T.C.
PAMUKKALE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATIK ANABILIM DALI

LATİSLERDE TÜREVLER

YÜKSEK LİSANS TEZİ

ÜMEYSA TEMUR

DENİZLİ, HAZİRAN - 2015

T.C.
PAMUKKALE ÜNIVERSITESI
FEN BILIMLERI ENSTITÜSÜ
MATEMATIK ANABILIM DALI

LATİSLERDE TÜREVLER

YÜKSEK LİSANS TEZİ

ÜMEYSA TEMUR

DENİZLİ, HAZİRAN - 2015

KABUL VE ONAY SAYFASI

ÜMEYSA TEMUR tarafından hazırlanan **"LATİSLERDE TÜREVLER"** adlı tez çalışmasının savunma sınavı 15.06.2015 tarihinde yapılmış olup aşağıda verilen jüri tarafından oy birliği / oy çokluğu ile Pamukkale Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı Yüksek Lisans Tezi olarak kabul edilmiştir.

Jüri Üyeleri	İmza
Danışman Yrd. Doç. Dr. Şahin CERAN	....
Üye Yrd. Doç Dr. Mehmet Altay ATLIHAN	....
Üye Doç. Dr. Mustafa AŞCI	....

Pamukkale Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun 24.06.2015... tarih ve ...23/16... sayılı kararıyla onaylanmıştır.

....

Prof. Dr. Orhan KARABULUT

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

Bu tezin tasarımı, hazırlanması, yürütülmesi, araştırmalarının yapılması ve bulgularının analizlerinde bilimsel etiğe ve akademik kurallara özenle riayet edildiğini; bu çalışmanın doğrudan birincil ürünü olmayan bulguların, verilerin ve materyallerin bilimsel etiğe uygun olarak kaynak gösterildiğini ve alıntı yapılan çalışmalara atfedildiğine beyan ederim.

ÜMEYSA TEMUR

ÖZET

LATISLERDE TÜREVLER
YÜKSEK LISANS TEZI
ÜMEYSA TEMUR
PAMUKKALE ÜNİVERSİTESİ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATIK ANABILIM DALI

(TEZ DANIŞMANI: YARD. DOÇ. DR. ŞAHİN CERAN)

DENİZLİ, HAZİRAN - 2015

Bu tez çalışması on bir bölümden oluşmaktadır. Birinci kısımda giriş yapılmıştır. Ardından temel tanım ve problemler verilmiştir. Daha sonra ikinci kısımda latislerde türev konusu ele alınmıştır. Sonra üçüncü kısımda latislerde f-türev ele alınmıştır. Dördüncü kısımda latislerde simetrik bi-türev konusu işlenmiştir. Beşinci kısımda latislerde f-bi türev konusu ele alınmıştır. Altıncı kısımda latislerde permuting tri-türev işlenmiştir. Yedinci kısımda permuting tri-f türev konusu ele alınmıştır. Sekizinci kısımda permuting tri-(f,g) türev işlenmiştir. Dokuzuncu kısımda sonuç ve öneriler bulunmaktadır. Onuncu kısımda ise kaynaklar yer almıştır. Son olarak on birinci bölümde öz geçmiş kısmı verilmiştir.

ANAHTAR KELİMELER: Latis, Türev, Modüler, Dağılmalı, İzoton

ABSTRACT

DERIVATIONS OF LATTICES

MSC THESIS
ÜMEYSA TEMUR
PAMUKKALE UNIVERSITY INSTITUTE OF SCIENCE
MATHEMATICS

(SUPERVISOR:ASSIST. PROF. DR. ŞAHIN CERAN)

DENİZLİ, JANUARY 2015

This thesis consists of eleven chapters. The first chapter is prolog. Following chapters include basic theorem and problems. In the second chapter, subject of the derivative in lattices are discussed. In the third chapter, the Fderivative in lattice is discussed. Theme of symmetric biderivative in lattice is mentioned ın the fourth chapter. In the fifth chapter, theme of f-bi derivative ın lattice is discussed. Permuting tri-derivative in lattice is discussed. Permuting tri-derivative in lasttice is discussed in the sixth chapter. In the seventh chapter, theme of permutıng tri-f derivative is mentioned. Permuting tri (f,g) derivative is discussed in the eigth chaptyer. There are results and suggestions in the ninth chapter. In the last part of the thesis, references are included. Finally, resume section is given in chapter eleven

KEYWORDS: Lattice, Derivation, Modular, Distributive, Isotone

İÇİNDEKİLER

ŞEKİL LİSTESİ

SEMBOL LİSTESİ

$\vee$: Join, Veya
$\wedge$: Meet, Ve
d : Türev
D : Türev
D(x, x) : İz

ÖNSÖZ

Bu tez çalışmasında beni yönlendiren ve bana yardımcı olan çok değerli danışman hocam Yrd. Doç. Dr. Şahin CERAN'a, Doç. Dr. Mustafa AŞÇI hocama ayrıca desteklerini benden esirgemeyen babam Salim TEMUR'a annem Mine TEMUR'a kardeşim Numan TEMUR'a en içten saygı ve teşekkürlerimi sunarım.

Ümeysa TEMUR

1. GİRİŞ

Latis cebiri teorisi; bilgi ekonomisi, bilgi edinimi, bilgi erişimi kontrolü ve kriptanaliz gibi çeşitli dallarda önemli bir rol oynar. Szazs latis türevi kavramını tanıttı ve ilgili sonuçlar verdi Ayrıca latis türevinde çalıktı. X in ve arkadaşları bir latis için türevi geliştirdiler ve ilgili sonuçları tartıştılar. Bir türevin modüler ve dağılmalı latisler için izoton olduğu altında denk koşullar verdiler.

Ceven (2009) latisler üzerinde simetrik bi- türevi, Ceven ve Oztürk (2008)

f - türevi tanıttı. Bu türevle modüler ve dağılmalı latisleri karakterize etti.

Ozbal ve Fırat (2010) latislerin simetrik bi- f - türev kavramını tanıttılar. Bu türev ile modüler ve dağılmalı latisleri karakterize ettiler.

Yazarlı ve Oztürk (2001) latislerde permuting tri-türevi tanıttılar. Bu türevi permuting tri-*f*- türeve geliştirdi.

Ascı vd. (2011) latislerde permuting tri-(*f*, *g*)- türevi, tanıttı. Bu türevler ile modüler ve dağılmalı latisi karakterize etti.

1.1. Temel Tanım ve Teoremler

Bu bölümde ikinci ve üçüncü bölümlerde kullanılan temel tanım ve teoremler verilmektedir.

Tanım 1.1.1: Bostan farklı bir X kümesinde yansıma, ters simetri ve geçişme özellikleri olan bir bağıntıya kısmi sıralama bağıntısı veya sıralama bağıntısı denir. Sıralama bağıntısı $"\leq"$ ile gösterilir. $(X,\leq)$ ikilisi, X kümesinin $\leq$ bağıntısıyla sıralandığını gösterir. Bu durumda X kümesine kısmi sıralanmış küme veya poşet denir. Buna göre 8 x, y, z $2x$ için

(1) $x \in X \Rightarrow x \leq x$

(2) $x \leq y, y \leq x \Rightarrow x = y$

(3) $x \leq y, y \leq z \Rightarrow x \leq z$

Örnek 1.1.1: $\mathbb{R}$ de adi sıralama bağıntısı $\leq = \{(x, y) : x \leq y, x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}\}$ şeklinde tanımlansın. $\forall x, y, z \in \mathbb{R}$ için (1), (2) ve (3) özellikleri sağlandığından kısmi sıralama bağıntısı ve $(\mathbb{R}, \leq)$ bir posettir.

Örnek 1.1.2: A herhangi bir küme ve $P(A)$ da alt küme bağıntısı

$$\subseteq = \{(X, Y) : X \subseteq Y, X \in P(A), Y \in P(A)\}$$

olarak tanımlansın. $\forall X, Y, Z \in P(A)$ için (1), (2) ve (3) özellikleri sağlandığından kısmi sıralama bağıntısı ve $(P(A).Ç)$ bir posettir.

Örnek 1.1.3: $\mathbb{N}$ N de bölünebilme bağıntısı $| = \{(x, y) : x | y, x \in \mathbb{N}, y \in \mathbb{N}\}$ şeklinde tanımlansın. $\forall x, y, z \in \mathbb{N}$ için (1), (2) ve (3) özellikleri sağlandığından kısmi sıralama bağıntısı ve $(\mathbb{N}, |)$ bir posettir.

Tanım 1.1.2: $L, \wedge$ ve $\vee$ işlemleri ile belirlenmiş boştan farklı bir küme olsun. Eğer $\forall x, y, z \in L$ için aşağıdaki özellikler sağlanırsa bu durumda L ye latis denir. $(L, \wedge, \vee)$ ile gösterilir.

(1) $x \wedge x = x, x \vee x = x$

(2) $x \wedge y = y \wedge x, x \vee y = y \vee x$

(3) $(x \wedge y) \wedge z = x \wedge (y \wedge z), (x \vee y) \vee z = x \vee (y \vee z)$

(4) $(x \wedge y) \vee x = x, (x \vee y) \wedge x = x$

Örnek 1.1.4: $C, "\cap"$ ve $"\cup"$ işlemleri ile tanımlı kümelerin bir kolleksiyonu olsun. Bu takdirde $\forall X, Y, Z, \in C$ için $(C, \cap, \cup)$ bir latistir.

(1) $X \cap X = X, X \cup X = X$

(2) $X \cap Y = Y \cap X, X \cup Y = Y \cup X$

(3) $X \cap (Y \cap Z) = (X \cap Y) \cap Z, X \cup (Y \cup Z) = (X \cup Y) \cup Z$

(4) $X \cap (X \cup Y)(X), X \cup (X \cap Y) = X$

Örnek 1.1.5: $(\mathbb{N}, \wedge, \vee), \forall a,b \in \mathbb{N}$ için $a \wedge b = (a,b)$ ve $a \vee b = [a,b]$ işlemleri altında latistir.

(1) $a \wedge a = (a,a), a \vee a = [a,a]$

(2) $a \wedge b = (a,b) = (b,a) = b \wedge a, a \vee b = [a,b] = [b,a] = b \vee a$

(3) (i) $(a \wedge b) \wedge c = ((a,b),c) = (a,(b,c)) = a \wedge (b \wedge c)$

(ii) $(a \vee b) \vee c = [[a,b],c] = [a[b,c]] = a \vee (b \vee c)$

Tanım 1.1.3: (5) ve (6) özellikleri sağlanırsa L latisi dağılmalıdır.

(5) $x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$

(6) $x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z)$

Tanım 1.1.4: Aşağıdaki özellik sağlanırsa L latisi modülerdir.

Eğer $x \leq z$ ise $x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge z$

Tanım 1.1.5: L latisinin bostan farklı bir alt kümesi I , aşağıdaki özelliklerle bir idealdir.

(i) $x \leq y, y \in I \Rightarrow x \in I$

(ii) $x, y \in I \Rightarrow x \vee y \in I$

Tanım 1.1.6: $(L, \wedge, \vee)$ bir latis olsun. $x \leq y$ ile tanımlı $\leq$ ikili bağıntıdır ancak ve ancak $\forall x, y \in L$ için $x \wedge y = x$ ve $x \vee y = y$ dir.

Lemma 1.1.1: $(L, \wedge, \vee)$ bir latis olsun. $x \leq y$ ikili bağıntı tanımlansın. Bu durumda $(L, \leq)$ bir posettir ve $\forall x, y \in L$ için $x \wedge y, \{x, y\}$ nin ebob'u ve $x \vee y$, $\{x, y\}$ nin ekok'udur.

Tanım 1.1.7: L bir latis olsun. $\forall x,y \in L$ için $D(x,y)=D(y,x)$ sağlanırsa $D: LxL \to L$ dönüşümüne simetrik dönüşüm denir.

Tanım 1.1.8: L bir latis olsun. $n \geq 3$ için $\pi(1),\pi(2),...,\pi(n)$ birer permutasyonlar olmak üzere $\forall x_1,x_2,...,x_n \in L$ için

$$D(x_1,x_2,...,x_n)=D\left(x_{\pi(1)},x_{\pi(2)},...,x_{\pi(n)}\right)$$

sağlanırsa $D: LxLx...xL \to L$ dönüşümüne permuting dönüşüm denir.

Tanım 1.1.9: D permuting dönüşüm olduğunda $d(x)=D(x,x,...,x)$ ile tanımlı $d: L \to L$ dönüşümüne D D nin izi denir.

Tanım 1.1.10: $(L,\wedge,\vee)$ ve $(M,\wedge,\vee)$ iki latis olsun. $\forall x,y \in L$ için

$$f(x \wedge y)=f(x)\wedge f(y)$$

$$f(x \vee y)=f(x)\vee f(y)$$

sağlanırsa $f: L \to M$ fonksiyonu latis homomorfizmidir.

2. LATİSLERDE TÜREV

<u>Tanım 2.1:</u> Xin ve Lu (2008) $L \neq \phi$. $"\wedge"$ ve $"\vee"$ Operatörleri verilsin, $\forall x, y, z \in L$ için $(L, \wedge, \vee)$ yapısı aşağıdaki şartları sağlıyorsa L 'ye latis denir.

(A) $x \wedge x = x$, $x \vee x = x$

(B) $x \wedge y = y \wedge x, x \vee y = y \vee x$

(C) $(x \wedge y) \wedge z = x \wedge (y \wedge z), (x \vee y) \vee z = x \vee (y \vee z)$

(D) $(x \wedge y) \vee x = x, (x \vee y) \wedge x = x$

<u>Tanım 2.2:</u> L bir latis olsun. L latisi aşağıdaki şartlardan herhangi birini sağlarsa L'ye dağılmalı latis denir.

(E) $x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$

(F) $x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z)$

<u>Tanım 2.3:</u> L bir latis olsun. L latisi aşağıdaki şartı sağlarsa L'ye modüler latis denir.

(M) $x \leq z \Rightarrow x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge z$

<u>Tanım 2.4:</u>

(1) $(B; \vee, \wedge)$ bir dağılmalı latis

(2) $\forall a \in B$ için $0 \vee a = a, a \wedge 1 = a$

(3) $\forall\ a \in B \quad a \vee a' = 1 \ \ a \wedge a' = 0$ olacak şekilde $a' \in B$ vardır.

Yukarıdaki şartları sağlayan $(B, \vee, \wedge, ', 0, 1)$ yapısına Boolean Cebiri denir.

<u>Tanım 2.5:</u> $(L, \wedge, \vee)$ bir latis olsun. $x \leq y \Leftrightarrow x \wedge y = x$ ve $x \vee y = y$ dir.

Önerme 2.6: $(L,\wedge,\vee)$ bir latis. $(L,\leq)$ kısmi sıralı kümedir ve $\forall x,y\in L$ için $\{x,y\}$ 'nin en büyük alt sınırı $x\wedge y$ dir ve $\{x,y\}$ 'nin en küçük üst sınırı $x\vee y$ dir.

Tanım 2.7: L ve M birer latis olmak üzere $\theta : L\to M$ olacak şekilde θ fonksiyonu verilsin. $\forall x,y\in L$ için

(1) $\theta(x\wedge y)=\theta(x)\wedge\theta(y)$

(2) $\theta(x\vee y)=\theta(x)\vee\theta(y)$ şartları sağlanıyorsa θ'ya bir latis homomorfizmi denir.

(3) Örten homoformizme epimorfizm, birebir homomorfizme monomorfizm, birebir örten homomorfizme izomorfizm denir.

Tanım 2.8: $I\neq\phi$ ve $I\subset L$ olmak üzere aşağıdaki şartlar sağlanıyorsa I 'ya L 'nin bir ideali denir.

(1) $x\in L$, $y\in L$ ve $x\leq y\Rightarrow x\in I$

(2) $x,y\in L\Rightarrow x\vee y\in I$

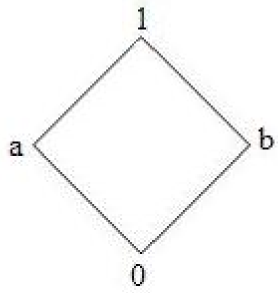
I_1 ve I_2 L 'nin ideali ise $I_1\cap I_2$ 'de L 'nin idealilidir.

Tanım 2.9: L bir latis olsun. $d : L\to L$ bir fonksiyon olsun. Aşağıdaki şart sağlanıyorsa d 'de L üzerinde bir türev denir.

$$d(x\wedge y)=(dx\wedge y)\vee(x\wedge dy)$$

Örnek 2.10: L şekil 1'deki gibi bir latis olsun. d 'de L üzerinde bir fonksiyon olsun.

$$dx=\begin{cases} x, & x=0 \\ b, & x=a \\ a, & x=b \end{cases} \qquad\qquad \text{ya da } 1$$

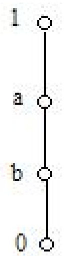


Şekil 2. 1: Latis 1

d L üzerinde bir türev değildir.

Örnek 2.11: L Şekil 2'deki gibi bir latis olsun. d'de L üzerinde bir fonksiyon olsun.

$$dx = \begin{cases} 0, & x = 0 \\ b, & x = a \\ b, & x = b \end{cases} \qquad \text{ya da } 1$$



Şekil 2.2: Latis: 2

d L üzerinde bir türev değildir.

Örnek 2.12: L bir latis 0 en küçük eleman olsun ve $0 \in L$ olsun. $\forall x \in L$ için $dx = 0$ olacak şekilde d fonksiyonu verilsin. d L üzerinde bir türevdir. d'ye sıfır türev denir.

Örnek 2.13: d L üzerinde tanımlı özdeşlik fonksiyonu olsun. d L üzerinde bir türevdir ve d'ye birim türev denir.

Örnek 2.14: L bir latis ve d L üzerinde bir türev olsun. Aşağıdaki şart sağlanır.

(1) $dx \leq x$ olur.

İspat: $\forall x \in L$ için

$$dx = d(x \wedge x) = (dx \wedge x) \vee x \wedge dx = dx \wedge x$$

ve böylece $dx \leq X$ olur.

Tanım 2.15: L bir latis ve d L üzerinde bir türev olsun.

(1) $x \leq y$ iken $dx \leq dy$ ise d 'ye izoton türev denir.

(2) d birebir ise d 'ye monomorfik türev denir.

(3) d örten ise d 'ye epik türev denir.

Örnek 2.16: L bir latis ve $a \in L$ olsun. $\forall x \in L$ için $dx = x \wedge a$ olacak şekilde L üzerinde d fonksiyonu tanımlansın. d L üzerinde izotondur ve d 'ye esas türev denir.

Önerme 2.17: L bir latis. 1 en büyük eleman olmak üzere $1 \in L$ olsun. d L üzerinde bir türev olsun. $\forall x \in L$ için $dx = (x \wedge d1) \vee dx$ olur.

İspat:

$$dx = d(x \wedge 1) = (dx \wedge 1) \vee (x \wedge d1)$$

$$= dx \vee (x \wedge d1)$$

Sonuç 2.18: L bir latis olsun. 1 en büyük eleman olmak üzere $1 \in L$ olsun. Aşağıdaki şartlar sağlanır.

(1) $x \geq d1 \Rightarrow dx \geq d1$

(2) $x \leq d_1 \Rightarrow dx = x$

Önerme 2.19: L bir latis ve d L üzerinde bir türev olsun.

$y \le x$ ve $dx = x \Rightarrow dy = y$

olur.

İspat: $y \le x$ ise $y = x \wedge y$ olur. Böylece

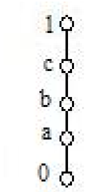
$$dy = d(x \wedge y) = (dx \wedge y) \vee (x \wedge dy)$$

$$= (x \wedge y) \vee dy$$

$$= y$$

Örnek 2.20: L Şekil 3'de verilen latis olsun. d L üzerinde bir dönüşüm olsun.

$$dx = \begin{cases} x, & x = 0, \quad x = a, \quad x = c \\ a, & x = b \\ c, & x = 1 \end{cases}$$



Şekil 2. 3: Latis 3

$d0 = 0$, $da = 0$, $db = a$, $dc = c$, $d1 = c$

dikkat edilirse $dc = c$ ve $b \le c$ fakat $db \ne b$ olup önerme 1.19'dan bu bir çelişkidir. Böylece d L üzerinde bir türev değildir.

Önerme 2.21: L bir latis ve d L üzerinde bir türev olsun. $\forall x, y \in L$ için

$$dx = dx \vee (x \wedge d(x \vee y))$$

olur.

İspat: $dx = d\left(\left(x \vee y\right) \wedge x\right)$

$$= \left(d\left(x \vee y\right) \wedge x\right) \vee \left(\left(x \vee y\right) \wedge dx\right)$$

$$= \left(\left(x \vee y\right) \wedge dx\right) \vee \left(x \wedge d\left(X \vee y\right)\right)$$

$$= dx \vee \left(x \wedge d\left(x \vee y\right)\right)$$

Sonuç 2.22: L bir latis. 1 en büyük eleman olmak üzere $1 \in L$ olsun.

$d1 = 1 \Leftrightarrow d$ birim türev.

İspat: Gerek şartı ispatlayalım.

$\Rightarrow d1 = 1$ olsun. Önerme 1.19'dan $\forall x \in L$ için $x \leq 1$ olduğundan $dx = x$ olup d birim türevdir.

Önerme 2.23: $d_1 = d_2 \Leftrightarrow Fix_{d_1}\left(L\right) = Fix_{d_2}\left(L\right)$ L bir latis ve d L üzerinde bir türev olsun. Ayrıca sabit noktalar kümesi $Fix_d\left(L\right) = \left\{x \in L : dx = x\right\}$ olacak şekilde tanımlayalım. $\forall x \in L$ için $d^2 x = d\left(dx\right)$ şeklinde tanımlayalım. O halde $d^2 = d$ olup $dx \in Fix_d\left(L\right)$ olur.

İspat: $d^2 x = d\left(dx\right) = d\left(x \wedge dx\right)$

$$= \left(dx \wedge dx\right) \vee \left(x \wedge d^2 x\right)$$

$$= dx \vee d^2 x$$

$$= dx$$

Önerme 2.24: L bir latis. d_1 ve d_2 L üzerinde izoton türevler olmak üzere

$$d_1 = d_2 \Leftrightarrow Fix_{d_1}\left(L\right) = Fix_{d_2}\left(L\right)$$

İspat: $d_1 = d_2$ iken $Fix_{d_1}\left(L\right) = Fix_{d_2}\left(L\right)$ olduğu açıktır. Tersine $\forall x \in L$ için $Fix_{d_1}\left(L\right) = Fix_{d_2}\left(L\right)$ olsun. Önerme 1.23'den

$d_1x \in Fix_{d_1}(L) = Fix_{d_2}(L)$ ve böylece $d_2d_1x = d_1x$ benzer olarak $d_1d_2x = d_2x$ bulunur. d_1 ve d_2 izoton olduğundan $d_2d_1x \le d_2x = d_1d_2x$. Ve böylece $d_2d_1x \le d_2x = d_1d_2x$. Benzer olarak $d_1d_2x = d_2d_1x$ olup $d_1d_2x = d_2d_1x$ olur. Böylece $d_1x = d_2d_1x = d_1d_2x = d_2x$ olup $d_1 = d_2$ dir.

Teorem 2.25: L bir latis ve d L üzerinde bir türev olsun. Aşağıdaki şartlar denktir.

(1) d birim türevdir.

(2) $d(x \vee y) = (x \vee dy) \wedge (dx \vee y)$

(3) d monoformik türev

(4) d epik türev

İspat:

(2) $\Rightarrow$ (1) (2)'de $y = x$ alalım.

$$\begin{aligned} d(x \vee x) &= (x \vee dx) \wedge (dx \vee x) \\ &= x \wedge x \\ &= x \end{aligned}$$

(3) $\Rightarrow$ (1) d monomorfik türev olsun. $da \neq a$ olacak şekilde $a \in L$ alalım. $a_1 = da$ alalım. $da < a$ olduğundan $a_1 < a$ olur, böylece

$$\begin{aligned} da_1 = d(a_1 \wedge a) &= (da_1 \wedge a) \vee (a_1 \wedge da) \\ &= da_1 \vee a_1 \\ &= a_1 \\ &= da \end{aligned}$$

$a_1 \neq a$ olduğundan ve d monomorfik olduğundan bu bir çelişkidir. O halde d birim türevdir.

Teorem 2.26: L bir latis olsun. 1 en büyük eleman ve $1 \in L$ olsun. d L üzerinde bir türev olsun. Aşağıdaki şartlar denktir.

(1) d izoton türev

(2) $dx = x \wedge d_1$

(3) $dx \vee dy \leq d(x \vee y)$

(4) $dx \vee dy \leq d(x \vee y)$

<u>İspat:</u>

(1) $\Rightarrow$ (2) d izoton olduğundan $dx \leq d_1$ olur.

$dx \leq x$ olduğundan $dx \leq (x \wedge d_1)$

Önerme 1.17'den

$dx = dx \vee (x \wedge d_1) = x \wedge d_1$

(2) $\Rightarrow$ (3) (2)'den $dx = x \wedge d_1$ olduğunu biliyoruz.

$$\begin{aligned} dx \wedge dy &= (x \wedge d_1) \wedge (y \wedge d_1) \\ &= x \wedge y \wedge d_1 \\ &= d(x \wedge y) \end{aligned}$$

(3) $\Rightarrow$ (1)'den $d(x \wedge y) = dx \wedge dy$ olduğunu biliyoruz.

$x \leq y$ olsun. O halde $x = x \wedge y$ böylece $dx = d(x \wedge y) = dx \wedge dy$ olup $dx = dx \wedge dy$ olur.

Böylece $dx \leq dy$ olur.

O halde d izoton türev olur.

(1) $\Rightarrow$ (4) (1)'den d'nin izoton türev olduğunu biliyoruz.

$dx \leq d(x \vee y)$ ve $dy \leq d(x \vee y)$ olur.

Böylece $dx \vee dy \leq d(x \vee y)$

(4) $\Rightarrow$ (1) $x \leq y$ olsun $dx \vee dy \leq d\left(x \vee y\right) = dy$

Sonra $dx \vee dy = dy$ olup $dx \leq dy$ olur.

<u>Teorem 2.27:</u> L bir modüler latis ve d L üzerinde bir türev olsun. Aşağıdaki şartlar denktir.

(1) d izotondur.

(2) $d\left(x \wedge y\right) = dx \wedge dy$

(3) $dx = x \Rightarrow d\left(x \vee y\right) = dx \vee dy$

<u>İspat:</u>

(1) $\Rightarrow \left(2\right)$ d izoton olsun. O halde $d\left(x \wedge y\right) \leq dx$ ve $d\left(x \wedge y\right) \leq dy$.

Böylece $d\left(x \wedge y\right) \leq dx \wedge dy$. Diğer taraftan L modüler olduğundan ve $dx \wedge y \leq x$ olduğundan

$$\begin{aligned}
d\left(x \wedge y\right) &= \left(dx \wedge y\right) \vee \left(x \wedge dy\right) \\
&= \left(\left(dx \wedge y\right) \vee dy\right) \wedge x \\
&= \left(dy \vee \left(dx \wedge y\right) \wedge x\right. \\
&= \left(\left(dy \vee dx\right) \wedge y\right) \wedge x \\
&\geq dx \wedge dy \wedge y \wedge x \\
&= dx \wedge dy
\end{aligned}$$

Böylece $d\left(x \wedge y\right) = dx \wedge dy$

(2) $\Rightarrow$ (1) $x \leq y$ olsun. $x = x \wedge y$ olup böylece $dx = d\left(x \wedge y\right) = dx \wedge dy$ olup $dx \leq dy$ olup d izoton türevdir.

(1) $\Rightarrow$ (3) $dx = x$ olsun. Önerme 1.19'dan

$dy = dy \vee \left(y \wedge d\left(x \wedge y\right)\right)$ L modüler olduğundan

$dy = \left(dy \vee y\right) \wedge d\left(x \vee y\right) = y \wedge d\left(x \vee y\right)$

Böylece

$$
\begin{aligned}
dx \vee dy &= dx \vee \left(y \wedge d\left(x \vee y\right)\right) \\
&= \left(dx \vee y\right) \wedge' d\left(x \vee y\right) \\
&= \left(dx \vee y\right) \wedge d\left(x \vee y\right) \\
&= \left(x \vee y\right) \wedge d\left(x \vee y\right) \\
&= d\left(x \vee y\right)
\end{aligned}
$$

olup $dx \vee dy = d\left(x \vee y\right)$.

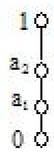
(3) $\Rightarrow$ (1) $x \leq y$ olsun. Önerme 1.23'den $d\left(dx\right) = dx$ hipotezden

$d\left(dx \vee y\right) = d\left(dx \vee dy\right) = dx \vee dy$ diğer taraftan

$x \leq y \Rightarrow d\left(dx \vee y\right) = dy$ olduğundan ve böylece

$dy = dx \vee dy$ olup $dx \leq dy$ dir.

Örnek 2.27: L Şekil 4 'deki gibi bir latis olsun.



Şekil 2. 4: Latis 4

L bir dağılmalı latistir. Türevleri tanımlayalım

$$d_1 x = \begin{cases} a_1, & x = 1 \\ x, & \textit{diğer durumlarda} \end{cases}$$

$$d_2 x = \begin{cases} a_2, & x = 1 \\ x, & \textit{diğer durumlarda} \end{cases}$$

d_1 ve d_2 L üzerinde türevlerdir.

Teorem 2.29: B bir Bolen Cebiri olsun ve d izoton türev olsun. dB bir bolen cebiri ve dB B'nin alt latisidir.

İspat: B bolen cebiri olduğundan, dağılmalı latistir ve böylece

$d\left(x \wedge y\right) = dx \wedge dy \in dB$

$d\left(x \vee y\right) = dx \vee dy \in dB$

böylece $d \quad B \quad B$'nin alt latisidir.

Dahası $\forall\, x \in dB$ için $x = dy$ olacak şekilde $y \in B$ vardır. B Bolen cebiri olduğundan $y \vee z = 1$ ve $y \wedge z = 0$ olacak şekilde $z \in B$ vardır. Teorem 1.27'den

$$x \vee dz = dy \vee dz = d\left(y \vee z\right) = d_1 \text{ ve}$$

$$x \wedge dz = dy \wedge dz = d\left(y \wedge z\right) = d0 = 0$$

böylece d_B Bolen cebiridir.

<u>Önerme 2.30:</u> L bir latis olsun. L üzerinde tanımlı her d izoton türevi $d\left(x \vee y\right) = dx \vee dy$ şartını sağlıyorsa L'ye dağılmalı latis denir.

<u>İspat:</u> $d \quad L$ üzerinde bir izoton türevse $d\left(x \vee y\right) = dx \vee dy \quad \forall\, a,b,c \in L$ için $\left(a \vee b\right) \wedge c = \left(a \wedge c\right) \vee \left(b \wedge c\right)$ olduğunu ispatlamak için $\forall\, x \in L$ için $dx = x \wedge c$ olacak şekilde bir d fonksiyonu tanımlayalım. Örnek 1.16 dan d bir izoton türevdir. Hipotezden $d\left(x \vee y\right) = dx \vee ay$

Böylece

$$\left(a \vee b\right) \wedge c = d\left(a \vee b\right) = da \vee db = \left(a \wedge c\right) \vee \left(b \wedge c\right)$$
$$\left(a \vee b\right) \wedge c = \left(a \wedge c\right) \vee \left(b \wedge c\right)$$

olup L dağılmalı latistir.

<u>Önerme 2.31:</u> L üzerinde tanımlı her izoton türev $dx = x \Rightarrow d\left(x \vee y\right) = dx \vee dy$ şartını sağlıyorsa L'ye modüler latis denir.

<u>İspat:</u> $x, y, z \in L$ ve $x \leq z$ olsun. $\forall\, w \in L$ için $dw = w \wedge z$ olacak şekilde d türevini tanımlayalım. Örnek 1.16 dan d izotondur.

$x \leq z$ olduğundan $dx = x \wedge z = x$ hipotezden

$d\left(x \vee y\right) = dx \vee dy$ dikkat edilirse

$$d\left(x \vee y\right) = \left(x \vee y\right) \wedge z \text{ ve}$$

$$dx \vee dy = \left(x \wedge z\right) \vee \left(y \wedge z\right) = x \vee \left(y \wedge z\right)$$

Böylece

$$x \vee \left(y \wedge z\right) = \left(x \vee y\right) \wedge z$$

L modüler latistir.

<u>Teorem2.32:</u> L bir latis olsun. Aşağıdaki şartlar denktir.

(1) L modüler

(2) L'deki her izoton türev için

$$dx = x \Rightarrow d\left(x \vee y\right) = dx \vee dy$$

3. LATİSLERDE F-TÜREV

<u>Tanım 3.1:</u> Ceven ve Oztürk (2008) L bir latis olsun. $d : L \to L$ bir fonksiyon olsun. Eğer $\forall\, x, y \in L$ için $f : L \to L$ fonksiyonu

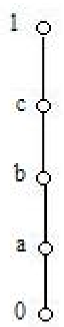
$$d\left(x \wedge y\right) = \left(d\left(x\right) \wedge f\left(y\right)\right) \vee \left(f\left(x\right) \wedge d\left(y\right)\right) \qquad (2.1)$$

şartını sağlıyorsa d fonksiyonuna L'de bir f türev denir.

<u>Örnek 3.2:</u> L Şekil 5'deki gibi bir latis olsun. d fonksiyonu

$$d = \begin{cases} d0 = 0 \\ da = a \\ db = a \\ dc = c \\ d1 = c \end{cases}$$

şeklinde tanımlı olsun.



Şekil 3. 1: Latis 5

$$a = d\left(b \wedge 1\right) \neq \left(db \wedge 1\right) \vee \left(b \wedge d_1\right) = \left(a \wedge 1\right) \vee \left(b \wedge c\right) = a \vee b = b \quad f$$

fonksiyonunu

$$f = \begin{cases} f0 = 0 \\ fa = a \\ fb = a \\ fc = 1 \\ f1 = 1 \end{cases}$$

şeklinde tanımlayalım. $\forall\, x, y \in L$ için $d, (2.1)$ eşitliğini sağlar ve böylece d L üzerinde bir f türevdir.

Örnek 3.3: L bir latis ve $a \in L$ olsun. $\forall\, x, y \in L$ için $f(x \wedge y) = fx \vee fy$ olacak şekilde $f : L \to L$ fonksiyonu verilsin. $d : L \to L$ d fonksiyonunu $\forall x \in L$ için $dx = fx \wedge a$ şeklinde tanımlayalım. d bir f türevdir. Ayrıca f artan fonksiyon ise d izoton türevdir.

Önerme 3.4: L bir latis olsun ve d L üzerinde bir f türev olsun. $\forall\, x, y, z \in L$ için aşağıdaki şartlar sağlanır.

a) $dx \leq fx$

b) $dx \wedge dy \leq d(x \wedge y) \leq dx \vee dy$

c) $d(x \wedge y) \leq fx \vee fy$

d) 0 en küçük eleman olmak üzere $0 \in L$ ise $f0 = 0$ iken $d0 = 0$ ’dır.

İspat:

a) $dx = d(x \wedge x) = dx \wedge fx$ olup $dx \leq fx$

b) (2.1) eşitliğinden $dx \wedge fy \leq d(x \wedge y)$ ve $fx \wedge dy \leq d(x \wedge y)$ $dx \leq fx$ olduğundan $dx \wedge dy \leq fx \wedge dy$ böylece $dx \wedge dy \leq d(x \wedge y)$ $dx \wedge fy \leq dx$ ve $fx \wedge dy \leq dy$ olduğunu biliyoruz. Böylece

$$d(x \wedge y) = (dx \wedge fy) \vee (fx \wedge dy) \leq dx \vee dy$$

c) $dx \wedge fy \leq fy$ ve $fx \wedge dy \leq fx$

$$d(x \wedge y) \leq fx \vee fy$$

d) $\forall x \in L$ için, $dx \leq fx$ $f0 = 0$ ve 0 en küçük eleman olmak üzere $0 \in L$ ’dir.

$0 \leq d0 \leq f0 = 0$ bu tanık olsun.

Önerme 3.5: L bir latis olsun ve d ’ye bir f türev olsun ve 1 en büyük eleman olmak üzere $1 \in L$ olsun. $f1 = 1$ olsun. Aşağıdaki özellikler sağlanır.

a) $fx \le d_1 \Rightarrow dx = fx$

b) $fx \ge d_1 \Rightarrow dx \ge d_1$

<u>İspat:</u>

a) $dx = d(x \wedge 1)) = (dx \wedge f_1) \vee (fx \wedge d_1) = dx \vee fx$ olduğundan $fx \le dx$ önerme 2.4 a)'dan $dx = fx$ olur.

b) $dx = (dx \wedge f_1) \vee (fx \wedge d_1) = dx \vee d_1$ olup $dx \ge d_1$

<u>NOT:</u> 1 en büyük eleman olmak üzere $1 \in L$ olmak üzere $d1 = 1$ ise $d_1 \le f_1$ olduğundan $f_1 = 1$ olur. Önerme 2.5 a'dan $d = f$ olur.

L bir latis olsun d L üzerinde bir f türev olsun. $F = \{x \in L : dx = fx\}$

<u>Önerme 3.6.</u> L bir latis ve d'de bir f türev olsun. Eğer f artan fonksiyon, $y \le x$ ve $x \in F$ ise $y \in F$'dir.

<u>İspat:</u> $x \in F$ olduğundan ve $dy \le fy \le fx = dx$ olduğundan

$$\begin{aligned} dy = d(x \wedge y) &= (dx \wedge fy) \vee (fx \wedge dy) \\ &= (fx \wedge fy) \vee dy \\ &= fy \vee dy \\ &= fy \end{aligned}$$

<u>Önerme 3.7:</u> L bir latis olsun. Ve d L üzerinde f türev olsun. $\forall\, x, y \in L$ için $dx = dx \vee (fx \wedge d(x \vee y))$

<u>İspat:</u> d izoton f türev olduğundan

$\forall\, x, y \in L$ için $dx \le d(x \vee y) \le f(x \vee y)$

böylece

$$\begin{aligned} dx &= d((x \vee y) \wedge x) \\ &= (d(x \vee y) \wedge fx) \vee (f(x \vee y) \wedge dx) \\ &= dx \vee (fx \wedge d(x \vee y)) \end{aligned}$$

<u>Önerme 3.8:</u> L bir latis ve d bir izoton f türev olsun. Eğer $x, y \in f$ ve f azalan fonksiyon ise $x \vee y \in F$

<u>İspat:</u> $x \le x \vee y$ ve $y \le x \vee y$ böylece $f(x \vee y) \le fx$ ve $f(x \vee y) \le fy$

d izoton f türev olduğundan

$f\left(x\vee y\right)\leq fx\vee fy=dx\vee dy\leq d\left(x\vee y\right)$
$d\left(x\vee y\right)\leq f\left(x\vee y\right)$

Böylece $x\vee y\in F$

Teorem 3.9: 1 en büyük eleman olmak üzere $1\in L$ olsun. d L üzerinde bir f türev olsun. d L üzerinde bir f türev olsun. $\forall\, x,y\in L$ için $f1=1$ ve $f\left(x\wedge y\right)=fx\wedge fy$ olsun. Aşağıdaki şartlar denktir.

(1) d bir izoton f türevdir.

(2) $dx\vee dy\leq d\left(x\vee y\right)$

(3) $dx=fx\wedge d_1$

(4) $d\left(x\wedge y\right)=dx\wedge dy$

İspat:

(1) $\Rightarrow(2)$ d bir izoton f türev olsun.

$x\leq x\vee y$ ve $y\leq x\vee y$

d izoton olduğundan

$dx\leq d\left(x\vee y\right)$ ve $dy\leq d\left(x\vee y\right)$ olup

$dx\vee dy\leq d\left(x\vee y\right)$

(2) $\Rightarrow(1)$ kabul edelim ki

$dx\vee dy\leq d\left(x\vee y\right)$ ve $x\leq y$

$dx\leq dx\vee dy\leq d\left(x\vee y\right)=dy$

(1) $\Rightarrow(3)$ d izoton f türev olduğunu kabul edelim. $dx\leq d_1$ olur.

Önerme 2.4 a)'dan $dx\leq fx$'dir. $dx\leq fx\wedge d_1$ olur. Önerme 2.7'den $y=1$ için

$dx=dx\vee\left(fx\wedge d_1\right)=fx\wedge d_1$

(3) $\Rightarrow(4)$

$dx=fx\wedge d_1$ olsun.

$$
\begin{aligned}
d(x \wedge y) = f(x \wedge y) \wedge d_1 = fx \wedge fy \wedge d_1 & \\
&= (fx \wedge d_1) \wedge (fy \wedge d_1) \\
&= dx \wedge dy
\end{aligned}
$$

(4) $\Rightarrow$ (1) $d(x \wedge y) = dx \wedge dy \quad ve \quad x \le y$

$$dx = d(x \wedge y) = dx \wedge dy$$

Olduğundan $dx \le dy$ dir.

Teorem 3.10: L bir modüler latis ve d L üzerinde bir f türev olsun.

a) d L üzerinde izoton f türev $\Leftrightarrow d(x \wedge y) = dx \wedge dy$

b) $f(x \vee y) = fx \vee fy$ olacak şekilde d L üzerinde izoton bir $f \Rightarrow dx = fx$ iken $d(x \vee y) = dx \vee dy$

İspat: (a) d bir izoton f türev olsun.

$x \wedge y \le x$ ve $x \wedge y \le y$ olduğundan $d(x \wedge y) \le dx$ $d(x \wedge y) \le dy$.

Böylece $d(x \wedge y) \le dx \wedge dy$

Önerme (2.4) (a)'dan $dx \wedge fy \le dx \le fx$

$$
\begin{aligned}
dx \wedge dy &= (dx \wedge dy) \wedge (fx \wedge fy) \\
&\le (dx \vee dy) \wedge (fx \wedge fy) \\
&= ((dy \vee dx) \wedge fy) \wedge fx \\
&= (dy \vee (dx \wedge fy)) \wedge fx \\
&= ((dx \wedge fy) \vee dy) \wedge fx \\
&= (dx \wedge fy) \vee (fx \wedge dy) \\
&\le d(x \wedge y)
\end{aligned}
$$

Diğer taraftan

$d(x \wedge y) = dx \wedge dy$ ve $x \le y$ olsun.

$dx = d(x \wedge y) = dx \wedge dy$ olduğundan $dx \le dy$ dir.

(b) Farzedelim ki d bir izoton f türev ve $dx = fx$ olsun. Önerme 2.7'den ve L modüler latis olduğundan

$$\begin{aligned} dy &= dy \vee (fy \wedge d(x \wedge y)) \\ &= (dy \vee fy) \wedge d(x \vee y) \\ &= fy \wedge d(x \vee y) \end{aligned}$$

Hipotezi kullanarak

$$\begin{aligned} dx \vee dy &= dx \vee (fy \wedge d(x \vee y)) \\ &= (dx \vee fy) \wedge d(x \vee y) \\ &= (fx \vee fy) \wedge d(x \vee y) \\ &= f(x \vee y) \wedge d(x \vee y) \\ &= d(x \vee y) \end{aligned}$$

Teorem 3.11 L bir dağılmalı latis ve $d, f(x \vee y) = fx \vee fy$ L üzerinde bir f türev olsun. Aşağıdaki şartlar sağlanır.

(1) d izoton f türevse $d(x \wedge y) = dx \wedge dy$

(2) d izoton f türev $\Leftrightarrow d(x \vee y) = dx \vee dy$

İspat (1) d izoton f türev olduğundan $d(x \wedge y) \leq dx \wedge dy$

önerme 2.4 a)'dan

$$\begin{aligned} dx \wedge dy &= (dx \wedge fx) \wedge (dy \wedge fy) \\ &= (dx \wedge fy) \wedge (fx \wedge dy) \\ &\leq (dx \wedge fy) \vee (fx \wedge dy) \\ &= d(x \wedge y) \end{aligned}$$

Böylece $d(x \wedge y) = dx \wedge dy$

İspat (2): d izoton f türev olsun. (1)'den $d(x \wedge y) = dx \wedge dy$

önerme (2.4) (a)'dan

$$\begin{aligned} dy &= dy \vee (fy \wedge d(x \vee y)) \\ &= (dy \vee fy) \wedge (dy \vee d(x \vee y)) \\ &= fy \wedge d(x \wedge y) \end{aligned}$$

benzer olarak

$$\begin{aligned} dx &= fx \wedge d(x \wedge y) \\ dx \vee dy &= (fx \wedge d(x \vee y)) \vee (fy \wedge d(x \vee y)) \\ &= (fx \vee fy) \wedge d(x \vee y) \\ &= f(x \vee y) \wedge d(x \vee y) \end{aligned}$$

$$dx = fx \wedge d(x \wedge y)$$

$$\begin{aligned} dx \vee dy &= (fx \wedge d(x \vee y)) \vee (fy \wedge d(x \vee y)) \\ &= (fx \vee fy) \wedge d(x \vee y) \\ &= f(x \vee y) \wedge d(x \vee y) \\ &= d(x \vee y) \end{aligned}$$

Diğer taraftan

$d(x \vee y) = dx \vee dy \quad x \leq y$ olsun.

$dy = d(x \vee y) = dx \vee dy$

olup $dx \leq dy$ dir.

<u>Teorem 3.12:</u> L bir latis olsun. $\forall x, y \in L$ için $d(x \vee y) = dx \vee dy$ olacak şekilde L üzerinde d f türev varsa ve f bir epimorfizm ise L dağılmalı latistir.

<u>İspat:</u> Örnek 2.3 de olduğu gibi d, L üzerinde $c \in L$ için $dx = fx \wedge c$ şeklinde tanımlı f türev olsun. f 'nin örten olduğunu ve $\forall\, x, y \in L$ için $d(x \vee y) = dx \vee dy$ $\forall\, a, b \in L$ için $fu = a$ ve $fv = b$ olacak şekilde $u, v \in L$ vardır. Böylece

$$\begin{aligned} (a \vee b) \wedge c &= (fu \vee fv) \wedge c \\ &= f(u \vee v) \wedge c \\ &= d(u \vee v) \\ &= du \vee dv \\ &= (fu \wedge c) \vee (fv \wedge c) \\ &= (a \wedge c) \vee (b \wedge c) \end{aligned}$$

4. LATİSLERDE SİMETRİK Bİ TÜREV

Tanım 4.1: Ceven (2009) L bir latis olsun. $\forall\, x,y \in L$ için $D(x,y)=D(y,x)$ oluyorsa $D(.,.): LxL \to L$ bir simetrik dönüşümdür.

Tanım 4.2: L bir latis olsun. $D(.,.): LxL \to L$ simetrik dönüşümü olsun $d: L \to L$ dönüşümü verilsin $d(x)=D(x,x)$ ifadesine $D(.,.)$'nin izi denir.

Tanım 4.3: L bir latis olsun ve $D: LxL \to L$ simetrik dönüşüm olsun. $\forall\, x,y,z \in L$ için aşağıdaki şart sağlanıyorsa

$$D(x \wedge y, z) = \big(D(x,z) \wedge y\big) \vee \big(x \wedge D(y,z)\big)$$

D'ye L üzerinde simetrik bi türev denir.

Ayrıca $\forall\, x,y,z \in L$ için

$$\big(D(x,y) \wedge z\big) \vee \big(y \wedge D(x,z)\big)$$

Örnek 4.4: L bir latis ve $\forall\, x,y \in L$ için $D(x,y)=x \wedge y$ dönüşümü verilsin. D L üzerinde simetrik bi türevdir.

Örnek 4.5: L bir latis $a \in L$ olsun. $\forall\, x,y,z \in L$ için $D(x,y)=(x \wedge y) \wedge a$ dönüşümü tanımlansın. D L üzerinde simetrik bi türevdir.

Önerme 4.6: L bir latis ve d'de D simetrik bi türevi olsun. Aşağıdaki şartlar sağlanır. $\forall\, x,y \in L$ için

i. $D(x,y) \le x \; ve \; D(x,y) \le y$

ii. $D(x,y) \le x \wedge y$

iii. $d(x) \le x$

iv. $d^2(x) = d(x)$

İspat:

i. $D(x,y) = D(x \wedge x, y) = \big(D(x,y) \wedge x\big) \vee \big(x \wedge D(x,y)\big) = x \wedge D(x,y)$

olup $D(x,y) \le x$ olur. Benzer şekilde $D(x,y) \le y$ olduğu gösterilir.

ii. i)'den ispat açık

iii. $d(x) = D(x,x) = D(x \wedge x, x)$

$$= \big(D(x,x) \wedge x\big) \vee \big(x \wedge D(x,x)\big)$$

$$= x \wedge D(x,x)$$
$$= x \wedge d(x)$$

olup $d(x) \leq x$ olur.

iv. iii)'den $d^2(x) = d(d(x)) \leq d(x) \leq x$

i)'den $D(x, d(x)) \leq d(x)$

Böylece

$$\begin{aligned} d^2(x) = d(d(x)) &= d(x \wedge d(x)) \\ &= D(x, d(x)) \vee (x \wedge d^2(x)) \vee (d(x) \wedge x) \\ &= D(x, d(x)) \vee d^2(x) \vee d(x) \\ &= D(x, d(x)) \vee d(x) = d(x) \end{aligned}$$

Sonuç 4.7: L bir latis ve D'de L üzerinde simetrik bi türev olsun. 0 en küçük eleman olmak üzere ve 1 en büyük eleman olmak üzere $1 \in L$, $0 \in L$ olsun. Böylece

$\forall\, x \in L$ için $D(0, x) = 0$ ve $D(1, x) \leq x$ olur.

Tanım 4.8: L bir latis olsun ve $D : LxL \to L$ simetrik dönüşüm olsun. Aşağıdaki şart sağlanıyorsa D'ye jonitive dönüşüm denir. $\forall\, x, y, z \in L$ için

$$D(x \vee y, z) = D(x, z) \vee D(y, z)$$

Önerme 4.9: L bir latis olsun d'de jonitive simetrik bi türev D'nin izi olsun. $\forall\, x, y \in L$ için

$$d(x \vee y) = d(x) \vee d(y) \vee D(x, y)$$

ve

$$d(x) \vee d(y) \leq d(x \vee y)$$

İspat: $d(x \vee y) = D(x \vee y, x \vee y) = d(x) \vee d(y) \vee D(x, y)$ olup

$$d(x) \vee d(y) \leq d(x \vee y)$$

Teorem 4.10: L bir latis olsun D'de L üzerinde simetrik bi türev olsun d'de D simetrik bi türevinin izi olsun. $\forall\, x, y \in L$ için

$$d(x \wedge y) = D(x, y) \vee (x \wedge d(y)) \vee (y \wedge d(x))$$

İspat: Önerme 3.6 i) ve iii) kullanalım.

$$
\begin{aligned}
d(x\wedge y) &= D(x\wedge y, x\wedge y)\\
&= D(x\wedge y, x)\wedge y)\vee(D(x\wedge y, y)\wedge x)\\
&= D(x\wedge y, x)\vee D(x\wedge y, y)\\
&=((d(x)\wedge y)\vee(x\wedge D(x,y))\vee(D(x,y)\wedge y)\vee(x\wedge d(y))\\
&=((d(x)\wedge y)\vee D(x,y)\vee(D(x,y)\vee)(x\wedge d(y))\\
&= D(x,y)\vee(x\wedge(dy))\\
&= D(x,y)\vee(x\wedge d(y))\vee(y\wedge d(x))
\end{aligned}
$$

Sonuç 4.11: L bir latis D'de L üzerinde simetrik bi türev ve d'de D simetrik bir türevin izi olsun. Aşağıdaki şartlar sağlanır.

i. $D(x,y)\le d(x\wedge y)$

ii. $x\wedge d(y)\le d(x\wedge y)$

iii. $d(x)\wedge d(y)\le d(x\wedge y)$

Sonuç 4.12: L bir latis olsun. 0 en küçük eleman ve 1 en büyük eleman olsun. $0\in L$ ve $1\in L$ olmak üzere D L üzerinde simetrik bi türev olsun. d'de D simetrik bi türevinin izi olsun.

i. $x\ge d(1)$ ise $d(x)\ge d(1)$

ii. $x\le d(1)$ ise $d(x)=x$

iii. $x\le y$ ise $d(y)=y,\ d(x=x)$ olur.

İspat:

i. $x\ge d(1)\Rightarrow d(1)=x\wedge d1\le d(x\wedge 1)=d(x)\Rightarrow d(1)\le d(x)$

ii. $x\le d(1)\Rightarrow x=x\wedge d(1)\le d(x\wedge 1)=d(x)$ böylece $d(x)=x$ olur.

iii. $x\wedge y=x\quad d(y)=y\ D(x,y)\le x$ ve $d(x)\le x\le y$

$d(x)=d(x\wedge y)=D(x,y)\vee(x\wedge d(y))\vee(y\wedge d(x))=x$

Teorem 4.13: L bir latis olsun. Eğer L'de her simetrik bi türev jointive ise L dağılmalı latistir.

İspat: Örnek 3.4'ten $D(x,z)=x\wedge z$'nin simetrik bi türev olduğunu biliyoruz. x yerine $x\vee y$ alırsak

$D(x\vee y,z)=(x\vee y)\wedge z$ olur. D jonitive olduğundan

$$\begin{aligned} D(x\vee y,z) &= D(x,z)\vee D(y,z) \\ &= (x\wedge z)\vee(y\wedge z) \end{aligned}$$

Böylece

$$(x\vee y)\wedge z=(x\wedge z)\vee(y\wedge z)$$

5. LATİSLERDE F-Bİ TÜREV

Tanım 5.1: Ozbal ve Fırat (2010) L bir latis ve $D: LxL \to L$ simetrik dönüşüm olsun. $\forall\ x, y, z \in L$ için $D(x \wedge y, z) = (D(x,z) \wedge f(y)) \vee (f(x) \wedge D(y,z))$ olacak şekilde $f: L \to L$ fonksiyonu varsa D'ye L üzerinde simetrik f bi türev denir.

Ayrıca $\forall\ x, y, z \in L$ için

$D(x, y \wedge z) = (D(x,y) \wedge f(z)) \vee (f(y) \wedge D(x,z))$ sağlanır.

Örnek 5.2: L bir latis ve $\forall\ x, y \in L$ için $f(x \wedge y) = f(x) \wedge f(y)$ olmak üzere $D(x,y) = (f(x) \wedge f(y)) \wedge a$ olacak şekilde L'de D dönüşümü tanımlansın. D L üzerinde simetrik f bi türevdir.

Örnek 5.3: L bir latis ve $\forall\ x, y \in L$ için $f(x \wedge y) = f(x) \wedge f(y)$ olmak üzere $D(x,y) = (f(x) \wedge f(y)) \wedge a$ olacak şekilde L'de D dönüşümü tanımlansın. D L üzerinde simetrik f bi türevdir.

Önerme 5.4: L bir latis ve d de L üzerinde tanımlı D f bi türevin izi olsun. Aşağıdaki şartlar sağlanır.

i. $D(x,y) \le f(x)$ ve $D(x,y) \le f(y)$

ii. $D(x,y) \le f(x) \wedge f(y)$

iii. $d(x) \le f(x)$

İspat:

i. $D(x,y) = D(x \wedge x, y) = (D(x,y) \wedge f(x)) \vee (f(x) \wedge D(x,y))$

$= f(x) \wedge D(x,y)$

olup $D(x,y) \le f(x)$ benzer olarak $D(x,y) \le f(y)$

ii. i)'den açıktır.

iii. $d(x) = D(x,x) = ((D(x,x) \wedge f(x)) \vee (f(x) \wedge D(x,x))$

$= f(x) \wedge d(x)$

böylece $d(x) \le f(x)$

Sonuç 5.5: L bir latis ve D L üzerinde simetrik f bi türev olsun. 0 en küçük eleman ve 1 en büyük eleman olsun. $0 \in L$ ve $1 \in L$ ve $f(0)=0$ ise $\forall x \in L$ için $D(0,x)=0$ ve $D(1,x) \leq f(x)$ olur.

Tanım 5.6: L bir latis ve $D: LxL \to L$ simetrik dönüşüm olsun. Eğer $\forall\, x,y,z \in L$ için

$$D(x \vee y, z) = D(x,z) \vee D(y,z)$$

sağlanıyor ise D'ye joinitive dönüşüm denir.

Önerme 5.7: L bir latis ve d'de joinitive simetrik f bi türev D'nin izi olsun. $\forall\, x,y \in L$ için

$d(x \vee y) = d(x) \vee d(y) \vee D(x,y)$ ve

$d(x) \vee d(y) \leq d(x \vee y)$

İspat: $d(x \vee y) = D(x \vee y, x \vee y)$

$$\begin{aligned} &= D(x, x \vee y) \vee D(y, x \vee y) \\ &= D(x,x) \vee D(x,y) \vee D(y,x) \vee D(y,y) \\ &= d(x) \vee d(y) \vee D(x,y) \end{aligned}$$

Ve $\forall\, x,y \in L$ için

$$d(x) \vee d(y) \leq d(x,y)$$

Teorem 5.8: L bir latis. $\forall\, x,y \varepsilon L$ için $f(x \wedge y) = f(x) \wedge f(y)$ olacak şekilde D'de L üzerinde simetrik f bi türev olsun. d'de simetrik f bi türev D'nin izi olsun. $\forall\, x,y \in L$ için

$d(x \wedge y) = D(x,y) \vee \big(f(x) \wedge d(y)\big) \vee \big(f(y) \wedge d(x)\big)$

İspat: Önerme 4.7 i) ve ii)'yi kullanarak

$$\begin{aligned} d(x \wedge y) &= D(x \wedge y, x \wedge y) \\ &= \big(D(x \wedge y, x) \wedge f(y)\big) \vee \big(f(x) \wedge D(x \wedge y, y)\big) \\ &= D(x \wedge y, x) \vee D(x \wedge y, y) \\ &= \Big[\big(D(x,x) \wedge f(y)\big) \vee \big(f(x) \wedge D(y,x)\big)\Big] \\ &\quad \vee \Big[\big(D(x,y) \wedge f(y) \vee \big(f(x) \wedge D(y,y)\big)\Big] \\ &= \big(d(x) \wedge f(y)\big) \vee \big(f(x) \wedge D(y,x)\big) \end{aligned}$$

$$\vee\left(f(y)\wedge D(y,x)\right)\vee\left(d(y)\wedge f(x)\right)$$
$$=\left(d(x)\wedge f(y)\right)\vee\left(d(y)\wedge f(x)\right)\vee D(x,y)$$

<u>Sonuç 5.9:</u> L bir latis olsun. $\forall\, x,y\in L$ için $f(x\wedge y)=f(x)\wedge f(y)$ olacak şekilde D L üzerinde simetrik f bi türev olsun d 'de L üzerinde tanımlı simetrik f bi türev D 'nin izi olsun. Aşağıdaki şartlar sağlanır.

i. $D(x,y)\le d(x\wedge y)$

ii. $f(x)\wedge d(y)\le d(x\wedge y)$

iii. $d(x)\wedge d(y)\le d(x\wedge y)$

<u>Sonuç 5.10:</u> L bir latis olsun. $\forall\, x,y\in L$ için $f(x\wedge y)=f(x)\wedge f(y)$ olacak şekilde D L üzerinde simetrik f bi türev olsun. 0 en küçük eleman ve 1 en büyük eleman olmak üzere $0\in L$ ve $1\in L$ olsun. d de L üzerinde tanımlı D simetrik bi türevin izi olsun. Aşağıdaki şartlar sağlanır.

i. $f(x)\ge d(1)\Rightarrow d(x)\ge d(1)$

ii. $f(x)\le d(1)\Rightarrow d(x)=f(x)$

iii. $x\le y$ ve f artan fonksiyon ve $d(y)=f(y)\Rightarrow d(x)=f(x)$

<u>İspat:</u>

i. $f(x)\ge d_1\Rightarrow d(1)=d(1)\wedge f(x)\le d(x\wedge 1)=d(x)$

$\Rightarrow d(x)\ge d(1)$

ii. $f(x)\le d(1)\Rightarrow f(x)=f(x)\wedge d(1)\le d(x\wedge 1)=d(x)$

böylece $d(x)=f(x)$ olur.

iii. $x\le y$ ve f artan fonksiyon ve $d(y)=f(y)$ olsun.

$f(x)\wedge f(y)=f(x)$ olduğundan

$d(y)=f(y)$ ve $D(x,y)\le f(x)$ ve $d(x)\le f(x)\le f(y)$

$$d(x)=d(x\wedge y)=D(x,y)\vee\left(f(x)\wedge d(y)\right)\vee\left(f(y)\wedge d(x)\right)$$
$$=D(x,y)\vee\left(f(x)\vee d(x)\right)$$
$$=f(x)$$

Teorem 5.11 L bir latis ve f epimorfizm olmak üzere eğer L üzerinde joinitive simetrik f bi türev varsa L'ye dağılmalı latis denir.

İspat: f homomorfizm olmak üzere D örnek 4.2'den $\forall\, x,z$ için $D(x,z)= f(x)\wedge f(z)$ olacak şekilde D simetrik bi f türev olsun. Kabul edelim ki f örten dönüşüm ve D joinitive dönüşüm olsun. $\forall\, a,b,c\in L$ için $f(x)=a,\ f(y)=b,\ f(z)=c$ olacak şekilde $x,y,z\in L$ vardır. Böylece

$$\begin{aligned}(a\vee b)\wedge c &= \left(f(x)\vee f(y)\right)\wedge f(z)\\ &= D(x\vee y,z)\\ &= D(x,z)\vee D(y,z)\\ &= \left(f(x)\wedge f(z)\vee f(y)\wedge f(z)\right)\\ &= (a\wedge b)\vee(b\wedge c)\end{aligned}$$

Önerme 5.12: L bir latis ve d'de L üzerindeki simetrik f bi türev D'nin izi olsun. Eğer f L'den L'ye azalan örten bir fonksiyon ise $\forall x\in L$ için $D\left(d(x),f(x)\right)\geq d\left(f(x)\right)$ özel olarak 0 en küçük eleman olmak üzere ve $0\in L$ ve $\forall x\in L$ için $D\left(d(x),f(x)\right)=0$ ise $d=0$

İspat: L bir latis ve D L üzerinde simetrik f bi türev ve $f:L\to L$ azalan fonksiyon olsun. Önerme 4.4 i) ve ii)'den

$$\begin{aligned}D\left(d(x),f(x)\right) &= D\left(d(x)\wedge f(x),f(x)\right)\\ &= D\left(d(x),f(x)\right)\wedge f\left(f(x)\right)\\ &\quad \vee\left(f\left(d(x)\right)\wedge D\left(f(x),f(x)\right)\right)\\ &= D\left(d(x),f(x)\right)\vee\left(f\left(d(x)\right)\wedge D\left(f(x),f(x)\right)\right)\\ &= D\left(d(x),f(x)\right)\vee d\left(f(x)\right)\end{aligned}$$

Böylece $\quad D\left(d(x),f(x)\right)\geq d\left(f(x)\right)$

Eğer 0 en küçük eleman olmak üzere $0\in L$ ise $\forall x\in L$ için $D\left(d(x),f(x)\right)=0$ ise $0\leq d\left(f(x)\right)\leq D\left(d(x),f(x)\right)=0$

Böylece $\forall x\in L$ için $d\left(f(x)\right)=0$ yani $d=0$

6. LATİSLERDE PERMUTİNG TRİ-TÜREV

<u>Tanım 6.1:</u> Ozturk ve diğerleri (2009) L bir latis. $\forall x, y, z \in L$ için

$$D(x,y,z)=D(x,z,y)=D(y,x,z)=D(y,z,x)=D(z,x,y)=D(z,y,x)$$

şartları sağlanıyorsa $D:LxLxLx\rightarrow L$ D'ye permuting dönüşüm denir.

$d:L\rightarrow L$ dönüşüm olsun. $d(x)=D(x,x,x)$ ifadesine D permuting dönüşümünün izi denir.

<u>Tanım 6.2:</u> L bir latis olsun. $\forall\ x,y,z,w\in L$ için

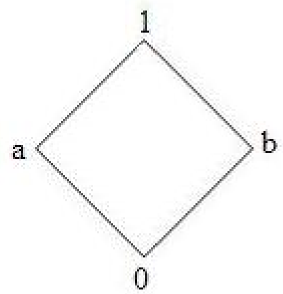
$D(x\wedge w,y,z)=(D(x,y,z)\wedge w)\vee D(w,y,z)$ ise D'ye permuting tri türev denir.

D permuting tri türevse $\forall\ x,y,z,w\in L$ için

$$D(x,y\wedge w,z)=(D(x,y,z)\wedge w)\vee(y\wedge D(x,w,z))$$
$$D(x,y,z\wedge w)=(D(x,y,z)\wedge w)\vee(z\wedge D(x,y,w))$$

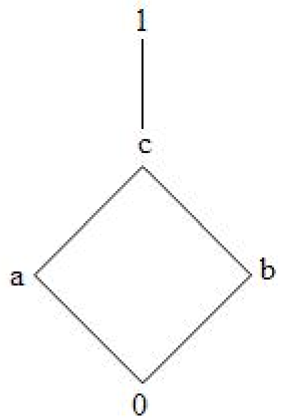
<u>Örnek 6.3:</u> L bir latis: $D:LxLxL\rightarrow L$ $D(x,y,z)=(x\wedge y)\wedge z$ şeklinde tanımlı bir dönüşüm olsun. D'ye permuting tri türev denir.

<u>Örnek 6.4:</u> L Şekil 6'daki gibi bir latis. D'de $D(x,y,z)=(x\vee y)\vee z$ olacak bir dönüşüm olsun. D L üzerinde permuting tri türev değildir.



Şekil 6. 1: Latis 6

<u>Örnek 6.5:</u> L Şekil 7'deki gibi bir latis olsun. D'yi $D(x,y,z)=[(x\wedge y)\vee z]\wedge b$ şeklinde tanımlayalım. D L üzerinde permuting tri türev değildir.



Şekil 6. 2: Latis 7

Şeklinde tanımlayalım.

Örnek 6.6: D örnek 5.3'deki gibi L üzerinde tanımlı $D(x,y,z)=\left[(x\wedge y)\wedge z\right]\wedge b$ şeklinde bir dönüşüm olsun. D L üzerinde permuting tri türevdir.

Önerme 6.7: L bir latis ve D'de L üzerinde permuting tri türev olsun. d de D'nin izi olsun. $\forall x\in L$ için $d(x)\leq x$

İspat: $\forall x\in L$ için $x\wedge x=x$

$$\begin{aligned}
d(x) &= D(x,x,x)=D(x\wedge x,x,x)\\
&=\left(D(x,x,x)\wedge x\right)\vee\left(x\wedge D(x,x,x)\right)\\
&=D(x,x,x)\wedge x\\
&=d(x)\wedge x
\end{aligned}$$

Böylece $\forall x\in L$ için $d(x)\leq x$ olur.

Önerme 6.8: L bir latis olsun ve D L üzerinde permuting tri türev olsun. $\forall x,y,z\in L$ için

$D(x,y,z)\leq x$ $D(x,y,z)\leq y$ ve $D(x,y,z)\leq z$

İspat: $\forall x\in L$ için $x\wedge x=x$

$$D(x,y,z) = D(x \wedge x, y, z) = (D(x,y,z) \wedge x) \vee (x \wedge D(x,y,z))$$
$$= D(x,y,z) \wedge x$$

Böylece $\forall\ x, y, z \in L$ için

$$D(x,y,z) \le x$$
$$D(x,y,z) \le y$$
$$D(x,y,z) \le z$$

olur.

NOT 5.9: L bir latis ve D L üzerinde permuting tri türev olsun. $\forall\ x, y, z \in L$ için $D(x,y,z) \le x \wedge y,\ D(x,y,z) \le x \wedge z,\ D(x,y,z) \le y \wedge z$ ve $D(x,y,z) \le y \wedge z$ olduğundan $D(x,y,z) \le (x \wedge y) \wedge z$ olur.

Sonuç 6.10: L bir latis D'de L üzerinde permuting tri türev olsun. 0 en küçük eleman 1 en büyük eleman olsun. $0 \in L, 1 \in L$ olsun. $\forall\ x, y \in L$ için

$D(0,x,y) = 0\ D(1,x,y) \le x\ D(1,x,y) \le y$ olur.

Tanım 6.11: L bir latis ve D L üzerinde permuting tri türev olsun. $\forall x, y, z, w \in L$ için

$$D(x \vee w, y, z) = D(x,y,z) \vee D(w,y,z)$$

sağlarsa D'ye joinitive dönüşüm denir.

Teorem 6.12: L bir latis D joinitive dönüşüm d de D'nin izi olsun. $\forall x, y \in L$ için

$d(x \vee y) = d(x) \vee d(y) \vee D(x,x,y) \vee D(x,y,y)$ ve

$$d(x) \vee d(y) \le d(x \vee y)$$

İspat: d L'de D'nin izi olsun.

$$
\begin{aligned}
d(x\vee y) &= D(x\vee y, x\vee y, x\vee y)\\
&= d(x)\vee D(x,x,y)\vee D(x,y,x)\vee D(x,y,y)\\
&\quad \vee D(y,x,x)\vee D(y,x,y)\vee D(y,y,x)\vee d(y)\\
&= d(x)\vee d(y)\vee D(x,x,y)\vee D(x,y,y)
\end{aligned}
$$

Ve $\forall x,y\in L$ için

$$d(x)\vee d(y)\leq d(x\vee y)$$

Teorem 6.13: L bir latis olsun. Ve D'de L üzerinde permuting tri türev olsun. d'de D'nin izi olsun. $\forall x,y\in L$ için

$$d(x\wedge y)=\left(d(x)\wedge y\right)\vee\left(x\wedge d(y)\right)\vee D(x,x,y)\vee D(x,y,y)$$

İspat: $d(x\wedge y)=D(x\wedge y, x\wedge y, x\wedge y)$

$$
\begin{aligned}
&= \left(D(x\wedge y, x\wedge y, x)\wedge y\right)\vee\left(x\wedge D(x\wedge y, x\wedge y, y)\right)\\
&= \left\{\left[\left(D(x\wedge y, x, x)\wedge y\right)\vee\left(x\wedge D(x\wedge y, y, x)\right)\right]\wedge y\right\}\\
&\quad \vee\left\{x\wedge\left[\left(D(x\wedge y, x, y)\wedge y\right)\vee\left(x\wedge D(x\wedge y, y, y)\right)\right]\right\}\\
&= \left[\left(d(x)\wedge y\right)\vee D(x,x,y)\vee D(x,y,y)\right]\\
&\quad \vee\left[D(x,x,y)\vee D(x,y,y)\vee\left(x\wedge d(y)\right)\right]\\
&= \left(d(x)\wedge y\right)\vee\left(x\wedge d(y)\right)\vee D(x,x,y)\vee D(x,y,y)
\end{aligned}
$$

Sonuç 6.14: L bir latis olsun. D L üzerinde permuting tri türev olsun. d de D'nin izi olsun .

i. $D(x,x,y)\leq d(x\wedge y), D(x,y,y)\leq d(x\wedge y)$

ii. $x\wedge d(y)\leq d(x\wedge y)$

iii. $d(x)\wedge y\leq d(x\wedge y)$

iv. $d(x)\wedge d(y)\leq d(x\wedge y)$

İspat: iv) $d(x)\leq x$ ve $d(y)\leq y$ olduğundan

$$d(x)\wedge d(y)\leq x\wedge y$$

(i) ve (ii)’den

$$(x \wedge y) \wedge (d(x) \wedge d(y)) \leq d(x \wedge y)$$
$$d(x) \wedge d(y) \leq d(x \wedge y)$$

SONUÇ 6.15: $\forall x \in L$ için $D(x,x,1) \leq d(x \wedge 1) = d(x)$ ve

$$x \wedge d(1) \leq d(x \wedge 1) = d(x)$$

SONUÇ 6.16: L bir latis D L üzerinde permuting tri türev olsun. d de D ’nin izi olsun. 0 en küçük eleman ve 1 en büyük eleman olsun. $0 \in L$ $1 \in L$ olsun.

i. $x \geq d(1) \Rightarrow d(x) \geq d(1)$

ii. $x \leq d(1) \Rightarrow x = d(x)$

iii. $x \leq y$ ve $d(y) = y \Rightarrow x = d(x)$

iv. $d^2(x) = d(x)$

İspat:

i. $\forall x \in L$ için $x \leq d(1)$ olur.

$d(1) = x \wedge d(1) \leq d(x)$ olduğundan

$\forall x \in L$ için

$d(1) \leq d(x)$

ii. $\forall x \in L$ için $x \leq d(1)$ $x = x \wedge d(1) \leq d(x)$ ve $d(x) \leq x$ olduğundan

$x = d(x)$ olur.

iii. $\forall x, y \in L$ için $x \leq y$ ve $d(y) = y$ olsun.

$$x \leq y, x \wedge y = x$$

olduğundan böylece $\forall x, y \in L$ için

$$\begin{aligned} d(x) &= d(x \wedge y) \\ &= (d(x) \wedge y) \vee (x \wedge d(y)) \vee D(x,x,y) \vee D(x,y,y) \\ &= x \end{aligned}$$

olur.

iv. $\forall x \in L$ için $d^2(x) = d(d(x)) \leq d(x) \leq x$ böylece

$$d^2(x)=d(d(x))=d(d(x)\wedge x)$$

$$\begin{aligned}&=(d^2(x)\wedge x)\vee(d(x)\wedge d(x))\\&\vee D(d(x),d(x),x)\vee D(d(x),x,x\\&\leq d^2(x)\vee d(x)\vee d(x)\vee d(x)\\&=d^2(x)\vee d(x)\end{aligned}$$

olup $d(x)\leq d^2(x)$ olur. Böylece $\forall x\in L$ için

$d^2(x)=d(x)$ olur.

Önerme 6.17: L bir latis ve D'de L üzerinde permuting tri türev olsun. d'de D'nin izi olsun. Eğer $\forall x,y\in L$ için $y\leq x$ ve $d(x)=x$ ise $d(y)=y$'dir.

İspat: $\forall x,y\in L$ için $y\leq x$ ve $d(x)=x$ olsun. $y\leq x$ olduğundan

$$\begin{aligned}d(y)&=d(x\wedge y)\\&=(d(x)\wedge y)\vee(x\wedge d(y))\vee D(x,x,y)\vee D(x,y,y)\\&=y\vee d(y)\vee D(x,x,y)\vee D(x,y,y)\\&=y\end{aligned}$$

$\forall\, y\in L$ için $d(y)=y$'dir.

Sonuç 6.18: L bir latis olsun D'de permuting tri türev olsun d'de D'nin izi olsun. 1 en büyük eleman olsun. $1\in L$ olsun. $d(1)=1\Leftrightarrow d$ L'de birim dönüşümdür.

İspat: $d(1)=1$ olsun. $x\leq 1$ ve $d(1)=1$ olduğundan önerme 5.17'den $\forall x\in L$ için $d(x)=x$ olur. d'ye L üzerinde birim dönüşüm denir.

Önerme 6.19: L bir latis ve D_1 ve D_2 L üzerinde permuting tri türev ve d_1 D_1'in d_2'de D_2'nin izi olsun. Eğer d_1 ve d_2 izoton ise $d_1=d_2\Leftrightarrow fix_{d1}(L)=fix_{d2}(L)$ olur.

İspat: $(\Rightarrow)\, d_1=d_2$ ise $Fix_{d1}(L)=Fix_{d2}(L)$

$(\Leftarrow)\, x\in Fix_{d1}(L)$ olsun.

$d_1(x)\in Fix_{d1}(L)=Fix_{d2}(L)$ olduğundan

$d_2\left(d_1\left(x\right)\right)=d_1\left(x\right)$ olur. Benzer olarak

$d_1\left(d_2\left(x\right)\right)=d_2\left(x\right)$

d_1 ve d_2 izoton olduğundan

$d_2\left(d_1\left(x\right)\right)\leq d\left(x\right)=d_1\left(d_2\left(x\right)\right)$ ve böylece

$d_2\left(d_1\left(x\right)\right)\leq d_1\left(d_2\left(x\right)\right)$ böylece

$d_1\left(x\right)=d_2\left(d_1\left(x\right)\right)=d_1\left(d_2\left(x\right)\right)=d_2\left(x\right)$ olup

$d_1=d_2$ dir.

Tanım 6.19: L bir latis ve D L üzerinde permuting tri türev olsun. d D'nin izi olsun.

i. $x\leq y$ ise $d\left(x\right)\leq d\left(y\right), d$ izoton dönüşümdür.

ii. d birebir ise d'ye monomorfik dönüşüm denir.

iii. d örten ise d'ye d'ye epik dönüşüm denir.

İspat: (i) $\Rightarrow$ (ii) d izoton olduğundan $d\left(x\right)\leq d\left(1\right)$'dir.

$d\left(x\right)\leq x$ olduğundan

$d\left(x\right)\leq x\wedge d\left(1\right)$ olur.

(ii)$\Rightarrow$ (iii) $\forall x\varepsilon L$ için $d\left(x\right)=x\wedge d\left(1\right)$

$$\begin{aligned}
d\left(x\wedge y\right)&=\left(x\wedge y\right)\wedge d\left(1\right)\\
&=\left(x\wedge y\right)\wedge d\left(1\right)\wedge d\left(1\right)\\
&=\left(x\wedge d\left(1\right)\right)\wedge\left(y\wedge d\left(1\right)\right)\\
&=d\left(x\right)\wedge d\left(y\right)
\end{aligned}$$

(iii)$\Rightarrow$ (i) $x\leq y$ olsun.

$$d\left(x\right)=d\left(x\wedge y\right)=d\left(x\right)\wedge d\left(y\right)$$

böylece

$d\left(x\right)\leq d\left(y\right)$ olup d izotondur.

(i) $\Rightarrow$ (iv) L izoton olsun.

$x \leq x \vee y$ ve $y \leq x \vee y$

$d(x) \leq d(x \vee y)\, d(y) \leq d(x \vee y)$ olur.

böylece

$d(x) \vee d(y) \leq d(x \vee y)$

(iv) $\Rightarrow$ (i) $x \leq y$ olsun.

$d(x) \vee d(y) \leq d(x \vee y) = d(y)$ olduğundan

$d(x) \vee d(y)$ olup

d izotondur.

<u>Teorem</u> 6.20: L modüler latis ve D permuting tri türev olsun. d 'de D 'nin izi olsun. Aşağıdaki şartlar denktir.

i. d izotondur.
ii. $d(x \wedge y) = d(x) \wedge d(y)$

(i)$\Rightarrow$ (ii) d izoton olsun $x \wedge y \leq x$ ve $x \wedge y \leq y$ olduğundan

$d(x \wedge y) \leq d(x)$ ve $d(x \wedge y) \leq d(y)$

$d(x \wedge y) \leq d(x) \wedge d(y)$

L modüler olduğundan

$$\begin{aligned} d(x \wedge y) &= \big(\big(d(x) \wedge y\big) \vee \big(x \wedge d(y)\big) \vee D(x,x,y) \vee D(x,y,y) \\ &= \big[\big(d(x) \vee D(x,x,y)\big) \wedge y\big] \vee \big[d(y) \vee D(x,y,y) \wedge x\big] \\ &\geq \big(d(x) \wedge y\big) \wedge \big(x \wedge d(y)\big) = d(x) \wedge d(y) \end{aligned}$$

Böylece

$d(x \wedge y) \geq d(x) \wedge d(y)$ olup

$d(x \wedge y) = d(x) \wedge d(y)$

(ii)$\Rightarrow$ (i) $x \leq y$ ve $d(x \wedge y) = d(x) \wedge d(y)$

$x \wedge y = x$ olduğundan

$$d(x) = d(x \wedge y) = d(x) \wedge d(y) \leq d(y)$$

Böylece d izotondur.

7. LATİSLERDE PERMUTİNG TRİ-F TÜREV

Tanım 7.1: Yazarlı ve Oztürk (2001) L bir latis olsun. $D: LxLxL \to L$ bir dönüşüm ve $f: L \to L$ bir dönüşüm olsun. $\forall x, y, z, w \in L$ için

$D(x \wedge w, y, z) = (D(x, y, z) \wedge f(x)) \vee (f(x) \wedge D(w, y, z)$ şartı sağlanıyorsa D'ye L üzerinde permuting tri f türev denir.

<u>Örnek 7.2:</u> L Şekil 8'deki gibi bir latis olsun.

$$0 \to 1 \to 2$$

Şekil 7. 1: Latis 8

L üzerindeki f ve D dönüşümlerini aşağıdaki gibi tanımlayalım.

$$D(x, y, z) = \begin{cases} 2, (x, y, z) = (0,0,0) \\ 2, (x, y, z) = (0,01) \; yada \; (0,1,0) \; yada \; (1,0,0) \\ 2, (x, y, z) = (0,02) \; yada \; (0,2,0) \; yada \; (2,0,0) \\ 1, (x, y, z) = (1,1,1) \\ 0, (x, y, z) = (2,2,2) \\ 1, (x, y, z) = (0,1,1) \; yada \; (1,0,1) \; yada \; (1,1,0) \\ 0, (x, y, z) = (0,2,2) \; yada \; (2,0,2) \; yada \; (2,2,0) \\ 2, (x, y, z) = (0,1,2) \; yada \; (1,0,2) \; yada \; (1,2,0) \\ \quad yada \; (2,1,0) \; yada \; (2,0,1) \\ 2, (x, y, z) = (1,1,2) \; yada \; (1,2,1) \; yada \; (2,1,1) \\ 0, (x, y, z) = (1,2,2) \; yada \; (2,1,2) \; yada \; (2,2,1) \end{cases}$$

ve

$$f(x) = \begin{cases} 2, x = 0 \\ 1, x = 1 \\ 0, x = 2 \end{cases}$$

D L üzerinde permuting tri f türev. Fakat D permuting tri türev değildir. Çünkü

$$D(0\wedge 1,0,2)=D(0,0,2)=2$$

Ve de

$$\begin{aligned}D(0\wedge 1,0,2)&=(D(0,02)\wedge 1)\vee(0\wedge D(1,0,2))\\&=(2\wedge 1)\vee(0\wedge 2)\\&=1\vee 0\\&=1\end{aligned}$$

Önerme 7.3: L bir latis ve D’de L üzerinde permuting tri f türev olsun. $\forall x,y,z,w\in L$ için aşağıdaki şartlar sağlanır.

i. $D(x,y,z)\leq f(x), D(x,y,z)\leq f(y)$ ve $D(x,y,z)\leq f(z)$

ii. $D(x,y,z)\wedge D(w,y,z)\leq D(x\wedge w,y,z)\leq D(x,y,z)\vee D(w,y,z)$

iii. $D(x\wedge w,y,z)\leq f(x)\vee f(w)$

iv. 0 en küçük eleman olmak üzere $0\in L$ ve $f(0)=0$ ise

$\forall x,y,z\in L$ için $D(0,y,z)=0$’dır.

İspat: (i) $\forall x\in L$ için $x\wedge x$ olduğundan

$$\begin{aligned}D(x,y,z)&=D(x\wedge x,y,z)\\&=(D(x,y,z)\wedge f(x))\vee(f(x)\wedge D(x,y,z)\\&=D(x,y,z)\wedge f(x)\end{aligned}$$

Böylece $\forall x,y,z\in L$ için

$$D(x,y,z)\leq f(x)$$

Benzer olarak $\forall x,y,z\in L$ için

$$D(x,y,z)\leq f(y) \text{ ve } D(x,y,z)\leq f(z)$$

(ii) $D(x,y,z)\leq f(x)$ ve $D(w,y,z)\leq f(w)$ (i)’den

$$D(x,y,z)\wedge D(w,y,z)\leq f(x)\wedge D(w,y,z)$$

Ve $\forall x, y, z \in L$ için

$$D(x,y,z) \wedge D(w,y,z) \leq f(w) \wedge D(x,y,z)$$

böylece

$$\begin{aligned} D(x,y,z) \wedge D(w,y,z) &\leq f(x) \wedge D(w,y,z) \vee \big(f(w) \wedge D(x,y,z) \big) \\ &\leq D(x \wedge w, y, z) \end{aligned}$$

Dahası $f(x) \wedge D(w,y,z) \leq D(w,y,z)$ ve

$$f(w) \wedge D(x,y,z) \leq D(x,y,z)$$

böylece

$$\begin{aligned} &\big(f(x) \wedge D(w,y,z) \big) \vee \big(f(w) \wedge D(x,y,z) \big) \leq D(x,y,z) \vee D(w,y,z) \\ &D(x \wedge w, y, z) \langle D(x,y,z) \vee D(w,y,z) \\ &D(x \wedge w, y, z) \leq f(x) \vee f(w) \end{aligned}$$

(iv) 0 en küçük eleman olmak üzere $0 \in L$ olsun. $\forall\, y, z \in L$ için

$$\begin{aligned} D(0,y,z) &= D(0 \wedge 0, y, z) \\ &= \big(D(0,y,z) \wedge f(0) \big) \vee \big(f(0) \wedge D(0,y,z) \big) \\ &= 0 \vee 0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

Sonuç 7.4: Dikkat edilirse $\forall\, x \in L$ için

$$\begin{aligned} d(x) = D(x,x,x) &= D(x \wedge x, x, x) \\ &= \big(D(x,x,x) \wedge f(x) \end{aligned}$$

$\forall\, x \in L$ için $d(x) \leq f(x)$ dir.

Tanım 7.5: L bir latis ve D L üzerinde tri f türev olsun.

i. $x \leq w$ iken $D(x,y,z) \leq D(w,y,z)$ ise D'ye izoton permuting tri- f türev denir.

ii. D birebir ise D'ye monomorfik permuting tri f türev denir.

iii. D örten ise D'ye epik permuting tri f türev denir.

Önerme 7.6: L bir latis olsun. D L üzerinde permuting tri f türev olsun. 1 en büyük eleman olsun ve $1 \in L$ olsun. Aşağıdaki şartlar sağlanır.

i. $f(x) \le D(1, y, z)$ ise $D(x, y, z) = f(x)$

ii. $f(x) \ge D(1, y, z)$ ve $f(1) = 1$ ise

$$D(x, y, z) \ge D(1, y, z)$$

İspat:

i. $$\begin{aligned} D(x, y, z) &= D(x \wedge 1y, z) \\ &= (D(x, y, z) \wedge f(1)) \vee (f(x) \wedge D(1, y, z) \\ &= D(x, y, z) \vee f(x) \end{aligned}$$

olduğundan

$$f(x) \le D(x, y, z)$$

Önerme 6.3 (i)'den

$$D(x, y, z) = f(x)$$

ii. $$\begin{aligned} D(x, y, z) &= D(x \wedge 1, y, z) \\ &= (D(x, y, z) \wedge f(1)) \vee (f(x) \wedge D(1, y, z)) \\ &= D(x, y, z) \vee D(1, y, z) \end{aligned}$$

olduğundan $\forall\, x, y, z \in L$ için

$$D(1, y, z) \le D(x, y, z)$$

Önerme 6.7: L bir latis olsun ve D L üzerinde permuting tri $f-$ türev olsun. f artan fonksiyon, $w \le x$ ve $D(x, y, z) = f(x)$ ise $D(w, y, z) = f(w)$

İspat: $w \le x$ ise $x \wedge w = w$ olur. Böylece

$$\begin{aligned} D(w, y, z) &= D(x \wedge w, y, z) \\ &= (D(x, y, z) \wedge f(w)) \vee (f(x) \wedge D(w, y, z)) \\ &= (f(x) \wedge f(w)) \vee (f(x) \wedge D(w, y, z)) \\ &= f(w) \vee D(w, y, z) \\ &= f(w) \end{aligned}$$

Önerme 7.8: L bir latis ve D L üzerinde permuting tri f türev olsun. $\forall\, x, y, z, w \in L$ için aşağıdaki şartlar sağlanır.

i. D izoton ise

$$D(x,y,z) = D(x,y,z) \vee \left(D(x \vee w, y, z) \wedge f(x)\right)$$

ii. $f(x \vee w) = f(x) \vee f(w)$ ise

$$D(x,y,z) = D(x,y,z) \vee \left(D(x \vee w, y, z) \wedge f(x)\right.$$

iii. f artan fonksiyon ise

$$D(x,y,z) = D(x,y,z) \vee \left(D(x \vee w, y, z) \wedge f(x)\right)$$

İspat:

i. D permuting izoton tri f türev olduğundan

$$\begin{aligned} D(x,y,z) &= D\left((x \vee w) \wedge x, y, z\right) \\ &= \left(D(x \vee w, y, z) \wedge f(x)\right) \vee \left(f(x \vee w) \wedge D(x,y,z)\right) \\ &= \left(D\left(x \vee w, y, z \wedge f(x)\right)\right) \vee D(x,y,z) \end{aligned}$$

ii. $D(x,y,z) \leq f(x) \leq f(x) \vee f(w)$ olduğundan

$$\begin{aligned} D(x,y,z) &= D\left((x \vee w) \wedge x, y, z\right) \\ &= \left(D(x \vee w, y, z) \wedge f(x)\right) \vee \left(f(x \vee w) \wedge D(x,y,z)\right) \\ &= \left(D(x \vee w, y, z) \wedge f(x)\right) \vee D(x, y, z \end{aligned}$$

iii. f artan fonksiyon olduğundan ve $x \leq x \vee y$ olduğundan $f(x) \leq f(x \vee y)$ olur. Böylece

$$\begin{aligned} D(x,y,z) &= D\left((x \vee w) \wedge x, y, z\right) \\ &= \left(D(x \vee w, y, z) \wedge f(x)\right) \vee \left(f(x \vee w) \wedge D(x,y,z)\right. \\ &= \left(D(x \vee w, y, z) \wedge f(x)\right) \vee D(x,y,z) \end{aligned}$$

Önerme 7.9: L bir latis olsun. D izoton permuting tri- f türev olsun. f azalan fonksiyon olsun. Eğer $D(x,y,z) = f(x)$ ve $D(w,y,z) = f(w)$ ise $D(x \vee w, y, z) = f(x) \vee f(w)$

İspat: $x \leq x \vee w, w \leq x \vee w$ ve D izoton olduğundan

$D(x,y,z) \leq D(x \vee w, y, z)$ ve $D(w,y,z) \leq D(x \vee w, y, z)$ böylece

$f(x) \vee f(w) \leq D(x \vee w, y, z)$

ve de

$$D(x\vee w,y,z)\le f(x\vee w)\le f(x)\vee f(w)$$

Böylece

$$D(x\vee w,y,z)=f(x)\vee f(w)$$

Teorem 7.10: L bir latis 1 en büyük eleman olmak üzere $1\in L$ ve D'de L üzerinde permuting tri f türev ve $f(x\wedge y)=f(x)\wedge f(y)$ olsun. Aşağıdaki şartlar denktir.

i. D izoton permuting tri f türev

ii. $D(x,y,z)\vee D(w,y,z)\le D(x\vee w,y,z)$

iii. $D(x,y,z)=f(x)\wedge D(1,y,z)$

iv. $D(x\wedge w,y,z)=D(x,y,z\wedge D(w,y,z)$

İspat: (i) $\Rightarrow$ (ii) D izoton permuting tri f türev olsun.

$x\le x\vee w$ ve $w\le x\vee w$ olduğundan

$D(x,y,z)\le D(x\vee w,y,z)$ ve $D(w,y,z)\le D(x\vee w,y,z)$

böylece

$$D(x,y,z)\vee D(w,y,z)\le D(x\vee y,y,z)$$

(ii)$\Rightarrow$ (i) $D(x,y,z)\vee D(w,y,z)\le D(x,w,y,z)$ ve $x\le w$ olduğundan

$$\begin{aligned}D(x,y,z)&\le D(x,y,z)\vee D(w,y,z)\\&\le D(x\vee w,y,z)\\&=D(w,y,z)\end{aligned}$$

olup D izotondur.

(i)$\Rightarrow$ (iii) D permuting tri f türev olsun. $D(x,y,z)\le D(1,y,z)$ olduğundan önerme 6.3 (i)'den

$$D(x,y,z)\le f(x)\wedge D(1,y,z)$$

Önerme 6.8 (i)'de $w=1$

$$D(x,y,z)=\left(D(1,y,z)\wedge f(x)\right)\vee D(x,y,z)$$
$$=D(1,y,z)\wedge f(x)$$

(iii)$\Rightarrow$ (iv) (iii)'den

$$D(x\wedge w,y,z)= f(x\wedge w)\wedge D(1,y,z)$$
$$= f(x)\wedge f(w)\wedge D(1,y,z)$$
$$=\left(f(x)\wedge D(1,y,z)\right)\wedge\left(f(w)\wedge D(1,y,z)\right)$$
$$=D(x,y,z)\wedge D(w,y,z)$$

(iv)$\Rightarrow$ (i) $D(x\wedge w,y,z)=D(x,y,z)\wedge D(w,y,z) ve\ x\leq w$ olsun.

$$D(x,y,z)=D(x\wedge w,y,z)$$
$$=D(x,y,z)\wedge D(w,y,z)$$

Böylece

$$D(x,y,z)\leq D(w,y,z)$$

Teorem 7.11: L modüler latis ve D L üzerinde permuting tri türev olsun.

i. D izotondur. $\Leftrightarrow D(x\wedge w,y,z)=D(x,y,z)\wedge D(w,y,z)$

ii. D izoton ve $f(x\vee w)= f(x)\vee f(w)$ ise $D(x,y,z)= f(x)$ iken $D(x\vee w,y,z)=D(x,y,z)\vee D(w,y,z)$

İspat: (i) D izoton $x\wedge w\leq x$ ve $x\wedge w\leq w$ olduğundan

$$D(x\wedge w,y,z)\leq D(x,y,z)\wedge D(w,y,z)$$

$$D(x,y,z)\wedge D(w,y,z)=\left(D(x,y,z)\wedge D(w,y,z)\wedge\left(f(x)\wedge f(w)\right)\right.$$
$$=\left(D(x,y,z)\wedge f(w)\right)\wedge\left(f(x)\wedge D(w,y,z)\right)$$
$$\leq\left(D(x,y,z)\wedge f(w)\right)\vee\left(D(w,y,z)\wedge f(x)\right)$$
$$=D(x\wedge w,y,z)$$

Böylece $D(x\wedge w,y,z)=D(x,y,z)\wedge D(w,y,z)$

Diğer taraftan

$D(x\wedge w,y,z)=D(x,y,z)\wedge D(w,y,z)$ ve $x\leq w$

$$D(x,y,z)=D(x\wedge w,y,z)=D(x,y,z)\wedge D(w,y,z)$$

olduğundan

$D(x,y,z) \leq D(w,y,z)$

(ii) D izoton ve $D(x,y,z) = f(x)$ olsun. Önerme 6.8'den ve L'nin modülerliğinden

$$D(w,y,z) = D(w,y,z) \vee \left(f(w) \wedge D(x \vee w,y,z) \right)$$
$$= f(w) \wedge D(x \vee w,y,z)$$

Böylece hipotezden

$$D(x,y,z) \vee D(w,y,z) = D(x,y,z) \vee \left(f(w) \wedge D(x \vee w,y,z) \right)$$
$$= \left(D(x,y,z) \vee f(w) \right) \wedge D(x \vee w,y,z)$$
$$= \left(f(x) \vee f(w) \right) \wedge D(x \vee w,y,z)$$
$$= f(x \vee w) \wedge D(x \vee w,y,z)$$
$$= D(x \vee w,y,z)$$

Teorem 7.12: L dağılmalı latis ve D, $f(x \vee w) = f(x) \vee f(w)$ olacak şekilde permuting tri f türev olsun.

i. D izoton ise $D(x \wedge w,y,z) = D(x,y,z) \wedge D(w,y,z)$

ii. D izoton $\Leftrightarrow D(x \vee w,y,z) = D(x,y,z) \vee D(w,y,z)$

İspat

i. D izoton olduğundan

$$D(x \wedge w,y,z) \leq D(x,y,z) \wedge D(w,y,z)$$

Önerme 6.3'den,

ii. $D(x,y,z) \wedge D(w,y,z) = \left(D(x,y,z) \wedge f(x) \right) \wedge \left(f(w) \wedge D(w,y,z) \right)$

$$= \left(D(x,y,z) \wedge f(w) \right) \wedge \left(f(x) \wedge D(w,y,z) \right)$$
$$\leq \left(D(x,y,z) \wedge f(w) \right) \vee \left(f(x) \wedge D(w,y,z) \right)$$
$$= D(x \wedge w,y,z)$$

Böylece

$$D(x \wedge w,y,z) = D(x,y,z) \wedge D(w,y,z)$$

(ii) D izoton olsun. (i)'den

$$D(x \wedge w,y,z) = D(x,y,z) \wedge D(w,y,z)$$

Önerme 6.3 ve önerme 6.8'den

$$
\begin{aligned}
D(w,y,z) &= D(w,y,z) \vee \left(f(w) \wedge D(x \vee w,y,z) \right) \\
&= \left(D(w,y,z) \vee f(x) \right) \wedge \left(D(w,y,z) \vee D(x \vee w,y,z) \right. \\
&= f\left(w \wedge D(x \vee w,y,z) \right)
\end{aligned}
$$

Benzer olarak

$$
\begin{aligned}
D(x,y,z) \vee D(w,y,z) &= \left(f(x) \wedge D(x \vee w,y,z) \right) \vee \left(f(w) \wedge D(x \vee w,y,z) \right. \\
&= \left(f(x) \vee f(w) \right) \wedge D(x \vee w,y,z) \\
&= f(x \vee w) \wedge D(x \vee w,y,z) \\
&= D(x \vee w,y,z)
\end{aligned}
$$

Diğer taraftan $D(x \vee w,y,z) = D(x,y,z) \vee D(w,y,z)\, ve\ x \leq w$ olsun.

$D(w,y,z) = D(x \vee w,y,z) = D(x,y,z) \vee D(w,y,z)$ olduğundan

$D(x,y,z) \leq D(w,y,z)$

8. LATİSLERDE PERMUTİNG TRİ-(F,G) TÜREV

<u>Tanım 8.1</u>: Ascı ve diğerleri (2011) L bir latis ve $D: LxLxL \to L$ permuting dönüşüm olsun. Eğer $\forall x, y, z, w \in L$ olmak üzere

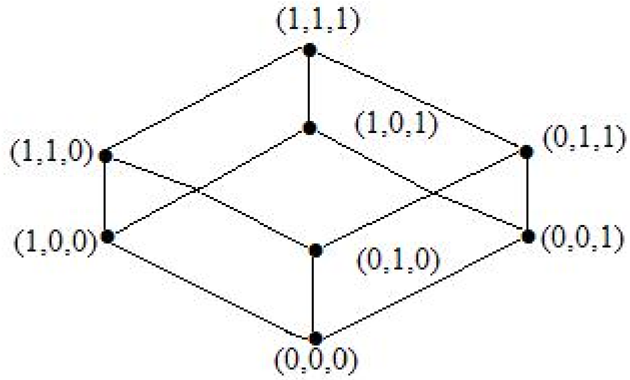
$$D(x \wedge w, y, z) = \left(D(x, y, z) \wedge f(w)\right) \vee \left(g(x) \wedge D(w, y, z)\right) \qquad (7,1)$$

olacak şekilde $f, g : L \to L$ fonksiyonları varsa D'ye permuting tri (f,g) türev denir.

Açıkçası

$$D(x, y \wedge w, z) = \left(\left(D(x, y, z) \wedge f(w)\right) \vee \left(g(y) \wedge D(x, w, z)\right)\right.$$
$$D(x, y, z \wedge w) = \left(D(x, y, z) \wedge f(w)\right) \vee \left(g(z) \wedge D(x, y, w)\right)$$

<u>Örnek 8.2</u> Aşağıdaki diyagramdaki gibi 1^3 latisini alalım.



Şekil 8. 1: Latis 9

$$D(x, y, z) = \begin{cases} 1, & (x, y, z) = (0,0,0) \\ 0, & (x, y, z) = (0,0,1), (0,1,0), (0,1,1)(1,0,0) \\ 0, & (x, y, z) = (1,0,1), (1,1,0), (1,1,1) \end{cases}$$

D permuting tri türev olmadığından

$$\begin{aligned} 1 &= D(0,0,0) \\ &= D(0 \wedge 0, 0, 0) \\ &\neq \left(D(0,0,0) \wedge 0\right) \vee \left(0 \wedge D(0,0,0)\right) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Eğer $f(0)=f(1)=1$ ve $g(0)=0$ $g(1)=1$ ise $f\neq g$ olup ve D L üzerinde permuting tri (f,g) türevdir. Eğer $f(0)=g(0)=1$ ve $f(1)=g(1)=1$ ise $f=g$ ve D L üzerinde permuting tri- f türevdir.

Önerme 8.3. L bir latis ve d 'de L üzerindeki permuting tri (f,g) türevin izi olsun. $\forall x\in L$ için

$$d(x)\leq\left(f(x)\vee g'(x)\right)$$

İspat: $\forall x\in L$ için $x\wedge x=x$ olduğundan

$$\begin{aligned} d(x)=D(x,x,x)=D.(x\wedge x,x,x) \\ =\left(D(x,x,x)\wedge f(x)\vee\left(g(x)\wedge D(x,x,x)\right)\right. \end{aligned}$$

$D(x,x,x)\wedge f(x)\leq f(x)$ olduğundan ve

$D(x,,x,x)\wedge g(x)\leq g(x)$ olduğundan

$d(x)\leq f(x)\vee g(x)$

Önerme 8.4: L bir latis olsun. Ve D L üzerinde tri (f,g) türev olsun. $\forall x,y,z\in L$ için $D(x,y,z)\leq f(x)\vee g(x)$

$$\begin{aligned} D(x,y,z)\leq f(y)\vee g(y) \\ D(x,y,z)\leq f(z)\vee g(z) \end{aligned}$$

olur.

İspat: $\forall x\in L$ için $x\wedge x=x$ olduğundan

$$\begin{aligned} &D(x,y,z)=D(x\wedge x,y,z)=\left(D(x,y,z)\wedge f(x)\right)\vee\left(g(x)\wedge D(x,y,z)\right) \\ &D(x,y,z)\wedge f(x)\leq f(x)\,ve\,D(x,y,z)\wedge g(x)\leq g(x) \\ &\qquad D(x,y,z)\leq f(x)\vee g(x) \end{aligned}$$

Benzer olarak

$$D(x,y,z)\wedge f(x)\leq f(x)\ ve\ D(x,y,z)\wedge g(x)\leq g(x)$$
$$D(x,y,z)\leq f(x)\vee g(x)$$

Benzer olarak

$$D(x,y,z)\leq f(y)\vee g(y)\ ve\ D(x,y,z)\leq f(z)\vee g(z)$$

Önerme 8.5: D L üzerinde permuting tri-(f,g) türev olsun. 0 en küçük eleman olmak üzere $0\in L,\ f(0)=0\ ve\ g(0)=0\Rightarrow D(0,y,z)=0$

İspat: Önerme 7.4'ten $\forall x,y,z\in L$ için

$D(x,y,z)\leq (f(x)\vee g(x))$ 0 en küçük eleman olduğundan

$0\leq D(0,y,z)\leq (f(0)\vee g(0))=0$
$D(0,y,z)=0$

Önerme 8.6: L latis olsun. 1 büyük eleman olsun. D'de L üzerinde $f(1)=g(1)=1$ olacak şekilde tri-(f,g) türev olsun. Aşağıdaki şartlar sağlanır.

i. $f(x)\leq D(1,y,z)$ ve $g(x)\leq D(1,y,z)\Rightarrow D(x,y,z)=(f(x)\vee g(x))$

ii. $f(x)\geq D(1,y,z)$ ve $g(x)\geq D(1,y,z)\Rightarrow D(x,y,z)\geq D(1,y,z)$

İspat:

i. $D(x,y,z)=D(x\wedge 1,y,z)$

$$=(D(x,y,z)\wedge f(1))\vee(g(1)\wedge D(x,y,z))$$
$$=f(x)\vee D(x,y,z)$$

olup

$g(x)\leq D(x,y,z)$ (7,2)

Benzer olarak $x\wedge 1=1\wedge x$ olduğundan

$D(x,y,z)=D(1\wedge x,y,z)$

$$=(D(1,y,z)\wedge f(x))\vee(g(1)\wedge D(x,y,z))$$
$$=f(x)\vee D(x,y,z)$$

böylece

$f(x) \leq (x, y, z)$ (7,3)

$(7,2)$ ve $(7,3)$'den

$(f(x) \vee g(x)) \leq D(x, y, z)$

Önerme 7.3'den

$D(x, y, z) \leq (f(x) \vee g(x))$

Sonuç olarak

$(f(x) \vee g(x)) \leq D(x, y, z) \leq (f(x) \vee g(x))$

olup ispat tamamlanır.

(ii) $D(x, y, z) = D(x \wedge 1, y, z)$

$$= (D(x, y, z) \wedge f(1)) \vee (g(x) \wedge D(1, y, z))$$
$$= D(x, y, z) \vee D(1, y, z)$$
$$D(x, y, z) \geq D(1, y, z)$$

Teorem 8.7 L bir dağılmalı latis olsun ve D'de L üzerinde permuting tri-(f, g) türev olsun. d'de D'nin izi olsun.

$\forall x, y \in L$ için

$$d(x \wedge y) = ((d(x) \wedge f(y)) \vee (g(x) \wedge d(y)) \vee$$
$$\vee \{(g(x) \wedge (f(y)) \wedge [D(x, x, y) \vee D(x, y, y)]\}$$

İspat:

$$d(x \wedge y) = D(x \wedge y, x \wedge y, x \wedge y)$$
$$= (D(x, x \wedge y, x \wedge y) \wedge f(y)) \vee (g(x) \wedge D(y, x \wedge y, x \wedge y))$$
$$= \{[(D(x, x, x \wedge y) \wedge f(y)) \vee (g(x) \wedge D(x, y, x \wedge y))] \wedge f(y))]\}$$
$$\vee \{g(x) \wedge (D(y, x, x \wedge y) \wedge f(y)) \vee (g(x) \wedge D(y, y, x \wedge y)) \ ]\}$$
$$= \{(d(x) \wedge f(y)) \vee (g(x) \wedge D(x, x, y) \wedge f(y))$$
$$\vee (g(x) \wedge D(x, y, y) \wedge f(y))\}$$
$$\vee \{(g(x) \wedge d(y)) \vee g(x) \wedge D(y, x, x) \wedge f(y))$$
$$\vee (g(x) \wedge D(y, x, y) \wedge f(y))\}$$

$$=\left(d(x)\wedge f(y)\right)\vee\left(g(x)\wedge d(y)\right)$$
$$\vee\left\{\left(g(x)\wedge f(y)\right)\wedge\left(\left(D(x,y,y)\vee D(x,x,y)\right)\right\}$$

Sonuç 8.8: L dağılmalı latis olsun, D L üzerinde permuting tri-(f,g) türev olsun. d'de D'nin izi olsun.

i- $\left(g(x)\wedge f(y)\right)\wedge D(x,x,y)\leq d(x\wedge y), \left(g(x)\wedge f(y)\right)\wedge D(x,y,y)\leq d(x\wedge y)$

ii- $g(x)\wedge d(y)\leq d(x\wedge y)$

iii- $d(x)\wedge f(y)\leq d(x\wedge y)$

Sonuç 8.9: L bir latis olsun ve 1 L'nin en büyük elemanı olsun $1\in L$ olsun. $\forall x\in L$ için özel olarak

$\left(g(x)\wedge f(1)\right)\wedge D(x,x,1)\leq d(x\wedge 1)=d(x)$ ve

$g(x)\wedge d(1)\leq d(x\wedge 1)=d(x)$ olur.

Sonuç 8.10: L dağılmalı latis D L üzerinde permuting tri-(f,g) türev olsun. d, D'nin izi olsun. 1 en büyük eleman olsun ve $1\in L$ olsun. Aşağıdaki şartlar sağlanır.

i- $g(x)\geq d(1)\Rightarrow d(x)\geq d(1)$

ii- $\forall x\in L$ için $g(x)\leq d(1)$ ve $f(x)\leq g(x)\Rightarrow g(x)=d(x)$ olur.

Tanım 8.11: L bir latis ve D L üzerinde permuting tri-(f,g) türev olsun ve d D'nin izi olsun.

i- $x\leq y$ iken $d(x)\leq d(y)$ ise

ii- d birebir ise d'ye monoformik dönüşüm izi denir.

iii- d örten ise d epik dönüşümün izi denir.

Tanım 8.12: L bir latis ve D permuting tri-(f,g) türev olsun $x \leq y$ iken $D(x,w,z) \leq D(y,w,z) \Rightarrow D$'ye L üzerinde permuting tri-(f,g) türev denir.

Önerme 8.13: L bir latis ve D'de L üzerinde permuting tri-(f,g) türev olsun. Aşağıdaki şartlar denktir.

(1) d izoton dönüşümdür.

(2) $dx \vee dy \leq d(x \vee y)$

İspat:

$(1) \Rightarrow (2)$ d izoton dönüşüm olsun. $x \leq x \vee y$ ve $y \leq x \vee y$ olur. d izoton olduğundan $d(x) \leq d(x \vee y)$ ve $d(y) \leq d(x \vee y)$ böylece $d(x) \vee d(y) \leq d(x \vee y)$

$(2) \Rightarrow (1)$ $d(x) \vee d(y) \leq d(x \vee y)$ ve $x \leq y$

$d(x) \leq d(x) \vee d(y) \leq d(x \vee y) = d(y)$ böylece d izotondur.

Teorem 8.14: L bir latis olsun 1 en büyük eleman ve $1 \in L$ olsun. D L üzerinde izoton permuting tri-(f,g) türev olsun. $\forall x \in L$ için $f(1) = g(1) = 1$ veya $f(x) \geq g(x)$ yada $f(x) \leq g(x)$ olsun. $\forall x, y, z \in L$ için

$$D(x,y,z) = \left(f(x) \vee g(x)\right) \wedge D(1,y,z)$$

İspat: D L üzerinde izoton permuting tri-(f,g) türev olsun. $\forall x, y, z \in L$ için $D(x,y,z) \leq D(1,y,z)$ dir.

$\forall x \in L$ için $f(x) \geq g(x)$ olsun.

$$D(x,y,z) \leq f(x) \vee g(x) = f(x)$$

$D(x,y,z) \leq f(x) \wedge D(1,y,z)$ olduğundan

$$D(x,y,z) = D\left((x \vee 1) \wedge x, y, z\right)$$

$$=\left[\left(D\left(x\vee 1\right),y,z\right)\wedge f\left(x\right)\right]\vee\left[g\left(x\vee 1\right)\wedge D\left(x,y,z\right)\right]$$

$$=\left[D\left(1,y,z\right)\wedge f\left(x\right)\right]\vee\left[g\left(1\right)\wedge D\left(x,y,z\right)\right]$$

$$=\left[D\left(1,y,z\right)\wedge f\left(x\right)\right]\vee\left[1\wedge D\left(x,y,z\right)\right]$$

$$=\left[D\left(1,y,z\right)\wedge f\left(x\right)\right]\vee D\left(x,y,z\right)$$

$$=D\left(1,y,z\right)\wedge f\left(x\right)$$

$f\left(x\right)\vee g\left(x\right)=f\left(x\right)$ olduğundan

$$D\left(x,y,z\right)=\left(f\left(x\right)\vee g\left(x\right)\right)\wedge D\left(1,y,z\right)$$

$\forall x\in L$ için $f\left(x\right)\leq g\left(x\right)$ kabul edelim. Benzer olarak $D\left(x,y,z\right)\leq f\left(x\right)\vee g\left(x\right)=g\left(x\right)$ olur. $D\left(x,y,z\right)\leq g\left(x\right)\wedge D\left(1,y,z\right)$ olduğundan

$$D\left(x,y,z\right)=D\left(x\wedge\left(x\vee 1\right),y,z\right)$$

$$=\left[\left(D\left(x,y,z\right)\wedge f\left(x\vee 1\right)\right]\vee\left[g\left(x\right)\wedge D\left(\left(x\vee 1\right),y,z\right)\right]$$

$$=\left[D\left(x,y,z\wedge f\left(1\right)\right]\vee\left[g\left(x\right)\wedge D\left(1,y,z\right)\right]$$

$$=\left[D\left(x,y,z\right)\wedge 1\right]\vee\left[g\left(x\right)\wedge D\left(1,y,z\right)\right]$$

$$=D\left(x,y,z\right)\vee\left[g\left(x\right)\wedge D\left(1,y,z\right)\right]$$

$$=g\left(x\right)\wedge D\left(1,y,z\right)$$

$f\left(x\right)\vee g\left(x\right)=g\left(x\right)$ olduğundan

$$D\left(x,y,z\right)=\left(f\left(x\right)\vee g\left(x\right)\right)\wedge D\left(1,y,z\right)$$

9. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu tez çalışmasında halkalarda türev çalışmalarından yararlanılarak latislerde türev tanımını verip örnekler verdik. Latislerde f türev, latislerde permuting tri-türev, latislerde simetrik bi- türev, simetrik f-bi türev, latislerde permuting f-tri türev, latislerde permuting tri-f türev ve latislerde permuting tri-(f,g) türevi tanımladık ve örnekler verdik

Öneri olarak bu tez çalışmasında latislerde türevin yarı latisler içinde tanımlanabileceği söylenebilir. Böylece yeni bir araştırma konusu ortaya çıkacaktır.

10. KAYNAKLAR

Ascı, M., Kecilioglu O. and Ceran, S., “permuting tri (f,g)-derivations on lattices”, *Annals of Fuzzy Math. and Informatics*, 1 (2), 189-196, (2011).

Ceven, Y. And Ozturk, M. A., “On f-derivations of lattices”, *Bull. Korean Math. Soc*. 45 (4), 701-707, (2008).

Ceven, Y., “Symmetric bi derivations of lattices”, *Quaestiones Mathematicae*, 32, 1-5, (2009).

Khan, A. R. and Chaudhry, M. A., “permuting f- triderivations on lattices”, Int. J. Of Algebra, 5 (10), 471-481, (2011).

Ozbal, S. A. and Firat, A., “Symmetric f bi Derivations of lattices”, *Ars Combin.* (in press) (2010).

Ozturk, M. A., Yazarlı, H. and Kim, K. H., “Permuting tri-derivations in lattices”, *Quaest. Math*. 32 (3), 415- 425, (2009).

Yazarlı, H. and Oztürk, M. A., “Permuting tri-f-derivations in lattices”, *Comm. Korean Math. Soc*. 26 (1), 13-21, (2001).

Xin, X. L., Li, T. Y., and Lu, J. H., “On derivations of lattices” *Inform. Sci*. 178 (2), 307-316, (2008).

11. ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı : ÜMEYSA TEMUR

Doğum Yeri ve Tarihi : Erzurum 02.12.1986

Lisans Üniversite : Atatürk Üniversitesi

Elektronik posta : umeysatemur@gmail.com

İletişim Adresi : Pamukkale Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü