T.C.
PAMUKKALE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

KOROVKİN YAKLAŞIM TEOREMLERİ VE KUVVET SERİSİ METODU

YÜKSEK LİSANS TEZİ

EBRU ALTIPARMAK

DENİZLİ, TEMMUZ - 2017

T.C.
PAMUKKALE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

KOROVKİN YAKLAŞIM TEOREMLERİ VE KUVVET SERİSİ METODU

YÜKSEK LİSANS TEZİ

EBRU ALTIPARMAK

DENİZLİ, TEMMUZ - 2017

KABUL VE ONAY SAYFASI

Ebru **ALTIPARMAK** tarafından hazırlanan "**KOROVKİN YAKLAŞIM TEOREMLERİ VE KUVVET SERİSİ METODU**" adlı tez çalışmasının savunma sınavı 04.07.2017 tarihinde yapılmış olup aşağıda verilen jüri tarafından oy birliği ile Pamukkale Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı Yüksek Lisans Tezi olarak kabul edilmiştir.

Jüri Üyeleri	İmza
Danışman Doç. Dr. Özlem GİRGİN ATLIHAN Pamukkale Üniversitesi	....
Üye Prof. Dr. Mehmet Ali SARIGÖL Pamukkale Üniversitesi	....
Üye Yrd. Doç. Dr. Mehmet ÜNVER Ankara Üniversitesi	....

Pamukkale Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun 12/07/2017 tarih ve ..27/10.... sayılı kararıyla onaylanmıştır.

....

Prof. Dr. Uğur YÜCEL

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

Bu tezin tasarımı, hazırlanması, yürütülmesi, araştırmalarının yapılması ve bulgularının analizlerinde bilimsel etiğe ve akademik kurallara özenle riayet edildiğini; bu çalışmanın doğrudan birincil ürünü olmayan bulguların, verilerin ve materyallerin bilimsel etiğe uygun olarak kaynak gösterildiğini ve alıntı yapılan çalışmalara atfedildiğine beyan ederim.

EBRU ALTIPARMAK

ÖZET

KOROVKİN TİPLİ YAKLAŞIM TEOREMLERİ VE KUVVET SERİSİ METODU
YÜKSEK LİSANS TEZİ
EBRU ALTIPARMAK
PAMUKKALE ÜNİVERSİTESİ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI
(TEZ DANIŞMANI:DOÇ.DR. ÖZLEM GİRGİN ATLIHAN)

DENİZLİ, TEMMUZ - 2017

Bu tez dört bölümden oluşmaktadır. Birinci bölüm giriş kısmına ayrılmıştır. İkinci bölümde, pozitif lineer operatörler, matris toplanabilme, $\mathcal{A}$-toplam süreci Abel toplanabilme, Kuvvet Serisi metodu ve süreklilik modülüne ilişkin temel tanımlar ve kavramlar verilmiştir. Üçüncü bölümde, ilk olarak Klasik Korovkin teoremi incelenmiştir. Daha sonra sırasıyla $\mathcal{A}$-toplam süreci, Abel toplanabilme ve Kuvvet Serisi metodlarını kullanarak, $C[a,b]$ uzayında Korovkin tipli yaklaşım teoremleri verilmiştir. Son bölümde ise öncelikle H_ω uzayı tanıtılıp, daha sonra H_ω uzayındaki Korovkin tipli yaklaşım teoremi verilmiştir. Bu bölümün son kısmında ise kuvvet serisi metodu yardımıyla çift değişkenli H_ω uzayında tanımlı pozitif lineer operatör dizileri için Korovkin tipli yaklaşım teoremi verilmiştir. Aynı zamanda yaklaşım oranı da verilmiştir.

ANAHTAR KELİMELER: Korovkin teoremi, pozitif lineer operatörler, $\mathcal{A}$-toplam süreci, Abel toplanabilme, Kuvvet Serisi metodu, Yakınsaklık oranı

ABSTRACT

KOROVKIN TYPE APPROXIMATION THEOREMS AND POWER SERIES METHOD
MSC THESIS
EBRU ALTIPARMAK
PAMUKKALE UNIVERSITY INSTITUTE OF SCIENCE
MATHEMATICS
(SUPERVISOR:DOÇ.DR. ÖZLEM GİRGİN ATLIHAN)

DENİZLİ, JULY 2017

This thesis consists of four chapters. The first chapter has been devoted to the introduction. In the second chapter, some basic concepts of positive linear operators, matrix summability, $\mathcal{A}$-summation process, Abel summability, Power Series method and modulus of continuity have been recalled. In the third chapter, firstly, Classical Korovkin Theorem has been studied. Then, using $\mathcal{A}$-summation process, Abel method and Power Series method respectively, some Korovkin type approximation theorems on $C[a,b]$ spaces have been studied. In the last chapter, firstly, the space H_ω has been considered. Then Korovkin type approximation theorem on H_ω spaces has been studied. In the final section of this chapter, we give a Korovkin type approximation theorem by positive linear operators defined on the double variable H_ω space with the use of the power series method. We also consider the rates of convergence of these operators

KEYWORDS: Korovkin theorem, positive linear operators, $\mathcal{A}$-summation porcess, Abel summability, Power Series method, rate of convergence

İÇİNDEKİLER

Sayfa

SEMBOL LİSTESİ

$Ax=((Ax)_n)=\left(\sum_k a_{nk}x_k\right)$	: x dizisinin A matrisi altındaki dönüşüm dizisi
$\mathbb{R}$	: reel sayılar kümesi
$\mathbb{N}$	: doğal sayılar kümesi
χ_E	: E kümesinin karakteristik fonksiyonu
$\omega(f;\delta)$	: f fonksiyonunun süreklilik modülü
$C[a,b]$	: $[a,b]$ aralığındaki sürekli fonksiyonların uzayı
$B[a,b]$	: $[a,b]$ aralığındaki sınırlı fonksiyonların uzayı
$L_q[a,b]$	: $[a,b]$ aralığındaki integrallenebilir fonksiyonların uzayı
$C_B[0,\infty)$	: $[0,\infty)$ aralığında sürekli ve sınırlı fonksiyonların uzayı
$C_B(I)$	: $I=[0,\infty)\times[0,\infty)$ aralığındaki sürekli ve sınırlı fonksiyonların uzayı
$\varpi(f;\delta_1,\delta_2)$	: çift değişkenli f fonksiyonunun süreklilik modülü
H_ω	: $\lvert f(t)-f(x)\rvert\le\omega\left(\left\lvert\frac{x}{1+x}-\frac{y}{1+y}\right\rvert\right)$ koşulunu sağlayan, $[0,\infty)$ aralığında tanımlı reel değerli fonksiyonların uzayı
$H_\omega(I)$	: $\lvert f(u,v)-f(x,y)\rvert\le\omega\left(f;\left\lvert\frac{u}{1+u}-\frac{x}{1+x}\right\rvert,\left\lvert\frac{v}{1+v}-\frac{y}{1+y}\right\rvert\right)$ koşulunu sağlayan $I=[0,\infty)\times[0,\infty)$ aralığında tanımlı reel değerli fonksiyonların uzayı

ÖNSÖZ

Bu tez çalışmasında değerli zamanını ayırarak bana yardım ve eleştirilerini hiç esirgemeyen ve her türlü bilgi ve deneyimlerini benimle paylaşan değerli danışman hocam Sayın Doç. Dr. Özlem Girgin ATLIHAN'a ve tüm hayatım boyunca bana her zaman destek olan canım aileme, arkadaşlarıma en içten teşekkürlerimi sunarım.

Ebru ALTIPARMAK

1. GİRİŞ

1821 yılında Augustin Louis Cauchy yayınladığı Analyse Algebrique adlı çalışmasında yakınsak bir dizinin aritmetik ortalamasının da yakınsak ve dizi ile aynı limite sahip olduğunu ispatlamakla toplanabilme teorisinin temelini atan ilk matematikçilerden biri olmuştur. Ancak ondan çok daha önce Leibniz, Newton ve çağdaşları sonsuz dizi ve serilerle ilgilenmişlerdir. Özellikle sonsuz serilerle yapılan hesapların doğal bir sonucu gibi görmüşlerdir. Bu görüşün sonucu olarak James Bernoulli 1696 yılında

$$1+x+x^2+\ldots=\frac{1}{1-x}$$

bağıntısını kullanmıştır. Euler ise hiçbir şeyden kuşkulanmadan bu eşitlikte $x=-1$ alarak, Euler paradoksal eşitliği adı verilen

$$1-1+1-1+\ldots=\frac{1}{2}$$

eşitliğini vermiş ve birçok yerde bunu kullanmıştır. 1828 yılında Abel, ıraksak sonsuz serileri şeytanın icadı olarak adlandırılmıştır. Yakınsaklık kavramının aydınlatılmasından çok önce ve sezgisel olarak bulunan sonuçlar yakınsaklık tanımından ve Cauchy'nin yukarıdaki söz konusu teoreminden sonra anlam kazanmış ve toplanabilme teorisinin temelini oluşturmuştur. 1890 yılında E. Cesaro, C_1 yakınsaklık kavramını vermiştir. Buna göre bir serinin kismi toplamlar dizisi olan (S_n) dizisinin aritmetik ortalaması L değerine yakınsak ise (S_n) dizisi L değerine C_1 yakınsaktır veya serinin kendisi L değerine Cesaro toplanabilirdir denir. Böylece yakınsaklık kavramının genelleştirilmesi görüşü ortaya çıkmıştır. Çünkü, $\sum_n (-1)^n$ serisinin kısmi toplamlar dizisi olan $(S_n)=\left(\frac{1}{2}\left[1+(-1)^n\right]\right)$ dizisi yakınsak olmadığı halde bunun aritmetik ortalaması $1/2$ değerine yakınsaktır. Bu sonucun yukarıda Euler tarafindan verilen sonuç ile aynı olduğu görülmüştür. Bundan sonra ıraksak serilere ilişkin çalışmalar yoğun bir şekilde ele alınmıştır. Buradan anlaşılacağı gibi toplanabilme metodunun temel amacı yakınsak olmayan bir diziyi yakınsak yapmaktır.

Bu yüksek lisans tezinde toplanabilme metodunun yaklaşım teorisinde kullanımı incelenmiştir.

Klasik Yaklaşım Teorisi, 1885 yılında Alman matematikçi Karl Weierstrass'ın sonlu aralıkta sürekli olan her fonksiyona bu aralıkta yakınsayan bir polinomun olacağını ispat etmesiyle başlamıştır. Birçok matematikçi bunun ispatını farklı şekilde ele almıştır. Örneğin Bernstein 1912 yılında Bernstein polinomlarının $C[0,1]$ uzayındaki fonksiyonlara düzgün yakınsadığını ispatlamıştır. Daha sonraları pozitif lineer operatör dizilerinin yaklaşım özellikleri üzerine çalışılmıştır. Dolayısıyla (L_n) dizisinin sürekli bir fonksiyona düzgün yakınsak olması için gerekli şartlar nelerdir sorusu akla gelmektedir. Bu sorunun cevabını, Bohman (1952) ve Korovkin (1953) birbirinden bağımsız olarak bulmuşlardır. Bu sonuçlar birçok matematikçinin bu yaklaşımları farklı uzaylara genişletmesine kaynak sağlamıştır. Böylelikle Yaklaşım Teorisi'nin özel bir dalı olan Korovkin Tipi Yaklaşım Teorisi ortaya çıkmıştır.

Kompakt bir aralıkta sürekli fonksiyonların yaklaşımı hakkındaki klasik Korovkin teoremi, bir pozitif lineer operatör dizisinin birim operatöre yakınsayıp yakınsamayacağına ilişkin şartları belirler. Süreksizlik noktalarında ise, bu operatörlerin genellikle fonksiyonun sağ ve sol limitlerinin aritmetik ortalamasına yakınsadığı görülür. Fakat süreksizlik noktalarında yakınsak olmayan Hermit-Fejer yaklaşım operatörleri gibi operatörler de vardır (Bojanic ve Cheng, 1983). Böyle durumlarda yakınsaklık kaybını gidermek için Cesaro metodunun sürekli periyodik fonksiyonların Fourier serisini yakınsak yapmada etkili olduğunu göstermiştir.

Klasik Korovkin teoremindeki pozitif lineer operatör dizisinin yakınsamaması durumunda ilk yöntem olarak hemen hemen yakınsaklık metodunun kullanımı düşünülmüştür. Bununla ilgili çalışmalar King ve Swetits (1970), Mohapatra (1977) tarafından yapılmıştır. İkinci yöntem olarak ise istatiksel yakınsaklık metodu düşünülmüş ve bu metot yardımıyla Klasik Korovkin teoremi geliştirilmiştir (Gadjiev ve Orhan 2002, Duman, vd. 2003). Matris toplanabilme metodlarının Korovkin tipli yaklaşım teorisinde kullanımı Swetits tarafından yapılmıştır (Swetits 1979).

Daha sonra 2013 yılında Ünver tarafından Abel toplanabilme metodu kullanılarak Korovkin tipli yaklaşım teoremleri verilmiştir.

Son olarak da 2017 yılında Taş ve Atlıhan tarafından Kuvvet Serisi metodu kullanılarak geliştirilen Korovkin tipli yaklaşım teoremleri verilmiştir.

2. TEMEL TANIM VE TEOREMLER

Bu bölümde, tez boyunca ihtiyaç duyacağımız temel tanım ve kavramları vereceğiz.

2.1 Pozitif Lineer Operatörler

Tanım 2.1.1 X boştan olmayan bir küme, F reel veya kompleks sayıların bir cismi olsun.

$+ : X \times X \to X$

$. : F \times X \to X$

fonksiyonları aşağıdaki özellikleri sağlıyorsa, X kümesine F cismi üzerinde bir lineer uzay (vektör uzayı) denir.

$\forall x, y, z \in X$ ve $\alpha, \beta \in F$ için

$L_1)$ $x + y = y + z$,

$L_2)$ $(x + y) + z = x + (y + z)$,

$L_3)$ $x + \theta = \theta + x$ olacak şekilde $\theta \in x$ vardır,

$L_4)$ $\forall \in X$ için $x + (-x) = (-x) + x = \theta$ olacak şekilde bir $-x \in X$ vardır,

$L_5)$ $1.x = x$,

$L_6)$ $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$,

$L_7)$ $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$,

$L_8)$ $\alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x$ (Kreyzing 1978).

Tanım 2.1.2 Vektör uzayları üzerinde tanımlı dönüşümlere "operatör" denir.

Tanım 2.1.3 X ve Y aynı cisim üzerinde tanımlı iki lineer uzay olmak üzere $L: X \to Y$ operatörü verilmiş olsun. Eğer $\forall x, y \in X$ ve $\forall \alpha, \beta \in F$ için

$$L(\alpha x + \beta y) = \alpha L(x) + \beta L(y)$$

şartlarını sağlıyorsa L'ye "lineer operatör" denir (Maddox 1978).

Tanım 2.1.4 X ve Y reel değerli fonksiyonların uzayı olmak üzere $L: X \to Y$ lineer operatör olsun. L operatörünün x noktasındaki değeri $L(f;x) = g(x)$ şeklinde gösterilsin. X tanım uzayından alınan $\forall f \geq 0$ fonksiyonu için $L(f) \geq 0$ koşulunu gerçekliyor ise bu durumda L operatörüne "pozitif operatör" denir.

Lineer ve pozitif olan operatörlere "pozitif lineer operatör" denir.

Pozitif lineer operatörler aşağıdaki özellikleri gerçekler.

1. $-f \leq 0 \Rightarrow L(-f) = -L(f) \leq 0$

2. Pozitif lineer operatörler monoton artandır.Yani;

$$f \leq g \Rightarrow L(f) \leq L(g)$$

3. L pozitif lineer operatör olmak üzere,

$$|L(f)| \leq (L|f|)$$

gerçeklenir.

Tanım 2.1.5 X kompleks veya reel vektör uzayı olmak üzere $\|.\|: X \to \mathbb{R}$ fonksiyonu aşağıdaki özellikleri sağlıyorsa bu fonksiyona X üzerinde bir norm ve $(X, \|.\|)$ ikilisine de "normlu uzay" denir. $\forall x, y \in X$ ve $\alpha \in F$ olsun.

$N_1)$ $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = \theta$,

$N_2)$ $\|\alpha x\| = |\alpha|.\|x\|$,

$N_3)$ $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

gerçeklenir.

Tanım 2.1.6 $X \subseteq \mathbb{R}$, $f : X \to \mathbb{R}$ ve $x_0 \in X$ olsun. $\varepsilon > 0$ verilsin. Eğer $|x - x_0| < \delta$ koşulunu sağlayan her $x \in X$ için $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ olacak şekilde $\delta = \delta(\varepsilon; x) > 0$ sayısı bulunabiliyorsa f fonksiyonu x_0 noktasında süreklidir denir. Ayrıca f fonksiyonu her $x \in X$ için sürekli ise f "süreklidir" denir (Kreyzing 1978).

Tanım 2.1.7 $X \subseteq \mathbb{R}$ ve $f : X \to \mathbb{R}$ fonksiyonu ile $\varepsilon > 0$ verilsin. Eğer $|x - x_0| < \delta$ koşulunu sağlayan her $x, x_0 \in X$ için $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ olacak şekilde $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ sayısı bulunabiliyorsa f fonksiyonu X de "düzgün süreklidir" denir (Kreyzing 1978).

Tanım 2.1.8 $X \subseteq \mathbb{R}$ ve $f : X \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. Her $x \in X$ için $|f(x)| < M$ olacak şekilde bir $M > 0$ sayısı varsa f fonksiyonuna "sınırlı fonksiyon" denir.

2.2 Temel Toplanabilme Kavramları

Bu kısımda tezde ihtiyaç duyacağımız matris toplanabilme metodlarından ve buna ilişkin bazı sonuçlardan söz edeceğiz. Öncelikle klasik matris toplanabilme metodunu hatırlatacağız daha sonra da $\mathcal{A}$-toplanabilme, Abel toplanabilme ve Kuvvet Serisi metodu kavramlarını vereceğiz.

Tanım 2.2.1 $A = (a_{nk}),\, k, n = 1,2,3,...$ sonsuz bir matris ve reel yada kompleks terimli bir $x = (x_k)$ dizisi verilsin. x dizisinin $A-$ dönüşüm dizisi $Ax = ((Ax)_n)$ ile gösterilir ve

$$(Ax)_n = \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} x_k$$

şeklinde tanımlanır (burada her bir n için seri yakınsak kabul edilmektedir).

Eğer,

$$\lim_{n\to\infty} (Ax)_n = L$$

koşulu gerçekleniyor ise x dizisi L değerine " $A-$toplanabilirdir " denir. Eğer her yakınsak (x_n) dizisi için $\lim_{n\to\infty} x_n = L$ olduğunda $\lim_{n\to\infty}(Ax)_n = L$ koşulu sağlanırsa A "regüler matris" adını alır (Hardy 1949, Wilansky 1984, Boos 2000).

Bir $A=(a_{nk})$ matrisinin regüler olması aşağıdaki Silverman-Toeplitz Teoremi ile karakterize edilir.

Teorem 2.2.2 Bir $A=(a_{nk})$matrisinin regüler olması için gerek ve yeter koşul

$i)$ $\sup_n \sum_{k=1}^{\infty} |a_{nk}| < \infty$,

$ii)$ Her k için $a_k := \lim_{n\to\infty} a_{nk} = 0$,

$iii)$ $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} = 1$

koşullarını sağlamasıdır (Hardy 1949, Wilansky 1984, Boos 2000).

Bell (1973) ve Steiglitz (1973) Tanım 2.2.1'deki düşünceyi kullanarak $A=(a_{nk})$ matrisi yerine $\mathrm{A} = \{A^{(n)}\} = \{a_{kj}^{(n)}\}$ matris dizisini alarak daha genel olan aşağıdaki tanımı vermişlerdir.

Tanım 2.2.3 $\mathrm{A} = \{\mathrm{A}^{(n)}\} = \{a_{kj}^{(n)}\}$, $k, j = 1,2,3,...$ sonsuz matrislerin bir dizisi olmak üzere, verilen bir $x=(x_j)$dizisi için,

$$\lim_{k\to\infty} \sum_{j=1}^{\infty} a_{kj}^{(n)} x_j = L \text{ , (n'ye göre düzgün)}$$

koşulu gerçekleniyorsa (x_j) dizisi L değerine "A-toplanabilir" denir (Bell 1973, Stieglitz 1973).

Eğer her $n \in \mathbb{N}$ için $A^{(n)} = A$ ise A-toplanabilme klasik matris toplanabilmeyi verir.

I birim matris olmak üzere her $n \in \mathbb{N}$ için $A^{(n)} = \mathrm{I}$ ise $\mathcal{A}$-toplanabilme klasik yakınsaklığa indirgenir.

Tanım 2.2.4 Her $y \in (0,1)$ için $\sum_{k=0}^{\infty} x_k y^k$ serisi yakınsak olsun. Eğer,

$$\lim_{y \to 1^-} (1-y) \sum_{k=0}^{\infty} x_k y^k = L$$

koşulu gerçekleniyorsa $x = (x_k)$ dizisi L değerine "Abel Yakınsaktır" veya "Abel Toplanabilirdir" denir (Powel ve Shah, 1972).

Tanım 2.2.5 (p_n), $p_0 > 0$ ve $p_n \geq 0$, **(** $n \in \mathbb{N}$**)** koşullarını sağlayan reel terimli bir dizi olsun. Ayrıca

$$p(t) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n t^n$$

şeklinde tanımlı kuvvet serisi, R yakınsaklık yarıçapına sahip olsun $(0 < R \leq \infty)$. Eğer,

$$\lim_{t \to R^-} \frac{1}{p(t)} \sum_{n=0}^{\infty} x_n p_n t^n = L$$

koşulu gerçekleniyorsa $x = (x_n)$ dizisi L değerine "Kuvvet Serisi Metodu Anlamında Yakınsaktır" denir (Kratz ve Stadtmüller,1989).

2.3 Süreklilik Modülü

Bu kısımda yakınsaklık oranı olarak adlandırılan hesaplamayı yaparken kullanılan süreklilik modülü kavramı ve özellikleri verilecektir.

Tanım 2.3.1 $C[a,b]$ uzayı, $[a,b]$ aralığında tanımlı reel değerli fonsiyonların uzayı olmak üzere, $f \in C[a,b]$ olsun. f fonksiyonunun süreklilik modülü $\omega(f;\delta)$ şeklinde gösterilir ve

$$\omega(f;\delta) = \sup_{|t-x| \leq \delta} |f(t) - f(x)|$$

şeklinde tanımlıdır. Burada δ pozitif bir sabittir.

Süreklilik modülü aşağıdaki özellikleri gerçekler (Altomore ve Campiti, 1914).

Özellikler :

$i)\quad \omega(f;\delta)\geq 0$

$ii)\quad \delta_1 \leq \delta_2 \Rightarrow \omega(f;\delta_1)\leq \omega(f;\delta_2)$

$iii)\quad \omega(f+g;\delta)\leq \omega(f;\delta)+\omega(g;\delta)$

$iv)\quad \omega(f;m\delta)\leq m\omega(f;\delta)$

$v)\quad [|\lambda|]$, λ 'nın tam değerini göstermek üzere bir $\lambda > 0$ sayısı için,

$$\omega(f;\lambda\delta)\leq (1+[|\lambda|])\omega(f;\delta)\leq (1+\lambda)\omega(f;\delta)$$

$vi)\quad \omega(f;|t-x|)\geq |f(t)-f(x)|$

$vii)\quad |f(t)-f(x)|\leq \left(\frac{|t-x|}{\delta}+1\right)\omega(f;\delta)$

3. KOROVKİN TİPLİ YAKLAŞIM TEOREMLERİ

3.1 Klasik Korovkin Teoremi

Bu bölümde yaklaşımlar teorisinde önemli yeri olan, 1953 yılında Korovkin tarafından verilen yaklaşım teoremlerini ve bu teoremlerin ispatlarını vereceğiz. Burada kullanılan $C[a,b]$ ve $B[a,b]$ uzayları sırasıyla, $[a,b]$ aralığında tanımlı reel değerli sürekli ve sınırlı fonksiyonların uzayları olup,

$$\|f\| = \sup_{x\in[a,b]} |f(x)|$$

normuna göre Banach Uzaylarıdır.

Teorem 3.1.1 $L_n : C[a,b] \to C[a,b]$ pozitif lineer operatörlerin bir dizisi olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeler denktir :

$i)$ $\forall f \in C[a,b]$ için $\lim\limits_n \|L_n f - f\|_{C[a,b]} = 0$

$ii)$ $f_0(t) = 1,\ f_1(t) = t,\ f_2(t) = t^2$ olmak üzere $\lim\limits_n \|L_n f_i - f_i\|_{C[a,b]} = 0$, $i = 0,1,2$.

İspat : $i) \Rightarrow ii)$ gerçeklendiği açıktır. Çünkü, $\forall f \in C[a,b]$ için $ii)$ hipotezi sağlandığına göre $f_0(t) = 1,\ f_1(t) = t,\ f_2(t) = t^2$ fonksiyonları da $C[a,b]$ uzayının elemanı olduğundan istenilen elde edilir.

Şimdi $ii) \Rightarrow i)$ olduğunu gösterelim .

$f \in C[a,b]$ alalım. f sürekli bir fonksiyon olduğundan $\forall \varepsilon > 0$ için $\exists\ \delta > 0$ vardır $\ni$ $|t-x| < \delta$ koşulunu sağlayan $\forall x,t \in [a,b]$ için $|f(t) - f(x)| < \varepsilon$ gerçeklenir. Şimdi $|t-x| \geq \delta$ için,

$$\frac{|t-x|}{\delta} \geq 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{(t-x)^2}{\delta^2} \geq 1$$

elde edilir. f , $[a,b]$'de sınırlı olduğundan,

$$|f(t)-f(x)|\leq |f(t)|+|f(x)|\leq 2M.1\leq 2M\,\frac{(t-x)^2}{\delta^2}$$

gerçeklenir. O halde $\forall x,t\in[a,b]$ için,

$$|f(t)-f(x)|\leq 2M\,\frac{(t-x)^2}{\delta^2}+\varepsilon$$

olduğu görülür.

Son eşitsizliğin her iki tarafına L_n pozitif lineer operatörü uygulanırsa,

$$L_n(|f(t)-f(x)|;x)\leq L_n\left(\varepsilon+2M\,\frac{(t-x)^2}{\delta^2};x\right)$$

$$\leq L_n(\varepsilon;x)+\frac{2M}{\delta^2}L_n\left((t-x)^2;x\right)$$

$$=L_n(\varepsilon;x)\pm\varepsilon+\frac{2M}{\delta^2}\{L_n(t^2;x)-2xL_n(t;x)$$

$$+x^2L_n(1;x)\pm 2x^2\}$$

$$=\varepsilon+\varepsilon(L_n(1;x)-1)+\frac{2M}{\delta^2}\{(L_n(t^2,x)-x^2)$$

$$-2x(L_n(t;x)-x)+x^2(L_n(1;x)-1)\}$$

$$L_n(|f(t)-f(x)|;x)\leq\varepsilon+\varepsilon|L_n(1;x)-1|+\frac{2M}{\delta^2}\{|L_n(t^2;x)-x^2|$$

$$-2|x|.|L_n(t;x)-x|+|x^2|.|L_n(1;x)-1|\} \tag{3.1}$$

eşitsizliği elde edilir. Diğer yandan

$$|L_n(f(t);x)-f(x)|=|L_n(f(t);x)+L_n(f(x);x)-L_n(f(x);x)-f(x)|$$

$$\leq|L_n(f(t);x)-L_n(f(x);x)|+|L_n(f(x);x)-f(x)|$$

$$\leq L_n(|f(t)-f(x)|;x)+|f(x)|.|L_n(1;x)-1|$$

yazılabilir. Bu son eşitsizlikte (3.1) eşitsizliği dikkate alınırsa,

$$\left|L_n\left(f(t);x\right)-f(x)\right| \leq \varepsilon+\varepsilon\left|L_n(1;x)-1\right|+\frac{2M}{\delta^2}\left\{\left|L_n\left(t^2;x\right)-x^2\right|\right.$$

$$\left.-2|x|.\left|L_n(t;x)-x\right|+\left|x^2\right|.\left|L_n(1;x)-x\right|\right\}+|f(x)|.\left|L_n(1;x)-1\right|$$

elde edilir.

Son eşitsizliğin her iki tarafının $x \in [a,b]$ için supremumu alınıp norma geçilirse,

$$\|L_n f - f\| \leq \varepsilon + H\left\{\|L_n f_2 - f_2\| + \|L_n f_1 - f_1\| + \|L_n f_0 - f_0\|\right\}$$

bulunur. Burada

$$H = \sup_{x\in[a,b]}\left\{\varepsilon, \frac{2M}{\delta^2}\sup_{x\in[a,b]} 2|x|, \frac{2M}{\delta^2}\sup_{x\in[a,b]}\left|x^2\right|\right\}$$

şeklindedir. Şimdi $n \to \infty$ için limit alınırsa $ii)$ hipotezinden

$$\lim_n \|L_n f - f\|_{C[a,b]} = 0$$

olduğu görülür.■

Şimdi periyodik fonksiyonlar için verilen Korovkin tipli yaklaşım teoremini verelim. Burada $C[0,2\pi] = \{\ f : f[0,2\pi] \to \mathbb{R}, 2\pi$ periyotlu sürekli fonksiyon $\}$ vektör uzayı olup,

$$\|f\|_{C[0,2\pi]} = \sup_{x\in[0,2\pi]} |f(x)|$$

normuna göre Banach Uzayıdır.

Teorem 3.1.2 $L_n : C[0,2\pi] \to C[0,2\pi]$ pozitif lineer operatörlerinin bir dizisi olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeler denktir :

$i)$ $\forall f \in C[0,2\pi]$ için $\lim_n \|L_n f - f\|_{C[0,2\pi]} = 0$, *ii*) $f_0(t)=1,\ f_1(t)=\sin t,\ f_2(t)=\cos t$ olmak üzere $\lim\limits_n \|L_n f_i - f_i\|_{C[0,2\pi]}=0$, $i=0,1,2$.

İspat : $i)\Rightarrow ii)$ gerçeklendiği açıktır. Çünkü $\forall f\in C[0,2\pi]$ için $ii)$ hipotezi sağlandığına göre $f_0(t)=1,\ f_1(t)=\sin t,\ f_2(t)=\cos t$ fonksiyonları da $C[0,2\pi]$ uzayının elemanı olduğundan istenilen elde edilir.

Şimdi $ii)\Rightarrow i)$ olduğunu gösterelim.

$f\in C[0,2\pi]$ alalım. f sürekli bir fonksiyon olduğundan $\forall\varepsilon>0$ için $\exists\ \delta>0$ vardır ∍ $|t-x|<\delta$ koşulunu sağlayan $\forall x,t\in[a,b]$ için $|f(t)-f(x)|<\varepsilon$ gerçeklenir.

f, $[0,2\pi]$'de sınırlı olduğundan,

$$|f(t)-f(x)|\le|f(t)|+|f(x)|\le 2M.1\le 2M\,\frac{(t-x)^2}{\delta^2}$$

gerçeklenir. Şimdi $t\in(x-\delta,2\pi+x-\delta]$ aralığını alalım. Bu aralığın boyu 2π olup

$$x-\delta<t\le 2\pi+x-\delta$$

$$-\delta<t-x\le 2\pi-\delta \text{ eşitsizliğinden } |t-x|<\delta \text{ bulunur.}$$

Ayrıca $|t-x|<\delta$ için $|f(t)-f(x)|<\varepsilon$ olduğu biliniyor.

Son olarak $t\in(x+\delta,2\pi+x-\delta]$ aralığını alalım. Buradan,

$$x+\delta<t\le 2\pi+x-\delta$$

$$\delta<t-x\le 2\pi-\delta$$

$$\frac{\delta}{2}<\frac{t-x}{2}\le\frac{2\pi-\delta}{2}\Rightarrow\frac{\sin\delta}{2}<\frac{\sin(t-x)}{2}$$

$$\Rightarrow\frac{\dfrac{\sin(t-x)}{2}}{\sin\dfrac{\delta}{2}}>1\qquad\Rightarrow\qquad\frac{\sin^2\dfrac{(t-x)}{2}}{\sin^2\dfrac{\delta}{2}}>1$$

elde edilir. O halde $\forall x,t\in[0,2\pi]$ için

$$|f(t)-f(x)|\leq \varepsilon+2M\frac{\sin^2\frac{(t-x)}{2}}{\sin^2\frac{\delta}{2}}$$

olduğu görülür.

Bu son eşitsizliğin her iki tarafına L_n pozitif lineer operatörü uygulanırsa,

$$L_n(|f(t)-f(x)|;x)\leq L_n\left(\varepsilon+\frac{2M}{\sin^2\frac{\delta}{2}}\sin^2\frac{(t-x)}{2};x\right)$$

$$\leq L_n(\varepsilon,x)+\frac{2M}{\sin^2\frac{\delta}{2}}L_n\left(\sin^2\frac{(t-x)}{2};x\right)$$

$$=L_n(\varepsilon;x)+\frac{2M}{\sin^2\frac{\delta}{2}}.\frac{1}{2}L_n\left(1-\cos 2\frac{(t-x)}{2};x\right)$$

$$=L_n(\varepsilon;x)\pm\varepsilon+\frac{M}{\sin^2\frac{\delta}{2}}\{L_n(1;x)-\cos x L_n(\cos t;x)$$

$$-\sin x L_n(\sin t;x)\pm 1\}$$

$$=\varepsilon+\varepsilon(L_n(1;x)-1)\frac{M}{\sin^2\frac{\delta}{2}}\{(L_n(1;x)-1)$$

$$-\cos x(L_n(\cos t;x)-\cos x)-\sin x(L_n(\sin t;x)-\sin x)\}$$

$$L_n(|f(t)-f(x)|;x)\leq \varepsilon+\varepsilon|L_n(1;x)-1|+\frac{M}{\sin^2\frac{\delta}{2}}\{|L_n(1;x)-1|$$

$$-|\cos x|.|L_n(\cos t;x)-\cos x|-|\sin x|.|L_n(\sin t;x)-\sin x|\} \quad (3.2)$$

eşitsizliği elde edilir.

$$\left|L_n\left(f(t);x\right)-f(x)\right|=\left|L_n\left(f(t);x\right)+L_n\left(f(x);x\right)-L_n\left(f(x);x\right)-f(x)\right|$$

$$\leq\left|L_n\left(f(t);x\right)-L_n\left(f(x);x\right)\right|+\left|L_n\left(f(x);x\right)-f(x)\right|$$

$$\leq L_n\left(\left|f(t)-f(x)\right|;x\right)+\left|f(x)\right|\left|L_n(1;x)-1\right|$$

Bu eşitsizlikte (3.2) eşitsizliği dikkate alınırsa,

$$\left|L_n\left(f(t);x\right)-f(x)\right|\leq\varepsilon+\varepsilon\left|L_n(1;x)-1\right|+\frac{M}{\sin^2\frac{\delta}{2}}\Big\{\left|L_n(1;x)-1\right|$$

$$-\left|\cos x\right|.\left|L_n(\cos t;x)-\cos x\right|-\left|\sin x\right|.\left|L_n(\sin t;x)-\sin x\right|\Big\}$$

$$+\left|f(x)\right|\left|L_n(1;x)-1\right|$$

bulunur.

Son eşitsizliğin her iki tarafının $x\in[0,2\pi]$ için supremumu alınıp norma geçilirse,

$$\left\|L_n f-f\right\|\leq\varepsilon+H\left\{\left\|L_n f_2-f_2\right\|+\left\|L_n f_1-f_1\right\|+\left\|L_n f_0-f_0\right\|\right\}$$

bulunur. Burada

$$H=\sup_{x\in[0,2\pi]}\left\{\varepsilon,\frac{2M}{\sin^2\frac{\delta}{2}}\sup_{x\in[0,2\pi]}\left|\cos x\right|,\frac{2M}{\sin^2\frac{\delta}{2}}\sup_{x\in[0,2\pi]}\left|\sin x\right|\right\}$$

şeklindedir.

Daha sonra $n\to\infty$ için limit alınırsa $ii)$ hipotezinden

$$\lim_n\left\|L_n f-f\right\|_{C[0,2\pi]}=0$$

olduğu görülür.■

3.2 $\mathcal{A}$ -Toplanabilme ile Korovkin Tipli Yaklaşım Teoremi

Bu bölümde 1981 yılında Bell tarafından A-toplanabilme metodu kullanılarak geliştirilen Korovkin tipli yaklaşım teoremleri ve bu teoremlerin ispatları incelenmiştir. Ayrıca süreklilik modülü kullanılarak bu yaklaşımın oranı incelenecektir.

Tanım 3.2.1 $\mathbf{A}=\left\{\mathrm{A}^{(n)}\right\}=\left\{a_{kj}^{(n)}\right\},\ k,j=1,2,3,...$ reel terimli sonsuz matris dizisi olmak üzere her j için $L_j : C[a,b]\to B[a,b]$ pozitif lineer operatör olsun. Eğer her $f\in C[a,b]$ için $\{L_j(f)\}$ dizisi f fonksiyonuna A-toplanabilir ise yani her $f\in C[a,b]$ için

$$\lim_k \left\| \sum_{j=1}^{\infty} a_{kj}^{(n)} L_j(f)-f \right\| = 0,\ (\text{ n'ye göre düzgün })$$

koşulu gerçekleniyorsa $\{L_j\}$ dizisine "A-toplam süreci" adı verilir.

$L_j : C[a,b]\to B[a,b]$ her $n,k\in\mathbb{N}$ için,

$$\sum_{j=1}^{\infty} a_{kj}^{(n)} \left\| L_j(1) \right\| < \infty \tag{3.3}$$

koşulunu sağlayan pozitif lineer operatörlerinin bir dizisi olsun. Bu durumda her bir $n,k\in\mathbb{N}$ ve $f\in C[a,b]$ için,

$$B_k^{(n)}(f;x)=\sum_{j=1}^{\infty} a_{kj}^{(n)} L_j(f(t);x),\quad n,k=1,2,3,...$$

ile tanımlı $B_k^{(n)}$ operatörünü ele alalım. O halde,

$$\left\| B_k^{(n)}(f) \right\|_{C[a,b]} = \sup_{x\in[a,b]} \left| B_k^{(n)}(f;x) \right| = \sup_{x\in[a,b]} \left| \sum_{j=1}^{\infty} a_{kj}^{(n)} L_j(f(t);x) \right|$$

$$\leq \sup_{x\in[a,b]} \sum_{j=1}^{\infty} a_{kj}^{(n)} L_j(|f(t)|;x)$$

$$\le \sup_{x\in[a,b]} \sum_{j=1}^{\infty} a_{kj}^{(n)} L_j(\|f\|;x)$$

$$= \|f\| \sup_{x\in[a,b]} \sum_{j=1}^{\infty} a_{kj}^{(n)} L_j(1;x)$$

$$\le \|f\| \sum_{j=1}^{\infty} a_{kj}^{(n)} \|L_j(1)\|$$

elde edilir. Şimdi (3.3) gözönüne alınırsa $B_k^{(n)}$ operatörü her bir n,k için anlamlı olup $B[a,b]$ uzayına aittir. Dolayısıyla

$$\|B_k^{(n)}\|_{C[a,b]\to B[a,b]} = \|B_k^{(n)}(1)\|_{B[a,b]} = \sup_{x\in[a,b]} \left| \sum_{j=1}^{\infty} a_{kj}^{(n)} L_j(f_0(t);x) \right|$$

şeklinde yazabiliriz.

Şimdi toplam süreci yardımıyla geliştirilen Korovkin tipli yaklaşım teoremleri ve bu teoremlerin ispatlarını verelim (Bell 1981).

Teorem 3.2.2 $\mathbf{A} = \{\mathrm{A}^{(n)}\} = \{a_{kj}^{(n)}\}$ terimleri negatif olmayan reel terimli matrislerin bir dizisi olsun. $L_j : C[a,b] \to B[a,b]$ ve (3.3) koşulunu sağlayan pozitif lineer operatör dizisi olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeler denktir :

$i)$ Her $f \in C[a,b]$ için $\lim_k \|B_k^{(n)} f - f\| = 0$, (n'ye göre düzgün)

$ii)$ $f_i(t) = t^i, i = 0,1,2$ olmak üzere $\lim_k \|B_k^{(n)}(f_i) - f_i\| = 0$, (n'ye göre düzgün)

İspat : $i) \Rightarrow ii)$ gerçeklendiği açıktır. Çünkü, her $f \in C[a,b]$ için $ii)$ hipotezi sağlandığına göre $f_0(t) = 1,\ f_1(t) = t,\ f_2(t) = t^2$ fonksiyonları da $C[a,b]$ uzayının elemanı olduğundan istenilen elde edilir.

Şimdi $ii) \Rightarrow i)$ olduğunu gösterelim.

$f \in C[a,b]$ alalım. f sürekli bir fonksiyon olduğundan $\forall \varepsilon > 0$ için $\exists \delta > 0$ vardır ∍

$|t-x|<\delta$ koşulunu sağlayan $\forall x,t\in[a,b]$ için $|f(t)-f(x)|<\varepsilon$ gerçeklenir. Buradan, f , $[a,b]$'de sınırlı olduğundan,

$$|f(t)-f(x)|\le|f(t)|+|f(x)|\le 2M.1\le 2M\,\frac{(t-x)^2}{\delta^2}$$

gerçeklenir. O halde $\forall x,t\in[a,b]$ için

$$|f(t)-f(x)|\le 2M\,\frac{(t-x)^2}{\delta^2}+\varepsilon$$

olduğu görülür.

Bu son eşitsizliğin her iki tarafına $B_k^{(n)}$ pozitif lineer operatörü uygulanırsa ,

$$B_k^{(n)}(|f(t)-f(x)|;x)\le B_k^{(n)}\left(\varepsilon+\frac{2M}{\delta^2}(t-x)^2;x\right)$$

$$\le B_k^{(n)}(\varepsilon;x)+\frac{2M}{\delta^2}B_k^{(n)}\left((t-x)^2;x\right)$$

$$=B_k^{(n)}(\varepsilon;x)\pm\varepsilon+\frac{2M}{\delta^2}\{B_k^{(n)}(t^2;x)$$

$$-2xB_k^{(n)}(t;x)+x^2B_k^{(n)}(1;x)\pm 2x^2\}$$

$$=\varepsilon+\varepsilon\left(B_k^{(n)}(1;x)-1\right)+\frac{2M}{\delta^2}\{\left(B_k^{(n)}(t^2;x)-x^2\right)$$

$$-2x\left(B_k^{(n)}(t;x)-x\right)+x^2\left(B_k^{(n)}(1;x)-1\right)\}$$

$$B_k^{(n)}(|f(t)-f(x);x|)\le\varepsilon+\varepsilon\left|B_k^{(n)}(1;x)-1\right|+\frac{2M}{\delta^2}\{\left|B_k^{(n)}(t^2;x)-x\right|$$

$$-2|x|.\left|B_k^{(n)}(t;x)-x\right|+\left|x^2\right|.\left|B_k^{(n)}(1;x)-1\right|\} \tag{3.4}$$

eşitsizliği elde edilir. Ayrıca

$$\left|B_k^{(n)}(f(t);x)-f(x)\right|=\left|B_k^{(n)}(f(t);x)-B_k^{(n)}(f(x);x)+B_k^{(n)}(f(x);x)-f(x)\right|$$

$$\leq \left|B_k^{(n)}(f(t);x) - B_k^{(n)}(f(x);x)\right| + \left|B_k^{(n)}(f(x);x) - f(x)\right|$$

$$\leq B_k^{(n)}(|f(t) - f(x)|;x) + |f(x)|.\left|B_k^{(n)}(1;x) - 1\right|$$

bulunur. Bu eşitsizlikte (3.4) eşitsizliği dikkate alınırsa,

$$\left|B_k^{(n)}(f(t);x) - f(x)\right| \leq \varepsilon + \varepsilon\left|B_k^{(n)}(1;x) - 1\right| + \frac{2M}{\delta^2}\left\{\left|B_k^{(n)}(t^2;x) - x^2\right|\right.$$

$$\left. - 2|x|.\left|B_k^{(n)}(t;x) - x\right| + \left|x^2\right|.\left|B_k^{(n)}(1;x) - 1\right|\right\}$$

$$+ |f(x)|.\left|B_k^{(n)}(1;x) - 1\right|$$

elde edilir.

Son eşitsizliğin her iki tarafının $x \in [a,b]$ için supremumu alınıp norma geçilirse,

$$\left\|B_k^{(n)}(f;x)\right\| \leq \varepsilon + H\left\{\left\|B_k^{(n)} f_2 - f_2\right\| + \left\|B_k^{(n)} f_1 - f_1\right\| + \left\|B_k^{(n)} f_0 - f_0\right\|\right\}$$

bulunur. Burada,

$$H = \sup_{x\in[a,b]}\left\{\varepsilon, \frac{2M}{\delta^2}\sup_{x\in[a,b]} 2|x|, \frac{2M}{\delta^2}\sup_{x\in[a,b]}\left|x^2\right|\right\}$$

şeklindedir.

Daha sonra $k \to \infty$ için limit alınırsa ve $ii)$ hipoteziden

$$\lim_{k}\left\|B_k^{(n)} f - f\right\|_{C[a,b]} = 0$$, (n'e göre düzgün)

olduğu görülür.■

Şimdi Teorem 3.2.2 'de verilen pozitif lineer operatör dizisi için yaklaşım oranını elde edeceğiz.

Yaklaşım oranı $\alpha_n \to 0$ $(n \to \infty)$ olmak üzere $|L_n(f;x) - f(x)| \leq c \quad \alpha_n$ olacak şekilde (α_n) dizisinin belirlenmesi problemidir. Yaklaşımlar teorisinde yakınsaklık oranı olarak adlandırılan bu hesaplamayı yapmak için birçok araç kullanılabilir. Bunlardan biri de süreklilik modülüdür.

Teorem 3.2.3 $\mathbf{A} = \{A^{(n)}\} = \{a_{kj}^{(n)}\}$ terimleri negatif olmayan reel terimli sonsuz matrislerin bir dizisi olsun. $L_j : C[a,b] \to B[a,b]$ ve (3.3) koşulunu sağlayan pozitif lineer operatörlerin bir dizisi olsun. Bu takdirde $\forall k,n$ için,

$$\left\| B_k^{(n)}(f) - f \right\| \leq \|f\| . \left\| B_k^{(n)}(1) - 1 \right\| + \omega(\mu_k) . \left\| B_k^{(n)}(1) + 1 \right\|$$

eşitsizliği gerçeklenir. Burada,

$$\mu_k^2 = \left\| B_k^{(n)} (t-x)^2 \right\|$$

şeklindedir.

İspat : $x,t \in [a,b]$ ve δ pozitif bir sayı olmak üzere süreklilik modülünün özelliği nedeniyle,

$$|f(t) - f(x)| \leq \omega\left(f; \frac{|t-x|}{\delta} \delta \right) \leq \left(1 + \frac{|t-x|^2}{\delta^2} \right) \omega(f;\delta)$$

gerçeklenir. Eşitsizliğin her iki tarafına $B_k^{(n)}$ pozitif lineer operatörünü uygulanırsa,

$$B_k^{(n)}(|f(t) - f(x)|; x) \leq B_k^{(n)}\left(\left(\omega(f;\delta) + \frac{(t-x)^2}{\delta^2} \omega(f;\delta) \right); x \right)$$

$$= B_k^{(n)}(\omega(f;\delta); x) + \frac{\omega(f;\delta)}{\delta^2} B_k^{(n)}\left((t-x)^2; x\right)$$

$$\leq B_k^{(n)}(\omega(f;\delta); x) + \frac{\omega(f;\delta)}{\delta^2} \left\| B_k^{(n)}\left((t-x)^2\right) \right\|$$

$$= B_k^{(n)}(\omega(f;\delta); x) + \frac{\omega(f;\delta)}{\delta^2} \mu_k^2$$

elde edilir. Burada $\mu_k > 0$ olduğundan $\delta = \mu_k$ alınırsa,

$$B_k^{(n)}\left(\left|f(t)-f(x)\right|;x\right)=\omega(f;\mu_k)B_k^{(n)}(1;x)+\frac{\omega(f;\mu_k)}{\mu_k^2}.\mu_k^2$$

$$B_k^{(n)}\left(\left|f(t)-f(x)\right|;x\right)\le\left(B_k^{(n)}(1;x)+1\right)\omega(f;\mu_k) \tag{3.5}$$

eşitsizliği elde edilir. Ayrıca

$$\left|B_k^{(n)}(f(t);x)-f(x)\right|=\left|B_k^{(n)}(f(t);x)-B_k^{(n)}(f(x);x)+B_k^{(n)}(f(x);x)-f(x)\right|$$

$$\le\left|B_k^{(n)}(f(t);x)-B_k^{(n)}(f(x);x)\right|+\left|B_k^{(n)}(f(x);x)-f(x)\right|$$

$$\le B_k^{(n)}\left(\left|f(t)-f(x)\right|;x\right)+\left|f(x)\right|.\left|B_k^{(n)}(1;x)-1\right|$$

elde edilir. Bu eşitsizlikte (3.5) eşitsizliği dikkate alınırsa,

$$\left|B_k^{(n)}(f(t);x)-f(x)\right|\le\left(B_k^{(n)}(1;x)+1\right).\omega(f;\mu_k)+\left|f(x)\right|.\left|B_k^{(n)}(1;x)-1\right|$$

bulunur. Buradan,

$$\left\|B_k^{(n)}(f)-f\right\|\le\left\|B_k^{(n)}(1)+1\right\|.\omega(\mu_k)+\|f\|.\left\|B_k^{;(n)}(1)-1\right\|$$

olduğu görülür. Bu ise ispatı tamamlar.■

3.3 Abel Toplanabilme ile Korovkin Tipli Yaklaşım Teoremleri

Bu bölümde, 2013 yılında Ünver tarafından Abel yakınsaklık metodu kullanarak geliştirilen Korovkin tipli yaklaşım teoremleri ve bu teoremlerin ispatları incelenmiştir.

$L_n : C[a,b]\to B[a,b]$ her $y\in(0,1)$ için,

$$\sum_{n=0}^{\infty}\|L_n(1)\|y^n<\infty \tag{3.6}$$

koşulunu sağlayan pozitif lineer operatörlerin bir dizisi olsun. Her $y\in(0,1)$ ve $f\in C[a,b]$ için,

$$U\left(\left(f(t);x\right);y\right)=(1-y)\sum_{n=0}^{\infty}L_n\left(f(t);x\right)y^n$$

ile tanımlı U operatörünü ele alalım. O halde,

$$\|U((f))\|_{B[a,b]}=\sup_{x\in[a,b]}\left|U\left(\left(f(t);x\right);y\right)\right|=\sup_{x\in[a,b]}\left|(1-y)\sum_{n=0}^{\infty}L_n\left(f(t);x\right)y^n\right|$$

$$\leq\sup_{x\in[a,b]}(1-y)\sum_{n=0}^{\infty}L_n\left(\left|f(t)\right|;x\right)y^n$$

$$\leq\sup_{x\in[a,b]}(1-y)\sum_{n=0}^{\infty}L_n\left(\|f\|;x\right)y^n$$

$$\leq\|f\|(1-y)\sum_{n=0}^{\infty}\|L_n(1)\|y^n$$

elde edilir. Şimdi (3.6) gözönüne alınırsa U operatörü her $y\in(0,1)$ ve $f\in C[a,b]$ için anlamlı olup $B[a,b]$ uzayına aittir. Dolayısıyla

$$\|U\|_{C[a,b]\to B[a,b]}=\|U(1)\|_{B[a,b]}=\sup_{x\in[a,b]}\left|(1-y)\sum_{n=0}^{\infty}L_n\left(f_0(t);x\right)y^n\right|$$

şeklinde yazabiliriz. Ayrıca

$$\|U((.);y)\|_{C[a,b]\to B[a,b]}\leq\sum_{n=0}^{\infty}\|L_n(f_0)\|y^n \tag{3.7}$$

elde edilir.

Şimdi Abel Yakınsaklık yardımıyla Korovkin tipli yaklaşım teoremini verelim.

Teorem 3.3.1 $L_n:C[a,b]\to B[a,b]$ ve (3.6) koşulunu sağlayan pozitif lineer operatör dizisi olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeler denktir :

$i)$ Herhangi bir $f\in C[a,b]$ için,

$$\lim_{y\to1^-}(1-y)\left\|\sum_{n=0}^{\infty}\left(L_n\left(f(t);x\right)-f(x)\right)y^n\right\|=0$$

$ii)$ $f_i(t)=t^i, i=0,1,2$ olmak üzere,

$$\lim_{y\to 1^-}(1-y)\left\|\sum_{n=0}^{\infty}\left(L_n\left(f_i(t);x\right)-f_i(x)\right)y^n\right\|=0 \text{ (Ünver 2013).}$$

İspat : $i)\Rightarrow ii)$ gerçeklediği açıktır.

$ii)\Rightarrow i)$ olduğunu gösterelim. $f\in C[a,b]$ alalım. f sürekli bir fonksiyon olduğundan $\forall\varepsilon>0$ için $\exists\delta>0$ vardır $\ni$ $|t-x|<\delta$ koşulunu sağlayan $\forall x,t\in[a,b]$ için $|f(t)-f(x)|<\varepsilon$ gerçeklenir. O halde Teorem 3.2.2'ye benzer olarak $\forall x,t\in[a,b]$ için,

$$|f(t)-f(x)|\le\varepsilon+2M\frac{(t-x)^2}{\delta^2}+\varepsilon$$

elde edilir.

Son eşitsizliğin her iki tarafına U pozitif lineer operatörü uygulanırsa,

$$U\left(\left(|f(t)-f(x)|;x\right);y\right)\le U\left(\left(\varepsilon+\frac{2M}{\delta^2}(t-x)^2;x\right);y\right)$$

$$\le U\left((\varepsilon;x);y\right)+\frac{2M}{\delta^2}U\left(\left((t-x)^2;x\right);y\right)$$

$$U\left(\left(|f(t)-f(x)|;x\right);y\right)\le\varepsilon+\varepsilon\left|U\left((1;x);y\right)-1\right|+\frac{2M}{\delta^2}\left\{\left|U\left((t^2;x);y\right)-x^2\right|\right.$$

$$\left.-2|x|.\left|U\left((t;x);y\right)-x\right|+\left|x^2\right|.\left|U\left((1;x);y\right)-1\right|\right\} \tag{3.8}$$

eşitsizliği elde edilir. Daha sonra

$$(1-y)\left|\sum_{n=0}^{\infty}\left(L_n\left(f(t);x\right)-f(x)\right)y^n\right|=\left|U\left((f(t);x);y\right)-f(x)\right|$$

$$=\left|U\left((f(t));x);y-U\left((f(x);x);y\right)+U\left((f(x);x);y\right)-f(x)\right|$$

$$\le\left|U\left((f(t);x);y\right)-U\left((f(x);x);y\right)\right|+\left|U\left((f(x);x);y\right)-f(x)\right|$$

$$\leq U\left(\left(\left|f(t)-f(x)\right|;x\right);y\right)+\left|f(x)\right|.\left|U\left((1;x);y\right)-1\right|$$

bulunur. Son eşitsizlikte (3.8) eşitsizliği dikkate alınırsa,

$$(1-y)\left|\sum_{n=0}^{\infty}\left(L_n\left(f(t);x\right)-f(x)\right)y^n\right|\leq \varepsilon+\varepsilon\left|U\left((1;x);y\right)-1\right|+\frac{2M}{\delta^2}\left\{\left|U\left(\left(t^2;x\right);y\right)-x^2\right|\right.$$

$$\left.-2|x|.\left|U\left((t;x);y\right)-x\right|+\left|x^2\right|.\left|U\left((1;x);y\right)-1\right|\right\}$$

$$+\left|f(x)\right|.\left|U\left((1;x);y\right)-1\right|$$

gerçeklenir. $\forall y\in(0,1)$ için $c=\sup\{|a|,|b|\}$ olmak üzere,

$$\left|U\left(\left(f(t);x\right);y\right)-f(x)\right|\leq\left(\varepsilon+M+\frac{2M}{\delta^2}c^2\right)\left|U\left((1;x);y\right)-1\right|$$

$$+\frac{4M}{\delta^2}c\left|U\left((t;x);y\right)-x\right|+\frac{2M}{\delta^2}\left|U\left(\left(t^2;x\right);y\right)-x^2\right|$$

elde edilir.

Son eşitsizliğin her iki tarafının $x\in[a,b]$ için supremumu alınıp norma geçilirse,

$$(1-y)\left\|\sum_{n=0}^{\infty}\left(L_n\left(f(t);x\right)-f(x)\right)y^n\right\|\leq H\left\{(1-y)\left\|\sum_{n=0}^{\infty}\left(L_n\left(t^2;x\right)-x^2\right)y^n\right\|\right.$$

$$\left.+(1-y)\left\|\sum_{n=0}^{\infty}\left(L_n(t;x)-x\right)y^n\right\|+(1-y)\left\|\sum_{n=0}^{\infty}\left(L_n(1;x)-1\right)y^n\right\|\right\}$$

bulunur. Burada,

$$H=\sup_{x\in[a,b]}\left\{\varepsilon+M+\frac{2M}{\delta^2}c^2,\frac{4M}{\delta^2}c,\frac{2M}{\delta^2}\right\}$$

şeklindedir.

Daha sonra $y\to1^-$ için limit alınırsa $ii)$ hipotezinden

$$\lim_{y\to1^-}(1-y)\left\|\sum_{n=0}^{\infty}\left(L_n\left(f(t);x\right)-f(x)\right)y^n\right\|=0$$

olduğu görülür.■

Şimdi süreklilik modülü yardımıyla Teorem 3.3.1 'in yakınsaklık oranını verelim.

Teorem 3.3.2 $L_n : C[a,b] \to B[a,b]$ şeklinde tanımlı (3.6) ve

$K = \sup_{y\in(0,1)} \|U((.);y)\|_{C[a,b]\to B[a,b]} < \infty$ koşullarını sağlayan pozitif lineer operatörlerin bir

dizisi olsun. Bu takdirde,

$i)$ $\lim_{y\to 1^-} \|U((1;x);y)-1\| = 0$

$ii)$ $\lim_{y\to 1^-} \omega(f;\alpha(y)) = 0$

koşulları sağlanıyorsa her $f \in C[a,b]$ için,

$$\lim_{y\to 1^-}(1-y)\left\|\sum_{n=0}^{\infty}(L_n(f(t);x)-f(x))y^n\right\| = 0$$

gerçeklenir. Burada,

$$\alpha^2(y) = \left\|U\left(\left((t-x)^2;x\right);y\right)\right\|$$

şeklindedir (Ünver 2013).

İspat : Her $y \in (0,1)$ ve δ pozitif bir sayı olmak üzere süreklilik modülünün özelliği nedeniyle,

$$|f(t)-f(x)| \le \omega\left(f;\frac{|t-x|}{\delta}.\delta\right) \le \left(1+\frac{|t-x|}{\delta}\right)\omega(f;\delta)$$

$$\le \left(1+\left[\left|\frac{|t-x|}{\delta}\right|\right]\right)\omega(f;\delta)$$

$$\le \left(1+\frac{|t-x|^2}{\delta^2}\right)\omega(f;\delta)$$

gerçeklenir.

Eşitsizliğin her iki tarafına U pozitif lineer operatörünü uygulanırsa,

$$U\left(\left(\left|f(t)-f(x)\right|;x\right);y\right)\leq U\left(\left(\omega(f;\delta)+\frac{(t-x)^2}{\delta^2}\omega(f;\delta);x\right);y\right)$$

$$=U\left(\left(\omega(f;\delta);x\right);y\right)+\frac{\omega(f;\delta)}{\delta^2}U\left(\left((t-x)^2;x\right);y\right)$$

$$\leq U\left(\left(\omega(f;\delta);x\right);y\right)+\frac{\omega(f;\delta)}{\delta^2}\left\|U\left((t-x)^2;x\right);y\right\|$$

$$\leq U\left(\left(\omega(f;\delta);x\right);y\right)+\frac{\omega(f;\delta)}{\delta^2}\alpha^2(y)$$

elde edilir. Burada $\alpha(y)>0$ olduğundan $\delta=\alpha(y)$ alınırsa,

$$U\left(\left(\left|f(t)-f(x)\right|;x\right);y\right)\leq\left(U\left((1;x);y\right)+1\right)\omega\left(f;\alpha(y)\right) \tag{3.9}$$

eşitsizliği elde edilir. Burada,

$$\left|U\left((f(t);x);y\right)-f(x)\right|\leq U\left(\left(\left|f(t)-f(x)\right|;x\right);y\right)+\left|f(x)\right|.\left|U\left((1;x);y\right)-1\right|$$

olup, bu eşitsizlikte (3.9) eşitsizliği dikkate alınırsa,

$$\left|U\left((f(t);x),y\right)-f(x)\right|\leq\left(U\left((1;x);y\right)+1\right)\omega\left(f;\alpha(y)\right)+M\left|U\left((1;x);y\right)-1\right|$$

elde edilir.

Son eşitsizliğin her iki tarafının $x\in[a,b]$ için supremumu alınıp norma geçilirse,

$$\left\|U\left((f(t);x);y\right)-f(x)\right\|\leq\left[\left\|U\left((1;x),y\right)\right\|+1\right]\omega\left(f;\alpha(y)\right)+M\left\|U\left((1;x);y\right)-1\right\|$$

$$\leq(K+1)\omega\left(f;\alpha(y)\right)+M\left\|U\left((1;x);y\right)-1\right\|$$

$$\leq H\left\{\omega\left(f;\alpha(y)\right)+\left\|U\{(1;x);y\}-1\right\|\right\}$$

bulunur. Burada,

$$H=\sup_{x\in[a,b]}\{1+K,M\}$$

şeklindedir.

Daha sonra $y \to 1^-$ için limit alınırsa, hipotezler nedeniyle her $f \in C[a,b]$ için,

$$\lim_{y\to 1^-}\left\|\sum_{n=0}^{\infty}\left(L_n\left(f(t);x\right)-f(x)\right)y^n\right\|=0$$

olduğu görülür.■

3.4 Kuvvet Serisi Metodu ile Korovkin Tipli Yaklaşım Teoremleri

Bu bölümde 2017 yılında Atlıhan ve Taş tarafından verilen Kuvvet Serisi metodu kullanılarak geliştirilen Korovkin tipli yaklaşım teoremlerini inceleyeceğiz. Ayrıca süreklilik modülü kullanılarak, elde edilen yaklaşımların yakınsaklık oranı incelenecektir.

$C[a,b]$ uzayında Kuvvet Serisi metodu yardımıyla, Korovkin tipli yaklaşım teoremi verelim.

$L_n : C[a,b] \to B[a,b]$ herhangi bir $f \in C[a,b]$ için,

$$\sup_{0<t<R}\frac{1}{p(t)}\sum_{n=0}^{\infty}\left\|L_n(1)\right\|p_n t^n<\infty \tag{3.10}$$

koşulunu sağlayan pozitif lineer operatörlerinin bir dizisi olsun. Bu durumda herhangi bir $f \in C[a,b]$ için

$$V_t\{(f(y);x)\}=\frac{1}{p(t)}\sum_{n=0}^{\infty}L_n\left(f(y);x\right)p_n t^n$$

ile tanımlı V_t operatörü ele alalım. Aynı zamanda

$$\left\|V_t\{(f)\}\right\| = \sup_{x\in[a,b]}\left|V_t\{(f(y);x)\}\right| = \sup_{x\in[a,b]}\left|\frac{1}{p(t)}\sum_{n=0}^{\infty}L_k\left(f(y);x\right)p_n t^n\right|$$

$$\leq \sup_{x\in[a,b]}\frac{1}{p(t)}\sum_{n=0}^{\infty}L_n\left(\left|f(y)\right|;x\right)p_n t^n$$

$$\leq \sup_{x\in[a,b]} \frac{1}{p(t)} \sum_{n=0}^{\infty} L_n(\|f\|;x) p_n t^n$$

$$\leq \|f\| \sup_{0<t<R} \frac{1}{p(t)} \sum_{n=0}^{\infty} \|L_n(1)\| p_n t^n$$

elde edilir. Şimdi (3.10) gözönüne alınırsa V_t operatörü herhangi bir $f \in C[a,b]$ için anlamlı olup $B[a,b]$ uzayına aittir.

$$\|V_t\|_{C[a,b]\to B[a,b]} = \|V_t(1)\|_{B[a,b]} = \sup_{x\in[a,b]} \left| \frac{1}{p(t)} \sum_{n=0}^{\infty} L_n(f_0(y);x) p_n t^n \right|$$

şeklinde yazabiliriz. Ayrıca

$$\|V_t\{(.);x\}\| \leq \sup_{0<t<R} \frac{1}{p(t)} \sum_{n=0}^{\infty} \|L_n(1)\| p_n t^n < \infty \tag{3.11}$$

elde edilir.

Teorem 3.4.1 $L_n : C[a,b] \to B[a,b]$ ve (3.10) koşulunu sağlayan pozitif lineer operatör dizisi olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeler denktir :

$i)$ Herhangi bir $f \in C[a,b]$ için,

$$\lim_{t\to R^-} \|V_t\{(f(y);x)\} - f(x)\| = 0$$

$ii)$ $f_i(t) = t^i, i = 0,1,2$ olmak üzere,

$$\lim_{t\to R^-} \|V_t\{(f(y);x)\} - f_i(x)\| = 0$$

gerçeklenir (Atlıhan ve Taş, 2017).

İspat : $i) \Rightarrow ii)$ gerçeklediği açıktır.

$ii) \Rightarrow i)$ olduğunu gösterelim. $f \in C[a,b]$ alalım. f sürekli bir fonksiyon olduğundan $\forall \varepsilon > 0$ için $\exists \delta > 0$ vardır ∍ $|y - x| < \delta$ koşulunu sağlayan $\forall x, y \in [a,b]$ için $|f(y) - f(x)| < \varepsilon$ gerçeklenir. O halde Teorem 3.2.2'ye benzer olarak $\forall x, y \in [a,b]$ için,

$$|f(y)-f(x)|\leq\varepsilon+2M\,\frac{(y-x)^2}{\delta^2}$$

elde edilir. Bu son eşitsizliğin her iki tarafına V_t pozitif lineer operatörü uygulanırsa,

$$V_t\{|f(y)-f(x)|;x\}\leq V_t\left\{\left(\varepsilon+\frac{2M}{\delta^2}(y-x)^2\right);x\right\}$$

$$V_t\{|f(y)-f(x)|;x\}\leq\varepsilon+\varepsilon\left|V_t\{(1;x)\}-1\right|+\frac{2M}{\delta^2}\Big[\left|V_t\{(y^2;x)\}-x^2\right|$$

$$+2|x|.\left|V_t\{(y;x)\}-x\right|+\left|x^2\right|.\left|V_t\{(1,x)\}-1\right|\Big] \qquad (3.12)$$

eşitsizliği elde edilir.

$$\left|V_t\{(f(y);x)\}-f(x)\right|\leq V_t\{(|f(y)-f(x)|;x)\}+|f(x)|.\left|V_t\{(1;x)\}-1\right|$$

elde edilir. Son eşitsizlikte (3.12) eşitsizliği dikkate alınırsa,

$$\left|V_t\{(f(y);x)\}-f(x)\right|\leq\varepsilon+\varepsilon\left|V_t\{(1;x)\}-1\right|+\frac{2M}{\delta^2}\Big[\left|V_t\{(y^2;x)\}-x^2\right|$$

$$-2|x|.\left|V_t\{(y;x)\}-x\right|+\left|x^2\right|.\left|V_t\{(1;x)\}-1\right|$$

$$+|f(x)|.\left|V_t\{(1;x)\}-1\right|\Big]$$

elde edilir. $\forall t\in(0,1)$ için $c=\sup\{|a|,|b|\}$ olmak üzere,

$$\left|V_t\{(f(y);x)\}-f(x)\right|\leq\left(\varepsilon+M+\frac{2M}{\delta^2}c^2\right)\left|V_t\{(1;x)\}-1\right|$$

$$+\frac{4M}{\delta^2}c\left|V_t\{(y;x)\}-x\right|+\frac{2M}{\delta^2}\left|V_t\{(y^2;x)\}-x^2\right|$$

elde edilir.

Son eşitsizliğin her iki tarafının $x\in[a,b]$ için supremumu alınıp norma geçilirse,

$$\left\|V_t\{(f(y);x)\}-f(x)\right\|\leq H\left\{\left\|V_t\{(y^2;x)\}-x^2\right\|+\left\|V_t\{(y;x)\}-x\right\|+\left\|V_t\{(1;x)\}-1\right\|\right\}$$

bulunur. Burada,

$$H = \sup_{x\in[a,b]} \left\{ \varepsilon + M + \frac{2M}{\delta^2} c^2 , \frac{4M}{\delta^2} , \frac{2M}{\delta^2} \right\}$$

şeklindedir.

Daha sonra $t \to R^-$ için limit alınırsa $ii)$ hipoteziden ve ε keyfi olduğundan yeterince küçük seçilirse,

$$\lim_{t\to R^-} \left\| V_t \{(f(y);x)\} - f(x) \right\| = 0$$

olduğu görülür.■

Burada sırasıyla $p_n = 1$, $R = 1$ ve $p(t) = \dfrac{1}{1-t}$, $t \in (-1,1)$ alınırsa, o zaman Kuvvet Serisi metodu Abel metoduna denktir.

Şimdi Teorem 3.4.1'deki hipotezin koşullarını sağlayan fakat Klasik Korovkin teoreminin koşullarını sağlamayan pozitif lineer operatör dizisi örneğini ele alalım.

Örnek 3.4.2 (L_n), $C[a,b]$ üzerinde tanımlı pozitif lineer operatörlerin bir dizisi olsun. (L_n), operatörü

$$L_n(f;x) = (1+\alpha_n) B_n(f;x)$$

olacak şekilde tanımlansın. Burada (B_n) Bernstein polinomlarının dizisidir. Aynı şekilde $(\alpha_n) = \left((-1)^n\right)$ olsun. Dikkat edilirse (α_n) dizisi klasik olarak yakınsak değil ancak 0 değerine Abel anlamında yakınsaktır. Dolayısıyla (L_n) pozitif lineer operatörü Klasik Korovkin teoremi hipotezlerini gerçeklemez. Ancak Teorem 3.4.1'in hipotezlerini gerçekler.

Teorem 3.4.3 $L_n : C[a,b] \to B[a,b]$ ve (3.10) koşulunu sağlayan pozitif lineer operatörlerin bir dizisi olsun. Bu takdirde,

$i)$ $\displaystyle\lim_{t\to R^-} \left\| V_t \{(1;x)\} - 1 \right\| = 0$

$ii)$ $\displaystyle\lim_{t\to R^-} \omega(f;\alpha(t)) = 0$

koşullarını sağlıyorsa her $f \in C[a,b]$ için,

$$\lim_{t \to R^-} \left\| V_t\{(f(y);x)\} - f(x) \right\| = 0$$

gerçeklenir. Burada,

$$\alpha^2(t) = \left\| V_t\{((y-x)^2)\} \right\|$$

şeklindedir (Atlıhan ve Taş, 2017).

İspat : Her $t \in (0,R)$ ve δ pozitif bir sayı olmak üzere süreklilik modülünün özelliği nedeniyle,

$$|f(y) - f(x)| \leq \left(1 + \frac{(y-x)^2}{\delta^2}\right)\omega(f;\delta)$$

gerçeklenir. Eşitsizliğin her iki tarafına V_t pozitif lineer operatörünü uygulanırsa,

$$V_t\{(|f(y) - f(x)|;x)\} \leq V_t\left\{\left(\omega(f;\delta) + \frac{(y-x)^2}{\delta^2}\omega(f;\delta);x\right)\right\}$$

$$V\{(|f(y) - f(x)|;x)\}_t \leq V_t\{(\omega(f;\delta);x)\} + \frac{\omega(f;\delta)}{\delta^2}\alpha^2(t)$$

elde edilir. Ayrıca

$$V_t\{(|f(y) - f(x);x|)\} \leq (V_t\{(1;x)\} + 1)\omega(f;\alpha(t)) \tag{3.13}$$

eşitsizliği elde edilir.

$$|V_t\{(f(y);x)\} - f(x)| \leq V_t\{(|f(y) - f(x)|;x)\} + |f(x)|.|V_t\{(1;x)\} - 1|$$

Bu eşitsizlikte (3.13) eşitsizliği dikkate alınırsa,

$$|V_t\{(f(y);x)\} - f(x)| \leq (V_t\{(1;x)\} + 1)\omega(f;\alpha(y)) + M|V_t\{(1;x)\} - 1|$$

bulunur.

Bu son eşitsizliğin her iki tarafının $x \in [a,b]$ için supremumu alınıp norma geçilirse,

$$\|V_t\{(f(y);x)\}-f(x)\| \le [\|V_t\{(1;x)\}\|+1]\omega(f;\alpha(t))+M\|V_t\{(1;x)\}-1\|$$

elde edilir.Her $t\in(0,R)$ ve $\|V_t\{(.);x\}\|_{C[a,b]\to B[a,b]}<K$ için,

$$\le (K+1)\omega(f;\alpha(t))+M\|V_t\{(1;x)\}-1\|$$

$$\|V_t\{(f(y);x)\}-f(x)\| \le H[\omega(f;\alpha(t))+\|V_t\{(1;x)\}-1\|]$$

gerçeklenir. Burada,

$$H=\sup_{x\in[a,b]}\{1+K,M\}$$

şeklindedir.

Daha sonra $t\to R^-$ için limit alınırsa, hipotezler nedeniyle her $f\in C[a,b]$ için,

$$\lim_{t\to R^-}\|V_t\{(f(y);x)\}-f(x)\|=0$$

olduğu görülür.■

Şimdi $L_q[a,b]$ uzayında Kuvvet Serisi metodu ile Korovkin tipli yaklaşım teoremini verelim. Burada L_q uzayı, $q\ge 1$ için

$$L_q=\left\{f:\int_a^b |f(x)|^q\,dx<\infty\right\}$$

şeklinde tanımlanır. Bu uzay,

$$\|f\|_q=\int_a^b\left(|f(x)|^q\,dx\right)^{1/q}$$

normuna göre Banach Uzayıdır.

$L_n:L_q[a,b]\to L_q[a,b]$ herhangi bir $t\in(0,R)$ için,

$$H^{'}=\sup_{0<t<R}\sum_{n=0}^{\infty}p_n\|L_n\|_{L_q\to L_q}t^n<\infty \qquad (3.14)$$

koşulunu sağlayan pozitif lineer operatörlerinin bir dizisi olsun. Şimdi her $t \in (0,R)$ ve $f \in L_q[a,b]$ için

$$V_t\{(f(y);x)\} = \frac{1}{p(t)}\sum_{n=0}^{\infty} L_n(f(y);x)p_n t^n$$

ile tanımlı V_t operatörünü ele alalım

. Şimdi (3.14) gözönüne alınırsa V_t operatörü herhangi bir $f \in L_q[a,b]$ için anlamlı olup $L_q[a,b]$ uzayına aittir. Dolayısıyla

$$\|V_t\|_{L_q \to L_q} = \|V_t(1)\|_{L_q} = \left(\int_a^b |V_t(1;x)|^q dx\right)^{1/q}$$

şeklinde yazabiliriz

Şimdi Kuvvet Serisi metodu yardımıyla $L_q[a,b]$ uzayında Korovkin tipli yaklaşım teoremini ve bu teoremin ispatını verelim.

Teorem 3.4.4 $L_n : L_q[a,b] \to L_q[a,b]$ ve (3.14) koşulunu sağlayan pozitif lineer operatör dizisi olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeler denktir :

$i)$ Herhangi bir $f \in L_q[a,b]$ için,

$$\lim_{t\to R^-}\|V_t\{(f(y);x)\} - f(x)\|_q = 0$$

$ii)$ $f_i(y) = y^i, i = 0,1,2$ olmak üzere,

$$\lim_{t\to R^-}\|V_t\{(f_i(y);x)\} - f_i(x)\|_q = 0 \text{ (Atlıhan ve Taş, 2017).}$$

İspat : $i) \Rightarrow ii)$ gerçeklediği açıktır. Çünkü her $f \in L_q[a,b]$ için $ii)$ hipotezi sağlandığına göre $f_0(y)=1,\ f_1(y)=y,\ f_2(y)=y^2$ fonksiyonları da $L_q[a,b]$ uzayını elemanı olduğundan istenilen elde edilir.

Hatırlatma (Luzin Teoremi) $f \in L_q[a,b]$ ise $\forall \varepsilon > 0$ için $\|f - g\|_q < \varepsilon$ olacak şekilde $C[a,b]$ uzayında sürekli bir g fonksiyonu vardır. Yani $C[a,b]$ uzayı $L_q[a,b]$ uzayında yoğundur (Royden 1968).

Şimdi $ii) \Rightarrow i)$ olduğunu gösterelim.

$f \in L_q[a,b]$ alalım. L_q uzayındaki fonksiyonların C-özelliğine göre (Luzin Teoremi) $C[a,b]$ uzayında öyle bir sürekli φ fonksiyonu bulabiliriz ki $\forall \varepsilon > 0$ için $\|f - \varphi\| < \varepsilon$ sağlanır.

Ayrıca $\varphi \in C[a,b]$ alalım. φ sürekli bir fonksiyon olduğundan $\forall \varepsilon > 0$ için $\exists \delta > 0$ vardır $\ni$ $|y - x| < \delta$ koşulunu sağlayan $\forall x, y \in [a,b]$ için $|\varphi(y) - \varphi(x)| < \varepsilon$ gerçeklenir. O halde $\forall x, y \in [a,b]$ için,

$$|\varphi(y) - \varphi(x)| \leq \varepsilon + 2M \frac{(y-x)^2}{\delta^2}$$

elde edilir. Son eşitsizliğin her iki tarafına V_t pozitif lineer operatörü uygulanırsa,

$$V_t\{(|\varphi(y) - \varphi(x)|; x)\} \leq V_t\left\{\left(\varepsilon + 2M \frac{(y-x)^2}{\delta^2}; x\right)\right\} \tag{3.15}$$

elde edilir. Ayrıca

$$|V_t\{(\varphi(y); x)\} - \varphi(x)| \leq V_t\{(|\varphi(y) - \varphi(x)|; x)\} + |\varphi(x)|.|V_t\{(1, x)\} - 1|$$

$$|V_t\{(\varphi(y); x)\} - \varphi(x)| \leq \varepsilon + \varepsilon|V_t\{(1; x)\} - 1| + \frac{2M}{\delta^2}\left[V_t\{(y^2; x)\}\right.$$

$$\left. + 2|x|.|V_t\{(y; x)\} - x| + |x^2|.|V_t\{(1; x)\} - 1| + M|V_t\{(1; x)\} - 1|\right.$$

bulunur.

$\forall t \in (0, R)$ için $c = \sup\limits_{x \in [a,b]} \{|a|, |b|\}$ olmak üzere,

$$|V_t\{(\varphi(y); x)\} - \varphi(x)| \leq \varepsilon + \left(\varepsilon + M + \frac{2M}{\delta^2} c^2\right)|V_t\{(1; x)\} - 1|$$

$$+\frac{4M}{\delta^2}c\left|V_t\{(y;x)\}-x\right|+\frac{2M}{\delta^2}\left|V_t\{(y^2;x)\}-x^2\right| \qquad (3.16)$$

eşitsizliği elde edilir. Aynı zamanda,

$$\left|V_t\{(f(y);x)\}-V_t\{(\varphi(y);x)\}\right|=\left|V_t\{(f(y)-\varphi(y);x)\}\right|=\left|\frac{1}{p(t)}\sum_{n=0}^{\infty}(L_n(f(y)-\varphi(y));x)p_nt^n\right|$$

$$\leq\frac{1}{p(t)}\sum_{n=0}^{\infty}L_n(\left|f(y)-\varphi(y)\right|;x)p_nt^n$$

$$\leq\frac{1}{p(t)}\sum_{n=0}^{\infty}L_n(\|f-\varphi\|_q;x)p_nt^n$$

$$=\|f-\varphi\|_q\frac{1}{p(t)}\sum_{n=0}^{\infty}L_n(1;x)p_nt^n$$

$$\left|V_t\{(f(y);x)\}-\varphi(y)\right|\leq\|f-\varphi\|_q\frac{1}{p(t)}\sum_{n=0}^{\infty}\|L_n\|_{L_q\to L_q}p_nt^n \qquad (3.17)$$

eşitsizliği elde edilir. Aynı zamanda

$$\left|V_t\{(f(y);x)\}-f(x)\right|=\left|V_t\{(f(y);x)\}-V_t\{(\varphi(y);x)\}+V_t\{(\varphi(y);x)\}-\varphi(x)+\varphi(x)-f(x)\right|$$

$$\leq\left|V_t\{(f(y);x)\}-V_t\{(\varphi(y);x)\}\right|+\left|V_t\{(\varphi(y);x)\}-\varphi(x)\right|+\left|f(x)-\varphi(x)\right|$$

$$\left\|V_t\{(f(y);x)\}-f(x)\right\|_q\leq\left\|V_t\{(f(y);x)\}-V_t\{(\varphi(y);x)\}\right\|_q+\left\|V_t\{(\varphi(y);x)\}-\varphi(x)\right\|_q$$

$$+\|f(x)-\varphi(x)\|_q$$

bulunur. Son eşitsizlikte (3.16) ve (3.17) eşitsizlikleri dikkate alınırsa,

$$\left\|V_t\{(f(y);x)\}-f(x)\right\|_q\leq\varepsilon\frac{1}{p(t)}\sum_{n=0}^{\infty}p_n\|L_n\|_{L_q\to L_q}t^n+\varepsilon+\left(\varepsilon+M+\frac{2M}{\delta^2}c^2\right)\left\|V_t\{(1;x)\}-1\right\|_q$$

$$+\frac{4M}{\delta^2}c\left\|V_t\{(y;x)\}-x\right\|_q+\frac{2M}{\delta^2}\left\|V_t\{(y^2;x)\}-x^2\right\|+\varepsilon$$

$$\left\|V_t\{(f(y);x)\}-f(x)\right\|=\varepsilon\left(2+\frac{H'}{p(t)}\right)+\left(\varepsilon+M+\frac{2M}{\delta^2}c^2\right)\left\|V_t\{(1;x)\}-1\right\|_q$$

$$+\frac{4M}{\delta^2}c\left\|V_t\{(y;x)\}-x\right\|_q+\frac{2M}{\delta^2}\left\|V_t\{(y^2;x)\}-x^2\right\|+\varepsilon$$

elde edilir.

Eşitsizliğin her iki tarafının $t \to R^-$ için limit alınırsa $ii)$ hipoteziden

$$\lim_{t\to R^-}\left\|V_t\{(f(y);x)\}-f(x)\right\|_q=0$$

olduğu görülür.■

4. H_ω UZAYI İÇİN VERİLEN KOROVKİN TİPLİ YAKLAŞIM TEOREMLERİ

Bu bölümde, 1999 yılında Gadjiev ve Çakar tarafından verilen H_ω uzayındaki Korovkin tipli yaklaşım teoremi incelenmiştir.

Burada ω fonksiyonu,

$i)$ ω, $[0,\infty)$'da negatif olmayan artan bir fonksiyondur.

$ii)$ $\omega(\delta_1+\delta_2)\le\omega(\delta_1)+\omega(\delta_2)$,.

$iii)$ $\lim\limits_{\delta\to 0}\omega(\delta)=0$

özelliklerini sağlayan süreklilik modülü tipi bir fonksiyon olsun.

H_ω uzayı,

$$|f(x)-f(y)|\le\omega\left(\left|\frac{x}{1+x}-\frac{y}{1+y}\right|\right) \tag{4.1}$$

koşulunu sağlayan, $[0,\infty)$ aralığında tanımlı reel değerli fonksiyonların uzayıdır.

Ayrıca $C_B[0,\infty)$ uzayı, $[0,\infty)$'da tanımlı sürekli ve sınırlı fonksiyonların bir uzayı olup burada norm $f\in C_B[0,\infty)$ için,

$$\|f\|_{C_B}=\sup_{x\ge 0}|f(x)|$$

şeklinde tanımlanır.

Açıktır ki, herhangi bir $f\in H_\omega$ için $H_\omega\subset C_B[0,\infty)$ sağlanır.

Örnek 4.1 $f(x)=\dfrac{1+2x}{1+x}$ ile tanımlı f fonksiyonu $\omega(t)=t$ için H_ω uzayının bir elemanıdır. Gerçekten, her x,y için

$$|f(x)-f(y)|=\left|\frac{1+2x}{1+x}-\frac{1+2y}{1+y}\right|\le\left|\frac{x}{1+x}-\frac{y}{1+y}\right|$$

$$\left|\frac{x}{1+x}-\frac{y}{1+y}\right| \leq \frac{x}{1+x}-\frac{y}{1+y}=\omega\left(\left|\frac{x}{1+x}-\frac{y}{1+y}\right|\right)$$

elde edilir.

Şimdi H_ω uzayındaki Korovkin tipli yaklaşım teoremini verelim.

Teorem 4.2 $L_n : H_\omega \to C_B[0,\infty)$ pozitif lineer operatörlerin bir dizisi olsun. Bu durumda

$$\lim_{n\to\infty}\left\|L_n\left(\left(\frac{t}{1+t}\right)^i;x\right)-\left(\frac{x}{1+x}\right)^i\right\|_{C_B}=0 \quad , \quad i=0,1,2$$

koşulu sağlanıyorsa herhangi bir $f \in H_\omega$ için,

$$\lim_{n\to\infty}\left\|L_n f - f\right\|_{C_B}=0$$

gerçeklenir (Gadjiev ve Çakar, 1999).

İspat : $f \in H_\omega$ olsun. f sürekli bir fonksiyon olduğundan $\forall\varepsilon>0$ için $\exists\delta>0$ vardır ∋ $\left|\frac{t}{1+t}-\frac{x}{1+x}\right|<\delta$ koşulunu sağlayan $\forall x,t$ için $|f(t)-f(x)|<\delta$ gerçeklenir.

Şimdi $\left|\frac{t}{1+t}-\frac{x}{1+x}\right|\geq\delta$ için,

$$\frac{\left|\frac{t}{1+t}-\frac{x}{1+x}\right|}{\delta}\geq 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{\left(\frac{t}{1+t}-\frac{x}{1+x}\right)^2}{\delta^2}\geq 1$$

elde edilir. f sınırlı olduğundan,

$$|f(t)-f(x)|\leq|f(t)|;+|f(x)|\leq 2M.1\leq 2M\,\frac{\left(\frac{t}{1+t}-\frac{x}{1+x}\right)^2}{\delta^2}$$

gerçeklenir. O halde $\forall x,t$ için,

$$|f(t)-f(x)|\le 2M\frac{\left(\frac{t}{1+t}-\frac{x}{1+x}\right)^2}{\delta^2}+\varepsilon$$

bulunur. Son eşitsizliğin her iki tarafına L_n pozitif lineer operatörü uygulanırsa,

$$L_n(|f(t)-f(x)|;x)\le L_n\left(\varepsilon+2M\frac{\left(\frac{t}{1+t}-\frac{x}{1+x}\right)^2}{\delta^2};x\right)$$

$$\le L_n(\varepsilon;x)+\frac{2M}{\delta^2}L_n\left(\left(\frac{t}{1+t}-\frac{x}{1+x}\right)^2;x\right)$$

$$=L_n(\varepsilon;x)\pm\varepsilon+\frac{2M}{\delta^2}\left\{L_n\left(\left(\frac{t}{1+t}-\frac{x}{1+x}\right)^2;x\right)-2\frac{x}{1+x}L_n\left(\left(\frac{t}{1+t}\right);x\right)\right.$$

$$\left.+\frac{x^2}{1+x^2}L_n(1;x)\pm\frac{2x^2}{(1+x)^2}\right\}$$

$$=\varepsilon+\varepsilon(L_n(1;x)-1)+\frac{2M}{\delta^2}\left\{\left(L_n\left(\left(\frac{t}{1+t}\right)^2;x\right)-\left(\frac{x}{1+x}\right)^2\right)\right.$$

$$\left.-2\frac{x}{1+x}\left(L_n\left(\left(\frac{t}{1+t}\right);x\right)-\left(\frac{x}{1+x}\right)\right)+\frac{x^2}{1+x^2}(L_n(1;x)-1)\right\}$$

$$L_n(|f(t)-f(x);x|)\le\varepsilon+\varepsilon|L_n(1;x)-1|+\frac{2M}{\delta^2}\left\{\left|L_n\left(\left(\frac{t}{1+t}\right)^2;x\right)-\left(\frac{x}{1+x}\right)^2\right|\right.$$

$$\left.+2\frac{|x|}{|1+x|}.\left|L_n\left(\left(\frac{t}{1+t}\right);x\right)-\left(\frac{x}{1+x}\right)\right|+\frac{|x^2|}{|1+x^2|}.|L_n(1;x)-1|\right\} \qquad (4.2)$$

eşitsizliği elde edilir. Buradan

$$|L_n(f(t);x)-f(x)|\le L_n(|f(t)-f(x)|;x)+|f(x)|.|L_n(1;x)-1|$$

bulunur. Bu eşitsizlikte (4.2) eşitsizliği dikkate alınırsa,

$$\left|L_n\left(f(t);x\right)-f(x)\right|\leq \varepsilon+\varepsilon\left|L_n(1;x)-1\right|+\frac{2M}{\delta^2}\left\{\left|L_n\left(\left(\frac{t}{1+t}\right)^2;x\right)-\left(\frac{x}{1+x}\right)^2\right|\right.$$

$$\left.+2\frac{|x|}{|1+x|}.\left|L_n\left(\left(\frac{t}{1+t}\right);x\right)-\left(\frac{x}{1+x}\right)\right|+\frac{|x^2|}{|1+x|^2}.\left|L_n(1;x)-1\right|\right\}$$

$$+\left|f(x)\right|.\left|L_n(1;x)-1\right|$$

elde edilir.

Son eşitsizliğin her iki tarafının $x\geq 0$ için supremumu alınıp norma geçilirse,

$$\left\|L_n f-f\right\|_{C_B}\leq \varepsilon+(\varepsilon+M)\left\|L_n(1)-1\right\|_{C_B}+\frac{2M}{\delta^2}\left\{\left\|L_n\left(\frac{t}{1+t}\right)^2-\left(\frac{x}{1+x}\right)^2\right\|\right.$$

$$\left.+2\left\|L_n\left(\frac{t}{1+t}\right)-\left(\frac{x}{1+x}\right)\right\|\right\}$$

bulunur. Böylece,

$$\lim_{n\to\infty}\left\|L_n f-f\right\|_{C_B}=0$$

olduğu görülür.■

Şimdi Bleilmann, Butzer, Hahn operatörünün Teorem 4.2'nin koşullarını sağladığını gösterelim.

Örnek 4.3 $L_n(f;x)=\dfrac{1}{(1+x)^n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n-k+1}\right)\binom{n}{k}x^k \quad , \quad x\geq 0, n\in\mathbb{N}$

şeklinde tanımlanan L_n , Bleilmann, Butzer, Hahn operatörü pozitif lineer operatörlerin bir dizisi olmak üzere herhangi bir $f\in H_\omega$ için,

$$\lim_{n\to\infty}\left\|L_n f-f\right\|_{C_B}=0$$

gerçeklenir (Gadjiev ve Çakar, 1999).

İspat : L_n, Bleilmann, Butzer, Hahn operatörünün Teorem 4.2'nin hipotezlerini gerçeklediğini gösterelim. Burada

$$L_n(1;x)=\frac{1}{(1+x)^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k$$

$$p=\frac{x}{1+x},\ q=\frac{1}{1+x}\Rightarrow p+q=1$$

şeklinde alınırsa Binom açılımından,

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{x^k}{(1+x)^k}\frac{1}{(1+x)^{n-k}}=\frac{1}{(1+x)^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k=1^n$$

$$\lim_{n\to\infty}\left\|L_n(1;x)-1\right\|_{C_B}=0$$

elde edilir. Ayrıca

$$L_n\left(\left(\frac{t}{1+t}\right);x\right)=\frac{1}{(1+x)^n}\sum_{k=0}^{n}\frac{\frac{k}{n-k+1}}{1+\frac{k}{n-k+1}}\binom{n}{k}x^k=\frac{1}{(1+x)^n}\sum_{k=0}^{n}\frac{k}{n+1}\binom{n}{k}x^k$$

$$=(1+x)^{-n}\sum_{k=0}^{n}\frac{k}{n+1}\frac{n!}{k!(n-k)!}x^k$$

$$=(1+x)^{-n}\sum_{k=1}^{n}\frac{n!}{(k-1)!(n-k)!}\frac{1}{(n+1)}x^k$$

$$=(1+x)^{-n}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{n(n-1)!}{k!(n-k-1)!}\frac{1}{(n+1)}x^{k+1}$$

$$=(1+x)^{-n}\frac{n}{(n+1)}x\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k}x^k$$

$$=\frac{1}{(1+x)^{n-1}}\frac{1}{(1+x)}\frac{n}{(n+1)}x\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k}x^k$$

$$L_n\left(\left(\frac{t}{1+t}\right);x\right)=\frac{n}{(n+1)}\frac{x}{(1+x)}$$

bulunur. Böylece

$$\lim_{n\to\infty}\left\| L_n\left(\frac{t}{1+t};x\right)-\frac{x}{1+x}\right\|_{C_B}=0$$

elde edilir. Aynı zamanda

$$L_n\left(\left(\frac{t}{1+t}\right)^2;x\right)=\frac{1}{(1+x)^n}\sum_{k=0}^{n}\frac{k^2}{(n+1)^2}\binom{n}{k}x^k$$

$$=(1+x)^{-n}\sum_{k=0}^{n}\frac{k^2}{(n+1)^2}\frac{n!}{k!(n-k)!}x^k$$

$$=(1+x)^{-n}\sum_{k=1}^{n}\frac{k\pm 1}{(n+1)^2}\frac{n!}{(k-1)!(n-k)!}x^k$$

$$=(1+x)^{-n}\left[\sum_{k=1}^{n}\frac{k-1}{(n+1)^2}\frac{n!}{(k-1)!(n-k)!}x^k+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(n+1)^2}\frac{n!}{(k-1)!(n-k)!}x^k\right]$$

$$=(1+x)^{-n}\left[\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{(n+1)^2}\frac{n(n-1)(n-2)!}{(k-2)!(n-k)!}x^k+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(n+1)^2}\frac{n(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!}x^k\right]$$

$$=(1+x)^{-n}\left[\frac{n(n-1)}{(n+1)^2}x^2\sum_{k=0}^{n-2}\frac{(n-2)!}{k!(n-k-2)!}x^k+\frac{n}{(n+1)^2}x\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(n-1)!}{k!(n-k-1)!}x^k\right]$$

$$=\frac{n(n-1)}{(n+1)^2}\frac{x^2}{(1+x)^2}\frac{1}{(1+x)^{n-2}}\sum_{k=0}^{n-2}\binom{n-2}{k}x^k+\frac{n}{(n+1)^2}\frac{x}{1+x}\frac{1}{(1+x)^{n-1}}\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k}x^k$$

$$L_n\left(\left(\frac{t}{1+t}\right)^2;x\right)=\frac{n(n-1)}{(n+1)^2}\frac{x^2}{(1+x)^2}+\frac{n}{(n+1)^2}\frac{x}{1+x}$$

elde edilir. Buradan,

$$\lim_{n\to\infty}\left\| L_n\left(\left(\frac{t}{1+t}\right)^2;x\right)-\left(\frac{x}{1+x}\right)^2\right\|_{C_B}=0$$

olduğu görülür. Böylece Teorem 4.3 nedeniyle $\forall f\in C_B[0,\infty)$ için,

$$\lim_{n\to\infty}\left\|L_n f - f\right\|_{C_B} = 0$$

gerçeklenir.■

4.1 Çift Değişkenli H_ω Uzayında Kuvvet Serisi Metodu Yardımıyla Korovkin Tipli Yaklaşım Teoremleri

Bu bölüm orjinal bir çalışma olup çift değişkenli H_ω uzayında Kuvvet Serisi metodu kullanılarak geliştirilen Korovkin tipli yaklaşım teoremi verilmiştir.

Burada çift değişkenli H_ω uzayı,

$$\left|f(u,v) - f(x,y)\right| \le \omega\left(f;\left|\frac{u}{1+u} - \frac{x}{1+x}\right|,\left|\frac{v}{1+v} - \frac{y}{1+y}\right|\right) \tag{4.3}$$

koşulunu sağlayan, $I = [0,\infty)\times[0,\infty)$ aralığında tanımlı reel değerli fonksiyonların uzayıdır. Ayrıca $C_B(I)$ uzayı, I da tanımlı sürekli ve sınırlı fonksiyonların bir uzayı olup buradaki norm $f \in C_B(I)$ için,

$$\|f\|_{C_B} = \sup_{(x,y)\in I}\left|f(x,y)\right|$$

şeklindedir.

Açıktır ki, herhangi bir $f \in H_\omega(I)$ için $H_\omega(I) \subset C_B(I)$ sağlanır.

Ayrıca çift değişkenli f fonksiyonu için $C_B(I)$ uzayındaki süreklilik modülü herhangi bir $\delta_1, \delta_2 > 0$ için,

$$\varpi(f;\delta_1,\delta_2) = \sup\left\{\left|f(u,v) - f(x,y)\right| : (u,v),(x,y)\in I, \left|\frac{u}{1+u} - \frac{x}{1+x}\right| \le \delta_1, \left|\frac{v}{1+v} - \frac{y}{1+y}\right| \le \delta_2\right\}$$

şeklinde tanımlanır. $f \in C_B(I)$ uzayı için,

$$\lim_{\delta_1,\delta_2\to 0}\varpi(f;\delta_1,\delta_2) = 0$$

gerçeklenir.

$L_n : H_\omega(I) \rightarrow C_B(I)$ her $f \in H_\omega(I)$ için,

$$\sup_{0<t<R} \frac{1}{p(t)} \sum_{n=0}^{\infty} \|L_n(1)\|_{C_B} p_n t^n < \infty \tag{4.4}$$

koşulunu sağlayan pozitif lineer operatörlerin bir dizisi olsun. Bu durumda her $f \in H_\omega(I)$ için,

$$V_t\{(f(u,v);x,y)\} = \frac{1}{p(t)} \sum_{n=0}^{\infty} L_n(f(u,v);x,y) p_n t^n$$

ile tanımlı V_t operatörünü alalım. O halde,

$$\begin{aligned}
\|V_t\{(f)\}\|_{C_B} = \sup_{(x,y)\in I} |V_t\{(f(u,v);x,y)\}| &= \sup_{(x,y)\in I} \left| \frac{1}{p(t)} \sum_{n=0}^{\infty} L_n(f(u,v);x,y) p_n t^n \right| \\
&\leq \sup_{(x,y)\in I} \frac{1}{p(t)} \sum_{n=0}^{\infty} L_n(|f(u,v)|;x,y) p_n t^n \\
&\leq \sup_{(x,y)\in I} \frac{1}{p(t)} \sum_{n=0}^{\infty} L_n(\|f\|;x,y) p_n t^n \\
&\leq \|f\| \sup_{0<t<R} \frac{1}{p(t)} \sum_{n=0}^{\infty} \|L_n(1)\|_{C_B} p_n t^n
\end{aligned}$$

elde edilir. Şimdi (4.4) gözönüne alınırsa V_t operatörü herhangi bir $f \in H_\omega(I)$ için anlamlı olup $C_B(I)$ uzayına aittir. Dolayısıyla

$$\|V_t\|_{H_\omega(I)\rightarrow C_B(I)} = \|V_t(1)\|_{C_B(I)} = \sup_{(x,y)\in I} \left| \frac{1}{p(t)} \sum_{n=0}^{\infty} L_n(1;x,y) p_n t^n \right|$$

şeklinde yazabiliriz.

Teorem 4.1.2 $L_n : H_\omega(I) \rightarrow C_B(I)$ ve (4.4) koşulunu sağlayan pozitif lineer operatör dizisi olsun.

$$\lim_{t\rightarrow R^-} \|V_t\{(f_i(u,v);x,y)\} - f_i(x,y)\|_{C_B} = 0 \qquad i = 0,1,2,3$$

koşulları sağlanıyorsa herhangi bir $f \in H_\omega(I)$ için,

$$\lim_{t\to R^-}\left\|V_t\{(f(u,v);x,y)\}-f(x,y)\right\|_{C_B}=0$$

gerçeklenir. Burada,

$$f_0(u,v)=1,\ f_1(u,v)=\frac{u}{1+u},\ f_2(u,v)=\frac{v}{1+v},\ f_3(u,v)=\left(\frac{u}{1+u}\right)^2+\left(\frac{v}{1+v}\right)^2$$

şeklindedir.

İspat : $f\in H_\omega(I)$ alalım. f sürekli bir fonksiyon olduğundan $\forall\varepsilon>0$ sayısı için $\exists\delta_1,\delta_2>0$ vardır ∍ $\left|\frac{u}{1+u}-\frac{x}{1+x}\right|<\delta_1$ ve $\left|\frac{v}{1+v}-\frac{y}{1+y}\right|<\delta_2$ koşullarını sağlayan $\forall(u,v)\in I$ için $|f(u,v)-f(x,y)|<\varepsilon$ gerçeklenir. Burada,

$$I_{\delta_1,\delta_2}=\left\{(u,v)\in I:\left|\frac{u}{1+u}-\frac{x}{1+x}\right|<\delta_1,\left|\frac{v}{1+v}-\frac{y}{1+y}\right|<\delta_2\right\}$$

$$\chi_{I/I_{\delta_1,\delta_2}}(u,v)\le\frac{1}{\delta_1^{\,2}}\left(\frac{u}{1+u}-\frac{x}{1+x}\right)^2+\frac{1}{\delta_2^{\,2}}\left(\frac{v}{1+v}-\frac{y}{1+y}\right)^2 \tag{4.5}$$

$M=\|f\|=\sup_{(x,y)\in I}|f(x,y)|$ diyelim. Ayrıca,

$$|f(u,v)-f(x,y)|=|f(v,u)-f(x,y)|\chi_{I_{\delta_1,\delta_2}}(u,v)+|f(u,v)-f(x,y)|\chi_{I/I_{\delta_1,\delta_2}}(u,v)$$

$$|f(u,v)-f(x,y)|<\varepsilon+2M\chi_{I/I_{\delta_1,\delta_2}}(u,v) \tag{4.6}$$

gerçeklenir. Burada (4.5) ve (4.6) eşitsizliklerinden,

$$|f(u,v)-f(x,y)|\le\varepsilon+\frac{2M}{\delta^2}\left\{\left(\frac{u}{1+u}-\frac{x}{1+x}\right)^2+\left(\frac{v}{1+v}-\frac{y}{1+y}\right)^2\right\}$$

bulunur. Burada $\delta=\min\{\delta_1,\delta_2\}$ şeklindedir.

Bu eşitsizliğin her iki tarafına V_t pozitif lineer operatörü uygulanırsa,

$$V_t\{(|f(u,v)-f(x,y)|;x,y)\}\leq V_t\left\{\left(\varepsilon+\frac{2M}{\delta^2}\left[\left(\frac{u}{1+u}-\frac{x}{1+x}\right)^2+\left(\frac{v}{1+v}-\frac{y}{1+y}\right)^2\right];x,y\right)\right\}$$

(4.7) eşitsizliği elde edilir.

$$|V_t\{(f;x,y)\}-f(x,y)|=|V_t\{(f;x,y)\}-V_t\{(f(x,y);x,y)\}+V_t\{(f(x,y);x,y)\}-f(x,y)|$$

$$\leq|V_t\{(f;x,y)\}-V_t\{(f(x,y);x,y)\}|+|V_t\{(f(x,y);x,y)\}-f(x,y)|$$

$$\leq V_t\{(|f(u,v)-f(x,y)|;x,y)\}+|f(x,y)|.|V_t\{(f_0;x,y)\}-f_0(x,y)|$$

Son eşitsizlikte (4.8) eşitsizliği dikkate alınırsa,

$$|V_t\{(f;x,y)\}-f(x,y)|\leq\varepsilon V_t\{(f_0;x,y)\}\pm\varepsilon+\frac{2M}{\delta^2}\left[V_t\left\{\left(\left(\frac{u}{1+u}-\frac{x}{1+x}\right)^2;x,y\right)\right\}\right.$$

$$\left.+V\left\{\left(\left(\frac{v}{1+v}-\frac{y}{1+y}\right)^2;x,y\right)\right\}_t\pm\frac{2x^2}{(1+x)^2}\pm\frac{2y^2}{(1+y)^2}\right]+M|V_t\{(f_0;x,y)\}-f_0(x,y)|$$

$$\leq\varepsilon+\varepsilon(V_t\{(f_0;x,y)\}-f_0(x,y))+\frac{2M}{\delta^2}\left[V_t\{(f_3;x,y)\}-\frac{2x}{1+x}V_t\{(f_1;x,y)\}-\frac{2y}{1+y}V_t\{(f_2;x,y)\}\right.$$

$$\left.+\left(\left(\frac{x}{1+x}\right)^2+\left(\frac{y}{1+y}\right)^2\right)V_t\{(f_0;x,y)\}\right]$$

$$=\varepsilon+\varepsilon(V_t\{(f_0;x,y)\}-f_0(x,y))+\frac{2M}{\delta^2}(V_t\{(f_3;x,y)\}-f_3(x,y))$$

$$\frac{-4M}{\delta^2}\left(\frac{x}{1+x}\right)(V_t\{(f_1;x,y)\}-f_1(x,y))-\frac{4M}{\delta^2}\left(\frac{y}{1+y}\right)(V_t\{(f_2;x,y)\}-f_2(x,y))$$

$$+\frac{2M}{\delta^2}\left(\left(\frac{x}{1+x}\right)^2+\left(\frac{y}{1+y}\right)^2\right)(V_t\{(f_0;x,y)\}-f_0(x,y))+M|V_t\{(f_0;x,y)\}-f_0(x,y)|$$

$$|V_t\{(f;x,y)\}-f(x,y)|\leq\varepsilon+\left(\varepsilon+M+\frac{2M}{\delta^2}\right)|V_t\{(f_0;x,y)\}-f_0(x,y)|$$

$$+\frac{4M}{\delta^2}|V_t\{(f_1;x,y)\}-f_1(x,y)|+\frac{4M}{\delta^2}|V_t\{(f_{2,};x,y)\}-f_2(x,y)|$$

$$+\frac{2M}{\delta^2}\left|V_t\{(f_3;x,y)\}-f_3(x,y)\right|$$

Son eşitsizliğin her iki tarafının $(x,y)\in I$ için supremumu alınıp norma geçilirse,

$$\|V_t f-f\|\leq\varepsilon+H\{\|V_t f_0-f_0\|+\|V_t f_1-f_1\|+\|V_t f_2-f_2\|+\|V_t f_3-f_3\|\} \tag{4.8}$$

bulunur. Burada,

$$H=\sup_{x,y\in K}\left\{\varepsilon+M+\frac{2M}{\delta^2},\frac{4M}{\delta^2},\frac{4M}{\delta^2},\frac{2M}{\delta^2}\right\}$$

şeklindedir. Daha sonra $t\to R^-$ için limit alınırsa,

$$\lim_{t\to R^-}\left\|V_t\{(f;x,y)\}-f(x,y)\right\|_{C_B}=0$$

olduğu görülür.■

Şimdi Çift değişkenli bir L_n operatörünün Teorem 4.1.2'nin koşullarını sağladığını gösterelim.

Örnek 4.1.3

$$L_n(f;x,y)=\frac{u_n}{(1+x)^n(1+y)^n}\sum_{k=0}^{n}\sum_{l=0}^{n}f\left(\frac{k}{n-k+1},\frac{l}{n-l+1}\right)\binom{n}{k}\binom{n}{l}x^k y^l,\ (x,y)\in I,n\in\mathbb{N}$$

şeklinde tanımlanan pozitif lineer operatörlerin dizisi alalım. $f\in H_\omega(I)$ için, $p_n=1,\ R=1$ ve $p(t)=\frac{1}{1-t},\ t\in(-1,1)$ alınırsa o zaman Kuvvet Serisi metodu, Abel Yakınsaklığa denktir. Burada (u_n) dizisi 1 değerine Abel yakınsak bir dizi ancak klasik anlamda yakınsak olmasın. L_n , Teorem 4.1.2'nin hipotezlerini gerçekler. Yani,

$$\lim_{t\to 1^-}(1-t)\left\|\sum_{n=0}^{\infty}\left(L_n(f;x,y)-f(x,y)\right)t^n\right\|_{C_B}=0$$

gerçeklenir.

İspat : L_n yukarıdaki şekilde tanımlanan pozitif lineer operatörlerin dizisi olsun. Teorem 4.1.2'nin hipotezlerinin gerçeklendiğini gösterelim.

$$L_n\left(f_0;x,y\right)=\frac{u_n}{(1+x)^n(1+y)^n}\sum_{k=0}^{n}\sum_{l=0}^{n}\binom{n}{k}\binom{n}{l}x^k y^l$$

$$(1+x)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k \quad \text{ve} \quad (1+y)^n=\sum_{l=0}^{n}\binom{n}{l}y^l$$

$$L_n\left(f_0;x,y\right)=u_n$$

elde edilir. Böylece $L_n\left(f_0;x,y\right)= f_0$ olduğu görülür.

$$L_n\left(f_1;x,y\right)=\frac{u_n}{(1+x)^n(1+y)^n}\sum_{k=0}^{n}\frac{\frac{k}{n-k+1}}{1+\frac{k}{n-k+1}}\binom{n}{k}x^k\sum_{l=0}^{n}\binom{n}{l}y^l$$

$$=\frac{u_n}{(1+x)^n}\sum_{k=0}^{n}\frac{k}{n+1}\frac{n!}{k!(n-k)!}x^k$$

$$=\frac{u_n}{(1+x)^n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(n+1)}\frac{n!}{(k-1)!(n-k)!}x^k$$

$$=\frac{u_n}{(1+x)^n}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{(n+1)}\frac{n(n-1)!}{k!(n-k-1)!}x^k$$

$$=\frac{u_n}{(1+x)^{n-1}}\frac{1}{(1+x)}\frac{n}{(n+1)}x\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k}x^k$$

$$L_n\left(f_1;x,y\right)=\frac{n}{(n+1)}\frac{x}{1+x}u_n$$

elde edilir. Böylece $\lim\limits_{t\to 1^-}(1-t)\left\|\sum_{n=0}^{\infty}\left(L_n\left(f_1;x,y\right)-f_1(x,y)\right)t^n\right\|=0$ olduğu görülür. Ayrıca

$$L_n\left(f_2;x,y\right)=\frac{u_n}{(1+x)^n(1+y)^n}\sum_{l=0}^{n}\frac{\frac{l}{n-l+1}}{1+\frac{l}{n-l+1}}\binom{n}{l}y^l\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k$$

$$=\frac{u_n}{(1+y)^n}\sum_{l=0}^{n}\frac{l}{(n+1)}\frac{n!}{l!(n-l)!}y^l$$

$$=\frac{u_n}{(1+y)^n}\sum_{l=1}^{n}\frac{1}{(n+1)}\frac{n!}{(l-1)!(n-l)!}y^l \text{ n}$$

$$=\frac{u_n}{(1+y)^n}\sum_{l=0}^{n-1}\frac{1}{(n+1)}\frac{n(n-1)!}{l!(n-l-1)!}y^l$$

$$=\frac{u_n}{(1+y)^{n-1}}\frac{1}{(1+y)}\frac{n}{(n+1)}y\sum_{l=0}^{n-1}\binom{n-1}{l}y^l$$

$$L_n(f_2;x,y)=\frac{n}{(n+1)}\frac{y}{1+y}u_n$$

elde edilir. Böylece $\lim_{t\to 1^-}(1-t)\left\|\sum_{n=0}^{\infty}\left(L_n(f_2;x,y)-f_2(x,y)\right)t^n\right\|=0$ olduğu görülür. Ayrıca

$$L_n(f_3;x,y)=\frac{u_n}{(1+x)^n(1+y)^n}\sum_{k=0}^{n}\sum_{l=0}^{n}\left[\frac{k^2}{(n+1)^2}+\frac{l^2}{(n+1)^2}\right]\binom{n}{k}\binom{n}{l}x^k y^s \, 1$$

$$=\frac{u_n}{(1+x)^n}\sum_{k=0}^{n}\frac{k^2}{(n+1)^2}\binom{n}{k}x^k+\frac{u_n}{(1+y)^n}\sum_{l=0}^{n}\frac{l^2}{(n+1)^2}\binom{n}{l}y^l$$

$A=\frac{u_n}{(1+x)^n}\sum_{k=0}^{n}\frac{k^2}{(n+1)^2}\binom{n}{k}x^k$ ve $B=\frac{u_n}{(1+y)^n}\sum_{l=0}^{n}\frac{l^2}{(n+1)^2}\binom{n}{l}y^l$ olsun.

$$A=\frac{u_n}{(1+x)^n}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{(n+1)^2}\frac{n!}{(k-1)!(n-k)!}x^k$$

$$A=\frac{u_n}{(1+x)^n}\left[\sum_{k=1}^{n}\frac{k-1}{(n+1)^2}\frac{n!}{(k-1)!}x^k+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(n+1)^2}\frac{n!}{(k-1)!(n-k)!}x^k\right]$$

$$=\frac{u_n}{(1+x)^n}\left[\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{(1+n)^2}\frac{n(n-1)(n-2)!}{(k-2)!(n-k)!}x^k+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(n+1)^2}\frac{n!}{(k-1)!(n-k)!}x^k\right]\text{y}$$

$$=\frac{u_n}{(1+x)^n}\left[\frac{n(n-1)}{(n+1)^2}x^2\sum_{k=0}^{n-2}\frac{(n-2)!}{k!(n-k-2)!}x^k+\frac{n}{(n+1)^2}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(n-1)!}{k!(n-k-1)!}x^k\right]$$

$$=\frac{n(n-1)}{(n+1)^2}\frac{x^2}{(1+x)^2}\frac{u_n}{(1+x)^{n-2}}\sum_{k=0}^{n-2}\binom{n-2}{k}x^k+\frac{n}{(n+1)^2}\frac{x}{(1+x)}\frac{u_n}{(1+x)^{n-1}}\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k}x^k$$

$$A=\frac{n(n-1)}{(n+1)^2}\frac{x^2}{(1+x)^2}u_n+\frac{n}{(n+1)^2}\frac{x}{(1+x)}u_n$$

bulunur. Burada A için yapılan hesaplamalara benzer olarak B için,

$$B=\frac{n(n-1)}{(n+1)^2}\frac{y^2}{(1+y)^2}u_n+\frac{n}{(n+1)^2}\frac{y}{(1+y)}u_n$$

elde edilir. Dolayısıyla A ve B yerine yazılırsa,

$$L_n(f_3;x,y)=\frac{n(n-1)}{(n+1)^2}\frac{x^2}{(1+x)^2}u_n+\frac{n}{(n+1)^2}\frac{x}{(1+x)}u_n+\frac{n(n-1)}{(n+1)^2}\frac{y^2}{(1+y)^2}u_n+\frac{n}{(n+1)^2}\frac{y}{(1+y)}u_n$$

elde edilir. Buradan $\lim\limits_{t\to 1^-}(1-t)\left\|\sum_{n=0}^{\infty}\left(L_n(f_3;x,y)-f_3(x,y)\right)t^n\right\|=0$ olduğu görülür.
Böylece Teorem 4.1.2'nin hipotezleri nedeniyle $\forall f\in H_\omega(I)$ için,

$$\lim_{t\to 1^-}(1-t)\left\|\sum_{n=0}^{\infty}\left(L_n(f;x,y)-f(x,y)\right)t^n\right\|_{C_B}=0$$

gerçeklenir.■

Şimdi süreklilik modülü yardımıyla Teorem 4.1.2'nin yakınsaklık oranı verilecektir.

Teorem 4.1.4 $L_n:H_\omega(I)\to C_B(I)$ ve (4.4) koşulunu sağlayan pozitif lineer operatörlerinin bir dizisi olsun. Ayrıca $N=\sup\limits_{(x,y)\in I}\left\|\sqrt{V_t\{(1;x,y)\}}\right\|\leq\infty$ sağlansın. Bu takdirde,

$i)$ $\lim\limits_{t\to R^-}\left\|V_t\{(1;x,y)\}-1\right\|=0$

$ii)$ $\lim\limits_{t\to R^-}\varpi(f;\alpha(t),\beta(t))=0$

koşullarını sağlıyorsa, her $f\in H_\omega(I)$ için,

$$\lim_{t\to R^-}\left\|V_t\{(f;x,y)\}-f(x,y)\right\|_{C_B}=0$$

gerçeklenir. Burada,

$$\alpha(t)=\left(V_t\left\{\left(\left(\frac{u}{1+u}-\frac{x}{1+x}\right)^2;x,y\right)\right\}\right)^{1/2} \text{ ve } \beta(t)=\left(V_t\left\{\left(\left(\frac{v}{1+v}-\frac{y}{1+y}\right)^2;x,y\right)\right\}\right)^{1/2}$$

şeklindedir.

İspat : Her $t\in(0,R)$ ve δ pozitif bir sayı olmak üzere,

$$|f(u,v)-f(x,y)|\le\left(1+\frac{\left|\frac{u}{1+u}-\frac{x}{1+x}\right|}{\delta_1}\right)\left(1+\frac{\left|\frac{v}{1+v}-\frac{y}{1+y}\right|}{\delta_2}\right)\varpi(f;\delta_1,\delta_2)$$

gerçeklenir. Eşitsizliğin her iki tarafına V_t pozitif lineer operatörü ve Cauchy-Shwartz eşitsizliği uygulanırsa,

$$V_t\{|f(u,v)-f(x,y)|;x,y\}\le V_t\left\{\left(\varpi(f;\delta_1,\delta_2)\left(1+\frac{\left|\frac{u}{1+u}-\frac{x}{1+x}\right|}{\delta_1}\right)\left(1+\frac{\left|\frac{v}{1+v}-\frac{y}{1+y}\right|}{\delta_2}\right);x,y\right)\right\}$$

$$=\varpi(f;\delta_1,\delta_2)\left[V_t\{(1;x,y)\}+\frac{1}{\delta_1}V_t\left\{\left(\left|\frac{u}{1+u}-\frac{x}{1+x}\right|;x,y\right)\right\}\right.$$

$$\left.+\frac{1}{\delta_2}V_t\left\{\left(\left|\frac{v}{1+v}-\frac{y}{1+y}\right|;x,y\right)\right\}+\frac{1}{\delta_1}\frac{1}{\delta_2}V_t\left\{\left(\left|\frac{u}{1+u}-\frac{x}{1+x}\right|.\left|\frac{v}{1+v}-\frac{y}{1+y}\right|;x,y\right)\right\}\right]$$

$$\leq \varpi(f;\delta_1,\delta_2)\left[V_t\{(1;x,y)\}+\frac{1}{\delta_1}\left\{\left(V_t\left\{\left(\left(\frac{u}{1+u}-\frac{x}{1+x}\right)^2;x,y\right)\right\}\right)^{1/2}.(V_t\{(1;x,y)\})^{1/2}\right\}\right.$$

$$+\frac{1}{\delta_2}\left\{\left(V_t\left\{\left(\left(\frac{v}{1+v}-\frac{y}{1+y}\right)^2;x,y\right)\right\}\right)^{1/2}.(V_t\{(1;x,y)\})^{1/2}\right\}$$

$$\left.+\frac{1}{\delta_1}\frac{1}{\delta_2}\left(V_t\left\{\left(\left(\frac{u}{1+u}-\frac{x}{1+x}\right)^2;x,y\right)\right\}\right)^{1/2}\left(V_t\left\{\left(\left(\frac{v}{1+v}-\frac{y}{1+y}\right)^2;x,y\right)\right\}\right)^{1/2}\right]$$

$$\leq \varpi(f;\delta_1,\delta_2)\left[V_t\{(1;x,y)\}+\frac{1}{\delta_1}\alpha(t)\sqrt{V_t\{(1;x,y)\}}+\frac{1}{\delta_2}\beta(t)\sqrt{V_t\{(1;x,y)\}}+\frac{1}{\delta_1}\frac{1}{\delta_2}\alpha(t)\beta(t)\right]$$

elde edilir. Burada $\alpha(t),\beta(t)>0$ olduğundan $\delta_1=\alpha(t)$, $\delta_2=\beta(t)$ alınırsa,

$$V_t\{|f(u,v)-f(x,y)|;x,y\}\leq \varpi(f;\alpha(t),\beta(t))\left(V_t\{(1;x,y)\}+2\sqrt{V_t\{(1;x,y)\}}+1\right) \quad (4.9)$$

eşitsizliği elde edilir. Ayrıca

$$|V_t\{(f(u,v);x,y)\}-f(x,y)|\leq V_t\{(|f(u,v)-f(x,y)|;x,y)\}+|f(x,y)|.|V_t\{(1;x,y)\}-1|$$

Bu eşitsizlikte (4.9) eşitsizliği dikkate alınırsa,

$$|V_t\{(f(u,v);x,y)\}-f(x,y)|\leq \varpi(f;\alpha(t),\beta(t))\left(V_t\{(1;x,y)\}+2\sqrt{V_t\{(1;x,y)\}}+1\right)$$

$$+|f(x,y)|.|V_t\{(1;x,y)\}-1|$$

elde edilir.

Son eşitsizliğin her iki tarafının $(x,y)\in I$ için supremumu alınıp norma geçilirse,

$$\|V_t\{(f(u,v);x,y)\}-f(x,y)\|\leq \varpi(f;\alpha(t),\beta(t))\left(\|V_t\{(1;x,y)\}\|+2\left\|\sqrt{V_t\{(1;x,y)\}}\right\|+1\right)$$

$$+M\|V_t\{(1;x,y)\}-1\|$$

$$\leq \varpi(f;\alpha(t),\beta(t))(K+2N+1)+M\|V_t\{(1;x,y)\}-1\|$$

$$\left\|V_t\left\{\left(f\left(u,v\right);x,y\right)\right\}-f\left(x,y\right)\right\|\leq H\left(\varpi\left(f;\alpha\left(t\right),\beta\left(t\right)\right)+\left\|V_t\left\{\left(1;x,y\right)-1\right\}\right\|\right)$$

bulunur. Burada,

$$H=\sup_{(x,y)\in I}\left\{K+2N+1,M\right\}$$

şeklindedir.

Daha sonra $t\to R^{-}$ için limit alınırsa hipotezler nedeniyle her $f\in H_{\omega}\left(I\right)$ için,

$$\lim_{t\to R^{-}}\left\|V_t\left\{\left(f;x,y\right)\right\}-f\left(x,y\right)\right\|=0$$

olduğu görülür.■

4.KAYNAKLAR

Altomare, F. and Campiti, M., *Korovkin Type Approximation Theory and Its Applications*', de Gruyter Series Studies in Mathematics, Vol.17, Walter de Gruyter, Berlin- New York, (1994).

Agritini, O., "Approximation properties of a generalization of Bleilmann, Butzer and Hahn operators", *Math. Pannon*. ,9, 165-171, (1998).

Agritini, O., "A class of Bleilmann, Butzer and Hahn type operators", An. Unv. *Timişoara Ser. Math.Inform*. ,34, 173-180, (1996)

Anastassiou, G. A. and Gal, S. G., *Approximation Theory* : "Moduli of Continuity and Global Smoothness Preservation", Birkhauser, Boston, (2000).

Altın, A., Doğru, O. and Özarslan, A., "Korovkin type approximation properties of bivariate Beilmenn, Butzer and Hahn operators", Proceedings of the 8th WSEAS International Conference on APPLIED MATHEMATICS, Tenerife, Spain, December 16-18,.234-238, (2005).

Atlıhan, Ö.G. and Taş, E.,"Korovkin type approximation theorems via power series method", (in press)

Barbasu, D., "Some generalized bivariate Bernstein operators",*Math. Notes (Miskloc)* ,1,3-10, (2000).

Bell, H., "Order summability and almost convergence", *Proc. Amer. Math. Soc.*, 38 ,548-552, (1973).

Bohman, H., "On approximation of continuous and analytic functions", *Ark. Mat*., 2 , 43-56, (1952).

Boos, J., *Classical and Modern Methods in Summability*, Oxford Mathematical Monograps, Oxford Science Publ., London.

Bojanic, R. and Khan, M. K., "Summability of Hermite-Fejer interpolation for functions of bounded variation", J. *Nat. Sci. Math*., 32, 5-10, (1992).

Bojanic, R. and Cheng, F., "Estimates for the rate of approximation of functions of bounded varition by Hermite-Fejer polynomials. Proc. of the Conference of Canadian Math. Soc., 3, 5-17, (1983).

Duman, O. and Khan, M.K. and Orhan C., "A-statistical convergence of approximating operators" *Math. Inequal. and Appl*., 6 (4), 689-699, (2003).

Erkuş, E. and Duman, O., "A- Statistical extension of the Korovkin type approximation theorem", *Proc. Indian Acad. Sci*. ,115,499-508, (2005).

Erkuş, E. and Duman, O., "A Korovkin Type Approximation Theorem in Statistical Sense", *Studia Scientiarum Mathematicarum Hungarica* 43,3, 285-294, (2006).

Freedman, A. R., Sember, J.J. and Raphel, M., "Some Cesaro-type summability spaces", *Proc. London. Math. Lett*. ,18,1339-1344, (1978)

Gadjiev A.D., "Theorems of the type of P. P. Korovkin's theorems", *Mat. Zametki*, 20, 781-786 (1976).

Gadjiev, A. D. and Çakar, Ö.,"On uniform approximation by Bleilmann, Butzer and Hahn operators on all positive semi-axis", *Trans. Acad. Sci. Azerb. Ser. Phys. Tech. Math. Sci*. ,19, 21-26, (1999).

Gadjiev, A. D., and Orhan, C., "Some approximation theorems via statistical convergence" *Rocky Mountain J. Math*., 32 (1), 129-137, (2002)

Hacıyev, A. ve Hacısalihoğlu, H. H., *Lineer Pozitif Operatör Dizilerinin Yakınsaklığı*, Ankara Üniversitesi Yayınları.

King, J. P. and Swetits, "Positive linear operators and summability", *J. Austral. Math. Soc*., 11, 281-290 (1970).

Korovkin, P. P., "On convergence of linear positive operators in the space of continuous functions", *Doklady Akad. Nauk SSSR*., 90, 961-964, (1953).

Korovkin, P. P.,*Linear Operators and Approximation Theory*, Delhi, (1960).

Karakuş, S. and Demirci, K., "Summation process of Korovkin type approximation theorem", *Miskolc Math. Notes*, 12, 75-85, (2011).

Kratz, W. and Stadtmüller, U., "Tauberian theorems for J_p -summability" J. Math. Anal. APPL. ,139, 362-371, (1989).

Lorentz , G. G., *Approximation of Function*, Holt, Rinehart and Winston New York, (1966).

Lorentz, G. G., " A contribution to the theory of divergent sequences", *Acta Math.*,80, 167-190, (1948).

Lorentz, G. G., *Bernstein polynomials*, Chelse Publ. Company. New York, (1968).

Mohapatra, R. N., "Quantitative results on almost convergence of a sequence of positive linear operators", *J. Approx. Theory*., 20, 239-250, (1977).

Maddox, I. J., "A new type of convergence", *Math. Proc. Camb. Phil. Soc*., 83,61-64, (1978).

Nishishiraho, T., "Quantitative theorems on linear approximation processes of convolution operators in Banach spaces", *Tohoku Math*. J., 33, 109-126, (1981).

Nishishiraho, T., "Convergence of positive linear approximation process", *Tohoku Math. J.* ,33, 109-126, (1983).

Powel, R., E.,and Shah, S. M., *Summability Theory and Applications*, Van Nostrend Reinhold,London, (1972).

Royden, H. L., *Real Analysis*, 349p., New York, (1968).

Rudin, W., *Principles of Mathematical Analysis*, McGraw-Hill Book Company. New York, USA (1953).

Swetits, J. J., "On summability and positive linear operators", *J. Approx. Theory*,25, 186-188, (1979).

Stieglitz, M., " Eine verallgenmeinerung des begriftts festkonvergenz", *Math. Japonica*, 18, 53-70, (1973).

Ünver, M., "Abel transforms of positive linear operators",ICNAAM 2013 AIP Conference Proceedings, 1558 , 1148-1151, (2013).

Zygmund, A., *Trigonometric Series*, Cambridge University Press, (1979).

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı	:	Ebru ALTIPARMAK
Doğum Yeri ve Tarihi	:	Balıkesir, 01.01.1992
Lisans Üniversite	:	Pamukkale Üniversitesi
Elektronik posta	:	ebruli_1011@hotmail.com
İletişim Adresi	:	Toki- Yenimahalle 102 Sokak C-6 Blok Daire:5 Karesi/BALIKESİR