T.C.
PAMUKKALE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

SOFT KÜMELER VE SOFT MODÜLLER

YÜKSEK LİSANS TEZİ

ESRA YÜZBAŞI

DENİZLİ, HAZİRAN - 2017

T.C.
PAMUKKALE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

SOFT KÜMELER VE SOFT MODÜLLER

YÜKSEK LİSANS TEZİ

ESRA YÜZBAŞI

DENİZLİ, HAZİRAN - 2017

KABUL VE ONAY SAYFASI

ESRA YÜZBAŞI tarafından hazırlanan "**SOFT KÜMELER VE SOFT MODÜLLER**" adlı tez çalışmasının savunma sınavı 30.06.2017 tarihinde yapılmış olup aşağıda verilen jüri tarafından oy birliği / ~~oy çokluğu~~ ile Pamukkale Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı Yüksek Lisans Tezi olarak kabul edilmiştir.

Jüri Üyeleri	İmza
Danışman Doç. Dr. Canan CELEP YÜCEL	....
Üye Doç. Dr. Ummahan ACAR Muğla Sıtkı Koçman Üniversitesi	....
Üye Doç. Dr. Mustafa Aşçı Pamukkale Üniversitesi	....

Pamukkale Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun 26/07/2017 tarih ve ..29/13.... sayılı kararıyla onaylanmıştır.

....

Prof. Dr. Uğur YÜCEL

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

Bu tezin tasarımı, hazırlanması, yürütülmesi, araştırmalarının yapılması ve bulgularının analizlerinde bilimsel etiğe ve akademik kurallara özenle riayet edildiğini; bu çalışmanın doğrudan birincil ürünü olmayan bulguların, verilerin ve materyallerin bilimsel etiğe uygun olarak kaynak gösterildiğini ve alıntı yapılan çalışmalara atfedildiğine beyan ederim.

ESRA YÜZBAŞI

ÖZET

SOFT KÜMELER VE SOFT MODÜLLER
YÜKSEK LİSANS TEZİ
ESRA YÜZBAŞI
PAMUKKALE ÜNİVERSİTESİ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

(TEZ DANIŞMANI: DOÇ. DR. CANAN CELEP YÜCEL)

DENİZLİ, HAZİRAN- 2017

Bu tezde, öncelikle soft kümelerin yapısı ve özellikleri incelenmiş ve bunlarla ilgili sonuçlar özetlenerek verilmiştir. Bu kapsamda ilk olarak soft kümeler üzerinde tanımlanmış olan soft gruplar, soft halkalar ve soft modüllerden oluşan cebirsel yapılar ayrıntılı olarak ele alınmış daha sonrada soft alt modül ailesinin toplamı ve direkt toplamı detaylı olarak araştırılmıştır.

ANAHTAR KELİMELER: Soft küme, soft grup, soft halka, soft modül

ABSTRACT

SOFT SETS AND SOFT MODULES
MSC THESIS
ESRA YÜZBAŞI
PAMUKKALE UNIVERSITY INSTITUTE OF SCIENCE
MATHEMATİCS

(SUPERVISOR:ASSOC. PROF. DR. CANAN CELEP YÜCEL)

DENİZLİ, HAZİRAN, 2017

In this thesis, the structure and properties of soft sets are investigated and the results related to these sets are summarized. In this context, we first discuss in detail algebraic structures consisting of soft groups, soft rings and soft modules which are defined on soft sets. Then the sum and direct sum of the collection of soft submodules are investigated in detail.

KEYWORDS: Soft sets, soft groups, soft rings, soft modules

İÇİNDEKİLER

Sayfa

SEMBOL LİSTESİ

$\boldsymbol{M}$	:	Modül
$\boldsymbol{N_i}\ (\boldsymbol{i} \in \boldsymbol{I})$	:	Alt modüllerin ailesi
$\sum_{\boldsymbol{i}\in \boldsymbol{I}} \boldsymbol{N_i}$	:	Alt modüllerin ailesinin toplamı
$\bigoplus$	:	Modüllerde direk toplam operatörü
$\boldsymbol{P}(\boldsymbol{U})$	:	$U\ nun$ kuvvet kümesi
$(\boldsymbol{F}, \boldsymbol{A})$	:	Soft küme
$(\boldsymbol{F}, \boldsymbol{A})^c$	:	(F, A) soft kümesinin tümleyeni
$\boldsymbol{Supp}(\boldsymbol{F}, \boldsymbol{A})$	:	(F, A) soft kümesinin destekleyeni
$\neg \boldsymbol{e}$	:	e parametresinin değili
$\mathbb{N}$	:	Doğal sayılar kümesi
$\mathbb{Z}$	:	Tam sayılar kümesi
$\mathbb{P}$	:	Tam sayılarda asal sayıların kümesi
$\tilde{\wedge}$	:	AND operatörü
$\tilde{\vee}$	:	OR operatörü
$\tilde{\cap}$	:	Soft kümlerin arakesiti
$\tilde{\cup}$	:	Soft kümelerin birleşimi
$\tilde{\sqcap}$	:	Soft kümelerin bi arakesiti
$\Cap$	:	Kısıtlanmış arakesit
$\widetilde{\boldsymbol{A}}$	:	(F, A) soft kümesinin mutlak soft kümesi
$<$	:	Altgrup
$\triangleleft$	:	Normal altgrup
$\leq$	:	Alt modül

ÖNSÖZ

Bu çalışmada bana her zaman destek olan, değerli bilgilerini ve tecrübesini hiçbir zaman esirgemeyen her konuda yol gösterip tüm sabrıyla yardımcı olan değerli sayın hocam Doç. Dr. Canan CELEP YÜCEL'e, ayrıca maddi manevi benden desteklerini esirgemeyen aileme sonsuz teşekkür ediyorum.

1. GİRİŞ

Klasik mantığın tanımlayamadığı belirsiz kavramların matematiksel olarak ifade edilmesinin öneminden dolayı bilim adamları her geçen gün yeni teoriler sunmaktadır. Bilinen en önemli teorilerden biri de soft kümelerdir.

Soft kümeler kavramı 1999 da Molodtsov tarafından geliştirilmiştir. Bilgisayar uygulamaları açısından önemli olan ilk uygulama Maji tarafından verilmiştir. Son zamanlarda soft kümeler teorisi üzerindeki çalışmalar artmaktadır. Soft küme teorisinin cebirsel yapıları üzerine çalışmalar her geçen gün daha çok ilgi çekmektedir.

Aktaş ve Çağman (2007) soft grupları tanımlamışlar ve gruplar ile ilişkilerini incelemişlerdir. Feng, Jun ve Zahao (2008) soft küme teorisinden yararlanarak yarı halka, soft yarı halkalar üzerinde soft idealler ve idealistik soft yarı halkaları tanımlamışlardır. Bunun yanı sıra, Acar, Koyuncu ve Tanay (2010) soft halka kavramını tanımlamışlar ve özelliklerini incelemişlerdir.

Bunların akabinde, birçok bilim adamı soft kümeler üzerinde tanımlı birçok cebirsel yapıyı araştırmıştır. Ayrıca Sun, Zhang ve Liu (2008) soft modül kavramını tanımlamışlar ve temel özelliklerini incelemişlerdir. Türkmen ve Pancar (2013) soft alt modüllerin toplamları ve direkt toplamları üzerinde durmuşlar, small soft alt modülleri ve soft modülünün radikalini tanımlamışlardır.

Biz bu çalışmada ise, soft gruplar, soft halkalar ve soft modüller üzerinde durduk.

Bu tezde, ikinci bölümde tez boyunca ihtiyaç duyulacak olan temel kavramlar ile ilgili litaratür özeti verilmiştir.

Üçüncü bölümde soft küme tanımı ve soft kümeler üzerine tanımlanan bazı işlemler verilmiştir. Bu anlamda elde edilen temel özellikler incelenmiş ve örnekler verilmiştir.

Dördüncü, beşinci ve altıncı bölümlerde sırasıyla soft küme teorisi kullanılarak elde edilen soft grup, soft halka ve soft modül cebirsel yapıları detaylı olarak incelenmiştir. Bunlarla ilgili elde edilen tüm sonuçlar araştırılmış ve örneklendirilmiştir.

2. TEMEL BİLGİLER

Bu bölümde tezin anlaşılabilirliğini kolaylaştıran ve tez boyunca ihtiyaç duyulan cebirsel yapılar ile ilgili tanım, teorem ve kavramlar verilecektir. Bu bölüm Hungerford (1974), Herstein (1969) ve Anderson, Fuller (1992) kaynaklarından yararlanılarak oluşturulmuştur.

2.1. Grup, Halka

Tanım 2.1.1: $G \neq \emptyset$ bir küme ve bu küme üzerinde bir ikili işlem $*$ olsun. Buna göre eğer aşağıdaki koşullar sağlanırsa $(G, *)$ cebirsel yapısına *bir grup* denir.

(g_1) $\forall a, b, c \in G$ için $a * (b * c) = (a * b) * c$ (Birleşme özelliği)

(g_2) $\forall a \in G$ için $a * e = e * a = a$ olacak şekilde bir $e \in G$ vardır. (Birim eleman varlığı.)

(g_3) G kümesindeki herbir a için e, $G'nin$ birim elemanı olmak üzere

$a * a' = a' * a = e$ olacak şekilde $a' \in G$ vardır. (Ters elemanın varlığı)

Buna ek olarak $\forall a, b \in G$ için $a * b = b * a$ oluyorsa *$G'ye$ değişmeli grup* denir.

Tanım 2.1.2. G bir grup ve $H \subseteq G$ olsun. Eğer $G'nin$ ikili işlemi H üzerinde de bir ikili işlem ve H bu ikili işlem ile birlikte bir grup ise, bu takdirde *$H'ye$ $G'nin$ altgrubu* denir. $H < G$ ile gösterilir.

Tanım 2.1.3. $\langle G,*\rangle$ ve $\langle H,\circ\rangle$ işlemlerine göre iki grup olsun.

$\varphi: G \to H$ fonksiyonu $\forall a, b \in G$ için,

$\varphi(a * b) = \varphi(a) \circ \varphi(b)$ şartını sağlıyorsa φ fonksiyonuna *bir grup homomorfizması* denir.

Ayrıca $\varphi: G \to H$ grup homomorfizması eğer $1-1$ ise, bu homomorfizmaya *monomorfizma*, örten ise *epimorfizma* ve $1-1$ ve örten ise $\varphi'ye$ *bir izomorfizma* denir.

Özel olarak φ homomorfizmasında $G = H$ ise *endomorfizma* denir.

Tanım 2.1.4. G bir grup ve $H < G$ olsun. Eğer $H'ın$ $G\ deki$ bütün sağ ve sol yan kümeleri eşitse, yani $\forall a \in G$ için $aH = Ha$ oluyorsa o taktirde H altgrubuna $G'nin$ *normal altgrubu* denir ve $H \lhd G$ şeklinde gösterilir.

Teorem 2.1.1. G bir grup ve $N < G$ olsun. Buna göre aşağıdaki önermeler birbirine denktir.

i. $N \lhd G$ dir.
ii. $\forall g \in G$ ve $\forall n \in N$ için $gng^{-1} \in N$ dir.
iii. $\forall g \in G$ için $gNg^{-1} \subset N$ dir.
iv. $\forall g \in G$ için $gNg^{-1} = N$ dir.
v. $\forall g \in G$ için $gN = Ng$ dir.

Tanım 2.1.5. R boştan farklı bir küme ve R üzerinde "$+$" ve "$\cdot$" ikili işlemleri tanımlanmış olsun. Bu durumda aşağıdaki koşullar sağlanıyorsa, $R'ye$ *bir halka* denir.

i. $(R, +)$ değişmeli grup
ii. $\forall a, b, c \in G$ için $a(bc) = (ab)c$
iii. $\forall a, b, c \in G$ için $a(b + c) = ab + ac$, $(b + c)a = ba + ca$

Eğer R halkasında $\forall a \in R$ için $a \cdot 1_R = 1_R \cdot a = a$ olacak şekilde $1_R \in R$ varsa $R'ye$ *birimli halka* denir ve $\forall a, b \in R$ için $a \cdot b = b \cdot a$ koşulu sağlanıyorsa $R'ye$ *değişmeli bir halka* denir.

Tanım 2.1.6. R ve S iki halka olsun. $f: R \to S$ fonksiyonu, $\forall a, b \in R$ için

i. $f(a + b) = f(a) + f(b)$
ii. $f(ab) = f(a) \cdot f(b)$

koşullarını sağlıyorsa f fonksiyonuna bir *halka homomorfizması* denir.

Tanım 2.1.7. R bir halka ve $\emptyset \neq S \subseteq R$ olsun. Eğer $\forall a, b \in S$ için $a - b \in S$ ve $a \cdot b \in S$ ise $S'ye$ $R'nin$ *althalkası* denir.

Tanım 2.1.8. R bir halka I, $R'nin$ bir althalkası olsun. Eğer, $\forall r \in R$ ve $\forall x \in I$ için, $r \cdot x \in I$ ise, $I'ya$ *sol ideal*, eğer $\forall r \in R$ ve $\forall x \in I$ için, $x \cdot r \in I$ ise, $I'ya$ *sağ ideal* denir. Eğer I, hem sağ hem de sol ideal ise $I'ya$ sadece *ideal* denir.

2.2. Modüller

Tanım 2.2.1. R herhangi bir halka olsun. M toplamsal değişmeli bir grup olmak üzere

$$R \times M \to M$$

$(r, m) \to rm$ fonksiyonu aşağıdaki özellikleri sağlarsa $M'ye$ *bir sol* $R - modül$ denir.

$\forall r, r' \in R$ ve $\forall m, m' \in M$ için,

i. $r(m + m') = rm + rm'$
ii. $(r + r')m = rm + rm'$
iii. $(rr')m = r(r'm)$

Eğer R birimli bir halka ise,

iv. $\forall m \in M$ için $1_R \cdot m = m$ olur.

Bu özelliği sağlayan $M - modülüne$ *birimsel (unitery) sol* $R - modül$ denir.

Benzer şekilde sağ $R - modül$ tanımı da yapılır.

►R değişmeli halka ise her $sol\ R - modül$ bir $sağ\ R - modüldür$.

Tanım 2.2.2. R bir halka, M bir sol(sağ) $R - modül$ ve $\emptyset \neq N \subseteq M$ olsun. Buna göre $\forall n_1, n_1' \in N$ ve $\forall r, r' \in R$ için $n_1 r + n_1' r' \in N$ $(rn_1 + r'n_1' \in N)$ koşulu sağlanıyor ise $N'ye$ $M'nin$ bir *alt modülü* denir.

Tanım 2.2.3. R bir halka ve M bir sol(sağ) $R - modül$ olsun. $M'nin$ her N alt modülü için $K \subset N \subset M$ olduğunda, $N = K$ veya $N = M$ oluyorsa $K'ya$ $M'nin$ *maximal alt modülü* denir.

Şimdi ifade edeceğimiz teorem verilen bir sol $R-modül\ M'nin$ boş olmayan herhangi bir alt kümesinin bir alt modül olup olmadığını belirtmek açısından önemli bir kriter niteliği taşır.

Teorem 2.2.1. M bir sol $R-modül, H, M'nin$ boş olmayan herhangi bir alt kümesi olsun. Buna göre aşağıdaki önermeler birbirine denktir.

i. $H, M'nin$ bir alt modülüdür.
ii. $\forall h_1, h_2 \in H$ ve $r \in R$ için $h_1 + h_2 \in H$ ve $rh_1 \in H$ dir.
iii. $\forall h_1, h_2 \in H$ ve $r \in R$ için $h_1 - h_2 \in H$ ve $rh_1 \in H$ dir.

Tanım 2.2.4. A ve B bir R halkası üzerinde tanımlı iki modül ve $f: A \to B$ bir dönüşüm olsun. Eğer $\forall a, c \in A$ ve $\forall r \in R$ için $f(a+c) = f(a) + f(c)$ ve $f(ra) = rf(a)$ koşullarını sağlıyorsa, $f'ye$ bir $R\ modül\ homomorfizmas$ı denir.

Tanım 2.2.5. R bir halka $\{M_i |\ i \in I\}$ $R-modüllerinin$ boş olmayan ailesi olsun. Eğer $P = \prod_{i\in I} M_i = \{(x_i)|\ x_i \in M_i\}$ direkt çarpımı,

$$(x_i) + (y_i) = (x_i + y_i) \quad \text{ve} \quad r(x_i) = (rx_i)$$

işlemlerini sağlıyorsa P bir sol $R-modül$ olur. $P'ye$ $\{M_i |\ i \in I\}$'lerin *direkt çarpımı* denir.

Önerme 2.2.1. M bir $R-Modül$, $\{M_i |\ i \in I\}$, $M'nin$ alt modüllerinin bir ailesi olsun. Buradan $\bigcap_{i\in I} M_i$ ve $\sum_{i\in I} M_i$, $M'nin$ alt modülleridir.

Tanım 2.2.6. M bir $R-modül$ ve $A \leq M$ olsun. Eğer $\exists B \leq M$ için $A \cap B = 0$ ve $M = A + B$ ise $M\ ye\ A$ ile $B\ nin$ *dik toplamı* denir ve $M = A \oplus B$ ile gösterilir. A ve B alt modüllerine de M nin *dik toplananları* denir.

Lemma 2.2.1. (Modüler Kuramı) N, K ve L, $M\ nin$ alt modülleri ve $N \leq K$ olsun. Buradan, $K \cap (L+N) = (K \cap L) + N$ dir.

3. SOFT KÜMELER

Soft küme tanımı ilk kez Molodtsov (1999) tarafından verildi. Molodtsov bu makalede soft küme tanımının yanında soft kümeler üzerinde tanımlanabilecek bazı işlemler için önemli bir yol gösterme ve bazı uygulama alanları hakkında genel bilgiler vermiştir. Molodtsov'un tanımını ve yol göstermesini temel alan Maji, Biswas ve Roy (2003) soft kümeler üzerinde bazı işlemler tanımlanmış ve özelliklerini incelemişlerdir.

Bu bölümde soft kümenin tanımını, özelliklerini ve soft kümeler üzerine tanımlanmış bazı işlemleri inceleyeceğiz.

3.1. Soft Kümeler ve Özellikleri

Bu bölüm boyunca U evrensel küme, E parametreler kümesi ve $P(U)$, $U'nun$ kuvvet kümesi olsun.

Tanım 3.1.1. $A \subset E$ ve $F: A \to P(U)$ küme değerli fonksiyon olmak üzere (F, A) ikilisine U kümesi üzerinde *bir soft küme* denir. (Molodtsov, 1999)

Örnek 3.1.1. U bazı evlerin kümesi, E, parametreler kümesi olsun.

$E = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$ $U = \{h_1, h_2, h_3, h_4, h_5, h_6\}$ olmak üzere, (F, E) soft kümesini alalım. $F: E \to P(U)$, $F(e_1) = \{h \in U |\ pahalılık\}$ olsun.

$e_1 = pahalılık$ $e_2 = güzellik$ $e_3 = odundan$ $e_4 = ucuz$ $e_5 = bahçeli.$

Buradan

$F(e_1) = \{h_2, h_4\}$

$F(e_2) = \{h_1, h_3\}$

$F(e_3) = \emptyset$

$F(e_4) = \{h_1, h_3, h_5\}$

$F(e_5) = \{h_1\}$ olmak üzere;

$(F, E) = \{(pahalı\ ev, \{h_2, h_4\}), (güzel\ ev, \{h_1, h_3\}), (ahşap\ ev, \emptyset),$
$(ucuz\ ev, \{h_1, h_3, h_5\}), \quad (bahçeli\ ev, \{h_1\})\}$

olarak soft kümedir.

Tanım 3.1.2. (F, A) ve (G, B), U evrensel kümesi üzerinde iki soft küme olsun. Eğer;

i. $A \subset B$
ii. Her $x \in A$ için $F(x)$ ve $G(x)$ aynı kümedir,

koşulları sağlanıyorsa $(F, A)\ ya$ $(G, B)'nin$ *bir soft alt kümesi* denir ve $(F, A) \tilde{\subseteq} (G, B)$ ile gösterilir. (Maji ve diğ., 2003)

Örnek 3.1.2. $A = \{e_1, e_3, e_5\} \subset E$ ve $B = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\} \subset E$ olsun. Açıkça $A \subset B$ dir. (F, A) ve (G, B), $U = \{h_1, h_2, h_3, h_4, h_5, h_6\}$ evrensel kümesi üzerinde iki soft küme olsun.

$$G(e_1) = \{h_2, h_4\}, G(e_2) = \{h_1, h_3\}, G(e_3) = \emptyset, G(e_4) = \{h_1, h_3, h_5\}, G(e_5) = \{h_1\}$$

ve

$F(e_1) = \{h_2, h_4\}$, $F(e_3) = \emptyset$, $F(e_5) = \{h_1\}$ olarak verilsin.

Böylece $(F, A) \tilde{\subseteq} (G, B)$ dir.

Tanım 3.1.3. (F, A) ve (G, B), U evrensel kümesi üzerinde iki soft küme olsun. Eğer $(F, A) \tilde{\subseteq} (G, B)$ ve $(G, B) \tilde{\subseteq} (F, A)$ ise (F, A) ve (G, B) *soft kümeleri eşittir.* (Maji ve diğ., 2003)

Bir soft kümenin tümleyenini tanımlayabilmek için bir parametre kümesinin değiline ihtiyaç duyarız. Bu nedenle aşağıdaki tanımı verelim.

Tanım 3.1.4. $E = \{e_1, e_2, e_3, \cdots, e_n\}$bir parametreler kümesi olsun. *E'nin değili* $\neg E$ ile ifade edilir ve $\neg E = \{\neg e_1, \neg e_2, \neg e_3, \cdots, \neg e_n\}$ ile tanımlanır. Burada her $i \in A$ için $\neg e_i = değil\ e_i$ şeklinde ifade edilir. (Maji ve diğ., 2003)

Örnek 3.1.3. Örnek 3.1.1.'deki evrensel kümeye tanım 3.1.4.'ü uygularsak;

$\neg E = \{pahalı\ değil, güzel\ değil, odundan\ değil, ucuz\ değil, bahçeli\ değil\ \}$ olur.

Önerme 3.1.1. A parametrelerin bir alt kümesi olmak üzere aşağıdaki koşullar sağlanır. (Maji ve diğ., 2003)

i. $\neg(\neg A) = A$
ii. $\neg(A \cup B) = (\neg A \cup \neg B)$
iii. $\neg(A \cap B) = (\neg A \cap \neg B)$

İspat.

i. $A = \{e_i \mid e_i \in E\}, \qquad \neg A = \{\neg e_i \mid \neg e_i \in E\}$

$\neg(\neg A) = \{\neg(\neg e_i) \mid \neg(\neg e_i) \in E\} = \{e_i \mid e_i \in E\} = A$

ii. $A \cup B = \{e_i \mid e_i \in A \tilde{\vee} e_i \in B\}$ ise

$$\begin{aligned}\neg(A \cup B) &= \neg\{e_i \mid e_i \in A \tilde{\vee} e_i \in B\} \\ &= \{\neg e_i \mid \neg e_i \in \neg A \tilde{\vee} \neg e_i \in \neg B\} \\ &= \{\neg e_i \mid \neg e_i \in \neg A\} \cup \{\neg e_i \mid \neg e_i \in \neg B\} \\ &= (\neg A \cup \neg B)\end{aligned}$$

iii. $\neg(A \cap B) = \{\neg e_i \mid \neg e_i \in \neg A \tilde{\wedge} \neg e_i \neg\in B\}$

$= (\neg A \cap \neg B)$

Tanım 3.1.5. (F, A), U evrensel kümesi üzerinde soft küme olsun. (F, A) *soft kümesinin tümleyeni* $(F, A)^c$ ile gösterilir ve $(F, A)^c = (F^c, \neg A)$ olmak üzere $F^c: \neg A \to P(U)$ fonksiyonu her $x \in \neg A$ için $F^c(x) = U - F(x)$ ile tanımlanır. (Maji ve diğ., 2003)

Örnek 3.1.4. Örnek 3.1.1'i düşünelim. Burada

$$(F, E)^c = (F^c, \neg E) = \left\{\begin{matrix} pahalı\ olmayan\ evler = \{h_1, h_3, h_5, h_6\}, \\ güzel\ olmayan\ evler = \{h_2, h_4, h_5, h_6\}, \\ ahşap\ olmayan\ evler = \{h_1, h_2, h_6\}, \\ ucuz\ olmayan\ evler = \{h_2, h_4, h_6\}, \\ bahçesi\ olmayan\ evler = \{h_2, h_3 h_4, h_5, h_6\} \end{matrix}\right\}$$

Tanım 3.1.6. (F,A), U evrensel kümesi üzerinde soft küme olsun. Eğer her $e \in E$ için, $F(e) = \emptyset$ (boş küme) ise (F,A) soft kümesine *boş soft küme* denir ve Φ ile gösterilir. (Maji ve diğ., 2003)

Örnek 3.1.5. U ahşap evlerin kümesi, A parametreler kümesi olsun. U, beş evin kümesi $U = \{h_1, h_2, h_3, h_4, h_5\}$ ve $A = \{tuğla, çamur, çelik, taş\}$ olarak verilsin.

(F,A) soft kümesi evlerin inşası, yapısı olarak tasvir edilir ve aşağıdaki gibi tanımlanır:

$F(tuğla) = Tuğladan\ yapılan\ evler$

$F(çamur) = Çamurdan\ yapılan\ evler$

$F(çelik) = Çelikten\ yapılan\ evler$

$F(taş) = Taştan\ yapılan\ evler$

Burada $(F,A) = \{Tuğladan\ yapılan\ evler = \emptyset, Çamurdan\ yapılan\ evler = \emptyset, Çelikten\ yapılan\ evler = \emptyset, Taştan\ yapılan\ evler = \emptyset\}$ olur. Böylece (F,A) boş soft kümedir.

Tanım 3.1.7. (F,A), U üzerinde bir soft küme olsun. Eğer her $e \in E$ için $F(e) = U$ ise (F,A) soft kümesine A *mutlak soft küme* denir ve $\tilde{A}$ ile gösterilir. $\tilde{A}^c = \Phi$ ve $\tilde{\Phi}^c = \tilde{A}$ olur. (Maji ve diğ., 2003)

Örnek 3.1.6. U ahşap evlerin kümesi, B parametreler kümesi olsun. U odundan beş evin evrensel kümesi $U = \{h_1, h_2, h_3, h_4, h_5\}$ ve B parametreler kümesi,

$$B = \{tuğladan\ değil, çamurdan\ değil, çelikten\ değil, taştan\ değil\}$$

(G,B) soft kümesi evlerin inşaatı, yapısı olarak tasvir edilir ve aşağıdaki gibi tanımlanır;

$G(tuğladan\ değil) = Tuğladan\ yapılmayan\ evler$

$G(çamurdan\ değil) = Çamurdan\ yapılmayan\ evler$

$G(çelikten\ değil) = Çelikten\ yapılmayan\ evler$

$G(taştan\ değil) = \ Taştan\ yapılmayan\ evler$

$$(G,B) = \{tuğladan\ yapılmayan\ evler = \{h_1,h_2,h_3,h_4,h_5\},\ çamurdan\ yapılmayan\ evler = \{h_1,h_2,h_3,h_4,h_5\},\ çelikten\ yapılmayan\ evler = \{h_1,h_2,h_3,h_4,h_5\},\ taştan\ yapılmayan\ evler = \{h_1,h_2,h_3,h_4,h_5\}\}$$

olur.

Böylece (G,B) $B\ mutlak\ soft\ küme$ olur.

Şimdi klasik işlemlerden farklı olarak $\tilde{\vee}$ (OR) ve $\tilde{\wedge}$ (AND) işlemlerini tanımlayalım.

3.2. Soft Kümeler Üzerinde İşlemler

Molodtsov (1999) öncülüğünde, soft kümelerle ilgili çalışmalar hızla devam etmiştir. Maji, Biswas, Roy (2003) ve Molodtsov (1999) makalelerinde, (F,A) ve (G,B), U evrensel kümesi üzerinde soft kümeler olmak üzere

$(F,A) * (G,B) = (H, A \times B)$ şeklinde bir " $*$ " işlemi tanımlanmıştır.

Burada $\alpha \in A$, $\beta \in B$ ve $A \times B$, A ve B kümelerinin kartezyen çarpımı olmak üzere $H(\alpha,\beta) = F(\alpha) * G(\beta)$ dır. Bu ifadeden yola çıkarak, iki soft küme arasında $\tilde{\vee}$ (OR) ve $\tilde{\wedge}$ (AND) operasyonları tanımlanmıştır.

Tanım 3.2.1. (F,A) ve (G,B), U evrensel kümesi üzerinde iki soft küme olsun. $(F,A)\,\mathrm{AND}\,(G,B)$ kümesi $(F,A)\tilde{\wedge}(G,B)$ ile gösterilir ve $(F,A)\tilde{\wedge}(G,B) = (H, A \times B)$ ile tanımlanır. Burada her $(\alpha,\beta) \in (A \times B)$ için, $H(\alpha,\beta) = F(\alpha) \cap G(\beta)$ dir. (Maji ve diğ., 2003)

Örnek 3.2.1. (F,A) soft kümelerdeki evlerin fiyatları ve (G,B) soft kümelerdeki evlerin özellikleri ile tasvir edilsin

$U = \{h_1,h_2,h_3,h_4,h_5,h_6,h_7,h_8,h_9,h_{10}\}$

$A = \{çok\ pahalı, pahalı, ucuz\}$ $B = \{güzel, bahçeli, ucuz\}$ kabul edelim.

$F(çok\ pahalı) = \{h_2, h_4, h_7, h_8\}$ $G(güzel) = \{h_2, h_3, h_7\}$

$F(pahalı) = \{h_1, h_3, h_5\}$ $G(bahçeli) = \{h_5, h_6, h_8\}$

$F(ucuz) = \{h_6, h_9, h_{10}\}$ $G(ucuz) = \{h_6, h_9, h_{10}\}$

olsun. Buradan;

$(F, A)\tilde{\wedge}(G, B) = (H, A \times B)$ olur ki, burada;

$H(çok\ pahalı, güzel) = \{h_2, h_7\}$

$H(çok\ pahalı, bahçeli) = \{h_8\}$

$H(çok\ pahalı, ucuz) = \emptyset$

$H(pahalı, güzel) = \{h_3\}$

$H(pahalı, bahçeli) = \{h_5\}$

$H(pahalı, ucuz) = \emptyset$

$H(ucuz, güzel) = \{\emptyset\}$

$H(ucuz, bahçeli) = \{h_6\}$

$H(ucuz, ucuz) = \{h_6, h_9, h_{10}\}$ örnekleri verilebilir.

Tanım 3.2.2. (F, A) ve (G, B), U evrensel kümesi üzerinde iki soft küme olsun. (F, A)OR(G, B) kümesi $(FA)\tilde{\vee}(G, B)$ ile gösterilir ve $(FA)\tilde{\vee}(G, B) = (H, A \times B)$ ile tanımlanır. Burada her $(\alpha, \beta) \in (A \times B)$ için, $H(\alpha, \beta) = F(\alpha) \cup G(\beta)$ dır. (Maji ve diğ., 2003)

Örnek 3.2.2. $(F, A)\tilde{\vee}(G, B) = (H, A \times B)$ tanımını bir önceki örneğe uygulayarak aşağıdaki örnekleri verelim;

$H(çok\ pahalı, güzel) = \{h_2, h_3, h_4, h_7, h_8\}$

$H(çok\ pahalı, bahçeli) = \{h_2, h_4, h_5, h_6, h_7, h_8\}$

$H(çok\ pahalı, ucuz) = \{h_2, h_4, h_5, h_6, h_7, h_8, h_9, h_{10}\}$

$H(pahalı, güzel) = \{h_1, h_2, h_3, h_4, h_7\}$

$H(pahalı, ucuz) = \{h_1, h_3, h_5, h_6, h_9, h_{10}\}$

$H(pahalı, bahçeli) = \{h_1, h_3, h_5, h_6, h_8\}$

$H(ucuz, güzel) = \{h_2, h_3, h_6, h_7, h_9, h_{10}\}$

$H(ucuz, bahçeli) = \{h_5, h_6, h_8, h_9, h_{10}\}$

$H(ucuz, ucuz) = \{h_6, h_9, h_{10}\}$

Klasik kümelerdeki De Morgan kurallarının bu operatörlere uygulanışını görelim.

Önerme 3.2.1. (F, A) ve (G, B), U evrensel küme üzerinde iki soft küme olsun. O halde aşağıdaki eşitlikler sağlanır. (Maji ve diğ., 2003)

i. $((FA)\tilde{\vee}(G, B))^c = (F, A)^c \tilde{\wedge} (G, B)^c$
ii. $((FA)\tilde{\wedge}(G, B))^c = (F, A)^c \tilde{\vee} (G, B)^c$

İspat:

i. $(FA)\tilde{\vee}(G, B) = (H, A \times B)$ olsun. Buradan,

$((FA)\tilde{\vee}(G, B))^c = (H, A \times B)^c = \big(H^c, \neg(A \times B)\big)$ olur.

$(F, A)^c \tilde{\wedge} (G, B)^c = (F^c, \neg A) \tilde{\wedge} (G^c, \neg B)$

$= (J, \neg A \times \neg B)$, $\quad J(x, y) = F^c(x) \cap G^c(y)$ dir.

$= \big(J, \neg(A \times B)\big)$

Şimdi $(\neg\alpha, \neg\beta) \in \neg(A \times B)$ ele alalım. Buradan,

$H^c(\neg\alpha, \neg\beta) = U - H(\alpha, \beta)$

$= U - [F(\alpha) \cup G(\beta)]$

$= [U - F(\alpha)] \cap [U - G(\beta)]$

$= F^c(\neg\alpha) \cap G^c(\neg\beta) = J(\neg\alpha, \neg\beta)$

Böylece $H^c = J$ olduğu görülür. Yani,

$((FA)\tilde{\vee}(G, B))^c = (F, A)^c \tilde{\wedge} (G, B)^c$ dir.

ii. $(FA)\tilde{\wedge}(G,B) = (H, A \times B)$ olsun. Bu durumda,

$((FA)\tilde{\wedge}(G,B))^c = (H, A \times B)^c = \left(H^c, \neg(A \times B)\right)$ dir. Diğer taraftan,

$$(F,A)^c \tilde{\vee} (G,B)^c = (F^c, \neg A)\tilde{\vee}(G^c, \neg B) = (K, \neg A \times \neg B)$$
$$= \left(K, \neg(A \times B)\right)$$

Şimdi $(\neg\alpha, \neg\beta) \in \neg(A \times B)$ ele alalım. Buradan,

$$H^c(\neg\alpha, \neg\beta) = U - H(\alpha,\beta) = U - [F(\alpha) \cap G(\beta)]$$
$$= [U - F(\alpha)] \cup [U - G(\beta)]$$
$$= F^c(\neg\alpha) \cup G^c(\neg\beta) = K(\neg\alpha, \neg\beta)$$

Böylece $H^c = K$ olduğu görülür. Yani, $((FA)\tilde{\wedge}(G,B))^c = (F,A)^c \tilde{\vee} (G,B)^c$ dir.

Şimdi soft kümelerdeki birleşim ve kesişimi tanımlayalım. Bunlar tanımlanırken, parametrelerin hangi kümeye ait olduğu önemlidir. Parametrelerin bulunduğu yere göre parçalı fonksiyon ile tanımlanır.

Tanım 3.2.3. (F,A) ve (G,B), U evrensel küme üzerinde iki soft küme olsun. Buna göre, $C = A \cup B$ olmak üzere $\forall e \in C$ için,

$$H(e) = \begin{cases} F(e), & e \in A - B \\ G(e), & e \in B - A \\ F(e) \cup G(e), & e \in A \cap B \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan (H,C) soft kümesine (F,A) ile (G,B) *soft kümelerinin birleşimi* denir ve $(F,A)\ \tilde{\cup}\ (G,B) = (H,C)$ şeklinde gösterilir. (Maji ve diğ., 2003)

Tanım 3.2.4. (F,A) ve (G,B) , U evrensel küme üzerinde iki soft küme olsun. $C = A \cap B$ olmak üzere $\forall e \in C$ için $H(e) = F(e)$ veya $G(e)$ şeklinde tanımlanan (H,C) soft kümesine (F,A) ile (G,B) *soft kümelerinin arakesiti* denir ve $(F,A)\ \tilde{\cap}\ (G,B) = (H,C)$ şeklinde gösterilir. (Maji ve diğ., 2003)

Önerme 3.2.2. (F,A) , U evrensel küme üzerinde bir soft küme olmak üzere, aşağıdaki ifadeler sağlanır. (Maji ve diğ., 2003)

i. $(F,A)\ \tilde{\cup}\ (F,A) = (F,A)$

ii. $(F, A) \tilde{\cap} (F, A) = (F, A)$

iii. $(F, A) \tilde{\cup} \Phi = \Phi$

iv. $(F, A) \tilde{\cap} \Phi = \Phi$

v. $(F, A) \tilde{\cup} \tilde{A} = \tilde{A}$

vi. $(F, A) \tilde{\cap} \tilde{A} = (F, A)$

Önerme 3.2.3. (F, A) ve (G, B) , U evrensel küme üzerinde iki soft küme olsun. Bu durumda aşağıdaki eşitlikler sağlanır. (Maji ve diğ., 2003)

i. $((FA) \tilde{\cup} (G, B))^c = (F, A)^c \tilde{\cup} (G, B)^c$

ii. $((FA) \tilde{\cap} (G, B))^c = (F, A)^c \tilde{\cap} (G, B)^c$

İspat. Tanım 3.2.3. ve Tanım 3.2.4. kullanılarak ispat kolayca görülür.

Tanım 3.2.5. (α, A) ve (β, B) aynı U evrensel kümesi üzerinde soft kümeler olsun. Buna göre; $C = A \cap B$ ve $\forall x \in C$ için $\gamma(x) = \alpha(x) \cap \beta(x)$ ile tanımlı $\gamma: C \to \delta(U)$ dönüşümü ile verilen ve aynı U evrensel kümesi üzerinde soft küme olan (γ, C) , (α, A) ve (β, B) soft kümelerinin *bi-arakesiti* olarak adlandırılır ve $(\alpha, A) \tilde{\sqcap} (\beta, B) = (\gamma, C)$ ile gösterilir. (Feng ve diğ. 2008)

4. SOFT GRUPLAR

Bu bölümde ilk olarak Aktaş ve Çağman (2007) tarafından tanımlanan soft grupları ve temel özelliklerini inceleyeceğiz.

4.1. Soft Gruplar ve Özellikleri

Burada G bir grup ve E parametreler kümesi, $A \subseteq E$ ve $F: A \rightarrow P(G)$ fonksiyon, R ise $A'nın$ bir elemanı ve $G'nin$ bir elemanına bağlı bir ikili bağıntı olarak alınacaktır.

Tanım 4.1.1. (F, A) $G'de$ bir soft küme olsun. Eğer $\forall x \in A$ için $F(x)$, $G'nin$ altgrubu $(F(x) < G)$ oluyor ise, $(F, A)'ya$ G üzerinde *bir soft grup* denir. (Aktaş ve Çağman, 2007)

Örnek 4.1.1. $G = A = S_3 = \{e, (12), (13), (23), (123), (132)\}$ ve

$F(x) = \{y \in G \mid xRy \Leftrightarrow y = x^n, n \in N\}$ küme değerli fonksiyon tanımlansın.

Bu durumda;

$F(e) = \{e\}$ $F(12) = \{e, (12)\}$ $F(13) = \{e, (13)\}$ $F(23) = \{e, (23)\}$ ve

$F(123) = F(132) = \{e, (123), (132)\}$ şeklinde olur. Buradan her $x \in A$ için $F(x)$, $G'nin$ altgrupları olduğundan (F, A), G üzerinde bir soft gruptur.

Teorem 4.1.1. (F, A) ve (H, A), G üzerinde iki soft grup olsun. Bu durumda arakesitleri $(F, A) \tilde{\cap} (H, A)$ da G de bir soft gruptur. (Aktaş ve Çağman, 2007)

İspat. Soft kümeler üzerindeki arakesit tanımından, $C = A \cap A = A$ ve $\forall x \in C$ için $U(x) = F(x)$ veya $U(x) = H(x)$ olmak üzere $(F, A) \tilde{\cap} (H, A) = (U, C)$ dir. Burada $U: A \rightarrow P(G)$ şeklinde bir fonksiyondur. Böylece (U, A), G üzerinde bir soft kümedir. (F, A) ve (H, A), G üzerinde iki soft grup olduğundan $\forall x \in A$ için

$U(x) = F(x) < G$ veya $U(x) = H(x) < G$ dir. Böylece $(F, A) \tilde{\cap} (H, A)$, G üzerinde bir soft gruptur.

Teorem 4.1.2. (F, A) ve (H, B), G üzerinde iki soft grup olsun. Eğer $A \cap B = \emptyset$ ise, o halde $(F, A) \tilde{\cup} (H, B)$, G üzerinde bir soft gruptur. (Aktaş ve Çağman, 2007)

İspat. $C = A \cup B$ ve $U: A \to P(G)$ bir dönüşüm olmak üzere $(F, A) \tilde{\cup} (H, B) = (U, C)$ şeklinde alalım. $A \cap B = \emptyset$ olduğundan $\forall x \in C$ için $x \in A - B$ veya $x \in B - A$ dır. Eğer $x \in A - B$ ise $U(x) = F(x) < G$ dir. Eğer $x \in B - A$ ise $U(x) = H(x) < G$ dir. Böylece $(F, A) \tilde{\cup} (H, B)$, G de soft gruptur.

Teorem 4.1.3. (F, A) ve (H, B), G üzerinde iki soft grup olsun. Bu durumda $(F, A) \tilde{\wedge} (H, B)$, G üzerinde bir soft gruptur. (Aktaş ve Çağman, 2007)

İspat. $\forall(\alpha, \beta) \in A \times B$ olmak üzere $U(\alpha, \beta) = F(\alpha) \cap H(\beta)$ olacak şekilde $(F, A) \tilde{\wedge} (H, B) = (U, A \times B)$ alalım. $F(\alpha)$ ve $H(\beta)$, $G'nin$ altgrupları olduğundan $F(\alpha) \cap H(\beta)$, $G\ nin$ bir altgrubudur. Bu durumda $\forall(\alpha, \beta) \in A \times B$ için $U(\alpha, \beta)$, $G\ nin$ bir altgrubudur. Böylece $(F, A) \tilde{\wedge} (H, B)$, G üzerinde bir soft gruptur.

Tanım 4.1.2. $A \cap B \neq \emptyset$ olmak üzere (F, A) ve (H, B), G üzerinde iki soft grup olsun. $\forall x \in A \cap B$ için $C(x) = F(x) \cap H(x)$ olmak üzere $(F, A) \Cap (H, B) = (C, A \cap B)$ ile tanımlı ifadeye (F, A) ve $(H, B)\ nin$ *kısıtlanmış kesişimleri* denir. (Irfan, 2009)

Teorem 4.1.4. (F, A) ve (H, B), G üzerinde iki soft grup olsun. Bunların kısıtlanmış kesişimi $(F, A) \Cap (H, B)$, $G\ de$ bir soft gruptur. (Aslan ve Qurashi, 2012)

İspat. $C = A \cap B \neq \emptyset$ olmak üzere (F, A) ve (H, B), G üzerinde iki soft grup, (F, A) ve $(H, B)\ nin$, $G\ deki$ kısıtlanmış kesişimleri (L, C) olsun. $\forall c \in C$ için $F(c)$ ve $H(c)$, $G\ nin$ altgrupları olduğu için $F(c) \cap H(c)$, $G\ nin$ altgrubudur. Buradan

$(L, C) = (F, A) \Cap (H, B)$, $G\ de$ bir soft gruptur.

Tanım 4.1.3. (F, A), G üzerinde bir soft küme olsun. Bu durumda,

i. e, $G'nin$ birim elemanı olmak üzere, $\forall x \in A$ için $F(x) = \{e\}$ ise (F, A) soft kümesine G üzerinde *birimsel soft grup* denir.
ii. $\forall x \in A$ için $F(x) = G$ ise (F, A) soft kümesine G üzerinde *tam (absolute) soft grup* denir. (Aktaş ve Çağman, 2007)

Teorem 4.1.5.

i. (F, A), G üzerinde bir soft küme ve $f: G \to K$ bir homomorfizma olsun. $\forall x \in A$ için $F(x) = Kerf$ ise $(f(F), A)$, K üzerinde birimsel soft gruptur.

ii. (F, A), G üzerinde tam (absolute) soft grup ve $f: G \to K$ bir homomorfizma olsun. Bu durumda $(f(F), A)$, K üzerinde tam (absolute) soft gruptur. (Aktaş ve Çağman, 2007)

İspat.

i. e_K, K'$nın$ birim elemanı olmak üzere, $\forall x \in A$ için $f(F(x)) = e_K$ dır. Tanım 4.1.3. (i) den $(f(F(A))$, K üzerinde birimsel soft gruptur.

ii. (F, A), G üzerinde tam (absolute) soft grup olduğundan, $\forall x \in A$ için $F(x) = G$ dir. Bu durumda $\forall x \in A$ için $f(F(x)) = f(G) = K$ elde edilir. Böylece tanım 4.1.3. (ii) den $(f(F), A)$, K üzerinde tam (absolute) soft gruptur.

4.2. Soft Altgruplar

Tanım 4.2.1. (F, A) ve (H, K), G üzerinde iki soft grup olsun. Bu durumda

i. $K \subset A$

ii. $\forall x \in K$ için $H(x) < F(x)$

koşulları sağlanıyor ise $(H, K)'\ ya$ (F, A)'*nın soft altgrubu* denir ve $(H, K) \widetilde{<} (F, A)$ ile gösterilir. (Aktaş ve Çağman, 2007)

Birimsel ve tam (absolute) soft gruplar aşikar soft altgruplardır.

Örnek 4.2.1. $G = S_3$, $A = S_3$, $K = A_3$ olsun.

$F(x) = \{y \in S_3 \mid xRy \Leftrightarrow y = x^n, n \in N\}$ ve

$H(x) = \{y \in A_3 \mid xRy \Leftrightarrow y \in \langle x \rangle\}$ şeklinde tanımlanırsa

$A_3 \subset S_3$ ve $\forall x \in A_3$ için $H(x) < F(x)$ olduğundan $(H, K) \tilde{<} (F, A)$ dır.

Şimdi de soft altgrup kavramı kullanarak, klasik altgrupların özelliklerine benzer olan soft altgrupların bazı özelliklerinden bahsedelim.

Teorem 4.2.1.

i. (F, A) ve (H, A), $G\ de$ iki soft grup olsunlar. $\forall x \in A$ için $F(x) \subseteq H(x)$ ise (F, A), (H, A)'$nın$ soft altgrubudur.
ii. $E = \{e\}$ olmak üzere (F, E) ve (F, G), G üzerinde soft gruplar ise $(F, E) \tilde{<} (F, G)$ dir. (Aktaş ve Çağman, 2007)

İspat. Tanım 4.2.1.'den açıktır.

Sonuç 4.2.1. (F, G), G üzerinde soft grup ise, bu durumda $E = \{e\}$ olmak üzere (F, G) ve (F, E), (F, G)'nin soft altgruplarıdır.

İspat. İspatı Tanım 4.2.1.'den kolayca görülür.

Teorem 4.2.2 (F, A) , G üzerinde soft grup ve I indis kümesi olmak üzere $\{(H_i, K_i) \mid i \in I\}$, (F, A)'$nın$ soft altgruplarının boştan farklı bir ailesi olsun. Bu durumda

i. $\bigcap_{i \in I}(H_i, K_i)$, (F, A)'$nın$ soft altgrubu
ii. $\bigwedge_{i \in I}(H_i, K_i)$, (F, A)'$nın$ soft altgrubu
iii. $\forall i, j \in I$ için $K_i \cap K_j = \emptyset$ olmak üzere $\bigvee_{i \in I}(H_i, K_i)$ (F, A)'$nın$ soft altgrubudur. (Aktaş ve Çağman, 2007)

İspat.

i. $\forall i \in I$ için $K_i \subset A$ olduğundan $\bigcap_{i \in I} K_i \subset A$ olur. Ayrıca $\forall i \in I$ için $(H_i, K_i) \tilde{<} (F, A)$ olduğundan $H_i(x) < F(x)$ olup $\cap H_i < F(x)$ bulunur. O halde $\bigcap_{i \in I}(H_i, K_i)$, (F, A)'$nın$ soft altgrubudur.

Benzer şekilde Tanım 3.2.1. ,Tanım 3.2.2. ve Teorem 4.1.1. , Teorem 4.1.2. kullanılarak ii. ve iii. koşullarıda ispatlanır.

Teorem 4.2.3. (F,A) ve (H,B), G üzerinde iki soft grup ve (F,A), $(H,B)'nin$ soft altgrubu olsun. f, $G\ den\ K\ ya$ bir homomorfizma ise $(f(F),A)$ ve $(f(H),B)$, K üzerinde soft altgruplardır ve üstelik $(f(F),A)$, $(f(H),B)'nin$ soft altgrubudur. (Aktaş ve Çağman, 2007)

İspat. f, $G\ den\ K\ ya$ homomorfizma olduğundan, $\forall x \in A$ ve $\forall y \in B$ için $f(F(x))$ ve $f(H(y))$ $K'nın$ altgruplarıdır. Böylece $(f(F),A)$ ve $(f(H),B)$ K üzerine soft gruplardır. Eğer (F,A), $(H,B)\ nin$ soft altgrubu ise, o zaman $\forall x \in A$ için $F(x)$, $H(x)'in$ altgrubudur ve $f\big(F(x)\big)$, $f(H(x))'in$ altgrubudur. Tanım 4.2.1. den $(f(F),A) \lesssim (f(H),B)$ elde edilir.

Tanım 4.2.2. (F,A) ve (H,B) sırasıyla G ve K üzerinde iki soft grup ve $f: G \to K$ ve $g: A \to B$ iki fonksiyon olsunlar. Bu durumda

i. f, $G\ den\ K$ üzerine homomorfizma
ii. g, $A\ dan\ B$ üzerine bir dönüşüm
iii. $\forall x \in A$ için $f(F(x)) = H(g(x))$

koşulları sağlanırsa (f,g) *ye soft homomorfizma* ve (F,A), $(H,B)'$ *ye soft homomorfiktir* denir. (F,A), $(H,B)\ ye$ soft homomorfik ise $(F,A) \sim (H,B)$ ile gösterilir. Bu tanımda, f, $G\ den\ K\ ya$ izomorfizma ve g, $A\ dan\ B$ üzerine birebir dönüşüm ise bu durumda (f,g) *ye soft izomorfizma* ve (F,A), (H,B) *ye soft izomorfiktir* denir. (F,A), $(H,B)\ ye$ soft izomorfik ise $(F,A) \cong (H,B)$ ile gösterilir. (Aktaş ve Çağman, 2007)

Örnek 4.2.2. $(Z,+)$ ve $(Z_m,\oplus)$ gruplarını alalım. $Z\ den\ Z_m$ üzerine, $k \in Z$ olmak üzere $f(k) = \bar{k}$ şeklinde bir homomorfizma ve $Z^+\ dan\ Z_m$ üzerine $k \in Z^+$ olmak üzere $g(k) = \bar{k}$ şeklinde bir dönüşüm vardır.

$F: Z^+ \to P(Z)$, $F(x) = \{y \in Z: y = 5kx, k \in Z\}$ şeklinde

$H: Z_m \to P(Z_m)$, $H(u) = \{\bar{y} \in Z_m: y = uk, k \in 5Z\}$ olarak dönüşümleri tanımlansın. Bu durumda $F(x) = 5xZ$ ve $H(u) = \{\overline{ku}: k \in 5Z\}$ elde edilir. Açıkça (F,Z^+) ve (H,Z_m), sırasıyla Z ve Z_m üzerinde soft gruplardır.

$f(F(x)) = \{\, \overline{5xk} \mid k \in Z\}$ ve $H(g(x)) = \{\overline{xs} \mid s \in 5Z\}$ olduğundan $f(F(x)) = H(g(x))$ olduğu görülür. Böylece (f, g) bir soft homomorfizmadir ve (F, Z^{+}), $(H, Z_m)'ye$ soft homomorfiktir.

Tanım 4.2.3. (F, A) ve (H, B), sırasıyla G ve K üzerinde iki soft grup olsun. $\forall(x, y) \in A \times B$ için $U(x, y) = F(x) \times H(y)$ olmak üzere (F, A) ve (H, B) *soft gruplarının çarpımı* $(F, A) \times (H, B) = (U, A \times B)$ olarak tanımlanır. (Aktaş ve Çağman, 2007)

Teorem 4.2.4. (F, A) ve (H, B), sırasıyla G ve K üzerinde iki soft grup olsun. O halde bunların çarpımları olan $(F, A) \times (H, B)$, $G \times K$ üzerinde bir soft gruptur. (Aktaş ve Çağman, 2007)

İspat. (F, A) ve (H, B), sırasıyla G ve K üzerinde iki soft grup olduğundan $F(x) < G$ ve $H(y) < K$ dır. Buradan $\forall(x, y) \in A \times B$ için $U(x, y) = F(x) \times H(y) < A \times B$ olduğu kolayca görülür. Böylece $(F, A) \times (H, B)$, $G \times K$ üzerinde bir soft gruptur.

4.3. Normal Soft Altgruplar

Tanım 4.3.1. (F, A), G üzerinde bir soft grup ve (H, B), $(F, A)'nın$ soft altgrubu olsun. $\forall x \in B$ için $H(x)$, $F(x)'in$ normal altgrubu ise $(H, B)'ye$ (F, A) *nın normal soft alt grubu* denir ve $(H, B)\tilde{\triangleleft}(F, A)$ ile gösterilir. (Aktaş ve Çağman, 2007)

Teorem 4.3.1. (F, A), G üzerinde soft grup ve I indis kümesi olmak üzere $\{(H_i, K_i) \mid i \in I\}$, (F, A) $nın$ normal soft gruplarının boştan farklı bir ailesi olsun. Bu durumda,

i. $\cap_{i \in I}(H_i, K_i)$, (F, A) $nın$ normal soft altgrubudur.
ii. $\wedge_{i \in I}(H_i, K_i)$, (F, A) $nın$ normal soft altgrubudur.
iii. $\forall i, j \in I$ için $Ki \cap Ki = \emptyset$ ise, $\vee_{i \in I}(H_i, K_i)$, (F, A) $nın$ normal soft altgrubudur. (Aktaş ve Çağman, 2007)

İspat. Tanım 4.3.1 ve teorem 4.2.2.den ispat kolayca elde edilir.

Teorem 4.3.2. (F, A) ve (H, B) , $G\ de$ iki normal soft grup olsun. Kısıtlanmış kesişimleri olan $(F, A) \Cap (H, B)$ de $G\ de$ normal soft altgruptur. (Aslam ve Qurashi, 2012)

İspat. $C = A \cap B \neq \emptyset$ olmak üzere (F, A) ve (H, B), $G\ de$ iki normal soft grupların $G\ deki$ kısıtlanmış kesişimleri (L, C) olsun. $\forall x \in C$ için $F(x)$ ve $H(x)$ $G\ de$ normal altgruplardır. Normal altgrupların kesişimleride normal altgrup olduğundan $F(x) \cap H(x)$, $G\ de$ normal altgruptur. Buradan $(F, A) \Cap (H, B)$ de $G\ de$ normal soft altgruptur.

Teorem 4.3.3. (F, A), $G\ de$ soft grup olsun. Eğer (H, B), $(F, A)\ nın$ bir soft altgrubu, (K, B), $(F, A)\ nın$ bir normal soft altgrubu ise $(H, B) \Cap (K, B)$, $(H, B)\ nin$ normal soft altgrubudur. (Aslam ve Qurashi, 2012)

İspat. (H, B) ve $(K, B)\ nin$ kısıtlanmış kesişimleri $(H, B) \Cap (K, B) = (L, B)$ olsun. (L, B), $(F, A)\ nın$ soft altgrubu olduğundan $(L, B) \tilde{\subset} (H, B)$ olduğu açıktır. Buradan (L, B), $(H, B)\ nin$ bir soft altgrubudur.

Şimdi $(L, B) \lhd (H, B)$ olduğunu gösterelim. Bunun için $\forall b \in B$ için $H(b) \cap K(b) \lhd H(b)$ olduğunu göstermeliyiz. $\forall b \in B$ için $H(b) \cap K(b)$, $H(b)'nin$ normal altgrubu olduğu kolayca görülür. Dolayısıyla $(H, B) \Cap (K, B) = (L, B)$, $(H, B)\ nin$ normal soft altgrubudur.

Teorem 4.3.4. (F, A) , G de bir soft grup ve I bir indis kümesi olmak üzere $\{(H_i, B_i) \mid i \in I\}$ ailesi $(F, A)\ nın$ normal soft altgrup ailesi olsun. Kısıtlanmış kesişimleri $\Cap_{i \in I} (H_i, B_i)$, $(F, A)\ nın$ bir normal soft altgrubudur. (Aslam ve Qurashi, 2012)

İspat. $\forall i \in I$ için $(H_i, B_i) \lhd (F, A)$ olduğu için $(H_i, B_i) \tilde{<} (F, A)$ olur. $H_i(x) < F(x)$ olduğundan $H_i(x) \lhd F(x)$ dir. Böylece $\cap\, H_i \lhd F(x)$ olur. Buradan kısıtlanmış kesişim tanımından $\Cap_{i \in I} (H_i, B_i)$, $(F, A)\ nın$ bir normal soft altgrubu olduğu elde edilebilir.

5. SOFT HALKALAR

Soft halkalar ilk olarak Acar, Koyuncu ve Tanay tarafından 2010 yılında tanımlanmıştır. Daha sonra bu alanda çalışmalar devam etmiştir. Bu bölümde soft halkalar, soft idealler ile ilgili elde edilen sonuçları vereceğiz.

5.1. Soft Halkalar ve Özellikleri

Bu bölümde R değişmeli bir halka olarak alınacaktır.

Tanım 5.1.1. (F, A), R üzerinde boştan farklı bir soft küme olsun. $\forall x \in A$ için $F(x)$, $R'nin$ bir althalkası ise bu durumda (F, A) ya, R üzerinde $bir\ soft\ halka$ denir. (Acar ve diğ. 2010)

Örnek 5.1.1. $R = A = Z_6 = \{0,1,2,3,4,5\}$ ve

$F(x) = \{y \in R\ |xRy \Leftrightarrow x.y = 0\}$ küme değerli fonksiyonu ele alalım. Bu durumda $F(0) = R$, $F(1) = \{0\}$, $F(2) = \{0,3\}$, $F(3) = \{0,2,4\}$, $F(4) = \{0,3\}$ ve $F(5) = \{0\}$ elde edilir. Burada $\forall x \in A$ için $F(x)$, $R'nin$ althalkasıdır. Böylece (F, A), R üzerinde bir soft halkadır.

Teorem 5.1.1.(F, A) ve (G, B), R üzerinde iki soft halka olsun. Bu durumda,

i. $(F, A)\tilde{\wedge}(G, B)$, R üzerinde bir soft halkadır.
ii. $(F, A)\ \tilde{\sqcap}\ (G, B)$ bi- arakesiti R üzerinde bir soft halkadır. (Acar ve diğ. 2010)

İspat.

i. Tanım 3.2.1. den , $C = A \times B$ ve $\forall(a, b) \in C$ için $H(a, b) = F(a) \cap G(b)$ olmak üzere $(F, A)\tilde{\wedge}(G, B) = (H, C)$ yazılabilir. $F(a)$ ve $G(b)$, $R'nin$ althalkaları olduğundan $F(a) \cap G(b)$ de $R'nin$ althalkasıdır. Bu durumda $\forall(a, b) \in C$ için $H(a, b) = F(a) \cap G(b)$, $R'nin$ althalkasıdır. Böylece $(F, A)\tilde{\wedge}(G, B)$, R üzerinde bir soft halkadır.

ii. $C = A \cap B$ olmak üzere $x \in C$ için $H(x) = F(x) \cap G(x)$ olacak şekilde $(F, A) \tilde{\sqcap} (G, B) = (H, C)$ yazalım. $F(x)$ ve $G(x)$, R'nin althalkaları olduğundan $H(x) = F(x) \cap G(x)$ de R'nin althalkasıdır. Sonuç olarak $(F, A) \tilde{\sqcap} (G, B) = (H, C)$ bi-arakesiti R üzerinde bir soft halkadır.

Tanım 5.1.2. (F, A), U üzerinde bir soft küme olsun.

$Supp(F, A) = \{x \in A \mid F(x) \neq \emptyset\}$ kümesine, (F, A) *soft kümesinin destekleyeni* denir. Destekleyeni boş kümeye eşit olmayan soft kümeye *boş olmayan soft küme* denir. (Acar ve diğ. 2010)

Tanım 5.1.3. (F, A) ve (G, B), R üzerinde iki soft halka olsun. Bu durumda

i. $B \subset A$ ve
ii. $\forall x \in supp(G, B)$ için $G(x)$, $F(x)'in$ althalkası

koşulları sağlanıyor ise $(G, B)'ye$ (F, A)'$nın$ *soft althalkası* denir. (Acar ve diğ. 2010)

Örnek 5.1.2. $R = A = 2Z$ ve $B = 6Z \subset A$ olsun.

$F(x) = \{nx \mid n \in Z\}$ ve $G(x) = \{5nx \mid n \in Z\}$ şeklinde tanımlı

$F: A \to P(R)$ ve $G: B \to P(R)$ küme değerli fonksiyonları ele alalım. $\forall x \in B$ için $G(x) = 5xZ$, $xZ = F(x)\, in$ althalkası olur. Böylece (G, B), (F, A)'$nın$ soft althalkasıdır.

Teorem 5.1.2. (F, A) ve (G, B), R üzerinde iki soft halka olsun. Bu durumda

i. $\forall x \in B \subset A$ için $G(x) \subset F(x)$ ise, (G, B), (F, A)'$nın$ bir soft althalkasıdır.
ii. (F, A) ve (G, B) boştan farklı soft halkalar ise $(F, A) \tilde{\sqcap} (G, B)$ bi-arakesiti, (F, A)'$nın$ bir soft althalkasıdır. (Acar ve diğ. 2010)

İspat.

i. Tanım 5.1.1. ve Tanım 5.1.3.' den açıktır.

ii. $C = A \cap B$ ve $\forall x \in C$ için $H(x) = F(x) \cap G(x)$ olacak şekilde $(F, A) \tilde{\sqcap} (G, B) = (H, C)$ olsun. $A \cap B \subset A$ ve $H(x) = F(x) \cap G(x)$, $F(x)$'in althalkası olduğundan (H, C), (F, A)'$nın$ bir soft althalkasıdır. Benzer olarak (G, B) de (F, A)'$nın$ bir soft althalkası olduğu görülür.

Örnek 5.1.3. $R = Z$, $A = 2Z$ ve $B = 3Z$ olarak alalım.

$F(x) = \{2nx \mid n \in Z\} = 2xZ$ ve $G(x) = \{3nx \mid n \in Z\} = 3xZ$ şeklinde tanımlı

$F: A \to P(R)$ ve $G: B \to P(R)$ küme değerli fonksiyonları ele alalım.

$C = A \cap B = 6Z$ olmak üzere $(F, A) \tilde{\sqcap} (G, B) = (H, C)$ olsun. $\forall x \in C$ için

$H(x) = F(x) \cap G(x) = 6xZ$ olup, $F(x) = 2xZ$ ve $G(x) = 3xZ$ halkalarının althalkasıdır. Sonuç olarak $(F, A) \tilde{\sqcap} (G, B)$ bi-arakesiti, (F, A) ve $(G, B)'nin$ bir soft althalkasıdır.

Teorem 5.1.3. (F, A), R üzerinde soft halka ve I indis kümesi olmak üzere $\{(F_i, A_i) \mid i \in I\}$, $(F, A)\, nın$ soft althalkalarının boştan farklı bir ailesi olsun. Bu durumda

i. $\bigcap_{i \in I}(F_i, A_i)$, R üzerinde bir soft halkadır.
ii. $\bigwedge_{i \in I}(F_i, A_i)$, R üzerinde bir soft halkadır.
iii. $\forall i, j \in I$ için $A_i \cap A_j = \emptyset$ ise, $\bigcup_{i \in I}(F_i, A_i)$, R üzerinde bir soft halkadır. (Acar ve diğ. 2010)

İspat.

i. $\forall i \in I$ için (F_i, A_i), (F, A)'$nın$ soft alt halkaları olsun. Bu durumda $A_i \subset A$ olduğundan $\bigcap_{i \in I} A_i \subset A$ ve $F_i(x) < F(x)$ olup $\cap F_i < F(x)$ bulunur. O halde $\forall i \in I$ için $\cap F_i$, $R'nin$ althalkası olur. Böylece $\bigcap_{i \in I}(F_i, A_i)$, R üzerinde bir soft halkadır.

Benzer şekilde ii. ve iii. de kolayca ispatlanır.

5.2. Soft İdeal

Klasik cebirde ideal kavramı oldukça önemlidir. Bu nedenle soft halkalar içinde soft ideal kavramını tanımlayıp özelliklerini inceleyelim.

Tanım 5.2.1. (F, A), R üzerinde bir soft halka olsun. Bu durumda

i. $I \subset A$

ii. $\forall x \in Supp(\gamma, I)$ için $\gamma(x)$, $F(x)$'in ideali ise (γ, I)'ya R üzerinde (F, A)'*nın bir soft ideali* denir ve $(\gamma, I)\ \widetilde{\triangleleft}(F, A)$ ile gösterilir. (Acar ve diğ. 2010)

Örnek 5.2.1. $R = A = Z_4 = \{0,1,2,3\}$ ve $I = \{0,1,2\}$ şeklinde seçelim.

$F(x) = \{y \in R |\ x.y \in \{0,2\}\}$ olarak verilen $F: A \to P(R)$ küme değerli fonksiyonunu alalım. Buradan

$F(0) = R$, $F(1) = \{0,2\}$, $F(2) = Z_4$ ve $F(3) = \{0,2\}$ olarak elde edilir. Tüm kümeler $R\ nin$ althalkası olduğu kolayca görülür. Bu yüzden (F, A) $R\ de$ bir soft halkadır.

Diğer taraftan $\gamma: I \to P(R)$ fonksiyonu $\gamma(x) = \{y \in I \mid x.y = 0\}$ şeklinde tanımlansın. $\gamma(0) = R \triangleleft R$, $\gamma(1) = \{0\} \triangleleft F(1) = \{0,2\}$ ve $\gamma(2) = \{0,2\} \triangleleft F(2) = Z_4$ olduğu görülür. Bu yüzden (γ, I), (F, A)'$nın$ bir soft idealidir.

Teorem 5.2.1. (F, A) $R\ de$ bir soft halka, (γ_1, I_1) ve (γ_2, I_2) $R\ de$ (F, A) soft halkasının soft idealleri olsunlar. Bu durumda $(\gamma_1, I_1)\ \widetilde{\sqcap}\ (\gamma_2, I_2)$, (F, A)'$nın$ bir soft idealidir. (Acar ve diğ. 2010)

İspat. Teorem 5.1.2. (ii.) den kolayca elde edilir.

Teorem 5.2.2. (γ_1, I_1) ve (γ_2, I_2) $R\ de$ sırasıyla (F, A) ve (G, B) soft halkalarının soft idealleri olsun. Bu durumda $(\gamma_1, I_1) \tilde{\sqcap} (\gamma_2, I_2)$, $(F, A) \tilde{\sqcap} (G, B)$ nin bir soft idealidir. (Acar ve diğ. 2010)

İspat. $I = I_1 \cap I_2$ ve $\forall x \in I$ için $\gamma(x) = \gamma_1(x) \cap \gamma_2(x)$ olmak üzere $(\gamma_1, I_1) \tilde{\sqcap} (\gamma_2, I_2) = (\gamma, I)$ olur. Benzer olarak $C = A \cap B$ ve $\forall x \in C$ için $H(x) = F(x) \cap G(x)$ olmak üzere $(F, A) \tilde{\sqcap} (G, B) = (H, C)$ olur. $I_1 \cap I_2$ boştan farklı olduğundan $\gamma(x) = \gamma_1(x) \cap \gamma_2(x) \neq \emptyset$ olacak şekilde bir $x \in Supp(\gamma, I)$ vardır. $I_1 \cap I_2 \subset A \cap B$ olduğundan $\forall x \in Supp(\gamma, I)$ için $\gamma(x)\ in$, $H(x)$ halkasının bir ideali olduğunu göstermek yeterli olacaktır. $\gamma_1(x) \subset F(x)$ ve $\gamma_2(x) \subset G(x)$ olduğundan $\gamma_1(x) \cap \gamma_2(x) \subseteq H(x)$ dir. Bu yüzden $\gamma(x)$, $R\ nin$ bir althalkasıdır. Son olarak $\forall a \in \gamma(x)$ ve $\forall r \in H(x)$ için $H(x)$'in kabulünden $r \in F(x)$ dir. Benzer şekilde $a \in \gamma(x)$ ise, $a \in \gamma_1(x)$dir. $\gamma_1(x)$, $F(x)\ in$ ideali olduğundan $r \cdot a \in \gamma_1(x)$ ve $r \cdot a \in \gamma_2(x)$ olduğu görülür. Dolayısıyla $(\gamma_1, I_1) \tilde{\sqcap} (\gamma_2, I_2)$, $(F, A) \tilde{\sqcap} (G, B)$'nin bir soft idealidir. Böylece $r \cdot a \in \gamma(x)$ dır.

Örnek 5.2.2. $R = M_2(\mathbb{Z})$ tam sayılar üzerindeki 2×2 tipindeki matrislerin halkası, $A = 3\mathbb{Z}$, $B = 5\mathbb{Z}$, $I_1 = 6\mathbb{Z}$ ve $I_2 = 10\mathbb{Z}$ olsun.

$F(x) = \left\{\begin{bmatrix} nx & 0 \\ 0 & nx \end{bmatrix} \mid n \in \mathbb{Z}\right\}$ ve $G(x) = \left\{\begin{bmatrix} nx & nx \\ 0 & nx \end{bmatrix} \mid n \in \mathbb{Z}\right\}$ olarak tanımlanan $F: A \to P(R)$ ve $G: B \to P(R)$ dönüşümlerini alalım. $F(x)$ ve $G(x)$, $R\ nin$ althalkaları olduğu görülür. Böylece (F, A) ve (G, B), $R\ de$ soft halkalardır.

$\gamma_1 = \left\{\begin{bmatrix} nx & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \mid n \in Z\right\}$ ve $\gamma_2 = \left\{\begin{bmatrix} 0 & nx \\ 0 & nx \end{bmatrix} \mid n \in Z\right\}$ şeklinde tanımlanan $\gamma_1: I_1 \to P(R)$ ve $\gamma_2: I_2 \to P(R)$ küme değerli fonksiyonlarını dikkate alalım. $\gamma_1(x)$ ve $\gamma_2(x)$ sırasıyla $F(x)$ ve $G(x)$ idealleri olur. $\forall x \in I_1 \cap I_2$ için

$\gamma_1(x) \cap \gamma_2(x) = \left\{\begin{bmatrix} 0 & nx \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \mid n \in \mathbb{Z}\right\} \lhd F(x) \cap G(x) = \left\{\begin{bmatrix} nx & 0 \\ 0 & nx \end{bmatrix} \mid n \in \mathbb{Z}\right\}$ dir. Bu da $(\gamma_1, I_1) \tilde{\sqcap} (\gamma_2, I_2)$ nin $(F, A) \tilde{\sqcap} (G, B)$ nin bir soft ideali olduğunu gösterir.

Teorem 5.2.3. (F, A), $R\ de$ bir soft halka ve (γ_1, I_1), (γ_2, I_2), $(F, A)\ nın$ soft idealleri olsun. I_1 ve I_2 ayrık ise , $(\gamma_1, I_1) \tilde{\sqcup} (\gamma_2, I_2)$, $(F, A)\ nın$ soft idealidir. (Acar ve diğ. 2010)

İspat. $I = I_1 \cup I_2$ olsun. $\forall x \in I$ için,

$$\beta(x) = \begin{cases} \gamma_1(x) & x \in I_1 - I_2 \;\; ise \\ \gamma_2(x) & x \in I_2 - I_1 \;\; ise \\ \gamma_1(x) \cup \gamma_2(x) & x \in I_1 \cap I_2 \;\; ise \end{cases}$$

olmak üzere $(\gamma_1, I_1) \cup (\gamma_2, I_2) = (\beta, I)$ yazılır. $(\gamma_1, I_1) \triangleleft (F, A)$ ve $(\gamma_2, I_2) \triangleleft (F, A)$ olduğundan $I \subset A$ dır. $\forall x \epsilon Supp(\beta, I)$ için I_1 ve I_2 ayrık olduğundan $x \in I_1 - I_2$ veya $x \in I_2 - I_1$ dir. Eğer, $x \in I_1 - I_2$ ise, $(\gamma_1, I_1) \triangleleft (F, A)$ olduğundan $\beta(x) = \gamma_1(x) \neq \emptyset$, $F(x)\, in$ bir idealidir. Eğer, $x \in I_2 - I_1$ ise, $(\gamma_2, I_2) \triangleleft (F, A)$ olduğundan $\beta(x) = \gamma_2(x) \neq \emptyset$, $F(x)\, in$ bir idealidir. Dolayısıyla $\forall x \epsilon Supp(\beta, I)$ için $\beta(x) \triangleleft F(x)$ dir. Buradan (β, I), $(F, A)\, nın$ bir soft idealidir.

Teorem 5.2.4. (F, A), $R\, de$ bir soft halka ve $\{(\gamma_k, I_k) : k \in I\}$ $(F, A)\, nın$ soft ideallerinin boştan farklı bir ailesi olsun. Bu durumda, aşağıdaki koşullar sağlanır.

1) $\sqcap_{k \in I} (\gamma_k, I_k)$, $(F, A)\, nın$ bir idealidir
2) $\wedge_{k \in I} (\gamma_k, I_k)$, $(F, A)\, nın$ bir idealidir
3) Eğer $\{I_k \mid k \in K\}$ ikişer olarak ayrıksa, $\cup_{k \in I} (\gamma_k, I_k)$, $(F, A)\, nın$ bir idealidir. (Acar ve diğ. 2010)

İspat.

1) Bir halkanın keyfi boştan farklı idealler ailesinin kesişimleri de bir ideal olduğundan istenilen kolayca elde edilir.
2) ve 3) de benzer şekilde elde edilir.

6. SOFT MODÜLLER

Sun, Zhang ve Liu (2008) yılında soft modülleri tanımlamış ve temel özelliklerini incelemiştir. Atagün ve Sezgin (2011) yılında soft halka ve soft modüller üzerine bir takım sonuçlar elde etmişlerdir. Ayrıca soft modüller üzerine araştırmalar halen devam etmektedir. Bu bölümde soft modüller için elde edilen tanım ve sonuçlardan bahsedeceğiz.

6.1. Soft Modüller ve Özellikleri

Bu bölüm boyunca M bir sol $R-modül$, A boştan farklı bir küme, $F: A \to P(M)$ küme değerli fonksiyon ve (F, A), M üzerinde bir soft küme olarak alınacaktır.

Tanım 6.1.1. (F, A), $M\ de$ bir soft küme olsun. $\forall x \in A$ için $F(x)$, $M\ nin$ alt modülü ise $(F, A)'ya\ M\ de$ *bir soft modül* denir. (Sun ve diğ. 2008)

Önerme 6.1.1. (F, A) ve (G, B) $M\ de$ iki soft modül olsun. Bu durumda aşağıdaki koşullar sağlanır. (Sun ve diğ. 2008)

i. $(F, A) \tilde{\cap} (G, B)$, $M\ de$ bir soft modüldür.
ii. $A \cap B = \emptyset$ olmak üzere $(F, A) \tilde{\cup} (G, B)$, $M\ de$ bir soft modüldür.

İspat.

i. $C = A \cap B$ olmak üzere $\forall x \in C$ için, (F, A) ve (G, B) $M\ de$ soft modül olduğundan $H(x) = F(x) \leq M$ veya $H(x) = G(x) \leq M$ olup $(F, A) \tilde{\cap} (G, B) = (H, C)$, $M\ de$ bir soft modüldür.
ii. $A \cap B = \emptyset$ olsun. $C = A \cup B$ olmak üzere

$$H(x) = \begin{cases} F(x) & x \in A - B \\ G(x) & x \in B - A \\ F(x) \cup G(x) & x \in A \cap B \end{cases}$$

şeklinde $(F,A) \cup (G,B) = (H,C)$ olarak tanımlayalım. (F,A) ve (G,B) soft modüller olduğundan (H,C), $M\ de$ bir soft modül olduğu görülür.

Tanım 6.1.2. (F,A) ve (G,B) $M\ de$ iki soft modül olsun. Bu iki soft modülün toplamı $(F,A) + (G,B) = (H, A \times B)$ şeklinde tanımlanır. Burada $\forall(x,y) \in A \times B$ için $H(x,y) = F(x) + G(y)$ olarak tanımlanır. (Sun ve diğ. 2008)

Önerme 6.1.2. (F,A) ve (G,B) $M\ de$ iki soft modül olsun. O zaman,

$(F,A) + (G,B)$ de $M\ de$ soft modüldür. (Sun ve diğ. 2008)

İspat. (F,A) ve (G,B), $M\ de$ soft modüller olsunlar. $\forall(x,y) \in A \times B$ için $H(x,y) = F(x) + G(y)$ olacak şekilde $(F,A) + (G,B) = (H, A \times B)$ olarak tanımlanır. Ayrıca $F(x) \leq M$ ve $G(y) \leq M$ olduğundan, Modül teoriden $F(x) + G(y) \leq M$ olur. Böylece, $(F,A) + (G,B)$, $M\ de$ soft modüldür.

Tanım 6.1.3. M ve N modül olmak üzere (F,A) ve (G,B) sırasıyla M ve N de iki soft modül olsun. $\forall(x,y) \in A \times B$ için $H(x,y) = F(x) \times G(y)$ olacak şekilde (F,A) ve (G,B) soft modüllerinin çarpımı $(F,A) \times (G,B) = (H, A \times B)$ şeklinde tanımlanır. (Sun ve diğ. 2008)

Önerme 6.1.3. M ve N iki modül olmak üzere (F,A) ve (G,B) sırasıyla M ve N de iki soft modül olsun. Bu durumda $(F,A) \times (G,B)$, $M \times N\ de$ bir soft modüldür. (Sun ve diğ. 2008)

İspat. (F,A), $M\ de$ soft modül olduğundan $F(x) \leq M$ ve (G,B), $N\ de$ soft modül olduğundan $G(x) \leq N$ olur. $F(x) \times G(x) \leq M \times N$ olduğu kolayca görülür. Dolayısıyla $(F,A) \times (G,B)$ nin $M \times N$ de soft modül olduğu görülür.

Tanım 6.1.4. (F,A) ve (G,B), $M\ de$ iki soft modül olsun. Bu durumda,

i. $B \subset A$ ve
ii. $\forall x \in B$ için $G(x) \leq F(x)$

koşulları sağlanıyorsa $(G,B)\ ye,$ (F,A) *nın bir soft alt modülü* denir ve $(G,B) \lesseqqgtr (F,A)$ ile gösterilir. (Sun ve diğ. 2008)

Önerme 6.1.4. (F,A) ve (G,B) $M\ de$ iki soft modül olsun. $\forall x \in B$ için $G(x) \subseteq F(x)$ ise (G,B), $(F,A)\ nın$ bir soft alt modülüdür. (Sun ve diğ. 2008)

İspat. İspatı kolayca görülür.

Tanım 6.1.5. A bir küme e, $A\ nın$ birimi olmak üzere, $E = \{e\}$ olsun. $M\ deki$ her (F,A) soft modülünün en az iki (F,A) ve (F,E) soft alt modülleri *aşikar soft alt modül* olarak adlandırılır. (Sun ve diğ. 2008)

Önerme 6.1.5. (F,A), $M\ de$ bir soft modül ve $\{(G_i,B_i) \mid i \in I\}$, $(F,A)\ nın$ boştan farklı soft alt modüller ailesi olsun. Bu durumda aşağıdakiler sağlanır.

i. $\bigcap_{i\in I}(G_i,B_i)$, $(F,A)\ nın$ bir soft alt modülüdür.
ii. $\sum_{i\in I}(G_i,B_i)$, $(F,A)\ nın$ bir soft alt modülüdür.
iii. $\forall i,j \in I$ için $B_i \cap B_j = \emptyset$ olmak üzere $\bigcup_{i\in I}(G_i,B_i)$, $(F,A)\ nın$ bir soft alt modülüdür. (Sun ve diğ. 2008)

Önerme 6.1.6. (F,A) ve (G,B), $M\ de$ iki soft modül ve (G,B), $(F,A)\ nın$ bir soft alt modülü olsun. $f: M \to N$ bir modül homomorfizması ise $(f(F),A)$ ve $(f(G),B)$ $N\ de$ soft modüllerdir ve $(f(G),B)$, $(f(F),A)\ nın$ soft alt modülüdür. (Sun ve diğ. 2008)

İspat. $f: M \to N$ bir modül homomorfizması olduğundan, $\forall x \in A$ ve $\forall y \in B$ için $f(F(x))$ ve $f(G(y))$ N de alt modüllerdir. Böylece $(f(F),A)$ ve $(f(G),B)$ $N\ de$ soft modüllerdir. Eğer (G,B), $(F,A)\ nın$ bir soft altmodülü ise, o zaman $\forall x \in B$ için $G(x)$, $F(x)\ in$ alt modülüdür ve $f(G(x))$, $f(F(x))$'in alt modülüdür. Tanım 6.1.4. den $(f(G),B)$, $(f(F),A)\ nın$ soft alt modülüdür.

Tanım 6.1.6. (F,A) ve (G,B), sırasıyla M ve $N\ de$ iki soft modül ve $f: M \to N$, $g: A \to B$ iki fonksiyon olsunlar. $(f,g): (F,A) \to (G,B)$ dönüşümü eğer aşağıdaki koşulları sağlarsa *bir soft homomorfizma* olarak adlandırılır. (Sun ve diğ. 2008)

i. $f: M \to N$ modül homomorfizması;
ii. $g: A \to B$ bir fonksiyon;
iii. $\forall x \in A$ için $f(F(x)) = G\big(g(x)\big)$.

Aynı zamanda (F,A) dan $(G,B)'ye$ bir soft homomorfizma varsa (F,A), (G,B) ye *soft homomorfiktir* ve $(F,A) \simeq (G,B)$ ile gösterilir.

Bu tanımda g, A dan $B'ye$ *birebir dönüşüm* ve f, M den $N'ye$ bir izomorfizma ise o zaman (F,A), $(G,B)'ye$ *soft izomorftur* denir ve $(F,A) \cong (G,B)$ ile gösterilir.

Tanım 6.1.7. M bir modül ve (F,A) da M de bir soft modül olsun. Bu durumda, eğer $\forall a \in A$ için $F(a) = M$ $(F(a) = \{0\})$ ise, (F,A) soft modülüne *tam (aşikar) soft modül* denir. Her soft modülün bir aşikar soft alt modülü vardır. (Sun ve diğ. 2008)

Tanım 6.1.8. (F,A), (G,B), M de soft modüller ve $(G,B) \lesseqqgtr (F,A)$, M modülünde soft modüller olsun. $\forall a \in B$ için $G(a)$, $F(a)$ $nın$ maximal alt modülü ise (G,B), (F,A) $nın$ *maximal soft alt modülü* olarak adlandırılır.

6.2. Soft Modüllerde Toplam ve Direkt Toplam

M bir $R-mod\ddot{u}l$ ve $N_i(i \in I)$ M de N_i alt modüllerinin bir ailesi olsun. $\bigcup_{i\in I} N_i$ tarafından üretilen $\langle \bigcup_{i\in I} N_i \rangle$ alt modülü bazı $r \in \mathbb{N}$ $(1 \le k \le r)$ için $n_{ik} \in N_{ik}$ olmak üzere $n_{i1} + n_{i2} + \cdots + n_{ir}$ sonlu toplamlarından oluşur. Bu taktirde $\langle \bigcup_{i\in I} N_i \rangle$, N_i alt modüllerinin toplamı olarak adlandırılır ve $\sum_{i\in I} N_i$ ile gösterilir.

Tanım 6.2.1. (F,A), M de bir soft modül ve I boş olmayan bir indis kümesi $\{(F_i,A_i)\}_{i\in I}$, (F,A)nın soft alt modüllerinin bir ailesi olsun. (F_i,A_i) nin soft alt modüllerinin toplamı $\forall a \in \bigcup_{i\in I} A_i$ için $H(a) = \sum_{i\in I(a)} F_i(a)$ olmak üzere $\sum_{i\in I}(F_i,A_i) = (H, \bigcup_{i\in I} A_i)$ olarak tanımlanır. Burada $I(a)$, $i \in I$ için $a \in A_i$ olan tüm elemanlarının kümesidir. (Türkmen ve Pancar, 2013)

Teorem 6.2.1. (F,A), M de bir soft modül ve $\{(F_i,A_i)\}_{i\in I}$, (F,A) nın soft alt modüllerinin bir ailesi olsun.

i. $\sum_{i\in I}(F_i,A_i)$, M de bir soft modüldür özel olarak $\sum_{i\in I}(F_i,A_i)$, (F,A) $nın$ bir soft alt modülüdür.
ii. Her (F_i,A_i), $\sum_{i\in I}(F_i,A_i)$ nin bir soft alt modülüdür. (Türkmen ve Pancar, 2013)

İspat.

i. $i \in I$ olmak üzere her A_i boş olmayan küme olduğundan, $\bigcup_{i\in I} A_i \neq \emptyset$ dir. Tanım 6.2.1. den $I(a) = \{i \in I \mid a \in A_i\}$ ve her $a \in \bigcup_{i\in I} A_i$ için $H(a) = \sum_{i\in I(a)} F_i(a)$ olmak üzere $\sum_{i\in I}(F_i, A_i) = (H, \bigcup_{i\in I} A_i)$ şeklindedir. $a \in \bigcup_{i\in I} A_i$ alalım. $M\,nin$ alt modüllerinin toplamı $M\,nin$ bir alt modülüdür. H ın tanımından $H(a)$, $M\,nin$ bir alt modülüdür. Buradan $(H, \bigcup_{i\in I} A_i) = \sum_{i\in I}(F_i, A_i)$ $M\,de$ bir soft modüldür. $\sum_{i\in I}(F_i, A_i)$ soft modülünün $(F, A)\,nın$ soft alt modülü olduğu tanım 6.1.4.'den görülür.

ii. Tanım 6.1.4. den ispat açıktır.

Örnek 6.2.1. $M = {}_{\mathbb{Z}}\mathbb{Z}$ sol $\mathbb{Z} - modülün$ü alalım. (F, A), M modülünde soft küme olsun. $A = \mathbb{Z}$, $\forall n \in A$ için $F(n) = M$ olarak tanımlanan $F: A \to P(M)$ küme değerli bir fonksiyon olsun. Buradan (F, A) $M\,de$ tam soft modüldür. $\mathbb{Z}\,de$ tüm asal sayıların kümesi $\mathbb{P}$ ile gösterilsin. $\forall p \in \mathbb{P}$ için $A_p = \{p^n \mid 1 \leq n \in \mathbb{N}\}$ olsun. $\forall m \in A_p$ için $F_p(m) = 2m\mathbb{Z}$ olarak verilen, $\forall p \in \mathbb{P}$ için $F_p: A_p \to P(M)$ fonksiyonunu alalım. Her (F_p, A_p), $M\,de$ $(F, A)\,nın$ bir soft alt modülüdür. $B = \bigcup_{p\in\mathbb{P}} A_p$ olsun. Buradan $B \subseteq A$ dır. $I_m = \{p \in \mathbb{P} \mid m \in A_p\}$ ve $\forall m \in B$ için $H(m) = \sum_{p\in I(m)} F_p(m)$ olmak üzere $\sum_{p\in\mathbb{P}}(F_p, A_p) = (H, B)$ olsun. $(F_1, A_1), (F_2, A_2), \cdots, (F_n, A_n)$, $(F, A)\,nın$ soft alt modülleri ise teorem 6.2.1.'den $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere $\sum_{i=1}^{n}(F_i, A_i)$ soft alt modüldür ve $(F_1, A_1) + (F_2, A_2) + \cdots + (F_n, A_n)$ olarak gösterilir.

Önerme 6.2.1. (F, A), (G, B) $M\,de$ soft modüller ve $(G, B) \precsim (F, A)$ olsun. Buradan $(G, B)\tilde{+}(F, A) = (F, A)$ dır. (Türkmen ve Pancar, 2013)

İspat. $B \subseteq A$ olduğundan $B \cup A = A$ dır. $\forall b \in B$ için $G(b) \leq F(b)$ olduğu için $G(b) + F(b) = F(b)$ olur. Dolayısıyla, tanım 6.2.1. den $(G, B)\tilde{+}(F, A) = (F, A)$ dır.

Sonuç 6.2.1. (F, A), $M\,de$ bir soft modül olsun. $(F, A)\,nın$ her aşikar soft alt modülü (G, B) için $(G, B)\tilde{+}(F, A) = (F, A)$ dır.

İspat. Önerme 6.2.1.'den kolayca elde edilir.

Şimdi ise, Modül teorideki Modüler kuramı'nın soft modüllerdeki karşılığını inceleyelim.

Teorem 6.2.2. (Soft Modüler Kuralı) (F,A), (G,B) ve (T,C), M modülünde bir soft modülün soft alt modülleri, $A \cap C \neq \emptyset$ ve $(G,B) \lneqq (F,A)$ olsun. $(F,A) \Cap [(T,C) \tilde{\mp} (G,B)] = [(F,A) \Cap (T,C)] \tilde{\mp} (G,B)$ dir. (Türkmen ve Pancar, 2013)

İspat.

$$H_1(a) = \begin{cases} F(a) \cap T(a) & a \in A \cap (C \backslash B) \ \ ise, \\ G(a) & a \in A \cap (B \backslash C) \ \ ise, \\ F(a) \cap \big(T(a) + G(a)\big) & a \in A \cap (B \cap C) \ \ ise, \end{cases}$$ olmak üzere

$(F,A) \Cap [(T,C) \tilde{\mp} (G,B)] = \big(H_1, A \cap (C \cup B)\big)$ olsun.

$$H_2(a) = \begin{cases} F(a) \cap T(a) & a \in (A \cap C) \backslash B \ \ ise, \\ G(a) & a \in B \backslash (A \cap C) \ \ ise, \\ F(a) \cap T(a) + G(a) & a \in (A \cap C) \cap B \ \ ise, \end{cases}$$ olmak üzere

$(F,A) \Cap (T,C) \tilde{\mp} (G,B) = (H_2, (A \cap C) \cup B)$ olsun.

$A \cap (C \cup B) = (A \cap C) \cup B$ dır. $a \in A \cap (C \cup B)$ olsun.

<u>Durum 1.</u> $a \in A \cap (C \backslash B)$ ise $A \cap (C \backslash B) = (A \cap C) \backslash B$ olduğu için $H_1(a) = F(a) \cap T(a) = H_2(a)$ dır.

<u>Durum 2.</u> $a \in A \cap (B \backslash C)$ olsun. $a \in A \cap (B \backslash C) = B \backslash (A \cap C)$ olduğu için $H_1(a) = H_2(a)$ dır.

<u>Durum 3.</u> $a \in A \cap (C \cap B)$ ise, $H_1(a) = F(a) \cap \big(T(a) + G(a)\big)$ dır. $G(a)$, $F(a)\ nın$ bir alt modülü olduğu için, modüler kuramına göre,

$H_1(a) = F(a) \cap \big(T(a) + G(a)\big) = (F(a) \cap T(a)) + G(a) = H_2(a)$ dır. Kısıtlı kesişimin tanımından $\big(H_1, A \cap (C \cup B)\big) = (H_2, (A \cap C) \cup B)$ olur. Yani, $(F,A) \Cap [(T,C) \tilde{\mp} (G,B)] = ((F,A) \Cap (T,C)) \tilde{\mp} (G,B)$ dir.

Tanım 6.2.2. $(F,A),(G,B)$ M modülünde soft modüller ve $(G,B) \mathrel{\widetilde{\leqq}} (F,A)$ olsun. $(G,B)\widetilde{+}(T,C) = (F,A)$ ve $(G,B) \Cap (T,C)$ aşikardır koşulunu sağlayan $(F,A)\, nın$ bir (T,C) soft alt modülü varsa $(F,A)\, ya$ (T,C) ve (G,B) *soft alt modüllerinin direkt toplamı* denir. $(G,B) \oplus (T,C) = (F,A)$ ile gösterilir. Ayrıca (T,C) ve (G,B) ye (F,A) *soft modülünün direkt toplananları* denir. (Türkmen ve Pancar, 2013)

Teorem 6.2.3. (F,A), (G,B), M modülünde soft modüller ve $(G,B) \mathrel{\widetilde{\leqq}} (F,A)$ olsun. (G,B) aşikar ise, $(G,B) \oplus (F,A) = (F,A)$ dır. (Türkmen ve Pancar, 2013)

İspat. Sonuç 6.2.1. den $(G,B)\widetilde{+}(F,A) = (F,A)$ dır. $B \subseteq A$ olduğundan $A \cap B = B \neq \emptyset$ dir. $a \in B$ olsun. Hipotezden $G(a) = 0$ olduğundan $G(a) \cap F(a) = 0$ dır. Buradan $(G,B) \Cap (F,A)$ aşikardır. Bu yüzden $(G,B) \oplus (F,A) = (F,A)$ dir.

Teorem 6.2.4. (G,A), $(T,A) \mathrel{\widetilde{\leqq}} (F,A)$ şeklinde M modülünde soft modüller olsun. $(G,A) \oplus (T,A) = (F,A)$ olması için gerek ve yeter koşul $\forall a \in A$ için $G(a) + T(a) = F(a)$ olmalıdır. (Türkmen ve Pancar, 2013)

İspat. İlk olarak $(G,A) \oplus (T,A) = (F,A)$ olsun. Buradan, $\forall a \in A$ için $G(a) + T(a) = F(a)$ ve $G(a) \cap T(a) = 0$ dır. Yani $G(a) + T(a) = F(a)$ elde edilir.

Tersine $a \in A$ olsun. $G(a) + T(a) = F(a)$ olduğundan $(G,A)\widetilde{+}(T,A) = (F,A)$ dır. $G(a) \cap T(a) = 0$ olduğu için $(G,A) \Cap (T,A)$ de aşikardır. Böylece Tanım 6.2.2. den $(G,A) \oplus (T,A) = (F,A)$ dır.

Şimdi ise Tanım 6.2.2.'de vermiş olduğumuz direkt toplam tanımını genelleyelim.

Tanım 6.2.3. (F,A) , M modülünde bir soft modül ve $\bigcap_{i\in I} A_i \neq \emptyset$ olmak üzere $\{(F_i,A_i)\}_{i\in I}$, $(F,A)\, nın$ soft alt modüllerinin boştan farklı bir ailesi olsun. $(F,A) = \sum_{i\in I}(F_i,A_i)$ ve $\left[\sum_{i\in I\setminus\{j\}}(F_i,A_i)\right] \Cap \left(F_j,A_j\right)$ aşikar ise, $(F,A)\, ya$ *soft alt modüller ailesinin direkt toplamı* denir ve $\bigoplus_{i\in I} (F_i,A_i)$ olarak yazılır. (Türkmen ve Pancar, 2013)

R bir tamlık bölgesi ve M bir R modül olsun. $R\, nin$ sıfırdan farklı bir r elemanı ve her $m \in M$ için $rm = 0$ olan elemanların kümesi $T(M)$ olarak gösterilir. $T(M)$, $M\, nin$ bir alt modülüdür ve $M\, nin$ torsion alt modülü olarak adlandırılır. $M =$

$T(M)$ ise, M torsion modüldür. R dedekind bölgesi ve M torsion $R-modül$ olsun. Ω, $R\,nin$ tüm maksimum ideallerinin kümesi ve $T_a(M) = \{m \in M \mid a^n m = 0,$ $negatif\ olmayan\ bazı\ n \in \mathbb{Z}\ için\}$ olmak üzere $M = \bigoplus_{a\in\Omega} T_a(M)$ olur.

Örnek 6.2.2 M, torsion $\mathbb{Z}-modül$ ve Ω, $\mathbb{Z}\,nin$ maksimum ideallerinin kümesi olsun. $A = \Omega$ olmak üzere, her $a \in A$ için $F(a) = T_a(M)$ olarak tanımlanan $F: A \to P(M)$ fonksiyonunu alalım. Buradan, (F, A), $M\,de$ soft modüldür. Diğer yandan $b \in \Omega$ için $F_b(a) = \begin{cases} F(a), & b = a\ ise \\ 0, & b \neq a\ ise \end{cases}$ ile tanımlı $F_b: A \to P(M)$ fonksiyonu tanımlansın.

Her (F_b, A), $(F, A)\,nın$ bir soft alt modülüdür. $a \in A$ olsun. $\sum_{b\in\Omega} F_b(a) = F(a) = T_a(M)$ ve $\left(\sum_{b\in\Omega\setminus\{c\}} T_b(a)\right) \cap T_c(a) = 0$ olduğu için, $\sum_{b\in\Omega}(F_b, A) = (F, A)$ olarak yazılır ve $\left(\sum_{b\in\Omega\setminus\{c\}}(F_b, A)\right) \Cap (F_c, A)$ aşikardır. Dolayısıyla $(F, A) = \bigoplus_{b\in\Omega} (F_b, A)$ dır.

7. KAYNAKLAR

Acar, U., Koyuncu, F., Tanay, B., “Soft sets and Soft rings”, *Computers and Mathematics with Applications*, 59, 3458-3463, (2010).

Aktaş, H., Çağman, N., “ Soft sets and Soft groups”, *Information Sciences*, 177, 2726-2735, (2007).

Anderson, F. W., Fuller, K. R., *Rings and Categories of Modules*, Springer, New York, (1992).

Aslam, M., Qurashi, S. M., “Some contributions to soft groups”, *Annals of Fuzzy Mathematics and Informatics*, 4,1, 177-195, (2012).

Feng, F., Jun, Y. B., Zhao, X., “Soft semirings”, *Computers and Mathematics with Applications*, 56, 2621-2628, (2008).

Herstein, I. H., *Topics in ring theory*, univ. Of Chicago Pres, Chicago, (1969).

Hungerford, T. W., *Algebra*, New York, Rinehart and Winston, inc., (1974).

Irfan Ali, M., Feng, F., Liu, X., Min, W. K., Shabir, M., “On some new operations in soft set theory”, *Computers and Mathematics with Applications*, 57, 1547-1553, (2009).

Lam, T. Y., *Lectures on Modules and Rings*, Springer, New York, (1999).

Maji, F. K., Biswas, R. and Roy, A. R., “Soft Set Theory”, *Computers and Mathematics with Applications*, 45, 555-562, (2003).

Molodtsov, D., “Soft Set theory-First Results” *Computers and Mathematics with Applications*, 37, 19-31, (1999).

Sun, Q. M., Zhang, Z. L. and Liu, J., “Soft Sets and Soft Modules”, *Springer-Verlag Berlin Heidelberg*, 403-409, (2008).

Türkmen, E., Pancar, A., “On some new operations in soft module theory”, *Neural Comput & Applic*, 22, 1233-1237, (2013).

Yücel, C., Acar, U., “ A note on soft modules”, *Commun. Fac. Sci. Univ. Ank. Sér. A1 Math. Stat.*, 66, (1), 66-74, (2017).

8. ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı : Esra Yüzbaşı

Doğum Yeri ve Tarihi : 07/08/1990

Lisans Üniversite :Pamukkale Üniversitesi

Y. Lisans Üniversite (varsa) :Pamukkale Üniversitesi

Elektronik posta :hundredhead@hotmail.com

İletişim Adresi :Paşabayır mahallesi tünel üstü sokak no:23/3 Balıkesir/Bandırma