav.,13,L103-L109.

de Alfaro,V.,Filippov,A.T., Integrable Low Dimensional Models for Black Holes and Cosmologies from High Dimensional Theories

Grumiller,D.,Kummer,W.,Vassilevich,D.V.,2002. Dilaton Gravity in Two Dimensions, Physics Reports,369,327-430.

Grumiller,D.,Kummer,W.,Vassilevich,D.V.,2003. Virtual Black Holes in Generalized Dilaton Theories (and Their Special Role in String Gravity), European Physical Journal C30,135-143.

Katanaev,M.O.,2002. Effective Action for Scalar Fields in Two-Dimensional Gravity, Annals Physical,296,1-50.

Obukhov,Y.N.,2004. Two-dimensional Metric-Affine Gravity, Physical Review D69,064009.

Witten,E.,1991. String theory and black holes, Physical Review D44,314-324.