PAMUKKALE ÜNİVERSİTESİ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

SONSUZ ARALIK ÜZERİNDE LİNEER OLMAYAN ZAMAN SKALASI SINIR DEĞER PROBLEMLERİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Zehra YILMAZ

Anabilim Dalı: Matematik
Programı: Tezli Yüksek Lisans

Tez Danışmanı: Doç. Dr. İsmail YASLAN

TEMMUZ 2013

YÜKSEK LİSANS TEZ ONAY FORMU

Pamukkale Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü 111441003 nolu öğrencisi Zehra YILMAZ tarafından hazırlanan "**SONSUZ ARALIK ÜZERİNDE LİNEER OLMAYAN ZAMAN SKALASI SINIR DEĞER PROBLEMLERİ**" başlıklı tez tarafımızdan okunmuş, kapsamı ve niteliği açısından bir Yüksek Lisans tezi olarak kabul edilmiştir.

Tez Danışmanı : **(Jüri Başkanı)**	**Doç. Dr. İsmail YASLAN (PAÜ)**	
Jüri Üyesi :	**Doç. Dr. Alp Arslan KIRAÇ (PAÜ)**	
Jüri Üyesi :	**Doç. Dr. Nüket HAMAL (EÜ)**	

Pamukkale Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun 31/07/2013.. tarih ve ..25/12..... sayılı kararıyla onaylanmıştır.

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü
Prof. Dr. Nuri KOLSUZ

Bu tezin tasarımı, hazırlanması, yürütülmesi, araştırmalarının yapılması ve bulgularının analizlerinde bilimsel etiğe ve akademik kurallara özenle riayet edildiğini; bu çalışmanın doğrudan birincil ürünü olmayan bulguların, verilerin ve materyallerin bilimsel etiğe uygun olarak kaynak gösterildiğini ve alıntı yapılan çalışmalara atfedildiğini beyan ederim.

İmza : ZYılmaz

Öğrenci Adı Soyadı :Zehra YILMAZ

ÖNSÖZ

Bu çalışmada zaman skalası üzerinde ele alınan ikinci mertebeden impulsive sınır değer problemi için sabit nokta teoremlerini kullanarak koni üzerinde pozitif çözümlerinin varlığı için koşullar incelenmiştir. Bu tez çalışmasını hazırlarken değerli yardım ve katkılarıyla beni yönlendiren, anlayışını, emeğini ve zamanını esirgemeyen çok kıymetli hocam Sayın Doç. Dr. İsmail YASLAN'a ve bu süreçte hoşgörü ve sabırla beni destekleyen aileme teşekkürü bir borç bilirim.

Temmuz 2013 Zehra YILMAZ

İÇİNDEKİLER

Sayfa

ÖZET

SONSUZ ARALIK ÜZERİNDE LİNEER OLMAYAN ZAMAN SKALASI SINIR DEĞER PROBLEMLERİ

Bu tez üç ana bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde, ele alınan problem tanıtılmıştır. İkinci bölümde, zaman skalası ile ilgili temel tanım ve teoremler verilmiştir. Üçüncü bölümde, ilk olarak çözümlerin varlığı için yardımcı tanımlar ve ana sonuçlar için gerekli lemmalar verilmiştir. Sonra, impulsive sınır değer problemi, integral denkleme indirgenmiştir ve Schauder Sabit Nokta Teoremi yardımıyla impulsive sınır değer probleminin en az bir çözümünün varlığı için kriter elde edilmiştir. Ardından da, impulsive sınır değer probleminin en az bir pozitif çözümünün varlığı Krasnosel'skii Sabit Nokta Teoremi ve Leray-Schauder Sabit Nokta Teoremi yardımıyla, en az iki pozitif çözümünün varlığı Avery-Henderson Sabit Nokta Teoremi yardımıyla ve en az üç pozitif çözümünün varlığı Beş Fonksiyonel Sabit Nokta Teoremi yardımıyla ispatlanmıştır.

Anahtar Kelimeler: Zaman Skalası, sabit nokta teoremleri, koni, pozitif çözümler.

SUMMARY

NONLINEAR TIME SCALE BOUNDARY VALUE PROBLEMS ON INFINITE INTERVALS

This thesis consists of three main chapters. In the first chapter, discussed problem is introduced. In the second chapter, some basic definitions and theorems on time scales are given. In the third chapter, firstly, auxiliary definitions for the existence of solutions and some lemmas for the main results are given. Then, impulsive boundary value problem is reduced to a nonlinear integral equation and we have obtained criteria for the existence of at least one solution for impulsive boundary problem by using Schauder fixed point theorem. Then, we use Leray-Schauder fixed point theorem and Krasnosel'skii fixed point theorem to prove the existence of at least one positive solution. And then, we establish some sufficient conditions for the existence of at least two and three positive solutions for impulsive boundary value problem by using Avery-Henderson fixed point theorem and five functional fixed point theorem, respectively.

Key Words: Time scale, fixed point theorems, cone, positive solution.

1. GİRİŞ

Bu tez çalışmasında, zaman skalası üzerinde ikinci mertebeden lineer olmayan impulsive sınır değer problemlerinin sonsuz aralık üzerindeki pozitif çözümlerinin varlığı incelenmiştir.

Zaman skalası teorisi, ilk olarak 1988 yılında Stefan Hilger'in doktora tezinde ortaya atılmıştır. Ayrık olayları tanımlamada tam sayılar üzerindeki fark analizi ve sürekli doğal olayları tanımlarken de reel sayılar üzerindeki bildiğimiz analiz kullanılır. Zaman skalası bu iki durumu birleştirir. Ayrıca, reel sayılar ve tam sayılar dışında, daha birçok zaman skalası seçilebileceğinden dolayı zaman skalası üzerinde yapılan çalışmalar daha geneldir. Zaman skalası, ayrık ve sürekli parçalardan oluşan kümelerin analizi üzerindeki çalışmalarda bize yardımcı olur.

Impulsive diferansiyel denklemler, belirli anlarda durumunda ani değişiklik gösteren süreçleri ifade ederler. Zaman skalasında impulsive denklemler üzerine ilk çalışma, 2002 yılında Johnny Henderson tarafından yapılmış ve bu konuya ilgi artmıştır. Impulsive denklemler teorisi, fizik, kimya teknolojisi, nüfus dinamikleri, biyoteknoloji, yapay sinir ağları ve ekonomi de ortaya çıkan problemlerin matematiksel modellemesinde oldukça önem kazanmıştır.

Zaman skalası üzerinde lineer olmayan sınır değer problemlerinin sonlu aralık üzerindeki pozitif çözümlerinin varlığı üzerine birçok çalışma yapılmıştır, fakat sonsuz aralık üzerinde çok az sayıda çalışma vardır.

Zhao ve Ge (2009) makalesinde

$$\begin{cases} \left(\varphi_p\left(u^{\Delta}(t)\right)\right)^{\nabla} + q(t)f\left(t,u(t),u^{\Delta}(t)\right) = 0,\ t \in [0,\infty)_{\mathbb{T}} \\ u(0) = \beta u^{\Delta}(\eta),\ \lim\limits_{t\to\infty} u^{\Delta}(t) = 0 \end{cases}$$

sınır değer probleminin en az üç pozitif çözümünün varlığı problemini, Leggett-Williams sabit nokta teoremi ile incelenmiştir.

Daha sonra, Zhao ve Ge (2010) makalesinde

$$\begin{cases} \left(\varphi_p\left(u^{\Delta}(t)\right)\right)^{\nabla} + h(t)f\left(t,u(t),u^{\Delta}(t)\right) = 0,\ t \in [0,\infty)_{\mathbb{T}} \\ u(0) = \sum\limits_{i=1}^{m-2} \alpha_i u(\eta_i),\ u^{\Delta}(\infty) = \sum\limits_{i=1}^{m-2} \beta_i u^{\Delta}(\eta_i) \end{cases}$$

sınır değer problemi içinde, Beş Fonksiyonel Sabit Nokta Teoremini kullanarak, en az üç pozitif çözümün varlığı için koşullar elde etmiştir.

Ayrıca, Zhao ve Ge (2009) makalesinden esinlenerek ortaya çıkan Karaca ve Tokmak (2011) makalesinde

$$\begin{cases} \left(\varphi_p\left(x^{\Delta}(t)\right)\right)^{\nabla} + \phi(t) f\left(t, x(t), x^{\Delta}(t)\right) = 0, \ t \in [0,\infty)_{\mathbb{T}} \\ x(0) = \sum_{i=1}^{m-2} \alpha_i x^{\Delta}(\eta_i), \ \lim_{t\to\infty} x^{\Delta}(t) = 0 \end{cases}$$

sınır değer probleminin en az üç pozitif çözümünün varlığı problemi, Leggett-Williams sabit nokta teoremi ve Beş Fonksiyonel Sabit Nokta Teoremi ile incelenmiştir.

Yukarıda verilen çalışmalardan hareketle,

$$\begin{cases} \left(\varphi\left(y^{\Delta}(t)\right)\right)^{\nabla} + h(t) f\left(t, y(t), y^{\Delta}(t)\right) = 0, \ t \in [a,\infty)_{\mathbb{T}} \\ y\left(t_k^{+}\right) - y\left(t_k^{-}\right) = I_k\left(y(t_k)\right) \\ y(a) - \beta y^{\Delta}(a) = \sum_{i=1}^{m-2} \alpha_i y^{\Delta}(\eta_i), \ \lim_{t\to\infty} y^{\Delta}(t) = 0 \end{cases}$$

sınır değer problemini ele alarak, en az bir, iki ve üç pozitif çözümün varlığı için gerekli koşullar elde edeceğiz. Elde edilen sonuçlar, genel zaman skalalarında yeni olduğu kadar, özel olarak diferansiyel denklem ve fark denklemleri için de yenidir.

2. ZAMAN SKALASI İLE İLGİLİ TEMEL BİLGİLER

Bu bölümde Bohner ve Peterson (2001), Bohner ve Peterson(2003) kaynaklarından yararlanarak zaman skalası üzerine temel tanımlar, Δ- türev, ∇- türev, Δ- integral ve ∇- integral kavramları tanıtılmıştır.

2.1 Temel Tanımlar

Tanım 2.1.1: Reel sayıların boş olmayan keyfi kapalı alt kümesine zaman skalası denir ve $\mathbb{T}$ ile ifade edilir.

Örnek 2.1.1: $\mathbb{R}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{N}$, $[a,b],[0,1]\cup\mathbb{N},[-1,0]\cup\left\{\frac{1}{n}:n\in\mathbb{N}\right\}$ kümeleri birer zaman skalasıdır.

Örnek 2.1.2: (a,b), $[a,b)$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ ve $\mathbb{C}$ kümeleri zaman skalası değildir.

Tanım 2.1.2: $\mathbb{T}$ bir zaman skalası olsun. $\forall t\in\mathbb{T}$ için $\sigma(t)=\inf\{s\in\mathbb{T}:s>t\}$ ile tanımlı $\sigma:\mathbb{T}\to\mathbb{T}$ operatörüne ileri sıçrama operatörü denir. Eğer $\mathbb{T}$ nin maksimum elemanı t_1 ise $\sigma(t_1)=t_1$ olarak tanımlanır.

Tanım 2.1.3: $\mathbb{T}$ bir zaman skalası olsun. $\forall t\in\mathbb{T}$ için $\rho(t)=\sup\{s\in\mathbb{T}:s<t\}$ ile tanımlı $\rho:\mathbb{T}\to\mathbb{T}$ operatörüne geri sıçrama operatörü denir. Eğer $\mathbb{T}$ nin minimum elemanı t_2 ise $\rho(t_2)=t_2$ olarak tanımlanır.

Tanım 2.1.4: Eğer $\sigma(t)>t$ ise t noktasına sağ-yayılmış nokta, $\rho(t)<t$ ise t noktasına sol-yayılmış nokta denir. Hem sağ-yayılmış hem de sol-yayılmış olan noktalara izole(ayrık) noktalar denir.

Tanım 2.1.5: Eğer $t<\sup\mathbb{T}$ ve $\sigma(t)=t$ ise t noktasına sağ-yoğun nokta, $t>\inf\mathbb{T}$ ve $\rho(t)=t$ ise t noktasına sol-yoğun nokta denir. Hem sağ-yoğun hem de sol-yoğun olan noktalara ise yoğun noktalar denir.

Örnek 2.1.3: Eğer $\mathbb{T}=\mathbb{R}$ ise $\forall t\in\mathbb{R}$ için $\sigma(t)=\inf\{s\in\mathbb{T}:s>t\}=\inf(t,\infty)=t$ ve benzer şekilde $\rho(t)=t$ olur. O halde $\mathbb{T}$ deki her nokta yoğundur.

Örnek 2.1.4: $\mathbb{T}=\mathbb{Z}$ ise $\forall t\in\mathbb{R}$ için $\sigma(t)=t+1$ ve $\rho(t)=t-1$ olduğundan $\mathbb{T}$ deki her nokta izole noktadır.

Tanım 2.1.6: Eğer $\mathbb{T}$ sol-yayılmış maksimum m elemanına sahip ise $\mathbb{T}^{\kappa}=\mathbb{T}-\{m\}$ ile tanımlanır. Özetle;

$$\mathbb{T}^{\kappa}=\begin{cases}\mathbb{T}\setminus\left(\rho\left(\sup\mathbb{T}\right),\sup\mathbb{T}\right), & \sup\mathbb{T}<\infty\\ \mathbb{T} & ,\sup\mathbb{T}=\infty\end{cases}$$

şeklinde yazılabilir.

Eğer $f:\mathbb{T}\to\mathbb{R}$ bir fonksiyon ise $f^{\sigma}:\mathbb{T}\to\mathbb{R}$ fonksiyonu $\forall t\in\mathbb{T}$ için $f^{\sigma}(t)=f\left(\sigma(t)\right)$ ile tanımlanır.

Bir $\mathbb{T}$ zaman skalasında $[a,b]$ aralığı $[a,b]=\{t\in\mathbb{T}:a\le t\le b\}$ olarak tanımlanır.

Zaman skalasında süreklilik ve türev kavramlarını verebilmek için, öncelikle zaman skalasında komşuluk kavramına ihtiyacımız olacaktır.

Tanım 2.1.7: $U\subset\mathbb{T}$ olsun. $\forall\varepsilon>0$ için $U_{\varepsilon}(t)=\left\{s\in\mathbb{T}:|s-t|<\varepsilon\right\}$ kümesine t nin ε komşuluğu denir.

Tanım 2.1.8: $t_0\in\mathbb{T}$ olsun. Verilen her $\varepsilon>0$ ve her $t\in U(t_0)$ için, $\left|f(t)-f(t_0)\right|<\varepsilon$ olacak şekilde bir $U(t_0)$ komşuluğu bulunabiliyorsa $f:\mathbb{T}\to\mathbb{R}$ fonksiyonuna $t=t_0$ noktasında süreklidir denir.

Örnek 2.1.5: $f:\mathbb{T}\to\mathbb{R}$, $f(t)=\begin{cases}|t| & ,t<0\\ t+1 & ,t\ge 0\end{cases}$ fonksiyonu verilsin.

a) $\mathbb{T}=\mathbb{R}$ ise f, $t=0$ da sürekli değildir.

b) $\mathbb{T}=\mathbb{Z}$ ise f, $\forall t\in\mathbb{Z}$ de süreklidir.

2.2 Zaman Skalasında $\Delta-$ Türev

Tanım 2.2.1: $f:\mathbb{T}\to\mathbb{R}$ bir fonksiyon ve $t\in\mathbb{T}^{\kappa}$ olsun. $\forall\varepsilon>0$ sayısı verildiğinde t nin bir U komşuluğu vardır öyle ki $\forall s\in U$ için,

$$\left|f\left(\sigma(t)\right)-f(s)-f^{\Delta}(t)\left(\sigma(t)-s\right)\right|\le\varepsilon\left|\sigma(t)-s\right|$$

oluyorsa, $f^{\Delta}(t)$ sayısına f 'nin t noktasındaki delta türevi denir.

Eğer $f^{\Delta}(t)$, $\forall t\in\mathbb{T}^{\kappa}$ için mevcut ise f fonksiyonu tüm $\mathbb{T}^{\kappa}$ kümesi üzerinde delta türevlenebilirdir. $f^{\Delta}:\mathbb{T}^{\kappa}\to\mathbb{R}$ fonksiyonuna ise, f 'nin $\mathbb{T}^{\kappa}$ kümesindeki delta türev fonksiyonu denir.

Teorem 2.2.1: $f:\mathbb{T}\to\mathbb{R}$ fonksiyonu ve $t\in\mathbb{T}^{\kappa}$ verilsin.

i) f, t de delta türevlenebilir ise f, t de süreklidir.

ii) f, t de sürekli ve t sağ-yayılmış ise f, t de delta türevlenebilirdir ve

$$f^{\Delta}(t)=\frac{f(\sigma(t))-f(t)}{\mu(t)} \quad ; \quad \mu(t)=\sigma(t)-t$$

iii) t sağ-yoğun bir nokta olsun.

f, t de delta türevlenebilirdir $\Leftrightarrow \lim\limits_{s\to t}\dfrac{f(t)-f(s)}{t-s}$ limiti mevcuttur.

$$f^{\Delta}(t)=\lim_{s\to t}\frac{f(t)-f(s)}{t-s}$$

olur.

iv) f, t de delta türevlenebilir ise, $f(\sigma(t))=f(t)+\mu(t)f^{\Delta}(t)$ olur.

Örnek 2.2.1: $\mathbb{T}=\mathbb{R}$ ve $\mathbb{T}=\mathbb{Z}$ durumlarını inceleyelim.

i) $\mathbb{T}=\mathbb{R}$ ise Teorem 2.2.1 den $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ fonksiyonu, $t\in\mathbb{R}$ de delta türevlenebilir ise, t sağ-yoğun bir nokta olduğundan, $f'(t)=\lim\limits_{s\to t}\dfrac{f(t)-f(s)}{t-s}$ sonlu bir sayı olarak mevcuttur. Yani f delta türevlenebilirse $f^{\Delta}(t)=f'(t)$ dir.

ii) $\mathbb{T}=\mathbb{Z}$ ise Teorem 2.2.1 den $f:\mathbb{Z}\to\mathbb{R}$ delta türevlenebilen t noktaları sağ-yayılmıştır.

$$f^{\Delta}(t)=\frac{f(\sigma(t))-f(t)}{\mu(t)}=\frac{f(t+1)-f(t)}{t+1-t}=f(t+1)-f(t)=\Delta f(t)$$

Burada Δ alışılmış ileri fark operatörüdür.

Teorem 2.2.2: $f,g:\mathbb{T}\to\mathbb{R}$ fonksiyonları**,** t noktasında $\Delta-$ türevlenebilir olsun. O halde,

i) $f+g:\mathbb{T}\to\mathbb{R}$ fonksiyonu, t de $\Delta-$ türevlenebilirdir ve

$$(f+g)^{\Delta}(t)=f^{\Delta}(t)+g^{\Delta}(t)$$

olur.

ii) Herhangi bir α sabiti için $\alpha f:\mathbb{T}\to\mathbb{R}$ fonksiyonu, t noktasında $\Delta-$ türevlenebilir ve bu türev,

$$(\alpha f)^{\Delta}(t)=\alpha f^{\Delta}(t)$$

olur.

iii) $f,g:\mathbb{T}\to\mathbb{R}$ fonksiyonları, $t\in\mathbb{T}^{\kappa}$ noktasında $\Delta-$ türevlenebilir ve bu türev,

$$(fg)^{\Delta}(t)=f^{\Delta}(t).g(t)+g^{\Delta}(t).f(\sigma(t))=f^{\Delta}(t).g(\sigma(t))+g^{\Delta}(t).f(t)$$

olur.

iv) $f(t)f(\sigma(t))\neq 0$ olmak üzere $\frac{1}{f}$, $t\in\mathbb{T}^{\kappa}$ noktasında $\Delta-$ türevlenebilir ve

$$\left(\frac{1}{f}\right)^{\Delta}(t)=-\frac{f^{\Delta}(t)}{f(t)f(\sigma(t))}$$

olur.

v) $g(t)g(\sigma(t))\neq 0$ olmak üzere $\frac{f}{g}$, $t\in\mathbb{T}^{\kappa}$ noktasında $\Delta-$ türevlenebilir ve

$$\left(\frac{f}{g}\right)^{\Delta}(t)=\frac{f^{\Delta}(t)g(t)-f(t)g^{\Delta}(t)}{g(t)g(\sigma(t))}$$

olur.

Önerme 2.2.1: $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ monoton artan bir fonksiyon ise, $\forall t\in[a,b)$ için $f^{\Delta}(t)\geq 0$ olur.

Önerme 2.2.2: $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ monoton azalan bir fonksiyon ise, $\forall t\in[a,b)$ için $f^{\Delta}(t)\leq 0$ olur.

Sonuç 2.2.1: Eğer $f:\mathbb{T}\to\mathbb{R}$ fonksiyonu $[a,b]\cap\mathbb{T}^{\kappa}$ üzerinde $\Delta-$türevlenebilir ve her $t\in[a,b]\cap\mathbb{T}^{\kappa}$ için $f^{\Delta}(t)=0$ ise f fonksiyonu sabittir.

2.3 Zaman Skalasında ∇ - Türev

Tanım 2.3.1: Eğer $\mathbb{T}$ sağ-yayılmış minimum m elemanına sahip ise $\mathbb{T}_{\kappa}=\mathbb{T}-\{m\}$ ile tanımlanır.

Eğer $f:\mathbb{T}\to\mathbb{R}$ bir fonksiyon ise, $f^{\rho}:\mathbb{T}\to\mathbb{R}$ fonksiyonu $\forall t\in\mathbb{T}$ için $f^{\rho}(t)=f(\rho(t))$ ile tanımlanır. Ayrıca $\upsilon(t)=t-\rho(t)$ ile gösterilir.

Tanım 2.3.2: $f:\mathbb{T}\to\mathbb{R}$ bir fonksiyon ve $t\in\mathbb{T}_{\kappa}$ olsun. $\forall\varepsilon>0$ sayısı verildiğinde t nin bir U komşuluğu vardır öyle ki $\forall s\in U$ için,

$$\left|f(\rho(t))-f(s)-f^{\nabla}(t)(\rho(t)-s)\right|\leq\varepsilon\left|\rho(t)-s\right|$$

oluyorsa, $f^{\nabla}(t)$ sayısına f 'nin t noktasındaki nabla türevi denir.

Eğer $f^{\nabla}(t)$, $\forall t \in \mathbb{T}_{\kappa}$ için mevcut ise f fonksiyonu tüm $\mathbb{T}_{\kappa}$ kümesi üzerinde nabla türevlenebilirdir. $f^{\nabla}:\mathbb{T}_{\kappa} \to \mathbb{R}$ fonksiyonuna ise, f 'nin $\mathbb{T}_{\kappa}$ kümesindeki nabla türev fonksiyonu denir.

Teorem 2.3.1: $f:\mathbb{T} \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon ve $t \in \mathbb{T}_{\kappa}$ olsun. O halde aşağıdakiler doğrudur.

i) f, t de nabla türevlenebilir ise f, t noktasında süreklidir.

ii) f, t noktasında sürekli ve t sol-yayılmış ise f, t de nabla türevlenebilirdir ve

$$f^{\nabla}(t)=\frac{f(t)-f(\rho(t))}{\upsilon(t)} \; ; \; \upsilon(t)=t-\rho(t)$$

olur.

iii) t sol-yoğun bir nokta olsun.

f, t de nabla türevlenebilirdir $\Leftrightarrow \lim\limits_{s\to t}\frac{f(t)-f(s)}{t-s}$ limiti mevcuttur.

$$f^{\nabla}(t)=\lim_{s\to t}\frac{f(t)-f(s)}{t-s}$$

olur.

iv) f, t de nabla türevlenebilir ise, $f(\rho(t))=f(t)-\upsilon(t)f^{\nabla}(t)$ olur.

Örnek 2.3.1: $\mathbb{T}=\mathbb{R}$ için $f^{\nabla}(t)=f'(t)=f^{\Delta}(t)$, $\mathbb{T}=\mathbb{Z}$ için $f^{\nabla}(t)=\nabla f(t)=f(t)-f(t-1)$ olur.

Burada ∇ alışılmış geri fark operatörüdür.

Teorem 2.3.2: $f,g:\mathbb{T} \to \mathbb{R}$ fonksiyonları, $t \in \mathbb{T}_{\kappa}$ noktasında $\nabla-$ türevlenebilir olsun.

i) $f+g:\mathbb{T} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu t noktasında $\nabla-$türevlenebilirdir ve bu türev,

$$(f+g)^{\nabla}(t)=f^{\nabla}(t)+g^{\nabla}(t)$$

olur.

ii) Herhangi bir α sabiti için $\alpha f:\mathbb{T} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu t noktasında $\nabla-$türevlenebilir ve bu türev,

$$(\alpha f)^{\nabla}(t)=\alpha f^{\nabla}(t)$$

olur.

iii) $fg:\mathbb{T}\to\mathbb{R}$ fonksiyonu, t noktasında $\nabla-$ türevlenebilir ve bu türev,

$$(fg)^{\nabla}(t)=f^{\nabla}(t).g(t)+f(\rho(t)).g^{\nabla}(t)=f^{\nabla}(t).g(\rho(t))+g^{\nabla}(t).f(t)$$

olur.

iv) $f(t)f^{\rho}(t)\neq 0$ olmak üzere $\frac{1}{f}$, t noktasında $\nabla-$ türevlenebilir ve

$$\left(\frac{1}{f}\right)^{\nabla}(t)=-\frac{f^{\nabla}(t)}{f(t)f(\rho(t))}$$

olur.

v) $g(t)g^{\rho}(t)\neq 0$ olmak üzere $\frac{f}{g}$, t noktasında $\nabla-$ türevlenebilir ve

$$\left(\frac{f}{g}\right)^{\nabla}(t)=\frac{f^{\nabla}(t)g(t)-f(t)g^{\nabla}(t)}{g(t)g(\rho(t))}$$

olur.

2.4 Zaman Skalasında $\Delta-$ İntegral

Tanım 2.4.1: $f:\mathbb{T}\to\mathbb{R}$ fonksiyonu verilsin. Eğer $F:\mathbb{T}\to\mathbb{R}$ fonksiyonu $\mathbb{T}^{\kappa}$ üzerinde $\Delta-$türevlenebilir ve her $t\in\mathbb{T}^{\kappa}$ için $F^{\Delta}(t)=f(t)$ ise, F fonksiyonuna f nin $\Delta-$anti türevi veya ilkeli denir.

Tanım 2.4.2: Eğer $f:\mathbb{T}\to\mathbb{R}$ fonksiyonunun $\Delta-$anti türevi varsa, f ye $\Delta-$integrallenebilir fonksiyon denir. Bu durumda a ve b, $\mathbb{T}$ içinde herhangi noktalar olmak üzere f nin a dan b ye delta integrali

$$\int_a^b f(t)\Delta t=F(b)-F(a)$$

olarak tanımlanır.

Teorem 2.4.1: $f:\mathbb{T}\to\mathbb{R}$ ve $g:\mathbb{T}\to\mathbb{R}$ fonksiyonları $\Delta-$integrallenebilir olsunlar. Bu durumda her $a,b,c\in\mathbb{T}$ için aşağıdaki ifadeler doğrudur.

1. $\int_a^b [f(t)+g(t)]\Delta t=\int_a^b f(t)\Delta t+\int_a^b g(t)\Delta t$

2. Her k sabiti için $\int_a^b kf(t)\Delta t=k\int_a^b f(t)\Delta t$ olur.

3. $\int_a^a f(t)\Delta t = 0$

4. $\int_a^b f(t)\Delta t = -\int_b^a f(t)\Delta t$

5. $\int_a^b f(t)\Delta t = \int_a^c f(t)\Delta t + \int_c^b f(t)\Delta t$

6. $\int_a^b f(\sigma(t))g^{\Delta}(t)\Delta t = f(t)g(t)\Big|_a^b - \int_a^b f^{\Delta}(t)g(t)\Delta t$

7. $\int_a^b f(t)g^{\Delta}(t)\Delta t = f(t)g(t)\Big|_a^b - \int_a^b f^{\Delta}(t)g(\sigma(t))\Delta t$

Teorem 2.4.2: $f:\mathbb{T}\to\mathbb{R}$ fonksiyonu $\Delta-$integrallenebilir olsun. Bu durumda $t\in\mathbb{T}^{\kappa}$ için

$$\int_t^{\sigma(t)} f(s)\Delta s = [\sigma(t)-t]f(t)$$

eşitliği doğrudur.

Tanım 2.4.3: $\mathrm{a}\in\mathbb{T}$, $\sup\mathbb{T}=\infty$ ve f fonksiyonu $[a,\infty)$ aralığında sağ-yoğun sürekli fonksiyon olsun.

$$\int_a^{\infty} f(t)\Delta t = \lim_{t\to\infty}\int_a^t f(t)\Delta t$$

integraline genelleştirilmiş integral denir.

Eğer limit varsa genelleştirilmiş integral yakınsaktır, limit yoksa ıraksaktır.

Teorem 2.4.3: $\mathbb{T}$ bir zaman skalası olsun. a ve b, $\mathbb{T}$ içinde $a<b$ olacak şekilde iki nokta ve $f(t)$ ve $g(t)$ fonksiyonları $\mathbb{T}$ de $\Delta-$integrallenebilir olsunlar. Her $t\in[a,b]$ için,

1. $f(t)\geq 0$ ise, $\int_a^b f(t)\Delta t \geq 0$

2. $f(t)\leq g(t)$ ise, $\int_a^b f(t)\Delta t \leq \int_a^b g(t)\Delta t$

3. $|f(t)|\leq g(t)$ ise, $\left|\int_a^b f(t)\Delta t\right| \leq \int_a^b g(t)\Delta t$

4. $\left|\int_a^b f(t)\Delta t\right| \le \int_a^b |f(t)|\Delta t \le \left(\sup_{a\le t\le \rho(t)} |f(t)|\right)(b-a)$

ifadeleri doğrudur.

Örnek 2.4.1: $a\in\mathbb{T}$, $a>0$ ve $\sup\mathbb{T}=\infty$ olsun. Bu durumda $\int_a^\infty \frac{1}{t\sigma(t)}\Delta t$ integralini inceleyelim.

$$\int_a^\infty \frac{1}{t\sigma(t)}\Delta t = \lim_{b\to\infty}\int_a^b \frac{1}{t\sigma(t)}\Delta t = \lim_{b\to\infty}\left(F(b)-F(a)\right) = \lim_{b\to\infty}\left(-\frac{1}{b}+\frac{1}{a}\right) = \frac{1}{a}$$

elde edilir.

Örnek 2.4.2: $\mathbb{T}=\mathbb{Z}$ için $a\neq 0$ olmak üzere $\int a^t\Delta t$ belirsiz integralini inceleyelim.

$$\left(\frac{a^t}{a-1}\right)^\Delta = \Delta\left(\frac{a^t}{a-1}\right) = \frac{a^{t+1}-a^t}{a-1} = a^t$$

olduğundan

$$\int a^t\Delta t = \frac{a^t}{a-1}+c \quad (c=sabit)$$

elde edilir.

2.5 Zaman Skalasında $\nabla-$ İntegral

Tanım 2.5.1: $f:\mathbb{T}\to\mathbb{R}$ fonksiyonu verilsin. Eğer $F:\mathbb{T}\to\mathbb{R}$ fonksiyonu $\mathbb{T}_\kappa$ üzerinde $\nabla-$türevlenebilir ve her $t\in\mathbb{T}_\kappa$ için $F^\nabla(t)=f(t)$ ise, F fonksiyonuna f nin $\nabla-$anti türevi denir.

Tanım 2.5.2: Eğer $f:\mathbb{T}\to\mathbb{R}$ fonksiyonunun $\nabla-$anti türevi varsa, f ye $\nabla-$integrallenebilir fonksiyon denir. Bu durumda a ve b, $\mathbb{T}$ içinde herhangi noktalar olmak üzere f nin a dan b ye nabla integrali

$$\int_a^b f(t)\nabla t = F(b)-F(a)$$

olarak tanımlanır.

Teorem 2.5.1: $f:\mathbb{T}\to\mathbb{R}$ ve $g:\mathbb{T}\to\mathbb{R}$ fonksiyonları $\nabla-$integrallenebilir olsunlar. Bu durumda her $a,b,c\in\mathbb{T}$ için aşağıdaki ifadeler doğrudur.

1. $\int_a^b [f(t)+g(t)]\nabla t = \int_a^b f(t)\nabla t + \int_a^b g(t)\nabla t$

2. Her k sabiti için $\int_a^b kf(t)\nabla t = k\int_a^b f(t)\nabla t$ olur.

3. $\int_a^a f(t)\nabla t = 0$

4. $\int_a^b f(t)\nabla t = -\int_b^a f(t)\nabla t$

5. $\int_a^b f(t)\nabla t = \int_a^c f(t)\nabla t + \int_c^b f(t)\nabla t$

6. $\int_a^b f(\rho(t))g^{\nabla}(t)\nabla t = f(t)g(t)\big|_a^b - \int_a^b f^{\nabla}(t)g(t)\nabla t$

7. $\int_a^b f(t)g^{\nabla}(t)\nabla t = f(t)g(t)\big|_a^b - \int_a^b f^{\nabla}(t)g(\rho(t))\nabla t$

Teorem 2.5.2: $f:\mathbb{T}\to\mathbb{R}$ fonksiyonu $\nabla-$integrallenebilir olsun. Bu durumda $t\in\mathbb{T}_\kappa$ için

$$\int_{\rho(t)}^{t} f(s)\Delta s = [t-\rho(t)]f(t)$$

eşitliği doğrudur.

3. SONSUZ ARALIK ÜZERİNDE LİNEER OLMAYAN ZAMAN SKALASI SINIR DEĞER PROBLEMLERİ

Bu bölümde $\mathbb{T}$ bir zaman skalası, $t \in [a,\infty)_{\mathbb{T}}$, $t \neq t_k$, $\alpha_i \geq 0$ $(1 \leq i \leq m-2)$, $\beta \geq 0$, $a < \eta_1 < \eta_2 < ... < \eta_{m-2} < \infty$, $f \in C\left([a,\infty)_{\mathbb{T}} \times \mathbb{R} \times [0,\infty), [0,\infty)\right)$, $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ azalmayan homeomorfizm ve $\varphi(0) = 0$ ile pozitif homomorfizm olmak üzere,

$$\begin{cases} \left(\varphi\left(y^{\Delta}(t)\right)\right)^{\nabla} + h(t) f\left(t, y(t), y^{\Delta}(t)\right) = 0, \; t \in [a,\infty)_{\mathbb{T}} \\ y\left(t_k^{+}\right) - y\left(t_k^{-}\right) = I_k\left(y(t_k)\right) \\ y(a) - \beta y^{\Delta}(a) = \sum\limits_{i=1}^{m-2} \alpha_i y^{\Delta}(\eta_i), \; \lim\limits_{t\to\infty} y^{\Delta}(t) = 0 \end{cases} \tag{3.1}$$

m -nokta sınır değer problemi ele alınacaktır.

Aşağıdaki şartlar sağlanırsa $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ izdüşümüne azalmayan homeomorfizm ve pozitif homomorfizm adı verilir.

i) $x \leq y$ ise $\forall x, y \in \mathbb{R}$ için $\varphi(x) \leq \varphi(y)$ dir.

ii) φ bire-bir, örten ve sürekli, ayrıca tersi de süreklidir.

iii) $\forall x, y \in \mathbb{R}$ için $\varphi(xy) = \varphi(x)\varphi(y)$ dir.

Aşağıdaki şartların sağlandığını kabul edelim.

$(H1)$ $h \in C\left([a,\infty)_{\mathbb{T}}, [0,\infty)\right)$, $\int\limits_a^{\infty} h(s) \nabla s < \infty$ ve $\int\limits_a^{\infty} \varphi^{-1}\left(\int\limits_s^{\infty} h(r) \nabla r\right) \Delta s < \infty$ olur.

$(H2)$ $\omega \in C\left([0,\infty), [0,\infty)\right)$ azalmayan olmak üzere,

$$f\left(t, (1+t)u, v\right) \leq \omega\left(\max\left\{|u|, |v|\right\}\right)$$

sağlanır.

3.1 Temel Tanımlar

Tanım 3.1.1: B reel Banach uzayı olsun. $P \subset B$ boştan farklı, kapalı kümesi,

1. $u \in P$ ve $\lambda \geq 0$ ise $\lambda u \in P$;

2. $u, -u \in P$ ise $u = 0$

şartlarını sağlıyor ise bu kümeye koni denir.

Tanım 3.1.2: α**,** B reel Banach uzayının P konisi üzerinde negatif olmayan, konkav ve sürekli fonksiyonel ise, $\alpha : P \to [0,\infty)$ sürekli ve $\forall u, v \in P$, $0 \leq t \leq 1$ için,

$$\alpha\left(tu+(1-t)v\right)\geq t\alpha(u)+(1-t)\alpha(v)$$

şartı sağlanır.

Tanım 3.1.3: γ**,** B reel Banach uzayının P konisi üzerinde negatif olmayan, konveks ve sürekli fonksiyonel ise, $\gamma: P\to[0,\infty)$ sürekli ve $\forall u,v\in P$, $0\leq t\leq 1$ için,

$$\gamma\left(tu+(1-t)v\right)\leq t\gamma(u)+(1-t)\gamma(v)$$

şartı sağlanır.

Tanım 3.1.4: $\|y\|_1=\sup\limits_{t\in[a,\infty)_{\mathbb{T}}}\dfrac{|y(t)|}{1+t}$, $\|y^\Delta\|_\infty=\sup\limits_{t\in[a,\infty)_{\mathbb{T}}}|y^\Delta(t)|$ olmak üzere $\|y\|=\max\left\{\|y\|_1,\|y^\Delta\|_\infty\right\}$ normu ile tanımlı

$$B=\left\{y\in C^\Delta[a,\infty): \sup_{t\in[a,\infty)_{\mathbb{T}}}\frac{|y(t)|}{1+t}<\infty,\ \lim_{\substack{t\to\infty\\ t\in\mathbb{T}}}y^\Delta(t)=0\right\}\qquad(3.2)$$

Banach uzayını ele alalım. P konisi,

$$P=\left\{y\in B: y,\ [a,\infty)_{\mathbb{T}}\ \text{üzerinde azalmayan, konkav ve negatif olmayan}\right\}\qquad(3.3)$$

şeklinde tanımlanmıştır.

Tanım 3.1.5: B**,** (3.2) de tanımlı bir Banach uzayı ve $Y\subset B$ olsun.

Aşağıdaki şartlar sağlanırsa, Y relatively kompakt olur:

1. Y, B de düzgün sınırlıdır.

2. Y den alınan fonksiyonlar, $[a,\infty)_{\mathbb{T}}$ un herhangi bir kompakt alt aralığında aynı dereceden süreklidir, yani $\varepsilon>0$ için, $\forall t_1,t_2\in[a,\infty)_{\mathbb{T}}$, $\forall f\in Y$ için $\exists\delta>0$ sayısı vardır öyle ki $|t_1-t_2|<\delta$ iken $|f(t_1)-f(t_2)|<\varepsilon$ kalır.

3. Y den alınan fonksiyonlar, aynı dereceden yakınsaktır, yani herhangi $t>n_0$, $f\in Y$ ve herhangi bir ε için, $n_0=n_0(\varepsilon)>0$ reel sayısı vardır öyle ki $|f(t)-f(\infty)|<\varepsilon$ kalır.

Tanım 3.1.6: Her sınırlı kümeyi relatively kompakt kümeye dönüştüren operatöre kompakt operatör denir.

Tanım 3.1.7: Sürekli ve kompakt operatöre, tamamen sürekli operatör denir.

3.2 Ana Sonuçlar İçin Gerekli Lemmalar

Lemma 3.2.1: $x(t)=h(t)f\left(t,y(t),y^{\Delta}(t)\right)$, $x\in C\left([a,\infty)_{\mathbb{T}},[a,\infty)\right)$ ve $\int_a^{\infty}x(t)\nabla t<\infty$ olmak üzere, (3.1) sınır değer problemi,

$$y(t)=\sum_{i=1}^{m-2}\alpha_i\left(\varphi^{-1}\left(\int_{\eta_i}^{\infty}x(r)\nabla r\right)\right)+\beta\varphi^{-1}\left(\int_a^{\infty}x(r)\nabla r\right)+\int_a^t\varphi^{-1}\left(\int_s^{\infty}x(r)\nabla r\right)\Delta s+\sum_{a<t_k<t}I_k\left(y(t_k)\right)$$

olacak şekilde tek bir çözüme sahiptir.

İspat:

$$\begin{cases}\left(\varphi\left(y^{\Delta}(t)\right)\right)^{\nabla}+h(t)f\left(t,y(t),y^{\Delta}(t)\right)=0,\ t\in[a,\infty)_{\mathbb{T}}\\ y\left(t_k^{+}\right)-y\left(t_k^{-}\right)=I_k\left(y(t_k)\right)\\ y(a)-\beta y^{\Delta}(a)=\sum\limits_{i=1}^{m-2}\alpha_i y^{\Delta}(\eta_i),\ \lim\limits_{t\to\infty}y^{\Delta}(t)=0\end{cases}$$

sınır değer problemini ele alalım. $x(t)=h(t)f\left(t,y(t),y^{\Delta}(t)\right)$ şeklinde tanımlansın.

$$\left(\varphi\left(y^{\Delta}(t)\right)\right)^{\nabla}=-x(t)$$

ifadesinde eşitliğin her iki tarafının t den ∞ a nabla integrali alınırsa,

$$\int_t^{\infty}\left(\varphi\left(y^{\Delta}(r)\right)\right)^{\nabla}\nabla r=-\int_t^{\infty}x(r)\nabla r$$

elde edilir.

$$\lim_{t\to\infty}\varphi\left(y^{\Delta}(t)\right)-\varphi\left(y^{\Delta}(t)\right)=-\int_t^{\infty}x(r)\nabla r$$

eşitliğinde φ sürekli olduğundan

$$\varphi\left(\lim_{t\to\infty}y^{\Delta}(t)\right)-\varphi\left(y^{\Delta}(t)\right)=-\int_t^{\infty}x(r)\nabla r$$

$$\varphi(0)-\varphi\left(y^{\Delta}(t)\right)=-\int_t^{\infty}x(r)\nabla r$$

elde edilir. Burada $\varphi(0)=0$ olduğundan,

$$\varphi\left(y^{\Delta}(t)\right)=\int_t^{\infty}x(r)\nabla r\Rightarrow y^{\Delta}(t)=\varphi^{-1}\left(\int_t^{\infty}x(r)\nabla r\right)$$

elde edilir ve her iki tarafın a dan t ye delta integrali alınırsa,

$$\int_a^t y^{\Delta}(s)\Delta s=\int_a^t \varphi^{-1}\left(\int_s^{\infty} x(r)\nabla r\right)\Delta s$$

$$\int_a^{t_1^-} y^{\Delta}(s)\Delta s+\int_{t_1^+}^{t_2^-} y^{\Delta}(s)\Delta s+\int_{t_2^+}^{t_3^-} y^{\Delta}(s)\Delta s+\ldots+\int_{t_k^-}^{t} y^{\Delta}(s)\Delta s=\int_a^t \varphi^{-1}\left(\int_s^{\infty} x(r)\nabla r\right)\Delta s$$

$$y(t)-y(a)-\sum_{a<t_k<t} I_k\left(y(t_k)\right)=\int_a^t \varphi^{-1}\left(\int_s^{\infty} x(r)\nabla r\right)\Delta s$$

$$y(t)=\sum_{i=1}^{m-2}\alpha_i y^{\Delta}(\eta_i)+\beta y^{\Delta}(a)+\int_a^t \varphi^{-1}\left(\int_s^{\infty} x(r)\nabla r\right)\Delta s+\sum_{a<t_k<t} I_k\left(y(t_k)\right)$$

$$y(t)=\sum_{i=1}^{m-2}\alpha_i\left(\varphi^{-1}\left(\int_{\eta_i}^{\infty} x(r)\nabla r\right)\right)+\beta\varphi^{-1}\left(\int_a^{\infty} x(r)\nabla r\right)$$

$$+\int_a^t \varphi^{-1}\left(\int_s^{\infty} x(r)\nabla r\right)\Delta s+\sum_{a<t_k<t} I_k\left(y(t_k)\right)$$

bulunur.

(3.1) sınır değer problemini çözmek, $t\in[a,\infty)_{\mathbb{T}}$ için $A:P\to B$ operatörünün sabit noktalarını bulmaya eşdeğerdir.

$(Ay)(t)=y(t)$ ise;

$$(Ay)(t)=\sum_{i=1}^{m-2}\alpha_i\left(\varphi^{-1}\left(\int_{\eta_i}^{\infty} h(r)f\left(r,y(r),y^{\Delta}(r)\right)\nabla r\right)\right)$$

$$+\beta\varphi^{-1}\left(\int_a^{\infty} h(r)f\left(r,y(r),y^{\Delta}(r)\right)\nabla r\right) \tag{3.4}$$

$$+\int_a^t \varphi^{-1}\left(\int_s^{\infty} h(r)f\left(r,y(r),y^{\Delta}(r)\right)\nabla r\right)\Delta s+\sum_{a<t_k<t} I_k\left(y(t_k)\right)$$

elde edilir.

Tezin bundan sonraki bölümlerinde üzerinde çalışacağımız B, P ve A sırasıyla (3.2), (3.3) ve (3.4) ile tanımlanmıştır.

Lemma 3.2.2: $y\in P$ için $\|y\|_1\le M\left\|y^{\Delta}\right\|_{\infty}$ olur. Burada, $M=\max\left\{\beta-a+\sum_{i=1}^{m-2}\alpha_i,1\right\}$ olarak tanımlanmıştır.

İspat: $y\in P$ olduğunda,

$$\frac{y(t)}{1+t}=\frac{1}{1+t}\left(\int_a^t y^{\Delta}(s)\Delta s+y(a)\right)$$
$$=\frac{1}{1+t}\left(\int_a^t y^{\Delta}(s)\Delta s+\beta y^{\Delta}(a)+\sum_{i=1}^{m-2}\alpha_i y^{\Delta}(\eta_i)\right)$$
$$\le\frac{t-a+\beta+\sum_{i=1}^{m-2}\alpha_i}{1+t}\left\|y^{\Delta}\right\|_{\infty}$$
$$\le M\left\|y^{\Delta}\right\|_{\infty}$$

elde edilir.

Lemma 3.2.3: $(H1)$ ve $(H2)$ sağlanırsa, $A:P\to P$ operatörü tamamen süreklidir.

İspat: İspatı 3 adımda inceleyelim.

Adım 1: $AP\subset P$ olduğunu gösterelim. $y\in P$ için,

$$\lim_{t\to\infty}(Ay)^{\Delta}(t)=\lim_{t\to\infty}\left(\varphi^{-1}\left(\int_t^{\infty}x(s)\nabla s\right)\right)=\varphi^{-1}(0)=0 \text{ ve } \sup_{t\in[a,\infty)_{\mathbb{T}}}\frac{|(\mathrm{Ay})(t)|}{1+t}<\infty$$

olduğundan $Ay\in B$ olur.

$$\left(\varphi\left((Ay)^{\Delta}(t)\right)\right)^{\nabla}=-h(t)f\left(t,y(t),y^{\Delta}(t)\right)\le 0$$

olduğundan Ay konkavdır.

$$(Ay)^{\Delta}(t)=\varphi^{-1}\left(\int_t^{\infty}h(s)f\left(s,y(s),y^{\Delta}(s)\right)\nabla s\right)\ge 0$$

olduğundan Ay azalmayandır.

$$(Ay)(a)=\sum_{i=1}^{m-2}\alpha_i\left(\varphi^{-1}\left(\int_{\eta_i}^{\infty}h(r)f\left(r,y(r),y^{\Delta}(r)\right)\nabla r\right)\right)$$
$$+\beta\varphi^{-1}\left(\int_a^{\infty}h(r)f\left(r,y(r),y^{\Delta}(r)\right)\nabla r\right)$$
$$=\sum_{i=1}^{m-2}\alpha_i(Ay)^{\Delta}(\eta_i)+\beta(Ay)^{\Delta}(a)\ge 0$$

olduğu için Ay negatif olmayandır.

Böylece $\forall y\in P$ için Ay, $[a,\infty)_{\mathbb{T}}$ üzerinde negatif olmayan, konkav ve azalmayandır. O halde $AP\subset P$ elde edilir.

Adım 2: $A : P \to P$ sürekli olduğunu gösterelim. P de $n \to \infty$ için $y_n \to y$ iken r_0 sayısı vardır öyle ki $\sup_{n\in\mathbb{N}} \|y_n\| < r_0$ olur. $(H2)$ şartından, $f\left(t,(1+t)u,v\right) \le \omega(r_0)$ ve $(H1)$ şartından,

$$\int_a^\infty h(s)\left|f\left(s,y_n(s),y_n^\Delta(s)\right)-f\left(s,y(s),y^\Delta(s)\right)\right|\nabla s \le 2\omega(r_0)\int_a^\infty h(s)\nabla s < \infty$$

olur.

Lebesgue Dominated Yakınsaklık Teoremi'nden, $\forall t \in [a,\infty)_\mathbb{T}$ için,

$$\begin{aligned}\left|\varphi\left((Ay_n)^\Delta(t)\right)-\varphi\left((Ay)^\Delta(t)\right)\right| &= \left|\int_t^\infty h(s)\left[f\left(s,y_n(s),y_n^\Delta(s)\right)-f\left(s,y(s),y^\Delta(s)\right)\right]\nabla s\right| \\ &\le \int_t^\infty h(s)\left|f\left(s,y_n(s),y_n^\Delta(s)\right)-f\left(s,y(s),y^\Delta(s)\right)\right|\nabla s \\ &\to 0\end{aligned}$$

elde edilir. O halde φ^{-1} sürekli olduğundan,

$$\left\|(Ay_n)^\Delta-(Ay)^\Delta\right\|_\infty \to 0$$

olur. Böylece

$$\|Ay_n - Ay\| \le M\left\|(Ay_n)^\Delta-(Ay)^\Delta\right\|_\infty \to 0 \ \ (n\to\infty)$$

elde edilir. Dolayısıyla A süreklidir.

Adım 3: $A : P \to P$ nin sınırlı kümeden relatively kompakt kümeye bir dönüşüm olduğunu gösterelim. Ω, P nin herhangi sınırlı alt kümesi olsun. $K > 0$ sayısı vardır öyle ki $\|y\| \le K$ dır. $(H1)$ ve $(H2)$ şartından, $\forall y \in \Omega$ için,

$$\left\|(Ay)^\Delta\right\|_\infty = \varphi^{-1}\left(\int_a^\infty h(s)f\left(s,y(s),y^\Delta(s)\right)\nabla s\right) \le \varphi^{-1}\left(\omega(K)\right)\varphi^{-1}\left(\int_a^\infty h(s)\nabla s\right) < \infty$$

elde edilir. Böylece, $\left\|(A\Omega)^\Delta\right\|_\infty < \infty$ olur. O halde,

$$\|A\Omega\| \le M\left\|(A\Omega)^\Delta\right\|_\infty < \infty$$

elde edilir ve $A(\Omega)$ düzgün sınırlıdır.

Şimdi de $A(\Omega)$ nın $[a,\infty)_\mathbb{T}$ üzerinde aynı dereceden sürekli olduğunu gösterelim. Herhangi $R > 0$, $t, p \in [a,R]_\mathbb{T}$ ve $\forall y \in \Omega$ için genelliği bozmamak adına $t < p$ olduğunu kabul edelim. $t \to p$ düzgün yakınsarken, $(H1)$ ve $(H2)$ şartından,

$$\left|A(y(t))-A(y(p))\right|=\left|\int_t^p \varphi^{-1}\left(\int_s^\infty h(r)f\left(r,y(r),y^\Delta(r)\right)\nabla r\right)\Delta s+\sum_{t<t_k<p} I_k\left(y(t_k)\right)\right|$$

$$\leq \int_t^p \varphi^{-1}\left(\int_s^\infty |h(r)|\left|f\left(r,y(r),y^\Delta(r)\right)\right|\nabla r\right)\Delta s+\sum_{t<t_k<p} I_k\left(y(t_k)\right)$$

$$\leq \varphi^{-1}\left(\omega(K)\right)\int_t^p \varphi^{-1}\left(\int_s^\infty h(r)\nabla r\right)\Delta s+\sum_{t<t_k<p} I_k\left(y(t_k)\right)\to 0$$

olur. Böylece, $A(\Omega)$ dan alınan fonksiyonlar aynı dereceden süreklidir.

Son olarak, $A(\Omega)$ dan alınan fonksiyonların aynı dereceden yakınsak olduğunu gösterelim. $y\in\Omega$ ve $t\to\infty$ için,

$$\left|(Ay)(t)-(Ay)(\infty)\right|=\left|-\int_t^\infty \varphi^{-1}\left(\int_s^\infty h(r)f\left(r,y(r),y^\Delta(r)\right)\nabla r\right)\Delta s-\sum_{t<t_k<\infty} I_k\left(y(t_k)\right)\right|$$

$$\leq \left|\varphi^{-1}\left(\omega(K)\right)\int_t^\infty \varphi^{-1}\left(\int_s^\infty h(r)\nabla r\right)\Delta s+\sum_{t<t_k<\infty} I_k\left(y(t_k)\right)\right|\to 0$$

olduğundan $A(\Omega)$ dan alınan fonksiyonlar aynı dereceden yakınsaktır.

Sonuç olarak, Adım 1, Adım 2 ve Adım 3 gereğince $A:P\to P$ operatörü tamamen süreklidir.

3.3 En Az Bir Çözümün Varlığı

(3.1) sınır değer probleminin en az bir çözümünün varlığı Schauder Sabit Nokta Teoremi yardımıyla gösterilecektir. Bu bölümde kullanmak üzere

$$N=\left(\varphi^{-1}\left(\int_a^\infty h(s)\nabla s\right)\right)^{-1} \tag{3.5}$$

sabitini tanımlayalım.

Teorem 3.3.1: (Schauder Sabit Nokta Teoremi)

B bir Banach uzayı ve S, B nin boş olmayan, sınırlı, konveks ve kapalı alt kümesi olsun. Kabul edelim ki $A:B\to B$ tamamen sürekli operatör olsun. Eğer $A(S)\subset S$ olursa A nın S de en az bir sabit noktası vardır (Krasnosel'skii, 1964).

Teorem 3.3.2: $(H1)$ şartının sağlandığını kabul edelim. $r_1>0$ sayısı vardır öyle ki, $(t,u,v)\in[a,\infty)_{\mathbb{T}}\times[0,r_1]\times[0,r_1]$ olduğunda, ya

i) $f\left(t,(1+t)u,v\right)\leq\varphi\left(\frac{N}{M}v\right)$

ya da

ii) $f\left(t,(1+t)u,v\right)\le \varphi\left(\dfrac{N}{M}u\right)$

oluyorsa, (3.1) $m-$nokta sınır değer probleminin en az bir çözümü vardır.

İspat: $S=\left\{y\in B:\|y\|\le r_1\right\}$ alalım. S, B nin kapalı, sınırlı ve konveks alt kümesidir. $A:S\to B$, $t\in[a,\infty)_{\mathbb{T}}$ için,

$$\begin{aligned}
(Ay)(t)&=\sum_{i=1}^{m-2}\alpha_i\left(\varphi^{-1}\left(\int_{\eta_i}^{\infty}h(r)f\left(r,y(r),y^{\Delta}(r)\right)\nabla r\right)\right)\\
&+\beta\varphi^{-1}\left(\int_{\eta_i}^{\infty}h(r)f\left(r,y(r),y^{\Delta}(r)\right)\nabla r\right)\\
&+\int_a^t\varphi^{-1}\left(\int_s^{\infty}h(r)f\left(r,y(r),y^{\Delta}(r)\right)\nabla r\right)\Delta s+\sum_{a<t_k<t}I_k\left(y(t_k)\right)
\end{aligned}$$

ile tanımlanır. Şimdi $A:S\to S$ olduğunu gösterelim. $y\in S$ ve $t\in[a,\infty)_{\mathbb{T}}$ için, Lemma 3.2.2 ve Teorem 3.3.2 nin (i) ve (ii) şartlarından,

$$\begin{aligned}
\|Ay\|&=\max\left\{\|Ay\|_1,\left\|(Ay)^{\Delta}\right\|_{\infty}\right\}\le M\left\|(Ay)^{\Delta}\right\|_{\infty}\\
&=M(Ay)^{\Delta}(a)\\
&=M\varphi^{-1}\left(\int_a^{\infty}h(r)f\left(r,y(r),y^{\Delta}(r)\right)\nabla r\right)\\
&\le M\frac{N}{M}\varphi^{-1}\left(\int_a^{\infty}h(r)\varphi\left(y^{\Delta}(r)\right)\nabla r\right)\\
&\le N\left\{\sup_{t\in[a,\infty)_{\mathbb{T}}}\left|y^{\Delta}(t)\right|\right\}\varphi^{-1}\left(\int_a^{\infty}h(r)\nabla r\right)\\
&=\left\|y^{\Delta}\right\|_{\infty}\le\|y\|\le r_1
\end{aligned}$$

veya

$$\begin{aligned}
\|Ay\|&\le M\varphi^{-1}\left(\int_a^{\infty}h(r)f\left(r,y(r),y^{\Delta}(r)\right)\nabla r\right)\\
&\le M\frac{N}{M}\varphi^{-1}\left(\int_a^{\infty}h(r)\varphi\left(\frac{y(r)}{1+r}\right)\nabla r\right)\\
&\le N\|y\|_1\varphi^{-1}\left(\int_a^{\infty}h(r)\nabla r\right)=\|y\|_1\le\|y\|\le r_1
\end{aligned}$$

olur. Yani $\|Ay\| \le r_1$ olduğundan $A(S) \subset S$ elde edilir. Ayrıca A operatörü tamamen süreklidir. Böylece, Schauder Sabit Nokta Teoremi'nden A nın S de en az bir sabit noktası vardır.

(3.1) sınır değer probleminin çözümleri, A operatörünün sabit noktaları olduğundan, (3.1) problemi en az bir çözüme sahiptir.

3.4 En Az Bir Pozitif Çözümün Varlığı

$(H3)$ $f \in C\left([a,\infty)_{\mathbb{T}} \times [0,\infty) \times [0,\infty), [0,\infty)\right)$

şartının sağlandığını kabul edelim.

(3.1) sınır değer probleminin en az bir pozitif çözümünün varlığını Krasnosel'skii Sabit Nokta Teoremi ve Leray-Schauder Sabit Nokta Teoremi yardımıyla göstereceğiz.

Teorem 3.4.1: (Krasnosel'skii Sabit Nokta Teoremi)

B bir Banach uzayı ve $P \subset B$ bir koni olsun. Kabul edelim ki Ω_1 ve Ω_2, $0 \in \Omega_1$, $\overline{\Omega_1} \subset \Omega_2$ olmak üzere B nin açık ve sınırlı alt kümeleri olsun ve

$$A : P \cap \left(\overline{\Omega_2} \setminus \Omega_1\right) \to P$$

tamamen sürekli operatördür öyle ki, ya

i) $y \in P \cap \partial\Omega_1$ için $\|Ay\| \le \|y\|$; $y \in P \cap \partial\Omega_2$ için $\|Ay\| \ge \|y\|$ dir,

ya da

ii) $y \in P \cap \partial\Omega_1$ için $\|Ay\| \ge \|y\|$; $y \in P \cap \partial\Omega_2$ için $\|Ay\| \le \|y\|$ dir,

oluyorsa A nın $P \cap \left(\overline{\Omega_2} \setminus \Omega_1\right)$ de en az bir sabit noktası vardır (Krasnosel'skii, 1964).

Teorem 3.4.2: $(H1)$, $(H2)$ ve $(H3)$ şartlarının sağlandığını kabul edelim. $0 < r_2 < R < \infty$ sayıları vardır öyle ki,

i) $(t,u,v) \in [a,\infty)_{\mathbb{T}} \times [0,r_2] \times [0,r_2]$ ise, $f\left(t,(1+t)u,v\right) \le \varphi\left(\frac{N}{M}v\right)$ veya $f\left(t,(1+t)u,v\right) \le \varphi\left(\frac{N}{M}u\right)$;

ii) $(t,u,v) \in [a,\infty)_{\mathbb{T}} \times [0,R] \times [0,R]$ ise, $f\left(t,(1+t)u,v\right) \ge \varphi\left(N M\, v(a)\right)$;

şartları sağlansın. O halde (3.1) sınır değer probleminin en az bir pozitif çözümü vardır.

İspat: $P \subset B$ bir koni olmak üzere Lemma 3.2.3 gereğince $A: P \to P$ tamamen süreklidir.

$\Omega_1 = \{ y \in P : \|y\| < r_2 \}$ olduğunda, $y \in P \cap \partial\Omega_1$ olsun. Lemma 3.2.2 ve

$f(t,(1+t)u,v) \le \varphi\left(\frac{N}{M} v\right)$ şartından,

$$\begin{aligned}
\|Ay\| &= \max\left\{ \|Ay\|_1, \left\|(Ay)^\Delta\right\|_\infty \right\} \le M \left\|(Ay)^\Delta\right\|_\infty \\
&= M \sup_{t \in [a,\infty)_{\mathbb{T}}} \left|(Ay)^\Delta(t)\right| \\
&= M \varphi^{-1}\left(\int_a^\infty h(r) f\left(r, y(r), y^\Delta(r)\right) \nabla r \right) \\
&\le M \frac{N}{M} \varphi^{-1}\left(\int_a^\infty h(r) \varphi\left(y^\Delta(r)\right) \nabla r \right) \\
&\le N \left(\sup_{t \in [a,\infty)_{\mathbb{T}}} y^\Delta(t) \right) \varphi^{-1}\left(\int_a^\infty h(r) \nabla r \right) \\
&= \left\|y^\Delta\right\|_\infty \le \|y\|
\end{aligned}$$

olur veya $f(t,(1+t)u,v) \le \varphi\left(\frac{N}{M} u\right)$ şartından,

$$\begin{aligned}
\|Ay\| &\le M \varphi^{-1}\left(\int_a^\infty h(r) f\left(r, y(r), y^\Delta(r)\right) \nabla r \right) \\
&\le M \frac{N}{M} \varphi^{-1}\left(\int_a^\infty h(r) \varphi\left(\frac{y(r)}{1+r} \right) \nabla r \right) \\
&\le N \|y\|_1 \varphi^{-1}\left(\int_a^\infty h(r) \nabla r \right) \\
&= \|y\|_1 \le \|y\|
\end{aligned}$$

elde edilir.

Böylece, $y \in P \cap \partial\Omega_1$ için $\|Ay\| \le \|y\|$ elde ederiz.

Şimdi $\Omega_2 = \{ y \in P : \|y\| < R \}$ şeklinde tanımlayalım. $y \in P \cap \partial\Omega_2$ için, hipotezden ve Lemma 3.2.2 den,

$$
\begin{aligned}
\|Ay\| &= \max\left\{\|Ay\|_1, \left\|(Ay)^\Delta\right\|_\infty\right\} \geq \left\|(Ay)^\Delta\right\|_\infty \\
&= (Ay)^\Delta(a) \\
&= \varphi^{-1}\left(\int_a^\infty h(r) f\left(r, y(r), y^\Delta(r)\right)\nabla r\right) \\
&\geq N M\, y^\Delta(a)\varphi^{-1}\left(\int_a^\infty h(r)\nabla r\right) \\
&= N M \left\|y^\Delta\right\|_\infty \varphi^{-1}\left(\int_a^\infty h(r)\nabla r\right) \\
&= M\left\|y^\Delta\right\|_\infty \geq \|y\|
\end{aligned}
$$

elde edilir. Böylece $y \in P \cap \partial\Omega_2$ için $\|Ay\| \geq \|y\|$ olur. Teorem 3.4.1 in ilk kısmından A nın $P \cap \left(\overline{\Omega_2} \setminus \Omega_1\right)$ de sabit noktası vardır öyle ki $r_2 \leq \|y\| \leq R$ olur. O halde (3.1) sınır değer probleminin en az bir pozitif çözümü vardır.

Teorem 3.4.3: (Leray-Schauder Sabit Nokta Teoremi)

B bir Banach uzayı ve $P \subset B$ olsun. $A : P \to P$ tamamen sürekli operatör olmak üzere, $\{y \in P : y = \lambda Ay,\ 0 < \lambda < 1\}$ kümesi sınırlı ise, A nın $T \subset P$ kapalı kümesinde en az bir sabit noktası vardır. Burada,

$$T = \left\{y \in P : \|y\| \leq R_1\right\},\ R_1 = \sup\left\{\|y\| : y = \lambda Ay, 0 < \lambda < 1\right\}$$

şeklindedir.

Teorem 3.4.4: Kabul edelim ki $(H1)$, $(H2)$ ve $(H3)$ sağlansın. O halde (3.1) sınır değer probleminin en az bir pozitif çözümü vardır.

İspat: Lemma 3.2.3 gereğince $A : P \to P$ tamamen sürekli operatördür.

$$N(A) = \{y \in P : y = \lambda Ay, 0 < \lambda < 1\}$$

şeklinde alalım. Şimdi $N(A)$ kümesinin sınırlı olduğunu gösterelim.

$T = \left\{y \in P : \|y\| \leq R_1\right\}$ ve $R_1 = \sup\left\{\|y\| : y = \lambda Ay, 0 < \lambda < 1\right\}$ olsun. O halde

$\forall y \in N(A)$ için, Lemma 3.2.2, $(H1)$ ve $(H2)$ şartından,

$$
\begin{aligned}
\|y\| &\leq M\left\|y^\Delta\right\|_\infty = M\left\|\lambda(Ay)^\Delta\right\|_\infty \\
&= M\lambda \sup_{t\in[a,\infty)_{\mathbb{T}}} \varphi^{-1}\left(\int_t^\infty h(s) f\left(s, y(s), y^\Delta(s)\right)\right)\nabla s
\end{aligned}
$$

$$= M\lambda\varphi^{-1}\left(\int_a^{\infty} h(s) f\left(s, y(s), y^{\Delta}(s)\right)\right)\nabla s$$

$$\leq M\lambda\varphi^{-1}\left(\omega\left(\max\left\{|u|,|v|\right\}\right)\int_a^{\infty} h(s)\nabla s\right)$$

$$\leq \lambda M\varphi^{-1}\left(\omega\left(R_1\right)\right)\varphi^{-1}\left(\int_a^{\infty} h(s)\nabla s\right) < \infty$$

elde edilir. Böylece $N(A)$ kümesi sınırlıdır. Teorem 3.4.3 gereğince (3.1) sınır değer probleminin en az bir pozitif çözümü vardır.

3.5 En Az İki Pozitif Çözümün Varlığı

(3.1) sınır değer probleminin en az iki pozitif çözümünün varlığını Avery-Henderson Sabit Nokta Teoremi yardımıyla göstereceğiz.

Teorem 3.5.1: (Avery-Henderson Sabit Nokta Teoremi)

P, B Banach uzayında bir koni olsun. Ayrıca,

$$P(\phi, r) = \{y \in P : \phi(y) < r\}$$

alalım. Eğer η ve ϕ, P üzerinde azalmayan, negatif olmayan ve sürekli fonksiyoneller, θ da $\theta(0) = 0$ olmak üzere P üzerinde negatif olmayan, sürekli fonksiyonel olsun. Bazı pozitif r ve L sabitleri için, $y \in \overline{P(\phi, r)}$ ise,

$$\phi(y) \leq \theta(y) \leq \eta(y) \text{ ve } \|y\| \leq L\,\phi(y)$$

sağlansın. $0 \leq \lambda \leq 1$ ve $y \in \partial P(\theta, q)$ için,

$$\theta(\lambda y) \leq \lambda\theta(y)$$

olacak şekilde $p < q < r$ pozitif sayılarının mevcut olduğunu kabul edelim. Tamamen sürekli $A : \overline{P(\phi, r)} \to P$ operatörü,

i) $\forall y \in \partial P(\phi, r)$ *için,* $\phi(Ay) > r$;

ii) $\forall y \in \partial P(\theta, q)$ *için,* $\theta(Ay) < q$;

iii) $\forall y \in \partial P(\eta, p)$ için, $P(\eta, p) \neq \varnothing$ ve $\eta(Ay) > p$;

şartlarını sağlarsa, A nın y_1 ve y_2 gibi en az iki sabit noktası vardır öyle ki,

$$p < \eta(y_1) \text{ ve } \theta(y_1) < q$$

ile

$$q < \theta(y_2) \text{ ile } \phi(y_2) < r$$

olur (Avery ve diğ., 2001).

Lemma 3.5.1: $\beta \geq 1$ olsun. Eğer $y \in P$ ise, $\forall t \in [a,\infty)_{\mathbb{T}}$ için

$$y(t) \geq \frac{a}{t}\left\|y^{\Delta}\right\|_{\infty}$$

olur.

İspat: $g(t) = y(t) - \frac{a}{t} y^{\Delta}(a)$ fonksiyonunu ele alalım.

$$g^{\Delta}(t) = y^{\Delta}(t) + \frac{a}{t\sigma(t)} y^{\Delta}(a) \geq 0$$

olduğundan g fonksiyonu azalmayandır. $\beta \geq 1$ ise,

$$g(a) = y(a) - y^{\Delta}(a) \geq 0$$

olduğundan $\forall t \in [a,\infty)_{\mathbb{T}}$ için $g(t) \geq 0$, yani

$$y(t) \geq \frac{a}{t} y^{\Delta}(a)$$

olur.

Teorem 3.5.2: $\beta \geq 1$ olsun. $(H1)$, $(H2)$ ve $(H3)$ şartlarının sağlandığını kabul edelim. $0 < p < q < r$ olmak üzere f fonksiyonu

i) $(t,u,v) \in [a,\infty)_{\mathbb{T}} \times \left[\frac{ar}{t(1+t)}, Mr\right] \times [0,r]$ için

$$f(t,(1+t)u,v) > \varphi(rN);$$

ii) $(t,u,v) \in [a,\infty)_{\mathbb{T}} \times [0,q] \times [0,q]$ için

$$f(t,(1+t)u,v) < \varphi\left(\frac{qN}{M}\right);$$

iii) $(t,u,v) \in [a,\infty)_{\mathbb{T}} \times \left[\frac{ap}{Mt(1+t)}, p\right] \times [0,p]$ için

$$f(t,(1+t)u,v) > \varphi(pN);$$

şartlarını sağlıyorsa (3.1) sınır değer probleminin en az iki pozitif çözümü vardır. Bu çözümler y_1 ve y_2 olmak üzere

$$\|y_1\| > p \text{ ve } \|y_1\| < q$$

ile

$$\|y_2\| > q \text{ ve } y_2^{\Delta}(a) < r$$

eşitsizliklerini sağlarlar.

Burada kullanılan M ve N sırasıyla Lemma 3.2.2 ve (3.5) de tanımlanmıştır.

İspat: Lemma 3.2.3 den $AP \subset P$ ve A nın tamamen sürekli operatör olduğunu biliyoruz.

P konisinde tanımlı ϕ, θ ve η negatif olmayan, azalmayan fonksiyonelleri

$$\phi(y) = y^{\Delta}(a),\ \theta(y) = \|y\| \text{ ve } \eta(y) = \|y\|$$

şeklinde tanımlansın. $y \in P$ için

$$\phi(y) \le \theta(y) = \eta(y) \text{ ve } \|y\| \le M\left\|y^{\Delta}\right\|_{\infty} = My^{\Delta}(a) = M\phi(y)$$

olur. Ayrıca, $\theta(0) = 0$ ve $\forall y \in P$, $\lambda \in [0,1]$ için $\theta(\lambda y) = \lambda\theta(y)$ elde ederiz.

$y \in \partial P(\phi, r)$ ise, $y^{\Delta}(a) = r$ olur. Buradan $\forall t \in [a,\infty)_{\mathbb{T}}$ için $y^{\Delta}(t) \le r$ yani $y^{\Delta}(t) \in [0,r]$ bulunur. Ayrıca,

$\|y\|_1 \le M\left\|y^{\Delta}\right\|_{\infty} = My^{\Delta}(a) = Mr$ ve $\forall t \in [a,\infty)_{\mathbb{T}}$ için Lemma 3.5.1 den,

$\dfrac{a}{t}\left\|y^{\Delta}\right\|_{\infty} \le y(t)$ olduğundan $\dfrac{ar}{t(1+t)} \le \dfrac{y(t)}{1+t}$ olur. Böylece $\forall t \in [a,\infty)_{\mathbb{T}}$ için

$\dfrac{y(t)}{1+t} \in \left[\dfrac{ar}{t(1+t)}, Mr\right]$ elde edilir. O halde $\forall t \in [a,\infty)_{\mathbb{T}}$ için (i) hipotezinden,

$$\begin{aligned}
\phi(Ay) = (Ay)^{\Delta}(a) &= \varphi^{-1}\left(\int_a^{\infty} h(t) f\left(t, y(t), y^{\Delta}(t)\right)\nabla t\right) \\
&> r\,N\,\varphi^{-1}\left(\int_a^{\infty} h(t)\nabla t\right) = r
\end{aligned}$$

olduğundan $\phi(Ay) > r$ bulunur. Böylece Teorem 3.5.1 in (i) şartı sağlanmış olur.

$y \in \partial P(\theta, q)$ için,

$$\theta(y) = q \;\Rightarrow\; \|y\| = q \Rightarrow \|y\| = \sup\left\{\|y\|_1, \left\|y^{\Delta}\right\|_{\infty}\right\} = q$$

olduğundan $\forall t\in[a,\infty)_{\mathbb{T}}$ için, $y^{\Delta}(t)\le q$ ve $\dfrac{y(t)}{1+t}\le q$ olur. Dolayısıyla $\forall t\in[a,\infty)_{\mathbb{T}}$ için (ii) hipotezinden,

$$\begin{aligned}\theta(Ay)=\|Ay\|&\le M\left\|(Ay)^{\Delta}\right\|_{\infty}\\ &=M\varphi^{-1}\left(\int_a^{\infty}h(t)f\left(t,y(t),y^{\Delta}(t)\right)\nabla t\right)\\ &<M\frac{qN}{M}\varphi^{-1}\left(\int_a^{\infty}h(t)\nabla t\right)=q\end{aligned}$$

olur ve Teorem 3.5.1 in (ii) şartı sağlanır.

$\eta(0)=0<p\ \Rightarrow\ 0\in P(\eta,p)$ olduğundan $P(\eta,p)\neq\varnothing$ olur.

$y\in\partial P(\eta,p)$ için, $\eta(y)=p\ \Rightarrow\ \|y\|=p$ olur. $\forall t\in[a,\infty)_{\mathbb{T}}$ için, $\dfrac{y(t)}{1+t}\le p$ ve Lemma 3.2.2 ve Lemma 3.5.1 den, $y(t)\ge\dfrac{a}{t}\left\|y^{\Delta}\right\|_{\infty}\ge\dfrac{a}{Mt}\|y\|$ olduğundan $\forall t\in[a,\infty)_{\mathbb{T}}$ için $\dfrac{y(t)}{1+t}\in\left[\dfrac{ap}{Mt(1+t)},p\right]$ elde edilir. Ayrıca $y^{\Delta}(t)\le p$ olur. $\forall t\in[a,\infty)_{\mathbb{T}}$ için (iii) hipotezinden,

$$\begin{aligned}\eta(Ay)=\|Ay\|&\ge\left\|(Ay)^{\Delta}\right\|_{\infty}\\ &=\sup_{t\in[a,\infty)_{\mathbb{T}}}(Ay)^{\Delta}(t)\\ &=\varphi^{-1}\left(\int_a^{\infty}h(t)f\left(t,y(t),y^{\Delta}(t)\right)\nabla t\right)\\ &>pN\varphi^{-1}\left(\int_a^{\infty}h(t)\nabla t\right)=p\end{aligned}$$

elde edilir. Teorem 3.5.1 in (iii) şartı sağlanır.

Sonuç olarak Avery-Henderson Sabit Nokta Teoremi'nin şartları sağlanır. O halde ele alınan (3.1) sınır değer problemi en az iki pozitif çözüme sahiptir. Bu çözümler y_1 ve y_2 olmak üzere

$$\|y_1\|>p\ \text{ ve }\ \|y_1\|<q$$

ile

$$\|y_2\|>q\ \text{ ve }\ y_2^{\Delta}(a)<r$$

eşitsizliklerini sağlarlar.

3.6 En Az Üç Pozitif Çözümün Varlığı

(3.1) sınır değer probleminin en az üç pozitif çözümünün varlığını Beş Fonksiyonel Sabit Nokta Teoremi yardımıyla göstereceğiz.

Beş Fonksiyonel Sabit Nokta Teoremi'ni ifade etmeden önce, teoremde kullanılacak olan bir tanım verelim.

Tanım 3.6.1: α ve ψ, P üzerinde negatif olmayan, sürekli, konkav fonksiyoneller, γ, β ve θ, P üzerinde negatif olmayan, sürekli, konveks fonksiyoneller olsunlar. l, e, b, d ve c pozitif sayıları için;

$P(\gamma,c)=\{y\in P:\gamma(y)<c\}$,

$P(\gamma,\alpha,e,c)=\{y\in P:e\le\alpha(y),\gamma(y)\le c\}$,

$Q(\gamma,\beta,d,c)=\{y\in P:\beta(y)\le d,\gamma(y)\le c\}$,

$P(\gamma,\theta,\alpha,e,b,c)=\{y\in P:e\le\alpha(y),\theta(y)\le b,\gamma(y)\le c\}$,

$Q(\gamma,\beta,\psi,l,d,c)=\{y\in P:l\le\psi(y),\beta(y)\le d,\gamma(y)\le c\}$

kümelerini tanımlayalım.

Teorem 3.6.1: (Beş Fonksiyonel Sabit Nokta Teoremi)

P, B Banach uzayı üzerinde bir koni, α ve ψ, P üzerinde negatif olmayan, sürekli, konkav fonksiyoneller, γ, β ve θ, P üzerinde negatif olmayan, sürekli, konveks fonksiyoneller olsunlar. c ve r negatif olmayan iki sabit sayı olmak üzere $\forall y\in\overline{P(\gamma,c)}$ için $\alpha(y)\le\beta(y)$ ve $\|y\|\le r\gamma(y)$ eşitsizlikleri sağlansın. $0<d<e$ olacak şekilde negatif olmayan l, e, b, d reel sayıları için eğer

$$A:\overline{P(\gamma,c)}\to\overline{P(\gamma,c)}$$

tamamen sürekli operatörü,

i) $\{y\in P(\gamma,\theta,\alpha,e,b,c):\alpha(y)>e\}\ne\varnothing$ ve $y\in P(\gamma,\theta,\alpha,e,b,c)$ için $\alpha(A(y))>e$ olur,

ii) $\{y\in Q(\gamma,\beta,\psi,l,d,c):\beta(y)<d\}\ne\varnothing$ ve $y\in Q(\gamma,\beta,\psi,l,d,c)$ için $\beta(A(y))<d$ olur,

iii) $\theta(A(y))>b$ ile $y\in P(\gamma,\alpha,e,c)$ için $\alpha(A(y))>e$ olur,

iv) $\psi(A(y))<l$ ve $y\in Q(\gamma,\beta,d,c)$ için $\beta(A(y))<d$ olur,

şartlarını sağlıyorsa, A operatörünün en az üç sabit noktası vardır. Bu $y_1, y_2, y_3 \in \overline{P(\gamma, c)}$ sabit noktaları

$$\beta(y_1) < d\,,\ \alpha(y_2) > e\,,\ \beta(y_3) > d\,,\ \alpha(y_3) < e$$

eşitsizliklerini sağlarlar (Avery, 1999).

Tezin bu bölümünde kullanmak üzere, $0 < k < \infty$, $\frac{1}{k} \in \mathbb{T}$ sabit, $l = 0$, $r = 1$ ve P üzerinde negatif olmayan, sürekli, konkav α ve ψ fonksiyonelleri ve negatif olmayan, sürekli, konveks γ, β ve θ fonksiyonelleri

$$\alpha(y) = \frac{k}{k+1} \min_{t \in \left[\frac{1}{k}, \infty\right)_{\mathbb{T}}} y(t),\ \gamma(y) = \beta(y) = \theta(y) = \|y\|,\ \psi(y) \equiv 0 \tag{3.6}$$

ile tanımlı kabul edilecektir. Ayrıca,

$$\lambda = \varphi^{-1}\left(\int_{1/k}^{k} h(r) \nabla r \right) \tag{3.7}$$

ve N, (3.5) ile tanımlanmıştır.

Teorem 3.6.2: $(H1)$, $(H2)$ ve $(H3)$ şartlarının sağlandığını kabul edelim. $0 < d < e < c$ pozitif sayıları vardır öyle ki,

$(D1)$ $\forall (t, u, v) \in \left[\frac{1}{k}, k\right]_{\mathbb{T}} \times \left[\frac{e}{k}, c\right] \times [0, c]$ için,

$$f\left(t, (1+t)u, v\right) > \varphi\left(\frac{k+1}{1-ak} \frac{e}{\lambda} \right),$$

$(D2)$ $\forall (t, u, v) \in [a, \infty)_{\mathbb{T}} \times [0, d] \times [0, d]$ için,

$$f\left(t, (1+t)u, v\right) < \varphi\left(\frac{dN}{M} \right),$$

$(D3)$ $\forall (t, u, v) \in [a, \infty)_{\mathbb{T}} \times [0, c] \times [0, c]$ için,

$$f\left(t, (1+t)u, v\right) \le \varphi\left(\frac{cN}{M} \right),$$

şartlarını sağlıyorsa (3.1) sınır değer probleminin en az üç pozitif çözümü mevcuttur. Bu üç çözüm $y_1, y_2, y_3 \in \overline{P(\gamma, c)}$ için

$$\|y_1\| \le d \text{ ile } \alpha(y_2) > e \text{ ve } d < \|y_3\| \text{ ile } \alpha(y_3) < e$$

eşitsizliklerini sağlarlar.

İspat: $\forall y \in \overline{P(\gamma,c)}$ için, $\alpha(y) \le \|y\| = \beta(y)$ ve $\|y\| \le r\gamma(y)$ olur.

Şimdi $A : \overline{P(\gamma,c)} \to \overline{P(\gamma,c)}$ olduğunu gösterelim. $y \in \overline{P(\gamma,c)}$ olsun. O halde $\|y\| = \gamma(y) \le c$ olur. $t \in [a,\infty)_{\mathbb{T}}$ için,

$$0 \le \frac{y(t)}{1+t} \le c \text{ ve } 0 \le y^{\Delta}(t) \le c$$

dir. Lemma 3.2.2 ve $(D3)$ şartından,

$$\begin{aligned}
\gamma(A(y)) = \|Ay\| &= \max\left\{\|Ay\|_1, \left\|(Ay)^{\Delta}\right\|_{\infty}\right\} \\
&\le \max\left\{M\left\|(Ay)^{\Delta}\right\|_{\infty}, \left\|(Ay)^{\Delta}\right\|_{\infty}\right\} \\
&\le M\left\|(Ay)^{\Delta}\right\|_{\infty} \\
&= M\varphi^{-1}\left(\int_a^{\infty} h(r) f\left(r, y(r), y^{\Delta}(r)\right)\nabla r\right) \\
&\le cN\varphi^{-1}\left(\int_a^{\infty} h(r)\nabla r\right) = c
\end{aligned}$$

elde edilir. O halde $A(y) \in \overline{P(\gamma,c)}$ olur. Bu da $A : \overline{P(\gamma,c)} \to \overline{P(\gamma,c)}$ olması demektir. Lemma 3.2.3 gereğince A tamamen sürekli operatördür.

Şimdi Beş Fonksiyonel Sabit Nokta Teoremi'nin diğer şartlarının da sağlandığını görelim.

i) $t \in \left[\frac{1}{k}, k\right]_{\mathbb{T}}$ için

$$\alpha(y) = \frac{k}{k+1}\min_{t\in\left[\frac{1}{k},\infty\right)_{\mathbb{T}}} y(t) \ge e \Rightarrow \frac{y(t)}{1+k} \ge \frac{1}{k+1}\min_{t\in\left[\frac{1}{k},\infty\right)_{\mathbb{T}}} y(t) \ge \frac{e}{k} \Rightarrow \frac{y(t)}{1+t} \ge \frac{y(t)}{1+k} \ge \frac{e}{k}$$

$$\Rightarrow \frac{y(t)}{1+t} \ge \frac{e}{k}$$

ve

$y \in P(\gamma,\theta,\alpha,e,b,c)$ ise $\alpha(y) > e$, $\theta(y) \le b$ ve $\gamma(y) \le c$ olur.

$\|y\| = \gamma(y) \le c$ olduğundan

$$\frac{y(t)}{1+t} \le c \text{ ve } 0 \le y^{\Delta}(t) \le c$$

dir.

Şimdi $t \in [a,\infty)_{\mathbb{T}}$ için $y(t) = \dfrac{c+e}{2}(t+1)$ şeklinde alalım.

$y^{\Delta}(t) = \dfrac{c+e}{2} \geq 0$ olduğundan y azalmayandır.

$\left(y^{\Delta}(t)\right)^{\nabla} = \left(\dfrac{c+e}{2}\right)^{\nabla} = 0 \leq 0$ olduğundan y konkavdır.

$y(a) = \dfrac{c+e}{2}(a+1) \geq 0$ olduğundan y negatif olmayandır.

Dolayısıyla $y \in P$ olduğu görülür.

$$\|y\| = \max\left\{\|y\|_1, \|y^{\Delta}\|_{\infty}\right\} = \max\left\{\sup_{t\in[a,\infty)_{\mathbb{T}}} \frac{y(t)}{1+t}, \sup_{t\in[a,\infty)_{\mathbb{T}}} y^{\Delta}(t)\right\} = \max\left\{\frac{c+e}{2}, \frac{c+e}{2}\right\} < c$$

ve

$$\alpha(y) = \frac{k}{k+1} \min_{t\in\left[\frac{1}{k},\infty\right)_{\mathbb{T}}} y(t) = \frac{k}{k+1} y\left(\frac{1}{k}\right) = \frac{k}{k+1}\frac{c+e}{2}\left(1+\frac{1}{k}\right) = \frac{c+e}{2} > e$$

olur. O halde

$$\left\{y \in P(\gamma,\theta,\alpha,e,b,c) : \alpha(y) > e\right\} \neq \varnothing$$

elde edilir. Diğer taraftan $y \in P(\gamma,\theta,\alpha,e,b,c)$ ve $\forall t \in [a,\infty)_{\mathbb{T}}$ için $(D1)$ şartından,

$$\begin{aligned}
\alpha(A(y)) &= \frac{k}{k+1} \min_{t\in\left[\frac{1}{k},\infty\right)_{\mathbb{T}}} (Ay)(t) = \frac{k}{k+1}(Ay)\left(\frac{1}{k}\right) \\
&= \frac{k}{k+1}\Bigg[\sum_{i=1}^{m-2} \alpha_i \varphi^{-1}\left(\int_{\eta_i}^{\infty} h(r) f\left(r, y(r), y^{\Delta}(r)\right)\nabla r\right) \\
&\quad + \beta\varphi^{-1}\left(\int_{a}^{\infty} h(r) f\left(r, y(r), y^{\Delta}(r)\right)\nabla r\right) \\
&\quad + \int_{a}^{1/k} \varphi^{-1}\left(\int_{s}^{\infty} h(r) f\left(r, y(r), y^{\Delta}(r)\right)\nabla r\right)\Delta s + \sum_{a<t_k<1/k} I_k\left(y(t_k)\right)\Bigg] \\
&\geq \frac{k}{k+1}\int_{a}^{1/k} \varphi^{-1}\left(\int_{s}^{\infty} h(r) f\left(r, y(r), y^{\Delta}(r)\right)\nabla r\right)\Delta s \\
&\geq \frac{k}{k+1}\left(\frac{1}{k} - a\right)\varphi^{-1}\left(\int_{1/k}^{k} h(r) f\left(r, y(r), y^{\Delta}(r)\right)\nabla r\right) \\
&= \frac{1-ak}{k+1}\varphi^{-1}\left(\int_{1/k}^{k} h(r) f\left(r, y(r), y^{\Delta}(r)\right)\nabla r\right)
\end{aligned}$$

$$> \frac{1-ak}{k+1}\frac{k+1}{1-ak}\frac{e}{\lambda}\varphi^{-1}\left(\int_{1/k}^{k} h(r)\nabla r\right) = e$$

olduğundan $\alpha(A(y)) > e$ elde edilir.

ii) $y \in Q(\gamma,\beta,\psi,l,d,c)$ ise, $\|y\| = \beta(y) < d$ ve $\gamma(y) = \|y\| \le c$ olur.

$\|y\| = \beta(y) < d$ ise, $0 \le \dfrac{y(t)}{1+t} \le d$ ve $0 \le y^{\Delta}(t) \le d$ dir.

Şimdi $y \in P$ olacak şekilde $\forall t \in [a,\infty)_{\mathbb{T}}$ için $y(t) = \dfrac{d}{2}$ alalım.

$\|y\| = \dfrac{d}{2} < d$ olduğundan

$$\{y \in Q(\gamma,\beta,\psi,l,d,c) : \beta(y) < d\} = \{y \in P : \|y\| < d\} \ne \varnothing$$

elde edilir.

Lemma 3.2.2 ve $(D2)$ şartı gereğince,

$$\begin{aligned}
\beta(A(y)) = \|Ay\| &= \max\left\{\|Ay\|_1, \left\|(Ay)^{\Delta}\right\|_{\infty}\right\} \\
&\le M\left\|(Ay)^{\Delta}\right\|_{\infty} \\
&= M \sup_{t\in[a,\infty)_{\mathbb{T}}} \left|(Ay)^{\Delta}(t)\right| \\
&= M\varphi^{-1}\left(\int_a^{\infty} h(r) f\left(r, y(r), y^{\Delta}(r)\right)\nabla r\right) \\
&< M\frac{dN}{M}\varphi^{-1}\left(\int_a^{\infty} h(r)\nabla r\right) = d
\end{aligned}$$

olduğundan $\beta(A(y)) < d$ elde edilir.

iii) $y \in P(\gamma,\alpha,e,c)$ için $\theta(A(y)) > b$ olduğunda $\alpha(A(y)) > e$ olduğunu gösterelim. $(D1)$ şartından,

$$\begin{aligned}
\alpha\left(A(y)\right) &= \frac{k}{k+1}\min_{t\in\left[\frac{1}{k},\infty\right)_{\mathbb{T}}}(Ay)(t)=\frac{k}{k+1}(Ay)\left(\frac{1}{k}\right)\\
&=\frac{k}{k+1}\left[\sum_{i=1}^{m-2}\alpha_i\varphi^{-1}\left(\int_{\eta_i}^{\infty}h(r)f\left(r,y(r),y^{\Delta}(r)\right)\nabla r\right)\right.\\
&+\beta\varphi^{-1}\left(\int_{a}^{\infty}h(r)f\left(r,y(r),y^{\Delta}(r)\right)\nabla r\right)\\
&\left.+\int_{a}^{1/k}\varphi^{-1}\left(\int_{s}^{\infty}h(r)f\left(r,y(r),y^{\Delta}(r)\right)\nabla r\right)\Delta s+\sum_{a<t_k<1/k}I_k\left(y(t_k)\right)\right]\\
&\geq\frac{k}{k+1}\int_{a}^{1/k}\varphi^{-1}\left(\int_{s}^{\infty}h(r)f\left(r,y(r),y^{\Delta}(r)\right)\nabla r\right)\Delta s\\
&\geq\frac{1-ak}{k+1}\varphi^{-1}\left(\int_{1/k}^{k}h(r)f\left(r,y(r),y^{\Delta}(r)\right)\nabla r\right)\\
&>\frac{1-ak}{k+1}\frac{k+1}{1-ak}\frac{e}{\lambda}\varphi^{-1}\left(\int_{1/k}^{k}h(r)\nabla r\right)=e
\end{aligned}$$

olduğundan $\alpha\left(A(y)\right)>e$ elde edilir.

iv) $\psi\left(A(y)\right)<l=0$ olması imkansızdır, çünkü $\psi\left(A(y)\right)\equiv 0<0$ olamaz. Bu nedenle Teorem 3.6.1 in (iv) şartını ihmal edeceğiz.

Böylece beş fonksiyonel sabit nokta teoreminin şartlarının sağlandığı görülür. Bu durumda (3.1) sınır değer probleminin en az üç pozitif çözümü mevcuttur. Bu üç çözüm $y_1,y_2,y_3\in\overline{P(\gamma,c)}$ için

$$\beta(y_1)<d\ ,\ \alpha(y_2)>e\ ,\ \beta(y_3)>d\ ,\ \alpha(y_3)<e$$

eşitsizliklerini sağlarlar.

Örnek 3.6.1: $\mathbb{T}=[0,3]\cup[8,\infty)$ zaman skalasını ele alalım.

$$\begin{cases}
\left(y^{\Delta}(t)\right)^{\nabla}+e^{-t}\dfrac{100t^2}{1+t^2}\left(\dfrac{y^2(t)}{(1+t)^2}+\left(y^{\Delta}(t)\right)^2\right)=0\\
y\left(2^+\right)-y\left(2^-\right)=4\\
y(0)-2y^{\Delta}(0)=\dfrac{1}{2}y^{\Delta}\left(\dfrac{1}{2}\right)+y^{\Delta}(1),\ \lim\limits_{t\to\infty}y^{\Delta}(t)=0
\end{cases}\tag{3.8}$$

sınır değer problemi için $\varphi(x)=x$, $h(x)=e^{-x}$, $a=0$, $\beta=2$, $\alpha_1=\eta_1=\dfrac{1}{2}$,

$\alpha_2=\eta_2=1$, $t_1=2$ ve $f\left(t,(1+t)u,v\right)=\dfrac{100t^2}{1+t^2}\left(u^2+v^2\right)$, $M=\dfrac{7}{2}$, $N=\dfrac{e^8}{e^8-e^5+6}$

bulunur ve $k=2$ alınırsa $\lambda=\dfrac{e^{3/2}-1}{e^2}$ olur. Eğer $d=0.001$, $e=0.0013$ ve $c=0.0015$

alınırsa, Teorem 3.6.2 nin $(D1)$, $(D2)$ ve $(D3)$ şartları sağlandığından (3.8) sınır

değer probleminin

$$\|y_1\|\le d \text{ ile } \frac{2}{3}\min_{t\in\left[\frac{1}{2},\infty\right)} y_2(t)>e \text{ ve } d<\|y_3\| \text{ ile } \frac{2}{3}\min_{t\in\left[\frac{1}{2},\infty\right)} y_3(t)<e$$

olacak şekilde en az üç pozitif çözümü vardır.

4. SONUÇ

Bu tez çalışmasında zaman skalası üzerinde ikinci mertebeden impulsive sınır değer problemi ele alınmıştır. Bu problemin önce, Schauder Sabit Nokta Teoremi yardımıyla en az bir çözümünün varlığı incelenmiştir, ardından da koni üzerinde Krasnosel'skii Sabit Nokta Teoremi ve Leray-Schauder Sabit Nokta Teoremi ile en az bir pozitif çözümünün varlığı, Avery-Henderson Sabit Nokta Teoremi ile en az iki pozitif çözümünün varlığı, Beş Fonksiyonel Sabit Nokta Teoremi ile de en az üç pozitif çözümünün varlığı için yeterli koşullar incelenmiştir.

KAYNAKLAR

Avery, R., 1999: A Generalization of The Leggett-Williams Fixed Point Theorem, *Mathematical Sciences Research Hot-Line,* **3**, 9-14.

Avery, R. I., Henderson, J., 2001: Two Positive Fixed Points of Nonlinear Operators on Ordered Banach Spaces, *Comm. Appl. Nonlinear Analysis,* **8**, 27-36.

Bohner, M., Peterson, A., 2001: Dynamic Equations on Time Scales, *An Introductions With Applications*, Birkhauser, Boston.

Karaca, I. Y., and Tokmak, F., 2011: Existence of Three Positive Solutions for m-Point Time Scale Boundary Value Problems on Infinite Intervals, *Dynamic Systems and Applications,* **20**, 355-368.

Krasnosel'skii, M., 1964: *Positive Solutions of Operator Equations,* Noordhoff, Groningen.

Zhao, X., and Ge, W., 2009: Multiple Positive Solutions for Time Scale Boundary Value Problems on Infinite Intervals, *Acta. Appl. Math*., **106**, 265-273.

Zhao, X., and Ge, W., 2010: Unbounded Positive Solutions for m- Point Time Scale Boundary Value Problems on Infinite Intervals, *J. Appl. Math. Comput*., **33**, 103-123.

ÖZGEÇMİŞ

Adı	: Zehra
Soyadı	: YILMAZ
Doğum Yeri	: DALAMAN
Doğum Tarihi	: 08.07.1990
Yüksek Lisans	: Pamukkale Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Bölümü Analiz ve Fonksiyonlar Teorisi Anabilim Dalı 2013
Lisans	: Pamukkale Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü 2007-2011
Lise	: Ortaca Lisesi
İlköğretim	: Dalaman Elcik İlköğretim Okulu
Yabancı Dil	: İngilizce
Bildiği Programlar	: Fortran, C#, Matlab, SPSS
Başarılar	: Pamukkale Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü Bölüm Birinciliği 2011