T.C.
PAMUKKALE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

GAUSS BALANS VE GAUSS KOBALANS SAYILARI ÜZERİNE

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MUSTAFA YILMAZ

DENİZLİ, TEMMUZ - 2017

T.C.
PAMUKKALE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

GAUSS BALANS VE GAUSS KOBALANS SAYILARI ÜZERİNE

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MUSTAFA YILMAZ

DENİZLİ, TEMMUZ - 2017

KABUL VE ONAY SAYFASI

MUSTAFA YILMAZ tarafından hazırlanan "**GAUSS BALANS ve GAUSS KOBALANS SAYILARI ÜZERİNE**" adlı tez çalışmasının savunma sınavı 28.07.2017 tarihinde yapılmış olup aşağıda verilen jüri tarafından oy birliği ile Pamukkale Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı Yüksek Lisans Tezi olarak kabul edilmiştir.

Jüri Üyeleri	İmza
Danışman Doç. Dr. Mustafa AŞCI	....
Üye Doç. Dr. Ummahan ACAR Muğla Sıtkı Koçman Üniversitesi	....
Üye Doç. Dr. Canan CELEP YÜCEL Pamukkale Üniversitesi	....

Pamukkale Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun 09/08/2017 tarih ve 31/12 sayılı kararıyla onaylanmıştır.

....

Prof. Dr. Uğur YÜCEL

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

Bu tez çalışması PAUBAP tarafından 2016FEBE027 nolu proje ile desteklenmiştir.

Bu tezin tasarımı, hazırlanması, yürütülmesi, araştırmalarının yapılması ve bulgularının analizlerinde bilimsel etiğe ve akademik kurallara özenle riayet edildiğini; bu çalışmanın doğrudan birincil ürünü olmayan bulguların, verilerin ve materyallerin bilimsel etiğe uygun olarak kaynak gösterildiğini ve alıntı yapılan çalışmalara atfedildiğine beyan ederim.

MUSTAFA YILMAZ

ÖZET

GAUSS BALANS VE GAUSS KOBALANS SAYILARI ÜZERİNE
YÜKSEK LİSANS TEZİ
MUSTAFA YILMAZ
PAMUKKALE ÜNİVERSİTESİ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

(TEZ DANIŞMANI: DOÇ.DR. MUSTAFA AŞCI)

DENİZLİ, TEMMUZ - 2017

Bu tez dört bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde Fibonacci ve Lucas sayılarının tanımları ve bu sayıları içeren temel teoremler verilmiştir. Bu sayıların Binet formülleri, Cassini özdeşliği ve üreteç fonksiyonları verilmiştir.

İkinci bölümde Gauss Fibonacci ve Gauss Lucas sayıları incelenmiş ve bu sayılarla ilgili teoremler verilmiştir. Bu sayıların özel Q matrisleri incelenmiş ve bu matrisler yardımıyla teoremlerin ispatları verilmiştir.

Üçüncü bölümde Balans ve Kobalans sayılarının tanımları verilmiş ve bu sayılar yardımıyla Lucas Balans ve Lucas Kobalans sayıları tanmlanarak incelenmiştir. Bu sayıların da indirgeme bağıntıları tanımlanarak Binet formülleri çalışılmıştır.

Dördüncü bölümde ise Gauss Balans ve Gauss Kobalans sayılarının tanımları yapılmıştır. Bu sayılar yardımıyla Gauss Lucas Balans ve Gauss Lucas Kobalans sayılarının indirgeme bağıntıları verilmiştir. Daha sonra ise bu sayı türlerinin birbiri ile olan ilişkileri verilmiş ve özdeşlikler elde edilmiştir. Yine bu sayıların Q matrisleri son olarak verilmiştir.

ANAHTAR KELİMELER: Gauss Fibonacci, Gauss Lucas, Balans sayıları, Kobalans sayıları

ABSTRACT

ON GAUSS BALANCING AND GAUSS COBALANCING NUMBERS
MSC THESIS
MUSTAFA YILMAZ
PAMUKKALE UNIVERSITY INSTITUTE OF SCIENCE
MATHEMATİCS

(SUPERVISOR:ASSOC. PROF. MUSTAFA AŞCI)

DENİZLİ, JULY 2017

This thesis has mainly four sections. In the first section the definitions and basic theorems of Fibonacci and Lucas numbers are given. The Binet Formula, Cassini Identity and generating functions of these numbers are given.

In the second section The Gauss Fibonacci and Gauss Lucas numbers are studied and the theorems about these numbers are given. The special Q matrices are examained and by the help of these matrices the theorems are proved.

In the third section the definitions of Balancing and Cobalancing numbers are given, by the help of these numbers the Lucas Balancing and Lucas Cobalancing numbers are defined and studied. The recurrence relations of these numbers are given and the Binet formulas are examined.

Finally in the fourth section Gauss Balancing and Gauss Cobalancing numbers are defined. By these numbers the recurrence relations of Gauss Lucas Balancing and Gauss Lucas Cobalancing numbers are given. After that the relations betweeen these numbers are given and some important identities are obtained. Finally the Q matrices of these numbers are given.

KEYWORDS: Gauss Fibonacci, Gauss Lucas, Balancing numbers, Cobalancing numbers.

İÇİNDEKİLER

Sayfa

SEMBOL LİSTESİ

$\mathbb{N}$	:	Doğal Sayılar Kümesi $=\{1,2,3,...\}$
$\mathbb{Z}$	:	Tam Sayılar Kümesi
$\mathbb{R}$	:	Reel Sayılar Kümesi
$\mathbf{F_n}$	:	n. Fibobacci Sayısı
$\mathbf{L_n}$	:	n. Lucas Sayısı
$\mathbf{g(x)}$	:	Fibonacci Sayı Dizisinin Üreteç Fonksiyonu
$\mathbf{B_n}$	:	n. Balans Sayısı
$\mathbf{C_n}$	:	n. Lucas Balans Sayısı
$\mathbf{b_n}$	:	n. Kobalans Sayısı
$\mathbf{c_n}$	:	n. Lucas Kobalans Sayısı
$\lfloor \mathbf{x} \rfloor$	:	x'in taban fonksiyonu
$\lceil \mathbf{x} \rceil$	:	x'in tavan fonksiyonu
$\mathbf{T_n}$	:	n. Üçgensel sayı
$\{\mathbf{a_n}\}_{\mathbf{n=1}}^{\infty}$	:	Genel terimi a_n olan sayı dizisi

ÖNSÖZ

Tez çalışmamın her aşamasında bilgi ve tecrübeleriyle beni yönlendiren, sabrı ve güler yüzüyle destek olup cesaretlendiren saygıdeğer danışman hocam Sayın Doç. Dr. Mustafa AŞCI'ya en içten teşekkürlerimi sunarım. Hayatımın her aşamasında sevgi ve şefkatini üzerimden eksik etmeyen desteklerini hiçbir zaman esirgemeyen bu noktalara gelmemde büyük pay sahibi aileme sonsuz teşekkürler ederim.

Mustafa YILMAZ

1. GİRİŞ

Bu bölümde daha sonraki bölümlerde kullanacağımız temel tanım ve teoremler verilmiştir.

Tanım 1.1: $a_0, a_1, a_2, a_3, ..., a_n, ...$ sonsuz bir dizi $k \in \mathbb{N}$ sabit ve $f : \mathbb{N} \times \mathbb{Z}^k \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. Başlangıç değerleri: $a_0, a_1, a_2, ..., a_{k-1}$ ve $\forall n \geq k$ için;

$$a_n = f\left(n, a_{n-1}, a_{n-2}, a_{n-3}, ..., a_{n-k}\right) \tag{1.1}$$

fonksiyonuna $k.$ mertebeden indirgeme bağıntısı denir. Dizinin bütün elemanları (1.1) denklemi ve $a_0, a_1, ..., a_{k-1}$ değerleri ile belirlenir.

Tanım 1.2: $\left(a_n\right)$ sonsuz bir dizi, $k \in \mathbb{N}$ sabit, $f_0, f_1, f_2, ..., f_k$, $\mathbb{N}$ ’den $\mathbb{R}$ ’ye tanımlı fonksiyonlar ve $f_k\left(n\right) \neq 0$ olmak üzere $\forall n \geq k$ için;

$$a_n = f_1\left(n\right)a_{n-1} + f_2\left(n\right)a_{n-2} + ... + f_k\left(n\right)a_{n-k} + f_0\left(n\right) \tag{1.2}$$

biçimindeki indirgeme bağıntısına $k.$ mertebeden lineer indirgeme bağıntısı denir.

Eğer (1.2) deki $f_1, f_2, ..., f_k$ fonksiyonları; $f_i\left(n\right) = b_i; \left(1 \leq i \leq k\right)$ biçiminde sabit fonksiyonlar ise

$$a_n = b_1 a_{n-1} + b_2 a_{n-2} + ... + b_k a_{n-k} + f_0\left(n\right) \tag{1.3}$$

indirgeme bağıntısına sabit katsayılı indirgeme bağıntısı denir.

Eğer (1.2) deki her $n \in \mathbb{N}$ için $f_0\left(n\right) = 0$ ise;

$$a_n = f_1\left(n\right)a_{n-1} + f_2\left(n\right)a_{n-2} + ... + f_k\left(n\right)a_{n-k} \tag{1.4}$$

indirgeme bağıntısına homojen indirgeme bağıntısı denir.

Teorem 1.1: $a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2}$ indirgeme bağıntısı olsun. Bu durumda indirgeme bağıntısının karakteristik denklemi;

$$r^2 - c_1 r - c_2 = 0$$

ve kökleri α, β olmak üzere genel çözümü

$$a_n = c.\alpha^n + d.\beta^n$$

dir.

Burada c ve d sabit sayılardır.

Tanım 1.3: Fibanacci sayıları dizisi $\{F_n\}$, $F_0 = 0,\ F_1 = 1$ koşulları ve $n \geq 0$ olmak üzere; $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ indirgeme bağıntısıyla tanımlıdır.

Fibonacci Sayıları: $0,1,1,2,3,5,8,13,21,34,55,89,144,...$

Tanım 1.4: Lucas sayıları dizisi $\{L_n\}, L_0 = 2, L_1 = 1$ başlangıç koşulları ve $n \geq 0$ olmak üzere; $L_{n+2} = L_{n+1} + L_n$ indirgeme bağıntısıyla tanımlıdır.

Lucas sayıları: $2,1,3,4,7,11,18,29,47,76,123...$ dür.

Teorem 1.2: $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ indirgeme bağıntısının karakteristik denklemi $x^2 - x - 1 = 0$ ve çözüm kümesi

$$\left.\begin{aligned} \alpha &= \frac{1+\sqrt{5}}{2} \\ \beta &= \frac{1-\sqrt{5}}{2} \end{aligned}\right\} \text{ olmak üzere}$$

n. Fibonacci sayısının Binet Formülü

$$F_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta} \text{ dir.}$$

n. Lucas sayısının Binet Formülü

$$L_n = \alpha^n + \beta^n \text{ dir.}$$

İspat: Fibonacci rekürans bağıntısının karakteristik denklemi $x^2 - x - 1 = 0$ dır. Bu denklemin kökleri

$$\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \text{ ve } \beta = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \text{ dir.}$$

O halde genel çözüm

$$a_n = c.\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + d.\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n \text{ dir.}$$

Buradan

$$a_1 = c.\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) + d.\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) = 1$$

$$a_2 = c.\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 + d.\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2 = 1$$

bu iki eşitlikten c ve d değerlerini bulduğumuzda $c = \frac{1}{\sqrt{5}}$ ve $d = -\frac{1}{\sqrt{5}}$ olur.

Genel çözümü düzenlersek,

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

olur.

Burada $\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, $\beta = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ ve $\alpha - \beta = \sqrt{5}$ dir. O halde genel çözümü şu şekilde yazabiliriz.

$$a_n = F_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta} \text{ dır.}$$

Bu ifade Fibonacci sayılarının Binet formülüdür.

Tanım 1.5: $a_0, a_1, a_2, ...$ bir reel sayı dizisi olsun.

$g(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ... + a_n x^n ...$ ifadesine $\{a_n\}$ dizisinin üreteç fonksiyonu denir.

Teorem 1.3:

(i) Fibonacci sayı dizisinin üreteç fonksiyonu

$$g(x) = \frac{x}{1 - x - x^2} \text{ dir.}$$

(ii) Lucas sayı dizisinin üreteç fonksiyonu

$$h(x) = \frac{2x}{1 - x - x^2} \text{ dir.}$$

İspat:

(i) Bu rekürans bağıntısının üreteç fonksiyonu $g(x)$ olsun.

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} F_n x^n$$

$$= F_1 x + F_2 x^2 + \sum_{n=3}^{\infty} F_n x^n$$

$$= x + x^2 + \sum_{n=3}^{\infty} (F_{n-1} + F_{n-2}) x^n$$

$$= x + x^2 + \sum_{n=3}^{\infty} F_{n-1} x^n + \sum_{n=3}^{\infty} F_{n-2} x^n$$

$$= x + x^2 + x.\sum_{n=3}^{\infty} F_{n-1} x^{n-1} + x^2.\sum_{n=3}^{\infty} F_{n-2} x^{n-2}$$

$$= x + x^2 + x.\sum_{n=2}^{\infty} F_n x^n + x^2.\sum_{n=1}^{\infty} F_n x^n$$

$$= x + x^2 + x.\sum_{n=1}^{\infty} \left(F_n x^n - x\right) + x^2.\sum_{n=1}^{\infty} F_n x^n$$

$$= x + x^2 + x.\left(g\left(x\right) - x\right) + x^2.g\left(x\right)$$

$$= x + x^2 + x.g\left(x\right) - x^2 + x^2.g\left(x\right)$$

iki taraflı düzenlersek,

$$\left(1 - x - x^2\right).g\left(x\right) = x \text{ olup}$$

$$g\left(x\right) = \frac{x}{1 - x - x^2} \text{ elde ederiz.}$$

(ii) Benzer şekilde yapılır.

Teorem 1.4: (Binom Teoremi)

x ve y reel sayılar, n pozitif tam sayı olmak üzere;

$$\left(x + y\right)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k \text{ dır.}$$

Tanım 1.6: Bir x reel sayısını x den büyük olmayan en büyük tam sayıya dönüştüren fonksiyona taban (floor) fonksiyonu denir ve $\lfloor x \rfloor$ ile gösterilir.

Tanım 1.7: Bir x reel sayısını x den küçük olmayan en küçük tam sayıya dönüştüren fonksiyona tavan (ceeling) fonksiyonu denir ve $\lceil x \rceil$ ile gösterilir.

Teorem 1.5: x herhangi bir reel sayı ve n herhangi bir tam sayı olmak üzere;

i) $\lfloor n \rfloor = n = \lceil n \rceil$

ii) $\lfloor x + n \rfloor = \lfloor x \rfloor + n$

iii) n tek tam sayı olmak üzere $\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor = \frac{n-1}{2}$ dir.

iv) $\lceil x \rceil = \lfloor x \rfloor + 1, \quad x \notin \mathbb{Z}$ için

v) $\lceil x+n \rceil = \lceil x \rceil + n$

vi) n tek tam sayı olmak üzere $\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil = \frac{n+1}{2}$ dir.

Teorem 1.6: Fibonacci ve Lucas sayılarının kapalı formülü;

$$F_{n+1} = \sum_{i=0}^{\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor} \binom{n-i}{i}$$

ve

$$L_n = \sum_{i=0}^{\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor} \frac{n}{n-i} \binom{n-i}{i}$$

dir.

2. GAUSS FİBONACCİ VE GAUSS LUCAS SAYILARI

Bu bölümde Gauss Fibonacci ve Gauss Lucas sayılarının çalışıldığı Asci ve Gürel 2013, Asci ve Lee 2017, Horadam 1961, Horadam 1963, Jordan 1965 makaleleri incelenmiş ve çalışılmıştır.

Tanım 2.1: Gauss Fibonacci sayıları $GF_0 = i,\ GF_1 = 1$ başlangıç koşulları olmak üzere $n > 1$ için;

$$GF_n = GF_{n-1} + GF_{n-2}$$

indirgeme bağıntısıyla tanımlanır.

Ayrıca; n . Fibonacci sayısı F_n olmak üzere;

$$GF_n = F_n + i.F_{n-1}$$

olduğu hemen görülür.

GF_n dizisinin bazı elemanları,

$$GF_0 = i$$

$$GF_1 = 1$$

$$GF_2 = 1 + i$$

$$GF_3 = 2 + i$$

$$GF_4 = 3 + 2i$$

$$GF_5 = 5 + 3i$$

$$\ldots$$

Tanım 2.2: Gauss Lucas sayıları $GL_o = 2 - i$ ve $GL_1 = 1 + 2i$ başlangıç koşulları olmak üzere; $n > 1$ için;

$GL_n = GL_{n-1} + GL_{n-2}$

indirgeme bağıntısıyla tanımlanmıştır.

Ayrıca, n. Lucas sayısı L_n olmak üzere, $GL_n = L_n + i.L_{n-1}$ olduğu hemen görülür.

GL_n dizisinin bazı elemanları

$GL_0 = 2 - i$

$GL_1 = 1 + 2i$

$GL_2 = 3 + i$

$GL_3 = 4 + 3i$

$GL_4 = 7 + 4i$

$\ldots$

Teorem 2.1: (Binet Formülü)

$GF_0 = i, GF_1 = 1$ başlangıç koşulları ve $n > 1$ için;

$GF_n = GF_{n-1} + GF_{n-2}$ indirgeme bağıntısıyla tanımlı Gauss Fibonacci sayılarının Binet Formülü; GF_n, n . Gauss Fibonacci sayısı;

$\alpha = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$, $\beta = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$ ve $c = \dfrac{1-\beta i}{\alpha - \beta}$, $d = \dfrac{-1+\alpha i}{\alpha - \beta}$ olmak üzere;

$GF_n = c.\alpha^n + d.\beta^n$ dir.

İspat:

$GF_n = x^n$ olsun. Bu durumda $GF_{n-1} = x^{n-1}$ ve $GF_{n-2} = x^{n-2}$ dir.

$$x^n = x^{n-1} + x^{n-2} \tag{2.1.1}$$

olur. (2.1.1) eşitliğini $\frac{1}{x^{n-2}}$ ile çarpalım;

$$x^2 = x + 1 \Rightarrow x^2 - x - 1 = 0$$

$$\Rightarrow x_1 = \alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

$$\Rightarrow x_2 = \beta = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

$$GF_n = c.\alpha^n + d.\beta^n \qquad (2.1.2)$$

olsun.

$$\left.\begin{aligned} GF_0 &= c + d = i \\ GF_1 &= c\alpha + d\beta = 1 \end{aligned}\right\} \text{ ise buradan,}$$

$c = \frac{1-\beta i}{\alpha - \beta}$ ve $d = \frac{-1+\alpha i}{\alpha - \beta}$ bulunur $\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, $\beta = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$, $\alpha - \beta = \sqrt{5}$ dir.

c, d, α ve β değerleri (2.1.2) de yerine yazılırsa;

$$GF_n = c.\alpha^n + d.\beta^n$$

Binet formülü elde edilir.

Tanım 2.3: (Q Matrisi)

Gauss Fibonacci sayıları için; $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ ve $B = \begin{bmatrix} 1 & i \\ i & 1-i \end{bmatrix}$ olmak üzere

Q matrisi;

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & i \\ i & 1-i \end{bmatrix}$$

dir.

Teorem 2.2: Gauss Fibonacci sayıları için; $A=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}$ ve $B=\begin{bmatrix}1 & i\\ i & 1-i\end{bmatrix}$ olmak üzere

$$A^nB=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}^n\begin{bmatrix}1 & i\\ i & 1-i\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}GF_{n+1} & GF_n\\ GF_n & GF_{n-1}\end{bmatrix}$$

dir.

Teorem 2.3: (Üreteç Fonksiyonu)

Gauss Fibonacci Sayıları;

$GF_n=GF_{n-1}+GF_{n-2}$ rekürans bağıntısıyla tanımlıdır. Ayrıca F_n, n Fibonacci sayısı olmak üzere;

$$GF_n=F_n+i.F_{n-1}$$

dir. Bu sayılar için üreteç fonksiyonu

$$g(x)=\frac{x+(1-x).i}{1-x-x^2}$$

dir.

İspat:

$g(x)=\sum_{n=0}^{\infty}GF_nx^n$ biçiminde olsun.

$$g(x)=i+x+(1+i)x^2+(2+i)x^3+(3+2i)x^4+... \qquad (2.1.3)$$

(2.1.3) eşitliğini sırasıyla x ve x^2 ile çarpalım.

$$x.g(x)=ix+x^2+(1+i)x^3+(2+i)x^4+(3+2i)x^5+... \qquad (2.1.4)$$

$$x^2.g(x)=ix^2+x^3+(1+i)x^4+(2+i)x^5+(3+2i)x^6+... \qquad (2.1.5)$$

(2.1.3)'den, (2.1.4) ve (2.1.5) eşitliklerini çıkarırsak;

$$g(x)\left[1-x-x^2\right]=i+x-ix$$

$$=x+i.(1-x)$$

Bu durumda;

$$g(x)=\frac{x+(1-x).i}{1-x-x^2}$$

elde edilir.

Teorem 2.4: $n\geq 2$ için, Gauss Fibonacci sayılarının toplamı;

$$\sum_{j=0}^{n} GF_j = GF_{n+2}-1$$

dir.

İspat:

$GF_0=i,\ \ GF_1=1$ ve $n>1$ için;

$GF_n=GF_{n-1}+GF_{n-2}$ dir.

Burada;

$$GF_{n-1}=GF_n-GF_{n-2}$$

dir.

$$GF_0=i$$

$$GF_1=GF_2-GF_0$$

$$GF_2=GF_3-GF_1$$

$$GF_3=GF_4-GF_2$$

$$GF_4=GF_5-GF_3$$

$$\vdots$$

$$GF_n = GF_{n+1} - GF_{n-1}$$

eşitliklerini taraf tarafa toplarsak;

$$\sum_{j=0}^{n} GF_j = GF_{n+2} - 1$$

elde edilir.

Teorem 2.5:

$n \geq 2$ için

$$\sum_{j=1}^{n} GF_{2j-1} = GF_{2n} - i$$

$$\sum_{j=1}^{n} GF_{2j} = GF_{2n+1} - 1$$

dir.

Tanım 2.4: Gauss Lucas sayıları; $GL_0 = 2 - i$, $GL_1 = 1 + 2i$ başlangıç koşulları olmak üzere; $n > 1$ için;

$GL_n = GL_{n-1} + GL_{n-2}$ indirgeme bağıntısıyla tanımlıdır. Ayrıca; n. Lucas sayısı L_n olmak üzere;

$$GL_n = L_n + i.L_{n-1}$$

olduğu hemen görülür.

n	0	1	2	3	4	5	………
GL_n	$2-i$	$1+2i$	$3+i$	$4+3i$	$7+4i$	$11+7i$	………

Teorem 2.6: (Binet Formülü)

Gauss Lucas Sayıları; $GL_0 = 2 - i$, $GL_1 = 1 + 2i$, $n > 1$ için $GL_n = GL_{n-1} + GL_{n-2}$ indirgeme bağıntısıyla tanımlıdır.

$$\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2},\ \beta = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

$$c = \frac{(1-2\beta) + i.(\beta+2)}{\alpha-\beta},\ d = \frac{(2\alpha-1) - i(\alpha+2)}{\alpha-\beta}$$

olmak üzere Binet formülü; n. Gauss Lucas GL_n olmak üzere

$$GL_n = c.\alpha^n + d.\beta^n$$

ile tanımlıdır.

Tanım 2.5: (Q Matrisi)

Gauss Lucas sayıları için Q matrisi

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 3+i & 1+2i \\ 1+2i & 2-i \end{bmatrix}$$

şeklindedir. Yani

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^n . \begin{bmatrix} 3+i & 1+2i \\ 1+2i & 2-i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} GL_{n+1} & GL_n \\ GL_n & GL_{n-1} \end{bmatrix}$$

dir.

Teorem 2.7: (Cassini Özdeşliği)

$n \geq 1$ için

$$GL_{n+1}.GL_{n-1} - GL_n^2 = 5.(-1)^{n+1}.(2-i)$$

dir.

İspat:

$Q=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}^{n+1}\begin{bmatrix}3+i & 1+2i\\ 1+2i & 2-i\end{bmatrix}$ matrisinin determinantını alırsak;

$$\begin{vmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{vmatrix}^{n+1}.\begin{vmatrix}3+i & 1+2i\\ 1+2i & 2-i\end{vmatrix}=5.(-1)^{n+1}(2-i)$$

elde edilir ki;

$n\geq 1$ için

$$GL_{n+1}.GL_{n-1}-GL_n^2=5.(-1)^{n+1}.(2-i)$$

yazılır.

Teorem 2.8:

Gauss Lucas sayıları:

$$GL_0=2-i, GL_1=1+2i,\ n>1$$

için;

$$GL_n=GL_{n-1}+GL_{n-2}$$

dir.

Gauss Lucas sayılarının üreteç fonksiyonu;

$$g(x)=\sum_{n=0}^{\infty}GL_n x^n \text{ olsun. Bu durumda}$$

$$g(x)=\frac{(2-i)+(-1+3i)x}{1-x-x^2} \text{ ifadesi;}$$

Gauss Lucas sayılarının üreteç fonksiyonudur.

Teorem 2.9:

i) $\sum_{j=0}^{n} GL_j = GL_{n+2} - (1+2i)$

ii) $\sum_{j=1}^{n} GL_{2j} = GL_{2n+1} - (1+2i)$

iii) $\sum_{j=1}^{n} GL_{2j-1} = GL_{2n} - (2-i)$

3. BALANS VE KOBALANS SAYILARI

Bu bölümde Balans ve Kobalans sayılarının çalışıldığı Panda 2007, Panda 2006, Behera ve Panda 1999, Rout 2015, Ray 2009 çalışmaları incelenmiştir.

3.1 Balans Sayıları

Balans sayıları ilk kez Behera ve Panda tarafından 1999 yılında Diophantine denklemleri çalışılırken bulunmuştur.

Tanım 3.1.1: Herhangi bir $n \in \mathbb{N}$ doğal sayısı için;

$$1+2+...+(n-1)=(n+1)+(n+2)+...+(n+r) \tag{3.1.1}$$

eşitliğinde n doğal sayısına balans sayısı ve buna karşılık gelen r doğal sayısına da balansır denir.

Balans Sayıları $1,\ 6,\ 35,\ 204, 1189,...$

Örneğin; $B_2 = 6$ balans sayısına karşılık gelen balansır 2 'dir.

$B_3 = 35$ balans sayısına karşılık gelen balansır 14 'dür.

n üçgensel sayı $T_n = \dfrac{n(n+1)}{2}$ olmak üzere;

(3.1.1) eşitliğinde

$$T_{n-1} + T_n = T_{n+r}$$

ilişkisi mevcuttur. Yani; ardışık iki üçgensel sayının toplamı yine bir üçgensel sayıdır.

Örneğin; $n = 6$ için; $T_5 + T_6 = \dfrac{5.6}{2} + \dfrac{6.7}{2}$

$= 15 + 21$

$= 36$

$= T_8$ dir.

Bu örnekte; $n = 6$ bir balans sayısı iken buna karşılık gelen balansır ise 2 'dir.

Ardışık iki üçgensel sayının toplamı bir tam kare sayı olduğundan

(3.1.1) eşitliğinde;

$$\frac{(n+r)(n+r+1)}{2} = n^2 \tag{3.1.2}$$

dir. Burada eğer "n" bilinirse; "r" de elde edilebilir.

$$1 + 2 + \dots + (n-1) = (n+1) + (n+2) + \dots + (n+r)$$

$$\frac{(n-1).n}{2} = n.r + \frac{r(r+1)}{2} = \frac{2nr + r^2 + r}{2}$$

$$n^2 - n = 2nr + r^2 + r \Rightarrow r^2 + 2nr + n + r - n^2 = 0$$

$$\Rightarrow r^2 + (2n+1)r + (n - n^2) = 0$$

eşitliğinde;

$$\Delta = (2n+1)^2 - 4.1(n - n^2) = 8n^2 + 1$$

$$r_{1,2} = \frac{-(2n+1) \mp \sqrt{8n^2+1}}{2}$$ olup; $r > 0$ olduğundan

$$r = \frac{-(2n+1) + \sqrt{8n^2+1}}{2} \text{ bulunur.} \tag{3.1.3}$$

Teorem 3.1.1: n 'nin balans sayısı olması için gerek ve yeter şart "$8n^2 + 1$" in tam kare bir doğal sayı olmasıdır.

Örneğin; İkinci balans sayısı $B_2 = 6$ ve buna karşılık gelen balansır 2 ’dir. yani;

$$r = \frac{-(2.6+1)+\sqrt{8.6^2+1}}{2}$$

$$r = \frac{-13+\sqrt{289}}{2}$$

$$r = 2$$

burada $289,$ tam karesel sayıdır.

Teorem 3.1.2: *m.* üçgensel sayı bir tam karesel doğal sayı ise; n bir balans sayısı olmak üzere; bu durumda $n.$ balans sayısına karşılık gelen balansır $(m-n)$ dir.

Örnek 3.1.1:

$m = 8$ olsun. Yani 8. üçgensel sayıyı ele alalılm

$$\frac{m(m+1)}{2} = n^2$$

$\frac{8.9}{2} = 6^2,$ burada $n = 6$ balans sayısı ve buna karşılık gelen balansır sayısı $m - n = 8 - 6 = 2$ ’dir.

Teorem 3.1.3:

Behera ve Panda ilk olarak; Balans sayıları için rekürans bağıntısını tanımladı.

Başlangıç koşulları; $B_1 = 1,$ $B_2 = 6$ olmak üzere; $n \geq 2$ için;

$$B_{n+1} = 6B_n - B_{n-1}$$

Bu rekürans bağıntısı 2 . dereceden, lineer ve homojen bir rekürans bağıntısıdır.

Teorem 3.1.4:

$B_1 = 1, B_2 = 6,\ n \geq 2$ için

$B_{n+1} = 6B_n - B_{n-1}$ rekürans bağıntısının karakteristik denklemi $r^2 - 6r + 1 = 0$ ve

$$\begin{aligned} \alpha &= 1 + \sqrt{2} \\ \beta &= 1 - \sqrt{2} \end{aligned} \text{ olmak üzere}$$

$n.$ balans sayısının Binet Formülü

$$B_n = \frac{\alpha^{2n} - \beta^{2n}}{4\sqrt{2}} \text{ dir.}$$

İspat:

Karakteristik denklem $r^2 - 6r + 1 = 0$ dır.

bu denklemin kökleri $\begin{aligned} r_1 &= 3 + \sqrt{8} \\ r_2 &= 3 - \sqrt{8} \end{aligned}$ olmak üzere

$$B_n = c.\left(3 + \sqrt{8}\right)^n + d.\left(3 - \sqrt{8}\right)^n \text{ dir.} \tag{3.1.4}$$

$$B_1 = c.\left(3 + \sqrt{8}\right) + d.\left(3 - \sqrt{8}\right) = 1$$

$$B_2 = c.\left(3 + \sqrt{8}\right)^2 + d.\left(3 - \sqrt{8}\right)^2 = 6 \text{ olup;}$$

bu iki eşitlikten $c = \dfrac{\sqrt{2}}{8},\ d = \dfrac{-\sqrt{2}}{8}$ ve

$c - d = \dfrac{\sqrt{2}}{4}$ 'dir. Genel çözümü düzenlersek;

(3.1.4) eşitliğinde; $\left.\begin{aligned} \left(1 + \sqrt{2}\right)^2 &= 3 + \sqrt{8} \\ \left(1 - \sqrt{2}\right)^2 &= 3 - \sqrt{8} \end{aligned}\right\}$ olduğundan;

$$B_n = \frac{\alpha^{2n} - \beta^{2n}}{4\sqrt{2}} \text{ elde edilir.}$$

Teorem 3.1.5: (Reküarans Bağıntısı)

Balans sayıları için Binet formülü;

$$B_n = \frac{\alpha^{2n} - \beta^{2n}}{4\sqrt{2}}, \quad \alpha = 1+\sqrt{2} \text{ ve } \beta = 1-\sqrt{2}; \text{ olmak üzere;}$$

$$B_{n+1} + B_{n-1} = \frac{\alpha^{2n+2} - \beta^{2n+2}}{4\sqrt{2}} + \frac{\alpha^{2n-2} - \beta^{2n-2}}{4\sqrt{2}}$$

$$= \frac{\alpha^{2n}\left(\alpha^2+\beta^2\right) - \beta^{2n}\left(\alpha^2+\beta^2\right)}{4\sqrt{2}}$$

$$= \left(\alpha^2+\beta^2\right).\frac{\alpha^{2n} - \beta^{2n}}{4\sqrt{2}}$$

$$= 6.B_n, \quad n \geq 2$$

Balans sayıları için; reküarans bağıntısı;

$$B_1 = 1, \; B_2 = 6 \text{ ve } n \geq 2 \text{ için}$$

$$B_{n+1} = 6B_n - B_{n-1} \text{ dir.}$$

Teorem 3.1.6: Balans sayıları, lineer olmayan 2. Mertebeden aşağıdaki reküarans bağıntısını sağlar.

$$B_{n-1}.B_{n+1} = B_n^{\,2} - 1, \quad n \geq 2$$

Sonuç 3.1.1:

Her n pozitif tamsayısı için, B_n $n.$ balans sayısı olmak üzere;

i) $B_{2n-1} = B_n^2 - B_{n-1}^2$

ii) $B_{2n} = B_n\left(B_{n+1} - B_{n-1}\right)$

iii) $B_1 + B_3 + ... + B_{2n-1} = B_n^2$

iv) $B_2 + B_4 + ... + B_{2n} = B_n.B_{n+1}$

Teorem 3.1.7: (Balans Sayılarını Üreten Fonksiyonlar)

x herhangi bir balans sayısı olmak üzere;

$$f(x) = 2x\sqrt{8x^2+1}$$

$$g(x) = 3x + \sqrt{8x^2+1}$$

$$h(x) = 17x + 6\sqrt{8x^2+1}$$

$$p(x) = 6x\sqrt{8x^2+1} + 16x^2 + 1$$

$f(x)$, $g(x)$, $h(x)$ ve $p(x)$ de birer balans sayısıdır.

İspat: x, bir balans sayısı olduğundan $8x^2+1$ bir tam karesel doğal sayıdır ve

$$\frac{8x^2\left(8x^2+1\right)}{2} = 4x^2\left(8x^2+1\right)$$

ifadesi tam karesel ve üçgensel bir sayıdır.

$f(x) = 2x\sqrt{8x^2+1}$ bir balans sayısıdır ki

$8\left[g(x)\right]^2 + 1 = \left(8x + 3\sqrt{8x^2+1}\right)^2$ ifadesi de $g(x)$'in bir balans sayısı olduğunu gösterir.

$g\left(g(x)\right) = h(x)$ ve $g\left(f(x)\right) = p(x)$ olup; $h(x)$ ve $p(x)$ de birer balans sayısıdır.

Teorem 3.1.8: Her x balans sayısı için;

x 'ten sonraki balans sayısı $g(x) = 3x + \sqrt{8x^2 + 1}$

x 'ten önceki balans sayısı $g'(x) = 3x - \sqrt{8x^2 + 1}$ dir.

Tanım 3.1.2: (Lucas – Balans Sayıları)

$B,$ bir balans sayısı ise $8B^2 + 1$ bir tam karesel doğal sayıdır,

$C = \sqrt{8B^2 + 1}$ olmak üzere;

$$B_{n+1} = 3B_n + \sqrt{8B_n^2 + 1} \tag{3.1.5}$$

$$B_{n-1} = 3B_n - \sqrt{8B_n^2 + 1} \tag{3.1.6}$$

(3.1.5) ve (3.1.6) dan

$B_{n+2} = 17B_n + 6\sqrt{8B_n^2 + 1}$ bulunur.

$C_n = \sqrt{8B_n^2 + 1}$ sayısına $n.$ Lucas balans sayısı denir.

Teorem 3.1.9: Lucas-balans sayıları için reküarans bağıntısı; başlangıç koşulları $C_1 = 3,\ C_2 = 17$ olmak üzere,

$C_{n+1} = 6C_n - C_{n-1}$ ile tanımlıdır.

Teorem 3.1.10: (Binet formülü) Lucas Balans sayıları için Binet formülü

$$C_n = \frac{\alpha^{2n} + \beta^{2n}}{2}$$

dir.

Teorem 3.1.11:

i) m ve n pozitif tamsayılar olmak üzere;

$$B_{m+n} = B_m C_n + C_m B_n$$

ii) m ve n iki doğal sayı olmak üzere;

$$C_{m+n} = C_m C_n + 8B_m B_n$$

iii) n pozitif tamsayı olmak üzere;

$$B_{2n} = 2B_n C_n \text{ ve } C_{2n} = C_n^2 + 8B_n^2$$

iv) m ve n pozitif tamsayılar olmak üzere,

$$m > n$$

$$B_{m-n} = B_m C_n - C_m B_n$$

$$C_{m-n} = C_m C_n - 8B_m B_n$$

v) n ve r doğal sayılar, $n > r$ olmak üzere;

$$B_{n+r} B_{n-r} = \left(B_n + B_r\right)\left(B_n - B_r\right) \text{ dir.}$$

Teorem 3.1 12: (Üreteç Fonksiyonu)

Balans sayılarının rekürans bağıntısı; başlangıç koşulları $B_1 = 1, \quad B_2 = 6$ olmak üzere;

$$B_{n+1} = 6B_n - B_{n-1}, \quad n > 1 \text{ dir.}$$

Balans sayıları için üreteç fonksiyonu $g(x)$ olsun,

$$g\left(x\right) = \frac{x}{1 - 6x + x^2}$$

dir.

İspat:

$$g(x)=\sum_{n=0}^{\infty}B_n x^n=B_0+B_1x+B_2x^2+....+B_nx^n... \tag{3.1.7}$$

(3.1.7) eşitliğini $6x$ ile çarpalım.

$$6x.g(x)=6\sum_{n=0}^{\infty}B_n x^{n+1}=6xB_0+6x^2B_1+6x^3B_2+....+6B_nx^{n+1}... \tag{3.1.8}$$

(3.1.7) eşitliğini x^2 ile çarpalım.

$$x^2g(x)=\sum_{n=0}^{\infty}B_n x^{n+2}=B_0x^2+B_1x^3+B_2x^4+....+B_nx^{n+2}+... \tag{3.1.9}$$

(3.1.7) ile (3.1.9) eşitliklerini toplayıp, (3.1.8) eşitliğini çıkaralım;

$$g(x)-6xg(x)+x^2g(x)=x.\left(\underbrace{B_1-6B_0}_{1}\right)+x^2\left(\underbrace{B_2-6B_1+B_0}_{0}\right)+x^3\left(\underbrace{B_3-6B_2+B_1}_{0}\right)+...$$

$$g(x)\left[1-6x+x^2\right]=x$$

$$g(x)=\frac{x}{1-6x+x^2} \text{ bulunur.}$$

3.2 Kobalans Sayıları:

Tanım 3.2.1:

$$1+2+...+n=(n+1)+(n+2)+...+(n+r) \qquad (3.2.1)$$

eşitliğinde; n doğal sayısına Kobalans sayısı ve bu $n\in\mathbb{N}$ doğal sayısına karşılık gelen $r\in\mathbb{N}$ doğal sayısına kobalansır denir.

İlk üç kobalans sayısı $2,14$ ve 84; bu kobalans sayılarına karşılık gelen kobalansırlar sırasıyla $1,6$ ve 35 tir.

Örneğin;

i) $1+2=2+1$ olup burada $2\in\mathbb{N}$ kobalans sayısı iken, $1\in\mathbb{N}$ kobalansırdır.

ii) $1+2+3+...+14=(14+1)+(14+2)+(14+3)+...+(14+6)$

Burada; $14\in\mathbb{N}$ kobalans sayısı ve bu kobalans sayısına karşılık gelen kobalansır ise $6\in\mathbb{N}$ 'dir.

(3.2.1) eşitliğinde;

$n(n+1)=\dfrac{(n+r)(n+r+1)}{2}$ olsun. Bu durumda;

$$r=\frac{-(2n+1)+\sqrt{8n^2+8n+1}}{2} \text{ elde edilir.}$$

Teorem 3.2.1: n nin bir kobalans sayısı olması için gerek ve yeter şart $8n^2+8n+1$ in tam karesel bir doğal sayı olmasıdır.

Teorem 3.2.2: (Kobalans Sayıları İçin Rekürans Bağıntısı)

$n=1,2,3,...$ için; $b_n, n.$ kobalans sayısı olsun.

$$b_{n+1}=3b_n+\sqrt{8b_n^2+8b_{n+1}+1}+1,$$

ve

$$b_{n-1} = 3b_n - \sqrt{8b_n^2 + 8b_n + 1} + 1$$

olduğundan bu iki eşitlik taraf tarafa toplanırsa;

$$b_{n+1} = 6b_n - b_{n-1} + 2, \ \ n \geq 2$$

elde edilir. Bu bağıntıda

$$b_1 = 0, \ \ b_2 = 2, \text{ dir.}$$

Teorem 3.2.3: (Kobalans Sayılarını Üreten Fonksiyonlar)

x bir kobalans sayısı olmak üzere;

$$f(x) = 3x + \sqrt{8x^2 + 8x + 1} + 1$$

$$g(x) = 17x + 6\sqrt{8x^2 + 8x + 1} + 8$$

$$h(x) = 8x^2 + 8x + 1 + (2x+1)\sqrt{8x^2 + 8x + 1} + 1$$

fonksiyonları da bir kobalans sayısı üretirler.

Teorem 3.2.4: (Binet Formülü)

Kobalans sayı dizisi, başlangıç koşulları;

$b_1 = 0, \ b_2 = 2$ olmak üzere;

$b_{n+1} = 6.b_n - b_{n-1} + 2, \ n \geq 2$ rekürans bağıntısı ile tanımlıdır.

Kobalans sayı dizisi için binet formülü; b_n, $n.$ kobalans sayısı olmak üzere;

$$b_n = \frac{\alpha^{2n-1} - \beta^{2n-1}}{\lambda_1 - \lambda_2} - \frac{1}{2}; n = 1, 2, \dots \text{ için;}$$

$$\lambda_1 = \alpha^2 \text{ ve } \lambda_2 = \beta^2, \ \ \alpha = 1 + \sqrt{2} \text{ ve } \beta = 1 - \sqrt{2} \text{ dir.}$$

İspat: $b_{n+1} = 6.b_n - b_{n-1} + 2;\ \ n \geq 2$ için;

$$\left. d_n = b_n + \frac{1}{2} \quad olsun \right\}$$

$$\left. \begin{array}{l} b_n = d_n - \dfrac{1}{2} \quad dir \\ b_{n+1} = d_{n+1} - \dfrac{1}{2} \quad dir \end{array} \right\}$$

$d_{n+1} - \frac{1}{2} = 6.\left(d_n - \frac{1}{2}\right) - \left(d_{n-1} - \frac{1}{2}\right) + 2;$ buradan;

$d_{n+1} = 6d_n - d_{n-1}$ homojen bir rekürans bağıntısı elde edilir.

$d_{n+1} = 6.d_n - d_{n-1}$ rekürans bağıntısının karakteristik denklemi

$r^2 - 6r + 1 = 0$ dır. kökleri;

$\lambda_{1,2} = 3 \mp \sqrt{8}$ dır.

$d_n = A.\lambda_1^n + B\lambda_2^n$ formundadır.

$$\left. \begin{array}{l} n = 1\ için;\ \dfrac{1}{2} = A.\lambda_1 + B.\lambda_2 \\ n = 2\ için \dfrac{5}{2} = A.\lambda_1^2 + B.\lambda_2^2 \end{array} \right\} \text{ olup; Burada; } \begin{array}{l} \lambda_1 = 3 + \sqrt{8} = \alpha^2 \\ \lambda_2 = 3 - \sqrt{8} = \beta^2 \end{array}$$

$$A = \frac{1}{\alpha(\lambda_1 - \lambda_2)} \text{ ve } B = \frac{1}{\beta(\lambda_1 - \lambda_2)}$$

olup;

$$d_n = \frac{\alpha^{2n-1} - \beta^{2n-1}}{\lambda_1 - \lambda_2} \text{ dir.}$$

$d_n = b_n + \frac{1}{2}$ idi;

$$b_n = \frac{\alpha^{2n-1} - \beta^{2n-1}}{\lambda_1 - \lambda_2} - \frac{1}{2}, \quad n = 1,2,\ldots \text{ elde edilir.}$$

Teorem 3.2.5: (Üreteç Fonksiyonu)

Kobalans sayı dizisi: başlangıç koşulları, $b_1 = 0,\ b_2 = 2$ olmak üzere;

$b_{n+1} = 6b_n - b_{n-1} + 2,\ n \geq 2$ için tanımlıdır.

Kobalans sayılarının üreteç fonksiyonu;

$$g(x) = \frac{2x^2}{(1-x)(1-6x+x^2)}$$

dir.

İspat:

$$g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n \text{ olsun.}$$

$$g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + b_3 x^3 + \ldots + b_n x^n + \ldots. \tag{3.2.2}$$

(3.2.2) eşitliğini sırasıyla "$6x$" ve "x^2" ile çarpalım;

$$6xg(x) = \sum_{n=0}^{\infty} 6b_n x^{n+1} = 6b_0 x + 6b_1 x^2 + 6b_2 x^3 + 6b_3 x^4 + \ldots \tag{3.2.3}$$

$$x^2 g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^{n+2} = b_0 x^2 + b_1 x^3 + b_2 x^4 + b_3 x^5 + b_4 x^6 + \ldots \tag{3.2.4}$$

(3.2.2) eşitliğinden (3.2.3) yi çıkaralım ve (3.2.4) ile toplayalım;

$$g(x)\left[1-6x+x^2\right] = \underbrace{b_0}_{0} + x\left(\underbrace{b_1 + 6b_0}_{0}\right) + x^2\left(\underbrace{b_2 - 6b_1 + b_0}_{2}\right) + x^3\left(\underbrace{b_3 - 6b_2 + b_1}_{2}\right) + \ldots$$

$$g(x)\left[1-6x+x^2\right] = 2x^2\left(1 + x + x^2 + \ldots\right) |x| < 1 \text{ için}$$

$$g(x)\left[1-6x+x^2\right] = 2x^2\left[\frac{1}{1-x}\right] \Rightarrow g(x) = \frac{2x^2}{(1-x)(1-6x+x^2)} \text{ elde edilir.}$$

Tanım 3.2.2: b bir kobalans sayısı ise $8b^2+8b+1$ bir tam karesel sayı olduğundan;

$c=\sqrt{8b^2+8b+1}$ sayısına $n.$ Lucas kobalans sayısı denir.

Teorem 3.2.6: Lucas kobalans sayı dizisi; başlangıç koşulları $c_1=1,\ c_2=7$ için

$$c_{n+1}=6c_n-c_{n-1}, n\geq 2$$

dir.

İspat:

$$c_{n+1}^2=8b_{n+1}^2+8b_{n+1}+1$$

$$=8.\left(3b_n+\sqrt{8b_n^2+8b_n+1}+1\right)^2+8b_{n+1}+1$$

$$=\left(3\sqrt{8b_n^2+8b_n+1}+8b_n+4\right)^2$$

$$=\left(3c_n+8b_n+4\right)^2$$

$$c_{n+1}=3c_n+8b_n+4 \tag{3.2.5}$$

$c_{n-1}^2=8b_{n-1}^2+8b_{n-1}+4$ olduğundan benzer şekilde;

$$c_{n-1}=3c_n-8b_n-4 \tag{3.2.6}$$

(3.2.5) ve (3.2.6) eşitlikleri toplanırsa;

$c_{n+1}+c_{n-1}=6c_n$ elde edilir ki;

$c_{n+1}=6c_n-c_{n-1},\ n\geq 2$ yazılır.

Teorem 3.2.7: (Binet Formülü)

Başlangıç koşulları; $c_1 = 1,\ c_2 = 7$ olmak üzere; α_1 ve α_2

$c_{n+1} = 6c_n - c_{n-1},\ n \geq 2$ rekürans bağıntısının kökleri için

$$c_n = \frac{\alpha_1^{2n-1} + \alpha_2^{2n-1}}{2}, n = 1, 2...$$

dir.

Teorem 3.2.8:

i) Her balansır bir kobalans sayısıdır.

ii) Her kobalansır bir balans sayısıdır.

İspat: R_n, n. balansır

b_n, n. kobalans sayısı

$r_{n+1}, (n+1)$. kobalansır

B_n, n. balans sayısı olmak üzere;

$$R = \frac{-(2B+1) + \sqrt{8B^2+1}}{2} \tag{3.2.7}$$

$$R_{n+1} = \frac{-(2B_{n+1}+1) + \sqrt{8B_{n+1}^2+1}}{2} \tag{3.2.8}$$

$$R_{n-1} = \frac{-(2B_{n-1}+1) + \sqrt{8B_{n-1}^2+1}}{2} \tag{3.2.9}$$

$$\left.\begin{aligned} B_{n+1} &= 3B_n + \sqrt{8B_n^2+1} \\ B_{n-1} &= 3B_n - \sqrt{8B_n^2+1} \end{aligned}\right\} \tag{3.2.10}$$

(3.2.10) u ve (3.2.8) ve (3.2.9) da yerine yazıp; (3.2.8) ve (3.2.9) u toplayalım;

$$R_{n+1}=\frac{2B_n+\sqrt{8B_n^2+1}-1}{2}$$

$$R_{n-1}=\frac{-14B_n+5\sqrt{8B_n^2+1}-1}{2}$$

$$R_{n+1}+R_{n-1}=\frac{-12B_n+6\sqrt{8B_n^2+1}-2}{2}$$

$$=6.\frac{-\left(2B_n+1\right)+\sqrt{8B_n^2+1}}{2}+2$$

$$=6.R_n+2 \text{ dolayısıyla}$$

$R_{n+1}=6R_n-R_{n-1}+2$ elde edilir.

Burada $\left.\begin{array}{l} R_1=b_1=0 \\ R_2=b_2=2 \end{array}\right\}$ dir. Yani $R_n=b_n$ dir.

Teorem 3.2.9: Her kobalans sayısı çifttir.

İspat: Tümevarımla yapalım; ilk iki kobalans sayısı $b_1=0$ ve $b_2=2$ olup çifttirler. Varsayalım ki b_n çift olsun, bu durumda; $n\leq k$ için; $b_{n+1}=6.b_n-b_{n-1}+2$ olduğundan; b_{k+1} de çifttir.

Teorem 3.2.10: Kobalans sayıları, ikinci mertebeden lineer olmayan aşağıdaki bağıntıyı bağlar.

$$\left(b_{n-1}\right)^2=1+b_{n-1}.b_{n+1},\quad n>2 \text{ dir.}$$

İspat:

$b_{n+1}=6b_n-b_{n-1}+2$ olduğundan;

$$\frac{b_{n+1}+b_{n-1}-2}{b_n}=6 \text{ dır. Burada;} \tag{3.2.11}$$

"n" yerine "$\left(n-1\right)$" yazarsak; $\dfrac{b_n+b_{n-2}-2}{b_{n-1}}=6$ elde edilir. (3.2.12)

(3.2.11) ve (3.2.12) eşit olduğundan;

$\dfrac{b_{n+1}+b_{n-1}-2}{b_n}=\dfrac{b_n+b_{n-2}-2}{b_{n-1}}$ buradaki ifadeler düzenlenirse $\left(b_n-1\right)^2-b_{n-1}.b_{n+1}=\left(b_{n-1}-1\right)^2-b_{n-2}b_n$ buradan da $\left(b_n-1\right)^2-b_{n-1}.b_{n+1}=1$ elde edilir.

Teorem 3.2.11: x bir kobalas sayısı ise; x ten sonraki kobalans sayısı: $3x+\sqrt{8x^2+8x+1}+1$ x ten önceki kobalans sayısı: $3x-\sqrt{8x^2+8x+1}+1$ dir.

Teorem 3.2.12: $A=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 6 \end{bmatrix}$ olsun. Bu durumda;

$$A^n=\begin{bmatrix} -B_{n-1} & B_n \\ -B_n & B_{n+1} \end{bmatrix}$$

dir.

İspat: ispatı tümevarımla yapalım.

$n=1$ için

$A=\begin{bmatrix} -B_0 & B_1 \\ -B_1 & B_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 6 \end{bmatrix}$ dir.

$1\le n\le k$ için

$A^n=\begin{bmatrix} -B_{n-1} & B_n \\ -B_n & B_{n+1} \end{bmatrix}$ olsun.

$$A^{k+1}=A.A^k=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -B_{k-1} & B_k \\ -B_k & B_{k+1} \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} -B_k & B_{k+1} \\ -6B_k+B_{k-1} & 6B_{k+1}-B_k \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -B_k & B_{k+1} \\ -B_{k+1} & B_{k+2} \end{bmatrix}$$

dir.

Teorem 3.2.13: $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 6 \end{bmatrix}$ ve $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}$ olsun. Bu durumda;

$$A^n.B = \begin{bmatrix} -B_n & 2b_{n+1}+1 \\ -B_{n+1} & 2b_{n+2}+1 \end{bmatrix}$$

dir.

İspat:

$$A^n = \begin{bmatrix} -B_{n-1} & B_n \\ -B_n & B_{n+1} \end{bmatrix}$$

idi

$$A^n.B = \begin{bmatrix} -B_{n-1} & B_n \\ -B_n & B_{n+1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -B_n & B_{n+1} - B_n \\ -B_{n+1} & B_{n+2} - B_{n+1} \end{bmatrix}$$

$B_{n-1} = 3B_n - \sqrt{8B_n^2+1}$ ve

$$R_n = \frac{-(2B_n+1) + \sqrt{8B_n^2+1}}{2}$$

olduğundan;

$$B_n - B_{n-1} = -2B_n + 8\sqrt{B_n^2+1}$$

$$= 2R_n + 1$$

dir.

$R_n = b_n$ ve $B_n - B_{n-1} = 2b_n + 1$ olduğundan;

$$A^n.B = \begin{bmatrix} -B_n & 2b_{n+1}+1 \\ -B_{n+1} & 2b_{n+2}+1 \end{bmatrix}$$

elde edilir.

Teorem 3.2.14: $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 6 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ olsun. Bu durumda;

$$A^n.C = \begin{bmatrix} C_{n-1} & C_n \\ C_n & C_{n+1} \end{bmatrix}$$

dir.

Teorem 3.2.15: $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 6 \end{bmatrix}$, $D = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 7 \end{bmatrix}$ olsun. Bu durumda;

$$A^n D = \begin{bmatrix} c_n & c_{n+1} \\ c_{n+1} & c_{n+2} \end{bmatrix}$$

dir.

4. GAUSS BALANS ve GAUSS KOBALANS SAYILARI

Bu bölümde Gauss Balans ve Gauss Kobalans sayılarının tanımları verilerek daha önceki çalışmalarda elde edilen sonuçlar bu sayılara taşınmış ve ilgili teoremler ispatlanmıştır.

4.1 Gauss Balans Sayıları

Tanım 4.1.1: Gauss balans sayıları dizisi; başlangıç koşulları,

$GB_0 = i,\ \ GB_1 = 1$ ve $n \geq 1$ olmak üzere

$GB_{n+1} = 6.GB_n - GB_{n-1}$ ile tanımlıdır.

Ayrıca; $GB_n = B_n - iB_{n-1}$ ilişkisi mevcuttur.

GB_n dizisinin bazı elemanları;

n	0	1	2	3	4	…
GB_n	i	1	$6-i$	$35-6i$	$204-35i$	…

biçimindedir.

Teorem 4.1.1: $A = \begin{bmatrix} 6 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ ve $B = \begin{bmatrix} 6-i & -1 \\ 1 & -i \end{bmatrix}$ olsun. Bu durumda;

$$A^n.B = \begin{bmatrix} GB_{n+2} & -GB_{n+1} \\ GB_{n+1} & -GB_n \end{bmatrix}$$

dir.

İspat

İspatı tümevarımla yapalım.

$n=1$ için,

$$A.B=\begin{bmatrix}6 & -1\\ 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}6-i & -1\\ 1 & -i\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}35-6i & -(6-i)\\ 6-i & -1\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}GB_3 & -GB_2\\ GB_2 & -GB_1\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}GB_{n+2} & -GB_{n+1}\\ GB_{n+1} & -GB_n\end{bmatrix}$$

elde edilir.

$1\le n\le k$ için; $A^k.B=\begin{bmatrix}GB_{k+2} & -GB_{k+1}\\ GB_{k+1} & -GB_k\end{bmatrix}$ olsun.

$n=k+1$ için

$$A^{k+1}B=A\left(A^k.B\right)=\begin{bmatrix}6 & -1\\ 1 & 0\end{bmatrix}.\begin{bmatrix}GB_{k+2} & -GB_{k+1}\\ GB_{k+1} & -GB_k\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}6.GB_{k+2}-GB_{k+1} & -6GB_{k+1}+GB_k\\ GB_{k+2} & -GB_{k+1}\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}GB_{k+3} & -GB_{k+2}\\ GB_{k+2} & -GB_{k+1}\end{bmatrix}$$

Teorem 4.1.2: $GB_n^2 - GB_{n+1}.GB_{n-1} = -6i$

İspat: $\begin{bmatrix} 6 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^n \begin{bmatrix} 6-i & -1 \\ 1 & -i \end{bmatrix} = Q$ matrisi olsun.

Q matrisinin determinantını alalım.

$$\begin{vmatrix} 6 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}^n \begin{vmatrix} 6-i & -1 \\ 1 & -i \end{vmatrix} = (6-i).(-i)+1 = -6i$$

elde edilir.

Teorem 4.1.3: Gauss Balans Sayı dizisi için, Binet formülü; GB_n, n Gauss Balans sayısı; $\alpha = 3+\sqrt{8}$ ve $\beta = 3-\sqrt{8}$ olmak üzere;

$$GB_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta} - i.\frac{\alpha^{n-1} - \beta^{n-1}}{\alpha - \beta}$$

dir.

İspat: Gauss Balans Sayıları;

$GB_0 = i, \;\; GB_1 = 1$ başlangıç koşulları

$GB_{n+1} = 6.GB_n - GB_{n-1}$ rekürans bağıntısıyla tanımlıdır. Ayrıca; B_n, n Balans sayısı olmak üzere;

$GB_n = B_n - i.B_{n-1}$ ilişkisi mevcuttur.

1) $B_n = \dfrac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta}, \quad \left.\begin{matrix} \alpha = 3+\sqrt{8} \\ ve \\ \beta = 3-\sqrt{8} \end{matrix}\right\} \alpha - \beta = 4\sqrt{2}$

olmak üzere

2) $B_{n-1} = \dfrac{\alpha^{n-1} - \beta^{n-1}}{\alpha - \beta}, \quad \begin{matrix} \alpha = 3+\sqrt{8} \\ \beta = 3-\sqrt{8} \end{matrix},$ 1 ve 2 ifadeleri $GB_n = B_n - i.B_{n-1}$ eşitliğinde yerine yazılırsa;

$$GB_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta} - i.\frac{\alpha^{n-1} - \beta^{n-1}}{\alpha - \beta}$$

elde edilir.

Teorem 4.1.4: GB_n n. Gauss Balans sayısı ve B_n n. Balans sayısı olmak üzere;

$$GB_2 + GB_4 + ... + GB_{2n} = B_n.GB_{n+1}$$

dir.

İspat: $GB_n = B_n - iB_{n-1}$ olduğundan;

$$GB_2 = B_2 - i.B_1$$

$$GB_4 = B_4 - i.B_3$$

$$GB_6 = B_6 - iB_5$$

$$\vdots$$

$$GB_{2n} = B_{2n} - i.B_{2n-1}$$

eşitlikleri taraf tarafa toplanırsa;

$$GB_2 + GB_4 + ... + GB_{2n} = B_2 + B_4 + ... + B_{2n} - i.\left(B_1 + B_3 + ... + B_{2n-1}\right)$$

elde edilir. Burada;

$$B_2 + B_4 + ... + B_{2n} = B_n.B_{n+1}$$

ve

$$B_1 + B_3 + ... + B_{2n-1} = B_n^2$$

olduğundan;

$$GB_2 + GB_4 + ... + GB_{2n} = B_n.B_{n+1} - i.B_n^2$$

$$= B_n\left(B_{n+1} - i.B_n\right)$$

elde edilir.

Burada; $B_{n+1} - i.B_n = GB_{n+1}$ olduğundan;

$$GB_2 + GB_4 + ... + GB_{2n} = B_n.GB_{n+1}$$

elde edilir.

Teorem 4.1.5:

$GB_n, n.$ Gauss Balans Sayısı ve $B_n, n.$ balans sayısı olmak üzere;

$$GB_1 + GB_3 + ... + GB_{2n-1} = B_n.GB_n$$

dir.

İspat: $GB_n = B_n - i.B_{n-1}$ olduğundan;

$$GB_1 = B_1 - i.B_0$$

$$GB_3 = B_3 - i.B_2$$

$$GB_5 = B_5 - i.B_4$$

$$\vdots$$

$$GB_{2n-1} = B_{2n-1} - i.B_{2n-2}$$

eşitlikleri taraf tarafa toplanırsa,

$$GB_1 + GB_3 + ... + GB_{2n-1} = B_1 + B_3 + ... + B_{2n-1} - i.\left(B_0 + B_2 + ... + B_{2n-2}\right)$$

elde edilir.

$$B_1 + B_3 + ... + B_{2n-1} = B_n^2, \quad B_0 + B_2 + ... + B_{2n} = B_n.B_{n+1}$$

ve

$$B_{2n} = B_n.B_{n+1} - B_n.B_{n-1}$$

olduğundan

$$GB_1 + GB_3 + ... + GB_{2n-1} = B_1 + B_3 + ... + B_{2n-1} - i.\left(B_0 + B_2 + ... + B_{2n-2} + B_{2n} - B_{2n}\right)$$

$$= B_n^2 - i.\left(B_n.B_{n+1} - B_{2n}\right)$$

$$= B_n^2 - i.\left(B_n.B_{n+1} - B_n.B_{n+1} + B_n.B_{n-1}\right)$$

$$= B_n^2 - i.B_n.B_{n-1}$$

$$= B_n\left(B_n - i.B_{n-1}\right)$$

elde edilir.

$$B_n - i.B_{n-1} = GB_n$$

olduğundan

$$GB_1 + GB_3 + ... + GB_{2n-1} = B_n.GB_n$$

elde edilir.

Teorem 4.1.6: (Gauss Balans Sayıları İçin Üreteç Fonksiyonu)

Gauss Balans Sayı dizisi;

$GB_0 = i,\ \ GB_1 = 1$ başlangıç koşulları olmak üzere;

$GB_n = 6.GB_{n-1} - GB_{n-2}$ rekürans bağıntısıyla tanımlıdır.

Gauss Balans Sayı dizisi için;

Üreteç fonksiyon $g(x)$ olsun;

$$g(x) = \frac{x + i(1 - 6x)}{1 - 6x + x^2}$$

dir.

İspat: Gauss Balans sayı dizisi için;

Üreteç fonksiyon $g(x)=\sum_{n=0}^{\infty} GB_n x^n$ olsun.

$$g(x)=\sum_{n=0}^{\infty} GB_n x^n = i + x + (6-i)x^2 + (35-6i)x^3 + (204-35i)x^4 + \dots \quad (4.1.1)$$

(4.1.1) eşitliğini sırasıyla $6x$ ve x^2 olarak çarpalım.

$$6x.g(x) = 6xi + 6x^2 + (6-i)6x^3 + (210-36i)x^4 + (1224-210i)x^5 + \dots \quad (4.1.2)$$

$$x^2.g(x) = x^2.i + x^3 + (6-i)x^4 + (35-6i)x^5 + (204-35i)x^6 + \dots \quad (4.1.3)$$

(4.1.1) eşitliği ile (4.1.3) eşitliğini taraf tarafa toplayıp, (4.1.2) eşitliğini çıkaralım;

$$g(x)\left[1-6x+x^2\right] = x + i.(1-6x) + x^2.(6-i-6+i) + x^3(35-6i-36+6i+1) + \dots$$

$$g(x) = \frac{x+i.(1-6x)}{1-6x+x^2}$$

elde edilir.

4.2 Gauss Lucas Balans Sayıları

Tanım 4.2.1: Gauss Lucas Balans sayıları dizisi, başlangıç koşulları $GC_0 = 1-3i$, $GC_1 = 3-i$ olmak üzere

$$GC_{n+1} = 6GC_n - GC_{n-1}$$

indirgeme bağıntısı ile tanımlıdır. Ayrıca

$$GC_n = C_n - iC_{n-1}$$

ilişkisi mevcuttur. GC_n dizisinin bazı elemanları

n	0	1	2	3	…
GC_n	$1-3i$	$3-i$	$17-3i$	$99-17i$	…

Teorem 4.2.1: (Binet Formülü) GC_n, n. Gauss Lucas Balans sayısı olmak üzere

$$GC_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{2} - i\frac{\alpha^{n-1} - \beta^{n-1}}{2}$$

dir. Bu denklemde $\alpha = 3 + \sqrt{8}$ ve $\beta = 3 - \sqrt{8}$ dir.

Teorem 4.2.2: GC_n, n. Gauss Lucas Balans sayısı, $A = \begin{bmatrix} 6 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 6-i & -1 \\ 1 & -i \end{bmatrix}$ ve $C = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ olmak üzere

$$A^n BC = \begin{bmatrix} GC_{n+2} & GC_{n+1} \\ GC_{n+1} & GC_n \end{bmatrix}$$

dir.

İspat:

İspat için tümevarım yöntemini kullanalım:

$n = 1$ için $ABC = (AB)C = \begin{bmatrix} 6 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6-i & -1 \\ 1 & -i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} 99-17i & 17-3i \\ 17-3i & 3-i \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} GC_3 & GC_2 \\ GC_2 & GC_1 \end{bmatrix}$$

$n = k$ için $A^k BC = (A^k B)C = \begin{bmatrix} GC_{k+2} & GC_{k+1} \\ GC_{k+1} & GC_k \end{bmatrix}$ olsun.

$n = k+1$ için $A^{k+1} BC = A(A^k B) = \begin{bmatrix} 6 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} GC_{k+2} & GC_{k+1} \\ GC_{k+1} & GC_k \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} GC_{k+3} & GC_{k+2} \\ GC_{k+2} & GC_{k+1} \end{bmatrix}$$

Teorem 4.2.3: (Cassini Özdeşliği)

$$GC_n^2 - GC_{n+1}GC_{n-1} = -48i$$

dir.

İspat: GC_n, n. Gauss Lucas Balans sayısı, $A = \begin{bmatrix} 6 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 6-i & -1 \\ 1 & -i \end{bmatrix}$ ve $C = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ olmak üzere

$$A^n BC = \begin{bmatrix} GC_{n+2} & GC_{n+1} \\ GC_{n+1} & GC_n \end{bmatrix}$$

olduğundan eşitliğin her iki tarafının determinantı alınırsa

$$GC_n^2 - GC_{n+1}GC_{n-1} = -48i$$

elde edilir.

Teorem 4.2.4 (Üreteç Fonksiyonu)

GC_n, n. Gauss Lucas Balans sayısı olsun. Bu sayılar için $g(x)$ üreteç fonksiyonu

$$g(x) = \frac{1 - 3i + (-3 + 17i)x}{1 - 6x + x^2}$$

dir.

4.3 Gauss Kobalans Sayıları

Tanım 4.3.1: Gauss Kobalans sayıları dizisi, başlangıç koşulları $Gb_0 = -2i$, $Gb_1 = 0$ olmak üzere

$$Gb_{n+1} = 6Gb_n - Gb_{n-1} + 2 - 2i$$

indirgeme bağıntısı ile tanımlıdır. Ayrıca

$$Gb_n = b_n - ib_{n-1}$$

ilişkisi mevcuttur. Gb_n dizisinin bazı elemanları

n	0	1	2	3	4	…
Gb_n	$-2i$	0	2	$14-2i$	$84-14i$	…

Teorem 4.3.1: (Binet Formülü) Gb_n, n. Gauss Cobalans sayısı olmak üzere

$$Gb_n = \left(\frac{\alpha^{2n-1}-\beta^{2n-1}}{4\sqrt{2}} - \frac{1}{2}\right) - i\left(\frac{\alpha^{2n-3}-\beta^{2n-3}}{4\sqrt{2}} - \frac{1}{2}\right)$$

dir. Bu denklemde $\alpha = 1+\sqrt{2}$ ve $\beta = 1-\sqrt{2}$ dir.

Teorem 4.3.2 (Üreteç Fonksiyonu)

Gb_n, n. Gauss Kobalans sayısı olsun. Bu sayılar için $g(x)$ üreteç fonksiyonu

$$g(x) = \frac{-2i + 12xi + (2-2i)\dfrac{x^2}{1-x}}{1-6x+x^2}$$

dir.

4.4 Gauss Lucas Kobalans Sayıları

Tanım 4.4.1: Gauss Lucas Kobalans sayıları dizisi, başlangıç koşulları $Gc_0 = -1 + 7i$ $Gc_1 = 1 + i$ olmak üzere

$$Gc_{n+1} = 6Gc_n - Gc_{n-1}$$

indirgeme bağıntısı ile tanımlıdır. Ayrıca

$$Gc_n = c_n - ic_{n-1}$$

ilişkisi mevcuttur. Gc_n dizisinin bazı elemanları

n	0	1	2	3	4	…
Gc_n	$-1+7i$	$1+i$	$7-i$	$41-7i$	$239-41i$	…

Teorem 4.4.1: (Binet Formülü) Gc_n, n. Gauss Lucas Kobalans sayısı olmak üzere

$$Gc_n = \left(\frac{\alpha^{2n-1}+\beta^{2n-1}}{2}\right) - i\left(\frac{\alpha^{2n-3}+\beta^{2n-3}}{2}\right)$$

dir. Bu denklemde $\alpha = 1+\sqrt{2}$ ve $\beta = 1-\sqrt{2}$ dir.

Teorem 4.4.2: (Üreteç Fonksiyonu)

Gc_n, n. Gauss Lucas Kobalans sayısı olsun. Bu sayılar için $g(x)$ üreteç fonksiyonu

$$g(x) = \frac{-1+7i+(7-41i)x}{1-6x+x^2}$$

dir.

Teorem 4.4.3: $A = \begin{bmatrix} 6 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 6-i & -1 \\ 1 & -i \end{bmatrix}$ ve $D = \begin{bmatrix} 1 & 7 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ olsun. Bu durumda;

$$A^n.B.D = \begin{bmatrix} Gc_{n+2} & Gc_{n+3} \\ Gc_{n+1} & Gc_{n+2} \end{bmatrix}$$

dir.

5. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu çalışmada Fibonacci ve Lucas sayı dizileri temel alınarak ilgili sayıların rekürans bağıntıları, Binet formülleri, Cassini Özdeşliği, üreteç fonksiyonları, Q matrisleri ve daha birçok özellikleri incelenmiş ve çalışılmıştır. Sonraki bölümde Gauss Fibonacci ve Gauss Lucas sayılarının Fibonacci ve Lucas sayıları ile olan ilişkileri çalışılmıştır. Bu sayıların temel özellikleri incelenmiştir. Daha sonra bu sayılar için verilen özdeşlikler Balans ve Kobalans sayılarında da incelenmiştir. Son bölümde ise Gauss Balans, Gauss Kobalans, Gauss Lucas Balans ve Gauss Lucas Kobalans Sayıları tanımlanmış ve bu sayıların rekürans bağıntıları, Balans ve Kobalans sayıları ile olan ilişkileri, Binet formülleri ve ispatlarda çok sık kullanılan Q matrisleri bulunmuş ve çalışılmıştır.

Öneri olarak Gauss Balans sayılarının Gauss Pell sayıları ile olan ilişkileri incelenebilir. Balans ve Kobalans sayılarının tanımlanmış birçok genelleştirmeleri Gauss Balans ve Gauss Kobalans sayıları için uygulanabilirdir.

6. KAYNAKLAR

Asci, M., Gurel, E., "Bivariate Gaussian Fibonacci and Lucas Polynomials", *Ars Combin.,*109, 461-472,(2013).

Asci, M., Gurel, E., “Gaussian Jacobsthal and Gaussian Jacobsthal Lucas Numbers” *Ars Combin*. 111, (2013), 53-63.

Asci, M, Lee, G. Y. “Generalized Gaussian Fibonacci numbers and Sums by Matrix Methods” *Util. Math.* 102, (2017), 349-357.

Asci, M., Gurel, E., “Gaussian Fibonacci and Gaussian Lucas p-Numbers” *Ars Combin.* 132, (2017), 389-402.

A.Behera and G. K. Panda., “On the square root of triangular numbers”, The *Fibonacci Quart*, 37(2):98-105, (1999).

BARBEAU, E. J., “*Pell’s Equation*”, Problem Books in Mathematics, Springer-Verlag, New York, (2003).

Gurel, E., Asci, M., "Some Properties of k–order Gaussian Fibonacci and Lucas Numbers", (in press).

Gurel, E., Asci, M “Some Properties of Bivariate Gaussian Fibonacci and Lucas p-Polynomials” (in press).

G.K. Panda., “Sequence balancing and cobalancing numbers”, *The Fibonacci Quart.*, (p265-271) , (2007).

G.K Panda., “Some fascinating properties of balancing numbers”, Applications of Fibonacci Numbers” Vol.10, Kluwer Academic Pub. (2006)

Horadam, A. F., "A Generalized Fibonacci Sequence",*American Math. Monthly*, 68, 455-459,(1961).

Horadam, A. F., "*Complex Fibonacci Numbers and Fibonacci Quaternions*", *American Math. Monthly*, 70,289-291,(1963).

Jordan, J. H., "*Gaussian Fibonacci and Lucas numbers*", *Fibonacci Quart.,* 3,315-318,(1965).

Koshy, T. "*Fibonacci and Lucas Numbers with Applications*", A Wiley-Interscience Publication, (2001).

Michel, W., *Pell's equation*", (01.06.2017), https://webusers.imj-prg.fr/~michel.waldschmidt/articles/pdf/BamakoPell2010.pdf , (2016).

NAGELL, T., "*Introduction to Number Theory*", Chelsea Publishing Company, New York, (1981).

PEKASİL, M., "*Sürekli Kesirler ve Pell Denklemleri*", Sakarya Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Yüksek Lisans Tezi, Sakarya (2006).

Rout, S. S., "*Some Generalizations and Properties of Balancing Numbers*", Ph.D Thesis, Department of Mathematics National Institute of Technology Rourkela, Rourkela, India (2015).

Ray P. K., "*Balancing and Cobalancing Numbers*", Ph. D Thesis, Department of Mathematics National Institute of Technology Rourkela, Rourkela, India (2009).

ROSEN, H. K., "*Elementary Number Theory And Its Application*, 3d Edition", Addison –Wesley, (1993).

STARK, H., M., "*An Introduction To Number Theory*", Markham Pub. Co., Chicago, (1997).

V.E Hoggatt Jr., "*Fibonacci and Lucas Numbers*", Houghton Mifflin Company, (1969).

7. ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı	: MUSTAFA YILMAZ
Doğum Yeri ve Tarihi	: DENİZLİ, 01.05.1982
Lisans Üniversite	:ATATÜRK ÜNİVERSİTESİ, KAZIM KARABEKİR EĞİTİM FAKÜLTESİ, MATEMATİK ÖĞRETMENLİĞİ
Elektronik posta	: yilmaz_709@hotmail.com
İletişim Adresi	: Selin Yapı Koop. A Blok No: 6 DENİZLİ

Konferans listesi :

•Mustafa AŞCI, Mustafa YILMAZ **"International Conference on Recent Advances in Pure and Applied Mathematics"** 11-15 May 2017, Kuşadası, **TURKEY.**