T.C.
PAMUKKALE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

CS-MODÜLLER ÜZERİNE BAZI GENELLEMELER

YÜKSEK LİSANS TEZİ

SEVGİ KARATAŞ

DENİZLİ, TEMMUZ-2017

T.C.
PAMUKKALE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

CS-MODÜLLER ÜZERİNE BAZI GENELLEMELER

YÜKSEK LİSANS TEZİ

SEVGİ KARATAŞ

DENİZLİ, TEMMUZ-2017

KABUL VE ONAY SAYFASI

SEVGİ KARATAŞ tarafından hazırlanan "**CS-MODÜLLER ÜZERİNE BAZI GENELLEMELER**" adlı tez çalışmasının savunma sınavı 28/07/2017 tarihinde yapılmış olup aşağıda verilen jüri tarafından oy birliği / ~~oy çokluğu~~ ile Pamukkale Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı olarak kabul edilmiştir.

Jüri Üyeleri | İmza

Danışman
Doç. Dr. Canan CELEP YÜCEL ....

Üye
Doç. Dr. Ummahan ACAR
Muğla Sıtkı Koçman Üniversitesi ....

Üye
Doç. Dr. Mustafa Aşçı
Pamukkale Üniversitesi ....

Pamukkale Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun 02/08/2017 tarih ve 30/13 sayılı kararıyla onaylanmıştır.

....

Prof. Dr. Uğur YÜCEL

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

Bu tezin tasarımı, hazırlanması, yürütülmesi, araştırmalarının yapılması ve bulgularının analizlerinde bilimsel etiğe ve akademik kurallara özenle riayet edildiğini; bu çalışmanın doğrudan birincil ürünü olmayan bulguların, verilerin ve materyallerin bilimsel etiğe uygun olarak kaynak gösterildiğini ve alıntı yapılan çalışmalara atfedildiğine beyan ederim.

S. Karataş

SEVGİ KARATAŞ

ÖZET

CS-MODÜLLER ÜZERİNE BAZI GENELLEMELER
YÜKSEK LİSANS TEZİ
SEVGİ KARATAŞ
PAMUKKALE ÜNİVERSİTESİ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

(TEZ DANIŞMANI: DOÇ. DR. CANAN CELEP YÜCEL)

DENİZLİ, 2017

Bu çalışmada komplement alt modülleri dik toplanan olan modüllerin, yani CS-modüllerin temel özellikleri incelenmiş, bunlarla ilgili elde edilen sonuçlar verilmiştir. CS-modül ailesinin farklı genellemeleri vardır. Bunlardan ikisi olan C_{11} modüller ve FI-extending modüller ayrıntılı olarak ele alınmıştır. Ayrıca CS, C_{11} ve FI-extending modüllerin birbiri arasındaki ilişkiler incelenmiştir.

ANAHTAR KELİMELER: Geniş (essential) alt modül, komplement alt modül, CS- modül, C_{11}-modül, FI-extending modül

ABSTRACT

SOME GENERALİZATIONS ON CS-MODULES
MASTER OF SCİENS THESİS
SEVGİ KARATAŞ
PAMUKKALE UNIVERSITY INSTITUTE OF SCIENCE
MATHEMATICS PROGRAM

(SUPERVISOR: ASSOC. DR. CANAN CELEP YÜCEL)

DENİZLİ, 2017

In this, work basic properties of modules whose complement submodules are direct summand, namely CS-Modules, are investigated and the results related to these modules are given. There are different generalizations of the families of CS-modules. C_{11}- modules and FI- extending modules, which are consiolered in details, are two of them. In addition, the relations between CS, C_{11} and FI-extending modules are inveshigated.

KEYWORDS: Essential submodule, Complement submodule, CS-module, C_{11}-module, FI-extending module

İÇİNDEKİLER

Sayfa

ÖZET .... **i**
ABSTRACT .... **ii**
İÇİNDEKİLER .... **iii**
SEMBOL LİSTESİ .... **iv**
ÖNSÖZ .... **v**
1. GİRİŞ **1**
2. TEMEL BİLGİLER **2**
2.1 Modüller 2
2.2 Essential ve Komlement Altmodüller 4
3. CS-MODÜLLER **17**
4. SÜREKLİ VE YARI-SÜREKLİ MODÜLER **23**
4.1 Tanımlar ve Özellikler 23
5. CS- MODÜLLER ÜZERİNE BAZI GENELLEMELER **27**
5.1 (C_{11})-Modüller 27
5.2 FI-extending Modüller 36
4. KAYNAKLAR **41**

SEMBOL LİSTESİ

$X \leq M$	:	X, M nin altmodülü
$X \leq_e M$	:	X, M nin essential altmodülü
$X \leq_d M$	:	X, M nin dik toplananıdır.
$SocM$	:	M nin socle kümesi
$X \leq_c M$	:	X, M nin komplement altmodülü
$Z(M)$	:	M nin singüler(tekil) altmodülü
$Z_2(M)$	:	M nin ikinci singüler(tekil) altmodülü
$End(M_R)$	:	M_R modülünün endomorfizmalar halkası
$Hom(N,M)$	:	N den M ye olan homomorfizmalar kümesi
$E(M)$	:	M nin injektif hull ı
$S_l(R)$	:	R nin sol merkezil idempotentlerinin kümesi
$kerf$	:	f fonkiyonunun çekirdeği
Imf	:	f fonksiyonunun görüntüsü
$\bigoplus_{i\in I} M_i$	:	M_i lerin dik toplamı
$\prod_{i\in I} M_i$	:	M_i lerin dik çarpımı
$m^{-1}N$	:	R nin $\{r \in R : mr \in N\}$ sağ ideali
$N \lhd M$	:	N, M nin fully invariant alt modülü

ÖNSÖZ

Bu çalışmamın her safhasında yardımlarını desteklerini esirgemeyen ve bilgilerinde deneyimlerinden yararlandığım değerli hocam Doç. Dr. Canan CELEP YÜCEL e sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Ayrıca bu süreç boyunca benden desteklerini hiç bir zaman esirgemeyen aileme sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

1. GİRİŞ

Bu çalışmada R değişmeli olması gerekmeyen, birimli bir halka ve M de sağ R-modül olarak alınacaktır.

CS (extending)-modül kavramının temeli 1930'lu yıllarda Joh Von Neumann'nın çalışmalarına uzanır. Von Neumann'nın Kuantum Mekaniği'ndeki çalışmaları onun "Sürekli Geometri" yi tanımlamasına ve geliştirmesine yöneltmiştir.

Von Neumann sürekli geometrilerin teorisini Von Neumann, (1936) çalışmalarında geliştirmiştir. Bu anlamda çalışmayı Utumi (Utumi,1965) devam ettirmiştir. Bu kavramları Jeremy (Jeremy,1971) modüllere taşıdı. Chatters ve Hajarnavis "CS" kısaltmasını "complement are summands" için kullandılar (Chatters, Hajarnavis, 1977). Bir çok araştırmacı CS yerine extending veya C_1 göterimini kullanarak araştırmalara devam etmektedir.

Bu tezde, CS-modüller ve CS-modüllerin baz genellemeleri olan C_{11} ve FI-extending modüllerin yapısal özellikleri incelenmiştir.

Bölüm 2' de, çalışmamız boyunca kullandığımız bazı temel tanım ve sonuçlar ispatları ile birlikte verilmiştir.

Bölüm 3'de CS-modüller ayrıntılı olarak incelenmiştir.

Bölüm 4'de, sürekli ve yarı sürekli modüllerin belirli alt modüllerinden M'ye olan dönüşümlerin, M'den M'ye olan dönüşümlere genelleştirilmeleri anlatılmıştır.

Bölüm 5'de, C_{11}-modüllerin tanımı ve bu tanıma denk koşullar verilmiştir. C_{11}-modüllerin dik toplamlarının bir C_{11}-modül olduğu gösterilmiş, aksine C_{11}-modüllerin dik toplananlarının bir C_{11}-modül olmadığına ilişkin örnek verilmiştir. Ayrıca, FI-extending modüllerin tanımı ve bu anlamda elde edilen sonuçlar verilmiştir. FI-extending modüllerin dik toplamında FI-extending modül olduğunu gösteren teoreme değinilmiştir.

2. TEMEL BİLGİLER

Bu bölümde tezin anlaşılırlığını kolaylaştırmak ve tez boyunca ihtiyaç duyulan cebirsel yapılar ile ilgili tanım, teorem ve kavramlar verilecektir. Bu kesimdeki sonuçlar için (Anderson ve Fuller, 1992), (Dung ve diğ., 1994) ve (Goodearl, 1976) önerilir.

2.1 Modüller

Tanım 2.1.1. R bir halka olsun. $(M,+)$ değişmeli bir grup olmak üzere $f\colon R\times M \to M : r \in R \; ve \; m \in M \; için \; f(r.m) = rm$ şeklinde tanımlanan f fonksiyonu aşağıdaki özellikleri sağlıyorsa *M* ye bir sol *R* modül denir.

M_1) Her $m \in M$ için $1_R m = m$

M_2) Her $r \in R$ ve her $m, n \in M$ için $r(m+n) = rm + rn$

M_3) Her $r, s \in R$ ve her $m \in M$ için $(r+s)m = rm + sm$

M_4) Her $r, s \in R$ ve her $m \in M$ için $(rs)m = r(sm)$

M sol *R*-modülü $_RM$ yazımı ile gösterilir. Benzer şekilde sağ *R*-modül tanımı da yapılır. Eğer *R* birimli bir halka olmak üzere $\forall m \in M$ için $1_R.m = m$ koşulu sağlanıyorsa *M* modülüne birimsel sol *R*-modül denir.

Tanım 2.1.2. *R* bir halka, *M* bir sol *R*-modül ve *N* de *M* nin boştan farklı bir alt kümesi olsun. Eğer *N*, *M* nin toplamsal alt grubu ve her $r \in R$ ve $n \in N$ için, $rn \in N$ ise *N* ye *M* nin alt modülü denir. $N \le M$ ile gösterilir.

$\varnothing$ ve M , *M* nin aşikar alt modülleridir.

Tanım 2.1.3. Eğer *M* sıfırdan farklı bir modül ve *M* nin *0* ve kendisinden başka alt modülü yok ise *M* modülüne basit (simple) modül denir.

Tanım 2.1.4. *R* bir halka ve *M* de bir modül olmak üzere *M*'nin tüm sıfır olmayan basit altmodüllerinin toplamına *M* nın socle'ı denir ve *Soc(M)* şeklinde gösterilir.

$$Soc(\mathrm{M}) = \left\{ \sum X \,\middle|\, X, M\text{'}\,\textit{nin basit alt modülü} \right\}$$

Örnek olarak; $Soc(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}) = 2\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ dir.

Tanım 2.1.5. *M* bir modül olmak üzere *Soc(M)=M* oluyorsa *M* 'ye *yarı basit (semisimple)* denir.

Bu duruma göre 0 bir semisimple modüldür ve $Soc(2\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}) = 2\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ olduğundan $(2\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})$ $\mathbb{Z}$ -modülü bir semisimple modüldür.

Tanım 2.1.6. *M* bir *R*-modül ve *N*, *K* da *M* nin alt modülleri olsunlar. Eğer $N \leq K \leq M$ iken $N = K$ veya $K = M$ oluyorsa *N* ye *M* nin *maksimal alt modülü* denir.

Tanım 2.1.7. *M* ve *N* bir *R* halkası üzerinde tanımlı iki modül ve $f : M \to N$ bir dönüşüm olsun. Eğer $\forall m, m' \in \mathrm{M}$ ve $\forall r \in R$ için,

1) $f(m + m') = f(m) + f(m')$
2) $f(rm) = rf(m)$

koşulları sağlanıyorsa *f*'ye bir *R modül homomorfizması* denir.

Ayrıca $f : M \to N$ R-modül homomorfizması olmak üzere *f*, birebir ise *f*'ye *R-monomorfizma*, *f* örten ise *f*'ye *R-epimorfizma*, *f* birebir ve örten ise *f*'ye *R-izomorfizma* denir.

Tanım 2.1.8. *M* bir *R* modül ve $K \leq M$ olsun. Eğer $\exists\, N \leq M$ için $K \cap N = 0$ ve $M = K + N$ koşulları sağlanırsa *M* ye *K* ile *N* nin *dik toplamı* denir ve $M = K \oplus N$

ile gösterilir. K ve N alt modüllerine de M nin *dik toplananları* denir. $K, N \leq_d M$ şeklinde gösterilir.

Tanım 2.1.9. M bir R modül olsun. Sıfırdan ve kendinden başka dik toplananı yoksa *M,* R-modülüne *ayrıştırılamaz (indecomposable)* modül denir.

Şimdi ise bir çok noktada kolaylık sağlayan Modüler Kuramını verelim.

Önteorem 2.1.1.(Modüler Kuralı) M bir R-modül, $N \leq M$ ve $L \leq K \leq M$ olsun. Bu durumda

$$K \cap (N+L) = L + (N \cap K)$$

dir.

İspat: $L \leq K$ ve $N \cap K \leq N \leq N + K$ olduğundan

$$L + (N \cap K) \leq K \cap (N + L)$$

dir. Tersine $k \in K \cap (N+L)$ alalım. Bu durumda $k = n + l$ olacak şekilde $n \in N$ ve $l \in L$ vardır. $k = n + l$ ise $n = k - l \in N \cap K$ olur. Buradan, $k = n + l \in L + (N \cap K)$ elde edilir. Dolayısıyla, $K \cap (N+L) \leq L + (N \cap K)$ dir. Böylece $K \cap (\mathrm{N}+L) = L + (N \cap K)$ olduğu görülür.

2.2 Essential ve Komlement Altmodüller

Bu bölümde çalışmamıza temel oluşturan bazı özel tanım ve özellikleri ayrıntılı olarak vereceğiz.

Tanım 2.2.1. M bir R-modül ve $N \leq M$ olsun. Eğer her $0 \neq K \leq M$ için $N \cap K \neq 0$ oluyorsa veya buna denk olan bir $L \leq M$ için $N \cap L = 0$ olduğunda $L=0$ olmasını gerektiriyorsa N ye M nin *geniş (essential)* alt modülü (veya M ye N nin essential genişlemesi) denir ve $N \leq_e M$ ile gösterilir.

Önerme 2.2.1. M bir R modül olsun. Bu durumda;

1. $N \leq M$ olsun. $N \leq_e M$ olması için gerek ve yeter koşul her $0 \neq m \in M$ için $N \cap mR \neq 0$ olmasıdır.
2. K$\leq N \leq M$ olmak üzere $K \leq_e M$ olması için gerek ve yeter koşul $K \leq_e N$ *ve* $N \leq_e M$ olmasıdır.
3. $N \leq_e M$ *ve* $K \leq M$ ise $N \cap K \leq_e K$ dir.
4. $1 \leq i \leq t$ olmak üzere her $t \geq 1$ için $N_i \leq_e K_i$ ise $(N_1 \cap N_2 \cap \ldots \cap N_t) \leq_e (K_1 \cap K_2 \cap \ldots \cap K_t)$ dir.
5. $K \leq N \leq M$ olmak üzere $N / K \leq_e M / K$ ise $N \leq_e M$ dir.
6. $A, B, \mathrm{C} \leq \mathrm{M}$ olmak üzere $f : B \to C$ bir homomorfizma ve $A \leq_e C$ ise $f^{-1}(A) \leq_e B$ dir.
7. Her sıfırdan farklı indis kümesi I için, $i \in I$ olmak üzere $N_i \leq_e M_i$ olması için gerek ve yeter koşul $\oplus_{i \in I} N_i \leq_e \oplus_{i \in I} M_i$ olmasıdır. (Dung et al., 1994)

İspat: (1) $(\Rightarrow)$ $N \leq_e M$ ve $0 \neq m \in M$ olsun. O halde $mR \neq 0$ olur. $N \leq_e M$ olduğundan $N \cap mR \neq 0$ elde edilir.

$(\Leftarrow)$ Tersine her $0 \neq m \in M$ için $N \cap mR \neq 0$ olsun. O halde $0 \neq m \in L$ olacak şekilde $L \leq M$ vardır. Böylece $mR \leq L$ olduğundan $N \cap L \neq 0$ elde edilir. Böylece $N \leq_e M$ olduğu görülür.

(2) $(\Rightarrow)$ $K \leq N \leq M$ ve $K \leq_e M$ olsun. $0 \neq X \leq N$ alalım. Bu durumda $X \leq M$ olacağından $K \cap X \neq 0$ olur. O halde $K \leq_e N$ elde edilir. Şimdi $0 \neq Y \leq M$ alalım. O halde $K \cap Y \leq N \cap Y$ olduğundan $N \cap Y \neq 0$ olur. Bu durumda $N \leq_e M$ elde edilir.

$(\Leftarrow)$ Tersine $K \leq N \leq M$, $K \leq_e N$ ve $N \leq_e M$ olsun. $0 \neq T \leq M$ için $0 \neq N \cap T$ dir. $K \leq_e N$ olduğundan $0 \neq K \cap (N \cap T) = K \cap T$ olur. O halde, $K \leq_e M$ elde edilir.

(3) $N \leq_e M$ ve $K \leq M$ olsun. $0 \neq X \leq K$ için, $(N \cap K) \cap X = N \cap (K \cap X) = N \cap X \neq 0$ elde edilir. O halde $(N \cap K) \leq_e K$ elde edilir.

(4) İlk olarak $t = 2$ için gösterelim. $N_1 \leq_e K_1$ ve $N_2 \leq_e K_2$ iken $(N_1 \cap N_2) \leq_e (K_1 \cap K_2)$ olduğunu gösterelim. Bunun için bir $0 \neq X \leq K_1 \cap K_2$ ve $(N_1 \cap N_2) \cap X = 0$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda $(N_1 \cap N_2) \cap X = N_1 \cap (N_2 \cap X) = 0$ olur. Buradan $N_2 \cap X = 0$ elde edilir. $N_2 \leq_e K_2$ olduğundan $X = 0$ bulunur. Bu durum kabulümüz ile çelişir. O halde $(N_1 \cap N_2) \cap X \neq 0$ dır. Yani, $(N_1 \cap N_2) \leq_e (K_1 \cap K_2)$ dir. Tümevarım yöntemi ile genel durum elde edilir.

(5) $K \leq N \leq M$ ve $N/K \leq_e M/K$ olsun. $0 \neq X \leq M$ ve $N \cap X = 0$ olduğunu kabul edelim. Eğer $X \leq K$ ise $X \cap N = X \neq 0$ olur. Eğer $K \leq X$ ise $0 \neq X/K \leq M/K$ olur. $X/K \cap N/K = (X \cap N)/K = \overline{0}$ olur. $N/K \leq_e M/K$ olduğundan $X/K = \overline{0}$ olup $X = K$ elde edilir. O halde $N \leq_e M$ olur.

(6) $A, B, C \leq M$ olmak üzere $f : B \to C$ bir homomorfizma ve $A \leq_e C$ olsun. $0 \neq U \leq B$ için $f^{-1}(A) \cap U = 0$ alalım. $x \in f(U) \cap A$ ise $x \in A$ ve $x \in f(U)$ olur. O halde $x = f(u)$ olacak şekilde $\exists u \in U$ vardır. $x = f(u) \in A$ ise $u \in f^{-1}(A)$ olur. Buradan $f^{-1}(A) \cap U = 0$ olduğundan $U = 0$ olur. $x = f(u) = f(0) = 0$ ise $A \cap f(U) = 0$ olur. $A \leq_e C$ olduğundan $A \neq 0$ ise $f(U) = 0$ olur. O halde $U \leq ker f = f^{-1}(0) \leq f^{-1}(A)$ ise $f^{-1}(A) \cap U = U = 0$ elde edilir. Böylece $f^{-1}(A) \leq_e B$ olur.

(7) $i = \{1, 2\}$ olsun. $N_1 \leq_e M_1$ ve $N_2 \leq_e M_2$ ise $N_1 \oplus N_2 \leq_e M_1 \oplus M_2$ olduğunu gösterelim. (4) den $N_1 \cap N_2 \leq_e M_1 \cap M_2$ olur. N_i ler R'nin bağımsız alt modülleri olduğundan $0 \leq_e M_1 \cap M_2$ elde edilir. Böylece $M_1 \cap M_2 = 0$ dır. O halde $\{M_1, M_2\}$ de R de bağımsızdır. O zaman; $M_1 \oplus M_2 \to M_1$ ve $M_1 \oplus M_2 \to M_2$

örten homomorfizmaları vardır. $N_1 \leq_e M_1$ ve $N_2 \leq_e M_2$ olduğundan (6) dan $f^{-1}(N_1) \leq_e M_1 \oplus M_2$ ve olur. $N_1 \leq_e M_1$ ve $\{M_1, M_2\}$ bağımsız olduğundan $f : N_1 \oplus M_2 \to N_1$ ve $N_2 \leq_e M_2$ ve $\{M_1, M_2\}$ bağımsız olduğundan $f : \mathrm{M}_1 \oplus N_2 \to N_2$ örten homomorfizmaları vardır. Yani, $f(N_1 \oplus M_2) = N_1$ dir. Böylece $N_1 \oplus M_2 = f^{-1}(N_1)$ olur. Ayrıca $f(M_1 \oplus N_2) = N_2$ olduğundan $M_1 \oplus N_2 = f^{-1}(N_2)$ elde edilir. Böylece $N_1 \oplus M_2 \leq_e M_1 \oplus M_2$ ve $M_1 \oplus N_2 \leq_e M_1 \oplus M_2$ bulunur. Yine $(N_1 \oplus M_2) \cap (M_1 \oplus N_2) = N_1 \oplus N_2$ olduğundan (4) den $N_1 \oplus N_2 \leq_e M_1 \oplus M_2$ bulunur. *i* üzerinden tümevarım uygularsak $i = \{1, 2\}$ için sağlanmış olur.

$i = n-1$ için doğru olduğunu kabul edelim. Yani, $N_1 \oplus N_2 \oplus \ldots \oplus N_{n-1} \leq_e M_1 \oplus M_2 \oplus \ldots \oplus M_{n-1}$ olsun. $i = n$ için bakarsak $N_i \leq_e M_i$ ve $\{N_i\}$ bağımsız alt modül olduğundan baştaki yöntem ile $(M_1 \oplus M_2 \oplus \ldots \oplus M_{n-1}) \cap M_n = 0$ olduğu görülür. Buradan $\{M_1, M_2, \ldots M_{n-1}, M_n\}$ nin bağımsız olduğu görülür. Böylece $(N_1 \oplus N_2 \oplus \ldots \oplus N_{n-1}) \oplus N_n \leq_e (M_1 \oplus M_2 \oplus \ldots \oplus M_{n-1}) \oplus M_n$ elde edilir.

Örnek 2.2.1. $(\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z})_{\mathbb{Z}}$ modülünün tüm essential alt modüllerini bulunuz.

Çözüm: $\forall n \in \mathbb{Z}$ için $n\mathbb{Z} \leq_e \mathbb{Z}$ ve $\forall m \in \mathbb{Z}$ için $m\mathbb{Z} \leq_e \mathbb{Z}$ olduğunu biliyoruz. O halde Önerme 2.2.1.(7) den $n\mathbb{Z} \oplus m\mathbb{Z} \leq_e \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ olur. Aynı zamanda $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ deki tüm alt modüller bu formdadır. Yani, $(\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z})_{\mathbb{Z}}$ deki her alt modül essential alt modüldür.

Önteorem 2.2.1. *M* bir sağ *R*- modül ve $K \leq_e M$ olsun. Bu durumda $aL \neq 0$ ve $aL \subseteq K$ olacak şekilde *R* nin bir essential sağ *L* ideali vardır.

İspat: $L = \{r \in R : ar \in K\}$ olsun. Buradan, *L*, *R* nin bir sağ idealidir ve $aL \subseteq K$ dir. Böylece $aR \cap K \neq 0$ olur. Bazı $r \in R$ için ar, *K* nın sıfırdan farklı elemanıdır. Yani, $r \in L$ için $aL \neq 0$ dır. *I*, *R* nin sıfırdan farklı sağ ideali olsun. Şimdi $I \cap L \neq 0$

olduğunu görelim. Eğer $aI=0$ ise $I\subseteq L$ olduğundan $I\cap L\neq 0$ olur. Farzedelim ki, $aI\neq 0$ olsun. Bu durumda $aI\cap K\neq 0$ dır. Böylece bazı $x\in I$ için ax, K nın sıfırdan farklı elemanıdır. Buradan $x\in L$ dır. Dolayısıyla $I\cap L\neq 0$ dır. Böylece $L\leq_e R$ dır.

Tanım 2.2.2. *M* bir *R* modül ve *L, M* nin bir alt modülü olsun. $K\cap L=0$ özelliğine göre maksimal olan bir *K* altmodülüne *L* nin (*M* deki) *komplementi* denir.

Tanım 2.2.2. de verilen *K* alt modülü tek olmak zorunda değildir. Şimdi vereceğimiz önermeden, bir *M* modülündeki her alt modülün bir komplement alt modülünün (*M* de) varlığı elde edilir ki, bu komplement alt modülleri oldukça kullanışlı yapmaktadır.

Önerme 2.2.2. *M* bir modül ve $L,N\leq M$ alt modülleri için $N\cap L=0$ olsun. Bu durumda *L* nin *M* de bir *K* komplementi vardır öyle ki $N\subseteq K$ dır.

İspat: $S=\{X\leq M : \mathrm{N}\leq \mathrm{X} \text{ ve } \mathrm{X}\cap \mathrm{L}=0\}$ kümesini tanımlayalım. $N\in S$ olduğundan $S\neq\varnothing$ dir. $\{X_i : i\in I\}$, *S* de bir zincir olsun. *S* tam sıralıdır. $U=\cup_{i\in I}X_i$ alalım. Herhangi iki $X_i, X_j\in S$ için $X_i\subseteq X_j$ ya da $X_j\subseteq X_i$ olduğundan *U* bir altmodüldür. Her $i\in I$ için $N\leq X_i$ olduğundan $N\leq \cup_{i\in I}X_i$ dir. Her $i\in I$ için $X_i\cap L=0$ olduğundan $\cup_{i\in I}X_i\cap L=0$ olup $U\in S$ olur. Yani *U*, $\{X_i : i\in I\}$ zincirinin bir üst sınırıdır. Böylece Zorn's Lemma ile *S* nin bir maksimal elemanı vardır. *K* ile gösterilirse, $K\cap L=0$ olduğundan *K, L* nin *M* deki komplementidir. Ayrıca *S* nin tanımından $N\subseteq K$ dir.

Şimdi ispatlayacağımız önerme, bir modülde essential alt modüller üretmek anlamında bir teknik sağlamaktadır.

Önerme 2.2.3. *M* bir modül, $L\leq M$ ve *K, L* nin *M* içinde komplementi olsun. Bu durumda $K\oplus L\leq_e M$ dir. (Goodearl, 1976)

İspat: $N\leq M$ ve $(K\oplus L)\cap N=0$ alalım. $K\subseteq K+N$ olduğu açıktır. Bu durumda *K, L* nin *M* içindeki herhangi komplementi olduğundan $(K+N)\cap L\neq 0$ olur.

Buradan $n \in N$ ve $0 \neq x \in L$ için $x = k + n$ olacak şekilde bir $k \in K$ vardır. Böylece $n = x - k \in (K \oplus L) \cap N = 0$ olduğundan $n = 0$ elde edilir. $x = k \in K \cap L$ ise $x = 0$ olur. Bu ise çelişkidir. O halde $K = K + N$ dir. Böylece $N \leq K$ ise $N \leq K \oplus L$ olur. $(K \oplus L) \cap N = N = 0$ olduğundan $N = 0$ dır. Dolayısıyla $K \oplus L \leq_e M$ elde edilir.

Tanım 2.2.3. *M* bir modül ve *K*, *M* nin bir alt modülü olsun. Eğer *K*, *M* de herhangi bir alt modülün komplementi ise *K* ya (*M* de) bir *komplementtir* denir ve $K \leq_c M$ şeklinde gösterilir.

Bir *M* modülü için $0, M \leq_c M$ dir.

Daha genel olarak,

Sonuç 2.2.1. Bir *M* modülünün her dik toplananı *M* de bir komplementtir.

İspat: $A \leq_d M$ ise $A \leq_c M$ dir. Gerçekten, $M = A \oplus B$ olacak şekilde $\exists B \leq M$ vardır. $A \leq N \leq M$ ve $N \cap B = 0$ olan $N \leq M$ olsun. $N = N \cap M = N \cap (A \oplus B) = A \oplus (N \cap B) = A$ olur. Yani, $A \leq M$, $A \cap B = 0$ şartını sağlayan maksimal alt modül olduğundan $A \leq_c M$ dir .

Sonuç 2.2.1. de verilen ifadenin tersi genel olarak doğru olmayabilir. Örneğin; *F* de bir cisim ve *V* de *2* boyutlu bir vektör uzayı olmak üzere $R_R = \left\{ \begin{bmatrix} f & v \\ 0 & f \end{bmatrix} : f \in F, v \in V = (v_1 F \oplus v_2 F) \right\}$ ve $I = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & v_1 f \\ 0 & 0 \end{bmatrix} : f \in F \right\}$, ve $J = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & v_2 f \\ 0 & 0 \end{bmatrix} : f \in F \right\}$ olarak alalım. Bu durumda *I*,*J* nin *R* deki (benzer olarak *J*,*I*) komplementidir. Yani *I*, *R* de komplementtir. Ancak, *I*, *R* nin bir dik toplananı değildir.

Önerme 2.2.4. *M* bir modül ve $N \leq M$ olsun. Bu durumda $N \leq_e K$ olacak şekilde bir $K \leq_c M$ vardır.

İspat: N', *M* de *N* nin komplementi olsun. Böylece $N' \cap N = 0$ dir ve N' nün bi *K* komlementi vardır ve Önerme 2.2.2. den $N \subseteq K$ dır. $0 \neq L \leq K$ olsun. $N' \subseteq L + N'$ olduğundan $(L + N') \cap N \neq 0$ olur. Böylece $0 \neq n \in (L + N') \cap N$ ise $n \in (L + N') \, ve \, n \in N$ olur. $x \in L, \mathrm{n}' \in \mathrm{N}'$ olmak üzere $n = x + n'$ dir. Buradan $n' = n - x \in N' \cap K = 0$ olduğundan $n' = 0$ dır. Böylece $n = x \in N \cap L$ olup $N \cap L \neq 0$ olur. Yani $N \leq_e K$ elde edilir.

Tanım 2.2.4. Önerme 2.2.4. de varlığı ispatlanan *K* alt modülüne *N* nin *M* deki *kapanışı (closure)* denir.

Önerme 2.2.5. *M* modül ve *K, M* nin alt modülü olsun. Bu durumda $K \leq_c M$ olması için gerek ve yeter şart $K \leq_e L \leq M \; ise \; K = L$ olmasıdır.

İspat: Farzedelim ki $K \leq_c M$ ve $K \leq_e L \leq M$ olsun. Bu durumda *K* bir *X* in *M* de komplementi olacak şekilde $X \leq M$ vardır. Böylece $K \cap X = 0$ olur. $0 = K \cap X \leq_e L \cap X$ olduğundan $L \cap X = 0$ dır. *K*, $K \cap X = 0$ koşulu altında maksimal olduğundan $K = L$ dir. Tersine $K \leq M$ olduğundan Önerme 2.2.4 den *K* nın *M* de bir *L* kapanışı vardır. Yani $K \leq_e L \leq_c M$ dir. $K = L$ olduğundan $K \leq_c M$ dir.

Önerme 2.2.6. *M* bir modül ve $K, N \leq M$ olsun. Eğer $K \leq_c N \; ve \; N \leq_c M$ ise $K \leq_c M$ dir. (Goodearl, 1976)

İspat: $K \leq_c N \; ve \; N \leq_c M$ olduğunu kabul edelim. Buradan bir $K' \leq N$ için *K*, K' nün *N* deki komplementi ve bir $N' \leq M$ için de *N*, N' nün *M* deki komplementi olur. $x \in K \cap (\mathrm{K}' + \mathrm{N}')$ alalım. $\mathrm{k}' \in \mathrm{K}', n' \in N'$ için $x = \mathrm{k}' + n'$ dür. $x - \mathrm{k}' = n' \in N' \cap N = 0$ olur. Böylece $x = k' \in K' \cap K = 0$ olduğundan $K \cap (K' + N') = 0$ elde edilir. Farzedelim ki $K \leq_e L \leq M$ olsun. O halde $0 = K \cap (K' + N') \leq_e L \cap (K' + N')$ olup $L \cap (K' + N') = 0$ dır. Buradan $[N \cap (L + N')] \cap K' = (N \cap K') \cap (L + N') = K' \cap (L + N') = 0$ olur. Fakat $K \subseteq N \; ve \; K \subseteq L + N'$ olduğundan $K \subseteq N \cap (L + N')$ dır. *K*, K' nün *N* deki komplementi olduğundan $K \cap K' = 0$ koşulu altında K' maksimal alt modüldür. $K \subseteq N \cap (L + N')$ ve $\left[N \cap (L + N')\right] \cap K' = 0$ olduğundan $K = N \cap (L + N')$ olur. Böylece $(N + L) \cap N' = 0$ dır. N, N' nün M deki komplementi olduğundan $N \cap N' = 0$ koşulu altında N' maksimal alt modüldür ve $N \subseteq N + L$ olduğundan $N = N + L$ dir. Buradan $L \leq N$ olur. $L = L \cap (L + N') \leq N \cap (L + N') = K$ olduğundan $K = L$ dir. Önerme 2.2.5 den $K \leq_c M$ elde edilir.

Önteorem 2.2.2. $N \leq M$ ve $K \leq_d M$ olsun. Bu durumda, K nın N nin komplementi olması için gerek ve yeter koşul $K \cap N = 0$ ve $K \oplus N \leq_e M$ olmasıdır.

İspat: $(\Rightarrow)$: Varsayalım ki K, N nin komplementi olsun. Buradan, $K \cap N = 0$ dır. $0 \neq x \in M$ alalım. Eğer $x \in K$ ise $0 \neq xR = xR \cap K \subseteq xR \cap (K \oplus N)$ dir. Eğer $x \notin K$ ise $N \cap (xR + K) \neq 0$ ve böylece $xR \cap (K \oplus N) \neq 0$ dır. Her iki durumda da her $0 \neq x \in M$ için $xR \cap (K \oplus N) \neq 0$ dır. Böylece $K \oplus N \leq_e M$ dir.

$(\Leftarrow)$: Tersine, $K \cap N = 0$ ve $K \oplus N \leq_e M$ olsun. $K \leq_d M$ olduğundan bir $K' \leq M$ vardır öyle ki $M = K \oplus K'$ dür. Kabul edelim ki $K \subseteq K_1$ ve $K_1 \cap N = 0$ koşulunu sağlayan bir $K_1 \leq M$ vardır. Bu durumda

$$K_1 = K_1 \cap M = K_1 \cap (K \oplus K') = K \oplus (K_1 \cap K')$$

dür. $0 \neq y \in (K_1 \cap K')$ alalım. Bu durumda bazı $n \in N, k \in K$ ve $r \in R$ için $0 \neq yr = n + k$ dır (çünkü $N \oplus K \leq_e M$). Buradan $yr - k = n \in K_1 \cap N = 0$ dır. Böylece $yr = k \in K' \cap K = 0$ dır ki bu da $yr \neq 0$ olmasıyla çelişir. O halde $K_1 \cap K' = 0$ ve $K = K_1$ dir. yani K, N nin komplementidir.

Teorem 2.2.1. M bir modül, $K \leq_c M$ ve $K \leq N \leq M$ olsun. Bu durumda $N \leq_e M$ olması için gerek ve yeter şart $N/K \leq_e M/K$ olmasıdır.

İspat: İlk olarak $N/K \leq_e M/K$ olduğunu kabul edelim. $N \leq_e M$ olduğu Önerme 2.2.1.(5) den açıktır. Tersine $N \leq_e M$ olsun. $M' = M/K$, $N' = N/K$ ve $N' \cap L' = 0$ olacak şekilde $L' \leq M'$ alalım. Bu durumda bir $L \leq M$ için $K \subseteq M$ olmak üzere $L' = L/K$ ve $N \cap L = K$ dır. K, K' nün M deki komplementi olsun. Böylece $K \cap K' = 0$ olduğundan $N \cap L \cap K' = 0$ dır. $N \leq_e M$ olduğundan $L \cap K' = 0$ olur. Buradan $K \subseteq L$ ve K, K' nün M deki komplementi olduğundan $K = L$ dir. $L' = 0$ olup $N' \leq_e M'$ olur. Yani $N/K \leq_e M/K$ dir.

Tanım 2.2.5. M sıfırdan farklı bir R modül olsun. M nin sıfırdan farklı her alt modülü essential altmodül ise M ye *düzgün (uniform) modül* denir.

Örneğin; $\mathbb{Z}_{\mathbb{Z}}$ ve $\mathbb{Q}_{\mathbb{Z}}$ birer uniform modüldür.

Önerme 2.2.7. M bir R modül ve U, M nin düzgün alt modülü olsun. Bu durumda $U \leq_c M$ olması için gerek ve yeter koşul U, M nin maksimal düzgün alt modülü olmasıdır.

İspat: İlk olarak $U \leq_c M$ olduğunu kabul edelim. $U \leq N \leq M$ olacak şekilde N M nin düzgün bir alt modülü olsun. Bu durumda $U \leq_e N$ dir ve $U \leq_c M$ olduğundan Önerme 2.2.5 den $U = N$ elde edilir. O halde U maksimal düzgün alt modüldür. Tersine U, M nin maksimal düzgün alt modülü olsun. Önerme 2.2.4 dan $U \leq_e K \leq_c M$ olacak biçimde bir $K \leq M$ vardır. Şimdi K nın düzgün alt modül olduğunu görelim. $0 \neq X \leq K$ alalım. $Y \leq K$ için $X \cap Y = 0$ olsun. Bu durumda $(U \cap X) \cap (U \cap Y) = 0$ dır. U düzgün olduğundan $U \cap Y = 0$ ve $U \leq_e K$ olduğundan $Y = 0$ bulunur. Böylece $X \leq_e K$ elde edilir. Yani K düzgün alt modüldür. Varsayımımız olan U nun M de maksimal düzgün alt modül olmasından dolayı $U = K$ elde edilir. Sonuç olarak $U \leq_c M$ dir.

Tanım 2.2.6. M bir R modül olsun. Bu durumda $Z(M) = \{ m \in M \mid bir\ E \leq_e R_R\ için\ mE = 0 \}$ kümesi M nin bir altmodülüdür ki, buna M'nin *tekil (singüler) alt modülü* denir. Eğer $Z(M) = M$ ise M ye singüler,

$Z(M)=0$ ise M ye *nonsingüler modül* denir. Örneğin U bir düzgün modül olmak üzere, $Z(\mathbb{Z}_{\mathbb{Z}})=Z(\mathbb{Q}_{\mathbb{Z}})=Z(U_R)=0$ dır.

Yine bir M modülü için $Z_2(M)=\{m\in M \mid bir\ E\leq_e R_R\ için\ mE\subset Z(M)\}$ kümesi M ninbir alt modülüdür ki, buna M nin *ikinci tekil (singüler) alt modülü* denir. $Z(M)\leq Z_2(M)$ ve $Z_2(M)\leq_c M$ olduğu açıktır. (Goodearl, 1976)

Teorem 2.2.2. M bir modül olsun. B, A nın M de komplementi, A' de $A\leq A'$ olmak üzere B nin M de komplementi ise

$$A\leq_e A'$$

ve A' , M nin A yı essential alt modül olarak içeren alt modüller kümesinde maksimal elemandır. (yani $A\leq_e K$ ve $A'\leq K\leq M \Rightarrow A'=K$ dır).

Önerme 2.2.8. M ve A R-modüller olsun.

i. M nonsingüler'dir. (Yani $Z(M)=0$) $\Leftrightarrow$ Tüm singüler A_R modülleri için $Hom(A_R,M_R)=0$ dır.

ii. $A\leq_e M \Rightarrow M/A$ singülerdir. ($Z(M/A)=M/A$)

iii. M singüler ve $A\leq M$ olsun. M/A singülerdir. $\Leftrightarrow$ $A\leq_e M$ dir.

Tanım 2.2.7. F bir R modül, $0\neq X\subseteq F$ küme ve $i:X\to F$ bir dönüşüm olsun. Eğer bir A, R-modülü için $f:X\to A$ dönüşümü için tek $\overline{f}:X\to A$, $\overline{f}\circ i=f$ olacak şekilde bir homomorfizma varsa *F, X de serbest modül* denir.

Tanım 2.2.8. R bir halka J, R modül, $g:A\to B$ ve $f:A\to J$ homomorfizmalar olmak üzere $0\to A\to B$ kısa tam dizisi olsun.

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & A \arrow[r] \arrow[d] & B \arrow[dl] \\ & J & \end{tikzcd}$$

diyagramı değişmeli yani $h \circ g = f$ olacak şekilde $h : B \to J$, R modül homomorfizması varsa J ye *injektif modül* denir.

Sonuç 2.2.2. N bir R modül olsun. Bu durumda aşağıdaki koşullar denktir.

1) N injektif modüldür.

2) $N \le M_R$ ise N, M de dik toplanandır.

İspat: $1 \Rightarrow 2)$ $N \le M$ ve N injektif bir modül olsun.

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & N \arrow[r] \arrow[d] & M \arrow[dl] \\ & N & \end{tikzcd}$$

diyagramında N injektif modül olduğundan $Q : M \to N$ ye bir homomorfizması vardır. $m \in M$ alalım. $Q(m) \in N$ olur. Buradan $Q(m) = Q(Q(m))$ dir. O halde $Q(m - Q(m)) = 0$ olup $(m - Q(m)) \in \ker Q$ dır. Yani $m \in \ker Q + Q(m)$ dir. Böylece $M \subseteq \ker Q + N$ elde edilir. Ayrıca $Q(m) \subset N \le M$ ve $\ker Q \le M$ olduğundan $\ker Q + N \subseteq M$ olur. Dolayısıyla $M = \ker Q + N$ dir. $x \in \ker Q \cap N$ alalım. O halde $Q(x) = 0$ ve $x \in N$ olur. $x \in N$ olduğundan $Q(x) = x$ dir. Böylece $x = 0$ olup $\ker Q \cap N = 0$ olduğundan $M = N \oplus \ker Q$ dir. Yani N, M nin dik toplananıdır.

$2 \Rightarrow 1)$ Tersine $N \le M_R$ ise N, M de dik toplanan olsun. (Sharpe ve Vaimos,1972) de Teorem 2.11. den her modülün injektif genişlemesi olduğundan I_R injektif modül olmak üzere $N \le I_R$ dir. Kabulümüzden dolayı $I = N \oplus N'$ olacak şekilde $N' \le I_R$ vardır. (Sharpe ve Vaimos,1972) de Önerme 2.3. den I_R injektif olduğu için N de injektiftir.

Tanım 2.2.9. R bir halka P, R-modül , $g : A \to B$ ve $f : P \to B$ homomorfizmalar olmak üzere $A \to B \to 0$ kısa tam dizisi olsun.

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[dl] \arrow[d] & \\ A \arrow[r] & B \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

diyagramı değişmeli yani $g \circ h = f$ olacak şekilde $h: P \to A$, R-modül homomorfizması varsa P ye *projektif modül* denir.

Sonuç 2.2.3. R bir halka ve P bir R-modül olsun. O halde, aşağıdakiler denktir.

1) P projektiftir.
2) Her

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} P \longrightarrow 0$$

kısa tam dizisi split dizidir.

3) F bir serbest modül ve K, R –modül olmak üzere $F \cong K \oplus P$ dir.

İspat: $1 \Rightarrow 2)$

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[d, "1_P"'] & \\ B \arrow[r] & P \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

diyagramını göz önüne alalım. P projektif olduğundan $g \circ h = 1_P$ olacak şekilde bir R-modül homomorfizması vardır. Böylece kısa tam dizi

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \underset{h}{\overset{g}{\rightleftarrows}} P \longrightarrow 0$$

olduğundan split dizidir. Buradan $B \cong A \oplus P$ dir.

$2 \Rightarrow 3)$ R halkası üzerindeki her A modülü serbest F modülünün homomorfik görüntüsüdür. O halde, P de bir R-modül olduğundan $g: F \to P$ epimorfizması vardır. Eğer $K = ker g$ alırsak,

$$0 \longrightarrow K \xrightarrow{\subset} F \xrightarrow{g} P \longrightarrow 0$$

dizisi tamdır. Hipotezden dizi split tam dizidir. Dolayısıyla $F \cong K \oplus P$ dir.

$3 \Rightarrow 1)$ $\pi : F \cong K \oplus P \to P$ kanonik epimorfizma ve $i : P \to F \cong K \oplus P$ kanonik monomorfizması olsun. Alt sınır tam olmak üzere

$$\begin{array}{ccccc} & & P & & \\ & & {}^{f}\downarrow & & \\ A & \xrightarrow[g]{} & B & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

R –modül homomorfizması diyagramı verilsin. Bu durumda,

$$\begin{array}{c} F \\ {}^{i}\uparrow\downarrow^{\pi} \\ P \\ \downarrow^{f} \\ A \to B \to 0 \end{array}$$

diyagramını ele alalım. F serbest modül olduğundan projektif modüldür. Böylece $g \circ h_1 = f \circ \pi$ olacak şekilde $h_1 : F \to A$ bir R modül homomorfizması vardır. $h = h_1 \circ i : P \to A$, R-modül homomorfizması olsun. O halde $gh = gh_1 i = (f \circ \pi) \circ i = f \circ (\pi \circ i) = f \circ 1_P = f$ olduğundan diyagram değişmelidir ve P projektiftir.

3. CS-MODÜLLER

3.1 Tanım ve Özellikler

Önceki kesimde gerekli özel alt modüller ve özellikleri verilmiştir. 1930 lu yıllarda Von Neumann'ın sürekli geometrisinde kullanması ile ilk olarak tanımlamış olup daha sonra Utumi (1965) ve öğrencisi tarafından CS kavramı halka ve modüllere taşınmıştır. Bu bölümde CS-modüller ile ilgili teorem ve sonuçlar ispatları ile verilecektir. Bu bölümde (Dung ve diğ., 1994) den yararlanılmıştır.

Tanım 3.1.1. *M* bir *R* modül olsun. Eğer *M* nin her *K* komplement alt modülü *M* de bir dik toplanan oluyorsa *M* ye *CS-modül (extending modül)* denir.

Bu duruma denk koşullardan biri *M* nin her *N* alt modülünün *M* nin bir dik toplananında essential olarak kapsanmasıdır.

Tanım 3.1.2. Yine bir *R* halkası için R_R *CS*-modül ise *R* ye *sağ CS-halka* denir.

CS-modüllere yarıbasit modüller, düzgün modüller, injektif modüller ve sonlu ranklı serbest abel grupları örnek verilebilir.

Tanım 3.1.3. *M* bir *R* modül olsun. Bu durumda *M* yi kapsayan essential injekif genişlemesi, maksimal essential genişlemesi veya minimal injektif genişlemesi koşullarından birini sağlayan modüle *M* nin *injektif hull* ı denir. *E(M)* ile gösterilir.

CS bir modülünün her alt modülü *CS* olmayabilir. Örneğin; *M*, *CS* olmayan bir *R* modül ve *E(M)* de *M* nin injektif hull'ı olsun. Bu durumda $M \leq E(M)$ ve *E(M), CS*-modüldür.

Önteorem 3.1.1. *M*, *CS*-modül ve *N, M* nin bir dik toplanan alt modülü olsun. Bu durumda *N, CS*-modüldür.

İspat: *N, M* de dik toplanan olduğundan $M = N \oplus K$ olacak şekide $K \leq M$ vardır. $X \leq_c N$ alalım. *N, M* de dik toplanan olduğundan $X \leq_c N \leq_c M$ olur. Komplementlerde geçişme özelliğinden $X \leq_c M$ dir ve *M, CS*-modül olduğundan

X, *M* de dik toplanandır. Buradan $M = X \oplus Y$ olacak şekilde $Y \leq M$ vardır. $N = N \cap M = N \cap (X+Y) = X \oplus (N \cap Y)$ olduğundan *X*, *N* nin bir dik toplananıdır. Böylece *N*, *CS*-modüldür.

Sonuç 3.1.1. *M*, *CS*-modül ve $N \leq_c M$ ise *N*, *CS*-modüldür.

İspat: Önteorem3.1.1. den açıktır.

Önteorem 3.1.1. in tersine *CS*-modüllerin bir dik toplamı *CS*-modül olmayabilir. Örneğin , *p* pozitif asal tamsayı olmak üzere $M_{\mathbb{Z}} = \left(\mathbb{Z}/\mathbb{Z}_p\right) \oplus \left(\mathbb{Z}/\mathbb{Z}_{p^3}\right)$ modülünü alırsak $\mathbb{Z}/\mathbb{Z}_p$ ve $\mathbb{Z}/\mathbb{Z}_{p^3}$ *CS*-modüldür ancak $M_{\mathbb{Z}}$ *CS*-modül değildir.

Şimdi, CS-modüllerin dik toplamlarının CS-modül olduğu durumları inceleyelim.

Teorem 3.1.1. *M₁* ile *M₂*, *CS*-modüller ve $M = M_1 \oplus M_2$ olsun. Bu durumda *M* nin *CS*-modül olması için gerek ve yeter şart *M* nin $K \cap M_1 = 0$ ya da $K \cap M_2 = 0$ olacak şekilde her *K* komplementinin bir dik toplanan olmasıdır.

İspat: Gereklilik açıktır. Tersine $K \cap M_1 = 0$ ya da $K \cap M_2 = 0$ olan her *K* komplementi *M* de bir dik toplanan olsun. $L \leq_c M$ alalım. Bir $H \leq_c L$ vardır ki, $L \cap M_2 \leq_e H$ dir. Önerme 2.2.6. dan $H \leq_c M$ dir. $H \cap M_1 = 0$ olduğu açıktır. Varsayımdan $M = H \oplus H'$ olacak biçimde $H' \leq M$ vardır. Böylece $L = H \oplus (L \cap H')$ dür. Önerme 2.2.6. dan $L \cap H' \leq_c M$ dir. Diğer yandan $(L \cap H') \cap M_2 = 0$ olduğu açıktır. Varsayımdan $L \cap H'$, M nin bir dik toplananıdır. $L \cap H'$, H' nün de bir dik toplananı olur. O halde *L*, *M* nin bir dik toplananıdır. Yani *M*, *CS*-modüldür.

Tanım 3.1.4. *R* bir halka ve, *M* ve *X* de *R*-modüller olsun. Eğer her $N \leq M$ için,

$$\begin{array}{ccccc} 0 & \longrightarrow & N & \xrightarrow{\alpha} & M \\ & & \downarrow{\scriptstyle \varphi} & & \\ & & X & & \end{array}$$

şeklinde verilen *R*-modül ve *R*-homomorfizmaların her diyagramında $\theta\alpha=\varphi$ olacak şekilde bir $\theta: M \to X$, homomrfizması varsa X modülüne *M-injektiftir*, denir. $M = M_1 \oplus M_2 \oplus \ldots M_n$ olsun. Eğer $i \neq j$ için M_i modülü M_j -injektif modül ise $M_i\left(1 \leq i \leq n\right)$ modülüne *göreceli injektif* modül denir. (Dung ve diğ., 1994) ve (Mohamed ve Müller, 1990)

Teorem 3.1.2. *R* bir halka olsun. Bu durumda bir *R* modül *M* nin *CS* modül olması için gerek ve yeter koşul M' ve $Z_2\left(M\right)$, *CS*-modüller ve $Z_2\left(M\right)$, M' - injektif olacak biçimde $M' \leq M$ vardır ki, $M = M' \oplus Z_2\left(M\right)$ dir.

İspat: *M, CS*-modül olsun. $Z_2\left(M\right) \leq_c M$ olduğundan $M = M' \oplus Z_2\left(M\right)$ olacak biçimde $M' \leq M$ vardır ki M' nonsingülerdir. O halde Önteorem 3.1.1. den $Z_2\left(M\right)$ ve M' *CS*-modüllerdür. Şimdi $X \leq M'$ ve $\varphi: X \to Z_2\left(M\right)$ bir homomorfizma olsun. $X' = \left\{x - \varphi\left(x\right) : x \in X\right\}$ kümesini oluşturalım. $X' \leq M$ dir. Varsayımdan $X' \leq_e L$ olcak biçimde *M* nin bir *L* dik toplananı vardır. $Y \leq M$ için $M = L \oplus Y$ yazalım. $X' \cap Z_2\left(M\right) = 0$ ve $X' \leq_e L$ olduğundan L nonsingülerdir ve $Z_2\left(M\right) = Z_2\left(Y\right)$ dir. Böylece $Z_2\left(M\right)$, *Y* nin bir dik toplananıdır. $Y = Y' \oplus Z_2\left(M\right)$ olarak alalım. $\pi: L \oplus Y' \oplus Z_2\left(M\right) \to Z_2\left(M\right)$ kanonik projeksiyon olsun. $\pi\big| x = \varphi$ olduğu açıktır. O halde $Z_2\left(M\right)$, M'-injektiftir.

Tersine $M = M' \oplus Z_2\left(M\right)$, $Z_2\left(M\right)$ ile M', CS-modülle ve $Z_2\left(M\right)$, M'- injektif olsun. $A \leq_c M$ olarak alalım. $Z_2\left(A\right) \leq_c A$ olduğundan $Z_2\left(A\right) \leq_c M$ dir. O halde $Z_2\left(A\right) \leq_c Z_2\left(M\right)$ dir. Böylece $Z_2\left(A\right), Z_2\left(M\right)$ nin bir dik toplananıdır ki, buradan $Z_2\left(A\right)$, A nın bir dik toplananı olarak bulunur. $A = Z_2\left(A\right) \oplus B$ olarak alalım. B nonsingülerdir. $B \cap Z_2\left(M\right) = 0$ ve $Z_2\left(M\right)$, M'- injektif olduğundan bir $\theta: M' \to Z_2\left(M\right)$ homomrfizması vardır ki, $\pi_1: M \to Z_2\left(M\right)$ ve $\pi_2: M \to M'$ projeksiyon dönüşümleri olmak üzere $\theta\pi_2\big|B = \pi_1\big|B$ dir. O halde $B \subseteq N' = \left\{n + \theta\left(n\right) : n \in M'\right\}$ dür. $N' \cong M'$ ve M', CS-modül olduğundan N' de

CS-modüldür. Böylece *B*, N' nün bir dik toplananıdır. $M = Z_2\left(M\right) \oplus N'$ olduğu açıktır. Buradan *A*, *M* nin bir dik toplananıdır.

Teorem 3.1.3. M_i $\left(1 \leq i \leq n\right)$ ler göreceli injektif modüller olmak üzere $M = M_1 \oplus M_2 \oplus ... \oplus M_n$ olsun. Bu durumda *M* nin CS-modül olması için gerek ve yeter şart her bir $1 \leq i \leq n$ için M_i modülünün CS-modül olmasıdır.

İspat: Gereklilik Önteorem 3.1.1. den açıktır. Tersine her bir $1 \leq i \leq n$ için M_i bir *CS*-modül olsun. Tümevarımla ispatı tamamlayacağız. Bunun için *n=2* durumunda *M* nin *CS*-modül olduğunu ispatlamak yetecektir. $K \cap M_1 = 0$ olacak biçimde bir $K \leq_c M$ alalım**. (**Dung ve diğ. , 1994**)** de Lemma 7.5 den, $M = M_1 \oplus M'$ ve $K \subseteq M'$ olacak biçimde bir $M' \leq M$ vardır. Açıktır ki $M' \cong M_2$ ve böylece de M' bir *CS*-modüldür. $K \leq_c M'$ olduğundan *K*, M' nün bir dik toplananıdır. Buradan *K*, *M* nin bir dik toplananıdır. Benzer olarak $X \cap M_2 = 0$ olacak biçimde herhangi bir $X \leq_c M$ de bir dik toplanandır. Böylece Teorem 3.1.1. den , *M* bir *CS*-modüldür.

Herhangi bir *p* asal tamsayı için $\mathbb{Z}$ -modül $\mathbb{Z}/\mathbb{Z}p \oplus \mathbb{Z}/\mathbb{Z}p^3$ ün bir *CS*-modül olmadığını biliyoruz. $\mathbb{Z}/\mathbb{Z}p^3$ modülü $\mathbb{Z}/\mathbb{Z}p$ injektiftir ancak $\mathbb{Z}/\mathbb{Z}p$ modülü $\mathbb{Z}/\mathbb{Z}p^3$ injektif değildir. Diğer yandan, $\mathbb{Z}/\mathbb{Z}p$ modülü $\mathbb{Z}/\mathbb{Z}p^2$ injektif olmadığı halde $\mathbb{Z}/\mathbb{Z}p \oplus \mathbb{Z}/\mathbb{Z}p^2$ modülü *CS*- modüldür. (Dung ve diğ. , 1994)

Önteorem 3.1.2. M_R bir nonsingüler modül ve $K \leq M_R$ olsun. Bu durumda *K* nın *M* de komplement olması için gerek ve yeter koşul M/K nın nonsingüler modül olmasıdır.

İspat: M/K nonsingüler modül ve $K \leq_e N \leq M$ olsun. O halde $N/K = Z\left(N/K\right) \leq Z\left(M/K\right) = 0$ olur. Buradan $N/K = 0$ dır. Yani *N*=*K* elde edilir. böylece *K, M* de komplementtir.

Tersine *K, M* de komplement olsun. M/K nın nonsingüler modül olmadığını kabul edelim. O halde bir $m \in M$ ve $m \notin K$ elemanı vardır ki $mE \leq K$ ve $E \leq_e R_R$ dir.

$r \in R$ ve $k \in K$ için $mr+k$ elemanını ele alalım. $F = \{s \in R : \mathrm{rs} \in \mathrm{E}\}$ kümesini düşünürsek, $F \leq_e R_R$ ve $(mr+k)F \leq K$ dır. Eğer $(mr+k) \neq 0$ alırsak $(mr+k)F \neq 0$ olur ve burada $K \cap (mr+k)F \neq 0$ olur. Bu durumda $K \leq_e mR+K$ olur. Bu ise K nın M de komplement olmasıyla çelişir. Dolayısıyla M/K nonsingüler modüldür.

Şimdi dik toplananları CS-modül olsa bile kendisinin CS-modül olmadığı örnekleri vereceğiz.

Örnek 3.1.1. $R_R = \begin{bmatrix} \mathbb{Z} & \mathbb{Z} \\ 0 & \mathbb{Z} \end{bmatrix}$ modülü CS-modül değildir.

İspat: R_R nin nonsingüler olduğu açıktır. $M_1 = \begin{bmatrix} \mathbb{Z} & \mathbb{Z} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ ve $M_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \mathbb{Z} \end{bmatrix}$ olarak alırsak $R_R = M_1 \oplus M_2$ olur. M_1 ve M_2 düzgün modüller olduğundan CS-modüllerdir. Fakat R_R , CS-modül değildir. Gerçekten, $u = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \in R$ alalım. $uR = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbb{Z} & \mathbb{Z} \\ 0 & \mathbb{Z} \end{bmatrix} = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & x \\ 0 & 2x \end{bmatrix} : x \in \mathbb{Z} \right\}$ olup *uR,R* nin düzgün alt modülüdür ve böylece *dim(uR)=1* dir. *dimR=2* ve *dim(uR)=1* olduğundan *uR* essential değildir. Diğer yandan, eğer R, CS-modül olsaydı $uR \leq_e eR$ olacak biçimde bir $e^2 = e \in R$ olurdu. Buradan $u \in R$ olduğundan $u \in eR$ dir. O halde, $r \in R$ için $u = er$ ise $eu = er = u$ olur. Yani $\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & a+2b \\ 0 & 2c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ elde edilir. Buradan *c=1* ve *a+2b=1* bulunur. Böylece $\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ olur. $\begin{bmatrix} a^2 & (a+1)b \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ olup *a=0,1* elde edilir. *a=0* ise $b = 1/2 \notin \mathbb{Z}$ dir. Eğer *a=1* ise $e = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ olur. Buradan *eR=R* bulunur. Fakat *uR* essential olmadığından bu bir çelişkidir. O halde R_R , CS-modül değildir.

Örnek 3.1.2. $M_R = (\mathbb{Z}[x] \oplus \mathbb{Z}[x])_{\mathbb{Z}[x]}$ modülü CS-modül değildir.

İspat: Öncelikle M_R ın nonsingüler modül olduğunu not edelim. $\mathbb{Z}[x]_{\mathbb{Z}[x]}$ düzgün modül olduğundan CS-modüldür. Şimdi $C=\{(xr,2r):r\in R\}\leq M_R$ modülünü ele alalım. Bu durumda $Z(M/C)=0$ dır. Gerçekten, $(f,g)+C\in Z(M/C)$ olsun. O halde $[(f,g)+C]E=C$ olacak şekilde bir $E\leq_e R_R$ vardır. Yani $(fE,gE)\in C$ dir. Böylece $fE=xr$ ve $gE=2r$ dir. Buradan *2f=xg* olur. $f=x(g/2)\in R$ ve $g/2\in R$ dir. Bu durumda $(f,g)+C=(x(g/2,g))+C=(x(g/2),2(g/2))+C=C$ olur. Yani $(f,g)\in C$ dir. $(f,g)+C=\overline{0}$ elde edilir. Dolayısıyla $Z(M/C)=0$ dır. Önteorem3.1.2. den $C\leq_c M_R$ dir. Farzedelim ki *C*, *M* de dik toplanan olsun. O halde $M=C\oplus D$ olacak şekilde $D\leq M_R$ vardır. $\pi:M\rightarrow C$ kanonik projeksiyon olsun. $a\in C, b\in D$ olmak üzere $\pi(a,b)=a$ olarak tanımlansın. $\pi(1,0)=(xr,2r)$ ve $\pi(0,1)=(xs,2s)$ olsun. Böylece $(x,2)\in C$ için $(x,2)=\pi(x,2)=\pi(x,0)+\pi(0,2)=x\pi(1,0)+2\pi(0,1)=x(xr,2r)+2(xs,2\mathrm{s})=$

$(x^2r+2xs,2xr+4s)$ olur. Buradan $1=xr+2s$ dir. Yani $R=xR+2R$ dir. Bu ise çelişkidir. Dolayısıyla M_R , CS-modül değildir.

4. SÜREKLİ VE YARI-SÜREKLİ MODÜLER

Bu bölümde, sürekli ve yarı-sürekli modüllerin belirli altmodüllerden *M* ye olan dönüşümleri, *M* den *M* ye olan genişletilmesi karakterizasyonları verilecektir. Bu bölüm için (Mohamed, Müller, 1990), (Smith ve Tercan,1992) kaynaklarından yaralanılmıştır.

4.1 Tanımlar ve Özellikler

(C_2) *M* nin herhangi alt modülü bir dik toplanana izomorf iken *M* nin bir dik toplananıdır.

(C_3) M_1 ve M_2, *M* nin $M_1 \cap M_2 = 0$ koşulunu sağlayan herhangi bir iki dik toplananı ise $M_1 \oplus M_2$, *M* de dik toplanandır.

Tanım 4.1.1.

1) *M* bir *CS* modül olsun. Eğer *M,* (C_2) ((C_3)) koşulunu sağlarsa *M* ye *sürekli (yarı sürekli) modül* denir.
2) *M* nin her *N* altmodülü için her $\varphi : N \to M$ homomorfizması bir $\theta : M \to M$ homomorfizmasına genişleyebiliyorsa *M* ye *yarı (quasi) injektif modül* denir.

Önteorem 4.1.1. *M* bir modül olsun. Bu durumda aşağıdaki koşullar sağlanır.

1) *M* modülü sürekli ise yarı süreklidir. Genel olarak tersi doğru değildir. (Mohamed, Müller, 1990),
2) *M* modülü sürekli (yarı sürekli) ise, *M* nin her dik toplananıda sürekli (yarı sürekli) dir.

İspat: (1) *M* sürekli modül olsun. *M* nin (C_3) koşulunu sağladığını gösterelim. *K* ve *L, M* nin $K \cap L = 0$ koşulunu sağlayan dik toplananları olsun. $M = K \oplus K'$ $M = K \oplus K'$ olacak biçimde bir $K' \leq M$ vardır. $\pi : M \to K'$ kanonik projeksiyonu göstersin. $K \cap L = 0$ olduğundan $\pi(L) \cong L$ ve böylece de $\pi(L)$, M nin dik toplananıdır. O halde $M = \pi(L) \oplus L'$ olacak biçimde bir $L' \leq M$ vardır. Buradan, $K' = \pi(L) \oplus (K' \cap L')$ ve $M = K \oplus \pi(L) \oplus (K' \cap L')$ dür. Böylece; $K \oplus \pi(L)$, M nin bir dik toplananıdır. $K \oplus L = K \oplus \pi(L)$ olduğundan *M,* (C_3) koşulunu sağlar.

Tersinin doğru olmadığına ilişkin bir örnek olarak $M_{\mathbb{Z}} = \mathbb{Z}_{\mathbb{Z}}$ alınırsa *M* yarısürekli ancak sürekli değildir.

(2) bu şıkkın ispatını yarı-sürekli modüller için yapacağız. Benzer olarak, sürekli modüller içinde yapılabilir. *M*, yarı-sürekli modül ve *N*, *M* nin bir dik toplananı olsun Önteorem 3.1.1. den *N*, *CS*-modüldür.

Şimdi K_1 ve K_2 yi *N* nin $K_1 \cap K_2 = 0$ olacak şekilde iki dik toplananı olarak alalım. O halde $M = K_1 \oplus K_2 \oplus L$ olacak biçimde $L \leq M$ vardır.

$$N = N \cap M = N \cap (K_1 \oplus K_2 \oplus L) = K_1 \oplus (N \cap (K_2 \oplus L)) = K_1 \oplus K_2 \oplus (N \cap L)$$

olduğundan *N*, (C_3) koşulunu sağlar. O halde *N*, yarı süreklidir.

Önteorem 4.1.2. *M* bir modül ve (C_3) koşulunu sağlaması için gerek ve yeter şart *M* nin her *K* altmodülü, *M* nin K_1 ve K_2 dik toplananları için $K = K_1 \oplus K_2$ ise , her $\varphi : K \to M$ homomorfizması bir $\theta : M \to M$ homomorfizmasına genişletilebilir.

İspat: Eğer *M* modülü (C_3) koşulunu sağlarsa, *M* nin $M_1 \cap M_2 = 0$ koşulunu sağlayan M_1 ve M_2 dik toplananları için $M_1 \oplus M_2$, *M* de dik toplanandır. $K = K_1 \oplus K_2$ dersek, K_1 ve K_2 , *M* nin dik toplananları olduğundan *K*, *M* nin bir dik toplananıdır. O halde $M = K \oplus K'$ olacak biçimde bir $K' \leq M$ vardır. Eğer $\varphi : K \to M$ bir homomorfizma ise, $\theta : M \to M$ yi $k \in K, k' \in K'$ olmak üzere $\theta(k + k') = \varphi(k)$ olarak tanımlarsak, $\theta | K = \varphi$ dir.

Tersine, farzedelim ki *M* nin her *K* alt modülü *M* nin K_1 ve K_2 dik toplananları için $K = K_1 \oplus K_2$ ise, her $\varphi : K \to M$ homomorfizması bir $\theta : M \to M$ homomorfizmasına genişletilsin. N_1 ve N_2 , M nin $N_1 \cap N_2 = 0$ koşulunu sağlayan herhangi iki dik toplanan alt modüller olsun. O halde dik toplanan tanımından *M* nin öyle L_1 ve L_2 alt modülleri vardır öyle ki, $M = N_1 \oplus L_1 = N_2 \oplus L_2$ dir. $\varphi : N_1 \oplus N_2 \to M$, $x \in N_1, y \in N_2$ olmak üzere $\varphi(x+y) = x$ şeklinde bir homomorfizma tanımlansın. Hipotezden φ nin bir genişlemesi olan bir $\theta : M \to M$ homomrofizması vardır öyle ki $x \in N_1, y \in N_2$ olmak üzere $\varphi(x+y) = x$ dir. Şimdi $\pi : M \to N_1$ kanonik projeksiyon ve $\chi = \pi\theta : M \to N_1$ olsun. O zaman, her $x \in N_1$ için $\chi(x) = \pi\theta(x) = \pi(x) = x$ olur. $N_1 \subseteq M$ ve $ker\chi \subseteq M$ olduğundan $N_1 + ker\chi \subseteq M$ dir. Şimdi $m \in M$ ve $n_1 \in N_1$ için $m = n_1 + (m - n_1)$ alalım. $n_1 \in N_1$ ve $\chi(m-n_1) = \chi(m) - \chi(n_1) = n_1 - n_1 = 0$ olduğundan $m - n_1 \in ker\chi$ olur ve $M \subseteq N_1 + ker\chi$ elde edilir. Böylece $M = N_1 + ker\chi$ dir. Ayrıca $x \in N_1 \cap ker\chi$ olsun. Buradan $x \in N_1$ ve $x \in ker\chi$ dir. $x \in N_1$ ise bir $n_1 \in N_1$ için $x = n_1$ dir. $x \in ker\chi$ ise $\chi(x) = 0$ dır. Buradan $\chi(n_1) = n_1 = 0$ elde edilir. Böylece, $N_1 \cap ker\chi = 0$ olduğundan $M = N_1 \oplus ker\chi$ dir. Ayrıca $n_2 \in N_2$ ise $\chi(n_2) = \pi\theta(n_2) = \pi(0) = 0$ olduğundan $n_2 \in ker\chi$ olur. Yani, $N_2 \subseteq ker\chi$ dir. Modüler kuralından $ker\chi = ker\chi \cap M = ker\chi \cap (N_2 \oplus L_2) = N_2 \oplus (ker\chi \cap L_2)$ olur. Böylece $M = N_1 \oplus ker\chi = N_1 \oplus N_2 \oplus (ker\chi \cap L_2)$ olduğundan $N_1 \oplus N_2$, *M* nin dik toplananıdır. Dolayısıyla *M*, (C_3) ü sağlar.

Önteorem 4.1.3. *K*, *M* de bir komplement altmodül olsun. O zaman, *K* nın *M* de bir dik toplanan olması için gerek ve yeter şart *K* nın *M* deki bir *L* komplementi için her $\varphi : K \oplus L \to M$ homomorfizması bir $\theta : M \to M$ homomorfizmasına genişletilebilir.

İspat: *K*, *M* nin bir dik toplananı olsun. O zaman *M* nin öyle bir K' alt modülü vardır ki $M = K \oplus K'$ olur. Buradan $L = K'$ olarak tanımlanması ispatı tamamlar. Tersine farzedelim ki *L* verilen koşulu sağlayan *K* nın *M* deki komplementi olsun. $\varphi : K \oplus L \to M$ homomorfizmasını, $x \in K, y \in L$ için $\varphi(x+y) = x$ olarak alalım. Hipotezden bir $\theta : M \to M, \theta(x+y) = x$ olacak şekilde homomorfizma vardır. Buradan $K \subseteq Im\theta$ ve $L \subseteq ker\theta$ dır. $0 \neq v \in Im\theta$ olsun. O zaman bir $u \in M$

vardır öyle ki $v=\theta(u)$ dur. $u \notin L$ olsun. Bu durumda $L \subseteq L+uR$ olur ve *L*, *K* nın *M* deki komplementi olduğundan $K \cap L = 0$ koşulunu sağlayan maksimal alt modüldür. Böylece $K \cap (L+uR) \neq 0$ olur. O halde $x \in K,\ y \in L$ ve $r \in R$ için, $0 \neq x = y+ur$ dir. Buradan $x=\theta(x)=\theta(y+ur)=vr$ elde edilir. $0 \neq v \in Im\theta$ için $vR \cap K \neq 0$ olduğu için $K \leq_e Im\theta$ olur. Fakat *K*, *M* de komplement olduğundan $K = Im\theta$ dır. Bu durumda $M = K \oplus Im\theta$ olduğu için *K*, *M* de dik toplanandır.

Son olarak CS-modüllerin dönüşümler cinsinden karakterizasyonlarından bahsedelim.

Sonuç 4.1.1. Bir *M* modülünün *CS*-modül olması için gerek ve yeter koşul *M* deki her *K* komplement alt modülü için, *K* nın bir *L* komplementi vardır ki, $\varphi : K \oplus L \to M$ homomorfizması bir $\theta : M \to M$ homomorfizmasına genişletilebilir.

İspat: Önteorem 4.1.3. den açıktır.

5. CS- MODÜLLER ÜZERİNE BAZI GENELLEMELER

Bu bölümde CS-modüllerin önemli iki genelleştirilmeleri incelenecektir. C_{11} (Smith ve Tercan, 2004) ve FI-extending (Birkenmeier ve diğ., 2002) olarak bilinen bu genellemeler ile ilgili elde edilen sonuçlar ayrıntılı olarak incelenecektir.

5.1 (C_{11})-Modüller

C_{11}-modüller Smith ve Tercan (2004) tarafından CS-modüllerin bir genellemesi olarak elde edilmiştir.

Tanım 5.1.1. *M* bir modül olsun. Eğer her $N \leq M$ alt modülünün dik toplanan olan bir komplementi varsa *M* ye C_{11} *modül* denir.

Önerme 5.1.1. *M* modülü *CS*-modülü ise C_{11}-modüldür.

İspat: $A, B \leq M$ ve $A \cap B = 0$ olsun. Bu durumda *A* nın $B \leq C$ olacak biçimde bir *C* komplementi vardır. *M*, CS-modül olduğundan $C \leq_d M$ dir. O halde *M*, C_{11}-modüldür.

Ayrıca C_{11}-modüllerin *CS*-modül olması gerekemez. Örneğin, bir *p* asal tam sayısı için $M = \left(\mathbb{Z}/\mathbb{Z}_p\right) \oplus \left(\mathbb{Z}/\mathbb{Z}_{p^3}\right)$, $\mathbb{Z}$-modülünü alalım. $M_{\mathbb{Z}}$, C_{11} modüldür. Ancak *CS*-modül değildir (Smith ve Tercan,1993). Birinci bölümde belirtildiği üzere, *CS*- modüllerin dik toplananları da *CS*-modüldür. Ancak *CS*-modüllerin bir dik toplamı genel olarak *CS*-modül olmak zorunda değildir. Oysa C_{11}-modüllerde bu durum farklıdır. Şöyle ki, C_{11}- modülün her dik toplananı C_{11}- modül olmayabilir. Diğer yandan C_{11}-modüllerin dik toplamlarının C_{11} -modül olduğunu aşağıdaki teorem ile vereceğiz.

Önerme 5.1.2. Bir M_R modülü için aşağıdaki koşullar denktir.

(1) M, modülü C_{11} koşulunu sağlar.

(2) M deki herhangi bir L komplement alt modülü için, $K \leq_d M$ olacak biçimde L nin bir K komplementi vardır.

(3) Herhangi bir $N \leq M$ için bir $K \leq_d M$ vardır öyle ki $N \cap K = 0$ ve $N \oplus K \leq_e M$ dir.

(4) Herhangi bir $L \leq_e M$ için bir $K \leq_d M$ vardır öyle ki $L \cap K = 0$ ve $L \oplus K \leq_e M$ dir.

İspat: $(1) \Rightarrow (2)$ ve $(3) \Rightarrow (4)$ açıktır.

$(1) \Leftrightarrow (3)$ ve $(2) \Leftrightarrow (4)$ Önteorem 2.2.2. den açıktır.

$(4) \Rightarrow (1)$ $A \leq M$ olsun. Bu durumda $A \leq_e B \leq_c M$ olacak şekilde bir $B \leq M$ vardır. Hipotezden bir $K \leq_d M$ vardır öyle ki $B \cap K = 0$ ve $B \oplus K \leq_e M$ dir. böylece Önteorem 2.2.2. den K, M de B nin bir komplementidir. Ayrıca $A \cap K \leq_e B \cap K = 0$ olduğundan $A \cap K = 0$ dır. Varsayalım ki $K < K' \leq M$ olsun. Bu durumda $K' \cap B \cap A \neq 0$ dır. Yani $K' \cap A \neq 0$ dır. Sonuç olarak K, M de A nın komplementidir.

Teorem 5.1.1. C_{11}-modüllerin dik toplamı da C_{11}-modüldür.

İspat: Λ indis kümesi olmak üzere, $\lambda \in \Lambda$ için M_λ lar C_{11}- modüller ve $M = \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} M_\lambda$ olsun. $N \leq M$ olsun. Bu durumda $N \cap M_\lambda \leq M_\lambda$ dır. M_λ C_{11}- modül olduğundan Önerme 5.1.2 den bir $K_\lambda \leq_d M_\lambda$ vardır öyle ki

$$(N \cap M_\lambda) \cap K_\lambda = 0 \text{ ve } (N \cap M_\lambda) \oplus K_\lambda \leq_e M_\lambda$$

dır. Buradan

$$N \cap (M_\lambda \cap K_\lambda) = N \cap K_\lambda = 0$$

ve

$$\left(N\cap M_\lambda\right)\oplus K_\lambda=\left(N\oplus K_\lambda\right)\cap M_\lambda\leq_e M_\lambda$$

dır. Şimdi Λ' "en az bir $K'\leq_d M'=\underset{\lambda\in\Lambda'}{\oplus}M_\lambda$ vardır öyle ki $N\cap K'=0$ ve $\left(N\oplus K'\right)\cap M'\leq_e M'$ dür" özelliğini sağlayan λ ları içeren Λ nın boştan farklı bir alt kümesi olsun. Farzedelim ki $\Lambda'\neq\Lambda$ olsun. O halde bir $\mu\in\Lambda$ vardır öyle ki $\mu\notin\Lambda'$ dür.

$$L=\left(N\oplus K'\right)\cap M_\mu\leq M_\mu$$

olduğundan bir $K_\mu\leq_d M_\mu$ vardır öyle ki $K_\mu\cap L=0$ ve $K_\mu\oplus L\leq_e M_\mu$ dür. Şimdi

$\Lambda''=\Lambda'\cup\{\mu\}$ ve $M''=\underset{\lambda\in\Lambda''}{\oplus}M_\mu=M'\oplus M_\mu$ olsun. Açıktır ki $K'\cap K_\mu=0$ dır. $K''=K'\oplus K_\mu$ olsun. Böylece $K'\leq_d M'$ ve $K_\mu\leq_d M_\mu$ olduğundan $K''\leq_d M''$ dür. Üstelik

$$K_\mu\cap N\leq K_\mu\cap L=K_\mu\cap\left(N\oplus K'\right)\cap M_\mu=K_\mu\cap\left(N\oplus K'\right)=0$$

olup $K_\mu\cap N=0$ dır. Diğer taraftan $K'\cap N=0$ olduğundan

$$N\cap\left(K_\mu\oplus K'\right)=N\oplus K''=0$$

dır.

Şimdi $N\oplus K''$ alt modülünü göz önüne alalım.

$$\left(N\oplus K'\right)\cap M'\leq\left(N\oplus K''\right)\cap M'$$

olduğundan

$$\left(N\oplus K''\right)\cap M'\leq_e M'$$

dür. Üstelik,

$$\left(N\oplus K''\right)\cap M_\mu=\left(\oplus K_\mu\right)\cap M_\mu=\left[\left(N\oplus K'\right)\cap M_\mu\right]\oplus K_\mu=L\oplus K_\mu\leq_e M_\mu$$

dür. Buradan

$$\left(N \oplus K''\right) \cap M'' \leq_e M''$$

elde edilir. Bu uygulamayı tekrarlayarak,

$$N \cap K = 0 \text{ ve } N \oplus K \leq_e M$$

olacak biçimde bir $K \leq_d M$ bulunur. Böylece *M*, C_{11}-modüldür

Şimdi ise C_{11}-modüllerin dik toplananının C_{11}-modül olmadığına dair bir örnek verelim.

Örnek 5.1.1. $\mathbb{R}$ gerçel bir cisim ve S de $\mathbb{R}\left[x, y, z\right]$ polinomlar halkası olsun. $s = x^2 + y^2 + z^2 - 1$ olmak üzere $\mathbb{R} = S/Ss$ değişmeli halkası olsun. Bu durumda $M_{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \oplus \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}$ modülü bir C_{11}-modül olup C_{11}-modül olmayan bir K dik toplananı içerir.

Tanım 5.1.2. *M* bir modül ve *N, M* nin bir alt modülü olsun. Eğer her $\varphi \in End(M_R)$ için $\varphi(\mathrm{N}) \subseteq \mathrm{N}$ oluyorsa *N* ye *M* nin *fully invariant* alt modülü denir. $N \lhd M$ şeklinde gösterilir.

Teorem 5.1.2. Bir M_R modülü için $End\left(M_R\right)$ abel ve $X \leq M$ için $h_i \in End\left(M_R\right)$ olmak üzere $X = \sum_{i \in I} h_i\left(M\right)$ olsun. Bu durumda *M* nin yarı-sürekli olması için gerek ve yeter koşul *M* nin C_{11}- modül olmasıdır.

İspat: Farzedelim ki *M*, C_{11} koşulunu sağlasın ve $X \leq M$ olsun. Bu durumda her $h_i \in End\left(M_R\right)$ için $X = \sum_{i \in I} h_i\left(M\right)$ dir. $e = e^2 \in End\left(M_R\right)$ homomorfizması için *eM, X* in komplementidir. $0 \neq x \in X$ alalım. Böylece $x = ex + \left(1 - e\right)x$ olur. Fakat $m_i \in M$ için $x = \sum_{i \in I} h_i\left(m_i\right)$ dir. Böylece $ex = e\sum_{i \in I} h_i\left(m_i\right) = \sum_{i \in I} h_i\left(em_i\right) \in X \cap eM = 0$ elde edilir. $eM \oplus X \leq_e eM \oplus \left(1 - e\right)M = M$ ve $X \leq \left(1 - e\right)M$ olduğundan $X \leq_e \left(1 - e\right)M$ dir.

Dolayısıyla *M*, *CS*-modüldür. $End(M_R)$ abel olduğundan *M*, (C_3) koşulunu da sağlar.

Gerçekten; *K* ve *L*, *M* nin $K \cap L = 0$ koşulunu sağlayan iki dik toplanan alt modülü olsun. Bu durumda $K = eM$ ve $L = fM$ olacak şekilde $e = e^2 \in End(M_R)$ ve $f = f^2 \in End(M_R)$ vardır. $(e+f)^2 = e + f + 2ef$ ve $End(M_R)$ abel olduğundan $(ef)(m) = e(f(m)) \in eM, (ef)(m) = (fe)(m) = f(e(m)) \in fM$ elde edilir. Böylece $ef \in eM \cap fM = K \cap L = 0$ olduğundan $(e+f)^2 = e + f \in End(M_R)$ olur. $(e+f)M \subseteq K + L$ ve $K + L \subseteq (e+f)M$ olduğundan $K + L = (e+f)M$ dir. Dolayısıyla *K*+*L*, *M* nin dik toplananıdır. Böylece *M*, yarı-sürekli olur. O halde *M* modülü yarı-süreklidir.

Tersi açıktır.

Aşağıdaki teorem ile bazı koşullar altında CS-modül ile C_{11} modüllerin denklik şartlarını verelim.

Önerme 5.1.3. *M* bir *R*-modül olsun. Aşağıdaki koşullardan herhangi biri sağlanırsa, *M* modülünün *CS* olması için gerek ve yeter şart *M* nin C_{11} modül olmasıdır.

1. $M_R = R_R$ ve *R* değişmelidir.
2. *M* modülü devirli ve *R* değişmelidir.
3. *M* bir çarpımsal modül ve *R* değişmelidir.

İspat: (1) *R* değişmeli olduğundan dolayı $End(R_R)$ de değişmelidir. Şimdi $0 \neq X \leq R_R$ sağ idealini alalım. $0 \neq x_i \in X$ için $h_i : R \to R$ homomorfizmasını $h_i(r) = x_i r$ olarak tanımlayalım. O halde $X = \sum_{i\in I} h_i(R)$ olup Teorem 5.1.2 den sonuç elde edilir.

(2) şimdi *M* modülü devirli ve *R* değişmeli olsun. Buradan $B_R \leq R_R$ için M, R/B ye izomorftur. Y/B R modülü R/B nin bir altmodülü olsun. Böylece her $y_i \in Y$ için $Y/B = \left(\sum_{i\in I} y_i R\right) + B = \left(\sum_{i\in I} y_i + B\right)R$ dir. $h_i : R/B \to R/B$ dönüşümü

$h_i(r+B)=y_i r+B$ olarak tanımlansın. Bu durumda $h_i \in End((R/B)_R)$ olur. Buradan $Y/B=\sum_{i\in I} h_i(R/B)$ dir. R değişmeli olduğundan $h_i \in End((R/B)_R)$ de değişmelidir. Böylece Teorem 5.1.2. den sağlanır.

(3) Farzedelim ki, *M* çarpımsal ve *R* değişmeli olsun. $A \leq M$ olmak üzere $X=MA$ alalım. Her $a \in A$ için $h_a : M \to M$ dönüşümü $m \in M$ olmak üzere $h_a(m)=ma$ olarak tanımlansın. Bu durumda $X=MA=\sum_{a\in A} h_a(M)$ dir. Ayrıca $N \leq M$ olsun. *M* çarpımsal olduğundan $N=MA$ olacak şekilde $A \leq M$ vardır. Her $f \in End(M_R)$ için $x \in f(N)$ ise $x=f(ma)$ dir. *f* homomorfizma olduğundan $x=f(m)a \in MA=N$ olur. Buradan $x \in N$ elde edilir. Böylece $f(N) \subseteq N$ olur ve *N*, *M* de fully invariant altmodüldür. (Birkenmeier ve diğ. 2002)'deki Lemma 1.9 dan $e=e^2 \in End(M_R)$ ise e ve $(1-e) \in S_1(End(M_R))$ dir. *M* nin her alt modülü fully invariant alt modül olduğundan $e=e^2 \in End(M_R)$ için *eM*, *M* nin fully invariant alt modülü olup $e \in S_1(End(M_R))$ ve $(1-e)M$ de *M* nin fully invariant alt modülü olup $(1-e) \in S_1(End(M_R))$ olur. Buradan $ex=exe$ ve $(1-e)x=(1-e)x(1-e)$ dir. yani $ex=xe$ olduğundan e merkezleyendir. Dolayısıyla $End(M_R)$ abeldir. Teorem 5.1.2. den sonuç sağlanır.

Önerme 5.1.4. *M*, C_{11} - modül ve *X*, *M* nin bir alt modülü olsun. Eğer *X* ile *M* nin herhangi bir dik toplananın arakesiti *X* in bir dik toplananı ise *X*, C_{11}-modüldür.

İspat: *A*, *X* in bir alt modülü olsun. Bu durumda $A \cap N=0$ ve $A \oplus N \leq_e M$ olacak şekilde *M* nin bir dik toplananı vardır. Şimdi *M* nin bir *K* altmodülü için $M=N \oplus K$ olsun. Böylece $X \cap (A \oplus N) \leq_e X \cap M = X$ ve $A \cap (X \cap N) \leq A \cap N = 0$ olup $A \cap (X \cap N)=0$ olduğundan $X \cap (A \oplus N) = A \oplus (X \cap N) \leq_e X$ olur. $X \cap N$, *X* de dik toplanan olduğundan *X*, C_{11}- modüldür.

Sonuç 5.1.1. M_R , C_{11} koşulunu sağlayan bir modül olsun.

1. Eğer *M* dağılımlı modül ise *M* nin her alt modülü CS-modüldür.

2. Eğer M nin bir X alt modülü her $e=e^2\in End\left(M_R\right)$ için $eX\subseteq X$ koşulunu sağlarsa *X,* bir C_{11} modüldür. Özel olarak M nin her fully invariant alt modülü bir C_{11} modüldür.

İspat: (1) *N, M* nin komplementi olsun. Bu durumda $e=e^2\in End\left(M_R\right)$ olmak üzere *eM, N* nin komplementidir. Böylece *M*, dağılımlı modül olduğundan $N=N\cap M=N\cap\left(eM\oplus(1-e)M\right)=\left(N\cap eM\right)\oplus\left(N\cap(1-e)M\right)=N\cap(1-e)M\leq (1-e)M$ dir. *eM, N* nin komplementi olduğundan $N\cap eM=0$ ve $N\oplus eM\leq_e M$ dir. Buradan $N\oplus eM\leq_e M=eM\oplus(1-e)M$ ve $N\leq(1-e)M$ olduğundan ise $N\leq_e(1-e)M$ olur ve *N, M* de komplement olduğunu kullanarak $N=(1-e)M$ elde edilir. Böylece *M, CS*- modüldür. (Birkenmeier ve diğ., 1999, Corrollay 1.6)

(2) *D, M* nin bir dik toplanan alt modülü ve $e:M\rightarrow D$ kanonik projeksiyonu olsun. O halde $e(X)\subseteq D$ olur ve $eX\subseteq X$ olduğundan $e(X)\subseteq D\cap X$ dir. $a\in D\cap X$ alalım. Böylece $a\in D$ olduğundan $a=e(a)$ olur. Buradan da $a=e(a)\in eX$ olur. Dolayısıyla $eX=D\cap X$ elde edilir. Teorem 5.1 2. den X bir C_{11} modüldür.

Teorem 5.1.3. Bir *M* modülünün C_{11} koşulunu sağlaması için gerek ve yeter koşul *M* nin herhangi bir (nonsingüler) *K* altmodülü için $M=Z_2(M)\oplus K$ olmak üzere $Z_2(M)$ ve *K* nın C_{11} koşulunu sağlamasıdır.

İspat: $(\Leftarrow)$: Teorem 5.1.1. den açıktır.

$(\Rightarrow)$: *M,* C_{11} koşulunu sağlasın. İlk olarak $Z_2(M)$ nin *M* nin bir dik toplanan olduğunu kanıtlayacağız. $L=Z_2(M)$ olsun. $Z_2(M)\leq M$ olduğundan ve *M,* C_{11} koşulunu sağladığından Önerme 5.1.2. den $M=K\oplus K',L\cap K=0$ ve $L\oplus K\leq_e M$ olacak şekilde *M* nin *K* ve *K'* alt modülleri vardır. Şimdi

$$L=Z_2(M)=Z_2(K\oplus K')=Z_2(K)\oplus Z_2(K')$$

$L\cap K=0$ yani

$$Z_2(M)\cap K=0\Rightarrow Z_2(K\oplus K')\cap K=0\Rightarrow (Z_2(K)\oplus Z_2(K'))\cap K=0$$

ama $Z_2(K)\leq K$ olduğunu biliyoruz öyleyse açıktır ki $Z_2(K)=0$ dır. Bu yüzden $L=Z_2(K')\subseteq K'$. $L\oplus K\leq_e M$ olduğundan $L\leq_e K'$ ve bundan dolayı Önerme 2.2.8. den K'/L singülerdir. Yani Önerme 2.2.8. den

$$Z(K'/Z_2(K'))=K'/Z_2(K')=0$$

Buradan $L=Z_2(K')=K'$ ve $L\leq_d M$ dir. $M=L\oplus K$ olduğunu kanıtladık. Şimdi L nin C_{11} koşulunu sağladığını kanıtlayacağız. *N*, *L* nin herhangi bir alt modülü olsun. Buradan $N\oplus K\leq M$ dir. *M*, C_{11} koşulunu sağladığından Önerme 5.1.2 den $M=P\oplus P', (N\oplus K)\cap P=0$ ve $N\oplus K\oplus P\leq_e M$ olacak şekilde *M* nin *P* ve *P'* alt modülleri vardır. Dikkat edersek $P\cap K=0$ ve bundan dolayı *P*, $M/K\cong L$ içinde gömülür. Bu yüzden

$$P=P\cap L=P\cap Z_2(M)=P\cap(Z_2(P\oplus P'))=P\cap(Z_2(P)\oplus Z_2(P'))=$$

$$Z_2(P)\oplus(P\cap Z_2(P'))=Z_2(P)$$

Yani $P=Z_2(P)$ ve $P\leq L$ dir. Bunu takiben $P\leq_d L$ (gerçekten $L=P\oplus(L\cap P')$) ve $N\oplus P\leq_e L$ dir. Önerme 5.1.2 den *L*, C_{11} koşulunu sağlar. Son olarak *K* nın C_{11} koşulunu sağladığını kanıtlayalım. $\pi:M\to K$ bir kanonik izdüşümü olsun. *H*, *K* nın herhangi bir alt modülü olsun. Buradan

$L\cap H=0$ ve $M=Q\oplus Q', (L\oplus H)\cap Q=0$ ve $(L\oplus H)\oplus Q\leq_e M$ olacak şekilde *M* nin *Q* ve *Q'* alt modülleri vardır. Dikkat edersek

$$L=Z_2(M)=Z_2(Q\oplus Q')=Z_2(Q)\oplus Z_2(Q')=Z_2(Q')$$

dür. Çünkü $Q\cap L=0$ olduğundan $Z_2(Q)=0$ dır. Bu yüzden $L\leq Q'$ ve $Q'=L\oplus(Q'\cap K)$ dır. Şimdi

$$M = Q \oplus Q' = Q \oplus L \oplus (Q' \cap K)$$

dır. Bundan dolayı $Q \oplus L \leq_d M$ dir. Kolayca görülür ki $L \oplus Q = L \oplus \pi(Q)$ dur. Bu yüzden K nın $\pi(Q)$ alt modülü M nin bir dik toplananıdır ve dolayısıyla K nın bir dik toplananıdır. Ancak $H \oplus \pi(Q) \oplus L \leq_e M$ dir. Bu yüzden $H \oplus \pi(Q) \leq_e K$ dır. Önerme 5.1.2 den K, C_{11} koşulunu sağlar.

Önteorem 5.1.1. $M = M_1 \oplus M_2$ olsun. Bu takdirde M modülünün C_{11}-koşulunu sağlaması için gerek ve yeter şart M_1'in herhangi bir N alt modülü için $M_2 \subseteq K$, $K \cap N = 0$, $K \oplus N \leq_e M$ olacak şekilde M için bir K dik toplananının var olmasıdır.

İspat: ($\Longrightarrow$) Varsayalım M C_{11}-koşulunu sağlasın. N, M_1 in herhangi bir alt modülü olsun. Önerme 5.1.2. den $N \cap L = 0$ ve $N \oplus L \leq_e M_1$ olacak şekilde M_1 in bir L dik toplananı vardır. Açıkça $(L \oplus M_2) \cap N = 0$ ve $(L \oplus M_2) \oplus N \leq_e M$

($\Longleftarrow$) : Varsayalım M_1 verilen özelliği sağlasın. H, M_1 in herhangi bir alt modülü olsun. Hipotezden $M_2 \subseteq K, K \cap H = 0, K \oplus H \leq_e M$ olacak şekilde M nin bir K dik toplananı vardır. Şimdi,

$$K = K \cap (M_1 \oplus M_2) = (K \cap M_1) \oplus M_2$$

dir ve bu yüzden $K \cap M_1$, M nin bir dik toplananıdır ve hem de M_1 in dik toplananıdır. Bundan dolayı, $H \cap (K \cap M_1) = 0$ ve $H \oplus (K \cap M_1) = M_1 \cap (H \oplus K)$ M_1 de essential alt modüldür. Önerme 5.1.2. den M_1 C_{11}-koşulunu sağlar.

Teorem 5.1.4. $K \cap M_2 = 0$ ile M nin bir K dik toplananı için $K \oplus M_2$, M nin bir dik toplananı olacak şekilde $M = M_1 \oplus M_2$ bir C_{11} -modüldür. M_1, C_{11}-modüldür.

İspat: N, M_1 in herhangi bir alt modülü olsun. Hipotezden ve Önerme 5.1.2. den $(N \oplus M_2) \cap K = 0$ ve $N \oplus M_2 \oplus K \leq_e M$, olacak şekilde M nin bir K dik toplananı vardır. Dahası $M_2 \oplus K$, M nin bir dik toplananıdır. Önerme 5.1.4. den sonuç elde edilir.

5.2 FI-extending Modüller

Bu bölümde Birkenmier, Park, Rizvi, (2002,2007) CS-modüllerin bir başka genellemesi olan FI-extending modülü ilk olarak tanımlamışlardır. Bu modül sınıfı literatürde yer alan bir çok modül sınıfını kapsamaktadır.

Tanım 5.2.1. *M* modülünün her fully invariant alt modülü, *M* nin bir dik toplananında essential olarak kapsanıyorsa *M* ye *FI-extending* modül denir.

Önteroem 5.2.1. *M* bir modül olsun. Aşağıdaki koşullar denktir.

1. *M*, FI-extending modüldür.
2. *M* nin her fully invariant alt modülü, *M* nin bir dik toplananı olan bir komplemente sahiptir.

İspat: $1 \Rightarrow 2$ $X \lhd M$ olsun. *M* modülünün FI-extending olduğunu kabul edelim. Bu durumda $e^2 = e \in End(M)$ vardır öyle ki $X \leq_e eM$ dir. Böylece istenen komplement $(1-e)M$ dir.

$2 \Rightarrow 1$ Tersine $c^2 = c \in End(M)$ olmak üzere *cM, X* in komplementi olsun. Bu durumda herhangi bir $x \in X$ için $x = cx + (1-c)x$ dir. $X \lhd M$ olduğundan $cx \in X \cap cM = 0$ dır. Bundan dolayı $X \subseteq (1-c)M$ dir. Böylece Teorem 2.2.2 dan $X \leq_e (1-c)M$ dir.

Önteorem 5.2.2. *M* bir modül olsun.

1. *M* nin fully invariant alt modüllerinin herhangi toplamı veya kesişimi de fully invariant alt modüldür.
2. Eğer $X \leq Y \leq M$ ve *Y*, *M* nin ve *X* de *Y* nin fully invariant bir alt modülü ise *X*, *M* nin fully invariant bir alt modülüdür.

3. Eğer $M = \oplus_{i\in I} X_i$ ve S, M nin fully invariant alt modülü ise π_i, M nin i. projeksiyon homomorfizması olmak üzere $S = \oplus_{i\in I} \pi_i(S) = \oplus_{i\in I}(X_i \cap S)$ dir.

İspat: 1. $\{N_i : i \in I\}$, M nin fully invariant alt modüllerinin bir ailesi olsun. $\forall i \in I$ için $N_i \lhd M$ olduğundan $\forall f \in End(M_R)$ için $f(N_i) \subseteq N_i$ dir. O halde $f\left(\sum N_i\right) \subseteq N_i$ olup olmadığını görelim. f homomorfizma olduğundan $f\left(\sum N_i\right) = \sum f(N_i)$ dir. $\forall i \in I$ için N_i fully invariant olduğundan $f\left(\sum N_i\right) = \sum f(N_i) \subseteq N_i$ olduğundan $f\left(\sum N_i\right)$ fully invarianttır. Ayrıca, $f\left(\bigcap N_i\right) \subseteq N_i$ olup olmadığını görelim. $x \in f\left(\bigcap N_i\right)$ olsun. $\exists n \in N_i$ için $f(n) = x$ dir. $\forall i \in I$ için $n \in N_i$ olduğundan $f(n) \in f(N_i) \subseteq N_i$ olur. Böylece $f\left(\bigcap N_i\right) \subseteq N_i$ dir.

2. $X \lhd Y \lhd M$ olsun. $X \lhd M$ olduğunu gösterelim. Yani, $\forall f \in End(M_R)$ için $f(X) \subseteq X$ olduğunu gösterelim. $Y \lhd M$ olduğundan $f(Y) \subseteq Y$ dir. $g : f|y : Y \to f(Y) \subseteq Y$ olduğu için $f|y \in End(Y_R)$ dir. $X \lhd Y$ olduğundan $f(X) \subseteq g(X) \subseteq X$ dir. Yani $X \lhd M$ dır.

3. $S = \oplus_{i\in I} \pi_i(S)$ olduğunu görelim. $\pi_i : \oplus X_i \to X_i$ örten homomorfizma olduğundan $\pi_i \in End(M_R)$ dir. $\forall i \in I$ için $\pi_i(S) \subseteq S$ ise $\oplus \pi_i(S) \subseteq S$ dir. $s \in S$ ise $s = x_1 + x_2 + \ldots + x_n$, $x_i \in X_i$ olarak alalım. $\pi_1(s) = x_1, \pi_2(s) = x_2, \ldots$ ise $\oplus \pi_i(s) = S$, $s \in \oplus \pi_1(s)$ dir. $\forall s \in S$ için sağlandığından $S \subseteq \oplus \pi_1(s)$ dir. O halde $S = \oplus \pi_1(s)$ dir. Diğer taraftan $\pi_i \cap S \subseteq S$ ise $\pi_i(\pi_i \cap S) \leq \pi_i(S)$ ise $\oplus \pi_i$ $\oplus \pi_i(\pi_i \cap S) \subseteq \oplus \pi_i(S)$ dir. $y \in \oplus \pi_i(S)$ alalım. $y = \pi_1(s) + \pi_2(s) + \ldots \pi_n(s)$ olarak alalım. $\pi_1(s) = S \cap X_1, \ldots$ ise $y = \oplus \pi_i(s) \in \oplus(S \cap X_i)$ ise $\oplus \pi_i(S) = \oplus(S \cap X_i)$ elde edilir.

Önerme 5.2.1. *M* bir modül ve $X \lhd M$ olsun. Eğer *M*, FI-extending ise *X* de FI-extending modüldür.

İspat: Kabul edelim ki *M*, FI-extending modül ve $S \lhd X$ olsun. Önteorem 5.2.2.(2) den $S \lhd M$ dir. Böylece bir $D \leq_d M$ vardır öyle ki $S \leq_e D$ dir. $\pi : M \to D$ projeksiyon endomorfizması olsun. Bu durumda

$$S = \pi(\mathrm{S}) \leq \pi(X) \cap D = \pi(X) \cap \pi(M) = \pi(X)$$

dir. $S \leq \pi(X) \leq D$ ve $S \leq_e D$ olduğundan $S \leq_e \pi(X)$ dir. Ayrıca $\pi(X) \leq_d X$ dir.

FI-extending modülleri herhangi dik toplamının yine bir FI-extending modül olduğunu aşağıdaki teoremle verelim.

Teorem 5.2.1. $X_i, (i \in I)$ ler *FI-extending* modüller ise $M = \oplus_{i\in I} X_i$ modülü de *FI-extending* modüldür.

İspat: Farzedelim ki X_i , *FI- extending* modül ve *S* de *M* de fully invariant alt modül olsun. $0 \neq s \in S$ alalım. $S \leq M$ olduğundan $s = x_1 + x_2 + \ldots x_n$ dir. Bir $i \in I$ için $0 \neq s$ kabul ettiğimizden $x_i \neq 0$ dır. $\pi_i(S) = x_i \neq 0$ olur. $f : X_i \to X_i$ endomorfizma olsun. Buradan $f(\pi_i(S)) = f(X_i) = X_i = \pi_i(S)$ dir. Dolayısıyla her $i \in I$ için $\pi_i(S) \neq 0$ olacak şeklide $\pi_i(S)$, X_i nin fully invariant altmodülü olur. Buradan X_i , FI- extending modül olduğundan $\pi_i(S) \leq_e D_i$ olacak biçimde X_i nin bir D_i dik toplananı vardır. Önteorem 5.2.2.(3) den $S = \oplus_{i\in I} \pi_i(S) \leq_e \oplus_{i\in I} D_i$ dir. Buradan $\oplus_{i\in I} D_i$, *M* nin dik toplananıdır. Böylece *M*, FI-extending modüldür.

FI-extending modüllerindik toplananlarının FI-extending modül olup olmadığı açık sorudur.

Sonuç 5.2.1. *R* bir sağ *FI-extending* halka ise her n pozitif tamsayısı için $M_N(R)$ matris halkası da *FI-extending* halkadır.

Önteorem 5.2.3. *M* modül olsun. Buna göre aşağıdaki koşullar denktir.

1. *M, FI-extending* modüldür.
2. *M* nin her fully invariant altmodülünün dik toplanan olan bir komplementi vardır.
3. *M* nin her fully invariant altmodülü *X* için *M* nin komplement alt modülü *L* ve *L* nin bir *K* komplementi vardır ki; $X \leq_e L$ ve $f : K \oplus L \to M$ her homomorfizması bir $g : M \to M$ endomorfizmasına genişletilebilir.

İspat: $(1 \Rightarrow 2)$ *X, M* nin fully invariant alt modülü olsun. İlk önce *M* nin *FI-extending* modül olduğunu kabul edelim. Bu durumda $X \leq_e eM$ olacak şekilde $e = e^2 \in End(M_R)$ vardır. Böylece $(1-e)^2 = (1-e)$ idempotent olduğundan $(1-e)M$ de M de dik toplanandır. Buradan $X \cap (1-e)M \leq_e eM \cap (1-e)M = 0$ olur ve $X \cap (1-e)M = 0$ elde edilir. Ayrıca $X \oplus (1-e)M \leq_e eM \oplus (1-e)M = M$ olduğundan $X \oplus (1-e)M \leq_e M$ dir. Böylece $(1-e)M$, X in M deki komplementidir.

$(2 \Rightarrow 1)$ Tersine $c = c^2 \in End(M_R)$ olmak üzere *cM, X* in komplementi olsun. $x \in X$ alalım. Bu durumda $x = cx + (1-c)x$ olur. *X* fully invariant altmodül olduğundan $cx \in X \cap cM = 0$ dır. Buradan $X \subseteq (1-c)M$ dir. Böylece $X \leq_e (1-c)M$ elde edilir. Yani *M, FI- extending* modüldür.

$(2) \Leftrightarrow (3)$: Bu denklik Birkenmeier ve Tercan (2007) de Lemma 1.1 den açıktır.

Önerme 5.2.2. *M* bir modül olsun.

1. M, CS – modüldür.
2. M, C_{11} koşulunu sağlar.
3. *M, FI-extending* modüldür.

$(1) \Rightarrow (2) \Rightarrow (3)$ gerektirmeleri sağlanır.

Kanıt: $(1)\Rightarrow(2)$ açıktır.

$(2)\Rightarrow(3)$ Önteorem 5.2.3. deki $(2)\Rightarrow(1)$ den açıktır. Ancak genel olarak bu gerektirmelerin tersi doğru değildir.

Önerme 5.2.3. *M* bir $\mathbb{Z}$-modül (yani abelian grup) olsun. Eğer *M*, aşağıdaki koşullardan herhangi birini sağlarsa FI-extending $\mathbb{Z}$-modül olur.

i. *M*, sonlu üretilmiştir.
ii. *M*, sınırlı derecelidir. (yani bazı pozitif n tamsayıları için *nM=0* dır.)
iii. *M* bölünebilirdir. (yani her bir $a\in M$ ve $n\in\mathbb{Z}$ için a=nb olacak şekilde bir $b\in M$ vardır.)

İspat:

i. Her sonlu üretilmiş abelian grup, düzgün $\mathbb{Z}$ -modüllerin bir dik toplamıdır. Dolayısıyla Teorem 5.2.1. den *M*, FI-extending modüldür.
ii. Rotman (1980) den *M*, devirli torsiyon grupların bir dik toplamıdır. Böylece *M*, yine düzgün $\mathbb{Z}$ -modüllerin bir dik toplamıdır.
iii. *M*, bölünebilir olduğundan extending $\mathbb{Z}$ -modüldür.

4. KAYNAKLAR

Anderson, F. W. Fuller, K. R., *Rings and Categories of Modules*, Springer, New York, (1992).

Birkenmeier, G. F., Müller, B.J., Rizvi, S.T., “Modules in which every fully inveriant submodule is essential in a direct summand*”*, *Comm. Algebra,* 30 (30), 1395-1415, (2002).

Birkenmeier, G. F., Kim, J. Y., Park, J. K., “When is the CS Conditions hereditary*?”, Comm. Algebra,* 27(8), 3875-3885 (1999).

Birkenmeier, G. F., Park, J. K., Rizvi, S.T., “Modules with fully inveriant submodules essential in fully inveriant summands”, 30(4), *Comm. Algebra,* 1833-1852, (2002).

Birkenmeier, G. F., Tercan, A., “When some complement of a submodule is summand”, , 35 (2), 597-611, (2007)

Chatters, A.W., Hajarnavis, C, R., “Rings in which every complement right ideal is a direct summand”, Quart. J. Marh. Oxford, 28,61-80, (1977).

Dung, N.V., Huynh, D. V., Simith, P. F., Wisbauer, R., “Extending Modules”, Longman Scientific and Technical, Harlow, Essex, England. (1994).

Fuchs, L., *Infinite Abelian Groups, Volume I,* Academic Press, New York, (1970).

Goodearl, K.R., *Ring Theory: Nonsinguler Rings and Modules*, Marcel Dekker, New York, (1976).

Lam, T. Y., *Lectures on Modules and Rings, Springer,* New York, (1999).

Mohammed, S. H. Müller, B.J., *Continuous and Discrete Modules, London Math. Soc. Lecture Nore Series,* 147 , Cambridge Univ. Press. Cambridge, (1990).

Sharpe, D, W., Vaimos, P., *Injective Modules,* Cambridge University Press, London, (1972).

Smith, P. F., Tercan, A., "Continuous and Quasi-Continuous Modules", *Houston J. Math*., 18 (3), 339-34, (1992).

Smith, P. F., Tercan, A., "Generalizations of CS-Modules", *Comm. Algebra*, 21 (6), 1809-1847, (1993).

Smith, P. F., Tercan, A., "Direct summands of modules which satisfy (C_{11})", *Algebra Colloq*., 11, 231-237, (2004).

Smith, P.F., Tercan, A., "Direct Summands of modules which satisfy (C_{11})", *Algebra Collog*., 11, 231-237, (2004).

Rotman, J. J., *Introduction to the Theory of Groups*, Wm. C. Brown, Dubuque, (1980).

Von Neumanm, J., *Continuous geometry*, Proc. Nat. Acad. Sci., 22,92-100, (1936).

Von Neumann, J., "Examples of continuous geometries", *Proc. Nat. Acad*. *Sci*., 22, 101-108, (1936).

Von Neumann, J., "On regular rings", *Proc. Nat. Acad. Sci.*, 22, 707-713, (1936).

ÖZDEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler:

Ad Soyad: Sevgi KARATAŞ
Doğum Yeri: Antalya
Doğum Tarihi:21.07.1989
Medeni Hali: Bekar
Yabancı Dil: İngilizce

Eğitim Durumu:

Lise: Antalya Çağlayan Lisesi
Lisans: Pamukkale Üniversitesi
Yüksek Lisans: Pamukkale Ünivesitesi

İletişim Bilgileri:

Email: sevvgi_2107@hotmail.com