

PAMUKKALE ÜNİVERSİTESİ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

**MINKOWSKI 4-UZAYINDA JET YAPILAR
VE MEKANİK SİSTEMLER**

**YÜKSEK LİSANS TEZİ
Simge DAĞLI**

Anabilim Dalı : Matematik Anabilim Dalı

Programı : Geometri

Tez Danışmanı: Yrd. Doç. Dr. Cansel AYCAN

Haziran-2012

YÜKSEK LİSANS TEZ ONAY FORMU

Pamukkale Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü 091441010 nolu öğrencisi Simge Dağlı tarafından hazırlanan “MINKOWSKI 4-UZAYINDA JET YAPILAR VE MEKANİK SİSTEMLER” başlıklı tez tarafımızdan okunmuş, kapsamı ve niteliği açısından bir Yüksek Lisans tezi olarak kabul edilmiştir.

Jüri Üyesi :
(Jüri Başkanı)

Prof. Dr. Mustafa Kemal SAĞEL (MEHMETAKİFÜ)

Jüri Üyesi :
(Tez Danışmanı)

Yrd. Doç. Dr. Cansel AYCAN (PAÜ)

Jüri Üyesi :

Yrd. Doç. Dr. Şevket CİVELEK (PAÜ)

Pamukkale Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun 07/08/2012. tarih ve ...19/..8... sayılı kararıyla onaylanmıştır.


Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü
Prof. Dr. Nuri KOLSUZ

Bu tezin tasarımı, hazırlanması, yürütülmesi, araştırmalarının yapılması ve bulgularının analizlerinde bilimsel etiğe ve akademik kurallara özenle riayet edildiğini; bu çalışmanın doğrudan birincil ürünü olmayan bulguların, verilerin ve materyallerin bilimsel etiğe uygun olarak kaynak gösterildiğini ve alıntı yapılan çalışmalara atfedildiğine beyan ederim.

İmza

:

Öđrenci Adı Soyadı : Simge DAĞLI

ÖNSÖZ

Bu tez çalışması, Pamukkale Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı Yüksek Lisans programında yapılmıştır.

Bu çalışmada, diferansiyel geometrik kavramlardan jet demet yapıları ele alınarak, son yıllarda matematiksel fizikte fiziksel uygulamaları açısından önem kazanan Minkowski uzayı üzerinde, geometrik tekniklerin kullanımı açısından özel bir konu olan analitik mekanikteki Lagrangian ve Hamiltonian enerji sistemleri incelenmiştir.

Bu çalışmaya başlamamda bana katkıda bulunan, yardım ve eleştirilerini esirgemeyen değerli hocalarım; danışmanım Y.Doç. Dr. Cansel AYCAN, Y.Doç. Dr. Şevket CİVELEK, Y.Doç. Dr. Mustafa AŞCI, Doç. Dr. Ayşegül DAŞCIOĞLU'na teşekkürü bir borç bilirim. Ayrıca çalışmalarım esnasında benden maddi ve manevi desteklerini esirgemeyen ailem ve değerli arkadaşlarıma teşekkürlerimi sunarım.

Haziran, 2012

Simge DAĞLI

İÇİNDEKİLER

Sayfa

ÖZET	vii
SUMMARY	viii
1. GİRİŞ	1
1.1 HERMANN MINKOWSKI.....	1
1.2 TARİHÇE	1
1.3 TEMEL KAVRAMLAR	5
1.3.1 Demet Yapıları	5
1.3.2 Euler-Lagrange ve Hamilton sistemler	7
1.3.3 Lorentz- Minkowski Uzay	12
2. MINKOWSKI 4-UZAYINDA EULER-LAGRANGE MEKANİK SİSTEMLER	15
2.1 Euler-Lagrange Sistemler	15
2.2 Uygulamalar	30
2.2.1 Helis Örneği	30
2.2.2 Çember Örneği	38
3. MINKOWSKI 4-UZAYINDA HAMILTON MEKANİK SİSTEMLER	44
3.1 Hamilton Sistemler	44
3.2 Uygulamalar	47
3.2.1 Helis Örneği	47
3.2.2 Çember Örneği	52
4.SONUÇ VE DEĞERLENDİRME	56
KAYNAKLAR	59

ŞEKİL LİSTESİ

Şekiller

1. Işık koni.....	2
2. Time koni	14
3. Helis eğrisi.....	31
4. Çember eğrileri	38

SEMBOL LİSTESİ

E_1^4	:Minkowski 4-uzayı
(E, π, M)	:Demet
J^1E	:Birinci Jet Demet
$J^1E_1^4$: Minkowski Birinci Jet Demet
TM	:Tanjant Demet
T^*M	:Kotanjant Demet
L	: Lagrange Enerji Fonksiyonu
H	: Hamilton Enerji Fonksiyonu

ÖZET

MINKOWSKI 4-UZAYINDA MEKANİK SİSTEMLER

Bu çalışma dört bölümden oluşmaktadır.

İlk bölümde, konunun kısa bir tarihçesi sunulmuştur. Bu kısımda öncelikle Minkowski'nin hayatı, çalışmaları ve bu çalışmaların genel özellikleri anlatılmıştır. Daha sonra Minkowski uzay-zaman konusunun geometrik ve fiziksel özellikleri sunulmuştur. Ayrıca, çalışmamızın sonraki bölümlerinde kullanılacak olan jet demet yapılarının elde edilişi ve geometrik özellikleri de incelenmiştir.

İkinci bölümde ise Minkowski 4-uzayı üzerinde jet demet yapısı kurulmuştur. Bu yapının anlaşılabilmesi için gerekli olan tüm geometrik özellikler ayrı ayrı incelenmiştir.

Üçüncü bölümde, ikinci bölümde elde edilen Minkowski jet demet yapısı üzerinde Lagrange mekanik sistemleri kurulmuştur. Bu sistemden elde edilen diferansiyel denklemler çözümlenerek Lagrange enerji denklemi üretilmiştir. Daha sonra fiziksel yorumun yapılabilmesi için bu bölümde yapılan çalışmaya örnekler verilmiştir. Bu mekanik örneklerin çözümünde, enerji denklemlerinin çözümü yapılmış, gerekli grafikler çizilmiş ve çözüm fonksiyonunun fiziksel yorumlarına değinilmiştir.

Dördüncü bölümde ise, ikinci bölümde elde edilen Minkowski jet demet yapısı için Hamilton mekanik sistemleri kurulmuştur. Burada elde edilen diferansiyel denklemler çözümlenerek Hamilton enerji denklemlerine ulaşılmıştır. Böylece, bu örnekler yardımıyla Hamilton enerji yapıları hakkında geometrik ve fiziksel yorum yapılabilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Minkowski uzay-zaman, jet demet yapısı, Euler-Lagrange enerji sistemleri, Hamilton enerji sistemleri.

SUMMARY

MECHANICAL SYSTEMS ON MINKOWSKI 4 -SPACE

This study consist of four sections.

In the first section, the short history of this subject is presented. In this section firstly, Minkowski's life time, studies and the general properties of this studies have been mentioned. Then, the physical and geometric properties of Minkowski space time have been given. In addition to, definitions and geometrical properties of jet bundle structures which will be used on following sections are examined.

In the second section, the jet bundle structure is set up on Minkowski 4-space. For understanding this mathematical structure, all required geometrical properties are investigated separately.

In the third section, Lagrangian mechanical systems is obtained for Minkowski jet bundle which is denoted in the second section. The Lagrangian energy function is produced with solving differential equations which is obtained from this system. Then, some examples are given for physical comment. In solving of these mechanic examples, the solution of energy equations have been obtained, geometrical tables are drawn and the physical comments of this solving function are mentioned.

In the fourth section, Hamiltonian mechanical systems is obtained for Minkowski jet bundle which is denoted in the second section. The Hamiltonian energy function is produced with solving calculated differential equations which is obtained in this section. So, the geometric and physical comments can be explained about the Hamiltonian structure with this examples.

Keywords: Minkowski space-time, jet bundle structure, Euler-Lagrange energy systems, Hamilton energy systems.

1 GİRİŞ

1.1 HERMANN MINKOWSKI



Litvanya'lı bir matematikçi olan Hermann Minkowski (1864 - 1909), 1864 yılında Aleksotas'da doğdu. 1896 ile 1902 yılları arasında Zürich Federal Politeknik Okulunda ve ölünceye kadar da Göttingen Üniversitesinde profesörlük yaptı. 1882 yılında, tam katsayılı ikinci dereceden şekiller kuramının temelleri üstüne inceleme yazısıyla Fen Akademisinin büyük matematik ödülünü aldı. Euclides olmayan geometriyle karıştırılmaması gereken bir sayılar geometrisi kurarak sayılar kuramına bazı geometrik kavramlar getirdi. Sonunda özel bir metrikle donatılmış dört boyutlu özel bir uzaya başvurarak, Einstein'in kısıtlı bağlılık kuramının, bugün klasik sayılan geometrik bir yorumunu verdi. Buna Minkowski uzay zamanı denir. 'Sayılar geometrisi' isimli kitabı, 1896 yılında basıldı. 1907 yılında 'Diophantus Yaklaşımları' adlı eseri yayınladı. 'Çalışmalar' adlı yapıtının da 1911 yılında çıktığı bilinmektedir. Kendisi, 1909 yılında Göttingen'de öldü.

1.2 TARİHÇE

Tarih boyunca, bilimin temel problemi, mümkün olduğu kadar doğayı iyi bir şekilde anlayabilmek ve açıklayabilmektir. Bunu başarabilmesi içinde elinde yeteri kadar matematiksel donanım mevcut olması gerekmektedir. Boyut ve ekstra boyut kavramı temel olarak, zorunluluk veya keyfi uygulamalar sonucu ortaya çıkan fiziksel niceliklerdir. Minkowski uzay-zaman geometrisinin doğum yılı 1905 olarak bilinir. 1909 yılında, Minkowski, Maxwell'in Elektrodinamiği ile Einstein'in Özel Rölativite teorilerinden ilham alarak, doğanın, bildiğimiz üç boyutuna ek olarak dördüncü bir boyut yardımıyla tasvir edilebileceğini belirtmiştir. Nitekim Einstein 1915 yılında yayınladığı Genel Rölativite Teorisiyle, Minkowski'nin bu iddiasını genelleştirerek uzay-zaman kavramı ile doğayı 4- boyutlu (3-uzay + 1-zaman) tasvir etmiştir. Böylece Minkowski ve Einstein tarafından başlatılan boyut sayısı ile oynama ile evrenimizi anlama fikri günümüze kadar

artan bir ivme ile fizikçiler tarafından farklı teorilerde farklı boyut sayısı ile karşımıza çıkmaktadır. Bu ise fiziksel olayları belirli bazı ilkelerin çerçevesi içinde kesin bir geometrik terminoloji yardımıyla incelemeye uygun ve toplayıcı, birleştirici matematik bir modelden başka bir şey değildir. Bu geometrik modele göre, göz önüne alınan dört boyutlu uzay (yani bu uzay - zaman) fiziksel olaylara yataklık eden bir katman olarak düşünülebilir.

Einstein'ın 1905 yılında yayınladığı özel görelilik kuramına göre:

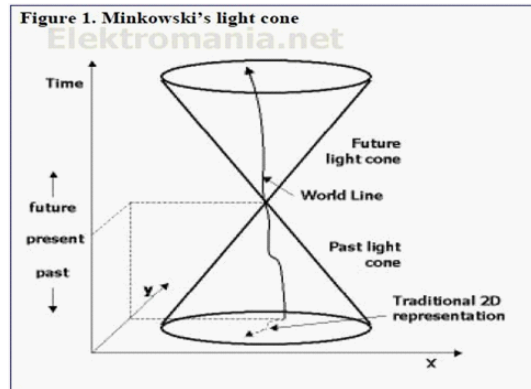
1. Fizik yasaları her türlü referans noktasından bağımsızdır.
2. Işık hızı uzayda sabittir ve gözlemi yapanların hızından bağımsızdır.

İlkine göre evrenin her yerinde fizik yasaları aynıdır. İkincisine göre hızımız ne olursa olsun ışık hızını hep aynı ölçersiniz. Bu durumda diyebiliriz ki ışığın hızının bizim hızımızdan etkilenmemesi insan sağduyusu ile bağdaşmamaktadır. Bu bir yanılsamadır.

Minkowski uzayı özel bir metrik sayesinde geliştirilmiş olan bir uzay biçimidir. Minkowski uzay-zamanı olarak anılmasındaki en büyük etken ise klasik 3 boyutlu oluşan ve her türlü vektörün boyunu bu üç boyutta tanımlayan klasik uzay kavramına bir de zaman eklemesiyle ilişkilidir. Daha anlaşılır olacak olursa bu uzayda bir vektörün boyu yalnızca x,y,z 'nin kendisi ile belirlenmez, buna bir de $c.t$ denilen ve ışığın aldığı yol da eklenir.[6]

Minkowski uzayının pek çok yararı olmuştur. Özel göreliliğe göre ışık, bir koni biçiminde yol alacaktır. O nedenle bilgi dediğimiz ve en hızlı ışıkla beraber aktarılan her türlü şey bu koninin içinde yer alacaktır. Ancak genel görelilikte bu koni doğal formunu kaybederek bir hiperbolü andıracak bir biçimde bir koni oluşturacaktır.

Aşağıdaki şekilde altta ve üstte, görebileceğiniz iki koni var. Bu iki koniden üstteki, a olayının geleceğinde olması mümkün olayları, alttaki koni ise, a olayının geçmişinde olması mümkün olmuş olayları gösteriyor. Tam kesişim noktaları ise a olayını temsil ediyor.



şekil 1

Yukarıdaki koninin kenarları ışık hızını temsil ediyor, herhangi bir şey ışık hızını geçemeyeceği için, geleceğindeki ihtimaller o koninin dışına çıkamıyor. Yani o koninin dışında olan hiç bir şeyin bizim geleceğimizde yeri yok denilebilir.

Bilmekteyiz ki objeler uzay içinde ilerlerler, ama aynı zamanda zaman içinde de ilerlerler. Hiç bir şekilde hareket etmeseniz bile, içinde bulunduğunuz ortamda mevcut objelerle birlikte, zaman içinde hareket halindesiniz. Uzay içinde hareket etmeyebilirsiniz ama, her zaman, zaman içinde hareket etmek zorundasınız. O halde zaman kullanılan bir değerdir. Her tepkileşmeye, her sürece zaman da katılır. Onsuz hiçbir şey gerçekleşmez. Zaman ayrıca uzay dokusunun öğelerinden biridir. Zamanı ışık hızına indekslediğimiz zaman ortaya ilginç gözlemler çıkmaktadır. Zaman görelilik kazanmakta ve uzay genişlemekte ve daralmaktadır. Hareket ne kadar ışık hızına yakınsa, uzay o kadar genişlemektedir.

Ayrıca; 1872’de F.Klein, ’Erlanger Programı’ olarak bilinen çalışmasında geometrilerin grup etkisi altında incelenebileceğini ifade etmiştir. Bu bağlamda Öklid geometrisi, Öklid grubu, Afin geometrisi, Afin grubu altında, nokta, eğri ve yüzeylerin ortogonal ve afin dönüşümler altında korunan özelliklerinin, invaryantlarının araştırılabileceğini ve önemini belirtmiştir. Bu durum F.Klein’in ifade ettiği anlamda, Minkowski uzay-zaman geometrisini ortaya çıkaran grup etkisi altında nokta, eğri ve yüzeylerin invaryantlarını bulma problemini ortaya çıkarmıştır. Diğer taraftan bu geometri için matematiksel ve fiziksel yapılara ait çalışmalar da yapılmıştır. $O(3,1)$ olarak incelenen ortogonal grup, Minkowski uzay-zaman geometrisini etkileyen grup anlamında alınır. Bu grup G.L. Naber’ in ’The Geometry of Minkowski Space-time’ kitabında Genel Lorentz Grubu olarak adlandırılmıştır. İnvaryantlar teorisi ile ilgili çalışmalara ise 1850-1870 yılları arasında başlanmıştır. 1890 yılında Hilbert, invaryantlar teorisi ile ilgili temel çalışmalar yapmıştır. İnvaryantlara ait bazı farklı çalışmalar J.A.Dieudonne’m ’Invariant Theory’, D.Hilbert’in ’Theory Of Algebraic Invariants’, D.Khadjiev’in ’An Application Of Invariant Theory To Differential Geometry’, T.A.Springer’in ’Invariant Theory’, H.Weyl’in ’The Classical Groups, Their Invariants And Representations’ eserlerinde yer almaktadır. 1988 yılında D.Khadjiev kitabında ve R.Aripov makalelerinde Öklid grubu için noktaların üreteçleri yardımıyla denklik problemi ve yörünge problemini incelemiştir. [7, 13, 15]

Kuantum mekaniğinin temelleri ise 20. yüzyılın ilk yarısında Max Planck, Albert Einstein, Niels Bohr, Werner Heisenberg, Erwin Schrödinger, Max Born, John von Neumann, Paul Dirac, Wolfgang Pauli gibi bilim adamlarınca atılmıştır. Belirsizlik ilkesi, anti madde, Planck sabiti, kara cisim ışınımı, dalga kuramı, alan teorileri gibi kavram ve kuramlar bu alanda geliştirilmiş ve klasik fiziğin değiştiril-

mesine sebep olmuştur. Yanı sıra, Lagrange formalizmi 1788 yılında Fransız fizikçi Joseph Loise Lagrange tarafından oluşturulmuştur. Hamilton formalizmi ise 1833 yılında İrlandalı bir fizikçi olan William Rowan Hamilton tarafından oluşturulmuştur. Hamilton formalizmini anlamak Lagrange'a göre daha basittir. Çünkü $H=T+V$ yani toplam mekanik enerji kinetik enerji ile potansiyel enerjinin toplamıdır. [5] Toplam enerji de doğada daima korunur ve sabittir. Lagrangian ise enerji gibi korunumlu bir nicelik yerine varyasyon prensibi (en küçük etki prensibi) ile tanımlanır. Hamilton denklemleri 1. mertebeden diferansiyel denklemlerdir ve bu nedenle 2. dereceden Lagrange denklemlerini çözmekten daha kolaydır. Bir diğer avantajı ise sistem bir simetriye sahipse Hamiltonian de momentum korunumludur. Lagrangian' da ise momentum korunumlu olsada tüm genelleşmiş hızlar Lagrangian'da mevcuttur. Yani n boyutlu bir sistemin Lagrangianını çözmek zorunda kalırız. Lagrange ve Hamilton formalizmi 19. yy. sonlarından itibaren Klasik mekaniğin ve Kuantum mekaniği teorilerinin kullanımında ve daha detaylı anlaşılmasında temel bir yere sahiptir. 20. yy. da özellikle 1980 den sonra, simplektik manifold, simplektik topoloji ve kotanjant demet kavramlarının, özellikle bundle ve jet bundle yapıların matematikçiler tarafından kullanılmasının artması ile klasik mekanikte yapılan çalışmalar artmıştır.

Özellikle 1900'lu yıllarda yüksek mertebeden türevlenebilme ile ilgili çalışmaların başlaması ile jet manifold yapıları oluşturulmaya başlanmıştır. 1940'da F.Bopp, M.Ostrogransky ve B. Podolksy bu çalışmaları fiziğe uyarlamışlardır. Geometrik denkliklerin fiziğe uygulamaları, tanjant ve kotanjant demetlerin mekanikte çalışmaları ve alan teoride özel lif demetlerinde konneksiyonların kullanımı ile devam etmiştir. Bu çalışmalar Lagrangian ve Hamiltonian yapıların temelinde önemli yer tutar. 1950'de Ch. Ehresman ilk jet çalışmalarını başlatmıştır. 1980'li yıllarda D. J. Saunders, B.A.Kupperschmidt bu konu ile ilgili çalışmalara devam etmişlerdir. Bunun yanısıra 1970'lerde K. Yano, S. Ishihara ise tanjant ve kotanjant demetlerle ilgili önemli çalışmalarda bulunmuşlardır. Son zamanlarda G. Sardanashvily, bizim de bu çalışmamızda kullandığımız matematiğin teorik fiziğe uygulamaları üzerine çalışmalar yapmıştır. [8, 9, 10, 11, 12]

Bu bilgiler ışığında, C. Aycan jet demet yapıları üzerinde Lagrangian ve Hamiltonian sistemlerini doktora tezi olarak incelemiştir.[4] Bu çalışma ile yukarıda belirttiğimiz kitap ve makalelerin incelenmesi sonucunda, öncelikle Minkowski 3-uzayının jet yapıları oluşturulmuş, daha sonra benzer şekilde bu çalışmada Minkowski 4-uzayının jet demet yapıları da elde edilerek üzerindeki mekanik sistemler incelenmiştir. Ş. Civelek ise demet yapılarını tanıtarak, bu enerji denklemlerinin birinci mertebeden yükseltmelerini elde etmiştir. [21]

1.3 TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde, ileriki bölümlerde kullanılacak olan demet yapısı, mekanik sistemler, Lagrange ve Hamilton enerji denklemleri ile Minkowski uzayının temel yapıları tanımlanmıştır.

1.3.1 DEMET YAPILARI

Bu bölümde, diferansiyel geometride önemli bir yere sahip olan manifold yapısı üzerinde demet yapısının nasıl oluşturulacağı ele alınmıştır.

Tanım 1.1: E ve M , C^∞ -manifoldlar, $\pi : E \rightarrow M$ bir C^∞ -dönüşüm olsun. Eğer π bir örten submersion ise, (E, π, M) üçlüsüne bir *lifli manifold* denir. Bir (E, π, M) lifli manifoldunda, E' ye total uzay, M' ye taban uzay, π' ye projeksiyon ve her bir $p \in M$ noktası için E' nin $\pi^{-1}(p)$ altcümlesine de p üzerindeki *lif* denir.[4, 21]

Tanım 1.2: Bir lifli manifold (E, π, M) , $\text{boy}M = m$, $\text{boy}E = m + n$ ve $U \subset E$ açık alt cümlesi üzerinde bir koordinat sistemi,

$$y : U \rightarrow R^{m+n}$$

olsun.

$$pr_1 : R^{m+n} \rightarrow R^m$$

olmak üzere, $a, b \in U$ ve

$$\pi(a) = \pi(b) = p \Rightarrow pr_1(y(a)) = pr_1(y(b))$$

önermesi doğru ise, y ye bir *uyarlanmış koordinat sistemi* denir.[4]

Tanım 1.3: Bir lifli manifold (E, π, M) ve bir C^∞ -manifold F olmak üzere, eğer $t : E \rightarrow M \times F$ dönüşümü

$$pr_1 \circ t = \pi$$

olacak şekilde bir diffeomorfizm ise (F, t) ikilisine π' nin *model lifi* ve en azından bir trivializasyona sahip (E, π, M) lifli manifolduna da *trivial lifli manifold* denir.[4]

Tanım 1.4: Bir lifli manifold (E, π, M) ve $p \in M$ olsun. F_p bir C^∞ -manifold, p' nin bir komşuluğu W_p ve

$$t_p : \pi^{-1}(W_p) \rightarrow W_p \times F_p$$

dönüşümü $pr_1 \circ t_p = \pi|_{\pi^{-1}(W_p)}$ şartını sağlayan bir diffeomorfizm ise o zaman (W_p, t_p, F_p) üçlüsüne p ' nin komşuluğunda π ' nin bir lokal trivializasyonu ve taban uzayın her bir noktası civarında en az bir lokal trivializasyona sahip bir (E, π, M) lifli manifolduna da *lokal trivial lifli manifold* veya *demet* denir.[4]

Tanım 1.5: M ve N , C^∞ -manifolddlar, $\varphi : M \rightarrow N$ bir C^∞ -dönüşüm, $p \in M$ ve bir $V_p \in T_p M$ tanjant vektörüne p noktasında teğet olan bir eğri

$$\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow M$$

olsun. Bu durumda,

$$\varphi_*|_p(V_p) = W_{\varphi(p)} \in T_{\varphi(p)}N$$

tanjant vektörü, $\varphi \circ \alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow N$ eğrisine $\varphi(p)$ noktasında teğet olan bir tanjant vektör olmak üzere

$$\varphi_*|_p : T_p M \rightarrow T_{\varphi(p)}N$$

ile tanımlanan dönüşüme φ ' nin $p \in M$ noktasındaki *türev dönüşümü* denir.[4]

Bu durumda, $\pi_* : TE \rightarrow TM$, π ' nin türev dönüşümü olmak üzere,

$$\pi_* = (TE, \pi_*, TM)$$

üçlüsü bir demet olup; π_* ' ye π ' nin *tanjant demeti* denir.

Tanım 1.6: (E, π, M) bir lifli manifold ve $\varphi : M \rightarrow E$ bir dönüşüm olsun. Eğer $\pi \circ \varphi = id_M$ koşulu gerçekleşiyorsa, φ ' ye π ' nin bir *kesiti* denir ve π ' nin tüm kesitlerinin cümlesi $\Gamma(\pi)$ ile gösterilir.[4]

Tanım 1.7: (E, π, M) bir demet ve $p \in M$ olsun. $\phi, \varphi \in \Gamma_p(\pi)$ kesitleri, p noktasında $\phi(p) = \varphi(p)$ ve $\phi(p)$ civarında (x_i, u^α) uyarlanmış koordinat sisteminde

$$\frac{\partial \phi^\alpha}{\partial x_i}|_p = \frac{\partial \varphi^\alpha}{\partial x_i}|_p \quad 1 \leq i \leq m, 1 \leq \alpha \leq n$$

ise *birinci mertebeden denklem* olarak tanımlanır. ϕ ' yi içeren denklik sınıflarına ϕ ' nin p noktasındaki *birinci jeti* denir ve $J_p^1 \phi$ ile gösterilir.

Buna göre,

$$\{J_p^1 \phi : p \in M, \phi \in \Gamma_p(\pi)\} \quad (1.1)$$

cümlesine π demetinin *birinci jet manifoldu* denir ve $J^1 \pi$ ile gösterilir.[4, 19]

Tanım 1.8: (E, π, M) bir demet ve (U, u) , $u = (x_i, u^\alpha)$ olmak üzere E üzerinde uyarlanmış koordinat sistemi olsun. Bu durumda $J^1 \pi$ üzerinde (U^1, u^1) indirgenmiş koordinat sistemi,

$$U^1 = \{J_p^1 \phi : \phi(p) \in U\} \quad u^1 = (x_i, u^\alpha, u_i^\alpha)$$

ile tanımlı olup burada

$$x_i (J_p^1 \phi) = x_i(p), \quad u^\alpha (J_p^1 \phi) = u^\alpha (\phi(p))$$

ve yeni mn -adet $u_i^\alpha : U^1 \rightarrow R$ fonksiyonları ise,

$$u_i^\alpha (J_p^1 \phi) = \frac{\partial \varphi^\alpha}{\partial x_i} \Big|_p \quad (1.2)$$

şeklinde belirlidir. Bu şekilde ifade edilen yeni u_i^α koordinatları türevsel koordinatlar olarak adlandırılır.[4]

1.3.2 EULER-LAGRANGE VE HAMILTON DENKLEMLERİ

Bu bölümde Euler-Lagrange ve Hamilton denklemleri ile ilgili temel kavramlar verilecektir.

Tanım 1.9: $2m$ boyutlu bir manifold M ve M' nin tanjant demeti TM olsun. TM üzerinde $J^2 = 0$ eşitliğini sağlayan ve $rank J = m$ ile verilen $(1, 1)$ tipinden J tensör alanına *yaklaşık tanjant yapı* denir. M manifoldu üzerinde lokal koordinatlar (x_i) , $1 \leq i \leq m$ ve TM üzerinde lokal koordinatlar (x_i, \dot{x}_i) olmak üzere TM üzerinde J yaklaşık tanjant yapısı,

$$J \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \right) = \frac{\partial}{\partial \dot{x}_i}, \quad J \left(\frac{\partial}{\partial \dot{x}_i} \right) = 0 \quad (1.3)$$

olarak tanımlanır.[4]

Tanım 1.10: m boyutlu bir manifold M ve M' nin tanjant demeti TM olsun. TM üzerindeki bir vektör alanına M üzerinde *semispray* denir. Bu durumda ε semisprayı lokal olarak;

$$\varepsilon = \dot{x}_i \frac{\partial}{\partial x_i} + \varepsilon_i \frac{\partial}{\partial \dot{x}_i} \quad (1.4)$$

ile verilir. Burada ε_i fonksiyonları $\varepsilon_i = \varepsilon_i(x_i, \dot{x}_i)$ olarak tanımlıdır.

Bu durumda, M manifoldu üzerinde verilen bir σ eğrisi eğer ε' nin bir integral eğrisi oluyorsa, bu eğriye ε' nin bir çözümü denir.[4]

Tanım 1.11: J , m boyutlu bir M manifoldunun tanjant demeti üzerinde bir yaklaşık tanjant yapı olsun. Bu durumda TM üzerinde lokal koordinatlar (x_i, \dot{x}_i) , $1 \leq i \leq m$ ve

$$\varepsilon = \dot{x}_i \frac{\partial}{\partial x_i} + \varepsilon_i \frac{\partial}{\partial \dot{x}_i}$$

vektör alanı M üzerinde semispray olmak üzere

$$V = J\varepsilon = \dot{x}_i \frac{\partial}{\partial \dot{x}_i} \quad (1.5)$$

ile verilen V vektör alanına *Liouville vektör alanı* denir.[4]

Buna göre, TM üzerinde tanımlı ε vektör alanının bir semispray olması için gerek ve yeter şart $J\varepsilon = V$ olmasıdır. [6]

Tanım 1.12: M manifoldunun tanjant demeti TM üzerindeki p -formların cümlesi $\Lambda^p(TM)$ ve TM üzerindeki vektör alanlarının cümlesi $\chi(TM)$ olsun.

$$\begin{aligned} i_J f &= 0, \quad f \in C^\infty(TM) \\ i_J f(X_1, \dots, X_p) &= \sum_{i=1}^p w(X_1, \dots, JX_i, \dots, X_p); \quad w \in \Lambda^p(TM), \quad X_1, \dots, X_p \in \chi(TM) \end{aligned} \quad (1.6)$$

olarak tanımlı i_J fonksiyonuna düşey türev denir. [4]

Burada,

$$i_J(dx_i) = 0, \quad i_J(dx_i) = dx_i$$

olur.

Ayrıca $w \in \Lambda^p(TM)$ p -formu,

$$w = \sum_{i_1 < \dots < i_p} w_{i_1, \dots, i_p} dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_p}$$

şeklinde tanımlıdır ve diferansiyeli ise

$$dw = \sum_{i_1 < \dots < i_p} dw_{i_1, \dots, i_p} \wedge dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_p}$$

olarak ifade edilen $p + 1$ -formdur.[4]

$p + 1$ -formların cümlesini de $\Lambda^{p+1}(TM)$ olarak gösterirsek

$$d_j : \Lambda^p(TM) \rightarrow \Lambda^{p+1}(TM)$$

olacak şekilde

$$d_j = [i_j d, d] = i_j d - di_j \quad (1.7)$$

ile tanımlı d_j fonksiyonuna *düşey diferansiyel* denir.

$\forall X \in \chi(M)$ vektör alanı ile w p -formunun $i_X w$ iç çarpımı aşağıdaki şartları sağlayan bir $p - 1$ -formdur.

- 1) $i_X w = 0$, eğer $p = 0$ ise;
- 2) $i_X w = w(X)$, eğer $p = 1$ ise;
- 3) $i_X w(Y_1, \dots, Y_{p-1}) = w(X, Y_1, \dots, Y_{p-1})$, eğer $Y_1, \dots, Y_{p-1} \in \chi(M)$ ise;

bu durumda $i_X w \in \Lambda^{p-1}(M)$ olur.[18]

Tanım 1.13: M , m boyutlu bir manifold ve M 'nin TM tanjant demeti üzerinde ϕ bir 2-form olsun. Eğer ϕ maksimal ranklı bir kapalı 2-form ise, (M, ϕ) ikilisine *simplektik manifold* denir.

TM üzerinde $\phi_L = -dd_J L$ 2-formu simplektik ise, bu durumda TM üzerinde tanımlı $L : TM \rightarrow R$ fonksiyonu regüler yada non-dejeneredir denir.[4, 5]

Tanım 1.14: M , m boyutlu bir manifold ve TM tanjant demeti olsun.

$L : TM \rightarrow R$ bir C^∞ -fonksiyon olmak üzere, TM üzerindeki $\phi_L = -dd_J L$ ile tanımlı kapalı 2-formu için $E_L = VL - L$ eşitliğine L ile birleşen enerji fonksiyonu ve L' ye de TM tanjant demeti üzerindeki *Lagrange fonksiyonu* denir. TM ise M konfigürasyon manifoldunun hız uzayı olarak adlandırılır.[4]

Tanım 1.15: (M, ϕ) simplektik manifold olmak üzere, L regüler Lagrange fonksiyonuna karşılık gelen ve $E_L = VL - L$ eşitliği ile belirli olan enerji fonksiyonuna Hamilton enerji fonksiyonu denir ve $H : M \rightarrow R$ ile gösterilir.

M simplektik manifoldunun koordinatları ise (x_i, \dot{x}_i) olmak üzere, M üzerinde

$$X_H = \frac{\partial H}{\partial \dot{x}_i} \frac{\partial}{\partial x_i} - \frac{\partial H}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial \dot{x}_i} \quad (1.8)$$

olarak tanımlı vektör alanına *Hamilton vektör alanı* denir.[4]

Tanım 1.16: (M, ϕ) simplektik manifoldu üzerinde H Hamilton enerji fonksiyonu, X_H Hamilton vektör alanı olmak üzere;

$$i_{X_H} \phi = dH \quad (1.9)$$

denklemine Hamilton sistemlerinin simplektik (esas) formu yada Hamilton sistemleri dinamik denklemi denir. Bu denklemde $\phi_L = -dd_J L$ 2-form ve ε bir semispray kullanılarak elde edilen $i_\varepsilon \phi_L = dE_L$ denklemine Lagrange sistemleri için *dinamik denklemi* adı verilir.[4]

Teorem 1.1: $i_\varepsilon \phi_L = dE_L$ denklemini sağlayan bir tek ε semisprayı vardır.[18]

Tanım 1.17: $i_\varepsilon \phi_L = dE_L$ denklemini sağlayan bir tek ε semisprayı varsa E_L ye $L : TM \rightarrow R$ fonksiyonu için *Euler-Lagrange vektör alanı* denir. Bu koşulu sağlayan L fonksiyonuna da *Lagrange enerji fonksiyonu* denir. Burada,

$$E_L = \dot{x}_i \frac{\partial}{\partial x_i} + \varepsilon_i \frac{\partial}{\partial \dot{x}_i} \quad (1.10)$$

ile tanımlı vektör alanıdır ve ε_i fonksiyonları $\varepsilon_i = \varepsilon_i(x_i, \dot{x}_i)$ ile belirlidir.

$i_\varepsilon \phi_L = dE_L$ eşitliğin çözümüyle elde edilen

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial x_i} = 0 \quad (1.11)$$

denkleminde de *Euler-Lagrange enerji denklemi* denir.[4, 5, 16, 17]

Zamana bağlı Lagrange sistemlerini oluşturmak için jet manifoldlardan yararlanır. R bir boyutlu öklid uzayı olmak üzere $J^1(R, M) \cong TM$ izomorfizmi bilinmektedir.

TM 'nin koordinatları (x_i, \dot{x}_i) , R 'nin koordinatı ise (t) olmak üzere $J^1(R, M)$ üzerindeki uyarlanmış koordinat sistemi (t, x_i, \dot{x}_i) olur. Zamana bağlı durumda yukarıda verilen Lagrange fonksiyonu $L : J^1(R, M) \rightarrow R$ tanımlı C^∞ -dönüşümdür. Ayrıca, bu jet manifold üzerinde $J^2 = 0$ eşitliğini sağlayan ve $\text{rank} J = m$ ile verilen $(1, 1)$ tipinden tensör alanı zamana bağlı yaklaşık tanjant yapı olarak tanımlanır.

V bir Liouville vektör alanı olmak üzere, yaklaşık tanjant yapı;

$$J \left(\frac{\partial}{\partial t} \right) = -V, \quad J \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \right) = \frac{\partial}{\partial \dot{x}_i}, \quad J \left(\frac{\partial}{\partial \dot{x}_i} \right) = 0 \quad (1.12)$$

koşullarını sağlamalıdır.[18]

Zamana bağlı durumda ε semisprayı lokal olarak

$$\varepsilon = \frac{\partial}{\partial t} + \dot{x}_i \frac{\partial}{\partial x_i} + \varepsilon_i \frac{\partial}{\partial \dot{x}_i} \quad (\varepsilon_i = \varepsilon_i(t, x_i, \dot{x}_i), \quad 1 \leq i \leq m) \quad (1.13)$$

şeklinde ifade edilir.

Tanım 1.18: $L : J^1(R, M) \rightarrow R$ zamana bağlı Lagrange fonksiyonu olsun. $J^1(R, M)$ üzerinde,

$$\alpha_L = d_J L + L dt \quad (1.14)$$

1-formuna *Poincare-Cartan 1-formu* ve

$$\Omega_L = dd_J L + dL \wedge dt \quad (1.15)$$

2-formuna *Poincare-Cartan 2-formu* denir.

Buna göre $J^1(R, M)$ manifoldu üzerinde

$$i_\varepsilon \Omega_L = 0, \quad i_\varepsilon dt = 1 \quad (1.16)$$

denklemlerini sağlayan bir tek E_L vektör alanı vardır, buna zamana bağlı Euler-Lagrange vektör alanı denir. $(J^1(R, M), \Omega_L, E_L)$ üçlüsüne de zamana bağlı Lagrange sistem denir.[18]. 1.16 denklemlerinin çözümü ile elde edilen

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial x_i} = 0 \quad (1.17)$$

denkleminde zamana bağı Euler-Lagrange enerji denklemi denir.[4, 20]

Burada dikkat edilirse; zamana bağı olan durumda elde edilen 1.17 Euler-Lagrange denklemi ile zamana bağı olmayan durumda elde edilen Euler-Lagrange denklemi 1.11 aynı çıkar. O halde, jet demet yapısında çalışmak Lagrange enerji denklemlerinin genel yapısını değıştirmez, fakat zaman parametresi çalışmaya dahil edileceğı için fiziksel ve mekanik uygulamaları açısından elverişli olur.

Tanım 1.19: T^*M koteanjant demetinin uyarlanmış koordinatları (x_i, \dot{x}_i) olmak üzere,

$$\lambda_M = \dot{x}_i dx_i \quad (1.18)$$

olarak tanımlı 1-formuna *Liouville form* denir.

Buna bağı olarak T^*M üzerinde,

$$\phi_M = -d\lambda_M = dx_i \wedge d\dot{x}_i \quad (1.19)$$

simplektik formu *kanonik simplektik form* olarak adlandırılır.[4, 8, 9]

Tanım 1.20: (M, ϕ) simplektik manifold ve $H : M \rightarrow R$, M üzerinde tanımlı Hamilton fonksiyonu olsun. $i_{X_H} \phi = dH$ denklemini sağılayan bir tek X_H vektör alanına, H Hamilton enerji fonksiyonu ile birleşen *Hamilton vektör alanı* denir.

Böylece,

$$i_{X_H} \phi = dH \quad (1.20)$$

simplektik formu kullanarak,

$$\frac{\partial x_i}{\partial t} = \frac{\partial H}{\partial \dot{x}_i}, \quad \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial t} = -\frac{\partial H}{\partial x_i} \quad (1.21)$$

denklemleri elde edilir. Bu denklemlere *Hamilton denklemleri* denir.[4]

Zamana bağı Hamilton sistemler aşığıdaki şekilde ifade edilecektir.

Tanım 1.21: (M, ϕ) simplektik manifold ve $H : M \rightarrow R$, M üzerinde tanımlı Hamilton fonksiyonu olsun. $i_{X_{H_t}} \phi = dH_t$ denklemini sağılayan bir tek X_{H_t} vektör alanına, *zamana bağı Hamilton vektör alanı* denir.

Böylece; X_{H_t} lokal olarak

$$X_{H_t} = \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial H_t}{\partial \dot{x}_i} \frac{\partial}{\partial x_i} - \frac{\partial H_t}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial \dot{x}_i} \quad (1.22)$$

şeklinde ifade edilir.[5]

$\sigma : I = (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow R \times M$, $\epsilon > 0$ için X_{H_t} vektör alanının bir integral eğrisi olsun. Böylece,

$$\sigma(t) = (t, x_i(t), \dot{x}_i(t)) \quad (1.23)$$

ve ayrıca σ , X_{H_t} ' nin bir integral eğrisi olduğundan

$$\dot{\sigma}(t) = X_{H_t}(\sigma(t)) = \frac{\partial}{\partial t} + X_t(x_i(t), \dot{x}_i(t))$$

olur. Bu durumda

$$i_{X_{H_t}}\phi = dH_t$$

simplektik formu kullanılarak

$$\frac{\partial x_i}{\partial t} = \frac{\partial H}{\partial \dot{x}_i}, \quad \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial t} = -\frac{\partial H}{\partial x_i} \quad (1.24)$$

denklemleri elde edilir. Bu denklemlere *zamana bağlı Hamilton denklemleri* denir.[4]

1.3.3 LORENTZ-MINKOWSKİ UZAYI

Bu bölümde çalışmamızın temel konumunu oluşturan Minkowski 4-uzayı ile ilgili temel geometrik ve cebirsel özellikler verilmiştir.

Tanım 1.22: V sonlu boyutlu reel vektör uzayı olsun.

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \rightarrow \mathbb{R} \quad (1.25)$$

bi-lineer fonksiyonu $\forall v, w \in V$ için $\langle v, w \rangle = \langle w, v \rangle$ özelliğini sağlayan $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ' ye V üzerinde bir *simetrik bi-lineer form* denir.

V , vektör uzayı üzerinde bir simetrik bi-lineer form $\langle \cdot, \cdot \rangle$ olmak üzere;

i) $\forall \vec{v} \in V, \vec{v} \neq 0$ için $\langle \vec{v}, \vec{v} \rangle > 0$ ise $\langle \cdot, \cdot \rangle$ bi-lineer formu *pozitif tanımlı*,

ii) $\forall \vec{v} \in V, \vec{v} \neq 0$ için $\langle \vec{v}, \vec{v} \rangle < 0$ ise $\langle \cdot, \cdot \rangle$ bi-lineer formu *negatif tanımlı*,

iii) $\forall \vec{v} \in V, \vec{v} \neq 0$ için $\langle \vec{v}, \vec{v} \rangle \geq 0$ ise $\langle \cdot, \cdot \rangle$ bi-lineer formu *yarı-pozitif tanımlı*,

iv) $\forall \vec{v} \in V, \vec{v} \neq 0$ için $\langle \vec{v}, \vec{v} \rangle \leq 0$ ise $\langle \cdot, \cdot \rangle$ bi-lineer formu *yarı-negatif tanımlı*,

v) $\forall \vec{v} \in V, \langle \vec{v}, \vec{v} \rangle = 0$ için $\vec{v} = 0$ oluyorsa $\langle \cdot, \cdot \rangle$ bi-lineer formuna *non-dejenere*, aksi halde *dejenere* denir.[15]

Tanım 1.23: $\langle \cdot, \cdot \rangle$, V üzerinde simetrik bi-lineer form ve W da V ' nin bir altuzayı olsun. $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ' nin W üzerinde kısıtlanması $\langle \cdot, \cdot \rangle_W$ olmak üzere

$$\langle \cdot, \cdot \rangle_W : W \times W \rightarrow R$$

negatif tanımlı olacak şekilde en büyük boyutlu W altuzayının boyutuna $\langle \cdot, \cdot \rangle$ simetrik bi-lineer formun indeksi denir. Eğer $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ' nin indeksi v ise

$$0 \leq v \leq \text{boy}V$$

dir.[14]

Tanım 1.24: M , türevlenebilir (C^∞ -sınıfından) manifold ve

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : \chi(M) \times \chi(M) \rightarrow C^\infty(M, R)$$

$$(\vec{x}, \vec{y}) \rightarrow \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle$$

şeklinde tanımlanan simetrik, bi-lineer ve non-dejenere metrik fonksiyonuna M üzerinde bir *metrik tensör* denir. Bu metrik tensörün indeksi M manifoldunun indeksi olarak ifade edilir.

M bir C^∞ -sınıfından manifold olmak üzere, $\chi(M)$ ' de tanımlı $\langle \cdot, \cdot \rangle$ iç çarpım fonksiyonu, M nin her bir tanjant uzayına bir iç çarpım indirger, öyleki;

$\vec{X}, \vec{Y} \in \chi(M)$ ve $p \in M$ için, $\vec{X}_p, \vec{Y}_p \in T_M(p)$ dir. Böylece

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : T_M(p) \rightarrow T_M(p) \rightarrow R$$

simetrik bi-lineer, non-dejenere dönüşüm tanımlayan $\langle \cdot, \cdot \rangle_p$ fonksiyonuna $T_M(p)$ üzerinde bir *metrik tensör* denir.[14]

Tanım 1.25: M bir C^∞ -sınıfından manifold ve $\langle \cdot, \cdot \rangle$ de M üzerinde sabit indeksli bir metrik tensör olmak üzere $(M, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ikilisine bir *yarı-Riemann manifoldu* denir.

M ' nin indeksi v olmak üzere $0 \leq v \leq n = \text{boy}M$ için, $v = 0$ ise M ' nin bir Riemann manifoldu, $v = 1$ ve $n \geq 2$ durumunda ise M ' ye *Lorentz manifoldu* denir.[14]

Tanım 1.26: R^4 , 4-boyutlu standart reel vektör uzayı üzerinde $\forall p \in R^4$ ve $V_p, W_p \in T_p(R^4)$ olmak üzere

$$\langle V_p, W_p \rangle = -v_1w_1 + v_2w_2 + v_3w_3 + v_4w_4 \quad (1.26)$$

eşitliğiyle verilen v -indeksli metrik tensörle elde edilen uzaya *yarı-Öklidyen uzay* denir ve R_V^4 ile gösterilir. Burada sırasıyla v_i ve w_i ler V_p ve W_p tanjant vektörlerinin bileşenleridir. [2]

Özel olarak $v = 1$ ve $n \geq 2$ durumunda ise E_1^4 , 4-boyutlu Minkowski uzayı adını alır. Metrik tensör ise *Lorentz metriği* olarak adlandırılır.[14]

Tanım 1.27: $\vec{X} = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in E_1^4$ olsun. Eğer,

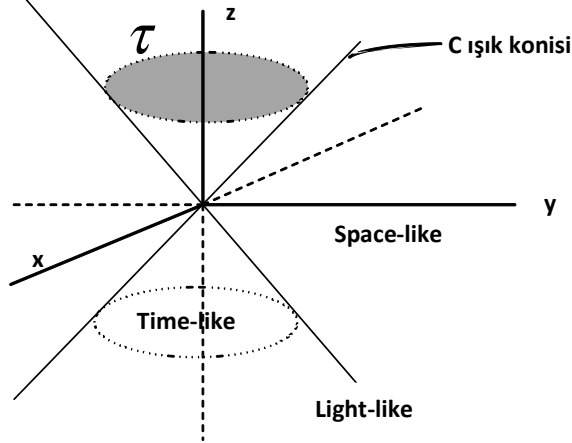
- i) $\langle \vec{X}, \vec{X} \rangle < 0$ ise \vec{X} timelike vektör,
- ii) $\langle \vec{X}, \vec{X} \rangle > 0$ veya $\vec{X} = 0$ ise \vec{X} spacelike vektör,
- iii) $\langle \vec{X}, \vec{X} \rangle = 0$ ve $\vec{X} \neq 0$ ise \vec{X} null vektör

olarak ifade edilir.[14]

Tanım 1.28: E_1^4 Minkowski 4-uzayının bütün timelike vektörlerin kümesi τ olsun. Böylece $\forall u \in \tau$ için

$$C(\vec{u}) = \{\vec{x} \in \tau : \langle \vec{u}, \vec{x} \rangle < 0\} = \{\vec{x} \in E_1^4 : g(x - u, x - u) < 0\} \quad (1.27)$$

biçiminde tanımlanan $C(\vec{u})$ kümesine u' yu içeren E_1^4 ün time-konisi denir.[14]



şekil 2

Teorem 1.2: E_1^4 Minkowski 4-uzayında \vec{x} ve \vec{y} timelike vektörleri aynı timekonisinin elemanı ise

$$\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = - \|\vec{x}\| \|\vec{y}\| \cosh \theta \quad (1.28)$$

olacak şekilde bir tek $\theta \geq 0$ reel sayısı vardır.

Yukarıdaki verilen θ reel sayısına \vec{x} ve \vec{y} timelike vektörleri arasındaki *Lorentz timelike açısı* denir.[3, 14]

2 MINKOWSKI 4-UZAYINDA EULER-LAGRANGE MEKANİK SİSTEMLER

Teorik fizikte Minkowski 4-uzayı, 3-boyutlu Öklid uzayına 1-zaman parametresi eklenerek tanımlanan uzaydır. Bu sebeple çoğunlukla Öklid uzayı ile izomorf olarak da kabul edilir. Bir Öklidyen uzayın simetri grubu Öklidyen grup olarak adlandırılır ve Minkowski uzayı için bir Poincare grubudur. Minkowski uzayı Poincare grubun homojen uzayı olarak bir afin uzaydır. Dolayısıyla $n \geq 2$ için n boyutlu Minkowski uzayı, n reel boyutlu bir vektör uzayıdır. n boyutlu reel uzayın geometrik olarak C^∞ - manifold yapısına da sahip olduğu aşikardır.

Bu bölümde öncelikle çalışmamızın temel alanını oluşturan Euler-Lagrange mekanik sistemlerini inceleyeceğiz.

2.1 EULER-LAGRANGE SİSTEMLER

1.3.1 'de tanımlanan (E, π, M) demetini ele alalım. Burada E total manifold, M baz manifold olarak kabul edilmişti. Ayrıca, E ve M birer C^∞ - manifoldlardır. Minkowski geometrisinde çalışırken keyfi bir M manifoldu için demet yapısı oluşturmak fiziksel uygulamalar açısından elverişli değildir. Çünkü, bu kullanımda jet demet yapısı tanımlanırken oluşturulan türevsel koordinatların genel bir durumu söz konusu olur. Bu ise fiziksel yorumları güçleştirir. Ayrıca, fiziksel yorumlamalarda genel olarak 3-boyutlu uzay yapısı ile zaman parametresi kullanımı daha yaygındır. Bu sebeple oluşturacağımız demet yapısının baz manifoldunu bir boyutlu reel uzay R olarak kabul edeceğiz. Bu kabulün başka bir avantajı ise bu uzayda tanımlayacağımız koordinatı zaman parametresi olarak kabul edebilmemizdir. Zaten mekanik sistemler üzerine yapılan çalışmaların uygulamalarında baz uzay olarak reel uzayın alınması sıklıkla tercih edilmektedir. O halde Minkowski demet yapısını kurmak için total manifoldu da çalışmamız gereken uzay yapısı olarak seçmeliyiz. Yani, Minkowski uzayının yukarıda verdiğimiz açıklamaya dayalı olarak kabul edilen manifold yapısını kullanmalıyız.

O halde, (E_1^4, π, R) 'in bir demet olduğunu görelim. Demet yapısı için öncelikle trivial yapıyı oluşturmak gerekir. Bunun için gerekli olan ve bölüm 1.3.1'de tanımlanan komütatif diyagram aşağıdaki şekilde ifade edilirse;

$$\begin{array}{ccc} E_1^4 & \xrightarrow{\phi} & E^4 \\ \pi \downarrow & & \downarrow \pi_R \\ R & \xrightarrow{\bar{I}_R} & R \end{array} \quad (2.1)$$

burada ϕ bir izomorfizm, π_R örten submersiyon ve I_R özdeşlik dönüşümü olmak üzere

$$\pi = I_R \circ \pi_R^{-1} \circ \phi^{-1}$$

olur. Diğer bir ifadeyle

$$I_R \circ \pi = \pi_R \circ \phi$$

olduğundan 2.1 diyagramı komütatiftir. Sonuç olarak π diferansiyellenebilir bir dönüşümdür. Böylece, (E_1^4, π, R) bir demet yapısı oluşturur.

Şimdi (E_1^4, π, R) demetini alalım. Bu demet üzerindeki jet demet yapısını $J^1 E_1^4$ olarak tanımlayalım. Bu durumda jet demetin koordinatları aşağıdaki şekilde ifade edilecektir.

E_1^4 'in koordinatları (x_1, x_2, x_3, x_4) ve R 'nin koordinatı (t) olmak üzere, $J^1 E_1^4$ 'in koordinatları

$$(t, x_1, x_2, x_3, x_4, \dot{x}_1, \dot{x}_2, \dot{x}_3, \dot{x}_4) \quad (2.2)$$

şeklinde tanımlanır. Burada, jet demet yapısından gelen (\dot{x}_i) türevsel koordinatları aşağıdaki şekilde ifade edilir.

$$\dot{x}_1 = \frac{dx_1}{dt}, \quad \dot{x}_2 = \frac{dx_2}{dt}, \quad \dot{x}_3 = \frac{dx_3}{dt}, \quad \dot{x}_4 = \frac{dx_4}{dt} \quad (2.3)$$

$\phi \in \Gamma(\pi)$ kesiti ise,

$$\begin{aligned} \phi : R &\rightarrow E_1^4 \\ t &\rightarrow \phi(t) \end{aligned}$$

olarak belirlidir ve $\pi \circ \phi = id_R$ sağlanır. (U, u) indirgenmiş koordinat sistemini de,

$$\begin{aligned} U &= \{J_p^1 \phi : \phi(p) \in U\} \\ u &= (t, x_i, \dot{x}_i) \quad 1 \leq i \leq 4 \end{aligned}$$

olarak tanımlarız. Buna bağlı olarak, bu koordinatlar için

$$t(J_p^1 \phi) = t|_p, \quad x_i(J_p^1 \phi) = x_i(\phi(p))$$

eşitlikleri geçerli olup, yeni tanımlanan 4-adet $\dot{x}_i : U \rightarrow R$ fonksiyonları göz önüne alındığında,

$$\dot{x}_i(J_p^1 \phi) = \frac{\partial \phi_i}{\partial t}|_p, \quad 1 \leq i \leq 4 \quad (2.4)$$

eşitliği vardır. Böylece, Minkowski uzayı için jet demet yapısı oluşturulmuş olur.

Şimdi, oluşturduğumuz bu demet yapısı üzerinde bölüm 1.3.2' de verilen mekanik sistemleri oluşturalım. Bunun için öncelikle en temel geometrik yapı

olan ve 1.12'de verilen yaklaşık tanjant yapının varlığını ve matematiksel ifadesini görmemiz gerekir.

Buna göre, E_1^4 üzerindeki jet demet için yaklaşık tanjant yapı,

$$J : T(J^1 E_1^4) \rightarrow T(J^1 E_1^4)$$

şeklinde ifade edilen bir dönüşüm olup, $J^2 = 0$ koşulunu sağlayan (1, 1) tipinden tensör alanı olmalıdır. O halde, $J^1 E_1^4$ demeti üzerindeki tanımlanan koordinat sistemini kullanarak aşağıdaki şekilde yaklaşık tanjant yapıyı oluşturabiliriz.

$$J\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right) = -\frac{\partial}{\partial \dot{x}_1}, \quad J\left(\frac{\partial}{\partial x_2}\right) = \frac{\partial}{\partial \dot{x}_2}$$

$$J\left(\frac{\partial}{\partial x_3}\right) = \frac{\partial}{\partial \dot{x}_3}, \quad J\left(\frac{\partial}{\partial x_4}\right) = \frac{\partial}{\partial \dot{x}_4}$$

$$J\left(\frac{\partial}{\partial \dot{x}_1}\right) = J\left(\frac{\partial}{\partial \dot{x}_2}\right) = J\left(\frac{\partial}{\partial \dot{x}_3}\right) = J\left(\frac{\partial}{\partial \dot{x}_4}\right) = 0$$

$$J\left(\frac{\partial}{\partial t}\right) = -\dot{x}_1 \frac{\partial}{\partial \dot{x}_1} + \dot{x}_2 \frac{\partial}{\partial \dot{x}_2} + \dot{x}_3 \frac{\partial}{\partial \dot{x}_3} + \dot{x}_4 \frac{\partial}{\partial \dot{x}_4}$$

Dikkat edilirse $J^2 = 0$ koşulu sağlanır. Yukarıda açık ifadesi verilen J tensör alanı

$$J = (-dx_1 - \dot{x}_1 dt) \times \frac{\partial}{\partial \dot{x}_1} + (dx_2 + \dot{x}_2 dt) \times \frac{\partial}{\partial \dot{x}_2} \\ + (dx_3 + \dot{x}_3 dt) \times \frac{\partial}{\partial \dot{x}_3} + (dx_4 + \dot{x}_4 dt) \times \frac{\partial}{\partial \dot{x}_4}$$

elde edilir. Bundan sonra elde edilecek geometrik yapıları, koordinat fonksiyonlarının çokluğu açısından uygun bir düzenleme ile formülize edebilmek için notasyonlar kullanacağız. Minkowski metriğinden gelen negatif terimin bu düzenleme içerisinde korunabilmesi için, negatif ve pozitif terimleri betimleyen notasyonlar belirleyeceğiz. Buna göre J yaklaşık tanjant yapı kısaca,

$$\delta_i = \begin{cases} -1, & i = 1 \\ 1, & i = 2, 3, 4 \end{cases}$$

olmak üzere

$$J = \sum_{i=1}^4 \delta_i (dx_i - \dot{x}_i dt) \times \frac{\partial}{\partial \dot{x}_i}$$

(2.5)

şeklinde ifade edilebilir. Bu ise yine (1, 1) tipinden tensör alanını gösterir. Bu durumda, bölüm 1.3.2'de tanımlanan ve açık ifadesi 1.13 ile gösterilen semispray bu bölümde kullanılan jet demet yapısı üzerinde aşağıdaki şekilde ifade edilir;

$$\varepsilon = \frac{\partial}{\partial t} - \dot{x}_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \dot{x}_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + \dot{x}_3 \frac{\partial}{\partial x_3} + \dot{x}_4 \frac{\partial}{\partial x_4} - \varepsilon_1 \frac{\partial}{\partial \dot{x}_1} + \varepsilon_2 \frac{\partial}{\partial \dot{x}_2} + \varepsilon_3 \frac{\partial}{\partial \dot{x}_3} + \varepsilon_4 \frac{\partial}{\partial \dot{x}_4}$$

Kısaca,

$$\varepsilon = \frac{\partial}{\partial t} + \sum_{i=1}^4 \delta_i \left(\dot{x}_i \frac{\partial}{\partial x_i} + \varepsilon_i \frac{\partial}{\partial \dot{x}_i} \right) \quad (2.6)$$

şeklindedir. Bu semisprayın yaklaşık tanjant yapı üzerindeki değeri alınarak elde edilen Liouville vektör alanı ise;

$$\begin{aligned} V &= -2\dot{x}_1 \frac{\partial}{\partial \dot{x}_1} + 2\dot{x}_2 \frac{\partial}{\partial \dot{x}_2} + 2\dot{x}_3 \frac{\partial}{\partial \dot{x}_3} + 2\dot{x}_4 \frac{\partial}{\partial \dot{x}_4} \\ &= 2 \sum_{i=1}^4 \delta_i \dot{x}_i \frac{\partial}{\partial \dot{x}_i} \end{aligned} \quad (2.7)$$

şeklinde belirlenir.

Mekanik sistemler için enerji denklemlerinin elde edilmesinde kullanılan ve bölüm 1.3.2'de 1.14 ile verilen Poincare-Cartan 1-formu, 1.15 ile verilen Poincare-Cartan 2-formu tanımlayabilmemiz için öncelikle diferansiyel operatörü Minkowski jet demet yapısının koordinatları ile ifade etmemiz gerekir. O halde d diferansiyel operatörü

$$\begin{aligned} d &= \frac{\partial}{\partial t} dt - \frac{\partial}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial}{\partial x_2} dx_2 + \frac{\partial}{\partial x_3} dx_3 + \frac{\partial}{\partial x_4} dx_4 \\ &\quad - \frac{\partial}{\partial \dot{x}_1} d\dot{x}_1 + \frac{\partial}{\partial \dot{x}_2} d\dot{x}_2 + \frac{\partial}{\partial \dot{x}_3} d\dot{x}_3 + \frac{\partial}{\partial \dot{x}_4} d\dot{x}_4 \end{aligned}$$

Kısaca,

$$d = \frac{\partial}{\partial t} dt + \sum_{i=1}^4 \delta_i \left(\frac{\partial}{\partial x_i} dx_i + \frac{\partial}{\partial \dot{x}_i} d\dot{x}_i \right) \quad (2.8)$$

olarak tanımlanır. Buna göre, Minkowski jet demet yapısının koordinatları ile Poincare-Cartan 1-formu bölüm 1.3.2'deki işlemlere benzer olarak aşağıdaki biçimde elde edilir.

$$\begin{aligned}
\alpha_L &= d_J L + L dt \\
&= -\dot{x}_1 \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1} dt + \dot{x}_2 \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_2} dt + \dot{x}_3 \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_3} dt + \dot{x}_4 \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_4} dt \\
&\quad - \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1} dx_1 + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_2} dx_2 + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_3} dx_3 + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_4} dx_4 + L dt
\end{aligned}$$

Bu eşitlik kısaca,

$$\alpha_L = \sum_{i=1}^4 \delta_i \left(\dot{x}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} dt + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} dx_i \right) + L dt$$

(2.9)

şeklinde ifade edilebilir. Bu 1-formun tekrar diferansiyellenmesi ile Poincare-Cartan 2-form elde edilir.

$$\begin{aligned}
\Omega_L &= dd_J L + dL \wedge dt \\
&= (dx_1 \wedge dt) \left(\frac{\partial^2 L}{\partial t \partial \dot{x}_1} + \dot{x}_1 \frac{\partial^2 L}{\partial x_1 \partial \dot{x}_1} - \dot{x}_2 \frac{\partial^2 L}{\partial x_1 \partial \dot{x}_2} \right. \\
&\quad \left. - \dot{x}_3 \frac{\partial^2 L}{\partial x_1 \partial \dot{x}_3} - \dot{x}_4 \frac{\partial^2 L}{\partial x_1 \partial \dot{x}_4} - \frac{\partial L}{\partial x_1} \right) \\
&\quad + (dx_2 \wedge dt) \left(-\frac{\partial^2 L}{\partial t \partial \dot{x}_2} - \dot{x}_1 \frac{\partial^2 L}{\partial x_2 \partial \dot{x}_1} + \dot{x}_2 \frac{\partial^2 L}{\partial x_2 \partial \dot{x}_2} \right. \\
&\quad \left. + \dot{x}_3 \frac{\partial^2 L}{\partial x_2 \partial \dot{x}_3} + \dot{x}_4 \frac{\partial^2 L}{\partial x_2 \partial \dot{x}_4} + \frac{\partial L}{\partial x_2} \right) \\
&\quad + (dx_3 \wedge dt) \left(-\frac{\partial^2 L}{\partial t \partial \dot{x}_3} - \dot{x}_1 \frac{\partial^2 L}{\partial x_3 \partial \dot{x}_1} + \dot{x}_2 \frac{\partial^2 L}{\partial x_3 \partial \dot{x}_2} \right. \\
&\quad \left. + \dot{x}_3 \frac{\partial^2 L}{\partial x_3 \partial \dot{x}_3} + \dot{x}_4 \frac{\partial^2 L}{\partial x_3 \partial \dot{x}_4} + \frac{\partial L}{\partial x_3} \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + (dx_4 \wedge dt) \left(-\frac{\partial^2 L}{\partial t \partial \dot{x}_4} - \dot{x}_1 \frac{\partial^2 L}{\partial x_4 \partial \dot{x}_1} + \dot{x}_2 \frac{\partial^2 L}{\partial x_4 \partial \dot{x}_2} \right. \\
& \left. + \dot{x}_3 \frac{\partial^2 L}{\partial x_4 \partial \dot{x}_3} + \dot{x}_4 \frac{\partial^2 L}{\partial x_4 \partial \dot{x}_4} + \frac{\partial L}{\partial x_4} \right) \\
& + (d\dot{x}_1 \wedge dt) \left(\dot{x}_1 \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{x}_1^2} - \dot{x}_2 \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{x}_1 \partial \dot{x}_2} - \dot{x}_3 \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{x}_1 \partial \dot{x}_3} - \dot{x}_4 \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{x}_1 \partial \dot{x}_4} \right) \\
& + (d\dot{x}_2 \wedge dt) \left(-\dot{x}_1 \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{x}_1 \partial \dot{x}_2} + \dot{x}_2 \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{x}_2^2} + \dot{x}_3 \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{x}_2 \partial \dot{x}_3} + \dot{x}_4 \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{x}_2 \partial \dot{x}_4} + 2 \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_2} \right) \\
& + (d\dot{x}_3 \wedge dt) \left(-\dot{x}_1 \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{x}_1 \partial \dot{x}_3} + \dot{x}_2 \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{x}_2 \partial \dot{x}_3} + \dot{x}_3 \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{x}_3^2} + \dot{x}_4 \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{x}_3 \partial \dot{x}_4} + 2 \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_3} \right) \\
& + (d\dot{x}_4 \wedge dt) \left(-\dot{x}_1 \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{x}_1 \partial \dot{x}_4} + \dot{x}_2 \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{x}_2 \partial \dot{x}_4} + \dot{x}_3 \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{x}_3 \partial \dot{x}_4} + \dot{x}_4 \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{x}_4^2} + 2 \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_4} \right) \\
& + (dx_1 \wedge dx_2) \left(-\frac{\partial^2 L}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{\partial^2 L}{\partial x_2 \partial x_1} \right) + (dx_1 \wedge dx_3) \left(-\frac{\partial^2 L}{\partial x_1 \partial x_3} + \frac{\partial^2 L}{\partial x_3 \partial x_1} \right) \\
& + (dx_1 \wedge dx_4) \left(-\frac{\partial^2 L}{\partial x_1 \partial x_4} + \frac{\partial^2 L}{\partial x_4 \partial x_1} \right) + (dx_2 \wedge dx_3) \left(-\frac{\partial^2 L}{\partial x_2 \partial x_3} + \frac{\partial^2 L}{\partial x_3 \partial x_2} \right) \\
& + (dx_2 \wedge dx_4) \left(-\frac{\partial^2 L}{\partial x_2 \partial x_4} + \frac{\partial^2 L}{\partial x_4 \partial x_2} \right) + (dx_3 \wedge dx_4) \left(-\frac{\partial^2 L}{\partial x_3 \partial x_4} + \frac{\partial^2 L}{\partial x_4 \partial x_3} \right) \\
& + (dx_1 \wedge d\dot{x}_1) \left(-\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{x}_1^2} \right) + (dx_1 \wedge d\dot{x}_2) \left(\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{x}_1 \partial \dot{x}_2} \right) \\
& + (dx_1 \wedge d\dot{x}_3) \left(\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{x}_1 \partial \dot{x}_3} \right) + (dx_1 \wedge d\dot{x}_4) \left(\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{x}_1 \partial \dot{x}_4} \right) \\
& + (dx_2 \wedge d\dot{x}_1) \left(\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{x}_1 \partial \dot{x}_2} \right) + (dx_2 \wedge d\dot{x}_2) \left(-\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{x}_2^2} \right) \\
& + (dx_2 \wedge d\dot{x}_3) \left(-\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{x}_2 \partial \dot{x}_3} \right) + (dx_2 \wedge d\dot{x}_4) \left(-\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{x}_2 \partial \dot{x}_4} \right) \\
& + (dx_3 \wedge d\dot{x}_1) \left(\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{x}_1 \partial \dot{x}_3} \right) + (dx_3 \wedge d\dot{x}_2) \left(-\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{x}_2 \partial \dot{x}_3} \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + (dx_3 \wedge d\dot{x}_3) \left(-\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{x}_3^2} \right) + (dx_3 \wedge d\dot{x}_4) \left(-\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{x}_3 \partial \dot{x}_4} \right) \\
& + (dx_4 \wedge d\dot{x}_1) \left(\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{x}_1 \partial \dot{x}_4} \right) + (dx_4 \wedge d\dot{x}_2) \left(-\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{x}_2 \partial \dot{x}_4} \right) \\
& + (dx_4 \wedge d\dot{x}_3) \left(-\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{x}_3 \partial \dot{x}_4} \right) + (dx_4 \wedge d\dot{x}_4) \left(-\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{x}_4^2} \right)
\end{aligned}$$

bulunur. Kısaca,

$$\begin{aligned}
\delta_i = \delta_j &= \begin{cases} -1, & i = 1 \\ 1, & i = 2, 3, 4 \end{cases} \\
\delta_{ij} &= \begin{cases} -1, & i = j = 1 \\ 1, & i \geq 2 \text{ ve } i = j \\ -1, & i \geq 2 \text{ ve } i \neq j \end{cases} \\
\mu_{ij} &= \begin{cases} 0, & i = j \\ -1, & i \neq j \end{cases}
\end{aligned}$$

notasyonları kullanılarak

$$\begin{aligned}
\Omega_L &= \sum_{i=1}^4 \delta_i \left\{ \left[(dx_i \wedge dt) \left(\frac{\partial^2 L}{\partial t \partial \dot{x}_i} + \sum_{j=1}^4 \delta_j \dot{x}_j \frac{\partial^2 L}{\partial x_i \partial \dot{x}_j} \right) \right] \right. \\
&+ \left. \left[(d\dot{x}_i \wedge dt) \left(\sum_{j=1}^4 \delta_j \dot{x}_j \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{x}_i \partial \dot{x}_j} \right) \right] + \left(\frac{\partial L}{\partial x_i} + 2 \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \right) \right\} \\
&+ \sum_{i,j=1}^4 \left[(d\dot{x}_i \wedge d\dot{x}_j) \delta_{ij} \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{x}_i \partial \dot{x}_j} + (dx_i \wedge dx_j) \mu_{ij} \frac{\partial^2 L}{\partial x_i \partial x_j} \right] + 2 \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1}
\end{aligned} \tag{2.10}$$

eşitliği ile ifade edilen 2-forma Poincare Cartan 2-formu denir.

Bölüm 1.3.2'de 1.16'da verilen $i_\varepsilon \Omega = \Omega(\varepsilon) = 0$ denkleminin çözümlerinin Euler-Lagrange enerji denklemini verdiğini biliyoruz. Buna göre, yukarıda tanımladığımız geometrik yapıları kullanarak bu denklemi çözdüğümüz taktirde, elde

edilen çözüm, Minkowski jet demeti üzerinde Euler-Lagrange denklemini verir. Dolayısıyla bu çözüm için gerekli olan işlemleri yaparsak,

$$\begin{aligned}
i_\varepsilon \Omega &= \Omega(\varepsilon) \\
&= -\left(\frac{\partial^2 L}{\partial t \partial \dot{x}_1} + \dot{x}_1 \frac{\partial^2 L}{\partial x_1 \partial \dot{x}_1} - \dot{x}_2 \frac{\partial^2 L}{\partial x_1 \partial \dot{x}_2} - \dot{x}_3 \frac{\partial^2 L}{\partial x_1 \partial \dot{x}_3} - \dot{x}_4 \frac{\partial^2 L}{\partial x_1 \partial \dot{x}_4} - \frac{\partial L}{\partial x_1} \right. \\
&\quad - \dot{x}_2 \frac{\partial^2 L}{\partial x_1 \partial \dot{x}_2} + \dot{x}_2 \frac{\partial^2 L}{\partial x_2 \partial \dot{x}_1} - \dot{x}_3 \frac{\partial^2 L}{\partial x_1 \partial \dot{x}_3} + \dot{x}_3 \frac{\partial^2 L}{\partial x_3 \partial \dot{x}_1} - \dot{x}_4 \frac{\partial^2 L}{\partial x_1 \partial \dot{x}_4} + \dot{x}_4 \frac{\partial^2 L}{\partial x_4 \partial \dot{x}_1} \\
&\quad \left. + \varepsilon_1 \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{x}_1^2} + \varepsilon_2 \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{x}_1 \partial \dot{x}_2} + \varepsilon_3 \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{x}_1 \partial \dot{x}_3} + \varepsilon_4 \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{x}_1 \partial \dot{x}_4}\right) dx_1 \\
&\quad - \left(-\frac{\partial^2 L}{\partial t \partial \dot{x}_2} - \dot{x}_1 \frac{\partial^2 L}{\partial x_2 \partial \dot{x}_1} + \dot{x}_2 \frac{\partial^2 L}{\partial x_2 \partial \dot{x}_2} + \dot{x}_3 \frac{\partial^2 L}{\partial x_2 \partial \dot{x}_3} + \dot{x}_4 \frac{\partial^2 L}{\partial x_2 \partial \dot{x}_4} + \frac{\partial L}{\partial x_2} \right. \\
&\quad - \dot{x}_1 \frac{\partial^2 L}{\partial x_1 \partial \dot{x}_2} + \dot{x}_1 \frac{\partial^2 L}{\partial x_2 \partial \dot{x}_1} - \dot{x}_3 \frac{\partial^2 L}{\partial x_3 \partial \dot{x}_2} + \dot{x}_3 \frac{\partial^2 L}{\partial x_2 \partial \dot{x}_3} - \dot{x}_4 \frac{\partial^2 L}{\partial x_4 \partial \dot{x}_2} + \dot{x}_4 \frac{\partial^2 L}{\partial x_2 \partial \dot{x}_4} \\
&\quad \left. - \varepsilon_1 \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{x}_1 \partial \dot{x}_2} - \varepsilon_2 \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{x}_2^2} - \varepsilon_3 \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{x}_2 \partial \dot{x}_3} - \varepsilon_4 \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{x}_2 \partial \dot{x}_4}\right) dx_2 \\
&\quad - \left(-\frac{\partial^2 L}{\partial t \partial \dot{x}_3} - \dot{x}_1 \frac{\partial^2 L}{\partial x_3 \partial \dot{x}_1} + \dot{x}_2 \frac{\partial^2 L}{\partial x_3 \partial \dot{x}_2} + \dot{x}_3 \frac{\partial^2 L}{\partial x_3 \partial \dot{x}_3} + \dot{x}_4 \frac{\partial^2 L}{\partial x_3 \partial \dot{x}_4} + \frac{\partial L}{\partial x_3} \right. \\
&\quad - \dot{x}_1 \frac{\partial^2 L}{\partial x_1 \partial \dot{x}_3} + \dot{x}_1 \frac{\partial^2 L}{\partial x_3 \partial \dot{x}_1} - \dot{x}_2 \frac{\partial^2 L}{\partial x_2 \partial \dot{x}_3} + \dot{x}_2 \frac{\partial^2 L}{\partial x_3 \partial \dot{x}_2} - \dot{x}_4 \frac{\partial^2 L}{\partial x_4 \partial \dot{x}_3} + \dot{x}_4 \frac{\partial^2 L}{\partial x_3 \partial \dot{x}_4} \\
&\quad \left. - \varepsilon_1 \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{x}_1 \partial \dot{x}_3} - \varepsilon_2 \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{x}_2 \partial \dot{x}_3} - \varepsilon_3 \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{x}_3^2} - \varepsilon_4 \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{x}_3 \partial \dot{x}_4}\right) dx_3 \\
&\quad - \left(-\frac{\partial^2 L}{\partial t \partial \dot{x}_4} - \dot{x}_1 \frac{\partial^2 L}{\partial x_4 \partial \dot{x}_1} + \dot{x}_2 \frac{\partial^2 L}{\partial x_4 \partial \dot{x}_2} + \dot{x}_3 \frac{\partial^2 L}{\partial x_4 \partial \dot{x}_3} + \dot{x}_4 \frac{\partial^2 L}{\partial x_4 \partial \dot{x}_4} + \frac{\partial L}{\partial x_4} \right. \\
&\quad - \dot{x}_1 \frac{\partial^2 L}{\partial x_1 \partial \dot{x}_4} + \dot{x}_1 \frac{\partial^2 L}{\partial x_4 \partial \dot{x}_1} - \dot{x}_2 \frac{\partial^2 L}{\partial x_2 \partial \dot{x}_4} + \dot{x}_2 \frac{\partial^2 L}{\partial x_4 \partial \dot{x}_2} - \dot{x}_3 \frac{\partial^2 L}{\partial x_3 \partial \dot{x}_4} + \dot{x}_3 \frac{\partial^2 L}{\partial x_4 \partial \dot{x}_3} \\
&\quad \left. - \varepsilon_1 \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{x}_1 \partial \dot{x}_4} - \varepsilon_2 \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{x}_2 \partial \dot{x}_4} - \varepsilon_3 \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{x}_3 \partial \dot{x}_4} - \varepsilon_4 \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{x}_4^2}\right) dx_4
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\varepsilon_1 \dot{x}_1 \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{x}_1^2} + \varepsilon_1 \dot{x}_2 \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{x}_1 \partial \dot{x}_2} + \varepsilon_1 \dot{x}_3 \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{x}_1 \partial \dot{x}_3} \\
& + \varepsilon_1 \dot{x}_4 \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{x}_1 \partial \dot{x}_4} - \varepsilon_2 \dot{x}_1 \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{x}_1 \partial \dot{x}_2} + \varepsilon_2 \dot{x}_2 \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{x}_2^2} \\
& + \varepsilon_2 \dot{x}_3 \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{x}_2 \partial \dot{x}_3} + \varepsilon_2 \dot{x}_4 \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{x}_2 \partial \dot{x}_4} - \varepsilon_3 \dot{x}_1 \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{x}_1 \partial \dot{x}_3} \\
& + \varepsilon_3 \dot{x}_2 \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{x}_2 \partial \dot{x}_3} + \varepsilon_3 \dot{x}_3 \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{x}_3^2} + \varepsilon_3 \dot{x}_4 \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{x}_3 \partial \dot{x}_4} \\
& - \varepsilon_4 \dot{x}_1 \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{x}_1 \partial \dot{x}_4} + \varepsilon_4 \dot{x}_2 \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{x}_2 \partial \dot{x}_4} + \varepsilon_4 \dot{x}_3 \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{x}_3 \partial \dot{x}_4} \\
& + \varepsilon_4 \dot{x}_4 \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{x}_4^2} + 2\varepsilon_2 \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_2} + 2\varepsilon_3 \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_3} + 2\varepsilon_4 \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_4} dt
\end{aligned}$$

eşitliği elde edilir. Kısaca,

$$i_\varepsilon \Omega = \Omega(\varepsilon)$$

$$\begin{aligned}
& = \left\{ -\sum_{i=1}^4 \dot{x}_i \frac{\partial^2 L}{\partial t \partial \dot{x}_i} + \sum_{i=1}^4 \delta_i \dot{x}_i \left(\sum_{j=1}^4 \dot{x}_j \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{x}_i \partial \dot{x}_j} + \sum_{j=1}^4 \varepsilon_j \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{x}_i \partial \dot{x}_j} \right) \right. \\
& \quad \left. + \sum_{i=1}^4 \left(\dot{x}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} + 2\delta_i \varepsilon_i \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \right) + 2\varepsilon_1 \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1} \right\} dt \\
& \quad + \left\{ \sum_{i=1}^4 \delta_i \left(\frac{\partial^2 L}{\partial t \partial \dot{x}_i} - \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \right) + \sum_{i,j=1}^4 \left(\delta_i \varepsilon_j \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{x}_i \partial \dot{x}_j} + \mu_{ij} \dot{x}_i \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{x}_i \partial \dot{x}_j} \right) \right. \\
& \quad \left. + \sum_{i,j=1}^4 \delta_{ij} \delta_i \dot{x}_j \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{x}_j \partial \dot{x}_i} \right\} dx_i - \left\{ \sum_{i,j=1}^4 \delta_{ij} \left(\dot{x}_j \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{x}_i \partial \dot{x}_j} + \dot{x}_j \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{x}_i \partial \dot{x}_j} \right) \right\} dx_i
\end{aligned}$$

şeklinde ifade edilebilir. Bulunan denklem homojen bir diferansiyel denklemdir. Dolayısıyla elde edilen bu denklemde her diferansiyel terimin katsayısı sifıra eşit olmalıdır. Bu eşitliğin kurulması ile aşağıdaki denklem sistemi elde edilir.

denklem sistemi elde edilir. Kısaca,

$$1) -\frac{\partial^2 L}{\partial t \partial \dot{x}_1} + \frac{\partial L}{\partial x_1} \left(\sum_{i=1}^4 \delta_i \dot{x}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} + L \right) - \frac{\partial}{\partial \dot{x}_1} \left(\sum_{i=1}^4 \varepsilon_i \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \right) \\ + \sum_{i=1, j=1}^4 \mu_{ij} \dot{x}_j \left(\frac{\partial^2 L}{\partial x_i \partial \dot{x}_j} - \frac{\partial^2 L}{\partial x_j \partial \dot{x}_i} \right) = 0$$

$$2) \frac{\partial^2 L}{\partial t \partial \dot{x}_2} - \frac{\partial L}{\partial x_2} \left(\sum_{i=1}^4 \delta_i \dot{x}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} + L \right) + \frac{\partial}{\partial \dot{x}_2} \left(\sum_{i=1}^4 \varepsilon_i \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \right) \\ - \sum_{i=2, j=1}^4 \mu_{ij} \dot{x}_j \left(\frac{\partial^2 L}{\partial x_i \partial \dot{x}_j} - \frac{\partial^2 L}{\partial x_j \partial \dot{x}_i} \right) = 0$$

$$3) \frac{\partial^2 L}{\partial t \partial \dot{x}_3} - \frac{\partial L}{\partial x_3} \left(\sum_{i=1}^4 \delta_i \dot{x}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} + L \right) + \frac{\partial}{\partial \dot{x}_3} \left(\sum_{i=1}^4 \varepsilon_i \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \right) \\ - \sum_{i=3, j=1}^4 \mu_{ij} \dot{x}_j \left(\frac{\partial^2 L}{\partial x_i \partial \dot{x}_j} - \frac{\partial^2 L}{\partial x_j \partial \dot{x}_i} \right) = 0$$

$$4) \frac{\partial^2 L}{\partial t \partial \dot{x}_4} - \frac{\partial L}{\partial x_4} \left(\sum_{i=1}^4 \delta_i \dot{x}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} + L \right) + \frac{\partial}{\partial \dot{x}_4} \left(\sum_{i=1}^4 \varepsilon_i \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \right) \\ - \sum_{i=4, j=1}^4 \mu_{ij} \dot{x}_j \left(\frac{\partial^2 L}{\partial x_i \partial \dot{x}_j} - \frac{\partial^2 L}{\partial x_j \partial \dot{x}_i} \right) = 0$$

$$5) \frac{\partial}{\partial \dot{x}_1} \left(\sum_{i=1}^4 \delta_i \dot{x}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} + L \right) + \frac{\partial}{\partial \dot{x}_1} \left(\sum_{i=1}^4 \dot{x}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} - L \right) = 0$$

$$6) -\frac{\partial}{\partial \dot{x}_2} \left(\sum_{i=1}^4 \delta_i \dot{x}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} + L \right) - \frac{\partial}{\partial \dot{x}_2} \left(\sum_{i=1}^4 \dot{x}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} + L \right) = 0$$

$$7) -\frac{\partial}{\partial \dot{x}_3} \left(\sum_{i=1}^4 \delta_i \dot{x}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} + L \right) + \frac{\partial}{\partial \dot{x}_3} \left(\sum_{i=1}^4 \dot{x}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} + L \right) = 0$$

$$8) -\frac{\partial}{\partial \dot{x}_4} \left(\sum_{i=1}^4 \delta_i \dot{x}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} + L \right) + \frac{\partial}{\partial \dot{x}_4} \left(\sum_{i=1}^4 \dot{x}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} + L \right) = 0$$

$$9) \left\{ - \sum_{i=1}^4 \dot{x}_i \frac{\partial^2 L}{\partial t \partial \dot{x}_i} + \sum_{i=1}^4 \delta_i \dot{x}_i \left(\sum_{j=1}^4 \dot{x}_j \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{x}_i \partial x_j} + \sum_{j=1}^4 \varepsilon_j \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{x}_i \partial \dot{x}_j} \right) + \sum_{i=1}^4 \left(\dot{x}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} + 2\delta_i \varepsilon_i \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \right) + 2\varepsilon_1 \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1} \right\} = 0 \quad (2.11)$$

şeklinde yazılabilir. Euler-Lagrange enerji denkleminin elde edilebilmesi için 2.11'deki kısmi türevli denklem sistemi çözümlenmelidir. 2.11 non-linear bir denklem sistemidir. Dolayısıyla, bir özel kabul altında çözümü mümkündür. Bu nedenle aradığımız çözüm için özel olarak,

$$\varepsilon_1 = -\dot{x}_1, \quad \varepsilon_2 = \dot{x}_2, \quad \varepsilon_3 = \dot{x}_3, \quad \varepsilon_4 = \dot{x}_4 \quad (2.12)$$

kabulünü yapalım. Bu kabulü yaparken dikkat ettiğimiz husus, Minkowski metriğinde ilk terimin negatif alınması sebebiyle ve çalışmamızda bu metrik kullanıldığı için burada da ilk terimin negatif olmasıdır. Bunun dışında, katsayı fonksiyonları olan ε_i 'ler hem t hem de x_i koordinat fonksiyonlarını içermelidir. Türevsel koordinatların t ve x_i koordinatlarına bağlı olduğunu bildiğimize göre, katsayı fonksiyonlarının yerine özel olarak türevsel koordinatları kullanmamız uygun olur. Bu kabul altında yukarıdaki denklem sisteminin ortak çözümü incelenecektir. Yine metriğin negatif tanımlılık özelliğini dikkate alarak çözüm yapılmalıdır. Bulunan çözüm ise 1.17 ile verilen herhangi bir π demeti üzerinde elde edilmiş olan Euler-Lagrange denkleminin genel yapısı ile örtüşmelidir. Yapılan gerekli incelemeler ve işlemler sonucunda aşağıda verilen ortak çözümün en elverişli çözüm olduğu görülmüştür. Buna göre,

$$\dot{x}_1(1) - \dot{x}_2(2) - \dot{x}_3(3) - \dot{x}_4(4) + \dot{x}_1(5) - \dot{x}_2(6) - \dot{x}_3(7) - \dot{x}_4(8) + (9) = 0$$

ortak çözümünü yaparız. Gerekli hesaplamalar tamamlandığında aşağıda verilen homojen diferansiyel denklem elde edilir.

$$-\dot{x}_1 \frac{\partial^2 L}{\partial t \partial \dot{x}_1} - \dot{x}_2 \frac{\partial^2 L}{\partial t \partial \dot{x}_2} - \dot{x}_3 \frac{\partial^2 L}{\partial t \partial \dot{x}_3} - \dot{x}_4 \frac{\partial^2 L}{\partial t \partial \dot{x}_4} - \dot{x}_1^2 \frac{\partial^2 L}{\partial x_1 \partial \dot{x}_1} + \dot{x}_1 \dot{x}_2 \frac{\partial^2 L}{\partial x_1 \partial \dot{x}_2} + \dot{x}_1 \dot{x}_3 \frac{\partial^2 L}{\partial x_1 \partial \dot{x}_3} + \dot{x}_1 \dot{x}_4 \frac{\partial^2 L}{\partial x_1 \partial \dot{x}_4} + \dot{x}_1 \frac{\partial L}{\partial x_1}$$

$$\begin{aligned}
& -\dot{x}_1\dot{x}_2 \frac{\partial^2 L}{\partial x_2 \partial \dot{x}_1} + \dot{x}_2^2 \frac{\partial^2 L}{\partial x_2 \partial \dot{x}_2} + \dot{x}_2\dot{x}_3 \frac{\partial^2 L}{\partial x_2 \partial \dot{x}_3} + \dot{x}_2\dot{x}_4 \frac{\partial^2 L}{\partial x_2 \partial \dot{x}_4} + \dot{x}_2 \frac{\partial L}{\partial x_2} \\
& -\dot{x}_1\dot{x}_3 \frac{\partial^2 L}{\partial x_3 \partial \dot{x}_1} + \dot{x}_2\dot{x}_3 \frac{\partial^2 L}{\partial x_3 \partial \dot{x}_2} + \dot{x}_3^2 \frac{\partial^2 L}{\partial x_3 \partial \dot{x}_3} + \dot{x}_3\dot{x}_4 \frac{\partial^2 L}{\partial x_3 \partial \dot{x}_4} + \dot{x}_3 \frac{\partial L}{\partial x_3} \\
& -\dot{x}_1\dot{x}_4 \frac{\partial^2 L}{\partial x_4 \partial \dot{x}_1} + \dot{x}_2\dot{x}_4 \frac{\partial^2 L}{\partial x_4 \partial \dot{x}_2} + \dot{x}_3\dot{x}_4 \frac{\partial^2 L}{\partial x_3 \partial \dot{x}_3} + \dot{x}_4^2 \frac{\partial^2 L}{\partial x_4 \partial \dot{x}_4} + \dot{x}_4 \frac{\partial L}{\partial x_4} \\
& + \dot{x}_1^2 \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{x}_1 \partial \dot{x}_1} - \dot{x}_1\dot{x}_2 \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{x}_1 \partial \dot{x}_2} - \dot{x}_1\dot{x}_3 \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{x}_1 \partial \dot{x}_3} - \dot{x}_1\dot{x}_4 \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{x}_1 \partial \dot{x}_4} \\
& + \dot{x}_1^2 \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{x}_1 \partial \dot{x}_1} + \dot{x}_1\dot{x}_2 \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{x}_1 \partial \dot{x}_2} + \dot{x}_1\dot{x}_3 \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{x}_1 \partial \dot{x}_3} + \dot{x}_1\dot{x}_4 \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{x}_1 \partial \dot{x}_4} \\
& + \dot{x}_1\dot{x}_2 \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{x}_1 \partial \dot{x}_2} + \dot{x}_2^2 \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{x}_2 \partial \dot{x}_2} + \dot{x}_2\dot{x}_3 \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{x}_2 \partial \dot{x}_3} + \dot{x}_2\dot{x}_4 \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{x}_2 \partial \dot{x}_4} \\
& + \dot{x}_1\dot{x}_3 \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{x}_1 \partial \dot{x}_3} + \dot{x}_2\dot{x}_3 \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{x}_2 \partial \dot{x}_3} + \dot{x}_3^2 \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{x}_3 \partial \dot{x}_3} + \dot{x}_3\dot{x}_4 \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{x}_3 \partial \dot{x}_4} \\
& + \dot{x}_1\dot{x}_4 \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{x}_1 \partial \dot{x}_4} + \dot{x}_2\dot{x}_4 \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{x}_2 \partial \dot{x}_4} + \dot{x}_3\dot{x}_4 \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{x}_3 \partial \dot{x}_4} + \dot{x}_4^2 \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{x}_4 \partial \dot{x}_4} \\
& - \dot{x}_1^2 \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{x}_1 \partial \dot{x}_1} - \dot{x}_1\dot{x}_2 \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{x}_1 \partial \dot{x}_2} - \dot{x}_1\dot{x}_3 \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{x}_1 \partial \dot{x}_3} - \dot{x}_1\dot{x}_4 \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{x}_1 \partial \dot{x}_4} \\
& + 2\dot{x}_2 \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_2} + 2\dot{x}_3 \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_3} + 2\dot{x}_4 \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_4} = 0
\end{aligned} \tag{2.13}$$

Sonuçta, bulunan bu denklem, elde edilmesi istenilen Euler-Lagrange denkleminin açık halidir. Böylece çözüm tamamlanmış olur. Kısaca,

$$\delta_i = \begin{cases} -1, & i = 1 \\ 1, & i = 2, 3, 4 \end{cases}$$

olmak üzere Minkowski jet demet yapısı üzerinde Euler-Lagrange enerji denklemi aşağıdaki şekilde ifade edilir.

$$\begin{aligned}
& -\frac{\partial}{\partial t} \left(\sum_{i=1}^4 \dot{x}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \right) - \dot{x}_1 \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1} \left(\delta_i \sum_{i=1}^4 \dot{x}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} + \sum_{i=1}^4 \dot{x}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \right) \\
& + \left(\delta_i \sum_{i=1}^4 \dot{x}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \right) \left(\sum_{j=1}^4 \dot{x}_j \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_j} \right) + \left(\sum_{i=1}^4 \dot{x}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \right) \left(\sum_{j=1}^4 \dot{x}_j \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_j} \right) \\
& + \left(\delta_i \sum_{i=1}^4 \dot{x}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} + \sum_{i=1}^4 \dot{x}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \right) + \sum_{i=1}^4 \dot{x}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} = 0
\end{aligned} \tag{2.14}$$

1.17’de verilen denklem ile bu denklemin birinci ve sonuncu terimleri benzerdir. Sadece özel kabulümüzden kaynaklanan katsayı fonksiyonlarımız eklenmiştir. Bu fonksiyonları daha da özelleştirip, örneğin bir sabit değerini alsaydık bu katsayılar oluşmazdı. Aradaki terimler kullanılan metriğin negatif tanımlı olmasından dolayı oluşur. 1.17’de metrik pozitif olduğundan bu terimler sadeleşmeyle ortadan kalkar. Sonuç olarak 2.14 eşitliği Minkowski uzayında Euler-Lagrange enerji denklemini ifade eder.

2.2 UYGULAMALAR

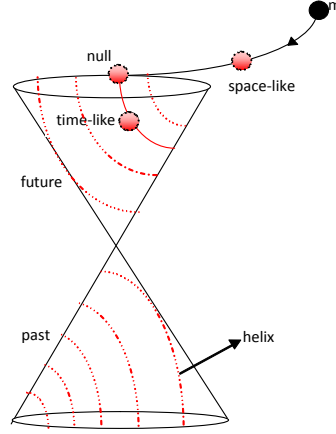
Bu kısımda 2.14 ile verilen Euler-Lagrange enerji denkleminin bazı yüzeyler üzerinde incelenmesine dair örnekler verilmiştir. Burada amaç, enerji fonksiyonunu t zaman ve x konum değerine göre elde ederek, enerji değerini hesaplamaktır. Bu sayede oluşan hareket ve hareket esnasında ortaya çıkan enerji için matematiksel hesaplamamın yanısıra fiziksel yorum da yapılabilir. Böylece çalışmamız teorik fizikte kullanılan matematiksel kavramları daha somut hale getirir. Ayrıca diferansiyel denklemlerin çözümü, enerji fonksiyonunun bulunmasının yanısıra bu fonksiyon ile hareketin her aşamasında ortaya çıkan enerji değerini hesaplamayı avantajlı kılar.

2.2.1 Örnek: (HELİS ÖRNEĞİ)

Minkowski zaman-koni üzerinde

$$\alpha(\theta) = (t, r \sinh u\theta, r \cosh u\theta \sin \theta, r \cosh u\theta \cos \theta) \tag{2.15}$$

helisini alalım. [1] Bu helis eğrisini aşağıdaki grafikte gösterebiliriz.



şekil 3

Şekil-3'de uzayda alınan hareketli bir m parçacığının Minkowski zaman koni üzerine düştükten sonra, koni içinde kalan helis eğrisi üzerindeki hareketini görmekteyiz. Zaman koni dışında kalan eğriler space-like eğri olarak tanımlanır. Dolayısıyla parçacığın koni üzerine düşene kadar yaptığı hareket space-like bir eğri üzerinde olmalıdır. Koni kabuğuna değdiği anda, hareketli cisim null bir vektör üzerine düşmüş olur. Zaman koninin içinde kalan eğriler time-like eğridir. m parçacığı koni içinde hareketine devam ederse, bu hareketin doğrultu ve büyüklüğünü oluşturan vektörler birer time-like vektör olmalıdır. Bizim esas çalışma alanımız koni içinde oluşan hareket olduğundan, sadece time-like vektörler ile çalışmamız gerektiği açıktır. Dolayısıyla, helis eğrisine herhangi bir noktadaki teğet vektörün time-like olması incelendiğinde eğrinin parametrizasyon değerleri için bazı şartlar oluşur. Elde edilen bu koşullar çalışmamızdaki temel kavramların doğruluğu ile uyumaktadır. Ayrıca çözüm değerlerimiz üzerinde de hareketin oluşumu açısından bazı sınırlamalar getirir. Bu sınırlamanın olması da hareketin time koni ile sınırlı olması ve koninin gelecek kısmından geçmişe doğru oluşması açısından doğaldır. Diğer yandan uzaydaki hareketin, yani space-like eğri üzerinde oluşan hareketin zaman aralığı ile time koni içinde oluşan hareketin zaman aralığı farklı alınabilir. Bunun sebebi fiziksel anlamda yer çekiminden kaynaklanan uzay ve dünyadaki hareketlerde oluşan zamandaki farklılıktır. Bu iki kavram her ne kadar birbirine bağlı olabilse de matematiksel olarak iki ayrı parametre ile tanımlanabilirler. O halde, bu çalışmada uzay zamanı s ve time koni içinde geçen zamanı t parametresi ile ifade edelim.

Şimdi, alınan helis eğrisi için jetleri tanımlayalım. Jet manifold yapısını kurmak için öncelikle koordinat sistemini oluşturmalıyız. Birinci jetlerin eğrinin

teğet vektörleri ile çakışık olduğunu biliyoruz. Bu nedenle helis eğrisinin birinci türevini alarak bize gerekli olan jet koordinat sistemini elde ederiz. O halde, bu koordinatlar aşağıdaki şekilde belirlenir;

$$\begin{pmatrix} s, t, r \sinh u\theta, r \cosh u\theta \sin \theta, r \cosh u\theta \cos \theta, \\ \dot{t}, \dot{r} \sinh u\theta, \dot{r} \cosh u\theta \sin \theta, \dot{r} \cosh u\theta \cos \theta \end{pmatrix} \quad (2.16)$$

Burada türevsel koordinatlarda kullanılan \dot{t} ve \dot{r} parametreleri

$$\dot{t} = \frac{dt}{ds}, \quad \dot{r} = \frac{dr}{ds} \quad (2.17)$$

ile belirlidir. Helis için θ açısı sabit kalacağından bu parametre için türev söz konusu değildir. Diğer yandan helis eğrisinin time-like bir eğri olması gerektiğini ifade etmiştik. O halde, $\langle \alpha', \alpha' \rangle < 0$ olmalıdır, ayrıca θ iki time-like vektör arasındaki açı olduğunda 1.28 eşitliği sağlanır.

$$\alpha'(\theta) = (0, ru \cosh u\theta, ru \sinh u\theta \sin \theta + r \cosh u\theta \cos \theta, ru \sinh u\theta \cos \theta - r \cosh u\theta \sin \theta)$$

olduğuna göre yukarıdaki 1.28 eşitliği dikkate alınırsa

$$\langle \alpha', \alpha' \rangle = r^2 (\cosh^2 u\theta - u^2)$$

elde edilir. Burada 1.26 ile verilen metriği kullanırken $\alpha'(\theta)$ hız vektöründeki birinci terimi ihmal ederiz. Bunun sebebi, çalışmamızda birinci koordinat zamana karşılık geldiği için, burada da bu koordinat sıfır olduğundan fiziksel olarak bir anlamsızlıkla karşılaşırız. Bu nedenle hız vektörünü tanımlarken vektörü zamandan ayrı tutup, konum değerlerine bağlı kalacağımı gözönüne alırız. Bu nedenle 1.26'deki metriği dikkate aldığımızda ve $\langle \alpha', \alpha' \rangle < 0$ olacağı için

$$-u < \cosh u\theta < u$$

koşulu altında çözüm vardır.

2.16 ile ifade edilen jet koordinatları 2.14 Lagrange enerji denkleminde yerine yazılırsa helis eğrisi üzerinde tanımladığımız hareketin Euler-Lagrange enerji denklemini elde ederiz. Böylece,

$$-\dot{t} \frac{\partial^2 L}{\partial s \partial \dot{t}} - \dot{r} \sinh u\theta \frac{\partial^2 L}{\partial s \partial \dot{r} \sinh u\theta} - \dot{r} \cosh u\theta \sin \theta \frac{\partial^2 L}{\partial s \partial \dot{r} \cosh u\theta \sin \theta}$$

$$\begin{aligned}
& -\dot{r} \cosh u\theta \cos \theta \frac{\partial^2 L}{\partial s \partial \dot{r} \cosh u\theta \cos \theta} - \dot{t}^2 \frac{\partial^2 L}{\partial t \partial \dot{t}} + \dot{t} \dot{r} \sinh u\theta \frac{\partial^2 L}{\partial t \partial \dot{r} \sinh u\theta} \\
& + \dot{t} \dot{r} \cosh u\theta \sin \theta \frac{\partial^2 L}{\partial t \partial \dot{r} \cosh u\theta \sin \theta} + \dot{t} \dot{r} \cosh u\theta \cos \theta \frac{\partial^2 L}{\partial t \partial \dot{r} \cosh u\theta \cos \theta} + \dot{t} \frac{\partial L}{\partial t} \\
& - \dot{t} \dot{r} \sinh u\theta \frac{\partial^2 L}{\partial r \sinh u\theta \partial \dot{t}} + (\dot{r} \sinh u\theta)^2 \frac{\partial^2 L}{\partial r \sinh u\theta \partial \dot{r} \sinh u\theta} \\
& + \dot{r} \sinh u\theta \dot{r} \cosh u\theta \sin \theta \frac{\partial^2 L}{\partial r \sinh u\theta \partial \dot{r} \cosh u\theta \sin \theta} \\
& + \dot{r} \sinh u\theta \dot{r} \cosh u\theta \cos \theta \frac{\partial^2 L}{\partial r \sinh u\theta \partial \dot{r} \cosh u\theta \cos \theta} \\
& + \dot{r} \sinh u\theta \frac{\partial L}{\partial r \sinh u\theta} - \dot{t} \dot{r} \cosh u\theta \sin \theta \frac{\partial^2 L}{\partial r \cosh u\theta \sin \theta \partial \dot{t}} \\
& + \dot{r} \sinh u\theta \dot{r} \cosh u\theta \sin \theta \frac{\partial^2 L}{\partial r \cosh u\theta \sin \theta \partial \dot{r} \sinh u\theta} \\
& + (\dot{r} \cosh u\theta \sin \theta)^2 \frac{\partial^2 L}{\partial r \cosh u\theta \sin \theta \partial \dot{r} \cosh u\theta \sin \theta} \\
& + \dot{r} \cosh u\theta \sin \theta \dot{r} \cosh u\theta \cos \theta \frac{\partial^2 L}{\partial r \cosh u\theta \sin \theta \partial \dot{r} \cosh u\theta \cos \theta} \\
& + \dot{r} \cosh u\theta \sin \theta \frac{\partial L}{\partial r \cosh u\theta \sin \theta} - \dot{t} \dot{r} \cosh u\theta \cos \theta \frac{\partial^2 L}{\partial r \cosh u\theta \cos \theta \partial \dot{t}} \\
& + \dot{r} \sinh u\theta \dot{r} \cosh u\theta \cos \theta \frac{\partial^2 L}{\partial r \cosh u\theta \cos \theta \partial \dot{r} \sinh u\theta} \\
& + \dot{r} \cosh u\theta \sin \theta \dot{r} \cosh u\theta \cos \theta \frac{\partial^2 L}{\partial r \cosh u\theta \sin \theta \partial \dot{r} \cosh u\theta \cos \theta} \\
& + (\dot{r} \cosh u\theta \cos \theta)^2 \frac{\partial^2 L}{\partial r \cosh u\theta \cos \theta \partial \dot{r} \cosh u\theta \cos \theta} \\
& + \dot{r} \cosh u\theta \cos \theta \frac{\partial L}{\partial r \cosh u\theta \cos \theta}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \dot{t}^2 \frac{\partial^2 L}{\partial t \partial t} + \dot{t} \dot{r} \sinh u \theta \frac{\partial^2 L}{\partial t \partial r \sinh u \theta} \\
& + (\dot{r} \sinh u \theta)^2 \frac{\partial^2 L}{\partial r \sinh u \theta \partial r \sinh u \theta} \\
& + \dot{r} \sinh u \theta \dot{r} \cosh u \theta \sin \theta \frac{\partial^2 L}{\partial r \sinh u \theta \partial r \cosh u \theta \sin \theta} \\
& + \dot{r} \sinh u \theta \dot{r} \cosh u \theta \cos \theta \frac{\partial^2 L}{\partial r \sinh u \theta \partial r \cosh u \theta \cos \theta} \\
& + \dot{t} \dot{r} \cosh u \theta \sin \theta \frac{\partial^2 L}{\partial r \cosh u \theta \sin \theta \partial t} \\
& + \dot{r} \sinh u \theta \dot{r} \cosh u \theta \sin \theta \frac{\partial^2 L}{\partial r \cosh u \theta \sin \theta \partial r \sinh u \theta} \\
& + (\dot{r} \cosh u \theta \sin \theta)^2 \frac{\partial^2 L}{\partial r \cosh u \theta \sin \theta \partial r \cosh u \theta \sin \theta} \\
& + \dot{r} \cosh u \theta \sin \theta \dot{r} \cosh u \theta \cos \theta \frac{\partial^2 L}{\partial r \cosh u \theta \sin \theta \partial r \cosh u \theta \cos \theta} \\
& + \dot{t} \dot{r} \cosh u \theta \cos \theta \frac{\partial^2 L}{\partial t \partial r \cosh u \theta \cos \theta} \\
& + \dot{r} \sinh u \theta \dot{r} \cosh u \theta \cos \theta \frac{\partial^2 L}{\partial r \sinh u \theta \partial r \cosh u \theta \cos \theta} \\
& + \dot{r} \cosh u \theta \sin \theta \dot{r} \cosh u \theta \cos \theta \frac{\partial^2 L}{\partial r \cosh u \theta \sin \theta \partial r \cosh u \theta \cos \theta} \\
& + (\dot{r} \cosh u \theta \cos \theta)^2 \frac{\partial^2 L}{\partial r \cosh u \theta \cos \theta \partial r \cosh u \theta \cos \theta} \\
& - \dot{t} \dot{r} \sinh u \theta \frac{\partial^2 L}{\partial t \partial r \sinh u \theta} - \dot{t} \dot{r} \cosh u \theta \sin \theta \frac{\partial^2 L}{\partial t \partial r \cosh u \theta \sin \theta} \\
& - \dot{t} \dot{r} \cosh u \theta \cos \theta \frac{\partial^2 L}{\partial t \partial r \cosh u \theta \cos \theta} + 2 \dot{r} \cosh u \theta \cos \theta \frac{\partial L}{\partial r \cosh u \theta \cos \theta} \\
& + 2 \dot{r} \sinh u \theta \frac{\partial L}{\partial r \sinh u \theta} + 2 \dot{r} \cosh u \theta \sin \theta \frac{\partial L}{\partial r \cosh u \theta \sin \theta} = 0
\end{aligned}$$

Euler-Lagrange enerji denklemi elde edilir. Gerekli sadeleştirmeleri yaparak denklemi düzenlediğimizde,

$$\begin{aligned}
& -\dot{t} \frac{\partial^2 L}{\partial s \partial \dot{t}} - 3\dot{r} \frac{\partial^2 L}{\partial s \partial \dot{r}} - \dot{t}^2 \frac{\partial^2 L}{\partial t \partial \dot{t}} + 3\dot{t}\dot{r} \frac{\partial^2 L}{\partial t \partial \dot{r}} + \dot{t} \frac{\partial L}{\partial t} - 3\dot{t}\dot{r} \frac{\partial^2 L}{\partial r \partial \dot{t}} + 9\dot{r}^2 \frac{\partial^2 L}{\partial r \partial \dot{r}} \\
& + 3\dot{r} \frac{\partial L}{\partial r} + \dot{t}^2 \frac{\partial^2 L}{\partial t \partial \dot{t}} + 3\dot{t}\dot{r} \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{r} \partial \dot{t}} + 9\dot{r}^2 \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{r} \partial \dot{r}} - 3\dot{t}\dot{r} \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{r} \partial \dot{t}} + 6\dot{r} \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = 0
\end{aligned} \tag{2.18}$$

denklemi elde edilir.

Burada s ve t zaman değerleri birbirlerine bağlı kabul edilmiştir. Yani,

$$\frac{dt}{ds} = k(sbt) \tag{2.19}$$

olur. Böylece , $t = ks$ eşitliği elde edilir.

2.18 denklemi non-lineer bir denklem olduğundan ancak özel koşul altında çözülebilir. Burada $t = t(s)$, $L = L(t, s)$ olduğuna göre özel koşulu alırken öncelikle türevsel koordinatları kullanmayı tercih ederiz. Buna göre

$$\frac{dL}{dr} = \lambda \Rightarrow L = \lambda r \tag{2.20}$$

$$\frac{dL}{dt} = \mu \Rightarrow L = \mu t \tag{2.21}$$

koşullarının varlığını kabul edelim. Bu koşulları 2.18' de yerine yazarsak

$$\frac{dt}{ds} \frac{\partial L}{\partial t} + 3 \frac{dr}{ds} \frac{\partial L}{\partial r} + 6 \frac{dr}{ds} \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = 0$$

denklemini elde ederiz. Bu denklemin düzenlenmesi ile

$$\frac{\partial L}{\partial s} + 3 \frac{\partial L}{\partial s} + 6\dot{r} \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = 0$$

eşitliği bulunur. Yukarıdaki koşulların tekrar kullanımı ve sadeleştirme ile

$$\Rightarrow 3\dot{r}\lambda + 2\frac{\partial L}{\partial s} = 0$$

$$\Rightarrow 3\frac{dr}{ds}\lambda + 2\frac{\partial L}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial s} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{dr}{ds}\left(3\lambda + 2\frac{\partial L}{\partial r}\right) = 0$$

eşitliği elde edilir.

Burada $\frac{dr}{ds} \neq 0$ olduğundan

$$2\frac{\partial L}{\partial r} = -3\lambda$$

olmalıdır. Böylece,

$$L = -\frac{3}{2}\lambda r \quad (2.22)$$

enerji fonksiyonu elde edilir.

Diğer taraftan, 2.20 ve 2.22 eşitliklerini eşitlersek,

$$\lambda\dot{r} = -\frac{3}{2}\lambda r$$

olacağından,

$$\frac{dr}{ds} = -\frac{3}{2}r$$

$$\Rightarrow r = e^{-\frac{3}{2}s}$$

$$\Rightarrow r = e^{-\frac{3}{2}\frac{t}{k}} \quad (2.23)$$

elde edilir. Bulduğumuz 2.23 yarıçap fonksiyonunu 2.22 enerji fonksiyonunda yerine yazarsak,

$$L = -\frac{3}{2}\lambda e^{-\frac{3}{2}\frac{t}{k}} \quad \lambda (sbt) \quad (2.24)$$

bulunur. 2.24 eşitliği helis eğrisi için Euler-Lagrange enerji fonksiyonudur. Kabulümüze uygun olarak temel parametrenin zaman olduğunu görtürtüz. Demek ki hareket ve hareketin oluşturduğu enerji zamana bağlı olarak değer alır.

Burada $\frac{dt}{ds} = k$ eşitliği ile belirli olan k 'yı bulmak için aşağıdaki yol izlenir.

Dünya zamanı ile Minkowski uzay zamanı arasındaki oran k olduğuna göre, hareketli cismin dünyadaki hızının Minkowski uzayındaki hızına oranı da k olmalıdır. Buna göre,

$$\alpha(t) = (t, r \sinh u\theta, r \cosh u\theta \sin \theta, r \cosh u\theta \cos \theta)$$

helis eğrisini gözöntüne aldığımızda Öklid uzayında bu eğri boyunca hareket eden cismin hızı

$$\frac{d\alpha}{dt} = \left(1, \frac{dr}{dt} \sinh u\theta, \frac{dr}{dt} \cosh u\theta \sin \theta, \frac{dr}{dt} \cosh u\theta \cos \theta \right)$$

eşitliğinden

$$\left\| \frac{d\alpha}{dt} \right\| = \sqrt{\left\langle \frac{d\alpha}{dt}, \frac{d\alpha}{dt} \right\rangle} = \sqrt{1 + \left(\frac{dr}{dt} \right)^2 \cosh 2u\theta}$$

elde edilir. Benzer şekilde Minkowski uzayındaki hızı ise

$$\frac{d\alpha}{ds} = \left(\frac{dt}{ds}, \frac{dr}{ds} \sinh u\theta, \frac{dr}{ds} \cosh u\theta \sin \theta, \frac{dr}{ds} \cosh u\theta \cos \theta \right)$$

olur ve

$$\left\| \frac{d\alpha}{ds} \right\| = \sqrt{\left\langle \frac{d\alpha}{ds}, \frac{d\alpha}{ds} \right\rangle} = \sqrt{\left(\frac{dr}{ds} \right)^2 \cosh 2u\theta - k^2}$$

hız değeri bulunur. O halde bu eşitlikleri oranladığımızda, k oranının korunacağını bildiğimize göre aşağıdaki eşitliği yazabiliriz.

$$\frac{\left\| \frac{d\alpha}{dt} \right\|}{\left\| \frac{d\alpha}{ds} \right\|} = \frac{\sqrt{1 + \left(\frac{dr}{dt} \right)^2 \cosh 2u\theta}}{\sqrt{\left(\frac{dr}{ds} \right)^2 \cosh 2u\theta - k^2}} = k \quad (2.25)$$

Burada 2.23 ile belirli olan yarıçap fonksiyonunda t ve s' ye göre türevleri gözönüne alır ve yerine yazarsak,

$$\frac{\sqrt{1 + \frac{9}{4k^2} e^{-\frac{3t}{k}} \cosh 2u\theta}}{\sqrt{\frac{9}{4} e^{-3s} \cosh 2u\theta - k^2}} = k$$

bulunur. Gerekli düzenlemeleri yaparak k oranı ile t zamanı arasında varolan bağıntıyı aşağıdaki şekilde elde ederiz.

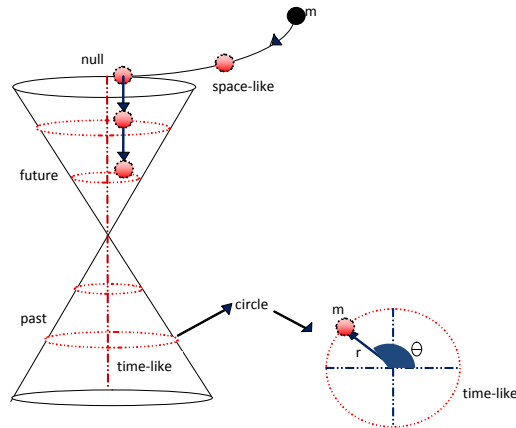
$$t = -\frac{k}{3} \ln \left[\frac{4k^2 (1 + k^4)}{9 (k^4 - 1) \cosh 2u\theta} \right] \quad (2.26)$$

2.2.2 Örnek: (ÇEMBER ÖRNEĞİ)

Minkowski zaman-koni üzerinde

$$\alpha(\theta) = (t, r \cos \theta, r \sin \theta, u) \quad (2.27)$$

çemberini alalım.



şekil 4

Şekil-4'de uzayda alınan hareketli bir m parçacığının Minkowski zaman koni üzerine düştükten sonra, koni içinde kalan çember eğrileri üzerindeki hareketini

görmekteyiz. Bu örnekte de helis örneğindeki gibi benzer bir hareket düşünmekteyiz. Bu nedenle helis örneğinde aldığımız eğri tipleri burada da geçerlidir. Yalnız m cismi burada helisten farklı olarak çember eğrilerine belli bir noktada geçecek şekilde düşme yapar. Bu düşme esnasında çemberlerin yarıçaplarının zamana bağlı olarak değişeceği açıktır. Bu değişim helis örneğinde olduğu gibi enerjinin zamana bağlı olmasını gerektirir. Bunun yanısıra, bu çalışmada uzay zamanı s ve time koni içinde geçen zamanı t parametresi olmak üzere, bu zaman değerleri arasında yine belirli bir oran olmalıdır.

Şimdi alınan çember eğrisi için jetleri tanımlayalım. Birinci jetlerin eğrinin teğet vektörleri ile çakışık olduğunu bildiğimize göre, çember eğrisinin birinci türevini alarak bize gerekli olan jet koordinat sistemini elde ederiz. O halde, jet koordinatlar aşağıdaki şekilde belirlenir;

$$\left(s, t, r \cos \theta, r \sin \theta, u, \dot{t}, \dot{r} \cos \theta, \dot{r} \sin \theta, 0 \right) \quad (2.28)$$

Burada türevsel koordinatlarda kullanılan \dot{t} ve \dot{r} parametreleri 2.17'de verildiği şekilde belirlidir. m cisminin düşme hareketinin belli bir noktada olduğunu kabul ettiğimiz için, bu noktanın ve izdüşümlerinin, çemberlerin asal eksenleri ile yaptığı θ açısının sabit kalacağını kabul edebiliriz. Dolayısıyla θ parametresi için zamana göre türev söz konusu değildir. Diğer yandan çember eğrisi bir time-like bir eğri olduğundan $\langle \alpha', \alpha' \rangle < 0$ olmalıdır.

$$\alpha'(\theta) = (0, -r \sin \theta, r \cos \theta, 0)$$

olduğundan

$$\sin 2\theta < 0$$

yani

$$180^\circ < 2\theta < 360^\circ$$

$$90^\circ < \theta < 180^\circ \quad (2.29)$$

koşulu sağlanmalıdır. Bu ise şekil-4'de görülmektedir.

2.28 jet koordinatlarını 2.14 enerji denkleminde yerine yazarsak,

$$-\dot{t} \frac{\partial^2 L}{\partial s \partial t} - \dot{r} \cos \theta \frac{\partial^2 L}{\partial s \partial \dot{r} \cos \theta} - \dot{r} \sin \theta \frac{\partial^2 L}{\partial s \partial \dot{r} \sin \theta}$$

$$\begin{aligned}
& -\dot{t}^2 \frac{\partial^2 L}{\partial t \partial \dot{t}} + \dot{t} \dot{r} \cos \theta \frac{\partial^2 L}{\partial t \partial \dot{r} \cos \theta} + \dot{t} \dot{r} \sin \theta \frac{\partial^2 L}{\partial t \partial \dot{r} \sin \theta} + \dot{t} \frac{\partial L}{\partial t} \\
& -\dot{t} \dot{r} \cos \theta \frac{\partial^2 L}{\partial r \cos \theta \partial \dot{t}} + (\dot{r} \cos \theta)^2 \frac{\partial^2 L}{\partial r \cos \theta \partial \dot{r} \cos \theta} + \dot{r} \cos \theta \dot{r} \sin \theta \frac{\partial^2 L}{\partial r \cos \theta \partial \dot{r} \sin \theta} \\
& + \dot{r} \cos \theta \frac{\partial L}{\partial r \cos \theta} - \dot{t} \dot{r} \sin \theta \frac{\partial^2 L}{\partial r \sin \theta \partial \dot{t}} + \dot{r} \cos \theta \dot{r} \sin \theta \frac{\partial^2 L}{\partial r \cos \theta \partial \dot{r} \sin \theta} \\
& + (\dot{r} \sin \theta)^2 \frac{\partial^2 L}{\partial r \sin \theta \partial \dot{r} \sin \theta} + \dot{r} \sin \theta \frac{\partial L}{\partial r \sin \theta} + \dot{t}^2 \frac{\partial^2 L}{\partial t \partial \dot{t}} - \dot{t} \dot{r} \cos \theta \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{r} \cos \theta \partial \dot{t}} \\
& + (\dot{r} \cos \theta)^2 \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{r} \cos \theta \partial \dot{r} \cos \theta} + \dot{r} \cos \theta \dot{r} \sin \theta \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{r} \cos \theta \partial \dot{r} \sin \theta} + \dot{t} \dot{r} \sin \theta \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{r} \sin \theta \partial \dot{t}} \\
& + \dot{r} \cos \theta \dot{r} \sin \theta \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{r} \cos \theta \partial \dot{r} \sin \theta} + (\dot{r} \sin \theta)^2 \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{r} \sin \theta \partial \dot{r} \sin \theta} - \dot{t} \dot{r} \cos \theta \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{t} \partial \dot{r} \cos \theta} \\
& - \dot{t} \dot{r} \sin \theta \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{t} \partial \dot{r} \sin \theta} + 2\dot{r} \cos \theta \frac{\partial L}{\partial \dot{r} \cos \theta} + 2\dot{r} \sin \theta \frac{\partial L}{\partial \dot{r} \sin \theta} = 0
\end{aligned}$$

Euler-Lagrange enerji denklemini elde ederiz. Bu denklemi düzenlediğimizde,

$$\begin{aligned}
& -\dot{t} \frac{\partial^2 L}{\partial s \partial \dot{t}} - 2\dot{r} \frac{\partial^2 L}{\partial s \partial \dot{r}} - \dot{t}^2 \frac{\partial^2 L}{\partial t \partial \dot{t}} + 2\dot{t} \dot{r} \frac{\partial^2 L}{\partial t \partial \dot{r}} + \dot{t} \frac{\partial L}{\partial t} - 2\dot{t} \dot{r} \frac{\partial^2 L}{\partial r \partial \dot{t}} + 4\dot{r}^2 \frac{\partial^2 L}{\partial r \partial \dot{r}} \\
& + 2\dot{r} \frac{\partial L}{\partial r} + \dot{t}^2 \frac{\partial^2 L}{\partial t \partial \dot{t}} + 2\dot{t} \dot{r} \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{r} \partial \dot{t}} + 4\dot{r}^2 \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{r} \partial \dot{r}} - 2\dot{t} \dot{r} \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{r} \partial \dot{t}} + 4\dot{r} \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = 0
\end{aligned} \tag{2.30}$$

elde edilir.

Burada s ve t birbirine bağlı olduğundan, 2.19 eşitliğini gözönüne aldığımızda $t = ks$ olur.

Elde edilen bu denklem yine non-lineer bir denklem olduğundan özel koşul altında çözüme gideriz. Bu örnekte de 2.20 ve 2.21 koşullarını aynen kabul edelim. Bu koşullar ile denklemi yeniden düzenlersek,

$$\frac{dt}{ds} \frac{\partial L}{\partial t} + 2 \frac{dr}{ds} \frac{\partial L}{\partial r} + 4 \frac{dr}{ds} \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\partial L}{\partial s} + 2\frac{\partial L}{\partial s} + 4\dot{r}\frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = 0$$

$$\Rightarrow 4\dot{r}\lambda + 3\frac{\partial L}{\partial s} = 0$$

$$\Rightarrow 4\frac{dr}{ds}\lambda + 3\frac{\partial L}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial s} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{dr}{ds} \left(4\lambda + 3\frac{\partial L}{\partial r} \right) = 0$$

eşitliği elde edilir. Burada $\frac{dr}{ds} \neq 0$ olacağından

$$3\frac{\partial L}{\partial r} = -4\lambda$$

bulunur. Bu eşitliğin çözümü ile

$$L = -\frac{4}{3}\lambda r$$

(2.31)

Euler-Lagrange fonksiyonu elde edilir.

Diğer taraftan, 2.20 ve 2.31'den

$$\lambda\dot{r} = -\frac{4}{3}\lambda r$$

olacağı için,

$$\frac{dr}{ds} = -\frac{4}{3}r$$

$$\Rightarrow r = e^{-\frac{4}{3}s}$$

$$\Rightarrow r = e^{-\frac{4}{3} \frac{t}{k}} \quad (2.32)$$

yarıçap fonksiyonu elde edilir. O halde çember eğrisi için Euler-Lagrange fonksiyonu,

$$L = -\frac{4}{3} \lambda e^{-\frac{4}{3} \frac{t}{k}} \quad \lambda(sbt) \quad (2.33)$$

olarak belirlenir. Kabulümüze uygun olarak yine temel parametrenin zaman olduğunu götürürüz. Demek ki çember üzerinde de hareket ve hareketin oluşturduğu enerji zamana bağlı olarak değer alır.

Burada da $\frac{dt}{ds} = k$ eşitliği ile belirli olan k 'yı bulmak için yukarıdaki örneğe benzer yol izlenir.

$$\alpha(t) = (t, r \cos \theta, r \sin \theta, u)$$

çember eğrisini gözöntüne aldığımızda Öklid uzayında bu eğri boyunca hareket eden cisimin hızı

$$\frac{d\alpha}{dt} = \left(1, \frac{dr}{dt} \cos \theta, \frac{dr}{dt} \sin \theta, 0 \right)$$

türevi hesaplanarak

$$\left\| \frac{d\alpha}{dt} \right\| = \sqrt{\left\langle \frac{d\alpha}{dt}, \frac{d\alpha}{dt} \right\rangle} = \sqrt{1 + \left(\frac{dr}{dt} \right)^2}$$

değeri ile elde edilir. Benzer şekilde Minkowski uzayındaki hızı ise,

$$\frac{d\alpha}{ds} = \left(\frac{dt}{ds}, \frac{dr}{ds} \cos \theta, \frac{dr}{ds} \sin \theta, 0 \right)$$

Minkowski zamana göre türevi alınarak,

$$\left\| \frac{d\alpha}{ds} \right\| = \sqrt{\left\langle \frac{d\alpha}{ds}, \frac{d\alpha}{ds} \right\rangle} = \sqrt{\left(\frac{dr}{ds} \right)^2 - k^2}$$

bulunur. O halde bu eşitlikleri oranladığımızda,

$$\frac{\left\| \frac{d\alpha}{dt} \right\|}{\left\| \frac{d\alpha}{ds} \right\|} = \frac{\sqrt{1 + \left(\frac{dr}{dt} \right)^2}}{\sqrt{\left(\frac{dr}{ds} \right)^2 - k^2}} = k \quad (2.34)$$

eşitliği elde edilir. Burada 2.32 ile belirli olan yarıçap fonksiyonunun t ve s' ye göre türevlerini gözönüne alır ve yerine yazarsak,

$$\frac{\sqrt{1 + \frac{16}{9k^2} e^{-\frac{8t}{3k}}}}{\sqrt{\frac{16}{9} e^{-\frac{8}{3}s} - k^2}} = k$$

eşitliği bulunur. Burada gerekli düzenlemeleri yaptığımızda,

$$t = -\frac{3k}{8} \ln \left[\frac{9k^2 (1 + k^4)}{16 (k^4 - 1)} \right] \quad (2.35)$$

k oranı ile t zamam arasındaki bağıntı elde edilir.

3 MINKOWSKI 4-UZAYINDA HAMILTON MEKANİK SİSTEMLER

Bu bölümde analitik mekaniğin önemli konularından bir diğeri olan Hamilton mekanik sistemlerini inceleyeceğiz. Öncelikle bölüm-2 de verilen Minkowski jet demet yapısı üzerinde, Hamilton enerji denklemini elde etmek için gerekli geometrik yapıları tanımlayacağız. Daha sonra bulunan enerji denkleminin bazı örnekler üzerinde uygulamalarını göstereceğiz.

3.1 HAMILTON SİSTEMLER

Bölüm 2.1’de tanımladığımız Minkowski jet demeti $J^1E_1^4$ ’ü ele alalım. Bu demet yapısı üzerindeki indirgenmiş koordinat sistemi 2.2 ile belirlenmiştir. Hatta jet demet yapısından gelen türevsel koordinatlar burada da 2.3 ile aynı biçimde ifade edilir. Buna göre, verilen koordinat sistemi kullanılarak bölüm 1.3.2’de herhangi bir demet üzerinde tanımlı olan Hamilton mekanik sistemlerini Minkowski jet demet yapısı üzerinde oluşturabiliriz. Aşağıda sırasıyla bu geometrik yapılar tanımlanmıştır.

Bölüm 2.1’de Minkowski-4 uzayının Öklid uzayına eş değer olduğunu, dolayısıyla bir manifold yapısına sahip olduğunu belirtmiştik. Buna göre Minkowski-4 uzayı üzerinde bir kotanjant manifold yapısının da var olduğu açıktır. Bu kotanjant yapı ile burada da 1.18 ile verilen Liouville form tanımlanabilir. O halde, Minkowski jet demet yapısı üzerinde Liouville form

$$\begin{aligned}\lambda &= -\dot{x}_1 dx_1 + \dot{x}_2 dx_2 + \dot{x}_3 dx_3 + \dot{x}_4 dx_4 \\ &= \sum_{i=1}^4 \delta_i \dot{x}_i dx_i\end{aligned}\tag{3.1}$$

eşitliği ile ifade edilir. 2.8 ile tanımlanan diferansiyel operatör kullanılarak elde edilen $\phi = -d\lambda$ kanonik simplektik formu aşağıdaki biçimdedir.

$$\begin{aligned}\phi &= -dx_1 \wedge d\dot{x}_1 + dx_2 \wedge d\dot{x}_2 + dx_3 \wedge d\dot{x}_3 + dx_4 \wedge d\dot{x}_4 \\ &= \sum_{i=1}^4 \delta_i dx_i \wedge d\dot{x}_i\end{aligned}\tag{3.2}$$

Diğer yandan, $i_{X_H}\phi = dH$ simplektik formunu sağlayan X_H vektör alanına Hamilton vektör alanı dendiğini biliyoruz. Minkowski jet demet yapısı üzerinde Hamilton vektör alanını,

$$\begin{aligned}
X_H &= \frac{\partial}{\partial t} + \varepsilon_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \varepsilon_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + \varepsilon_3 \frac{\partial}{\partial x_3} + \varepsilon_4 \frac{\partial}{\partial x_4} \\
&+ \mu_1 \frac{\partial}{\partial \dot{x}_1} + \mu_2 \frac{\partial}{\partial \dot{x}_2} + \mu_3 \frac{\partial}{\partial \dot{x}_3} + \mu_4 \frac{\partial}{\partial \dot{x}_4}
\end{aligned} \tag{3.3}$$

şeklinde kabul edelim. Böylece, 1.20 eşitliği kullanılarak

$$i_{X_H}\phi = -\varepsilon_1 d\dot{x}_1 + \varepsilon_2 d\dot{x}_2 + \varepsilon_3 d\dot{x}_3 + \varepsilon_4 d\dot{x}_4 + \mu_1 dx_1 - \mu_2 dx_2 - \mu_3 dx_3 - \mu_4 dx_4$$

bulunur. Hamilton enerji fonksiyonunun diferansiyeli ise

$$\begin{aligned}
dH &= \frac{\partial H}{\partial t} dt - \frac{\partial H}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial H}{\partial x_2} dx_2 + \frac{\partial H}{\partial x_3} dx_3 + \frac{\partial H}{\partial x_4} dx_4 \\
&- \frac{\partial H}{\partial \dot{x}_1} d\dot{x}_1 + \frac{\partial H}{\partial \dot{x}_2} d\dot{x}_2 + \frac{\partial H}{\partial \dot{x}_3} d\dot{x}_3 + \frac{\partial H}{\partial \dot{x}_4} d\dot{x}_4
\end{aligned}$$

şeklindedir. Bu 1-formların eşitlenmesiyle $i_{X_H}\phi = dH$ simplektik formu gerçekleştirilir. Bu eşitliğin sağlanmasıyla çözüme gidilirse,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial H}{\partial t} &= 0 \\
-\frac{\partial H}{\partial x_1} &= \mu_1, \quad \frac{\partial H}{\partial x_2} = -\mu_2, \quad \frac{\partial H}{\partial x_3} = -\mu_3, \quad \frac{\partial H}{\partial x_4} = -\mu_4 \\
-\frac{\partial H}{\partial \dot{x}_1} &= -\varepsilon_1, \quad \frac{\partial H}{\partial \dot{x}_2} = \varepsilon_2, \quad \frac{\partial H}{\partial \dot{x}_3} = \varepsilon_3, \quad \frac{\partial H}{\partial \dot{x}_4} = \varepsilon_4
\end{aligned} \tag{3.4}$$

eşitlikleri elde edilir. Sonuç olarak, 3.4'de elde edilen eşitliklerin 3.3 Hamilton vektör alanında yerine yazılmasıyla,

$$X_H = \frac{\partial}{\partial t} + \sum_{i=1}^4 \left(\frac{\partial H}{\partial \dot{x}_i} \frac{\partial}{\partial x_i} - \frac{\partial H}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial \dot{x}_i} \right) \quad (3.5)$$

Hamilton vektör alanı bulunur. Diğer taraftan, 1.23 ile tanımlanan integral eğrisi Minkowski jet demet yapısı üzerinde,

$$\begin{aligned} \alpha : I \subset \mathbb{R} &\rightarrow J(E_1^4) \\ t &\rightarrow \alpha(t) = (t, x_1, x_2, x_3, x_4, \dot{x}_1, \dot{x}_2, \dot{x}_3, \dot{x}_4) \end{aligned} \quad (3.6)$$

eşitliği ile ifade edilir. Bu integral eğrisinin $X_H(\alpha(t)) = \alpha'(t)$ denklemini sağlayacağını biliyoruz. Buna göre, herhangi bir t anında α eğrisinin

$$\begin{aligned} \alpha'(t) &= \frac{dt}{dt} \frac{\partial}{\partial t} + \frac{dx_1}{dt} \frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{dx_2}{dt} \frac{\partial}{\partial x_2} + \frac{dx_3}{dt} \frac{\partial}{\partial x_3} + \frac{dx_4}{dt} \frac{\partial}{\partial x_4} \\ &\quad + \frac{d\dot{x}_1}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{x}_1} + \frac{d\dot{x}_2}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{x}_2} + \frac{d\dot{x}_3}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{x}_3} + \frac{d\dot{x}_4}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{x}_4} \end{aligned} \quad (3.7)$$

hız vektörü kullanılarak $X_H(\alpha(t)) = \alpha'(t)$ denklemi çözüldüğünde,

$$\frac{dx_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial \dot{x}_i} \quad \text{ve} \quad \frac{d\dot{x}_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x_i} \quad i = 1, 2, 3, 4 \quad (3.8)$$

eşitlikleri elde edilir. 3.8 eşitliklerine Minkowski-4 uzayının Hamilton enerji denklemleri denir.

3.2 UYGULAMALAR

Bu kısımda 3.8 ile verilen Hamilton enerji denkleminin bazı yüzeyler üzerinde incelenmesine dair örnekler verilmiştir. Burada amaç, enerji fonksiyonunu t zaman ve x konum değerine göre elde ederek, Hamilton enerji değerini hesaplamaktır. Bu sayede oluşan hareket ve hareket esnasında ortaya çıkan Hamilton enerjisi için matematiksel hesaplamamın yanısıra fiziksel yorum da yapılabilir. Bu çalışma ile teorik fizikte kullanılan bazı matematiksel kavramları daha somut hale getirebiliriz. Ayrıca bulunan diferansiyel denklemlerin çözümlenebilir olduğunu görüp, okuyucuya çözüm methodları hakkında bilgi vermektedir. Çözüm fonksiyonunun bulunması ise ortaya çıkan enerji değerini hesaplamayı avantajlı kılar.

3.2.1 Örnek: (HELİS ÖRNEĞİ)

Minkowski zaman-koni üzerinde

$$\alpha(\theta) = (t, r \sinh u\theta, r \cosh u\theta \sin \theta, r \cosh u\theta \cos \theta)$$

helisini alalım.[1]

Şekil-3'de uzayda alınan hareketli bir m parçacığının Minkowski zaman koni üzerine düştükten sonra, koni içinde kalan helis eğrisi üzerindeki hareketi gösterilmiştir. Bu örnekte, m parçacığının helis eğrisi üzerindeki hareketi esnasında ortaya çıkan Hamilton enerji fonksiyonunu araştıracağız. Burada da hareket, time-like bir eğri üzerinde gelişeceği için bazı ön koşullar oluşacaktır. Öncelikle bu koşulları bularak, Hamilton enerji fonksiyonunun hesaplanabilmesi için gerekli matematiksel yapıları elde edeceğiz. Önceki bölümde olduğu gibi, bu kısımda da uzay zamanı s ve time koni içinde geçen zamanı t parametresi ile ifade edilsin.

Helis eğrisi üzerinde jet koordinat sistemi 2.16 ile verilmiştir. Bu koordinatlar,

$$\left(s, t, r \sinh u\theta, r \cosh u\theta \sin \theta, r \cosh u\theta \cos \theta, \dot{t}, \dot{r} \sinh u\theta, \dot{r} \cosh u\theta \sin \theta, \dot{r} \cosh u\theta \cos \theta \right)$$

şeklindedir. Burada türevsel koordinatlar 2.17 ile belirlidir. Diğer yandan, helis için θ açısı sabit kalacağından bu parametre için türev söz konusu değildir. Helis eğrisinin time-like bir eğri olması gerektiğini ifade etmiştik. O halde,

$$\langle \alpha', \alpha' \rangle < 0$$

olmalıdır, ayrıca θ iki time-like vektör arasındaki açı olduğunda 1.28 eşitliği sağlanır. Buna göre,

$$\alpha'(\theta) = (0, ru \cosh u\theta, ru \sinh u\theta \sin \theta + r \cosh u\theta \cos \theta, ru \sinh u\theta \cos \theta - r \cosh u\theta \sin \theta)$$

olarak hesaplanır ve 1.28'deki metrik dikkate alınırsa

$$\langle \alpha', \alpha' \rangle = r^2 (\cosh^2 u\theta - u^2)$$

elde edilir. $\langle \alpha', \alpha' \rangle < 0$ olacağı için

$$-u < \cosh u\theta < u \quad (3.9)$$

koşulu altında çözüm vardır. Dikkat edilirse, helis eğrisi için Lagrange veya Hamilton enerji fonksiyonunun hesaplamasında ön koşul değişmez.

Helis eğrisi için 2.16 ile verilen jet koordinatları 3.8 ile tanımlanan Hamilton enerji denkleminde yerine yazarsak,

$$1) \frac{dt}{ds} = \frac{\partial H}{\partial \dot{t}}$$

$$2) \frac{dr \sinh u\theta}{ds} = \frac{\partial H}{\partial \dot{r} \sinh u\theta}$$

$$3) \frac{dr \cosh u\theta \sin \theta}{ds} = \frac{\partial H}{\partial \dot{r} \cosh u\theta \sin \theta}$$

$$4) \frac{dr \cosh u\theta \cos \theta}{ds} = \frac{\partial H}{\partial \dot{r} \cosh u\theta \cos \theta}$$

$$5) \frac{d\dot{t}}{ds} = -\frac{\partial H}{\partial t}$$

$$6) \frac{d\dot{r} \sinh u\theta}{ds} = -\frac{\partial H}{\partial r \sinh u\theta}$$

$$7) \frac{d\dot{r} \cosh u\theta \sin \theta}{ds} = -\frac{\partial H}{\partial r \cosh u\theta \sin \theta}$$

$$8) \frac{d\dot{r} \cosh u\theta \cos \theta}{ds} = -\frac{\partial H}{\partial r \cosh u\theta \cos \theta}$$

(3.10)

denklemleri elde edilir. 3.10 denklemlerinin ortak çözümü yapılarak Hamilton enerji fonksiyonu hesaplanabilir. Bu hesaplama için öncelikle dikkat etmemiz gereken husus

$$t = t(s), \quad r = r(t), \quad \text{ve} \quad H = H(r, t)$$

olacak şekilde Hamilton enerji fonksiyonunun zaman ve yarıçapa bağlı çıkmasıdır. Buna dayanarak, çözüm için aşağıda verilen toplamsal ifadeleri gözönüne almak en uygun yöntem olacaktır.

$$[I] : -(2) + (3) + (4) = 3 \frac{\partial H}{\partial r} = \dot{r}$$

ve

$$[II] : -(6) + (7) + (8) = -3 \frac{\partial H}{\partial r} = \frac{dr}{ds}$$

eşitliklerinin yanısıra 3.10'da verilen ilk iki denklem

$$1) \frac{dt}{ds} = \dot{t} = \frac{\partial H}{\partial \dot{t}}$$

$$2) \frac{d\dot{t}}{ds} = -\frac{\partial H}{\partial t}$$

olacak şekilde birlikte ele alınırsa çözüme ulaşılabilir. Bunun için, [I] ve [II] denklemlerinin ortak bir düzenlemesiyle

$$\frac{dr}{ds} = 3 \frac{\partial^2 H}{\partial s \partial r} = -3 \frac{\partial H}{\partial r} \quad (3.11)$$

ayrıca 1) ve 2) denklemlerinin uygun bir şekilde eşitlenmesiyle

$$\frac{d\dot{t}}{ds} = \frac{\partial^2 H}{\partial s \partial \dot{t}} = -\frac{\partial H}{\partial t} \quad (3.12)$$

eşitlikleri elde edilir.

3.11'de t parametresine göre tekrar türev alırsak;

$$-\frac{\partial^2 H}{\partial t \partial r} = \frac{\partial^3 H}{\partial t \partial s \partial r} \quad (3.13)$$

bulunur. Diğer yandan 3.12'de r parametresine göre türev alınarak,

$$-\frac{\partial^2 H}{\partial t \partial r} = \frac{\partial^3 H}{\partial r \partial s \partial \dot{t}} \quad (3.14)$$

eşitliği bulunur. 3.13 ve 3.14'ün eşitlenmesiyle,

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} \left(\frac{d^2 H}{dt d\dot{r}} \right) &= \frac{d}{ds} \left(\frac{d^2 H}{dr dt} \right) \Rightarrow \frac{d}{dt} \left(\frac{dH}{dr} \right) = \frac{d}{dr} \left(\frac{dH}{dt} \right) \\ &\Rightarrow \frac{d}{dt} \left(\frac{\dot{r}}{3} \right) = \frac{d}{dr} (\dot{t}) \\ &\Rightarrow \frac{1}{3} \frac{d}{dt} \left(\frac{dr}{ds} \right) = \frac{d}{dr} \left(\frac{dt}{ds} \right) \end{aligned} \quad (3.15)$$

elde edilir. Hamilton enerji fonksiyonunun çözümü için, Lagrange fonksiyonunun hesaplanmasında olduğu gibi özel koşul gerekmektedir. Fakat her iki durumun özel koşulları farklı alınır. Burada kabul edelim ki,

$$\frac{dr}{dt} = \lambda \quad (sbt) \quad (3.16)$$

olsun. Buna göre; 3.15 denklemini

$$\frac{d^2 r}{dt ds} = 3 \frac{d^2 t}{dr ds}$$

şeklinde düzenlersek

$$\frac{dr}{dt} = 3 \frac{dt}{dr}$$

elde edilir. Bu denklem 3.16 koşulu ile birlikte değerlendirildiğinde,

$$\frac{3}{\lambda} = \lambda \Rightarrow \lambda = \mp \sqrt{3}$$

bulunur. Sonuç olarak,

$$\frac{dr}{dt} = \mp\sqrt{3} \Rightarrow r = \mp\sqrt{3}t$$

$$\Rightarrow r = \mp\sqrt{3}ks \quad (3.17)$$

yarıçap değeri s zaman parametresi cinsinden elde edilir. Burada yine k , t ve s zamanları arasındaki oranı gösterir. Diğer taraftan, bulduğumuz bu yarıçap değerini $[I]$ denklemleri ile gösterilen eşitlikte yerine yazarsak,

$$3\frac{\partial H}{\partial \dot{r}} = \dot{r} \Rightarrow H = \frac{\dot{r}^2}{6}$$

$$\Rightarrow H = \frac{\dot{t}^2}{2}$$

$$\Rightarrow H = \frac{(k)^2}{2}$$

$$(3.18)$$

elde edilir. 3.18 helis eğrisi üzerinde hareket eden m parçacığının ortaya çıkardığı Hamilton enerji fonksiyonudur.

Burada k ' yı bulmak için bölüm 2.2' de kullanılan benzer bir yol izlenir. 2.25 eşitliği ile belirli olan hızları oranlamak için 3.17 yarıçap fonksiyonunda gerekli türevler alınarak bu eşitlikte yerine yazılırsa

$$\frac{\sqrt{1 + 3 \cosh 2u\theta}}{\sqrt{3k^2 \cosh 2u\theta - k^2}} = k$$

eşitliği bulunur. Gerekli düzenlemeleri yaptığımızda ise,

$$k^4 = \frac{1 + 3 \cosh 2u\theta}{3 \cosh 2u\theta - 1} \quad (3.19)$$

elde edilir. O halde 3.9 eşitliğini sağlayan belirli u sayısı ve θ açısı için sabit k değerleri bulunabilir.

3.2.2 Örnek: (ÇEMBER ÖRNEĞİ)

Minkowski zaman-koni üzerinde

$$\alpha(\theta) = (t, r \cos \theta, r \sin \theta, u)$$

çemberini alalım.

Şekil-4'de uzayda alınan hareketli bir m parçacığının Minkowski zaman koni üzerine düştükten sonra, koni içinde kalan çember eğrileri üzerindeki hareketi gösterilmişti. Bu örnekte, m parçacığının çember eğrileri üzerindeki hareketi esnasında ortaya çıkan Hamilton enerji fonksiyonunu araştıracağız. Burada da hareket, time-like bir eğri üzerinde gelişeceği için bazı ön koşullar oluşacaktır. Öncelikle bu koşulları bularak, Hamilton enerji fonksiyonunun hesaplanabilmesi için gerekli matematiksel yapıları elde edeceğiz. Önceki bölümde olduğu gibi, bu kısımda da uzay zamanı s ve time koni içinde geçen zamanı t parametresi ile ifade edilsin. t ve s zaman parametreleri arasındaki oranı yine k ile gösterelim.

Çember eğrisi üzerinde jet koordinat sistemi 2.28 ile verilmiştir. Bu ise,

$$\left(s, t, r \cos \theta, r \sin \theta, u, \dot{t}, \dot{r} \cos \theta, \dot{r} \sin \theta, 0 \right)$$

şeklindedir. Buradaki türevsel koordinatlar yine 2.17 ile belirlidir. Daha önceki örneklerde ifade ettiğimiz gibi burada da çember eğrisini time-like bir eğri almak durumundayız. Bu ise bize 2.bölümün çember örneğindeki time-like olma koşulunu hatırlatır. O halde 2.29 çözüm koşulu bu örnek için de geçerlidir.

Şimdi 2.28 koordinatlarını 3.8 denkleminde yerine yazarak Hamilton enerji fonksiyonunu bulmaya çalışalım;

$$1) \frac{dt}{ds} = \frac{\partial H}{\partial t}$$

$$2) \frac{dr \cos \theta}{ds} = \frac{\partial H}{\partial \dot{r} \cos \theta}$$

$$3) \frac{dr \sin \theta}{ds} = \frac{\partial H}{\partial \dot{r} \sin \theta}$$

$$4) \frac{dt}{ds} = -\frac{\partial H}{\partial t}$$

$$\begin{aligned}
5) \frac{d\dot{r} \cos \theta}{ds} &= -\frac{\partial H}{\partial r \cos \theta} \\
6) \frac{d\dot{r} \sin \theta}{ds} &= -\frac{\partial H}{\partial r \sin \theta}
\end{aligned}
\tag{3.20}$$

3.20 denklemlerinin ortak çözümünü yapılarak Hamilton enerji fonksiyonu hesaplanabilir. Burada da dikkat etmemiz gereken husus

$$t = t(s), \quad r = r(t), \quad \text{ve} \quad H = H(r, t)$$

olacak şekilde Hamilton enerji fonksiyonunun zaman ve yarıçapa bağlı çıkmasıdır. Buna dayanarak, çözüm için aşağıda verilen toplamsal ifadeleri gözönüne almak en uygun yöntem olacaktır.

$$[I] : (2) + (3) = 2\frac{\partial H}{\partial \dot{r}} = \dot{r}$$

ve

$$[II] : (5) + (6) = -2\frac{\partial H}{\partial r} = \frac{d\dot{r}}{ds}$$

eşitliklerinin yanısıra 3.20'da verilen ilk iki denklem aşağıdaki şekilde beraber ele alınırsa,

$$1) \frac{dt}{ds} = \dot{t} = \frac{\partial H}{\partial \dot{t}}$$

$$2) \frac{d\dot{t}}{ds} = -\frac{\partial H}{\partial t}$$

çözüme ulaşılabilir. Bunun için, [I] ve [II] denklemlerinin ortak bir düzenlemesiyle

$$\frac{d\dot{r}}{ds} = 2\frac{\partial^2 H}{\partial s \partial r} = -2\frac{\partial H}{\partial r} \tag{3.21}$$

ayrıca 1) ve 2) denklemlerinin düzenlenmesiyle de

$$\frac{d\dot{t}}{ds} = \frac{\partial^2 H}{\partial s \partial \dot{t}} = -\frac{\partial H}{\partial t} \tag{3.22}$$

eşitlikleri elde edilir.

3.21'de t parametresine göre tekrar türev alırsak;

$$-\frac{\partial^2 H}{\partial t \partial r} = \frac{\partial^3 H}{\partial t \partial s \partial \dot{r}} \quad (3.23)$$

3.22'de r parametresine göre tekrar türev alırsak;

$$-\frac{\partial^2 H}{\partial t \partial r} = \frac{\partial^3 H}{\partial r \partial s \partial \dot{t}} \quad (3.24)$$

eşitlikleri elde edilir. 3.23 ve 3.24'in eşitlenmesiyle,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{\partial^2 H}{\partial t \partial \dot{r}} \right) &= \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{\partial^2 H}{\partial r \partial \dot{t}} \right) \Rightarrow \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial H}{\partial \dot{r}} \right) = \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial H}{\partial \dot{t}} \right) \\ &\Rightarrow \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\dot{r}}{2} \right) = \frac{\partial}{\partial r} (\dot{t}) \\ &\Rightarrow \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{dr}{ds} \right) = \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{dt}{ds} \right) \end{aligned} \quad (3.25)$$

elde edilir. Burada da helis örneğinde olduğu gibi

$$\frac{dr}{dt} = \lambda$$

olsun. Buna göre; 3.25 denklemini

$$\frac{d^2 r}{dt ds} = 2 \frac{d^2 t}{dr ds}$$

şeklinde düzenlersek

$$\frac{dr}{dt} = 2 \frac{dt}{dr}$$

elde edilir. Bu denklem 3.16 koşulu ile birlikte değerlendirildiğinde,

$$\frac{2}{\lambda} = \lambda \Rightarrow \lambda = \mp \sqrt{2}$$

değeri bulunur. Sonuç olarak,

$$\begin{aligned}\frac{dr}{dt} &= \mp\sqrt{2} \Rightarrow r = \mp\sqrt{2}t \\ \Rightarrow r &= \mp\sqrt{2}ks\end{aligned}\tag{3.26}$$

elde edilir. Dolayısıyla, yarıçap değeri s zaman parametresi cinsinden belirlenmiş olur. Burada yine k , t ve s zamanları arasındaki oranı gösterir. Diğer taraftan, bulduğumuz bu yarıçap değerini $[I]$ denklemi ile gösterilen eşitlikte yerine yazarsak,

$$\begin{aligned}2\frac{\partial H}{\partial \dot{r}} &= \dot{r} \Rightarrow H = \frac{\dot{r}^2}{4} \\ \Rightarrow H &= \frac{\dot{t}^2}{2} \\ \Rightarrow H &= \frac{(k)^2}{2}\end{aligned}\tag{3.27}$$

elde edilir. 3.27 çember eğrileri üzerinde hareket eden m parçacığının ortaya çıkardığı Hamilton enerji fonksiyonudur.

Burada da k' yı bulmak için helis örneğinde kullanılan yolu izleriz. 2.34 eşitliği ile belirli olan hızların oranı ele alınır, 3.26 yarıçap fonksiyonunda gerekli türevler hesaplanır ve bu eşitlikte yerine yazılırsa

$$\frac{\sqrt{1+2}}{\sqrt{2k^2-k^2}} = k$$

bulunur. Burada gerekli düzenlemeleri yaptığımızda ise

$$k^4 = 3\tag{3.28}$$

elde edilir. O halde zaman parametreleri arasındaki oran her zaman sabit kalır.

4 SONUÇ VE DEĞERLENDİRME

Bu çalışma, analitik mekanik alanında matematiğin teorik fiziğin kullanımı açısından öneme sahip olan Lagrange ve Hamilton enerji denklemleri üzerine yapılmıştır.

Öklid uzayında zamana bağlı olan ve zamana bağlı olmayan durumlarda geçerli olan Lagrange ve Hamilton denklemleri önceki yıllarda De Leon ve Rodriguez [18], [19]'in çalışmalarında elde edilmiştir. Son yıllarda bu enerji denklemlerine ait çalışmalar G.Sardanashvily [8, 10] ve M. Crampin [16, 17]'in yayınlarında da görülmektedir. Lagrange ve Hamilton denklemlerinin jet demet yapıları ile yeniden oluşturulması C.Aycan [4] çalışmasında görülmektedir. Minkowski uzayının ülkemizde yapılan ilk çalışmalarından biri olarak A. Turgut [2] gösterilebilir. Bu çalışma temel bilgiler açısından önemli bir kaynaktır. Minkowski uzay yapısı üzerine son zamanlarda farklı çalışmalar yapıldığı görülmektedir. Minkowski uzayı fiziksel realitenin zaman kavramı ile beraber kullanımı açısından önem kazanmıştır. Yine son yıllarda Minkowski uzayı üzerine yapılan bazı çalışmalar olarak Rowe [6], Catoni [7] gösterilebilir.

Biz burada bu matematiksel yapıları ele alarak, Minkowski uzayında jet demet yapısını oluşturduk ve geometrik özelliklerini inceledik. Ayrıca, Minkowski demet yapısını kullanarak zamana bağlı olan durumda Lagrange ve Hamilton enerji denklemlerini elde ettik. Böylece, çalışmamızın temel ögesi olan Minkowski uzayında mekanik sistemleri detaylı olarak incelemiş olduk. Daha sonra bulduğumuz enerji denklemlerinin uygulaması açısından bazı örnekler verdik. Bu örneklerde, herhangi bir parçacığın hareketi esnasında ortaya çıkan enerji değerlerini hesaplarken, hareketin kolayca görülebilmesi ve sonuçların karşılaştırılabilmesi açısından çember ve helis gibi bilinen eğrileri tercih ettik. Bu sayede hareketimize ait çizimleri şekiller üzerinde gösterdik.

Lagrange enerji denkleminin herhangi bir manifold üzerindeki hesaplanması sonucu elde edilen değeri 1.17 ile belirlidir. Minkowski uzayında gerekli geometrik yapıların tanımlanması ve ispatlanması sonucu, bu uzaya ait Lagrange enerji fonksiyonu 2.14 olarak elde edilmiştir. Bizim bulduğumuz denklem ilk denklemden daha genel bir denklemdir. Çünkü 2.14 denkleminde Minkowski uzayının metrik yapısından gelen negatif terimi ihmal edersek, Aycan [4]'de hesaplanan zamana bağlı durumda Lagrange enerji fonksiyonunu elde ederiz. Diğer yandan bizim bulduğumuz denklem demet yapısından gelen türevsel koordinatlar içermektedir. Bu türevsel koordinatlar ihmal edilerek denklem dikkate alındığında, 1.17 ile ifade edilen Lagrange enerji fonksiyonuna bulduğumuz enerji fonksiyonunu

indirgemiş oluruz. Sonuç olarak çalışmamızın öklid uzayına da indirgenebileceğini söyleyebiliriz. Bulunan enerji denkleminin farklı yüzeyler üzerinde hesaplanabilir olduğunu göstermek adına bölüm 2.2’de verilen örnekleri inceledik. Birinci örneğimiz olan helis eğrisi için Lagrange enerji fonksiyonu 2.24 olarak elde edilmiştir. Çember eğrisi için Lagrange enerji fonksiyonu ise 2.33 ile bulunmuştur. Bu bölümde yapılan çalışmalar incelendiğinde, denklem sistemlerinin çözümü için bazı koşullar yapıldığı görülmektedir. Bunun nedeni 2.14 ile elde edilen genel denkleminin farklı eğriler üzerinde çözümüne geçildiğinde elde edilen tüm denklemlerin birer non-lineer denklem olmasından kaynaklanmaktadır. Non-lineer denklemlerin çözümünü yapabilmek adına özel koşullar alınması uygundur. Fakat, çalışmamızı yaparken bu koşulları rastgele almadığımızı önemle belirtmek isteriz. Aldığımız ön koşullar, öncelikle Minkowski metriğinden gelen negatif terimi ihmal etmeden belirlenmiştir, çünkü bu terim bulunan denklemlerimizi etkilemektedir. Diğer yandan daha önce belirttiğimiz gibi Minkowski uzayı ile fiziksel gerçeklik açısından önemli bir ilişki vardır, o halde elde edilecek sonuçların fiziksel gerçeklikle örtüşmesi gerekir. Bu husus dikkate alınarak yaptığımız hesaplamalarda en uygun sonuç değerlerini veren koşulları çalışmamıza koyduk. Bu çalışmalar ışığında elde edilen Lagrange enerji fonksiyonlarının benzer üstel fonksiyonlar olduğunu gördük. Hareket, belirli bir zaman içinde gerçekleşen bir olgu olduğundan, enerjinin zamana bağlı çıkması gerekir. Bizim elde ettiğimiz tüm Lagrange enerji fonksiyonlarında da bu durum geçerlidir. Burada dikkat edilmesi gereken en önemli nokta, Minkowski uzayında hareketlerin belirli bir zaman koni ile sınırlı olmasıdır. Bu demektir ki hareketli cisimin incelenebilmesi ancak time-like eğriler üzerinde mümkündür. Çalışılan eğrilerin time-like eğri olmaları da bazı ön koşullar gerektirir. Bu koşulları da her örnekte ayrı ayrı inceledik ve çözümleri bu koşullar altında yaptık. Demet yapısı ile çalışmamızın diğer bir avantajı ise, hareketin gerçekleştiği bölgenin sadece dünya üzerinde lokal bir bölge olması dışında evrensel olarak da ele alınabilmesini sağlamasıdır. Yani hareketin oluştuğu t zamanının yanısıra diğer bir zaman parametresini kullanabilmemizi sağlar. Bu iki zaman arasında bir oran olduğunu varsayabileceğimiz için, bu oranı bir k değeri ile ifade ettik. O halde bu ele alınan k değeri ile t asıl zamanı arasında da bir bağıntı gerçekleşmesi gerekir. Bu bağıntının varlığını da helis eğrisi örneğinde 2.26, çember örneğinde ise 2.35 ile hesapladık. Bu eşitlikler ilk bakışta farklı sayısal değerlere dikkat çeker. Fakat ister limit konumunda, ister farklı sayısal değerler vererek k ’nın sıfıra doğru küçüldüğünü fakat sıfır olmadığını görürüz. Demekki zaman parametreleri belirli bir aşama sonucu eşitlenir.

Hamilton enerji denklemlerinin herhangi bir manifold üzerindeki hesaplan-

ması sonucu elde edilen değeri ise 1.24 ile belirlidir. Minkowski uzayında gerekli geometrik yapıların tanımlanması ve ispatlanması sonucu, bu uzaya ait Hamilton enerji fonksiyonu 3.8 olarak elde edilmiştir. Burada dikkat edilirse bu iki denklem benzerdir. O halde Minkowski uzayının metrik yapısından gelen negatif terimin Hamilton enerji fonksiyonlarının hesaplanmasında önemi yoktur. Bu Minkowski uzayında Lagrange ve Hamilton enerji fonksiyonları için yapılan bu çalışmanın en dikkat çekici sonuçlarından biridir. Diğer yandan yine demet yapısından gelen türevsel koordinatların da Hamilton enerji denklemi için önemli bir etkisi yoktur. Bulunan enerji denkleminin farklı yüzeyler üzerinde hesaplanabilir olduğunu göstermek adına bölüm 3.2’de verilen örnekler incelenmiştir. Birinci örneğimiz olan helis eğrisi için Hamilton enerji fonksiyonu 3.18 olarak elde edilmiştir. Çember eğrisi için Hamilton enerji fonksiyonu ise 3.27 ile bulunmuştur. Bu bölümde de kabul edilen koşullar önceki bölüm ile aynıdır. Bunun nedeni aynı eğriler üzerinde hem Lagrange hem de Hamilton enerjilerinin elde edilmesini istememizden kaynaklanır. Bu örneklerde görülen en dikkat çekici sonuç, Lagrange enerjisinden farklı olarak Hamilton enerjisinin sabit çıkmasıdır. Fakat bu sabit değer yukarıda bahsettiğimiz k oranı ile ilişkilidir. Bu oranın sabit kalması neticesinde sabit bir enerji değeri elde edilir. Günümüzde fizikçilerin çalışmalarında da Hamilton enerjisinin sabit olması hareketin kararlılığını gösterir. Dolayısıyla yapılan bu çalışmada k ’nın helis için 3.19, çember için 3.28 hesaplamalarıyla Hamilton enerjisinin her t anında sabit kaldığını görürüz. Buradan hareket esnasında oluşan enerjinin sabit kalmasının sonucu olarak cismin yaptığı hareketin kararlı bir hareket olduğunu söyleriz. Hamilton enerjisi için bahsedilen kararlılık durumu Lagrange enerjisinde değişir. Lagrange enerjisi fizikçilerin çalışmalarında da zamana göre değişiklik gösterir. Fakat zamanın çok fazla genişlemesi veya hareketin çok hızlanması durumunda, cismin gözlemlenen hareketi doğrusal olur. Yani hareket stabil duruma geçer. 2.24 ve 2.33 Lagrange enerji denklemlerinde $t \rightarrow \infty$ konumunda enerjinin sabit bir değer aldığı görülür. Bu da çalışmamızın Lagrange enerji fonksiyonu için olan kısmının da fiziksel gerçeklikle örtüşüğünü ispatlar.

KAYNAKLAR

1. **A. Ali, 2009**, Determination of Time-Like Helices From Intrinsic Equation in Minkowski 3-space, Physics Letter A.
2. **A. Turgut, 1995**, 3-Boyutlu Minkowski Uzayında Spacelike ve Timelike Regle Yüzeyler, PhD Thesis.
3. **B. O'Neill, 1983**, Semi-Riemann Geometry With Applications to Relativity, Academic Press, New York.
4. **C. Aycan, 2003**, The Lifts of Euler-Lgrange and Hamiltonian Equations on the Extended Jet Bundles, D. Sc. Thesis, Osmangazi Univ. , Eskişehir.
5. **D. D. Holm, T. Schmah, C. Stoica, 2009**, Geometric Mechanics and Symmetry, Oxford University Press, New York.
6. **E. G. P. Rowe, 2010**, Geometrical Physics in Minkowski Spacetime, Springer, England.
7. **F. Catoni, D. Boccaletti, R. Cannata, V. Catoni, E. Nichelatti, P. Zampetti, 2011**, The Mathematics of Minkowski Space-Time, Birkhauser, Germany.
8. **G. Sardanashvilly, O. Zakharov, 1993**, On Application Of The Hamilton Formalism in Fibred Manifolds to Field Theory, Diff. Geom. Appl. (3), 245-263.
9. **G. Sardanashvilly, 1998**, Hamiltonian Time-dependent Mechanics, J. Math. Physics (39), 2714-2729.
10. **G. Sardanashvilly, 2000**, Classical and Quantum Mechanics With Time-dependent Parameters J. Math. Phys. 41 5245-5255.
11. **G. Giachetta, L. Mangiarotti and G. Sardanashvily, 2002**, Geometric Quantization of Mechanical Systems With Time-dependent Parameters, J, Math. Phys. 43 2882-2894.
12. **G. Sardanashvilly, 2012**, Lagrangian Dynamics of Submanifolds. Relativistic Mechanics, J. Geom. Mech. (4), 99-110.
13. **H. R. Brown, 2005**, Physical Relativity. Oxford University press, New York.
14. **H. Tozak, 2010**, Minkowski 4-uzayında Eğriliklerin ve Hareketlerin Geometrisi, Y.L Tezi, PAÜ Fen Bilimleri Enst., Denizli.
15. **J. K. Beem, 1981**, P. E., Ehrlich, Global Lorentzian Geometry, Marcel Dekker Inc., New York.
16. **M. Crampin, 1981**, On the Differential Geometry of Euler-Lagrange Equations, and the Inverse Problem of Lagrangian Dynamics, J. Phys. A-Math. And Gen., 14/10, 2567-2575.

17. **M. Crampin, 1990**, Lagrangian Submanifolds and the Euler-Lagrange Equations in the Higher-order Mechanics, *Lett. Math. Phys.*, 19/1, 53-58.
18. **M. De Leon and P.R. Rodriguez, 1989**, Methods of Differential Geometry in Analytical Mechanics, *North-Hol. Math. St.*,152, Elsevier Sc. Pub., Amsterdam,.
19. **M. De Leon and P.R. Rodrigues, 1991**, Generalized Classical Mechanics and Field Theory, *North-Hol. Math. St.*,112, Elsevier Sc. Pub., Amsterdam,.
20. **M. De Leon, D. Chinea and J.C. Marrero; 1991**, The Constraint Algorithm for Time Dependent Lagrangians, *Publ. Univ. La Laguna, Serie Informes*, 32, 13-29.
21. **Ş. Civelek, 1996**, The Lifts of Lagrange and Hamilton Equations to the Extended Vector Bundles, *Math. Comp. App.*, vol 1, number 1, 21-28.

ÖZGEÇMİŞ

Ad Soyad: Simge Dağlı

Doğum Yeri ve Tarihi: 1985-DENİZLİ

Adres: Pamukkale Üniversitesi, Kınıklı/Denizli

Lisans Üniversitesi: Pamukkale Üniversitesi, Fen-Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü

Yayın Listesi:

- **C. AYCAN, S. DAĞLI;** “On The Jet Bundle Of 3-Dimensinal Minkowski Space And Mechanical Systems”, 9. Geometri Sempozyumu, Ondokuz Mayıs Üni. Samsun, 7-10 Haziran 2011.
- **C. AYCAN, S. DAĞLI;** “On The Mechanical Systems And Energy Forms On The Kähler Manifolds”, 9.Geometri Sempozyumu, Ondokuz Mayıs Üni. Samsun, 7-10 Haziran 2011.
- **S. DAĞLI, C. AYCAN, Ş.CİVELEK;** “Lagrangian Energy Function On Minkowski 4-Space”, 10. Geometri Sempozyumu, Balıkesir Üni. Balıkesir, 13-16 Haziran 2012.