T.C.
PAMUKKALE ÜNİVERSİTESİ
EĞİTİM BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK VE FEN BİLİMLERİ EĞİTİMİ ANABİLİM DALI
MATEMATİK EĞİTİMİ BİLİM DALI
YÜKSEK LİSANS TEZİ

ORTAOKUL MATEMATİK ÖĞRETMEN ADAYLARININ ALAN VE PEDAGOJİK ALAN BİLGİLERİ ÇERÇEVESİNDE KESİRLERLE ÇARPMA VE BÖLME İŞLEMLERİNİN ÖĞRETİMİNE İLİŞKİN KULLANDIKLARI MODELLER

NUR BANU DURAN

Denizli, 2017

T.C.
PAMUKKALE ÜNİVERSİTESİ
EĞİTİM BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK VE FEN BİLİMLERİ EĞİTİMİ ANABİLİM DALI
MATEMATİK EĞİTİM BİLİM DALI
YÜKSEK LİSANS TEZİ

ORTAOKUL MATEMATİK ÖĞRETMEN ADAYLARININ ALAN VE PEDAGOJİK ALAN BİLGİLERİ ÇERÇEVESİNDE KESİRLERLE ÇARPMA VE BÖLME İŞLEMLERİNİN ÖĞRETİMİNE İLİŞKİN KULLANDIKLARI MODELLER

Nur Banu DURAN

Danışman

Yrd. Doç. Dr. Sibel KAZAK

YÜKSEK LİSANS TEZİ ONAY FORMU

Bu çalışma, Matematik ve Fen Bilimleri Eğitimi Anabilim Dalı Matematik Eğitimi Bilim Dalın'nda jürimiz tarafından yüksek lisans tezi olarak kabul edilmiştir.

İmza

Başkan: Yrd. Doç. Dr. Burçak Boz Yaman ....

Üye: Prof. Dr. Asuman DUATEPE PAKSU ....

Üye: Yrd. Doç. Dr. Sibel KAZAK ....

Pamukkale Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun 15/06/2017 tarih ve 13/5 sayılı kararı ile onaylanmıştır.

Prof. Dr. Şükran TOK

Enstitü Müdürü

ETİK BEYANNAMESİ

Pamukkale Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü, tez yazım kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmasında;

- Tez içindeki bütün bilgi ve belgeleri akademik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- Görsel, işitsel ve yazılı tüm bilgi ve sonuçları bilimsel ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- Başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda ilgili eserlere bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunduğumu,
- Atıfta bulunduğum eserlerin tümünü kaynak olarak gösterdiğimi,
- Kullanılan verilerde herhangi bir tahrifat yapmadığımı,
- Bu tezin herhangi bir bölümünü bu üniversitede veya başka bir üniversitede başka bir tez çalışması olarak sunmadığımı beyan ederim.

İmza

Nur Banu DURAN

TEŞEKKÜR

Araştırmam süresince bana yol gösteren, beni destekleyen danışman hocam Yrd. Doç. Dr. Sibel KAZAK'a teşekkürlerimi sunuyorum. Hazırlamış olduğum "Alan Bilgisi Görüşme Formu" için uzman görüşünü aldığım hocalarıma, çalışmamın yapılmasında bana yardımcı olan, çalışmama gönüllü olarak katılmayı kabul eden öğretmen adaylarına da teşekkür etmek istiyorum.

Tez konumun belirlemesi ve analizlerimin yapılmasına yardımcı olan Aytuğ ÖZALTUN ÇELİK'e teşekkür ederim. Canım sıkıldığında kendimi yanında bulduğum, tez yazmam gereken zamanda beni motive etmek için elinden geleni yapan, geçirdiğim zor zamanlarda evinin kapılarını bana açan, sayemde uykusuz kalan sevgili arkadaşım Zinnet KARAKAŞ'a da çok teşekkür ederim.

Beni bu günlere getiren, her zaman yanımda olan, maddi ve manevi beni her yönden destekleyen, sevgilerini hep hissettiğim çok sevgili annem Hacer DURAN ve babam Mehmet DURAN'a en büyük teşekkürü etmek istiyorum. Ve hayatımda çok sevdiğim birini kaybetme korkusuyla beni tanıştıran, yanında olmaktan büyük keyif aldığım, çocukluğumun oyun arkadaşı, sonrasında da kardeşim olmanın yanısıra bana arkadaşlık, dostluk eden hayatımın en değerli ve vazgeçilmezlerinden biri olan, neşe kaynağımız kardeşim Kübra DURAN'a teşekkür ederim.

İyi ki varsınız…

Nur Banu DURAN

ÖZET

Ortaokul Matematik Öğretmen Adaylarının Alan ve Pedagojik Alan Bilgileri Çerçevesinde Kesirlerle Çarpma ve Bölme İşlemlerinin Öğretimine İlişkin Kullandıkları Modeller

Nur Banu Duran

Bu çalışmada, ortaokul matematik öğretmeni adaylarının kesirlerde model kullanımına yönelik bilgileri alan bilgisi (AB) ve pedagojik alan bilgisi (PAB) bağlamında incelenmektedir. Çalışmanın amacı ortaokul matematik öğretmeni adaylarının kesirlerde model kullanımına yönelik AB'lerini incelemek, kesirlerle çarpma ve bölme işlemlerinde model kullanımına yönelik PAB'larını incelemek ve öğretmen adaylarının kesirlerle çarpma ve bölme işlemlerinde model kullanımına yönelik AB'lerini öğretimlerine nasıl yansıttıklarını incelemektir. Çalışma grubu 2015-2016 öğretim yılında Türkiye'de bir devlet üniversitesinin Matematik Eğitimi Anabilim dalında okuyan ve Özel Öğretim Yöntemleri I ve II derslerini almış dört son sınıf öğretmen adayından oluşmaktadır.

Araştırmada durum çalışması deseni kullanılmıştır. Öğretmen adaylarının kesirlerde model kullanımına yönelik AB'lerini ortaya çıkarmak amacı ile yarı-yapılandırılmış görüşmeler gerçekleştirilmiştir. Görüşmeler veri kaybını engellemek için video kamera ile kayıt altına alınmıştır. Verilerin analizinde içerik analizi kullanılmıştır. Öğretmen adaylarının kesirlerde model kullanımına yönelik AB'leri "verilen kesirleri model ile göstermelerine yönelik AB'leri", "kesirlerin denkliğini model ile göstermelerine yönelik AB'leri", "kesirlerle çarpma işleminde model kullanımına yönelik AB'leri", "kesirlerle bölme işleminde model kullanımına yönelik AB'leri" bağlamında alan modeli, küme modeli ve uzunluk modeli için ayrı ayrı incelenmiştir.

Öğretmen adaylarının kesirlerle çarpma ve bölme işlemlerinde model kullanımına yönelik PAB'larını ortaya çıkarmak için öğretmen adaylarından "6.1.4.4. İki kesrin çarpma

işlemini yapar ve anlamlandırır”, “6.1.4.7. İki kesrin bölme işlemini yapar ve anlamlandırır” kazanımlarına yönelik ders planları hazırlamaları istenmiş ve dersleri gözlemlenmiştir. Veri toplama aracı olarak ders planları ve ders gözlemlerinin kullanılmasının yanı sıra, iki öğretmen adayının hazırlamış olduğu ders notları ve bir öğretmen adayının öğrencilere vermiş olduğu çalışma kağıtları da öğretmen adaylarının PAB’ının incelenmesinde ele alınmıştır. Öğretmenlerin PAB’larını incelemek için Kovarik’in (2008) PAB çerçevesindeki “öğrenci bilgisi” ve “matematiksel temsiller bilgisi” bileşenleri kullanılmıştır. Öğretmen adaylarının PAB’larını ortaya çıkarmak için elde edilen veriler öğrenci bilgisi ve matematiksel temsiller bilgisi bileşenleri için ayrı ayrı analiz edilmiştir.

Öğretmen adaylarının kesirlerle çarpma ve bölme işlemlerinde model kullanımına yönelik AB’lerini öğretimlerine nasıl yansıttıklarını ortaya çıkarmak için AB görüşme formu ve staj okullarında gerçekleştirilen ders gözlemleri birlikte kullanılmıştır. Her bir öğretmen adayının AB’sini öğretimine nasıl yansıttığı ayrı ayrı incelenmiştir.

Çalışmanın sonucunda öğretmen adaylarının kesirlerin ve kesirlerle çarpma ve bölme işlemlerinin temsilinde öncelikle alan modeli kullanma eğiliminde oldukları görülmüştür. Öğretmen adayları alan bilgisi görüşme formunda verilen işlemleri temsil etmede en az uzunluk modelini tercih etmiştir. Öğretmen adaylarından birinin küme modelindeki eş gruplara ayırma fikrine sahip olmadığı görülmüştür. Fakat bu öğretmen adayı ders notunda küme modeli ile temsilde nesneleri payda kadar eş gruba ayırma fikrine sahip olduğunu göstermiştir. Öğretmen adayları derse ön bilgi hatırlatması ile başlamış ve çoğunlukla gerekli hatırlatmaları yapmışlardır. Tüm öğretmen adayları derslerinde çok sayıda soru kullanmışlar, fakat bu sorular öğrencileri yeterince düşünmeye teşvik etmek ve onların fikirlerini ortaya çıkarmak için yeterli olmamıştır. Hiçbir öğretmen adayı dersinde öğrencileri farklı temsiller oluşturmaları konusunda teşvik etmemiş ve sınıfta farklı temsiller oluşturan öğrenciler var ise onları ortaya çıkaramamıştır. Aynı zamanda öğretmen adayları

öğrencileri sadece gözlemleri ve onlara sordukları sorular karşısında elde ettikleri öğrenci cevapları ile değerlendirebilmiştir. Sadece bir öğretmen adayı ders esnasında öğrencilere vermiş olduğu çalışma kağıtlarını ders sonrası inceleyerek öğrencilerin anlamalarını değerlendirebilmiştir. Doğal sayı ile kesrin çarpımında sadece iki öğretmen adayı alan modelinin yanı sıra küme modeli kullanmıştır. Bir öğretmen adayı ise iki kesrin çarpımında uzunluk modeli kullanmıştır. Bu öğretmen adayı hazırlamış olduğu notlarda iki kesrin çarpımında küme modeli ile temsile yer vermesine rağmen öğretiminde küme modelini hiç kullanmamıştır. Bir diğer öğretmen adayı da iki kesrin çarpımını ders notlarında uzunluk modeli ile de temsil ederken öğretimde sadece alan modeli kullanımına yer vermiştir. Kesirlerle bölme işleminde öğretmen adayları tarafından sadece alan modeli kullanılmıştır. Öğretmen adaylarının alan bilgisi görüşme formundan elde edilen verileri ve gözlem verileri karşılaştırıldığı zaman kesirlerle çarpma ve bölme işlemlerinde model kullanımına yönelik AB'lerinin sınıf içi öğretimlerinde etkili olduğu sonucuna ulaşılmıştır.

Anahtar kelimeler: alan bilgisi, pedagojik alan bilgisi, kesirlerde model kullanımı, öğretmen adayları, kesirlerle çarpma ve bölme işlemleri

ABSTRACT

Models Used by Preservice Middle School Mathematics Teachers for Teaching Multiplication and Division of Fractions Within the Scope of Content Knowledge and Pedagogical Content Knowledge

Nur Banu Duran

In this study, preservice middle school mathematics teachers' knowledge for the use of models in fractions is examined in the context of content knowledge (CK) and pedagogical content knowledge (PCK). The purpose of the study is to examine the CK of preservice middle school mathematics teachers' for the use of models in fractions, the PCK of preservice teachers' for the use of models in multiplication and division of fractions and how they reflect the CK for the use of models in multiplication and division of fractions on their teaching. The participants of the study are four preservice teachers who are in their senior year in the mathematics education program at a state university in Turkey during the academic year of 2015-2016 and completed the Special Teaching Methods I and II courses.

In the study, case study design was used. Semi-structured interviews were conducted with the aim of revealing the CK of the preservice teachers' for the use of models in fractions. Interviews were recorded with a video camera to prevent data loss. To analyze the data, content analysis technique was used. The CK of the preservice teachers' for the use of models in fractions were analyzed seperately in the context of "CK for demonsrate given fractions with a model" "CK for demonstrate the equivalence of fractions with a model", "CK for the use of models in multiplication of fractions" and "CK for the use of models in division of fractions" for area model, set model and length model.

In order to reveal the PCK for the use of models in multiplication and division of fractions, preservice teachers were asked to prepare lesson plans for the following learning outcomes "students multiply two fractions and make sense of the multiplication of two

fractions” and “students devide two fractions and make sense of the division of two fractions” and their teaching in classroom was observed. In addition to the use of lesson plans and classroom observations as data collection tools, lecture notes that were prepared by two preservice teachers and worksheets that were given to the students by a preservice teacher were also analyzed to examine the PCK of preservice teachers’. The PCK components, "student knowledge" and "mathematical representation knowledge", in Kovarik's framework were used to examine the preservice teachers’ PCK. The data collected to reveal the PCK were analyzed seperately for the “student knowledge” and “mathematical representations knowledge” components.

To examine how the preservice teachers’ reflect their CK for the use of models in multiplication and division of fractions on their teaching, both the interviews and classroom observations in teaching practice schools were used. How each preservice teacher reflects the CK on their teaching was examined seperately.

The findings of the study showed that the preservice teachers’ tended to use area model initially for the representations of fractions and multiplication and division of fractions. The length model was the least preferred way of representating operations with fractions during the interviews. It was found that one of the preservice teachers did not have the idea of separation into equivalent groups in the set model. However, this preservice teacher’s lecture notes showed that he had the idea of separation into equivalent groups as denominator in the representation with the set model. All preservice teachers began their teaching by eliciting students’ prior knowledge and usually called students’ attention to the necessary concepts and ideas. They allposed a lot of questions during their teaching, but these questions were not adequate to encourage students to think and to bring out their ideas. None of the preservice teachers encouraged students to make different representations, and if there were students who created different representations during the class, they could not

detect them. Moreover, preservice teachers tended to assess their students' understanding only through observations and student responses they had received in response to questions they asked during the class. Only one preservice teacher was able to assess students' understandings after the class by examining the student responses on the worksheet given during the class. When multiplying a fraction by a natural number, only two preservice teachers used the set model as well as the area model. Also only one preservice teacher used the length model in the multiplication of two fractions. Although this preservice teacher included representation of the multiplication of two fractions using the set model in his lecture notes, he never used it during his teaching. While another preservice teacher also represented the multiplication of two fractions with the length model in his lecture notes, he used only the area model during his teaching. Solely the area model was used by the preservice teachers in division of fractions. When the preservice teachers' CK and the observations of their teaching were compared, it was suggested that the CK for the use of models in fractions was effective in classroom teaching.

Keywords: content knowledge, pedagogical content knowledge, the use of models in fractions, preservice teachers, multiplication and division of fractions

İÇİNDEKİLER

TABLOLAR LİSTESİ

ŞEKİLLER LİSTESİ

BİRİNCİ BÖLÜM: GİRİŞ

Eğitimin kalitesini doğrudan etkileyen faktörlerden birinin öğretmen ve öğretmen niteliği olduğunu söylemek mümkündür. Öğretmenlerin sahip olduğu niteliklerin bu öneminden dolayı dünyanın birçok ülkesinde öğretmenlerin niteliğini arttıracak eğitim reformları gerçekleştirilmiş ve bu doğrultuda öğretmenlerde bulunması gereken niteliklere ilişkin yapılan çalışmalarda bir artış görülmüştür (Bolat ve Sözen, 2009; Meriç ve Tezcan, 2005). Yapılan çalışmalar doğrultusunda, öğretmenlerin öğrenme ve öğretme sürecinde etkili olmasını sağlayan yeterliliklerini belirleyen en önemli şey sahip oldukları bilgileridir. İyi bir öğretmende olması gereken yeterlilikler dikkate alındığında alan bilgisinin (AB) son derece önemli olduğu ifade edilmektedir (Tanışlı, 2013). Öğrencilerin öğrenmelerine yönelik uygun etkinliklerin seçimi, öğrencilerin ne öğrendiklerini değerlendirme gibi birçok öğretim faaliyeti öğretmenlerin sahip oldukları AB'leriyle ilişkilidir (Ball ve McDiarmid, 1990). Ball (1990) öğretmen eğitiminde AB gelişimine önem verilmesi gerektiğini ifade etmiştir.

Öğretmenlerin konuyu öğretmesinde AB'nin çok önemli bir yeri olmasının yanında sadece AB konuyu tam olarak öğretebilmek için yeterli olmamaktadır (Kahan, Cooper ve Bethea, 2003) ve öğretmenin sahip olduğu AB'sini öğretimde en etkili şekilde kullanması gerekmektedir. Bu nedenle de öğretmenlerin AB'leri yanında pedagojik alan bilgisine (PAB) de sahip olmaları önem taşımaktadır (Çelikten, Şanal ve Yeni, 2005). Bu noktadan yola çıkarak pek çok araştırmacı öğretmenlerin AB'lerini öğretimlerine nasıl yansıttıklarına odaklanmışlardır (Cankoy, 2006; Hill, Ball ve Schilling, 2008; Hill, Rowan ve Ball, 2005; Shulman, 1986, 1987).

Shulman (1986) "öğretmenin ne bilmesi gerekir?", "öğretmen öğretimi gerçekleştirirken ne yapmalıdır?" ve "öğretmenin sahip olması gereken bilgi türleri nelerdir?" sorularına cevap vermek amacıyla öğretmen bilgisi üzerinde çalışmalar yapmış ve öğretmen bilgisini konu alan bilgisi, pedagojik alan bilgisi ve öğretim programı bilgisi olmak üzere üç kategoride ele almıştır. PAB ilk olarak Shulman (1986) tarafından ortaya atılmıştır. Shulman (1987) öğretmen bilgisi çerçevesini genişleterek öğretmen bilgisi için yedi farklı kategoriden bahsetmiştir. Bunlar; alan bilgisi, pedagojik alan bilgisi, öğretim programı bilgisi, genel pedagoji bilgisi, öğrenciler ve özellikleri hakkında bilgi, eğitimsel bağlam bilgisi, eğitsel olarak ulaşılmak istenen sonuçların, amaçların, değerlerin ve bunların felsefi ve tarihsel bilgisidir. Alan bilgisi, öğretmenin alanındaki kavramların doğru ve yanlışlığını, geçerlik ve geçersizliğini saptamada kullanılan yöntemler hakkındaki bilgisidir (Shulman, 1987). Pedagojik alan bilgisi ise Shulman (1987) tarafından alan bilgisi ile pedagojik bilginin kesiştiği ve bu ikisi arasında köprü görevi gören bir bilgi türü olarak ifade edilmektedir.

> Pedagojik alan bilgisi içeriğin öğrenenler için daha anlaşılır olmasını sağlamak amacıyla konu içeriğini gösterme ve formüle etme yollarıdır. Pedagojik alan bilgisi, ayrıca, neyin belirli konuların öğrenimini kolay ya da zor hale getirdiğini anlamayı, farklı yaş ve farklı alt yapılara sahip öğrencilerin öğretilen konu ve derslerde öğrenme ortamına gelirken getirmiş oldukları görüşleri ve öngörüşlerini içermektedir (Shulman, 1986, s. 9).

Birçok çalışmada, öğretmenin AB'sinin ve PAB'ın etkili öğretim yapılabilmesi için önemli olduğu vurgulanmaktadır (Ball, 1988, 1990; Davis ve Simmt, 2006; Erdem ve Soylu, 2013; Gökkurt, Şahin, Soylu ve Soylu, 2013; Rowan, Chiang ve Miller, 1997; Shulman, 1986, 1987).

Kesirlerin öğretimi senelerdir dünya çapında matematik öğretmenleri ve eğitim araştırmacılarının ilgisini çekmeye devam etmektedir (Cramer, 2002; Freiman ve Volkov, 2004'den akt. de Castro, 2008). Cebir, olasılık, oran ve orantı gibi öğrenme alanları için bir temel teşkil ettiği için (Van de Walle, Karp ve Bay-Williams, 2013) öğrenilmesi ve öğretilmesi önemli bir konu olarak karşımıza çıkan kesirler konusunda öğretmenlerin yeterli bir AB'ye ve PAB'a sahip olması önem taşımaktadır.

Kesirler bu kadar önemli olmasına rağmen öğrencilerin en çok zorlandıkları, birçok kavram yanılgısı ve hataya sahip oldukları konulardan bir tanesidir (Aksu, 1997; Behr, Lesh, Post ve Silver,1983; Bezuk ve Bieck, 1993; Charalambous ve Pantazi, 2005; de Castro, 2008; Ersoy ve Ardahan, 2003; Gökkurt ve diğ., 2013; Haser ve Ubuz, 2003; Işık, 2011; Işık ve Kar, 2012; Kocaoğlu ve Yenilmez, 2010; Mcleod ve Newmarch, 2006; Moss ve Case, 1999; Olkun ve Toluk-Uçar, 2012; Pesen, 2007; Soylu ve Soylu, 2005; Stafylidou ve Vosniadou, 2004; Şiap ve Duru, 2004; Tirosh, 2000; Toluk-Uçar, 2009; Ünlü ve Ertekin, 2012; Yim, 2010). Kesir kavramı ve kesirlerle işlemler konusunda sadece öğrenciler zorluklara sahip değildir. Yapılan araştırmalar öğrenciler dışında öğretmen ve öğretmen adaylarının da kesir kavramı ve özellikle kesirlerle bölme işlemine yönelik güçlüklere sahip olduğunu göstermektedir (Arslan-Kılcan 2006; Ball, 1990; Işıksal, 2006; Işıksal ve Çakıroğlu, 2011; İpek, Işık ve Albayrak, 2005; Li ve Huang, 2008; Li ve Kulm, 2008; Lo ve Luo, 2012; Ma, 1999; Özel, 2013; Rizvi ve Lawson, 2007; Simon, 1993; Soylu ve Soylu, 2005; Thompson, 1993; Tirosh, 2000; Zembat, 2007).

Kesir konusunun iyi öğrenilmesi ileri düzeydeki matematik konularının daha rahat anlaşılabilmesi adına önem taşıdığından (Alacaci, 2014) kesirlerin öğretilmesi konusunda öğretmenlere büyük sorumluluklar düşmektedir. Öncelikle öğretmenlerin kesirler konusundaki AB'lerinin eksiksiz olması gerekmektedir. Öğretmenlerin derste öğrencilere yönelttiği sorular, uyguladığı etkinlikler güçlü bir AB'ye sahip olmasını gerektirmekle beraber güçlü bir PAB'a sahip olmayı da gerektirmektedir (Even, 1989). PAB doğrudan AB ile ilişkilidir. Çünkü öğretmenin kavramsal açıdan doğru temsiller oluşturabilmesi için öncelikle kendisinin bu kavram ya da işlemleri kavramsal düzeyde anlaması gerekmektedir (Borko ve diğ., 1992; Ma, 1999; McDiarmid, Ball ve Anderson, 1989). Fakat yapılan çalışmalar öğretmen adaylarının kesirler konusundaki PAB'larının yeterli düzeyde olmadığını göstermektedir (Aksu ve Konyalıoğlu, 2015; Chestnut ve Andrews, 2007;

Gökkurt ve diğ., 2013; Sezer, 2012; Themane, 2008). Öğretmen adayları kesirlerde çarpma ve bölme işlemlerinin altında yatan mantıktan yoksun olarak verilen işlemleri ters- çevir çarp algoritması ve çarpma algoritması kullanılarak yapmakta ve işlemlerin neden bu şekilde yapıldığını açıklayamamaktadırlar (Arslan-Kılcan, 2006; Borko ve diğ., 1992; Li ve Smith, 2007; Özel, 2013).

Kesirlerle çarpma işlemini yapmak için öğrencilere geleneksel olarak sadeleştirme algoritması (sadeleştir ve çarp) öğretilirken, ortaokul düzeyindeki matematiğin en zor konularından biri olarak ifade edilen kesirlerle bölme işlemi (Ma,1999) için bölenin ters çevrilmesi ve işlemin çarpmaya dönüştürülmesi işleminin uygulanması istenmektedir. Bununla birlikte birçok öğrenci, kesirlerle çarpma ve bölmenin altında yatan mantığı anlamamaları nedeni ile hatalarını düzeltip, karışıklıklarını giderememektedirler (de Castro, 2004; NCTM 2000; Tirosh, 2000). Kesir kavramının oldukça soyut bir kavram olması (Pesen, 2007) ve yürütülen çok sayıda çalışmada öğrencilerin kesir kavramını ve bu kavramla ilgili diğer işlemleri anlamada güçlük çektiklerinin belirlenmesi bu kavramı öğretmede farklı ve etkili yöntemler kullanmayı gerekli kılmaktadır. Ortaokul öğrencileri düşünüldüğü zaman bir somutlaştırma aracı olan model kullanımının kesirleri kavramsal olarak öğretmede etkili bir yöntem olabileceği düşünülmekte (Erdem, Gökkurt, Şahin, Başıbüyük ve Soylu, 2015) ve yapılan çok sayıda çalışmada, öğrenme ve öğretmede güçlüklerin yaşandığı kesirlerin öğretiminde model kullanılması gerektiği vurgulanmaktadır (Ball,1993; Behr ve diğ., 1983; İpek, Işık ve Albayrak, 2005; Lamon, 1996; Parmar, 2003; Toluk-Uçar, 2009).

5-8 Matematik Dersi Öğretim Programı (Millî Eğitim Bakanlığı- MEB, 2013) incelendiğinde kesirler konusuna ait kazanımlarda model kullanımına yer verildiği görülmektedir. Aynı zamanda Amerika Birleşik Devletleri'inde de okulda kesir kavramının öğretiminde model kullanımı tavsiye edilmektedir (Common Core State Standards for

Mathematics ([CCSSM], 2010). Model, “bir matematiksel düşünce veya problem durumunu temsil eden göreceli olarak daha statik bir yapı”dır (Bayazit, Aksoy ve Kırnap, 2011, s.2498). Lesh ve Carmano (2003) bir matematik modelinin bilişsel ve kavramsal bileşenlerden oluştuğunu ifade etmektedir. Bir problem durumu veya matematiksel bir kavrama ilişkin bireyin sahip olduğu algı ve düşüncelerin tamamı bireyin bu duruma ilişkin bilişsel modelini oluştururken, bu algı ve düşüncelerin dış dünyaya aktarılmasında kullanılan semboller, cebirsel ifadeler, şekil, şema ve grafik gibi temsillerden oluşan yapılar bireyin mevcut durumuna ilişkin kavramsal modelini oluşturmaktadır. Bilişsel modeller insan zihniyle daha yakından alakalı olması ve direkt olarak gözlemlenemediği için içsel temsiller, kavramsal modeller ise beş duyuyla algılanabilir olduğu için dışsal temsiller olarak görülebilmektedir. Bu açıdan matematiksel bir düşüncenin teknoloji ortamında oluşturulmuş animasyonunun, geometrik kavramların temsili için katı cisimlerin, değişkenler arası ilişkileri izah etmek için kullanılan grafikler, güncel yaşam koşullarını çağrıştıran yapılar ve analojiler gibi sözel betimlemeler ile bunların anlaşılmasında sergilenen düşünce ve yaklaşımların birer model olarak kabul edilebileceği belirtilmektedir (Bayazit ve diğ., 2011). Çalışmada model kavramı bilişsel ve kavramsal boyut ayrımına gidilmeden daha genel bir yaklaşımla ele alınmaktadır. Model, “matematiksel düşünceleri açıklamak ve temsil etmek için gösterimlerden oluşan yapılar ve bu yapıların anlaşılması ve yorumlanmasında sergilenen düşüncelerin birleşiminden oluşan bir sistem” olarak kabul edilmektedir (Bayazit ve diğ., 2011, s. 2498). Van de Walle ve diğerleri (2013) tarafından model denildiğinde bahsedilen şeyin kavramı temsil eden ya da kavram adına üzerine ilişki yüklenebilen herhangi bir nesne, resim veya çizim olduğu ifade edilmektedir. Model ve modelleme terimlerinin hem matematiği modelleme (modeling mathematics) hem de matematiksel modelleme (mathematical modeling) anlamlarında kullanıldığı görülmektedir (Cirillo, Pelesko, Felton-Koestler ve Rubel, 2016). Bu çalışmada ise matematiği modelleme anlamı üzerine odaklanılmıştır. Matematiği modelleme, matematiksel kavram veya fikirleri iletmek için matematiğin temsillerini kullanmayı ifade etmektedir. Matematiği modellemenin ana özelliği sürecin gerçek dünyadan ziyade matematiksel dünyada başlamasıdır (Cirillo ve diğ., 2016). Matematiği modellemede modeller matematiksel fikirleri temsil eden somut nesneler, resimler ve bilgisayar uygulamalarını içermektedir (Phillips, 2016). Gilbert, Boulter ve Elmer (2000) tarafından model bir fikir, bir obje veya bir olayın görselleştirilmesi olarak tanımlanmaktadır. Dorin, Dewin ve Gabel (1990) ise modeli doğrudan deneyim kazanılamayan veya görülemeyen şeyleri anlamaya yardımcı olan zihinsel resimlemeler olarak tanımlamaktadırlar.

Genel olarak ortaokul öğrencilerine kesirleri öğretmede üç farklı model ortaya koyulmaktadır. Bu modeller bölge veya alan modeli, uzunluk modeli ve küme modelidir (Van de Walle ve diğ., 2013). Bölge ya da alan modelinde daire, dikdörtgen ve üçgen gibi basit geometrik şekiller kullanılmakta ve bu şekiller parça-bütün anlamına gelecek şekilde eşit parçalara bölünüp seçilen kısımlar ayrılarak kesir gösterilmektedir (Alacaci, 2014). Bölge/alan modellerine dairesel pasta kısımları, dikdörtgensel bölgeler, geometri tahtasında dörtte birler, kareli veya noktalı kâğıtta çizimler, örüntü blokları örnek olarak verilebilir. Uzunluk modelinde uzunluklar ve ölçümler karşılaştırılmaktadır (Van de Walle ve diğ., 2013). Uzunluk modellerine örnek olarak kesir çubukları, Cuisenaire çubukları, sayı doğrusu, katlanmış kâğıt şeritler verilebilir. Küme modellerinde bütün bir nesneler kümesi olarak anlaşılarak bu bütünün alt kümeleri de kesirsel parçaları oluşturmaktadır (Van de Walle ve diğ., 2013). Örneğin, 12 tane oyuncak araba bir bütünü oluşturuyorsa dört tane oyuncak arabanın bütünün $\frac{1}{3}$’ini temsil ettiği söylenebilir. Söz konusu tez çalışmasında Van de Walle ve diğerlerinin (2013) model tanımı baz alınarak kesirleri öğretmede kullanılan alan, küme ve uzunluk modelleri esas alınmıştır.

Cramer ve Henry (2002) tarafından yapılan çalışma kesir etkinliklerinde model kullanımının önemini göstermesi bakımından önemlidir. Model kullanımı sonucu öğrenciler kesirlerde sayı duyusunu geliştirmişlerdir. İpek ve diğerleri (2005) kesirler ve kesirlerde işlemler konusunun öğretiminde model kullanımının önemine dikkat çekmektedirler. Baykul (2009) da kesir sayılarıyla ilgili kavramların öğretiminde model kullanılması gerektiğini belirtmektedir. Kesir kavramı ve kesirlerle yapılan işlemlerin izahında model kullanılması öğrencilerin sembolik gösterimler ile bu gösterimlerin altında yatan anlamları ilişkilendirmelerine imkân tanıyarak bir tür ilişkisel bilgi geliştirmelerini sağlayacaktır (Skemp, 1987). Model kullanımının matematiksel kavramların anlamlı bir şekilde öğrenilmesine katkı sağlayacağı, bilgileri zihinde tutmayı kolaylaştıracağı, motivasyonu arttıracağı, öğrencilerin matematiğe karşı olumlu tutum geliştirmelerini sağlayacağı ve günlük yaşam ile matematik arasında bağlantı kurmalarını sağlayacağı düşünceleri ile önemli olduğu ifade edilmektedir (Blum, 1993; Blum ve Ferri, 2009; Zbiek, 1998). Aynı zamanda matematik öğretiminde model kullanımının öğrencilerde iletişim becerilerini geliştirmek ve matematiksel dili etkili bir şekilde kullanmalarını sağlamak gibi önemli işlevlere sahip olduğu da belirtilmektedir (Bayazit ve diğ., 2011).

Yukarıda ifade edildiği gibi kesirler konusunda model kullanımının taşıdığı önem dikkate alınarak bu çalışmada ortaokul matematik öğretmeni adaylarının alan ve pedagojik alan bilgileri çerçevesinde kesirlerle çarpma ve bölme konularının öğretilmesinde kullandıkları modeller incelenmektedir.

1.1. Problem Durumu

1.1.1. Araştırma problemi

Ortaokul matematik öğretmeni adayları alan ve pedagojik alan bilgileri çerçevesinde kesirlerle çarpma ve bölme işlemlerinin öğretilmesinde modelleri nasıl kullanmaktadırlar?

1.1.2. Alt problemler

1. Ortaokul matematik öğretmeni adaylarının kesirlerde model kullanımına yönelik alan bilgileri nasıldır?

2. Ortaokul matematik öğretmeni adaylarının kesirlerle çarpma ve bölme işlemlerinde model kullanımına yönelik pedagojik alan bilgileri nasıldır?

3. Ortaokul matematik öğretmeni adayları kesirlerle çarpma ve bölme işlemlerinde model kullanımına yönelik alan bilgilerini öğretimlerine nasıl yansıtmaktadırlar?

1.2. Araştırmanın Amacı

Çalışmanın amacı ortaokul matematik öğretmeni adaylarının kesirlerde model kullanıma yönelik AB'lerini incelemek, kesirlerle çarpma ve bölme işlemlerinde model kullanımına yönelik PAB'larını incelemek ve kesirlerle çarpma ve bölme işlemlerinde model kullanımına yönelik AB'lerini öğretimlerine nasıl yansıttıklarını incelemektir.

1.3. Araştırmanın Önemi

Kesir günlük hayatta sıklıkla karşımıza çıkan ve kavramsal olarak oldukça zengin bir yapıya sahip olan bir konudur (Alacaci, 2014). Okul matematiğine baktığımızda kesirlerin sadece sayılarla ilgili alanlarda değil diğer konularda da karşımıza çıktığını görmekteyiz. Olasılık hesaplarken veya grafik çizerken kesirlerden faydalanılmaktadır. Sekizinci sınıftan itibaren rasyonel sayıların genelleştirilmiş halini ifade eden cebirsel kesirlerle işlemlerde de basit kesir kuralları kullanılmaktadır. İleri matematik konuları olan polinomlar, türev ve integral gibi konularda da cebirsel kesirler sıklıkla kullanılmaktadır (Alacaci, 2014). Redmond (2009) tarafından da kesirlerin cebir gibi ileri düzeydeki konuların öğretilmesinde önemli bir yere sahip olduğu belirtilmektedir.

Kesirler sahip olduğu bu cebirsel zenginlik ve karmaşıklıktan dolayı matematik derslerinde öğretimi dikkat ve itina isteyen bir konudur. Kesirlerin ve ilgili kavramların iyi anlaşılması ve kesirlerle işlemleri anlayarak hızlı yapabilme becerilerinin kazandırılması konuyu öğrenciler için anlamlı hale getirecektir. Ayrıca öğrencilerin günlük hayatta ve diğer derslerde kesir kullanımında başarılı olmalarına katkı sağlayacak ve ileri matematik konuları için sağlam bir temel oluşturmalarına yardımcı olacaktır (Alacaci, 2014).

Yapılan çalışmalar öğrencilerin kesirler ve kesirlerle işlem konularında birçok zorluk ve kavram yanılgısına sahip olduklarını göstermektedir (Charalambous ve Pantazi, 2005; Haser ve Ubuz, 2003; Işık, 2011; Işıksal, 2006; Kocaoğlu ve Yenilmez, 2010; Ma, 1999; Mcleod ve Newmarch, 2006; Pesen, 2007; Stafylidou ve Vosniadou, 2004; Soylu ve Soylu, 2005; Tirosh, 2000; Yim, 2010). Bu kavram yanılgılarının önemli bir kısmının tamsayılarda geçerli olan gözlemlerin öğrencilerce kesirlere genelleştirilmesinden kaynaklandığı görülmektedir (Biber, Tuna ve Aktaş, 2013; Haser ve Ubuz, 2003; McLeod ve Newmarch, 2006; Soylu ve Soylu, 2005; Stafylidou ve Vosniadou 2004; Stavy ve Tirosh, 2000). Örneğin, Biber ve diğerleri (2013) yaptıkları çalışma sonucunda öğrencilerden verilen kesirleri sıralamalarını istediklerinde öğrencilerin pay ve paydayı ayrı sayılar olarak ele alıp kendi aralarında sıralama yaptıklarını, yine kesirlerde toplama ve çıkarma işlemlerinde de pay ve paydayı ayrı ayrı toplayıp çıkardıklarını görmüşlerdir. Stavy ve Tirosh (2000) yaptıkları çalışmalarında öğrencilere $\frac{4x-16}{4}$ ifadesinin $\frac{6x-24}{6}$ ifadesinden büyük mü, küçük mü, yoksa iki ifadenin eşit mi olduklarını sordukları zaman birçok öğrencinin ikinci kesirde yer alan sayıların daha büyük olması nedeniyle ikinci ifadenin büyük olduğunu belirttiklerini ifade etmişlerdir. Yine McLeod ve Newmarch (2006) öğrencilere beş kesir vererek sıralama yapmalarını istedikleri çalışmalarında öğrencilerin pay ve payda ilişkisine odaklanmak yerine sadece bir bileşeni dikkate alarak sıralama yaptıklarını görmüşlerdir.

Öğrencilerin kavramlarla ilgili kısıtlı ve yanlış bilgiler edinmeleri ve çok sayıda kavram yanılgısına sahip olmalarının nedeni olarak matematiksel bilgi ve bu bilgileri edinme sürecinin sağlıklı bir şekilde işletilmemesi görülebilir (Bayazit ve diğ., 2011). Öğrencilerin bilgi edinme sürecini sağlıklı yürütebilmeleri, yanılgılardan arındırılmış, içerik açısından zengin ve doğru bilgi edinebilmeleri için öğretmenlerin öğrencilere gerekli rehberliği yapmaları gerekmektedir. Bu rehberliğin etkili bir şekilde yapılabilmesi için ise öğretmenlerin birtakım yeterliliklere sahip olmaları gerekmektedir (Bayazit ve diğ., 2011). Bu yeterlilikler araştırmacılar tarafından farklı şekillerde açıklanmıştır (An, Kulm ve Wu, 2004; Ball ve Bass, 2000; Ball, Thames ve Phelps; Banks, Leach ve Moon, 2005; Hashweh, 2005; Kennedy, Ball ve McDiarmid, 1993; Lannin ve diğ., 2013; Leinhard ve Smith, 1985; Shulman, 1986, 1987). Shulman'a (1986) göre bir öğretmenin sınıf içi yeterlilikleri alan bilgisi, pedagojik bilgi ve pedagojik alan bilgisi ile ilişkilidir. AB ise PAB'ı doğrudan etkilemektedir (Even, 1993; Gökkurt, Şahin ve Soylu, 2012).

Modellerin uygun biçimde kullanılması öğrencilerin kafalarını karıştıran noktaların aydınlığa kavuşması hususunda yardımcı olabilmektedir. Farklı modeller kullanmak öğrenciler açısından daha faydalı olacaktır, çünkü bir öğrenci için bir model anlamsız olabilirken diğer model anlamlı gelebilmektedir. Uygun ve çeşitli model kullanımı öğrencilerin kesir anlayışlarını genişletme ve derinleştirmeye yardımcı olmaktadır (Van de Walle ve diğ., 2013).

Sahip olduğu bütün bu öneminden dolayı kesirlerin öğretim sürecinde model kullanımı gerekliyken öğretmenlerin derslerinde model kullanımına yer vermedikleri (Van de Walle ve diğ., 2013) ve model kullanımı konusunda yeterli olmadıkları (Bayazit ve diğ., 2011) görülmektedir. Seçilmiş modellerin öğrencilerin seviyelerine uygun olması model kullanılarak gerçekleştirilen bir öğretimde dikkate alınması gereken önemli noktalardan biridir. Öğretmenin yeterli AB ve PAB'a sahip olması böyle bir öğretimi gerçekleştirmede önemlidir (Erdem ve diğ., 2015). Başka bir ifadeyle, öğretmenin yeterli işlemsel ve kavramsal bilgiye sahip olması ve bu bilgiyi etkili bir şekilde öğrencilere aktarması gerekmektedir Model kullanımındaki başarı öğretmenlerin AB'leriyle ve PAB'larıyla son derece ilişkili olduğu ve öğretim sürecinin niteliğini etkilediği için incelenmeyi gerektirmektedir.

Yapılan bu çalışma öğretmenlerin ve öğretmen adaylarının da özellikle zorlandıkları, kavram yanılgıları ve sınırlılıklara sahip oldukları bölme (Ball, 1990; Borko ve diğ., 1992; Işıksal, 2006; İpek ve diğ., 2005; Li ve Huang, 2008; Li ve Kulm, 2008; Ma, 1999; Redmond, 2009; Tirosh, 2000; Yim, 2010; Zembat, 2007) ve çarpma işlemlerine (Azim, 1995; Cluff, 2005; Işıksal, 2006; Işıksal ve Çakıroğlu, 2011; Noh ve Sabey, 2014) ait öğretmen adaylarının kullandıkları modelleri AB'leri ve PAB'ları açısından incelemiş olması dolayısıyla önemlidir.

Öğretmen adayları gelecekte öğretmen olarak eğitim sürecinin aktif olarak içinde yer alacak olmaları nedeniyle kesirler ve kesirlerle işlemler de dahil öğretecekleri bütün konulara dair kapsamlı bir AB ve PAB'a sahip olmalıdırlar. Yapılacak olan çalışma öğretmen adaylarının hem bir deneyim yaşamalarını sağlama hem de kendi öğretimleri hakkında bir fikir sahibi olmalarını sağlamak açılarından önemlidir.

Öğretmen adaylarının kesirlerle çarpma ve bölme ile alakalı AB'lerini ve PAB'larını inceleyen bazı çalışmalar (Aksu ve Konyalıoğlu, 2015; Chinnappan ve Desplat, 2012; Işıksal, 2006; Newton, 2008) alanyazında mevcuttur. Ancak model kullanımını derinlemesine inceleyen bir araştırmaya rastlanmamasından dolayı söz konusu çalışma bu konuda bir bakış açısı kazandırması ve daha sonradan yapılacak olan çalışmalara yol gösterici bir nitelik taşıması bakımından önemlidir.

1.4. Araştırmanın Varsayımları

1. Araştırmanın uygulama sürecinde, öğretmen adaylarının bilgi, düşünce ve deneyimlerini sürece yansıttıkları varsayılmaktadır.

2. Alan bilgisi formu sonucu elde edilen verilerin öğretmen adaylarının kesirlerde model kullanımına yönelik AB'lerini gerçek ölçüde yansıttığı varsayılmaktadır.

3. Ders gözlemleri, ders planları, ders notları ve çalışma kağıtları ile çalışma kağıtları üzerine yapılan görüşme sonucu elde edilen verilerin öğretmen adaylarının kesirlerle çarpma ve bölme işlemlerinde model kullanımına yönelik PAB'larını gerçek ölçüde yansıttığı varsayılmaktadır.

1.5. Araştırmanın Sınırlılıkları

1. Araştırma süresi 2015-2016 eğitim-öğretim yılı ile sınırlıdır.

2. Araştırma bir devlet üniversitesindeki dört son sınıf öğretmen adayı ile sınırlıdır.

3. Araştırmanın katılımcılarından birisi yabancı öğrencidir.

4. Araştırmada toplanan veriler alan bilgisi görüşme formundan elde edilen veriler, öğretmen adaylarının hazırlamış oldukları ders planları, ders notları, çalışma kağıtları, ders gözlemleri ve araştırmacının gözlemleri ile sınırlıdır.

5. Öğretmen adayları kesirlerle çarpma ve bölme işlemlerine yönelik kazanımları öğrenciler kesirlerle çarpma ve bölme işlemlerini işlemsel olarak öğrendikten sonra model kullanarak tekrar işlemişlerdir.

1.6. Tanımlar

Alan bilgisi: Bir konu ile ilgili temel prensiplerin, kuralların, kavramların organizasyonunun bilinmesi ve sözdizimsel yapılar bilgisini ifade etmektedir (Shulman, 1986, s. 9).

Kesirlerde alan bilgisi: Öğretmen adaylarının kesirlerde alan modeli, uzunluk modeli ve küme modeli kullanımına ilişkin sahip oldukları bilgi olarak ele alınmıştır.

Pedagojik alan bilgisi: Konu ve kavramların en faydalı gösterimlerini bilme, konuların öğrenilmesini nelerin kolaylaştırdığını ya da zorlaştırdığını bilme, öğrencilerin kavram yanılgılarını bilme, kavramların anlaşılması ve kavram yanılgılarının giderilmesine yönelik analojiler, temsiller, örnekler, açıklamaları bilme, farklı yaş ve farklı seviyedeki öğrencilerin kavramlarla ilgili düşünce ve algılarını, ön bilgilerini bilme (Shulman, 1986, s. 9).

Öğrenci Bilgisi: Öğretmen adaylarının öğrencilerin kavram yanılgılarını/hatalarını dikkate alması, ders esnasında öğrencilerin hatalarını/kavram yanılgılarını fark edebilmesi, öğrencilerin kavram yanılgılarını/hatalarını ortadan kaldırmak için uygun çözümler üretebilmesi, öğrenci zorluklarını fark edebilmesi, öğrencilerin zorlanacakları hususları dersinde dikkate alabilmesi, öğrencilerin ön bilgilerini belirlemesi, ön bilgi ile yeni bilgi arasında bağlantı kurması, öğrenci anlamalarını değerlendirilmesi ve öğrenci düşüncesine odaklanması olarak ele alınmıştır.

Matematiksel temsiller bilgisi: Öğretmen adaylarının kesirlerle çarpma ve bölme algoritmalarının anlaşılması için kullandıkları alan, küme ve uzunluk modeli kullanımına ilişkin bilgi olarak ele alınmıştır.

Model: Kavramı temsil eden ya da kavram adına üzerine ilişki yüklenebilen herhangi bir nesne, resim veya çizimdir (Van de Walle ve diğ., 2013, s. 27).

1.7. Kısaltmalar

AB: Alan Bilgisi

PAB: Pedagojik Alan Bilgisi

İKİNCİ BÖLÜM: ALANYAZIN TARAMASI

Tezin bu bölümü, “Kuramsal ve Kavramsal Çerçeve” ile daha önceden alanyazında yapılmış “İlgili Çalışmalar” olmak üzere iki ana başlık altında düzenlenmiştir. Bu doğrultuda alanyazın taraması yapılmış ve araştırmanın amacına uygun bir çerçeve çizilerek ilgili bölüm temellendirilmiştir.

2.1. Kuramsal ve Kavramsal Çerçeve

Bu kısımda tezin araştırma problemi ile ilgili alanyazında yer alan kuramsal ve kavramsal temeller “Öğretmen Bilgisi Modelleri” ve “Kesirler” başlıkları altında ele alınmaktadır. Kesirler bölümü “Doğal Sayıların Kesirlere Aşırı Genellenmesi” ve “Kesirlerde Model Kullanımı” alt başlıklarından oluşmaktadır. Bu temellere dayanarak tez araştırmasının ele alınacağı çerçeveye “Araştırmanın Kuramsal Çerçevesi” başlığı altında yer verilmektedir.

2.1.1. Öğretmen Bilgisi Modelleri[1]

Matematik eğitiminin temel amacı, öğrencilere bilgiye ulaşma yollarını kazandırmak olup karşılaştığı problemleri çözebilen ve öğrendiği bilgileri günlük hayatında kullanabilen bireyleri yetiştirmektir. Bu becerilerin kazandırılmasında etkili matematik öğretimi gereklidir (Baki, 2014). Etkili öğretimi sağlamada birden çok değişkenin rolü olmasına rağmen en önemli görev öğretmenlere düşmektedir (Arslan- Kılcan, 2006). Öğretmen, öğrenciyle sürekli etkileşimde bulunan, öğretim programını uygulayan, öğretimi yöneten, hem öğrencinin hem de öğretimin değerlendirmesini yapan öğrenme ve öğretme süreçlerinin temel öğelerinden biridir. Öğretmenin nitelikleri de bu süreçlerin niteliğini büyük ölçüde etkilemektedir (Arslan- Kılcan, 2006).

Etkili öğretmen nitelikleri hakkında yapılmış çalışmaların yanı sıra öğretmenlerin sahip olması gereken bilgi türleri üzerine yoğunlaşan çalışmalar da olmuştur. Bu

[1] Bu bölümde alanyazında yer alan öğretmen bilgisi modelleri kronolojik bir sıra ile sunulmaktadır.

çalışmalarda öğretmen bilgisi farklı şekillerde tanımlanmış ve bu bilginin oluşumundaki konu alan bilgisi, genel pedagoji bilgisi, bağlam bilgisi, PAB, öğretim programı bilgisi, öğrenen bilgisi, eğitimsel bağlam bilgisi gibi farklı değişkenlerden bahsedilmiştir (An ve diğ., 2004; Baki, 1997; Baki, 2010; Ball, Thames ve Phelps, 2008; Banks, Leach ve Moon, 2005; Chick, Baker, Pham ve Cheng, 2006; Elbaz, 1981; Fennema ve Franke, 1992; Gess-Newsome, 1999; Grossman, 1990; Hashweh, 2005; Kennedy, Ball ve McDiarmid, 1993; Lee, 2006; Leinhard ve Smith, 1985; Magnusson, Krajcik ve Borko, 1999; Rowland, 2013; Shulman, 1986, 1987).

80'li yıllara kadar matematik öğretmenlerinin kalitesini belirlemede AB'leri baz alınarak (Shulman, 1986) ve üniversite düzeyinde aldıkları matematik derslerinin sayıları ya da kredileri hesaplanarak öğretmenlerin kaliteleri belirlenmeye çalışılmıştır (NRC, 2001). Bu yaklaşımın özünde öğretmen alanını ne kadar iyi bilirse o kadar iyi öğretir varsayımı bulunmaktadır. Öğretmenlerin üniversitede matematik alan derslerinde edindikleri bilgilerin sınıf içi uygulamalarında tek başına yeterli derecede hizmet edemediği yapılan çalışmalar sonucunda görülmüştür (Begle, 1979; Monk, 1994; NRC, 2000'den akt. Bütün, 2005). Bu sonuç öğretmenlerin gerçek anlamda öğretim için gerekli AB'lerinin niteliğinin tekrar sorgulanmasını gündeme getirmiştir. Öğretmen bilgisi üzerinde çalışma yapan araştırmacılar öğretmen bilgisinde sorgulanması gereken yerleri tekrar yapılandırmışlardır (Bütün, 2005). Bu araştırmalarda sorgulanan temel noktalar şunlar olmuştur:

- Matematik öğretmeni için hangi bilgi, ne kadar gereklidir?
- Matematik öğretmeninin bilgisinin kaynakları nelerdir?
- Öğretme için ihtiyaç duyulan bilgi nasıl gelişir?
- Öğretmenin bildiğinin gerçek anlamda göstergesi nelerdir?
- Bu bilgiyi ölçmek için geçerli ölçek ve araçlar nasıl geliştirilebilir?
- Matematik öğretimi sürdürülürken matematiksel bilgi hangi formlarda ve nasıl ortaya çıkar?
- Öğretmenin bilgisinin öğrencinin öğrenmesi üzerinde etkisi nedir?
- Öğretmenin matematiğin doğası, öğrenme-öğretme ile ilgili inançları bilgisi nasıl bir ilişki içerisindedir ve bu inançlar matematik öğretimi yaklaşımlarını nasıl etkilemektedir? (Bütün, 2005, s.11).

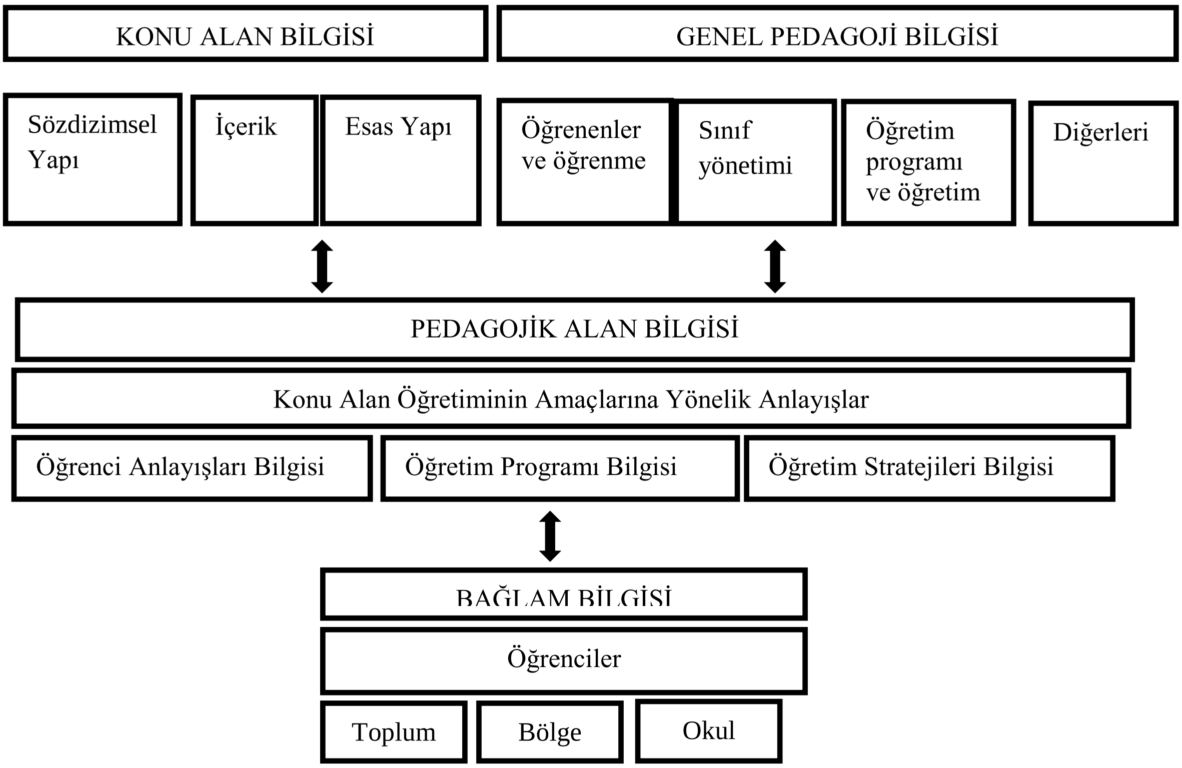
Öğretmenin sahip olması gereken öğretme bilgisine yönelik yapılan ilk araştırmalardan biri Elbaz'ın (1981) çalışmasıdır. Elbaz (1981) öğretmenin rolünü daha yeterli düzeyde kavramsallaştırmak amacı ile "pratik bilgi" kavramını önermiştir. Bu kavram "konu bilgisi, öğretim programı bilgisi, öğretim bilgisi, kişisel bilgi ve eğitim ortamı bilgisi" olmak üzere beş kategoride ele alınmıştır (Elbaz, 1981). Konu bilgisi, öğretmenin öğreteceği konuya ilişkin sahip olduğu ve yapılandırdığı bilgi; öğretim programı bilgisi, müfredat ile ilgili öğretmenin sahip olduğu ve oluşturduğu bilgi; öğretim bilgisi, öğrenciler ile etkileşim ve konuyu öğrenciler için anlaşılır hale getirmede öğretmenin sahip olduğu bilgidir. Kişisel bilgi, öğretmen bilgisinin kişisel yönünü ifade eder ve öğretmenin kendisini bir öğretmen olarak nasıl gördüğü ile ilgili olarak sahip olduğu bilgidir. Öğretmenler öğretimlerinde kişisel olarak anlamlı amaçlar doğrultusunda çalışırlar. Öğretmenlerin kendi çevrelerinde diğerleri ile çeşitli etkileşimlerine dayanan ve öğretmenler, öğrenciler, yöneticiler, yaygın toplumsal inançlar tarafından şekillendirilen bilgiyi ifade etmede bilginin etkileşim yönü olan eğitim ortamı bilgisine atıfta bulunulur. Bu bilgi bir öğretmenin diğer öğretmenler ile iletişimi, bu konuda kendisini nasıl algıladığı ya da okul ortamını sosyal bir dünya olarak nasıl gördüğüyle ilgili bilgisidir (Elbaz, 1981).

Leinhardt ve Smith (1985) tarafından öğretmen bilgisi "ders yapısı bilgisi" ve "konu alan bilgisi" olmak üzere iki tür bilgi alanı şeklinde sınıflandırılmıştır. Dersin yapısı ile ilgili bilgi, dersi düzenli şekilde uygulamak ve planlamak, bir bölümden diğerine kolayca geçmek ve materyalleri açıkça anlatmak için gerekli becerileri içermektedir. Konu alan bilgisi ise kavramsal anlama, algoritmik işlemler, çeşitli algoritmik işlemler arasında bağlantı, öğrenci hatalarını anlama ve öğretim programı sunum bilgisi olarak açıklanmaktadır.

Shulman (1986) tarafından öğretmen bilgisi "konu alan bilgisi, pedagojik alan bilgisi ve öğretim programı bilgisi" olmak üzere üç farklı bilgi türü olarak ele alınmıştır. Alan bilgisi "bir konu ile ilgili temel prensiplerin, kuralların, kavramların organizasyonunun bilinmesi ve sözdizimsel yapılar bilgisi"ni (Shulman, 1986, s.9) ifade etmektedir. AB aynı zamanda "bir öğretmenin zihnindeki bilginin miktarı ve organizasyonu" (Shulman, 1986, s.9) olarak tanımlanmaktadır. PAB ise şu şekilde ifade edilmektedir: (1) konuyu başkalarının anlaması için düzenleyebilme ve gösterim yollarını bilme, (2) öğrenmeyi güçleştirecek ya da kolaylaştıracak faktörleri anlama, (3) farklı alt yapısı olan ve değişik yaş gruplarındaki öğrencilerin sahip oldukları kavram ve ön yargılarının genellikle öğrenme ortamına getirdiklerinin farkında olma (Shulman, 1986). Öğretim programı bilgisi belirli konuların ve verilen bir seviyedeki konuların öğretimi için hazırlanmış, farklı öğretim etkinliklerinin bulunduğu programlara yönelik bilgi olarak tanımlanmaktadır (Shulman, 1986).

Shulman (1987) öğretmen bilgisini üç farklı bilgi türü olarak ele almasının ardından daha detaylı bir çerçeve ortaya koymaya çalışmış ve öncesinde alan bilgisinin alt boyutu olan PAB ve öğretim programı bilgisini bu çerçevede ayrı bir bilgi kategorisi olarak ele almıştır. Shulman (1987) öğretmenin sahip olması gereken bilgi türlerini yedi kategoride belirtmiştir: (1) alan bilgisi, (2) pedagojik alan bilgisi, (3) öğretim programı bilgisi, (4) genel pedagoji bilgisi, (5) öğrenciler ve özellikleri hakkında bilgi (öğrenen bilgisi), (6) eğitimsel bağlam bilgisi (eğitim ortamı), (7) eğitimsel hedefler, amaçlar, değerler ve bunların felsefi ve tarihi kökenlerine ilişkin bilgi. AB öğretmenin alanındaki kavramların doğru ve yanlışlığını, geçerlik ve geçersizliğini saptamada kullanılan yöntemler hakkındaki bilgisidir. Genel pedagoji bilgisi ders planlama, değerlendirme, sınıf yönetimi ilke ve stratejileri hakkında sahip olunan bilgidir. Bir konunun öğretilmesi için AB'nin yeterli olmayacağını belirten Shulman (1986) PAB'a işaret etmektedir. PAB ise AB ile pedagojik bilginin bir kesişimi ve bu iki bilgi türü arasında bir köprü görevi gören, belirli konu, mesele ya da problemlerin çeşitli ilgi ve becerileri olan öğrenenler için nasıl organize edildiği, sunulduğu ve nasıl düzenlendiği hakkında sahip olunan bilgi olarak tanımlanmaktadır (Shulman, 1987). Öğretim programı bilgisi bir öğrenme alanındaki öğretim programı ile ilgili materyal, ders kitabı, teknolojik araç vb. kaynakların nasıl ve ne zaman kullanılması gerektiği hakkında sahip olunan bilgidir. Öğrenciler ve özellikleri hakkında bilgi öğrencilerin ilgi ve yeteneklerini, gelişimsel özelliklerini, nasıl daha iyi öğrendiklerini bilmeyi içermektedir. Eğitimsel bağlam bilgisi ise sınıf yapısı, kültürü, okulun yapısı, işleyişi gibi meseleleri bilmeyi kapsamaktadır (Shulman, 1987).

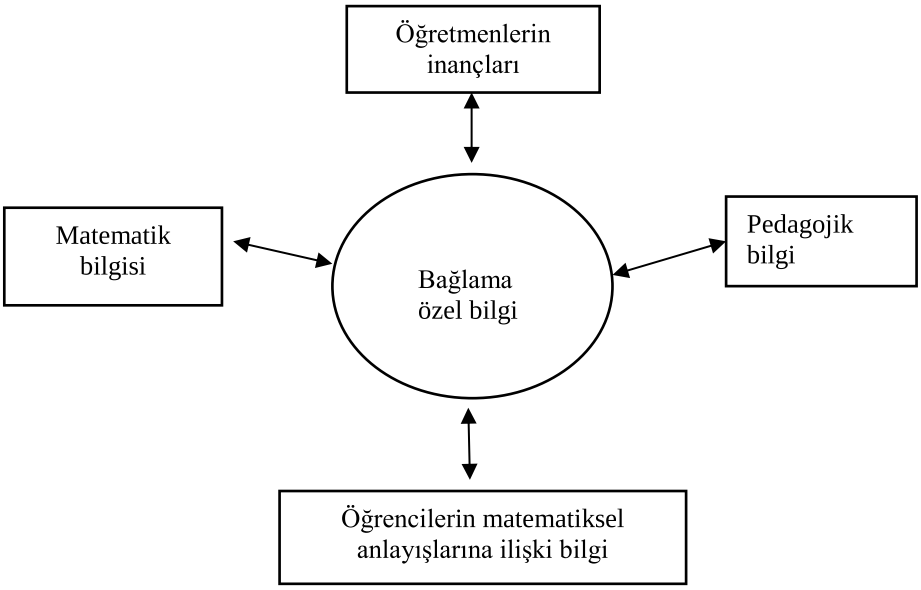
Shulman (1986, 1987) tarafından öğretmen bilgisi üzerine yapılan çalışmalar farklı eğitimcileri de bu bilgi türü ve alt kategorileri üzerinde çalışmaya yönlendirmiştir. Shulman'ın (1987) bilgi kategorilerini temel alan Grossman'ın (1990) öğretme bilgisiyle ilgili modeli Şekil 2.1'de sunulmuştur.



Şekil 2.1. Grossman'ın (1990) öğretme bilgisi modeli (akt. Auseon,1995, s. 55)

Şekil 2.1 incelendiği zaman PAB'ın öğretme bilgisinin merkezinde yer aldığı ve konu alan, genel pedagoji ve bağlam bilgisi ile karşılıklı etkileşim halinde olduğu görülmektedir. Grossman (1990), Shulman'dan (1987) farklı olarak bağlam bilgisine de yer vermiştir. Bağlam bilgisi "sosyal bir varlık olarak çevresi ile sürekli etkileşim halinde olan bireyin kendisinin, çevresinin, içinde bulunduğu toplumun, okul, okul çevresi, kültür ve kültür tarihinin bilinmesi" olarak ifade edilmektedir (Grossman, 1990'dan akt. Güler, 2014, s.11). Ayrıca Shulman'ın (1987) modelinde PAB'dan ayrı bir bilgi kategorisi olarak yer alan öğretim programı bilgisi Grossman'ın (1990) modelinde PAB'ın bir bileşeni olarak yer almaktadır.

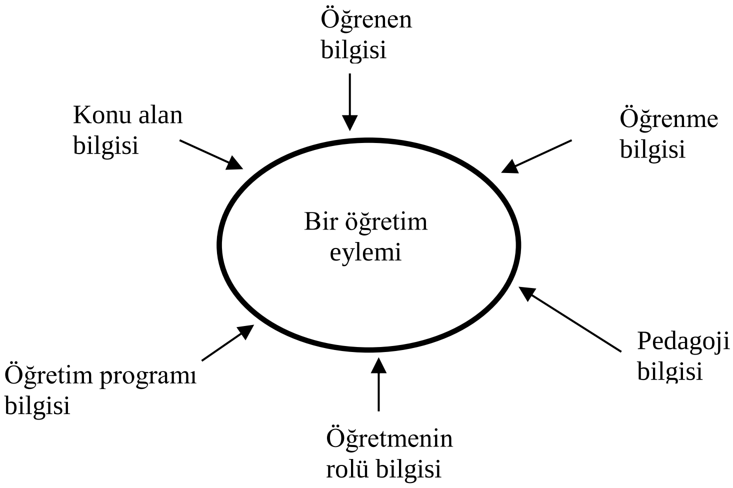
Fennema ve Franke (1992) öğretmen bilgisi üzerine yapılmış çalışmalardan yola çıkarak bu bilgiyi birbirleri ile sürekli etkileşim halinde olan öğretmenlerin inançları, matematik bilgisi, pedagojik bilgi, içinde öğrenme-öğretmenin gerçekleştiği bağlama özel bilgi ve öğrencilerin matematiksel anlayışlarına ilişkin bilgi ile tanımlamaya çalışmışlardır. Fennema ve Franke'nin (1992) öğretmen bilgisi modeli Şekil 2.2'de yer almıştır.



Şekil 2.2. Öğretmenin bilgisi: bağlamda gelişim (Fennema ve Franke, 1992, s. 162).

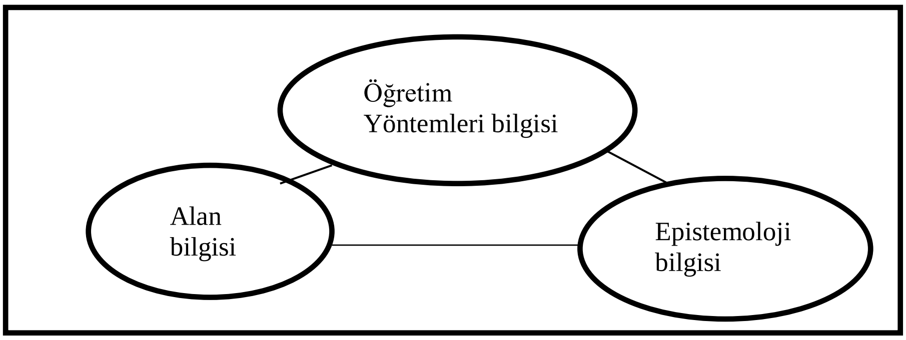
Şekil 2.2'de yer alan bağlama özel bilgi ile sınıf bağlamında sürekli gelişmekte olan bilgi temsil edilmektedir. Bilginin etkileşimli doğası gereğiyle herhangi bir bağlamda alan bilgisi, öğrenci hakkındaki bilgi ve pedagojik bilgi öğretmenlerin inançları ile bütünleşerek, öğretmenlerin öğretim tasarımlarını ve sınıf içi davranışlarını şekillendirirken, araştırmacılar tarafından eski bilgilerin süreç içerisinde yerlerini yeni bilgilere bırakabileceği vurgulanmaktadır (Bütün, 2012).

Kennedy, Ball ve McDiarmid (1993) öğretmen bilgisinin durumsal olduğunu ifade etmişlerdir. Kennedy ve diğerlerinin Şekil 2.3'te yer alan öğretmen bilgisi modeline göre herhangi bir öğretme eylemi konu alan bilgisi, öğrenmeyle ilgili bilgi, öğrenen bilgisi, öğretim programı bilgisi, pedagoji bilgisi, öğretmenin rolüyle ilgili bilgiyle ilişkilidir. Bunların yanında öğretmen bilgisinin inanç ve değer gibi faktörler tarafından da biçimlendiğini ve öğretmenlerin sınıf içerisinde aldıkları kararlarda tüm bu öğelerin etkili olduğunu belirtmişlerdir.



Şekil 2.3. Kennedy ve diğerlerinin (1993) öğretmen bilgisi modeli (s. 9).

Baki (1997) etkin bir matematik öğretmeni yetiştirilmesinin matematik, epistemoloji ve öğretim yöntemleri bilgisinden oluşan sacayağının dengeli ve sağlam kurulabilmesine bağlı olduğuna işaret etmektedir ve önerdiği modelde "alan bilgisi, öğretim yöntemleri bilgisi ve epistemolojik bilgi" olmak üzere iç içe geçmiş üç ana bilgi yapısı vardır (bk. Şekil 2.4). AB, bir öğretmenin sahip olduğu matematik bilgisidir. Bu bilginin derinliği ve kapsamının öğretmenin ne öğrettiğini ve nasıl öğrettiğini doğrudan etkilediği ifade edilmektedir (Baki, 1997). Epistemoloji bilgisi bilginin doğası, nasıl kurulduğu, öğrencinin matematiği nasıl öğrendiği ile ilgili konular ve felsefi tartışmaları kapsamaktadır. Öğretmenin bu konularla ilgili yapılan spekülasyonları yeterli bir şekilde anlayabilecek ve takip edebilecek bir düzeyde olması gerekmektedir (Baki, 1997). Öğretim yöntemleri bilgisi ise bir konu veya kavramın öğretilmesi sırasında öğretmenin epistemolojik prensipleri uygulayabilme becerisi olarak tanımlanmaktadır. Aynı zamanda matematik öğrenmenin doğasına uygun bir şekilde öğretebilme beceri ve tecrübesi olarak ifade edilmektedir (Baki, 1997).



Şekil 2.4. Matematik eğitimi için önerilen sacayağı modeli (Baki, 1997, s. 51)

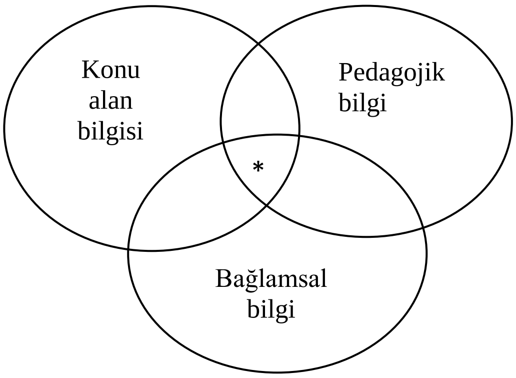
Gess-Newsome (1999) öğretmen bilgisine yönelik "bütünleyici model" ve "dönüştürücü model" şeklinde iki tür model ortaya atmıştır. Bütünleyici modelde öğretim konu alan, pedagoji ve bağlam bilgileri arasında bilgiyi entegre eylemi iken öğretmen bilgisinin bu üç bileşenin kesişimi ile kolaylıkça açıklanabileceği ifade edilmektedir. Bütünleyici modelde PAB ayrı bir bilgi kategorisi olarak yer almaz. Öğretim, uygun bir öğretim formu kullanarak bazı bağlamlarda içeriğin öğrencilere sunumuna bağlıdır. Bir öğretmen konu alan, pedagoji ve bağlam bilgisini kendi seçimine bağlı olarak kullanır ve etkili öğrenme fırsatı oluşturmak için ihtiyaç duyulduğunda onları birleştirir. İyi bir öğretmen "öğretim sırasında kolayca erişilen ve esnek bir şekilde kullanılan, iyi düzenlenmiş bireysel bilgi kategorisine sahip kişi" (Gess-Newsome, 1999, s. 11) olarak tanımlanmaktadır ve gözlemlendiklerinde bir bilgi tabanından diğerine geçişin kusursuz olacağı ifade edilmektedir.

Dönüştürücü model Gess-Newsome (1999) tarafından "etkili öğretmen olmak için gerekli olan tüm bilgilerin sentezi" (s. 10) olarak tanımlanmakta olup, PAB konu alan, pedagoji ve bağlamsal bilginin özgün bir biçime dönüşümüdür. Bu modelde PAB, öğretim sırasında kullanılan tek bilgidir ve diğer bilgi kategorileri var olmasına rağmen onların sadece PAB’a dönüştükleri zaman faydalı oldukları, aynı zamanda uzman bir öğretmenin yaygın olarak öğretilen tüm konular için iyi biçimlendirilmiş PAB’a sahip olduğu belirtilmektedir.

Gess-Newsome (1999) bütünleyici ve dönüştürücü model arasında bir ayrım yapmak için kimyadan bir analoji kullanmıştır. Bütünleyici model bir karışıma benzetilir iken, dönüştürücü model ise bir bileşime benzetilmiştir.

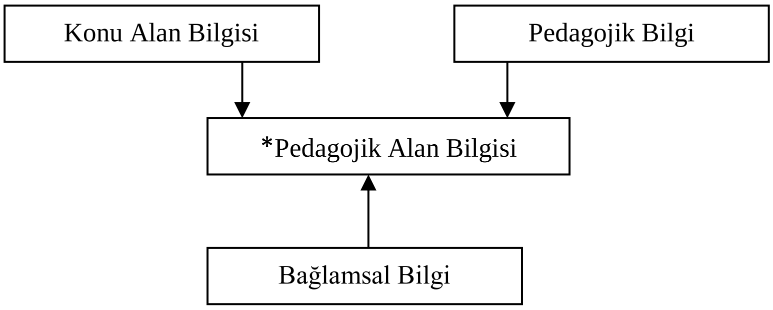
> İki malzeme karıştırıldığında karışım veya bileşim oluşturabilirler. Bir karışımda orjinal elementler kimyasal olarak birbirinden ayrı kalırlar, ancak görsel etkisi bütününe işaret edebilir. Görünür birleşim seviyesine bakılmaksızın bir karışımdaki ana bileşenler nispeten basit, fiziksel yollarla ayrılabilir. Aksine bileşimler enerjinin eklenmesi ya da serbest bırakılmasıyla oluşturulur. Temel bileşenleri artık kolaylıkla ayrılmamakta ve başlangıçtaki özellikleri artık tespit edilememektedir. Bir bileşim orijinal bileşenlerinden ayrı yeni bir maddedir, diğer tüm maddelerden ayıran kimyasal ve fiziksel özellikleri vardır. (s.11).

Bütünleyici modelde PAB konu alan bilgisi, pedagojik bilgi ve bağlamsal bilginin kesişiminde yer almaktadır. Tıpkı bir karışımdaki gibi bilgi kategorileri birbirinden ayrılabilmektedir. Dönüştürücü modelde konu alan bilgisi, pedagojik bilgi ve bağlamsal bilgi PAB’a dönüşmektedir. Burada PAB bir bileşimde olduğu gibi yeni bir bilgi kategorisidir ve diğer bilgi kategorilerinden ayrılan özelliklere sahiptir. Şekil 2.5’te Gess-Newsome’un (1999) bütünleyici modeli, Şekil 2.6’da dönüştürücü modeli yer almıştır.



*=sınıf öğretimi için gerekli bilgi

Şekil 2.5. Bütünleyici model (Gess-Newsome, 1999, s. 12)



*= sınıf öğretimi için gerekli bilgi

Şekil 2.6. Dönüştürücü model (Gess-Newsome, 1999, s.12)

Gess-Newsome'un (1999) bahsettiği her iki modelin örnekleri alanyazında mevcuttur. İlk dönüştürücü model Shulman'ın (1986) üç kategoriden oluşan (konu alan bilgisi, PAB ve öğretim programı bilgisi) öğretmen bilgi alanlarının kavramsallaştırılması üzerindeki modelidir (Karahasan, 2010). Shulman'ın (1986) çalışmasına dayanarak PAB birçok araştırmacı tarafından öğretmenin var olan bilgisinin dönüşümünün sonucu olarak tanımlanmıştır (Grossman, 1990; Magnusson ve diğ., 1999; Morine-Dershimer ve Kent, 1999; Shulman, 1987; Smith ve Neale, 1989; Wilson, Shulman ve Richert, 1988). Bu modeller arasındaki tek fark öğretmenlerin bilgi bileşenlerini tanımlamada kullanılan terimlerdir ancak bu yeni terimlerin çoğu Shulman (1986) tarafından tanımlanan bileşenlerle örtüşmektedir (Karahasan, 2010).

Benzer şekilde, alanyazındaki bütünleştirici modeller (Abd Rahman ve Scaife, 2005; Cochran, King ve DeRuiter, 1993; Marks, 1990) bileşenlerini Shulman'ın (1986, 1987) çalışmaları üzerine inşa etmişlerdir ve yine bileşenlerinin çoğu onun bileşenleri ile örtüşmektedir. Sadece Abd Rahman ve Scaife (2005) tarafından yapılan çalışma Shulman'ın (1986, 1987) modelinde ve diğer bütünleyici modellerde (Cochran, King ve DeRuiter, 1993; Marks, 1990) bir kategori olarak yer almayan kişilik bilgisi ve inanç bilgisi bileşenlerini içermektedir. Dolayısıyla bütünleyici ve dönüştürücü model arasındaki tek farkın PAB'ın tanımlanmasından kaynaklandığı söylenebilir. Bütünleyici modelde PAB "öğretmenin bilgi bileşenlerinin bütünleşik anlayışı" olarak tanımlanmıştır (Karahasan, 2010, s. 20).

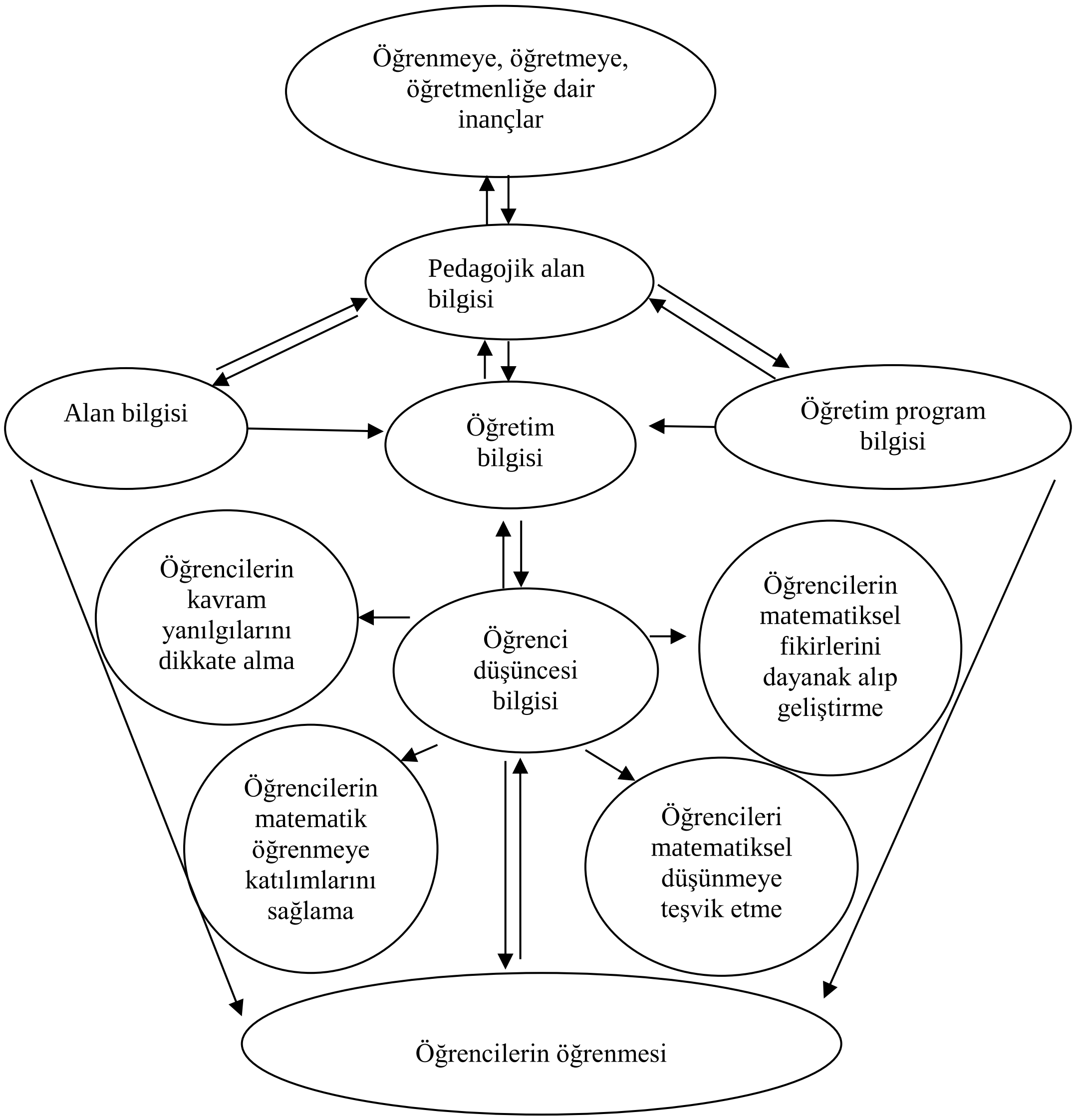
Bütünleyici ve dönüştürücü model analiz edildiği zaman dahil edilen bileşenlere göre bazı benzerlikler ve farklılıklar olduğu sonucuna varılmıştır (Karahasan, 2010). Shulman (1986) bilgi modelinin farklı araştırmacılarca kavramsallaştırılmış hali Tablo 2.1'de özetlenmiştir. Tablo incelendiği zaman PAB'ın evrensel olarak kabul gören bir kavramsallaştırılmasının olmadığı görülmektedir.

Tablo 2.1
Farklı PAB Modellerinde Bilgi Bileşenleri (Karahasan, 2010, s. 21)

Bilim adamları	DM/BM	Konu alan bilgisi	Genel pedagoji bilgisi	Öğrenci öğrenmesi ve kavramları bilgisi	Kendi bilgisi	Alan bilgisi	Öğretim programı bilgisi	Amaçlar bilgisi
Shulman (1986)	DM	a.k.	a.k.	-	-	a.k.	a.k.	-
Shulman (1987)	DM	a.k.	a.k.	PAB	-	a.k.	a.k	a.k.
Smith ve Neale (1989)	DM	PAB	PAB	PAB	-	-	-	-
Grossman (1990)	DM	a.k.	a.k.	PAB	-	a.k.	PAB	PAB
Magnusson ve diğerleri, (1999)	DM	a.k.	a.k.	PAB	-	a.k.	PAB	PAB
Morine-Dershimer ve Kent (1999)	DM	PAB	PAB	PAB	a.k.	PAB	PAB	PAB
Rowan, Schilling, Ball ve Miller (2001)	DM	PAB	PAB	PAB	-	-	-	-
Ebert (1994)	DM	a.k.	a.k.	a.k.	a.k.	-	-	-
Marks (1990)	BM	PAB	-	PAB	-	-	PAB	-
Cochran ve diğerleri, 1993	DM-BM	PAB	PAB	PAB	-	PAB	PAB	PAB
Abd Rahman ve Scaife (2005)	DM-BM	PAB	PAB	PAB	PAB	PAB	PAB	-

Not: DM: Dönüştürücü model
BM: Bütünleyici model
PAB: PAB'ın içinde yer alıyor, ayrı bir kategori olarak yer almıyor
a.k.: PAB'dan ayrı bir kategori olarak yer alıyor

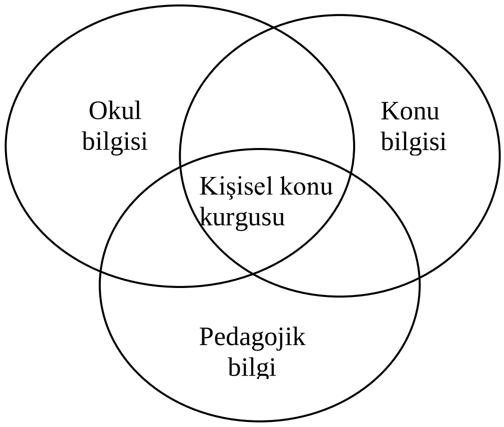
An ve diğerleri (2004) pedagojik alan bilgisinin öğrenci düşüncesini anlamanın ve matematiksel içeriği öğretmenin nasıl olduğunu irdelediğini ve bunun da hem çeşitli öğretme ve öğrenme stilleri için öğrencilerin tercihlerini hem de öğrencilerin kültürel geçmişini içerdiğini ifade etmişlerdir. Araştırmacılar bu bağlamda Amerikalı ve Çinli öğretmenlerin pedagojik alan bilgilerini karşılaştırmak için yaptıkları çalışmada PAB'ı alan bilgisi, öğretim programı bilgisi ve öğretim bilgisi olmak üzere üç kategoride ele almıştır. Öğretim programı bilgisi, uygun müfredat materyallerinin kullanımı ve seçimi, ders kitapları ve müfredattaki temel amaçların, fikirlerin tamamen anlaşılmasını içerir. Öğretim bilgisi, öğrenci düşüncesini bilme, öğretimi hazırlama ve öğretimi sunmada ustalığı içerir. Etkili öğretim için pedagojik alan bilgisinin her üç bileşeni de çok önemlidir fakat öğretim bilgisi merkezi bir rol oynamaktadır (An ve diğ., 2004). Bu üç bileşen arasındaki ilişki ve dönüşümleri göstermek için An ve diğerleri (2004) Şekil 2.7'deki gibi bir ağ oluşturmuşlardır.



Şekil 2.7. Pedagojik alan bilgisi ağı (An ve diğ., 2004, s. 147).

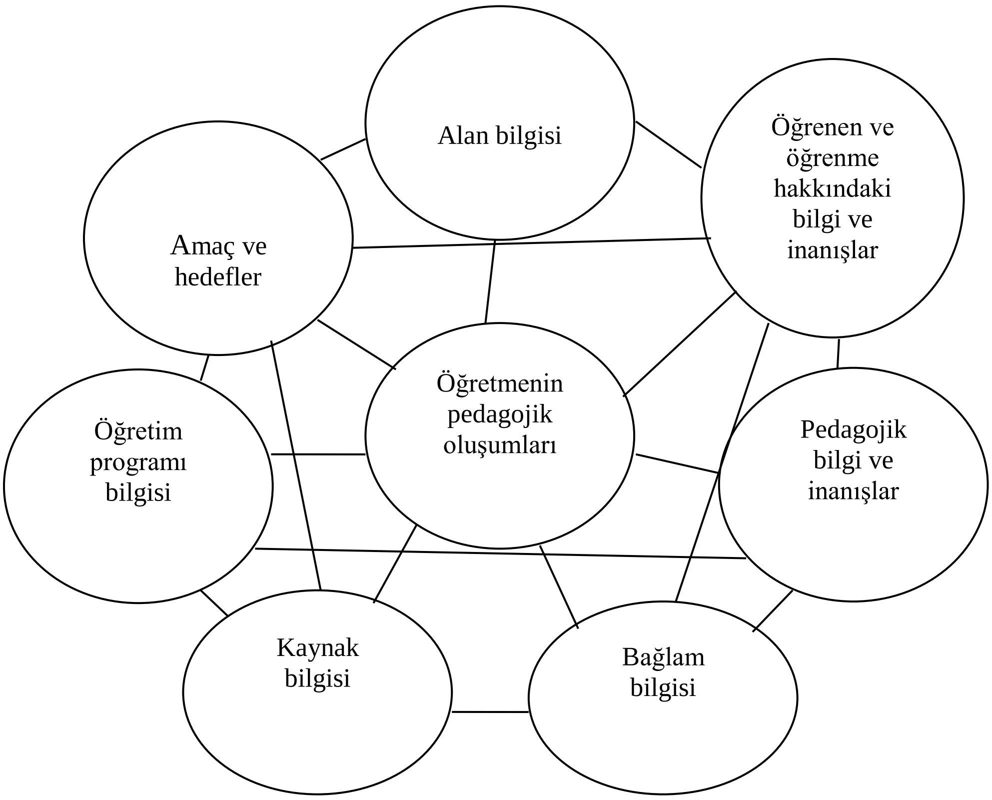
An ve diğerleri (2004) öğretimin birbirinden ayrı ya da bir noktada birleşen bir süreç olarak görülebileceğini ifade etmişlerdir. Öğretim birbirinden ayrı olarak görülüyorken alan ve öğretim programı bilgisine odaklanıldığını belirtmişlerdir. Öğretimin bir noktada birleştiği süreçte ise öğrenci düşüncesini bilmeye odaklanıldığını ifade etmişlerdir. Öğrenci düşüncesi bilgisinin öğrencilerin kavram yanılgılarını dikkate alma, matematiksel fikirlerini dayanak alıp geliştirme, matematik öğrenmeye katılımlarını sağlama ve onları matematiksel düşünmeye teşvik etme şeklinde dört bileşeni içerdiği belirtilmiştir (An ve diğ., 2004). An ve diğerleri (2004) ayrıca matematik öğretimi ve öğrenimine ilişkin öğretmen inançlarının PAB ile doğrudan etkileşim içinde olduğu ifade etmişlerdir.

Banks, Leach ve Moon (2005) konu bilgisi, pedagojik bilgi ve okul bilgisi üzerinde durarak öğretmen eğitiminde bu üç kavramın tanımı ve karşılıklı etkileşimine odaklanmışlardır. Öğretmenlerin mesleki bilgilerini kavramsallaştırmak başlangıç noktaları olmuştur. Okul bilgisi, konu bilgisinin okul ortamında nasıl kullanılacağı bilgisi olup Shulman'ın (1986, 1987) öğretim programı bilgisini kapsamaktadır. Banks ve diğerleri (2005) tarafından öğretmenlerin öğretimsel hedefler doğrultusunda, derslerin düzenlenmesini sağlayan tarihsel ve ideolojik kökenleri öğrenmeye ihtiyaç duydukları belirtilmektedir. Pedagojik bilgi, öğretmenler tarafından güçlü analojilerin, gösterimlerin, örneklerin, açıklamaların kullanılması olarak açıklanmaktadır. Banks ve diğerleri (2005) öğretmenin mesleki bilgisinin getirdiği deneyim, pedagojik anlayış, okul bilgisi ve konu bilgisinin aktif bir etkileşimi olduğunu, öğretmenin konu bilgisinin okul bilgisinin bir bölümünü oluşturan kaynaklar aracılığıyla ve pratikte pedagojik bilgiye dönüştüğünü ve bu dinamik sürecin temelinde yatanın ise "öğretmenin kişisel kurgusu olduğu"nu (s.336) ifade etmişlerdir. Bu terim "geçmiş deneyimlerin, öğrenme deneyimlerinin, neyin iyi öğrenme meydana getireceğine olan kişisel bakışın ve konunun amaçlarındaki inancın karmaşık bir karışımı" (Banks ve diğ., 2005, s. 336) olarak açıklanmaktadır. Şekil 2.8'de Banks ve diğerlerinin (2005) öğretmenlerin mesleki bilgisi çerçeveleri yer almıştır.



Şekil 2.8. Öğretmenlerin mesleki bilgisi (Banks, Leach ve Moon, 2005, s. 336).

Hashweh (2005) tarafından PAB ile öğretmen bilgisinin diğer kategorileri ve inançlar arasındaki ilişkiyi tanımlayan bir model ve PAB'ın gelişimini ve anlamını daha iyi aktardığı düşünülen "öğretmenin pedagojik oluşumları" terimi önerilmiştir. Hashweh (2005) tarafından geliştirilen modelde (bk. Şekil 2.9) kaynak bilgisi ders için uygun araç gereçleri seçme bilgisini ifade ederken bağlam bilgisi, yerel eğitim sistemi bilgisi, toplum bilgisi ile özel öğrencilere yönelik bilgiyi ifade etmektedir. Öğretim programı bilgisi, yatay ve dikey öğretim programları hakkındaki bilgiyi; pedagojik bilgi ve inanışlar, planlama, sınıf yönetimi, değerlendirme şeklindeki bilgileri kapsamaktadır. Öğrenenlerin inanış ve öğrencilerin bilgisi, öğrencilerin sahip oldukları kavram yanılgısı, bilgi eksikliği ve kavramsal anlama güçlüklerini; amaçlar ve hedefler, eğitimin genel amaçları hakkındaki inanışları; alan bilgisi, kavramlar, ilişkiler, prensipler bilgisini kapsamaktadır.



Şekil 2.9. Hashweh'in PAB Modeli (Hashweh, 2005, s. 282)

Chick, Baker, Pham ve Cheng (2006) öğretmenlerin ondalık gösterim ve ondalık gösterim öğretimi hakkındaki anlayışlarını araştırmak amacıyla matematik öğretmenlerinin

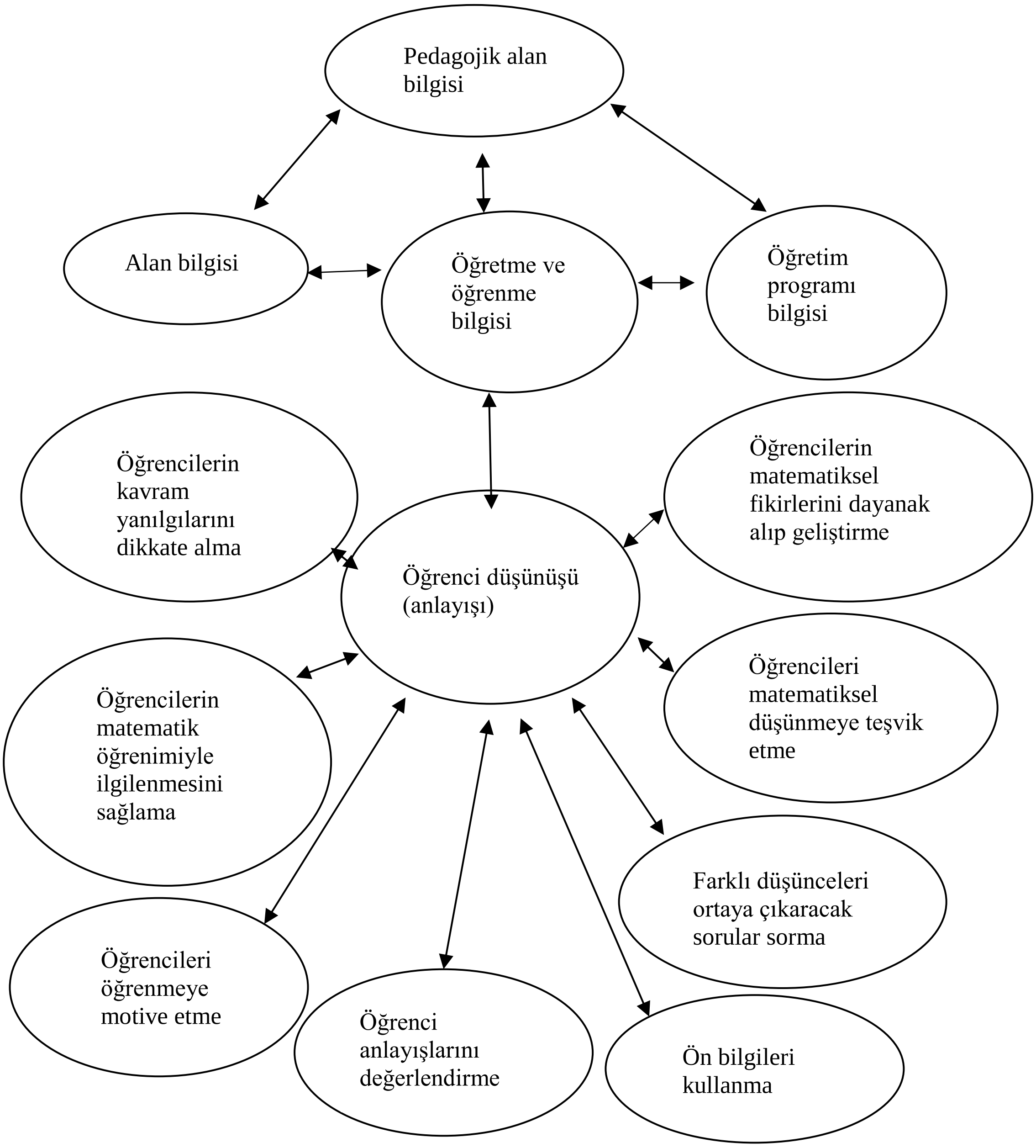
PAB'larının sorgulanmasına yardımcı olacak bir PAB çerçevesi önermişlerdir. PAB'ın bileşenleri üç kategoride gruplandırılmıştır (Tablo 2.2). Açık pedagojik alan bilgisi pedagoji ve alanın tümüyle harmanlanmış yönlerini içermektedir. Örnekler matematik için öğretim stratejileri bilgisi (uygun açıklamalar ve etkinlikler gibi), öğrenci düşüncesi bilgisi (bireysel öğrenme stilleri ve kavram yanılgıları bilgisi gibi) ve kaynak ve öğretim programı bilgisinden oluşur. Bir pedagojik bağlamda alan bilgisi olarak isimlendirilen diğer bileşen matematiksel yapı ve bağlantıların farkında olma, temel matematiğin derin anlayışına sahip olma becerilerini içermekte olup doğrudan konu alanından çizilen bilgi yönlerini göstermektedir. Üçüncü bileşen ise bir konu bağlamında pedagojik bilgi olup öğretim bilgisinin belirli bir alana uygulandığı durumları, sınıf teknikleri bilgisini, öğrenci odağının kazanılması ve devam ettirilmesi için gerekli stratejiler bilgisini içermektedir.

Tablo 2.2
Matematik Pedagojik Alan Bilgisi İçin Kuramsal Çerçeve (Baker ve Chick, 2006, s. 61)

PAB Kategorileri	**Gösterge**
Açık Pedagojik Alan Bilgisi	
• Öğretim stratejileri- genel	Bir matematiksel kavramın öğretilmesi için kullanılan genel strateji ve yaklaşımlar
• Öğretim stratejileri- belirli	Belirli bir matematiksel kavram ya da becerinin öğretimi için kullanılan belirli strateji ve yaklaşımlar
• Öğrenci düşüncesi-genel (kavram yanılgıları hariç)	Bir matematiksel kavram hakkında öğrencinin muhtemel düşünme yollarının ya da anlama düzeyinin ele alınması ya da tartışılması
• Öğrenci düşüncesi-belirli (kavram yanılgıları hariç)	Bir matematiksel kavram hakkında belirli bir öğrencinin belirli düşünme yolları ya da anlama düzeyinin ele alınması ya da tartışılması
• Öğrenci düşüncesi- kavram yanılgıları-genel	Bir kavrama ilişkin benzer/tipik öğrenci yanılgılarının ele alınması ya da tartışılması
• Öğrenci düşüncesi- kavram yanılgıları-belirli	Belirli bir öğrencinin bir kavram hakkında sahip olduğu belirli bir kavram yanılgısını ele almak
• Görevlerin bilişsel talepleri	Bir görevin karmaşıklığını etkileyen yönlerin belirlenmesi
• Kavramların uygun ve detaylı temsilleri	Bir kavramı örneklendirme ya da modelleme yollarının gösterilmesi ya da açıklanması
• Kaynak bilgisi	Öğretimi destekleyen mevcut kaynakların kullanımı
• Öğretim programı bilgisi	Konularının müfredat içerisinde nasıl yerleştirildiğinin ele alınması
• Alan bilgisinin amacı	İçeriklerin müfredata nasıl dahil edildiği ya da nasıl kullanılabileceğini tartışma

PAB kategorileri	Gösterge
Bir Pedagojik Bağlamda Alan Bilgisi	
• Temel matematiğin derin anlayışı	Matematiğin belirli yönlerinde tam ve derin kavramsal anlayış sergilenmesi
• İçeriğin anahtar bileşenlerinin çözümlenmesi	Bir kavramın anlaşılması ve uygulanması için kritik matematiksel bileşenlerinin tanımlanması
• Matematiksel yapı ve bağlantılar	Karşılıklı bağımlılık içeren kavramlar ve konular arasında bağlantılar kurma
• Yordam/yöntem bilgisi	Matematiksel problemleri çözme becerileri sergileme
• Çözüm yöntemleri	Bir matematiksel problemin bir çözüm metodunu sergileme
Bir Konu Bağlamında Pedagojik Bilgi	
• Öğrenme hedefleri	Belirli matematik konularıyla doğrudan alakalı öğrenci öğrenmeleri için bir amaç belirleme
• Öğrenme hedefleri-genel	Bir konuyla doğrudan alakalı olmayan öğrenci öğrenmeleri için bir amaç belirleme
• Öğrenci odağının/ilgisinin kazanılması ve devam ettirilmesi	Öğrencilerde merak uyandıran stratejilerin ele alınması
• Sınıf teknikleri	Genel sınıf uygulamalarının ele alınması

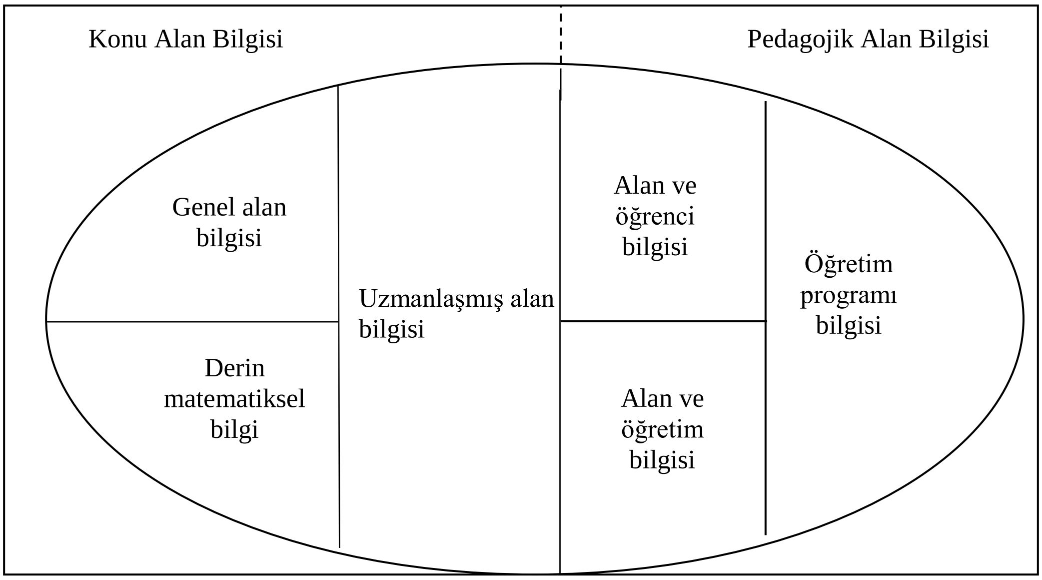
Lee (2006), An ve diğerlerinden (2004) uyarlayarak PAB'a yönelik bir çerçeve oluşturmuştur (bk. Şekil 2.10). Bu çerçevede PAB alan bilgisi, öğretme ve öğrenme, öğretim programı bilgisiyle ilişkilendirilirken öğrenci düşünüşüne odaklanmanın öğretimde en çok dikkate alınması gereken bileşen olması gerektiği ifade edilmiştir.



Şekil 2.10. Pedagojik alan bilgisi ağı (Lee, 2006, s. 19)

Bu PAB çerçevesine göre öğrencilerin kavram yanılgılarını dikkate alma, matematiksel fikirlerini dayanak alıp geliştirme, farklı düşünceleri ortaya çıkaracak sorular sorma, öğrencilerin matematik öğrenimiyle ilgilenmesini sağlama, öğrenmeye motive etme, öğrencileri matematiksel düşünmeye teşvik etme, öğrenci anlayışlarını değerlendirme ve ön bilgileri kullanma öğretmenlerin dikkate alması gereken önemli bileşenlerdir (Lee, 2006).

Ball ve diğerleri (2008) tarafından "Öğretim için Matematiği Öğrenme Projesi" kapsamında Shulman'ın (1986, 1987) ele aldığı problemler, gerçekleştirdiği süreçler ve cevaplanmamış sorular tekrar araştırılmış ve Matematiği Öğretme Bilgisi tanımlanmıştır. Alanı öğrenme ve öğretme için önemli bir sorumluluk olarak matematik öğretiminde öğretmenlerin ne yapmaya ihtiyaç duydukları ve bu işte matematiksel akıl yürütme, görüş, anlayış ve becerileri nasıl kullandıklarına odaklanılmıştır. Ball ve diğerleri kullandıkları "öğretim için matematiksel bilgi" kavramıyla matematik öğretim çalışmalarını yürütmek için gerekli matematiksel bilgiyi ifade ediyorlarken "öğretim" kavramı ile de öğrencilerin öğrenmesini desteklemek için öğretmenlerin yapmak zorunda oldukları her şeyi ifade etmektedirler. Ball ve diğerlerinin (2008) öğretim için matematiksel bilgi alanları çerçevesi Şekil 2.11'de yer almıştır.

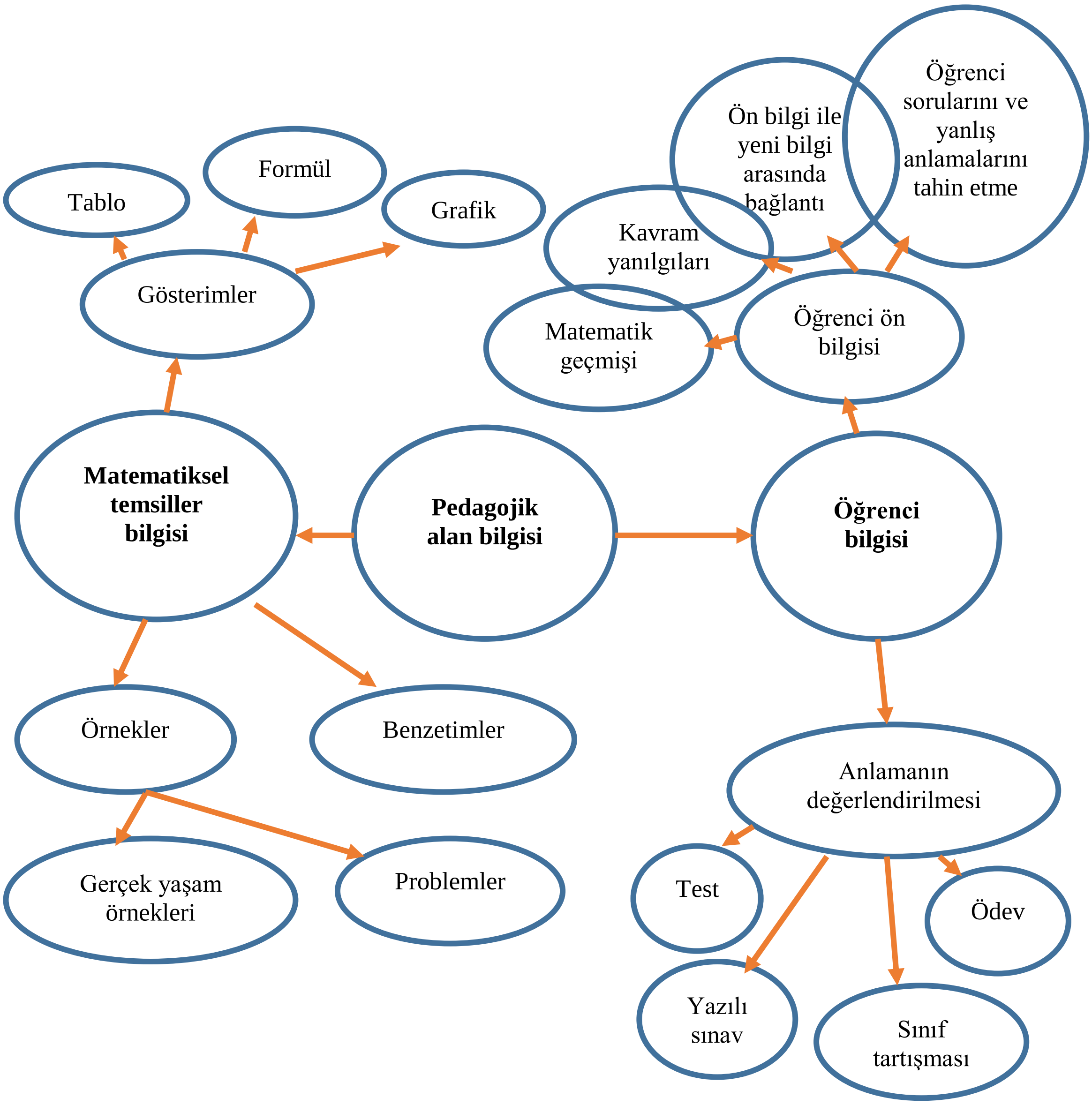


Şekil 2.11. Öğretim için matematiksel bilgi alanları (Ball ve diğ., 2008, s. 403).

Şekil 2.11'deki genel alan bilgisi matematik bilen ve kullanan kişilerle ortak bilinen matematiksel bilgi; derin matematiksel bilgi müfredatta yer alan matematikten daha fazlasıyla ilişkili matematiksel konuların nasıl öğretileceğinin farkında olma anlamına gelmektedir (Ball ve diğ., 2008). Uzmanlaşmış alan bilgisi ise öğretime özgü matematiksel bilgi ve becerilerdir (Ball ve diğ., 2008).

Ball ve diğerleri (2008) tarafından PAB'ın alt bileşenleri olarak alan ve öğrenci bilgisi, alan ve öğretim bilgisi ve öğretim programı bilgisi belirlenmiştir. Alan ve öğrenci bilgisi matematik hakkında ve öğrenciler hakkında sahip olunan bilginin birleşimidir. Hill, Ball ve Schilling (2008) tarafından alan ve öğrenci bilgisi öğrencilerin belirli bir kavram hakkında ne bildikleri, kavramı nasıl düşündükleri, nasıl öğrendiklerine ilişkin bilgi ile alan bilgisinin bütünleştirilmesi şeklinde ifade edilmektedir. Öğretmen öğrencilerin nasıl düşünebileceğini ve nerelerde kafasının karışabileceğini sezebilmelidir. Aynı zamanda alan ve öğrenci bilgisi öğretmenlerin öğrencilerin belirli etkinliklere nasıl yaklaşacaklarını tahmin etme, hatalarını öngörme ve tamamlanmamış fikirlerini yorumlama becerilerine sahip olmayı gerektirmektedir. Alan ve öğretim bilgisi ile de matematik hakkında ve matematik öğretimi hakkında sahip olunan bilginin birleşimi kastedilmektedir. Öğretmenler belirli bir fikri öğretmede kullanılan temsillerin öğretimsel avantaj ve dezavantajlarını değerlendirebilmeli ve hangi farklı metod ve yöntemlerin öğretimi desteklediğini belirleyebilmelidir (Ball ve diğ., 2008).

Kovarik (2008); Shulman (1986), Ball ve Bass (2000), Wagner'in (2003) modellerinden faydalanarak kendi PAB çerçevesini oluşturmuştur. Kovarik'in (2008) PAB çerçevesi Şekil 2.12'de yer almıştır.



Şekil 2.12. Kovarik'in (2008) pedagojik alan bilgisi çerçevesi (s. 33)

Kovarik'in (2008) oluşturduğu çerçevede PAB'ın alt bileşenleri olarak öğrenci bilgisi ve matematiksel temsiller bilgisi yer almaktadır. Temsiller bilgisi de kendi içinde gösterimler, örnekler ve benzetimler olarak üç alt kategoriye, öğrenci bilgisi ise öğrencilerin ön bilgisi ve anlamanın değerlendirilmesi olarak iki alt kategoriye ayrılmıştır. Anlamanın değerlendirilmesinde öğrencinin anlamasını değerlendirmek için test yapma, sınıf tartışmalarından öğrenciyi değerlendirme, yazılı sınavdan öğrenciyi değerlendirme ve ödev teslimlerinden öğrenciyi değerlendirme alt bileşenleri bulunmaktadır.

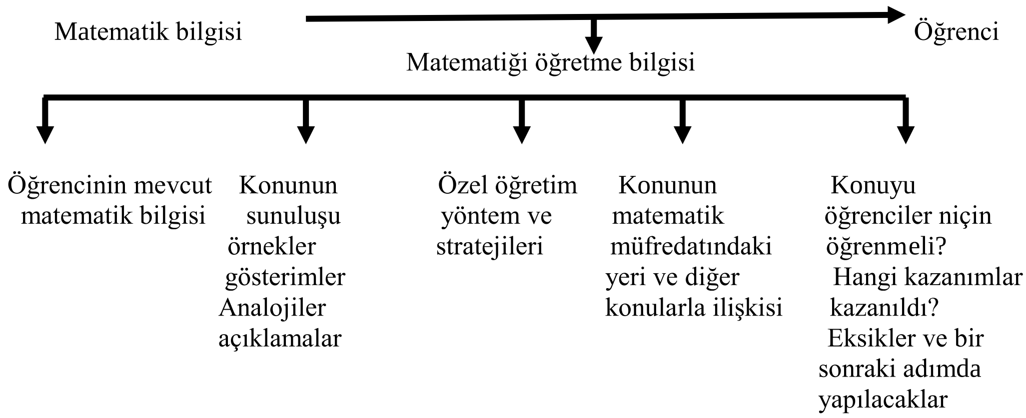
Baki (2010) öğretmenin sadece neyin nasıl olduğunu bilmesinin ve anlamasının yeterli olmadığını aynı zamanda niçinleriyle bilmesi gerektiğini ve öğreteceği kavramlar, işlemler, özelliklerin hangi koşullar altında doğru ve geçerli, hangi koşullar altında da doğruluk ve geçerliğinin sınırlandığını bilmesi gerektiğini, verilen konunun niçin önemli olduğunu ve disiplin içinde nasıl bir yer ve role sahip olduğunu bilmesi gerektiğini ifade etmektedir. Hangi konunun disiplinin merkezinde önemli bir role sahip olduğu hangi konunun disiplinin çevresinde olduğu bilgisi, öğretmenin öğrenme-öğretme ortamlarını tasarlarken karar vermesine, etkinliklerin uygun organizasyonuna yardım etmesi açılarından önem taşımaktadır. Baki (2010) bir öğretmenin sahip olması gereken bilgileri Şekil 2.13’teki gibi ifade etmektedir.

Alan Bilgisi → Alanı Öğretme Bilgisi → Genel Kültür

•Öğreteceği müfredatı bilme
•Müfredatın öğrenme alanlarını bilme ve ilişkilendirme
•Alt öğrenme alanlarının kazanımlarını bilme
•Öğrencinin nasıl anladığını bilme
•Konuya özgü öğrencinin mevcut işlemsel ve kavramsal bilgisini bilme
•Konuya özgü özel öğretim yöntemlerini bilme
•Konuya özgü materyal tasarlayabilme
•Konuya özgü öğrenme etkinliklerini düzenleyebilme
•Öğrencinin öğrenmelerini ölçme ve değerlendirme

Şekil 2.13. Öğretmenin sahip olması gereken bilgi (Baki, 2010, s. 24).

Baki (2010) AB yanında öğretmenlerin alanı öğretme bilgisine de sahip olmaları gerektiğini ifade etmektedir. Bu bilgi ise konu alanı bilgisinden daha öte ve derinleşen bir bilgi türüdür. Burada kastedilen de konunun öğrenci tarafından nasıl öğrenildiğinin bilinerek öğrenme sürecinin tasarlanması, düzenlenmesi ve yönetilmesidir. Öğretmenin öğretilen konularda konuların öğrenci için nasıl daha anlaşılır hale getirilebileceğini, en kullanışlı sunuş şekilleri, en güçlü gösterimleri, örnek ve açıklamaları, aynı zamanda hangi sunuşların, açıklamaların, örneklerin, gösterimlerin öğrencilerin bilişsel gelişimlerine uygun olduğunu bilmesi gerekir. Bu düşüncelerle yola çıkan Baki (2010) matematik öğretmeninin bilgisinin bileşenlerini Şekil 2.14’deki gibi bir şema ile açıklamaya çalışmıştır.



Şekil 2.14. Matematik öğretimi bilgisinin bileşenleri (Baki, 2010, s. 25).

Rowland (2013) tarafından öğretmenlerin matematik AB'leri ile matematik PAB'larının birlikte değerlendirilmesine imkan tanıyan "Dörtlü Bilgi Modeli" oluşturulmuştur. İlk olarak Cambridge Üniversitesi'nde 2002-2004 yılları arasında geliştirilen "Dörtlü Bilgi Modeli" Rowland'ın (2005) "öğretmenlerin matematik bilgileri en iyi şekilde öğretim yaparlarken, yani uygulamada değerlendirilebilir" (s.18) anlayışına dayanmaktadır. Ball ve diğerlerinin (2008) öğretim için matematiksel bilgiyi "öğretime yönelik pratik tabanlı bir bilgi teorisi" (Ball ve Bass, 2003, s. 5) olarak tanımladıkları gibi Dörtlü Bilgi Modeline de bu tanım uygulanabilmektedir. Fakat yöntemler ve bazı sonuçlar arasında paralellik olmasına rağmen iki teori oldukça farklı görünmektedir. Ball ve diğerlerinin (2008) teorisi AB'nin ve PAB'ın teorik açıdan gelişmemiş ve eskiden tanımlanması oldukça zor kavramlarını çözmeyi ve açıklığa kavuşturmayı amaçlıyorken, Dörtlü Bilgi Modeli'nde matematiksel bilginin farklı türleri arasındaki ayrım öğretimde matematiksel bilginin ortaya çıktığı durumların sınıflandırılmasından daha az önemlidir. Bu anlamda iki teorinin birbirini tamamlayıcı olduğu ve her birinin diğerine sunmak için faydalı bakış açılarına sahip olduğu düşünülmektedir (Rowland, 2013).

Rowland'a (2013) göre öğretmenlerin; (1) temel bilgi, (2) dönüşüm bilgisi, (3) bağlantı kurma bilgisi, (4) beklenmeyen olaylar bilgisi olmak üzere dört bilgi boyutuna sahip olması gerekmektedir (Rowland, 2013). Rowland (2013) bu bilgi kategorilerinin göstergelerini Tablo 2.3'teki gibi sınıflandırmaktadır. Bir üniversitedeki bir yıllık lisansüstü sertifika programına katılan 149 stajyer öğretmen arasından seçilen 12 katılımcının dersleri gözlemlenmiştir. Bu gözlemlerden yola çıkarak modeldeki kategorilere ait kodlamalar oluşturulmuştur. Katılımcılardan ders planları yapmaları istenmiş, dersleri video kamera ile kayıt altına alınmıştır. Ders sonrasında araştırmacılar tarafından gözlemleri rapor edilmiştir. Ders raporları ve video kayıtları ile stajyer öğretmenlerin planları ve ders esnasında eylemleri hakkında geçici kodlar oluşturulmuş, araştırma ekibi ile de kodlara son halleri verilmiştir (Rowland, 2013).

Tablo 2.3
Dörtlü Bilgi Modeli'nin Boyutlarına Göre Kodlamaları (Rowland, 2013, s. 25)

Bilgi Boyutları	**Kodlar**
Temel bilgi: Matematik ve matematiğe özgü pedagoji bilgisi ve anlayışı, matematiğin doğası hakkındaki inanışlar, matematik eğitiminin amaçları, öğrencilerin matematiği en iyi öğrenebileceği koşullar	• Amaçların farkında olma • Ders kitabına bağlı kalma • Süreçlere yoğunlaşma • Hataları tanımlama • Konu bilgisinin açıkça gösterimi • Pedagojinin teorik olarak desteklenmesi • Matematiksel terminoloji kullanım
Dönüşüm bilgisi: Fikirlerin analojiler, gösterimler, örnekler, açıklamalar şeklinde sunumu	• Örneklerin seçimi • Temsillerin seçimi • Öğretimsel materyallerin kullanımı • Süreci açıklamak için öğretmen gösterimi
Bağlantı kurma bilgisi: Öğretim için materyallerin sıralanması ve farklı konu ve görevlerin ilişkili bilişsel taleplerinin farkında olma	• Karmaşıklığı sezme • Sıralama (dizilim) hakkında karar verme • Kavramsal uygunluğun tanımlanması • Prosedürler arası bağlantı kurma • Kavramlar arası bağlantı kurma
Beklenmeyen olaylar bilgisi: Beklenmedik ya da planlanmamış olaylara karşı mantıklı, ikna edici ve bilgili yanıtlar oluşturabilme becerisi	• Konuşulacak meselelerden sapma • Öğrenci fikirlerine karşılık verme • Fırsatların kullanımı • Öğretim sırasında öğretmenin içgörüsü • Araçların ya da kaynakların erişilebilirliğini ya da erişilemezliğini yanıtlama

Dörtlü Bilgi Modeli matematik bilgisi ile matematiği öğretme bilgisini birlikte ele almaktadır. Bu iki bilgi türünün önemli olduğuna, konu alan bilgisi ile PAB'ın uygulamada en iyi şekilde gözlemlenebileceğine vurgu yapması bakımlarından önem taşımaktadır.

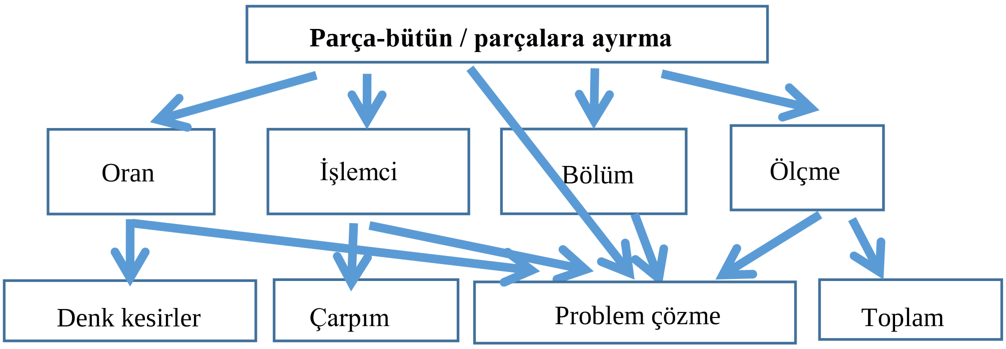
2.1.2. Kesirler

Kesirler İlkokul ve Ortaokul Matematik Öğretim Programı'nın hem en zengin ve karmaşık konularından birisi hem de günlük hayatta geniş kullanımı olan bir konudur (Alacaci, 2014). Müfredata bakıldığı zaman 1. sınıftan 8. sınıfa kadar tüm sınıf seviyelerinde kesirlere yönelik kazanımlara yer verildiği görülmektedir (MEB, 2013, 2015).

Kesirler diğer matematik öğrenme alanları ile olan ilişkisinden dolayı önemli bir konu olarak karşımıza çıkmaktadır. Kesirlerin şu öğrenme alanları ile bağlantısı vardır: (1) Cebirsel düşünme: Kesirler, cebirin bir parçasıdır. Değişken içeren denklemler sıklıkla kesirleri içerir veya kesirler kullanılarak çözülebilir. (2) Kesir hesaplaması: Kesirlere yönelik kavramsal bir anlayış olmadan kesirlerde hesaplama, sebepleri olmayan kurallara indirgenmiş olur. (3) Ondalık ve yüzdeler: Ondalık ve yüzde notasyonları sadece kesirlerin iki farklı gösterimidir. Bu üç gösterim arasında bağlantı kurularak yeni fikirler öğrenme yükü önemli ölçüde azaltılabilir. (4) Oran ve orantı: Bir kesrin parça-bütün kavramı sadece bir çeşit orandır. Ayrıca kesir notasyonu parça-parça oranları için de kullanılabilir (Van de Walle ve diğ., 2013). Ayrıca kesirler sıklıkla ölçme ve olasılıkta da kullanılır. Kesir hesaplamalarını anlamak da aynı şekilde cebirsel düşünme, ondalık gösterimler ve yüzdeler, orantısal akıl yürütme ve ölçme ile ilişkilidir (Van de Walle ve diğ., 2013).

Kesirler parça-bütün anlamı dışında ölçme, bölme, işlemci ve oran anlamlarına da sahiptir. Sinicrope, Mick ve Kolb (2002) problem ortamına göre bu anlamların kullanılabildiğini ifade etmiştir. Bu anlam çeşitliliği kesirlerin öğrenilmesini güçleştiren bir neden olarak görülmektedir (Toluk, 2002). Kesirleri anlamak için kesirlerin temsil ettiği mümkün olan bütün kavramları anlamak (Toluk, 2002; Van de Walle ve diğ, 2013) ve sonra da bu anlamları birbiriyle kaynaştırmak gerekmektedir (Toluk, 2002). Kesirlerin parça-bütün anlamı dışında ölçme, bölme, işlemci ve oran anlamlarının da bilinmesi ortaya çıkabilecek kavram yanılgılarını önlemek adına önemlidir (Alacaci, 2014).

Kesirlerin genellikle kullanılan ve diğerlerine oranla anlaşılması daha kolay olan anlamı parça-bütün anlamıdır. Parça-bütün anlamı genellikle "bütünün ne kadarı" sorusuna cevap vermek için kullanılmakta olup (Alacaci, 2014) diğer dört anlam için de temel teşkil etmektedir (Behr ve diğ., 1983; Charalambous ve Pitta-Pantazi, 2005). Ölçme anlamı, bir uzunluğu referans alarak verilen başka bir uzunluk için alınan referanstan yola çıkarak uzunluğu hesaplama anlamına gelir (Van de Walle ve diğ., 2013) ve tamsayılarla "ne kadar" sorusuna cevap verilemediği durumlarda kullanımı mevcuttur (Alacaci, 2014). Kesirlerin bölüm anlamı daha çok paylaşma durumlarında kullanılır; verilen belirli sayıdaki şeylerin belirli sayıda kişi ya da şeylere paylaştırılması söz konusudur. Bu anlamda parça-bütün anlamından farklı olarak farklı çeşit çokluklardan bahsetmek mümkündür (Alacaci, 2014). Oran anlamında ise aynı parçadan gelen iki şeyin oranından söz edilebilir. Fakat oranı verilen parçaların bütünü oluşturmak gibi bir zorunlulukları bulunmamaktadır. Kesirlerin işlemci anlamında bir miktarın belirli bir oranda büyütülmesi ya da küçültülmesinden bahsedilebilir (Alacaci, 2014). Kesir anlamlarının önemli kesir kavramları ile ilişkisini gösteren Behr ve diğerlerinin (1983) modeli Şekil 2.15'te yer almıştır.



Şekil 2.15. Kesir anlamlarının önemli kesir kavramları ile ilişkisini gösteren Behr ve diğerlerinin (1983) modeli (akt. Charalambous ve Pitta-Pantazi, 2005, s. 234).

Şekil 2.15'teki diyagram kesirlerde parça-bütün anlamının diğer dört anlam için temel teşkil ettiğini göstermektedir. Aynı zamanda bu diyagramdan denk kesir kavramının oran yorumu ile kolay anlaşılabileceği, işlemci ve bölüm anlamlarının sırasıyla kesirlerle çarpma ve toplama işlemlerinin anlaşılmasında yardımcı olarak görülebileceği, kesir problemlerinin çözümü için beş bileşenin hepsinin anlaşılmasının bir ön koşul olarak kabul edilebileceği sonuçları elde edilmektedir (Charalambous ve Pitta-Pantazi, 2005).

2.1.2.1. Doğal sayıların kesirlere aşırı genellenmesi. Öğrenciler yeni bir kavram öğrenirken yeni bilgilerini eski bilgileri üzerine inşa ederler. Daha önce doğal sayıları öğrenen öğrenciler kesirli ifadeler karşılarına çıktığı zaman doğal sayılarda öğrendiklerini uygularlar. Bu durum öğrencilerin öğrenmelerini desteklediği gibi engelleyebilmektedir de. Bu nedenle öğretmenlerin kesirlerin doğal sayılarla benzer olan ve farklı olan yönlerini göstermeleri önem taşımaktadır (Van de Walle ve diğ., 2013).

Doğal sayıların yaygın olarak kesirlere aşırı veya yanlış genellenme biçimleri aşağıda özetlenmiştir:

- Öğrenciler tarafından pay ve paydanın ayrı değerler olduğu düşünülmektedir (Van de Walle ve diğ., 2013). Stafylidou ve Vosniadou (2004) tarafından yapılan çalışma sonucunda da bu durumu destekleyecek nitelikte bulgular elde edilmiştir. Sayı doğrusu veya cetvel üzerinde kesir değerlerine yer verilmesi, öğrencilerin bu kavramı geliştirmelerine yardım edebilir (Van de Walle ve diğ., 2013).

- Pay ve paydayı ayrı sayılar olarak düşünen öğrenciler $\frac{2}{3}$ kesrini ifade eden üç eş parçadan iki eş parçanın birbirine eş parçalar değil de herhangi iki parça olduğunu düşünebilmektedirler (Van de Walle ve diğ., 2013).

- Öğrenciler kesirlerle hesaplamada doğal sayılardaki işlem kurallarını kullanmaktadırlar (Van de Walle ve diğ., 2013). Soylu ve Soylu (2005) tarafından yapılan çalışmada öğrencilerin kesirlerle toplama işlemini yaparken pay ve paydayı ayrı ayrı toplayarak sonuca ulaştıkları görülmüştür.

- Birçok öğrencinin kesirlerde sonucun çarpılandan daha küçük çıkabiliyor olmasını anlayamadığı (Haser ve Ubuz, 2003), verilen iki kesirden hangisinin büyük olduğunu belirlerken rakamları büyük olan kesirleri seçtikleri (Stavy ve Tirosh, 2000), verilen kesirlerin sıralanması istendiğinde öğrenciler tarafından sadece payda dikkate alınarak sıralama yapıldığı (Mcleod ve Newmarch, 2006) görülmüştür.

- Bölme sadece "böleni ters-çevir bölünenle çarp" kuralı ile verildiğinde bölümün bölünenden büyük olma durumu birçok öğrenci için anlaşılması zor bir durum olarak ortaya çıkmaktadır (Ma, 1999).

2.1.2.2. Kesirlerde model kullanımı. Niss (1987) tarafından model kavramı gerçek yaşam durumlarını temsil etmek amacıyla kullanılan matematiksel kavramlar ve bu matematiksel kavramlar arasındaki ilişkilerden oluşan bir sistem olarak tanımlanmaktadır. Model, modelleme sonucu ortaya çıkan bir ürün (Sağırlı-Özturan, 2010) ve karmaşık nesne ya da süreçlerin basitleştirilmiş bir gösterimi (Harrison, 2001) olup bir sürecin nasıl meydana geldiği ya da bir nesnenin nasıl oluştuğunu anlamamızda yardımcı olmaktadır (Harrison, 2001). Bender (1978'den akt. Akgün, Çiltaş, Deniz, Çiftçi ve Işık, 2013) matematiksel modeli "belirli bir amaç için oluşturulmuş ve gerçeğin bir parçasıyla ilişkisi bulunan soyut, basitleştirilmiş bir yapı" olarak ifade etmiştir. Aynı zamanda model kavramı Van de Walle ve diğerleri (2013) tarafından kavramı temsil etmede kullanılan resim, çizim veya nesne olarak tanımlanmaktadır. Çalışmada Van de Walle ve diğerleri (2013) tarafından yapılan model tanımının matematiği modelleme anlamında uygun olduğu düşünülerek modelin burada soyut bir kavramı somutlaştırma amacına hizmet ettiği düşünülmektedir.

Johnson (1998) bir sayının matematiksel modelinin bir bağlamda sayının temsili olduğunu ve modelin somut nesneler, sözlü hikâyeler, bir resim veya bir sembolden oluşabileceğini ifade etmektedir. Somut model, bir sayıyı temsil edecek şekilde düzenlenebilen manipülatiflerden oluşmaktadır. Örneğin, 12 kalem setinden beş tanesi kırmızı, yedi tanesi mavidir. Kırmızı kalemlerin seti bu kalem setinin $\frac{5}{12}$'idir. Sözel modelde de somut modele benzer şekilde kümeyi tanımlamak için kelimeler kullanılmaktadır. Bu modelde manipülatifler ve resimler yoktur. Resimsel model, ölçülebilecek birim miktarını gösteren taslak, resim veya bir çizimi içermektedir. Örneğin, bir dikdörtgen çizilir, bu dikdörtgen eş 12 parçaya ayrılır ve bu parçalardan beş tanesi taranırsa taralı kısım dikdörtgenin $\frac{5}{12}$'ini ifade etmektedir. Sembolik model de $\frac{a}{b}$ formundadır. Örneğin $\frac{5}{12}$, 12 parçadan oluşan bir birimden beş parça anlamına gelmektedir.

Behr ve diğerleri (1983) alan modeli, küme modeli ve uzunluk modelinin kesirleri temsil etmede yaygın olarak kullanıldığını ifade etmektedirler. Bu çalışmada, model terimi öğretmen adaylarının kesirleri temsil etmek, kesirlerin denkliğini temsil etmek, kesirlerle çarpma ve bölme işlemlerini temsil etmek için oluşturdukları çizimler (alan modeli, küme modeli ve uzunluk modeli) olarak alınmıştır.

Öğretim teknolojilerindeki gelişmelerle birlikte matematik öğretiminde model kullanımı daha ulaşılabilir hale gelmiştir. Bunun sonucu olarak da birçok ülke müfredatlarında model kullanımına daha fazla yer vermeye başlamışlardır (Blum ve Ferri, 2009). Model kullanımı matematiksel kavramların anlamlı şekilde öğrenilmesi, motivasyonu arttırması, bilgileri zihinde tutmayı kolaylaştırması, öğrencilerin matematiğe karşı olumlu tutum ve davranış geliştirmelerini sağlaması ve günlük yaşam ile matematik arasında bağlantı kurulmasını sağlaması bakımından önemlidir (Blum, 1993; Blum ve Ferri, 2009; Zbiek, 1998). Aynı zamanda model kullanımının iletişim becerilerini geliştirdiği, matematiksel dilin etkin şekilde kullanımı sağladığı ifade edilmektedir (Bayazit ve diğ., 2011). Öğrencilere sembolik biçimde verildiğinde anlaşılması güç görünen fikirler, uygun bir biçimde model kullanılarak açık hale gelebilir (Van de Walle ve diğ., 2013).

Kocaoğlu'na (2010) göre doğal sayılarla ilgili işlemlerin ve problemlerin çözümünde modellerden yararlanıldığı kadar kesirlerle ilgili işlemlerin çözümünde de modellerden yararlanılmalıdır. Soruya ilişkin kullanılan modeller, soruyu somutlaştırıp, anlamayı kolaylaştırarak doğru çözümün yapılmasına olanak sağlamaktadır. Henüz somut işlemler döneminde olan 1-4. Sınıf öğrencileri için kesirlere girişte bir takım modellerin kullanılması, kesirleri somut hale getirdiğinden dolayı kesir kavramının daha kolay öğrenilmesine ve öğrencilerin kesirlerde ilgili işlemleri daha kolay yapmalarına yardımcı olmaktadır (Biber ve diğ., 2013)

2. 1. 3. Araştırmanın Kuramsal Çerçevesi

Bu bölümde araştırmada benimsenen kuramsal çerçeveye yer verilmektedir. Araştırmanın kuramsal çerçevesi AB ve PAB bağlamında ayrı ayrı ele alınmıştır.

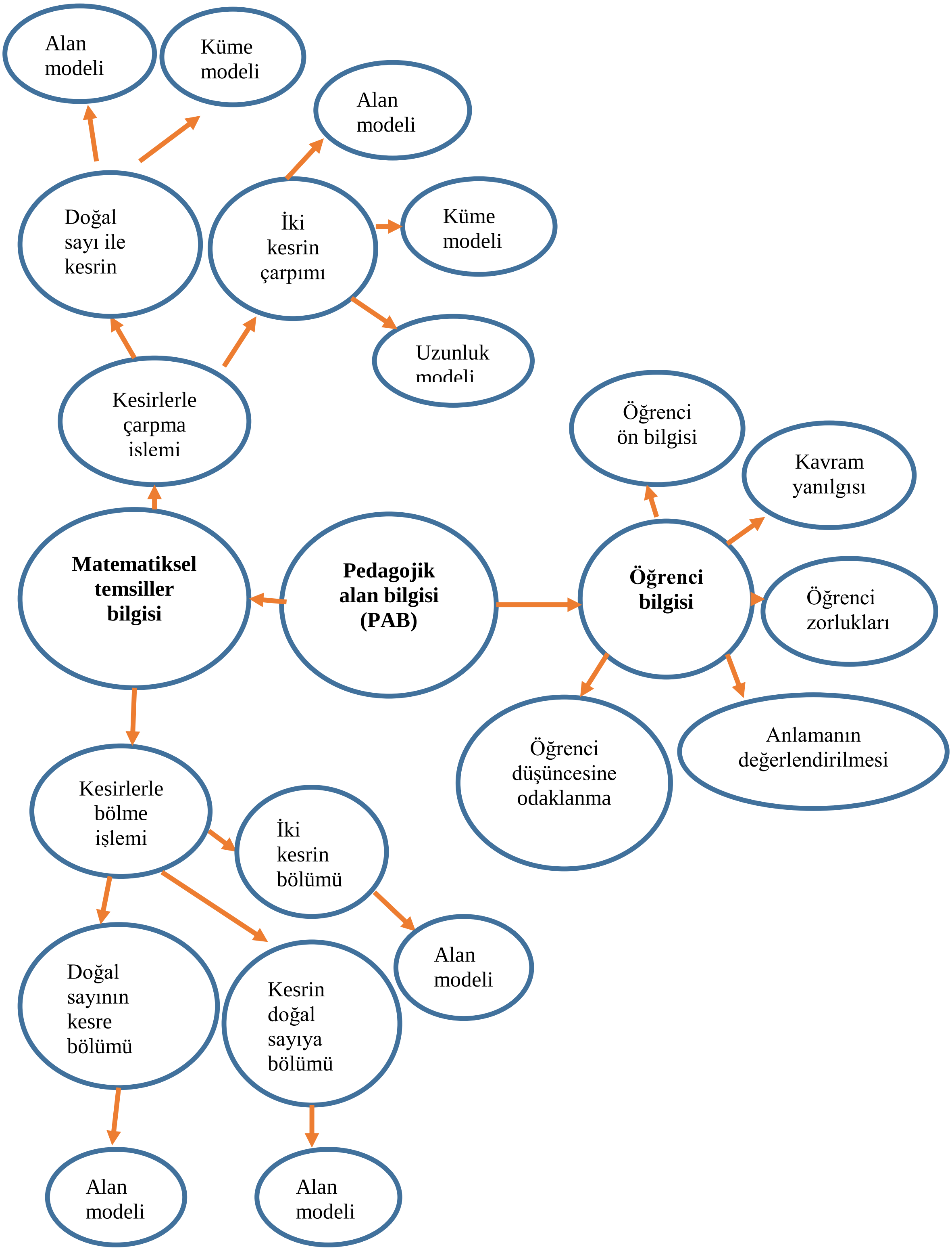
2.1.3.1. AB için kuramsal çerçeve. Araştırmada Shulman (1986) tarafından "Bir konu ile ilgili temel prensiplerin, kuralların, kavramların organizasyonunun bilinmesi ve sözdizimsel yapılar bilgisi" (s. 9) şeklinde yapılan AB tanımı kabul edilmiştir. Araştırmanın kapsamı dolayısıyla öğretmen adaylarının kesirlerde alan modeli, uzunluk modeli ve küme modeli kullanımına ilişkin sahip oldukları bilgileri "kesirlerde alan bilgileri" olarak ele alınmıştır.

2.1.3.2. PAB için kuramsal çerçeve. Öğretmen bilgisi modelleri incelendiği zaman birçok araştırmacının öğretmenin sahip olması gereken bilgi türlerini tanımlamak için farklı çerçeveler oluşturdukları ve araştırmacıların çerçevelerinde bazı ortak bileşenlerin yer aldığı görülmüştür. Oluşturulan çerçevelerde birçok araştırmacının öğrenci bilgisinden bahsettiği farkedilmiştir (An ve diğ., 2004; Baker ve Chick, 2006; Baki, 2010; Ball ve diğ., 2008; Fennema ve Franke, 1992; Grossman, 1990; Hashweh, 2005; Kennedy ve diğ., 1993; Kovarik, 2008; Lee, 2006; Shulman, 1987). Bilişsel olarak rehberli öğretim (Cognitively Guided Instruction-Carpenter, Fennema, Peterson, Chiang, Loef, 1989), Purdue Problem Merkezli Matematik Projesi (Cobb, Wood, Yackel, 1990; Cobb ve diğ., 1991) ve SummerMath (Simon ve Schifter, 1991) gibi bazı araştırma projeleri öğretmenlerin öğrenci düşüncesine ilişkin bilgilerinin daha etkili öğretime neden olduğunu keşfetmişlerdir (Kovarik, 2008). Etkili öğretim için, öğretmenlerin yalnızca öğrencilerin zorluk çektiği kavramları bilmeleri beklenmemekte, aynı zamanda gerektiği gibi davranabilmeleri için bu yanlış anlamaları ortaya çıkarma yolları da aramaları gerekmektedir (Didiş, Erbaş, Çetinkaya ve Çakıroğlu, 2014). NCTM (2000) öğretmenlerin öğrencilerin sıklıkla zorluk çektiği fikirleri ve yaygın yanlış anlamalarını birleştirmeye yardım eden yolları bilmeleri gerektiğini, etkili öğretmenlerin öğrencilerin ön bilgilerini açığa çıkaran dersleri nasıl planlayacaklarını ve nasıl sorular soracaklarını bilmeleri gerektiğini ifade etmektedir. Öğrenciyi tanıma bilgisi; öğrencinin ön bilgisi, anlaması, kavram yanılgılarının bilinmesi, matematik ve matematik öğretimine olan inancını bilmeyi ve öğrenci zorluklarından haberdar olmayı gerektirmektedir (Baki, 2010, 2012; Ball ve diğ., 2008; Marks, 1990; Shulman, 1986, 1987). Öğrenci bilgisinin öneminden hareketle PAB'ın değerlendirilmesinde öğrenci bilgisinin önemli bir bileşen olduğu düşünülerek söz konusu tez çalışmasında öğrenci bilgisinin PAB bileşeni olarak alınmasına karar verilmiştir.

Shulman'ın (1986) da belirttiği gibi PAB özel olarak bir konunun öğrenimini neyin kolaylaştıracağının ve zorlaştıracağının farkında olmayı içermektedir. Bu noktada öğrenmeyi zorlaştıran ve bireyi yanlışa götüren kavram yanılgıları ve kavramın doğası gereği ya da bireyin kavramı yapılandıramamasından kaynaklanan öğrenme zorlukları dikkat edilmesi gereken bir konu olarak karşımıza çıkmaktadır (A. Baki, 2012; Ball, 1988). A. Baki (2012) öğrenciyi tanıma bilgisinin bir bileşeni olarak kavram yanılgısı ve öğrenme zorluklarının etkili öğretimin gerçekleştirilebilmesi için öğretmenler tarafından göz önünde bulundurulması gerektiğini belirtmiştir. Ayrıca Türkdoğan (2011) öğrenciler için dezavantaj gibi görülen bu durumların doğru örnek seçimi ve temsillerle avantaja çevirmenin mümkün olduğundan bahsetmiştir. Öğretim bilgisi için sahip olunması gereken öğrenci bilgisinin yanı sıra öğretmenin konuyu öğrencilere kavratmak için en etkili öğretim yöntem ve stratejileri, ele alacağı konunun programdaki yerini ve diğer konularla ilişkisini, konuyu sunmak için gerekli olan en güçlü analojileri, örnekleri, açıklamaları, temsilleri bilmesi ve kullanması önem taşımaktadır (Ball ve diğer., 2008; Shulman, 1987). Hill, Rowan ve Ball

(2005) tarafından gerçekleştirilen çalışma öğretmenlerin öğrencilerin matematiksel anlamalarını ve gelişimlerini desteklemede konuya ilişkin uygun temsilleri kullanmalarının, öğretmenlerin matematiksel bilgileri ile öğrencilerin başarıları arasında anlamlı bir ilişki olduğunu göstermiştir.

Söz konusu tez çalışmasında PAB tanımı olarak konu ve kavramların en faydalı gösterimlerini bilme, konuların öğrenilmesini nelerin kolaylaştırdığını ya da zorlaştırdığını bilme, öğrencilerin kavram yanılgılarını bilme, kavramların anlaşılması ve kavram yanılgılarının giderilmesine yönelik analojiler, temsiller, örnekler, açıklamaları bilme, farklı yaş ve farklı seviyedeki öğrencilerin kavramlarla ilgili düşünce ve algılarını, ön bilgilerini bilme (Shulman, 1986) kabul edilmiştir. Shulman'ın (1986) PAB tanımına bakıldığı zaman öğrenci bilgisi üzerinde durduğu ve kavramların anlaşılmasında temsil kullanımından bahsedildiği görülmektedir. Öğretimde öğrenci bilgisinin ve matematiksel temsiller bilgisinin öneminden hareketle Kovarik'in (2008) çalışmasında PAB bileşenleri olarak aldığı öğrenci bilgisi ve matematiksel temsiller bilgisi tez çalışmasında PAB bileşenleri olarak ele alınmıştır. Öğrenci bilgisinin alt bileşenleri olarak Kovarik'in de (2008) ele aldığı kavram yanılgısı, öğrenci ön bilgisi ve anlamanın değerlendirilmesi alınmış; alanyazında yer alan öğrenci bilgisi tanımlamalarından yola çıkarak öğrenci düşüncesini anlamanın ve öğrencilere düşüncelerini açıklama imkânı tanımanın öneminden hareketle öğrenci düşüncesine odaklanma ve öğrenci zorlukları (Shulman, 1986) da alt bileşen olarak eklenmiştir. Alanyazından yararlanarak bu alt bileşenlerde öğretmen adaylarının sahip olması gereken kriterler belirlenmiştir. Matematiksel temsiller bilgisinde ise çalışmanın amacı doğrultusunda öğretmen adaylarının kesirlerle çarpma ve bölme işlemlerinde alan modeli, uzunluk modeli ve küme modelini nasıl kullandıkları incelenmiştir. Şekil 2.16'da PAB için araştırmanın kuramsal çerçevesi yer almıştır.



Şekil 2.16. PAB için araştırmanın kuramsal çerçevesi

2.2. İlgili Araştırmalar

Tezin bu bölümünde, araştırmanın daha verimli olabilmesi ve alanyazında yer alan bazı çalışmaların sonuçlarını görebilmek adına öğretmen bilgisi ile ilgili araştırmalara, kesirlerde AB ve PAB ile ilgili araştırmalara, kesirlerle çarpma ve bölme bilgisi ile ilgili araştırmalara ve kesirlerde model kullanımı ile ilgili araştırmalara yer verilmektedir.

2.2.1. Öğretmen Bilgisi İle İlgili Araştırmalar

Alanyazın incelendiğinde öğretmen bilgisi ile ilgili yapılmış çok sayıda araştırmaya rastlamak mümkündür. Alanyazında PAB'ın varlığını PAB bileşenlerine göre ortaya çıkarma amaçlı yapılan çalışmaların (Akkaş, 2014; Altaylı, Konyalıoğlu, Hızarcı ve Kaplan, 2014; Baştürk ve Dönmez, 2011a, 2011b; Bukova-Güzel, 2010; Gökkurt, 2014; Gökkurt, Şahin, Soylu ve Doğan, 2015; Güler, 2014; Karahasan, 2010; Kim, 2004; Şahin, Erdem, Başıbüyük, Gökkurt ve Soylu, 2014; Yeşildere ve Akkoç, 2010) yanı sıra gelişimine odaklanan çalışmalar (Lannin ve diğ., 2013) da yer almıştır. Ayrıca PAB ile konu alan bilgisi arasındaki ilişkiyi araştıran çalışmalara (Boz, 2004; Capraro, Capraro, Parker, Kulm ve Raulerson, 2005; Even, 1993; Gökkurt, Şahin ve Soylu, 2012; Türnüklü, 2005) da rastlandığı gibi farklı ülkelerdeki öğretmenlerin PAB'larını kıyaslayan çalışmalar (An ve diğ., 2004; She, Lan ve Wilhlem, 2011) da mevcuttur. Aynı zamanda alanyazın incelendiğinde hem öğretmenlerin AB'lerini ve PAB'larını inceleyen (Akkaş, 2014; Baker ve Chick, 2006; Cankoy, 2006; Chick ve Harris, 2007; Gökkurt ve diğ., 2012; Kim, 2004; Konyalıoğlu, Özkaya ve Gedik, 2012; Stump, 1999; Şahin ve diğ., 2014) hem de öğretmen adaylarının AB'lerini ve PAB'larını inceleyen çalışmaların (Altaylı ve diğ., 2014; Baştürk ve Dönmez, 2011a, 2011b; Bukova-Güzel, 2010; Çakmak, Konyalıoğlu ve Işık, 2014; Even, 1993; Gökkurt, 2014; Gökkurt ve diğ., 2015; Güler, 2014; Karahasan, 2010; Kubar, 2012; Kula, 2011; Stump, 1999; Şahin ve diğ., 2014; Toluk-Uçar, 2009; Türnüklü ve Yeşildere, 2007; Yeşildere ve Akkoç, 2010) mevcut olduğu görülmektedir. Tüm bunlar haricinde alanyazında fonksiyon (Even, 1993; Karahasan, 2010), eğim (Stump, 1999), kesir (An ve diğ., 2004; Baker ve Chick, 2006; Kim, 2004; Gökkurt ve diğ., 2012; Türnüklü ve Yeşildere, 2007), oran-orantı (An ve diğ., 2004; Chick ve Harris, 2007), cebir (Güler, 2014; Kim, 2004; She ve diğ., 2011), olasılık (Kim, 2004), ondalık gösterim (Kim, 2004; Türnüklü ve Yeşildere, 2007), tamsayı (Gökkurt ve diğ., 2012; Kubar, 2012; Türnüklü ve Yeşildere, 2007), katı cisimler (Bukova-Güzel, 2010), sayı örüntüleri (Yeşildere ve Akkoç, 2010), limit (Baştürk ve Dönmez, 2011a, 2011b; Kula, 2011), üslü sayı (Gökkurt ve diğ., 2012), faktöriyel (Cankoy, 2006; Gökkurt ve diğ., 2012), denklem çözümü (Gökkurt ve diğ., 2012), türev (Konyalıoğlu ve diğ., 2012), dörtgenler (Akkaş, 2014), üç boyutlu cisimler (Altaylı ve diğ., 2014; Çakmak ve diğ., 2014), geometrik cisimler (Gökkurt, 2014; Gökkurt ve diğ., 2015) gibi konularda yapılmış öğretmen bilgisi ile ilgili araştırmalara da rastlamak mümkündür.

Tezin bu kısmında öğretmen bilgisi ile ilgili tüm araştırmalara ayrıntılı olarak yer verilmeyip sadece tartışma kısmında yer alan araştırmalara değinilmektedir. Bu kısımda yer alan kesir konusunda yapılmış çalışmalar sadece kesir konusuna odaklanmadığı için bir sonraki kısım olan “Kesirlerde Alan Bilgisi ve Pedagojik Alan Bilgisi İle İlgili Araştırmalar” kısmında yer almamıştır.

Even (1993) tarafından yürütülen çalışmanın amacı ortaöğretim matematik öğretmen adaylarının fonksiyon kavramının öğretimi bağlamında sahip oldukları AB’lerini ve bunların PAB ile olan ilişkisini incelemektir. Veri toplamanın ilk aşamasında 152 öğretmen adayına fonksiyon hakkındaki bilgilerini ortaya çıkarmak amaçlı açık uçlu sorulardan oluşan bir anket uygulanmıştır ve ardından ikinci aşama olarak da 10 öğretmen adayına aynı anket uygulanarak onlarla derinlemesine görüşmeler gerçekleştirilmiştir. İkinci aşamada yer alan öğretmen adayları ilk aşamada yer alan öğretmen adaylarından farklıdır, sadece yaş, cinsiyet, akademik geçmiş bakımlarından benzerlik göstermektedirler. Kayıt altına alınan görüşmeler transkript edilmiş her bir katılımcının görüşme sorularına verdiği cevaplar özetlenmiş, dikkate değer kısımları kayda alınmış ve sonrasında her bir görüşme sorusu için katılımcılar arasında bir cevap tablosu oluşturulmuştur. Son cevap, cevaba götürmede kullanılan metod, yapılan hatalar, fikirler, tercihler, öğrenci hatalarını değerlendirme yolları ve diğer önemli açıklamalar gibi çeşitli boyutlara dikkat edilmiştir. Sonuçta katılımcıların çoğunun modern bir fonksiyon kavramına (A'dan B'ye bir f fonksiyonu A ve B'nin kartezyen çarpımının herhangi bir alt kümesi olarak tanımlanır, öyle ki her $a \in A$ için $(a,b) \in f$ gibi bir $b \in B$ vardır) sahip olmadıkları, modern fonksiyon kavramına sahip öğretmen adaylarının da öğrencilerin yaşadıkları zorlukları tanımlama ve içeriğin buna göre sunumu hususlarında zayıf oldukları ortaya çıkmıştır.

Stump (1999) tarafından Amerika Birleşik Devletleri'nde 18 öğretmen adayı, 21 öğretmen ile eğim konusuna ilişkin anlama, kavram tanımı ve PAB'larını incelemek amacıyla yapılan çalışmada öğretmen adayları ve öğretmenlerin öğrenci hatalarını belirlemede yeterli düzeyde oldukları görülmüştür. Karahasan (2010) tarafından gözlem, görüşme, doküman ve işitsel materyallerin kullanıldığı bileşke ve ters fonksiyon konularında ortaöğretim matematik öğretmen adaylarının PAB'larını incelemek amacıyla yapılan çalışma sonucunda öğretmen adaylarının öğrenci hatalarını belirlemede yeterli düzeyde oldukları ortaya çıkmıştır. Yine Gökkurt (2014) tarafından ortaokul matematik öğretmen adaylarının geometrik cisimler konusundaki PAB'larını PAB bileşenlerine göre incelemek amacıyla yapılan çalışma ile Gökkurt ve diğerleri (2015) tarafından öğretmen adaylarının geometrik cisimlere yönelik PAB'larını öğrencilerin anlamalarını bilme ve öğretim stratejileri bilgileri kapsamında incelemek amacıyla yapılan çalışma sonucunda öğretmen adaylarının öğrenci hatalarını belirlemede yeterli düzeyde oldukları görülmüştür. Aynı zamanda Gökkurt ve diğerlerinin (2015) çalışması sonucunda öğretmen adaylarının öğrenci hatalarının giderilmesine yönelik çözüm önerilerinin yeterli düzeyde olmadığı sonucuna ulaşılmıştır.

Türnüklü ve Yeşildere (2007) tarafından yürütülen çalışmanın amacı öğretmen adaylarının PAB yeterliliklerini belirlemektir. 45 son sınıf ortaokul matematik öğretmeni adayının PAB yeterlilikleri kesirler, ondalık gösterim ve tamsayılar konularındaki 4 açık uçlu soru yardımıyla incelenmiştir. Öğretmen adaylarından toplanan veriler hem nitel hem nicel olarak analiz edilmiştir. Çalışma sonucunda öğretmen adaylarının kesirler ve ondalık gösterimler konusunda öğrencilerin kavram yanılgılarını belirlemede zorluğa sahip oldukları, yeterli değerlendirme bilgisine sahip olmadıkları ve uygun kriterleri oluşturamadıkları görülmüştür. Öğretmen adayları kesirlerde derin bir anlayışa sahip olmadıkları için öğrencilerin cevaplarındaki problemin ne ile ilgili olduğunu belirlemede zorluklara sahiplerdir. Tamsayılar konusunda uygun matematiksel bilgiye sahip öğretmen adayları kavram yanılgılarının sebeplerini anlamaksızın çözümler üretmeye çalışmışlardır. Çalışma sonucunda derin bir matematiksel bilgiye sahip olmanın matematik öğretimi için gerekli fakat yeterli olmadığı, matematik öğretim bilgisi ile matematik bilgisi arasında bağlantının olduğu ortaya çıkmıştır. Öğretmen adaylarının yeterli matematiksel alan bilgisine sahip olmadıkları görülmüştür.

Kula (2011) tarafından yürütülen yüksek lisans tez çalışmasının amacı ortaöğretim matematik öğretmen adaylarının limit kavramına ilişkin alan ve alan öğretimi bilgilerinin öğretim süreçlerine yansımalarını Dörtlü Bilgi Modeli'nden yararlanarak incelemektir. Çalışmanın katılımcılarını dört son sınıf öğrencisi oluşturmuş olup araştırmada özel durum çalışması deseni kullanılmıştır. Yarı yapılandırılmış mülakat, gözlem ve yazılı dokümanların veri toplama aracı olarak kullanıldığı çalışmada öğretmen adaylarının limit kavramına ilişkin hazırladıkları ders planları incelenmiş, ders planlarına ilişkin görüşmeler gerçekleştirilmiş, sonrasında adayların Okul Deneyimi dersi kapsamında staj okullarındaki öğretim uygulamaları gözlenmiş ve adaylarla her ders sonrası derslerinde öne çıkan durumlar hakkında görüşmeler yapılmıştır. Limit kavramına ilişkin öğretim uygulamaları tamamlandığında öğretmen adayları ile genel bir görüşme ve Dörtlü Bilgi Modeli'nin birimlerine ait göstergelere ilişkin kendilerini nasıl değerlendirdiklerine yönelik olarak da bir görüşme daha gerçekleştirilmiştir. Üç öğretmen adayının limite ilişkin kavramsal bilgiyi geliştirmeye daha çok odaklanırken, bir öğretmen adayının ise öğretimini işlemsel bilgiye odaklı sürdürdüğü görülmüştür. Ayrıca adayların, öğrencilerin sahip oldukları kavram yanılgıları ve anlama zorluklarını belirlemede yetersiz oldukları gözlemlenmiştir.

Chick ve Harris (2007) tarafından yürütülen çalışmanın amacı altıncı sınıflarda öğretim gerçekleştiren iki öğretmenin oran konusunun öğretiminde kullandıkları soru tiplerini incelemek ve sınıfta kullandıkları örnek seçimlerinden yola çıkarak sahip oldukları PAB ile ilgili çıkarımlarda bulunmaktır. Veri toplama aracı olarak görüşmeler, alan notları, gözlemler, video kamera ve ses kayıtlarının kullanıldığı çalışma sonucunda öğretmenlerin genellikle ön bilgi ile bağlantı kurdukları görülmüştür. Bukova-Güzel (2010) tarafından yürütülen çalışmanın amacı ortaöğretim matematik öğretmen adaylarının katı cisimler konusundaki PAB'larını incelemektir. Öğretmen adaylarıyla yarı-yapılandırılmış görüşmeler gerçekleştirilmiş, öğretmen adaylarına ders planları hazırlatılarak uygulama okullarındaki öğretim uygulamaları video kamera ile kayıt altına alınmıştır. Çalışma neticesinde öğretmen adaylarının genellikle ön bilgi ile bağlantı kurduğu sonucu elde edilmiştir. Yine Bukova-Güzel'in (2010) çalışması öğretmen adaylarının muhtemel öğrenci hatalarını dikkate almadıklarını, öğrencilerin öğrenmesini belirlemede alternatif değerlendirme teknikleri tercih etmediklerini göstermiştir.

Baştürk ve Dönmez (2011a) tarafından yürütülen çalışmada öğretmen adaylarının limit ve süreklilik konusundaki PAB'ları PAB'ın alt bileşenlerinden biri olan öğretim programı bilgisine göre incelenmiştir. Aynı zamanda Baştürk ve Dönmez (2011b) öğretmen adaylarının limit ve süreklilik konusundaki ölçme-değerlendirme bilgilerini de incelemişlerdir. Araştırmada durum çalışması yöntemi kullanılmıştır. 37 öğretmen adayına limit ve süreklilik alan bilgisi anketi uygulanmıştır. Anket sonuçlarına göre konu bilgisi farklı seviyelerdeki dört öğretmen adayı seçilerek limit ve süreklilik konusundaki ders planları incelenmiş ve mikro öğretimleri gözlemlenmiştir. Araştırma kapsamındaki veriler nicel ve nitel yöntemlerle analiz edilmiştir. Alan bilgisi anketinin analizinde yüzde ve frekans hesaplaması kullanılmıştır. Mikro öğretim video kayıtları ve ders planları betimsel analiz kullanılarak analiz edilmiştir. Sonuçlar öğretmen adaylarının öğretim programı ve ölçme-değerlendirme bilgilerinin sınırlı olduğunu göstermiştir.

Gökkurt ve diğerleri (2012) tarafından yürütülen öğretmenlerin alan bilgileri ile pedagojik alan bilgileri arasındaki ilişkinin incelendiği araştırmaya katılan 41 ortaokul matematik öğretmenine kesirler, tam sayılar, üslü sayılar, faktöriyel ve denklem çözümü konularına ait sekiz açık uçlu soru sorularak ardından yarı-yapılandırılmış mülakatlar yapılmış ve veri toplama aracı olarak öğretmenlerin yazılı açıklamaları ve mülakatlar kullanılmıştır. Öğretmenlerin PAB'larının matematiksel alan bilgisi ile ilişkili olup olmadığının ortaya konması amaçlandığı için sekiz sorunun her biri birinci soru öğretmenlerin PAB'larını belirlemeye yönelik, ikinci soru matematiksel alan bilgilerini belirlemeye yönelik olmak üzere iki açık uçlu sorudan oluşmuştur. Öğretmenlerle yapılan mülakatlar sonucu elde edilen açıklamalar içerik analizine tabi tutulmuştur. Verilerin analizinde öğretmenlerin PAB bilgi düzeylerini tespit etmek amacıyla Kinach'ın (2002) geliştirmiş olduğu anlama düzeyi çerçevesi temel alınmıştır. Çoğu öğretmenin matematiksel bilgilerinin yetersiz olduğu, genellikle işlemsel düzeyde bir anlama ve öğretimsel açıklamalara sahip oldukları görülmüştür. Yapılan çalışma sonucu PAB ile konu bilgisi arasında sıkı bir ilişkinin olduğu ortaya çıkmıştır. Benzer şekilde Boz (2004), Capraro, Capraro, Parker, Kulm ve Raulerson (2005), Türnüklü (2005) tarafından yapılan çalışmalarda da AB ile PAB arasında bir ilişkinin varlığından bahsedilmiştir.

Şahin ve diğerleri (2014) tarafından yürütülen çalışmada öğretmenlerin PAB'larının üniversite eğitimlerinden öğretmenlik mesleğine kadar olan süreçte nasıl değiştiği tespit edilmiştir. Çalışmaya 67 üçünü sınıf öğretmen adayı, 98 dördüncü sınıf öğretmen adayı ve 45 matematik öğretmeni katılmıştır. Veri toplama aracı olarak Matematik Pedagojik Alan Bilgisi Testi, araştırma yöntemi olarak ise kesitsel araştırma yöntemi kullanılmıştır. Verilerin analizinde SPSS 13.00 paket programı kullanılmış olup, katılımcıların öğrencileri anlama ve öğretim strateji bilgi düzeylerini karşılaştırmak için tek yönlü ANOVA ve gruplar arası farkın yönünü belirlemede Post-Hoc kullanılmıştır. Çalışma sonucunda öğrencileri anlama ve öğretim stratejisi bilgisi boyutunda öğretmenler lehine anlamlı bir farklılık bulunduğu, katılımcıların hem öğrencileri anlama, hem öğretim stratejileri bilgilerinin hem de PAB'larının orta düzeyde olduğu görülmüştür.

2.2.2. Kesirlerde Alan Bilgisi ve Pedagojik Alan Bilgisi ile İlgili Araştırmalar [2]

Leinhardt ve Smith (1985) tarafından yürütülen çalışmanın gerçekleştirilmesi için benzer seviyelerde öğretim yapmakta olan 12 öğretmen arasından dört dördüncü sınıf öğretmeni ve son sınıfta öğrenim görmekte olan dört öğretmen adayı seçilmiştir. Bu öğretmenlerden iki tanesi yüksek, bir tanesi orta ve bir tanesi de düşük AB'ye sahiptir. Öğretmen adaylarının AB'leri ise orta ile düşük seviyededir. Araştırmanın ilk iki yılında bu öğretmenler hakkında kapsamlı veriler toplanmıştır. Her sene yaklaşık üç ay gözlemlenmişler, 10 saat boyunca video kamera ile kayıt altına alınmışlar, kayıt altına alınan dersler, derslerini planlama ve değerlendirme, kesir bilgisi üzerine görüşmeler yapılmıştır. Ayrıca matematik konuları hakkında kart sınıflandırma etkinlikleri (card sort tasks) de verilmiştir. Toplanan veriler için iki tür analiz yapılmıştır: İlk olarak, kesir bilgisi üzerine olan görüşmeler ve kart sınıflandırma etkinlikleri katılımcıların yanlış anlama ve kafa

[2] Tezin bu kısmında kesirlerde AB ve PAB ile ilgili araştırmalara kronolojik bir sıra ile yer verilmiştir.

karışıklıklarının yanı sıra tutarlı bilgi ve anlama örneklerini belirlemek için analiz edilmiştir. İkinci olarak da yüksek konu alan bilgisine sahip iki öğretmen ve orta konu alan bilgisine sahip bir öğretmen daha yakından incelenmiştir. Bu üç öğretmenin her birinin bir veya iki ders süren kesirlerde sadeleştirme derslerinin video kayıtları ayrıntılı olarak incelenmiştir. Öğretmenlerin dersleri aynı ilerlemede olmuş ve önceki derslerini benzer sırada tamamlamışlardır. Öğretmenler benzer metinler ve benzer örnekler kullanmışlardır. Araştırmacılar tarafından performansları yüzeysel olarak benzer, fakat bilgiyi düzenlemeleri esasen farklı öğretmenler tarafından kullanılan ve iletilen içerikteki farklılıklar belirlenmeye çalışılmıştır. Çalışmanın sonucunda öğretmen ve öğretmen adaylarının temel kesir bilgilerinde kayda değer bir değişkenlik olduğu, öğretmenlerin öğretmen adaylarına göre mi daha derin ve detaylı kategorilere sahip oldukları, bununla birlikte öğretmenlerin konu bilgi düzeylerinde farklılıklar olduğu fark edilmiştir. Ders kapsamları ve kesir bilgileri oldukça benzer görünen üç öğretmenin içeriğin öğrencilere sunumunda önemli farklılıklar olduğu ortaya çıkmıştır. Özellikle algoritmik bilgilerinin sunulmasının yanı sıra sunulan kavramsal bilgi düzeyinde önemli farklılıklar vardır. Öğretmenler konulara farklı şekillerde girmişler ve farklı noktaları vurgulamışlardır.

Chestnut-Andrews (2007) tarafından yürütülen doktora tez çalışmasının amacı öğretmenlerin PAB'larını öğretmen eğitimi bağlamında inceleyen bir analiz geliştirmektir. İlkokul öğrencilerine ders esnasında denk kesirler öğretiliyorken öğretmenlerin kullandıkları AB'leri ve matematiksel PAB'larını ortaya çıkarma amaçlı yapılan çalışmada üç aşamalı bir değerlendirme yöntemi kullanılmıştır. PAB'ları daha fazla olan öğretmenlerin bilişsel yapı ve öğretim yapıları PAB'ları daha az olan öğretmenlerinkiyle karşılaştırılmıştır. Çalışma sonucunda denk kesirler konusunda daha fazla bilgiye sahip olan öğretmenler oldukça bağlantılı kavram haritaları ile gösterilen denk kesirler konusunda daha derin bir anlayış göstermişler ve ders sırasında çeşitli model temsilleri kullanabilmişlerdir.

Newton (2008) tarafından yürütülen çalışmanın amacı 85 öğretmen adayının kesir bilgilerini incelemektir. Veriler öğretmen adaylarının öğrenim görmekte olduğu üniversitede yer alan bir ders aracılığıyla toplanmıştır. Ders dört kısma ayrılmıştır, bu bölümlerin her birinde kesirler yer almıştır. Bu bölümlerde sayılar ve temel sayı teorisi, çıkarma ve toplama, çarpma ve bölme yer almıştır. Her işlem için çeşitli sayı türleri (doğal sayılar, kesirler, negatif sayılar gibi) düşünülmüştür. Öğrencilerden bir işlemin anlamı ve bu sayılarla ilişkili belirli algoritmalar arasında bağlantı kurması beklenmiştir. Kesir bilgisi testi 20 maddeden oluşmaktadır, bunlardan 15 tanesi bağlamı olmayan rutin problemlerdir, üç tanesi rutin sözlü problem ve iki tanesi de rutin olmayan problemdir. 15 problemin üç tanesi toplama, üç tanesi çıkarma, dört tanesi bölme ve beş tanesi çarpma problemidir. 15 problem için üç aşamalı puanlama sistemi (0-2) kullanılmıştır. Sözlü problemlerde de üç aşamalı puanlama sistemi (0-3) kullanılmıştır. Son test, Lin'den (1969) uyarlanan bir soru hariç ön test ile aynıdır. Dersin ilk gününde kesir bilgisi ön testi uygulanmıştır, son test ise dönemin sonunda uygulanmıştır. Verilerin analizinde MANOVA kullanılmıştır. Sonuç olarak dersin başında öğretmen adaylarının sınırlı ve parçalı kesir bilgisine sahip oldukları, işlemsel beceri, temel kesir kavramları bilgisi ve sözlü kesir problemlerini çözme yeteneğini değerlendiren problemlerdeki başarı oranlarının %70-78 arası değiştiği, yaptıkları hataların rastgele yapılmış hatalar ya da küçük hatalar olmadığı, bir çözüm yöntemi seçerken kesir algoritmalarını yanlış uyguladıkları, soruların çözümünde az esneklik gösterdikleri görülmüştür. Dönem sonunda sadece öğretmen adaylarının daha iyi bir performans gösterdikleri görülmemiş, aynı zamanda yaptıkları hataların doğasında da değişikliklerin meydana geldiği ortaya çıkmıştır. Dönem başındaki hatalar hem düşük beceri hem de yanlış anlamaları ortaya koymuşken, hala süren hatalar öncelikle düşük beceriyi göstermektedir. Öğretmen adayları son testte de hatalar yapmış olmalarına rağmen, kesirlerin daha derin bir anlayışına sahip olduklarına dair kanıtlar görülmüştür.

Chinnappan ve Desplat (2012) tarafından yürütülen çalışmada kesirleri içeren gerçek yaşam problemlerinin öğrenimi ve öğretilmesindeki zorluklar araştırılmıştır. Araştırmacılar tarafından Hill, Ball ve Schillng'in (2008) çerçevesi temel alınmış ve öğretmenlerin konu alan bilgisi ve PAB'ın alt kategorisi olarak yer alan alan ve öğrenci bilgisi araştırılmıştır. Bunu incelerken aynı zamanda araştırmacılar öğretmenlerin AB'leri ve PAB'ları arasındaki ilişkiyi bulmayla da ilgilenmişlerdir. Çalışmaya ikisi deneyimli (30-35 yıl), ikisi az deneyimli (4-5) yıl olmak üzere dört öğretmen katılmıştır. Öğretmenlere "$1\frac{1}{2} \div \frac{1}{2}$ işlemi aşağıdaki problemlerin hangisini göstermede kullanılabilir?" şeklinde bir soru yöneltilmiştir. Aynı zamanda bu tür problemlerle uğraşırken öğrencilerin hangi kavram yanılgılarına sahip olabileceği hakkındaki görüşleri alınmış, öğrencilerin bu tip problemlerle başa çıkmalarına yardım edecek etkinlik örnekleri sağlamaları istenmiştir. Ortaya koydukları kavram yanılgıları ile öğretmenlerin öğrencileri değerlendirmede kullanabilecekleri strateji ve yaklaşım örnekleri istenmiş, öğretmenlerin verilen probleme benzer problemlerle uğraşırken çocukların dersler arası uygulamalar hakkındaki öğretmenlerin görüşlerinin neler olduğu incelenmiştir. Verilen problem için toplanan veriler öğretmenlerin kesir problemine ilişkin konu alan bilgilerinin biraz sınırlı olduğunu göstermiştir. Katılımcıların hiçbirinin doğru cevap kümesini seçememesinden dolayı soruyu doğru şekilde okumadıkları ya da kelimelerinde karışıklık meydana gelmiş olabileceği düşünülmüştür. Öğretmenler $\frac{1}{2}$'e bölmek ile ikiye bölmenin farklı şeyler olduğunu fark edememişlerdir, sadece bir tanesi 2 ile bölme ile $\frac{1}{2}$ ile çarpma arasında ters bir ilişki olduğunu doğru şekilde ifade etmiştir. Fakat bu öğretmen cevap olarak verilen her üç bağlamın da verilen işlem ile ilgili olduğunu söylemeye devam ettiği için bu bilgiyi karar verme sürecinde kullanamadığı ifade edilmiştir. Chinnappan ve Desplat (2012) tarafından yürütülen çalışmada öğretmenler 1,25 doların $1\frac{1}{4}$ ile aynı olduğunu öğrencilerin fark edememesini ana öğrenci zorluğu olarak belirtmekle beraber kendilerinin de bu iki ifadenin aynı olduğunu fark edemedikleri görülmüştür. Ayrıca bölme ve çarpma arasındaki ters ilişkinin ilişkisel anlayışını vurgulamışlardır. Katılımcılar verilen soruyu tam olarak anlamamış olsalar da dört öğretmenin hepsi kesir problemleriyle ilgilendikleri zaman öğrencilerin deneyimleyebilecekleri çok sayıda zorluk tanımlayabilmişlerdir. Fakat bu zorluk ve kavram yanılgıları verilen soruya ilişkin olarak değil de genel olarak tüm kesir problemlerini çözmeyle alakalı zorluk ve kavram yanılgıları olmuştur. Öğretmenlerin vurguladıkları genel öğrenci zorlukları öğretmenlerin öğretimlerinde bu noktaları irdelemede hassas olduklarını düşündürmektedir. Öğretmenlerin matematiksel bilgileri çok iyi olmamasına rağmen öğrencilerin zorluk ve kavram yanılgılarını değerlendirmede açık, detaylı ve iyi düşünülmüş öğretim stratejileri kullanmışlardır. Katılımcılar öğrencilerin farklı öğrenme stillerine hitap edebilmek için öğretim stratejileri belirlemişlerdir. Öğrencilerin somut materyaller kullanarak kesirleri deneyimlemelerine müsaade etmeyi ve böylece farklı görseller sağlamayı önermişlerdir. Tüm öğretmenler “yapı iskelesi (scaffolding)”ne inanmaktadır ve öğrenciler anlamadıkları zaman temele geri dönülmesi gerektiğini düşünmektedirler. Öğretmenlerden bir tanesi kesir öğretiminde kullanılabilecek çok sayıda fikir ve kaynağa sahip olduğunu, fakat zamanlamaya önemli miktarda yatırım yapması gerektiğini belirtmiştir. Genel olarak öğretmenlerin sınıflarında öğrencilerin kesir problemleriyle başa çıkmalarına yardım edebilecek uygun stratejiler bilgisine sahip oldukları görülmüştür. Araştırmanın dördüncü sorusunun veri analizi sonucunda deneyimli öğretmenlerin kendilerine verilen soruyla kısmen ilişkisi var gibi görünen fen dersinden örnekler vermeyi denedikleri ortaya çıkmıştır. Az deneyimli öğretmenlerden bir tanesi beden eğitimi dersinden örnek vermiş ve bu örnek kendilerine verilen soruyla çok az uygun olarak görülmüştür. Bunun yanı sıra üç öğretmen tarafından sunulan bağlamlarda bölme ya da paylaşım kavramının $1\frac{1}{4} \div 2$ ile alakalı olduğu bunun nedeni olarak da öğretmenler tarafından verilen sorunun hatalı modellenmesi nedeniyle $1\frac{1}{4} \div \frac{1}{2}$'ye uygun örnekler verilemediği ifade edilmiştir. Çalışmada deneyimli öğretmenlerin AB'leri ve PAB'larının az deneyimli öğretmenlere kıyasla daha geniş ve derin olması beklenirken sonuçta öğretmenler arasında önemli bir farklılığın olmadığı görülmüştür.

Gökkurt, Şahin, Soylu ve Soylu (2013) tarafından yürütülen çalışmanın amacı sınıf öğretmeni adaylarının kesirler konusundaki öğrenci hatalarını tespit edebilme ve bu hataların giderilmesinde kullanılan PAB'larını incelemektir. Çalışmanın katılımcılarını oluşturan 69 öğretmen adayı amaçsal örnekleme yöntemiyle seçilmiştir. Çalışmanın desenini durum çalışması oluşturmuştur. Soylu ve Soylu'nun (2005) yapmış oldukları çalışmalarında öğrencilerin vermiş oldukları cevaplar bu çalışma için veri toplama aracı olarak kullanılmıştır. Öğrencilerin hatalı cevapları öğretmen adaylarına verilerek, öğrencilerin cevaplarındaki hataları bulmaları ve bu hataları düzeltmeleri istenmiştir. Yapılan içerik analizi sonucunda öğretmen adaylarının öğrenci hatalarını belirlemede fazla zorlanmadıkları, fakat hataların düzeltilmesine yönelik PAB'larının yeterli düzeyde olmadığı görülmüştür.

Aksu ve Konyalıoğlu (2015) tarafından yürütülen çalışmada sınıf öğretmen adaylarının kesirler konusundaki PAB'ları Shulman (1986) tarafından ortaya konan PAB ve PAB bileşenleri bağlamında incelenmiştir. Son sınıf dokuz öğretmen adayı ile gerçekleştirilen çalışmada veriler açık uçlu sorular ve görüşmeler yardımıyla toplanmıştır. Öğretmen adaylarının, kesirlerde işlemler konusunda öğrencilerin yaşayabilecekleri zorluklar hakkında bilgi sahibi oldukları görülmüştür. Öğrencilerin sahip olabilecekleri zorluklar ve kavram yanılgılarını belirttikten sonra öğretmen adayları bu zorlukları aşmada somut materyaller ve modeller kullanmanın etkili olacağını ifade etmişlerdir. Kavramsal anlamaya önem verilmesi gerektiğini ifade eden öğretmen adayları da mevcuttur. PAB testinden elde edilen bulgular öğretmen adaylarının öğrencilerin yaptıkları hataların kaynağını belirlemede güçlüklere sahip olduklarını göstermiştir. Öğretmen adaylarının “öğrenciyi anlama” ve “gösterim temsilleri ve yöntemi” bilgileri yeterli düzeyde bulunmamıştır. Özellikle gösterim temsilleri ve modeller konusunda büyük eksiklikleri olduğu ortaya çıkmıştır.

Kesirlerde AB ve PAB ile ilgili yapılmış çalışmalar incelendiğinde öğretmenlerin/öğretmen adaylarının AB’leri benzer olsa bile PAB’larının farklılaşabileceği (Leinhardt ve Smith, 1985) görülmüştür. Üniversitede aynı eğitimi alan öğretmen adayları arasında farklı AB’ye sahip öğretmen adaylarının olduğu, öğretmen/öğretmen adaylarına verilecek eğitimler ile AB’lerinde bir gelişmenin, kesirler konusunda daha derin bir anlayışa sahip olmalarının sağlanabileceği (Newton, 2008) sonuçlarına ulaşılmıştır. Öğretmenlerin de öğrencilerde karşılaşılabilen zorluklara sahip olabilecekleri (örneğin 1.25 ile $1\frac{1}{4}$’in aynı olduğunu farkedememe gibi) (Chinnappan ve Desplat, 2012) ortaya çıkmıştır. Aynı zamanda öğretmen/öğretmen adaylarının kesirler konusunda sınırlı konu alan bilgisine sahip oldukları (Chinnappan ve Desplat, 2012; Newton, 2008), öğretmen/öğretmen adaylarının PAB’larını PAB bileşenlerine göre inceleyen çalışmalara (Aksu ve Konyalıoğlu, 2015) rastlandığı görülmüştür. Yapılan çalışmaların denk kesirler (Chestnut-Andrews, 2007; Leinhardt ve Smith, 1985) toplama, çıkarma, çarpma, bölme (Newton, 2008) ve kesir problemleri (Chinnappan ve Desplat, 2012) gibi farklı konularda olduğu görülmüştür. Alanyazın incelendiğinde öğretmen adaylarının kesirlerde AB’leri ve PAB’larını inceleyen çalışmalar mevcut olmasına rağmen özellikle model kullanımına yönelik AB’leri ve PAB’larını inceleyen bir çalışmaya rastlanmamıştır.

2.2.3. Kesirlerle Çarpma ve Bölme Bilgisi ile İlgili Araştırmalar

Kesirlerle çarpma ve özellikle bölme konusu öğretmen adaylarının ve hatta öğretmenler de dahil birçok kişinin verilen işlemlere uygun problem oluşturma, işlemleri kavramsal olarak açıklama (bölme işleminde neden ikinci kesrin ters çevrilerek işlemin çarpma işlemine dönüşmesi gibi) gibi durumlarda zorlandıkları bir konu olarak karşımıza çıkmaktadır (Arslan-Kılcan, 2006; Azim, 1995; Ball, 1990; Borko ve diğ., 1992; Cluff, 2005; De Castro, 2008; Işıksal ve Çakıroğlu, 2011; Li ve Huang, 2008; Li ve Smith, 2007; Özel, 2013; Simon, 1993).

Ball (1990) tarafından yürütülen çalışmada 10'u ilkokul dokuz tanesi ise ortaokul öğretmen adayı olmak üzere toplam 19 öğretmen adayının bölme konusunda sahip olduğu anlayışlar incelenmiştir. Yapılan çalışmada öğretmen adaylarından kesirlerle bölme, sıfır ile bölme ve cebirsel denklemlerle bölme durumlarından her bir durumu açıklamaları ve temsiller oluşturmaları istenmiştir. Öğretmen adaylarıyla yapılan görüşmeler ses kaydına alınmıştır. Öğretmen adaylarının bölme konusundaki mevcut bilgilerinin analizi için cevaplar iki boyutlu olarak kodlanmıştır: doğrulukları ve öğretmen adayları tarafından sağlanan gerekçelendirmelerin doğası. Katılımcılara kesirlerle bölme ile alakalı olarak "Bireyler kesirlerle bölmeyi içeren problemleri çözerken farklı yaklaşımlara sahiptir. Sen $1\frac{3}{4} \div \frac{1}{2}$'yi nasıl çözersin?" sorusu yöneltilmiştir. Bazı öğretmenler gerçek yaşam durumları bulmayı ya da problemler kurmayı denemişlerdir. Tanımlamaya çalıştıkları problem ya da durumdan sonra bunun nasıl "$1\frac{3}{4} \div \frac{1}{2}$"ye uyduğu sorulmuş, eğer öğretmen adayları oluşturdukları problem ya da durumun cevabının, işlemsel olarak elde edilen cevapla eşleşmediğini fark ederlerse katılımcılardan neden farklı çıktıklarının cevabını vermeleri istenmiştir. Katılımcılar bir temsil bulamıyorlarsa da onlara "Birçok kişi bunu bulmakta zorlanır. Sana göre, bunu zor yapan nedir?" sorusu yöneltilmiştir. Öğretmen adayları ise "Gerçek yaşamla ilişkisi zor. Kesirleri düşünmeyiz, doğal sayılarla daha çok düşünürüz" cevabını vermişlerdir. 19 öğretmen adayından 17 tanesi bölmeyi doğru şekilde hesaplayabilmelerine rağmen sadece beş tanesi uygun bir temsil oluşturmayı başarabilmiştir. Uygun temsiller oluşturabilen katılımcıların bölmenin ölçme anlamını kullandıkları ve bir bütün ve $\frac{3}{4}$'lük kısımda kaç tane yarım olduğunu düşündükleri görülmüştür. Uygun temsiller oluşturamayan öğretmen adaylarının en sık yaptığı hata ise $\frac{1}{2}$ ile bölmek yerine iki ile bölmeyle temsil etmeye çalışmış olmalarıdır. Hiçbir temsil oluşturamayan sekiz öğretmen adayı iki gruptan oluşmaktadır. Bunlardan iki öğretmen adayı problemi kavrayamamıştır. Başlangıçta iki ile bölmeyi içeren bir problem ya da model önermişler, ardından bölmeyi $\frac{1}{2}$ ile temsil etmiyor olduklarını fark etmişlerdir. Diğer altı öğretmen adayı ise bunun somut bir duruma uygulanabilir olmadığını, gerçek yaşam terimleri kullanılarak temsil edilemeyeceğini ifade etmişlerdir.

Borko ve diğerleri (1992) tarafından yürütülen çalışmada başlıca amaç mesleğinde yeni olan öğretmenlerin matematik öğretimi ile ilgili ortaya çıkan bilgi, inanç, düşünce ve eylemlerini tanımlamak, öğretmeyi öğrenme ve öğretimin karşılıklı bağımlılık ve karşılıklı etkisini anlamak, öğretmeyi öğrenme sürecine öğretmen eğitim deneyiminin etkisini incelemektir. Bu çalışmada Bayan Daniels takma isimli bir öğretmenin kesirlerle bölme ile alakalı bilgileri incelenmiştir. Analizler, bir öğretmenin standart kesirlerle bölme işlemi için kavramsal temelli gerekçelendirmede öğrencinin talebine yanıt vermede başarısız olduğu bir ders üzerine yoğunlaşmaktadır. Öğretim bölümünde neyin meydana geldiği, bir matematik öğretmeni olarak Bayan Daniels için ortaya çıkan sonuçlar iki faktör yakından incelenerek anlaşılmaya çalışılmıştır: a) öğretmenin kesirlerde bölmeyle ilgili sahip olduğu bilgi ve inanç sistemi, b) almış olduğu matematik öğretim yöntemleri dersinde kesirlerle bölmenin işlenmesi. Çalışma Bayan Daniels'in öğretim gerçekleştirdiği bir altıncı sınıfta yürütülmüştür. Bayan Daniels kesirlerle böme algoritması için $\frac{3}{4} \div \frac{1}{2}$ örneğini kullanmıştır. Bayan Daniels öğrencilerin sorduğu bazı işlemsel soruları cevaplandırmış, bir öğrencinin neden ters çevirip çarpıldığını merak etmesi üzerine öğrencinin kavramsal bir açıklama istediğini fark etmiş ve yanıtlamak için somut bir örnek ve beraberinde diyagramdan faydalanmıştır. Öğrencilere "Bir duvar olduğunu ve bunu dört parçaya böldüğümüzü düşünelim. $\frac{1}{4}$'i zaten boyalı. Bu yüzden boyamak için geriye $\frac{3}{4}$'ü kalıyor. Doğru mu? Benimle hemfikir misiniz?" demiş ve tahtaya bir dikdörtgen çizmiş, dikey olarak dört eşit parçaya ayırmış ve bir parçasını taramıştır. Fakat bu $\frac{3}{4}$'lük kısmın yarısını boyamaya yetecek kadar boyamız var" demiş ve taralı olmayan kısımların yarısından bir çizgi çizmiştir. Taralı olmayan altı parça olduğunu görmüş ve taralı olmayan kısımları da yarısından bölerek sekiz parça elde etmiştir. "$\frac{2}{8}$'lik kısım zaten taralıydı, taralı olmayan kısmın yarısını boyamaya yetecek kadar boya olduğuna göre 1, 2, 3 parçasını boyayabiliriz" demiştir. Sonra Bayan Daniels bir hata yaptığını fark etmiş ve somut örnekten yola çıkmaktan vazgeçmiş sadece işlemsel olarak açıklayabilmiştir. Bayan Daniels dersin kalanında da kesirlerle bölmede işlemsel yönteme odaklanmıştır. Bayan Daniels ile yapılan görüşmede dersi planlarken kesirle bölmeyi göstermede temsil kullanımı hakkında düşünmediği, aslında kavramsal bir açıklama sağlamayı da planlamadığı ortaya çıkmıştır.

Simon (1993) tarafından yürütülen çalışmada öğretmen adaylarının kavramsal ve işlemsel bilgisi arasındaki bağlantıları, kavramlar arası bağlantıları (örneğin bölme ve çıkarma) ve odaklandıkları gerçek yaşam durumları ile aritmetik işlemler arasındaki bağlantıları incelenmiştir. Öğretmen adaylarının bölme bilgilerinin iki yönünü (işlemsel ve kavramsal bilgileri arasındaki ve içindeki bağlantılılık ile birim bilgisi) değerlendirmek için algoritmik bir bilgiden daha fazlasına ihtiyaç duyacakları açık uçlu beş soru tasarlanmıştır. Ayrıca sekiz öğretmen adayı ile görüşmeler gerçekleştirilmiştir. Çalışma sonucunda öğretmen adaylarının bölmede parçalara ayırma ve ölçme arasındaki ilişki, problemler ve sembolik bölme arasındaki ilişki, bölme hesaplamalarında karşılaşılan miktar birimlerini tanımlamayı içeren bir çok alanda kavramsal bilgilerinin zayıf olduğu görülmüştür.

Azim (1995) tarafından yürütülen çalışma öğretmen adaylarının kesirlerle çarpma hakkındaki anlayışlarını anlama ve yeniden yapılandırmaya odaklanmıştır. Çalışmanın katılımcılarını 50 öğretmen adayı oluşturmuştur ve veriler üç aşamada toplanmıştır. İlk aşamada, öğretmenlere dört tane kesirler ve tamsayılarla çarpma ifadesi verilmiştir. Öğretmen adaylarından bu ifadelerin her biri tarafından modellenmiş sözlü problemler oluşturmaları ve çözmeleri istenmiştir. Öğretmen adaylarının oluşturdukları bu problemlere ve çözümlerine odaklanan bir saatlik bireysel görüşmelerle anlayışları değerlendirilmiştir. Öğretmen adaylarının anlayışlarının inşasında ve yeniden yapılandırılmasında desteklenmesi için kesirler ve tamsayılarla çarpma hakkında öğretim (çarpma için kavramsal modeller, tamsayılarla ve kesirlerle çarpma için sayısal örnekler ve çarpma ile modellenen durumlar) çalışmanın ikinci aşamasını oluşturmuştur. Üçüncü aşamada öğretmen adaylarının kesirlerle çarpma hakkındaki anlayışlarını tanımlamak ve kesirlerle çarpma ifadesi örneklerini kavramsal olarak yorumlamalarını ortaya çıkarmak amacıyla yapılan görüşmelerle anlayış ve yapım süreçlerinden anlam çıkarılmaya çalışılmıştır. Aynı zamanda devam eden sınıf çalışmaları ve alan notları da bu anlam çıkarma sürecine dahil edilmiştir. Sekiz öğretmen adayının "24×37, $7\times\frac{1}{4}$, $1\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}$, $\frac{2}{3}\times\frac{3}{4}$" ifadeleri ile modellenen problemler oluşturmayı başarabildiği, 18 öğretmen adayının üç kesirle çarpma ifadesinin herhangi biri için bir problem oluşturamadığı, ayrıca diğer 18 öğretmen adayının da sadece $7\times\frac{1}{4}$ ifadesi için bir problem oluşturabildiği görülmüştür. Matematik Öğretim Yöntemleri dersine katılan 22 öğretmen adayı birden küçük kesirlerle çarpma hakkında bir akıl yürütme biçimi keşfetmiş olduklarını ya da öğrenmiş olduklarını belirtmişlerdir. İkinci görüşme boyunca 48 öğretmen adayı kesirle çarpmanın sayısal sonuçlarını tartışmada "1"i referans almıştır. Çalışmadaki 14 öğretmen adayı örneğin $\frac{1}{3}\times6$ için altının $\frac{1}{3}$'i ifadesini kullanarak kesirlerle çarpma hakkında akıl yürütebilmeyi öğrenmiş olması ya da keşfetmiş olmasına rağmen bu öğretmen adaylarının onuna ilaveten çalışmadaki diğer öğretmen adayları $\frac{3}{4}$'ün $\frac{2}{3}$'si gibi ifadeleri anlamlandırma ve fiziksel olarak temsil etmede zorlanmışlardır. Öğretmen adaylarının yaklaşık olarak $\frac{1}{3}$'i kesir çarpımı sonuçlarına yönelik referans ve ölçüm birimlerini tespit etmede zorluk çekmiştir.

Cluff (2005) tarafından yürütülen yüksek lisans tez çalışmasının amacı üç öğretmen adayının kesirlerle çarpma ve bölme anlayışlarını araştırmaktır. Bu çalışmanın motivasyonu kesirlerde ve kesirlerle çarpma ve bölmede kavramsal anlayış eksikliği olmuştur. Çalışmanın verileri çoklu kaynaklardan toplanmıştır. İlk olarak katılımcıların kesirler ve kesirlerle çarpma ve bölme kavram görüntülerinin ne olduğunu belirlemek için bir ön değerlendirme anketi uygulanmıştır. İkinci veri seti sınıftan elde edilmiştir. Üç katılımcı grup oluşturulmuş ve sınıf deneyimleri video kamera ile kayıt altına alınmıştır. Araştırmacılar ayrıca sınıf deneyimlerinden kapsamlı notlar almışlardır. Sınıf deneyimi video kayıtlarının yanı sıra, ödevler, sınıf çalışmaları ve günlüklerin kopyaları öğrencilerin kesirlerle ilgili deneyimlerini daha iyi anlamak için kullanılmıştır. Üçüncü veri setini ise haftalık olarak yapılan görüşmeler oluşturmuştur. Verilerin analizi her bir katılımcı için üç bireysel durum çalışması olarak yapılmıştır. Her durum çalışmasında katılımcıların kesirler ve kesirlerle çarpma ve bölme hakkındaki önceki anlamaları ve ders sonucunda anlamalarında meydana gelen değişimler incelenmiştir ve her durum çalışması tarih, kesir anlayışı, kesirlerle çarpma ve bölme anlayışı olmak üzere dört kısıma bölünmüştür. Katılımcılara önce kesirler ve kesirlerle çarpma ve bölme anlayışları hakkında bilgi sahibi olmak için anket uygulanmıştır. Anketten sonra katılımcıların matematik geçmişi ve kesir bilgileri hakkında daha fazla bilgi edinmek için görüşme yapılmıştır. Günlüklerle birlikte anket ve görüşmeye verilen cevaplar matematik geçmişi kısmının verilerini oluşturmuştur. Diğer üç kısmın verileri ise sınıf çalışmaları, görüşmeler, ödevler ve günlüklerden elde edilmiştir. Günlüklerde katılımcılardan sınıftaki deneyimlerini ve anlayışlarında meydana gelen değişiklikleri paylaşmaları istenmiştir. Sonuç olarak katılımcıların çalışma boyunca kesirler, kesirlerle çarpma ve bölmedeki kavramsal anlayışlarının derinleştiği ortaya çıkmıştır. Öğretmen adaylarının her biri kesirlerin ne olduğuna dair çoklu gösterimler yoluyla daha güçlü bir anlayış sergilemişlerdir. Çalışma sonucunda öğretmen adaylarının kesirler hakkındaki ön bilgilerinin anlamalarını genişletme yeteneklerini etkilediği, kesirlerle bölmenin bu çalışmada incelenen en zor kavram olduğu, fakat orantısal olarak katılımcılarının gelişimlerinin en çok bu konuda olduğu ortaya çıkmıştır.

Arslan-Kılcan (2006) tarafından yürütülen yüksek lisans tez çalışmasının amacı ortaokul matematik öğretmenlerinin kesirlerle bölme işlemini nasıl yorumladıklarını ve kesirlerle bölme bilgilerini öğretimlerine nasıl yansıttıklarını incelemektir. Veri toplama aracı olarak gözlem ve görüşmenin kullanıldığı çalışma dört matematik öğretmeni ile yürütülmüştür. Görüşme soruları altı sembolik ifade, dört sözel problem ve Simon'dan (2003) uyarlanan hesap makinesi probleminden oluşmaktadır. İlk olarak öğretmenlerin kesirlerle bölme konusunu işlediği dersleri gözlemlenmiştir. Dersin gözlemlenmesinde araştırmacı tarafından hazırlanmış olan gözlem formu kullanılmış, formda yer almayan fakat araştırmacı tarafından önemli görülen noktalar da not edilmiştir. Gözlemin tamamlanmasından bir hafta sonra öğretmenlerle yaklaşık bir saat süren görüşmeler gerçekleştirilmiştir. Görüşme başlamadan önce öğretmenlere "Sizce öğrenme nedir? Öğrenciler sizce nasıl öğrenir?" soruları yöneltilerek öğretmenlerin bakış açıları ve öğretim yaklaşımları hakkında fikir sahibi olunmak istenmiştir. Verilerin analizinde betimsel analiz yöntemi kullanılmıştır. Bulgular öğretmenlerin çoğunun bilgilerinin işlemsel düzeyde olduğunu; bu öğretmenlerin öğrencilerine de işlemsel düzeyde öğrenmenin gerçekleştiği ortamlar sunduklarını; öğretmenlerin ters-çevir çarp kuralına odaklanırken bunun neden böyle olduğu ile ilgili bir açıklama yapamadıklarını; öğretmenlerden sadece bir tanesinin bölmenin ölçme anlamını da düşünebildiğini; bu bilgisini ise uygun şekilde kullanamadığını göstermiştir. Öğretmenlerden sadece bir tanesi bölmenin anlamından hareketle sözel problemler oluşturabilmiş ve bu problemleri modeller kullanarak çözebilmiştir.

Li ve Smith (2007) tarafından yürütülen çalışmanın katılımcılarını Amerika Birleşik Devletleri'nde disiplinlerarası fen ve matematik öğretmenlik eğitim programınına kayıtlı 46 ortaokul matematik öğretmeni oluşturmuştur. Çalışmada veri toplamak için iki araç geliştirilmiştir. Bunlardan birisi öğretmen adaylarının matematik ve pedagojideki genel bilgilerini içeren bir ankettir. İkincisi ise öğretmen adaylarının kesirlerle bölme konusundaki alan bilgileri ve PAB'larına odaklanan bir matematik testidir. Bu test öğretmen adaylarının olası zorluklarını hedef alan maddelerden oluşmuştur. Testte yer alan soruların bazıları ders kitabı ve önceki çalışmalardan uyarlanmışken, bazıları ise bu çalışma için araştırmacılarca geliştirilmiştir. Katılımcıların cevaplarının analizinde hem nicel hem nitel metotlar kullanılmıştır. Anket sorularına verilen cevaplar doğrudan kaydedilmiş ve her bir katılımcı için cevaplarının frekansları ve yüzdeleri hesaplanarak özetlenmiştir. Katılımcıların matematik testinde yer alan problem çözümlerini analiz etmek için her bir maddeyi kodlamak için özel rubrikler geliştirilmiş, daha sonra katılımcıların cevapları kodlanmış ve belirli kavram/yöntem kullanımlarını incelemek için analiz edilmiştir. Öğretmen adaylarının ankete oldukça olumlu cevaplar verdikleri, ankete verdikleri cevaplardan matematik müfredatı hakkında genel bilgiye sahip oldukları, hiçbir öğretmen adayının matematik müfredat çerçevesi hakkında sınırlı ya da düşük bir anlayışa sahip olduğunu düşünmediği, kesirlerle bölme de dahil olmak üzere kesir hesaplamalarını öğretmeye hazır olduklarından emin oldukları, matematik öğretimine karşı pozitif bir tutum geliştirdikleri ortaya çıkmıştır. Matematik testine verilen cevaplar incelendiğinde öğretmen adaylarının kesirlerle bölme işlemlerini oldukça iyi bir şekilde hesaplayabildikleri fakat soru "$\frac{1}{3}$'in içinde kaç tane $\frac{1}{2}$ vardır?" şeklinde biraz değiştiği zaman performanslarında bir düşüşün olduğu, özellikle çok aşamalı problemlerin bazıları için kesirlelde bölmeyi içeren problemlerin çözümünde zorluk çektikleri görülmüştür. Öğretmen adaylarından verilen kesirlerle bölme işlemlerini ($\frac{2}{3} \div 2 = \frac{1}{3}$, $\frac{2}{3} \div \frac{1}{6}$=4) açıklamaları istendiği zaman katılımcıların yaklaşık %26'sı resimsel temsiller çizmiş ve kullanmış, %22'si ters çevir-çarp ile açıklamıştır. Katılımcıların %46'sı verilen hesaplamalar için tam bir açıklama yapamamıştır. Şaşırtıcı şekilde bu öğretmen adaylarından hiçbiri, niçin ters çevirip çarpıldığını açıklamayı denememişlerdir. Araştırma sonuçları öğretmen adaylarının kesirlerle bölme konusunda oldukça sınırlı kavramsal anlamaya sahip olduklarını göstermiştir.

De Castro (2008) tarafından yürütülen çalışmanın amacı öğrencilerin kesirlerle çarpma ve bölme gibi zor konuları anlamalarına yardımcı olmada bilişsel modellerin kullanılma potansiyelini değerlendirmektir. Bu çalışmanın temel odağı, bilgi aktarım süreci ve öğretmenlerin kesirlerle çarpma ve bölme ile ilgili öğretimsel açıklamalarını enstrümantelden ilişkisel matematik anlayışına kaydırmak için kullanılan bilişsel stratejiler üzerine kurulmuştur. Çalışmada kontrol ve deney grubu yer almıştır. Katılımcıların kesirlerle çarpma ve bölme hesaplama stratejileri olarak "ters çevir-çarp" ve "sadeleştir ve çarp" ön bilgileri ön test ile ölçülmüştür. Kontrol grubunda geleneksel öğretim yapılmış, deney grubunda ise kesirlerle çarpma ve bölme işlemlerini yeniden anlamak için yapılandırılmış biliişsel modellerden yararlanılmıştır. Sonrasında katılımcılara son test uygulanmıştır. Ön test ve son test yedisi çarpma, altısı bölme, ikisi de hem çarpma hem bölme olmak üzere toplam 15 sorudan oluşmuştur. Kontrol grubunun ön test ortalaması 1,76, standart sapması 1,27; deney grubunun ön test ortalaması 1,91 ve standart sapması 1,97 olarak bulunmuştur. Kontrol ve deney grubunun ön test ve son test sonuçları arasında yapılan t-testine göre anlamlı bir fark vardır. Bu sonuç, her iki öğretim metodunun kesirlerle çarpma ve bölme öğretiminde etkili olduğunu göstermiştir. Deney ve kontrol grubunun son testleri arasında da yapılan t- testi ile anlamlı bir farklılık olduğu görülmüştür. Bu sonuç da bilişsel modelleri kullanan öğrencilerin yalnızca algoritmaya bağlı öğrencilerden daha yüksek puan aldıklarını göstermektedir. Bilişsel modellerin etkisini kanıtlamak için ön test ve son test sonuçları karşılaştırılmıştır. Bağımsız örneklem t-testi kullanılarak güvenilir bir fark bulunmuştur. Bu sonuç, bilişsel modellerin müdahalesinin öğrencilerin kavramları anlama ve kavram yanılgılarının üstesinden gelme becerileri üzerinde dikkate değer bir etkiye sahip olduğunu düşündürmüştür. Bilişsel modellerin kullanılması, öğrencilerin algoritmayı daha iyi anlamalarına ve onların şemalarıyla ilişkilendirilmesine yardımcı olmuştur.

Li ve Huang (2008) tarafından 18 matematik öğretmeni ile yürütülen çalışmada kesirlerle bölme konusu üzerinde öğretmenlerin bilgilerinin kapsamı ve sahip oldukları matematik ve pedagoji bilgileri hakkındaki inanış ve algıları incelenmiştir. 18 katılımcı arasından 12 tanesi 13-30 yılları arası bir deneyime sahiptir, geri kalan beş tanesi ise 4-12 yılları arası deneyime sahiptir ve sadece üç erkek öğretmen vardır. Daha önceki çalışmalarda geliştirilen ölçme araçları bu çalışmaya veri toplamak için adapte edilmiştir. Çalışma için belirlenen kavramsal çerçevenin rehberliğinde iki ölçme aracı geliştirilmiştir. İlki öğretmenlerin sahip oldukları matematik ve pedagoji bilgileri hakkındaki inanç ve algılarını içeren bir ankettir. Birçok madde TIMMS 2003'ün geçmiş sorularından uyarlanmıştır. Bu çalışma için araştırma sorularına uygun olarak kesirlerle bölme konusuyla yakından alakalı beş madde seçilmiştir. İkinci ölçme aracı öğretmenlerin kesirlerle bölmeyi öğretmek için ihtiyaç duydukları matematik bilgisi ve PAB'a odaklanan bir matematik testidir. Bazı maddeler önceki çalışmalar ve matematik ders kitaplarından uyarlanmış, bazıları araştırmacılar tarafından (Li ve Kulm, 2008; Li ve diğ., 2008) geliştirilmiştir. Test beş maddeden oluşmaktadır. Seçilen bu beş madde öğretmenlerin kesirlerle bölme konusundaki matematik bilgilerini ve bir hesaplama işleminin sınıf ortamında nasıl gerçekleştiğini doğrulama yeteneklerini değerlendirmeyi amaçlamıştır. Katılımcıların cevaplarının analizinde hem nicel hem nitel metotlar kullanılmıştır. Anketin birinci, ikinci, üçüncü ve beşinci maddelerine verilen cevaplar doğrudan kaydedilmiş, katılımcıların seçtikleri her bir kategorinin yüzdesi ve frekansı hesaplanarak özetlenmiştir. Öğretmenlerin dördüncü maddeye verdikleri cevaplar tüm farklı cevaplar incelendikten sonra kategorize edilmiştir.

Katılımcıların matematik testindeki altıncı ve yedinci maddelere ilişkin çözümlerini analiz etmek için her bir maddeyi kodlamak için özel rubrikler geliştirilmiştir. Genel olarak kodlama ölçütleri doğruluğa ve kullanılan çözüm yöntemlerine odaklanmıştır. Öğretmenlerin PAB'larına odaklanan sekiz, dokuz ve 10. soruların analizi için tüm cevaplar okunmuş ve farklı açıklamaların doğası belirlenmeye çalışılmıştır. Daha sonra bu açıklamalar kullanılan temsil biçimleri açısından sayısal, sözel, resimsel ve sembolik olmak üzere dört kategoride sınıflandırılmıştır. Sonuçlar öğretmenlerden bazılarının öğrettikleri matematik müfredatı hakkında sınırlı bilgiye sahip olduklarını, katılımcı öğretmenlerden çoğunun ilköğretim matematiğini öğretmek için gerekli bilgi hazırlığı konusunda kendilerine güvendiklerini, bazılarının ondalık gösterimler ve kesirleri, sözel ve sayısal olarak temsil etme veya modeller kullanarak temsil etme ile sözel ve sayısal olarak veya modeller kullanarak kesir hesaplamalarını temsil etme ve açıklamada güven eksiklikleri olduğunu göstermiştir. Öğretmenler tipik kesirlerle bölme problemlerini (örneğin $5\frac{1}{4} \div 3\frac{1}{2}$ işleminin sonucunu bulunuz) iyi bir şekilde çözmektedirler. Problem "$\frac{1}{3}$'in içinde kaç tane $\frac{1}{2}$ vardır?" şeklinde değiştiğinde bile öğretmenlerden iyi sonuçlar elde edilmiştir. Öğretmenlerden $\frac{9}{11} \div \frac{2}{3}$ işleminin $\frac{9}{11} \div \frac{3}{4}$ işleminden büyük ya da küçük olduğunu değerlendirmeksizin belirlemeleri ve akıl yürütmelerini açıklamaları istendiği zaman tüm öğretmenler sonucu hesaplama yapmadan doğru bir şekilde bulabilmiştir. Ayrıca bu öğretmenler kesirlerle çarpma ve bölme işlemlerini gerektiren sözel problemi doğru bir şekilde çözebilmişlerdir. Öğretmenlere sekizinci madde olarak şu soru verilmiştir: Sınıfta kesirlerle işlemleri tartışıyorsunuz. Tartışma boyunca Xiaoming şunları söylüyor "Kesirlerle çarpma kolaydır. Sadece paylar paydalar çarpılır. Kesirlerdeki diğer işlemleri benzer şekilde tanımlamamız gerektiğini düşünüyorum. Toplama $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{(a+c)}{(b+d)}$, çıkarma $\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{(a-c)}{(b-d)}$, $\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{(a \div c)}{(b \div d)}$. Xiaoming'in önerilerine nasıl cevap vereceksiniz?" 8 öğretmenden 12 tanesi belirli sayılar ile hesaplama örnekleri oluşturarak gerekçelendirmeler sağlamıştır. Bu 12 öğretmen arasından dört kişi tahminlerle daha fazla gerçekçe sağlamıştır. Beş öğretmen diyagramlarla hesaplama örnekleri oluşturma metodunu kullanmış, iki tanesi sembolik olarak algoritmaların doğru kullanımı ile bir karşı kanıt göstererek ifadelerini gerekçelendirmiştir. Bu sorudaki bölme işlemi ile ilgili olarak 13 kıdemli öğretmenden üç tanesi bir cevap vermemiş, bir tanesi yanlış cevap vermiş, iki tanesi de açıklamada bulunmamıştır. Açıklama yapan yedi öğretmen arasından bir tanesi iki açıklamada bulunmuş (a ve b), diğerleri bir açıklamada bulunmuştur. Beş genç öğretmenden hepsi doğru cevap vermiş ve hatta bir tanesi de iki açıklamada (a ve b) bulunmuştur. Buradaki açıklamalar a) belirli sayılarla algoritmanın doğru bir şekilde uygulanmasıyla doğrulama (altı kıdemli, üç genç öğretmen), b) sembolik bölme özelliklerinin uygulanması ile doğrulamadır (iki kıdemli, üç genç öğretmen kullanmıştır). Genç öğretmenlerin kesirlerle bölmenin karmaşık durumlarını açıklamada daha başarılı oldukları görülmüştür. Sekizinci soru için kıdemli öğretmenler belirli sayılar kullanarak bir gerekçelendirme sağlamaya çalışırken, genç öğretmenler soyut işlem özellik ve kurallarını kullanma eğiliminde olmuşlardır. Dokuzuncu maddede öğretmenlere $\frac{2}{3} \div 2$’nin niçin $\frac{1}{3}$’e eşit olduğunu öğrencilere nasıl açıklayacakları sorulmuştur. Tüm öğretmenlerin bir yolla veya daha farklı şekilde açıklayabildikleri görülmüştür. Kıdemli öğretmenler tarafından en yaygın şekilde kullanılan açıklama bir diyagram kullanımı olmuştur. Genç öğretmenlerce en yaygın şekilde kullanılan açıklama da kesirlerle çarpma ve bölmenin soyut anlamını kullanmak olmuştur. Dokuz katılımcı çözümü gerekçelendirmede sayısal örnekler kullanmış, dokuz tanesi kesirlerle çarpma ve bölmenin anlamı ile çözümü açıklamıştır. 13 öğretmen bölme işlemini açıklamak için resimsel temsiller çizmiştir. 10. maddede öğretmenlere kesirlerde bölme işleminde ikinci kesrin neden ters çevrildiğini ve işlemin neden çarpmaya dönüştüğünü öğrencilere nasıl açıklayabilecekleri sorulmuştur. Dokuz öğretmen gerekçelendirmede sayısal metot kullanmıştır ($\frac{2}{3} \div \frac{3}{4} = \frac{8}{12} \div \frac{9}{12} = 8 \div 9 = \frac{8}{9}$ ve $\frac{2}{3} \times \frac{3}{4} = \frac{8}{9}$ gibi). Yedi öğretmen çarpma ve bölme arasındaki ilişkiden faydalanmış, altı öğretmen böleni bire dönüştürmek için "$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \left(\frac{a}{b} \times \frac{d}{c}\right) \div \left(\frac{c}{d} \times \frac{d}{c}\right) = \frac{a}{b} \times \frac{c}{d} \div 1 = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c}$"yi kullanarak gerekçelendirme sağlamıştır.

Işıksal ve Çakıroğlu (2011) tarafından yürütülen çalışmanın amacı matematik öğretmen adaylarının altıncı ve yedinci sınıf öğrencilerinin kesirlerle çarpma konusunda sahip oldukları ortak anlayış ve kavram yanılgıları hakkındaki PAB'larını araştırmaktır. Ayrıca, öğretmen adaylarının bu kavram yanılgılarıyla baş etmek için bildikleri stratejiler ve bu kavram yanılgılarının kaynakları bilgileri de araştırılmıştır. Veriler 17 öğretmen adayından kesirlerle çarpma anketi ve yarı-yapılandırılmış görüşmeler aracılığıyla toplanmıştır. Öğretmen adaylarından ankette yer alan ilk iki soru için problemleri çözmeleri ve matematiksel bir ifade yazmaları, öğrencilerin bu problemleri çözerken yapabilecekleri hataları tanımlamaları, kafa karışıklığının muhtemel kaynaklarını belirlemeleri ve de bu zorlukların üstesinden gelmek için stratejiler önermeleri istenmiştir. Anketin tamamlanmasının ardından öğretmen adaylarının kesirlerle çarpma işlemine yönelik PAB'larının daha kapsamlı bir resmini elde etmek için yarı-yapılandırılmış görüşmeler yapılmıştır. Verilerin analizinde sürekli karşılaştırmalı analiz kullanılmıştır. Yapılan analizler öğretmen adaylarının öğrencilerin kesirlerle çarpma hakkındaki hata algılarının beş başlık altında gruplanabileceğini ortaya koymuştur: algoritmaya dayalı hatalar, sezgiye dayalı hatalar, kesirlerle işlemlerin formal bilgisine dayalı hatalar, kesir sembollerini yanlış anlama ve problemi yanlış anlama. Öğretmen adayları ezbere dayalı öğrenmenin algoritmaya dayalı hataların ana kaynağı olabileceğinden bahsetmiştir. Öğretmenlerin temel model kavramları, sezgisel olarak ortaya çıkan hataların ana kaynağı olarak ve kesirlerde formel bilgi eksikliği, kesirlerin formel bilgisine dayalı hataların önemli bir kaynağı olarak belirtilmiştir. Aynı zamanda öğretmen adayları öğrencilerin yaşayabilecekleri zorlukların üstesinden gelmede kullanılabilecek birçok stratejiden bahsetmişlerdir. Bu baş etme yolları öğretim metoduna dayalı stratejiler, kesirlerin formel bilgisine dayalı stratejiler ve psikolojik yapılara dayalı stratejiler olmak üzere üç kategoride gruplandırılmıştır.

Özel (2013) tarafından yürütülen çalışmada kesirlerle bölmenin öğretimi için öğretmenlerin sahip oldukları zorluk ve anlayışları araştırmak amaçlanmıştır. Çalışmanın katılımcılarını 10 öğretmen oluşturmuştur. Li ve Smith (2007) tarafından geliştirilen iki aşamalı kesirlerle bölme testi veri toplama aracı olarak kullanılmıştır. İlk aşamada alan bilgisi, ikinci aşamada ise pedagojik alan bilgisi ölçülmüştür. Öğretmenlere çözmeleri için altı tane kesirlerle bölme problemi verilmiştir. İlk üç soru bağlamsız verilmiştir, sonraki iki soru sözlü problemdir. Bu iki problemden biri ölçme, diğeri ise parçalara ayırma anlamı taşıyacak niteliktedir. Son soruda ise katılımcılardan herhangi bir hesaplama yapmadan $\frac{9}{11} \div \frac{2}{3}$ ve $\frac{9}{11} \div \frac{3}{4}$ işlemlerini karşılaştırmaları ve cevaplarını açıklamaları istenmiştir. İkinci aşama ise öğretmenlerin PAB'larını ölçmek üzere dört sorudan oluşmaktadır. İlk soruda bir öğrencinin kesirlerle toplama, çıkarma ve bölme işlemlerini kesirlerle çarpma işlemi yapıyor gibi yapmayı önerdiği bir senaryo verilmiş ve öğretmenlere cevapları sorulmuştur. İkinci soruda $\frac{2}{3} \div 2 = \frac{1}{3}, \frac{2}{3} \div \frac{1}{6} = 4$ işlemlerini nasıl açıklayacakları, üçüncü soruda ters çevir-çarp işlemini öğrencilere nasıl açıklayabilecekleri sorulmuştur. Son soru ise $\frac{3}{4} \div \frac{1}{2}$ işlemine dair üç sorudan oluşmuştur: İlk olarak öğretmenlerden öğrencilerin bu işlemi çözerken yapabilecekleri hataları listelemeleri, sonra bu hataların nedenlerini açıklamaları, son olarak da bu işlem ile temsil edilebilecek bir problem yazmaları istenmiştir. Bütün öğretmenlerin tüm soruları tamamen ve doğru şekilde yanıtladıkları, sadece iki hesaplama hatasının olduğu görülmüştür. İlk aşama testi öğretmenlerin problem çözmek için yeterli konu alan bilgisine sahip olduğunu gösterirken, kesirlerle bölmenin öğretiminde pedagojik alan bilgilerinin yeterli olmadığı görülmüştür. Öğretmenler PAB testindeki ilk soruda kesirlerle bölmenin neden payı paya, paydayı da paydaya bölerek yapılamayacağı konusunda anlamlı açıklamalar getirememişlerdir. İkinci sorunun a şıkkını iki öğretmen hariç tüm öğretmenler cevaplandırmış ve en yaygın kullanılan strateji kesir bloklarının görsel temsilini kullanmak olmuştur. İkinci sorunun b şıkkında 10 öğretmenden yedisi açıklama yapabilmiştir. İki öğretmen bu sonuçların nasıl elde edilebileceğini açıklamak için iki işlem için bağlamlar oluşturmuştur. Eşitlikleri açıklamak için yalnızca bir öğretmen önce ters çevir-çarp stratejisini kullanmıştır. PAB'ı ölçmek için kullanılan üçüncü soruda öğretmenler yaptıkları açıklamalarda çoğunlukla basit örnekler ya da ayrıntılı olmayan kısa sözlü açıklamalar kullanmışlardır. Son sorunun ilk kısmında altı öğretmen öğrencilerin olası hatalarından biri olarak "ortak paydanın bulunması"nı ifade etmiştir. Altı öğretmen arasından sadece bir tanesi bunun yanlış bir strateji olmadığını, sadece çözüm için daha fazla zamana ihtiyaç olduğunu belirtmiştir. Payı paya bölme ve paydayı paydaya bölme dört öğretmen tarafından ifade edilen diğer bir öğrenci hatasıdır. Öğretmenlerin yarısı $\frac{3}{4} \div \frac{1}{2}$ işlemi için anlamlı bir problem yazamamışlardır.

Yapılan çalışmalar incelendiğinde öğretmenlerin ve öğretmen adaylarının kesirlerle çarpma ve bölme konusunda genel olarak kavramsal anlamaya sahip olmadıkları görülmüştür. Verilen işlemleri ya da problemleri işlemsel olarak doğru bir şekilde yapabilmelerine rağmen yapılanların kavramsal bilgisinden yoksun oldukları ortaya çıkmıştır (Arslan- Kılcan, 2006; Borko ve diğ., 1992; Li ve Huang, 2008; Li ve Smith, 2007; Özel, 2013; Simon, 1993). İşlemsel bilgiye sahip olan öğretmenlerin ve öğretmen adaylarının öğrencilerine de işlemsel bilgiye dayalı öğrenme ortamları sunabilecekleri düşünülmüştür (Arslan-Kılcan, 2006). Ayrıca öğretmenlerin ve öğretmen adaylarının verilen işlemlere uygun problemler oluşturmakta (Arslan-Kılcan, 2006; Azim, 1995; Ball, 1990; ve uygun temsiller oluşturmakta (Arslan-Kılcan, 2006; Ball, 1990; Borko ve diğ., 1992; Li ve Smith, 2007) zorlandıkları da yapılan çalışmalar neticesinde ortaya çıkmıştır. Aynı zamanda yapılacak çalışmalar ile öğretmen adaylarının kesirlerle çarpma ve bölme konularındaki kavramsal anlamalarının derinleşebileceği de görülmüştür (Cluff, 2005). Alanyazın incelendiğinde öğretmen adaylarının kesirlerle çarpma ve bölme işlemlerinde özellikle model kullanımına yönelik bilgilerini inceleyen çalışmalarda bir eksiklik olduğu dikkat çekmiştir.

2.2.4. Kesirlerde Model Kullanımı ile İlgili Araştırmalar [3]

Toluk-Uçar (2009) tarafından yapılan çalışmanın amacı öğretmen adaylarının kesir kavramlarını anlamada problem kurmanın etkisini araştırmaktır. 95 öğretmen adayından 50 tanesi deney grubunu oluştururken, 45 tanesi ise kontrol grubunu oluşturmuştur. 10 açık uçlu sorudan oluşan kesir testi, sorulara cevap verirken kendilerini nasıl hissettiklerine ilişkin güven soruları ve öğretmen adaylarının haftalık matematik günlükleri veri toplama aracı olarak kullanılmıştır. Kesir testi ve güven soruları ön test ve son test olarak uygulanmıştır. Öğretmen adaylarından verilen matematiksel ifadeyi hesaplamaları (1-4. sorular), bir problem ile ve resimsel olarak temsil etmeleri (1-6. sorular) ve oluşturdukları temsilleri açıklamaları (1-6. sorular) istenmiştir. Yedi ve sekizinci sorularda öğretmen adaylarından daha büyük olan kesri bulmaları ve gerekçelendirmeleri, dokuzuncu soruda model ile temsil edilmiş kesri iki farklı yoldan adlandırmaları; 10. soruda ise verilen bütünün $\frac{3}{4}$'ünün bulunması beklenmiştir. Ön test ve son test 14 hafta ara ile uygulanmıştır. Deney grubunda problem kurma bir öğretim stratejisi olarak kullanılmıştır. Testte yer alan sorular işlem adımlarının doğru uygulanması esasına göre puanlanmıştır (0-4 arası), temsiller (problemler, resimler, açıklamalar) matematiksel ifadenin anlamının uygunluğuna göre puanlanmıştır. Açıklama olarak algoritma verilmiş ise sıfır puan verilmiştir. Katılımcılar işlemin anlamını ele alarak veya temsillerinin ardındaki gerekçelendirmelerini açıklayarak çözümlerini

[3] Tezin bu kısmında kesirlerde model kullanımı ile ilgili yapılmış çalışmalara kronolojik bir sıra ile yer verilmiştir.

açıkladılarsa bir puan almışlardır. Beşinci ve altıncı sorular da benzer şekilde puanlanmıştır, alınabilecek en yüksek puan üçtür. Yedi, sekiz ve dokuzuncu sorularda alınabilecek en yüksek puan iki, 10. soruda ise birdir. Bu nedenle testten alınabilecek en yüksek puan 29'dur. Öğretmen adayları tarafından oluşturulan temsiller en sık yapılan hataları belirlemek için daha ayrıntılı analiz edilmiştir. Ön test sonuçları deney grubunun kontrol grubundan biraz daha yüksek olduğunu göstermiştir. Yapılan t-testi sonucu gruplar arası anlamlı bir farklılık olmadığı ortaya çıkmıştır. Deney ve kontrol grubunun ön test ve son test sonuçları arasında önemli bir farklılık olduğu ve son test sonuçlarında deney ve kontrol grubu arasında deney grubu lehine istatistiksel olarak anlamlı bir fark olduğu görülmüştür. Son testte kontrol grubundaki katılımcıların resimsel temsillerinde (model) çok az bir değişim meydana gelmiştir, çok az sayıda öğretmen adayı denk kesir maddelerinden biri hariç hepsinde temsillerinin altında yatan anlamları açıklayabilmiştir. Kontrol grubundaki bazı öğretmen adayları cevaplarının doğruluğundan emin olduklarını ve bu nedenle açıklama yapmaya ihtiyaç duymadıklarını belirtmişlerdir. Kontrol grubunun aksine doğru resimsel temsiller oluşturan deney grubundaki katılımcıların çoğu düşüncelerini açıklayabilmişlerdir ve açıklamalarında kontrol grubunun aksine kavramsal olarak doğru gerekçelendirmelerde bulunmuşlardır. Kontrol grubundaki öğretmen adaylarının kesirlerle toplama, çıkarma ve denk kesirler için oluşturdukları uygun olmayan resimsel temsiller çalışmanın başlangıcında referans birimi ile ilgili yaşadıkları zorlukları yansıtmıştır. Kesirlerle işlemleri temsil etmede en sık yapılan hata eşit olmayan bütünler kullanmak olmuştur. Kontrol grubunun aksine deney grubundaki öğretmen adaylarının çoğu son testte bu zorluğun üstesinden gelebilmiştir. Kesirlerle çarpma ve bölme sorularında kontrol grubundaki öğretmen adaylarının çoğu resimsel bir temsil oluşturamamış, bazıları hiçbir fikrinin olmadığını bazıları ise hiç düşünmediklerini belirtmişlerdir. Deney grubundaki öğretmen adaylarının çoğu oluşturdukları problemlerdeki modellerden hareket ederek temsillerini açıklamışlardır.

Her iki gruptaki öğretmen adaylarının oluşturdukları temsillere bakıldığı zaman alan modelinin baskın olarak kullanıldığı, son testte nadir olarak küme ve sayı doğrusu modellerinin kullanıldığı ortaya çıkmıştır. Öğretmen adaylarının oluşturdukları temsillere ilişkin yaptıkları açıklamalar matematikte bir şey bilmenin ne anlama geldiğine ilişkin görüşlerini yansıtmıştır. Son testeki bazı sorulardan elde edilen sonuçlar, oluşturdukları temsiller için yaptıkları açıklamaların çoğunun basitçe, kuralların yeniden düzenlemesini içermesinden dolayı kontrol grubundaki katılımcıların neredeyse tamamının ve deney grubundaki katılımcıların yaklaşık olarak yarısının matematiği kuralları hatırlama ve standart işlemleri kullanabilmeyi bilme olarak gördüklerini ortaya çıkarmıştır.

Contreras ve Martínez-Cruz (2014) tarafından 29 öğretmen adayı ile gerçekleştirilen çalışmada öğretmen adaylarına iki anket verilmiştir. Bütün öğretmen adayları ilk anketi tamamladıktan sonra ikinci anket verilmiştir. İlk ankette “şeklin taralı kısmı ()hangi kesir ya da kesirleri temsil edebilir? Yanıtlarınızı gerekçelendirin ve uygunsa diyagramı çizin” sorusu ikinci ankette ise “Aşağıdaki diyagramın () taralı kısmı $\frac{3}{4}$’ü temsil etmek için kullanılabilir mi? Cevabınızı gerekçelendirin. Uygunsa, 1’i temsil eden diyagramı çizin” sorusu ve $\frac{3}{5}, \frac{3}{10}, 1\frac{1}{2}, \frac{1}{2}$ ve 1 için de aynı sorular yer almıştır. Her öğretmen adayının cevabına içerik analizi uygulanmıştır. İlk anket sorusu için katılımcıların çoğu diyagramın taralı kısmını $\frac{3}{5}$ ile göstermiştir. Yazılı yanıtlarının analizi, öğretmen adaylarının diyagramı tam bir daire olarak düşündüğünü, beş eşit parçadan üçünün taralı olduğunu, ortaya koymuştur. Beş öğretmen adayı diyagramın taralı kısımlarının dört ya da beş parça olup olmadığına bakmaksızın $\frac{3}{4}$ ya da $\frac{3}{5}$ ile temsil edilebileceğini, bir öğretmen adayı ise diyagramın eksik kısmının taralı olup olmadığına bağlı olarak $\frac{3}{5}$ ya da $\frac{4}{5}$ ile temsil edilen diyagramı düşünmüşlerdir İkinci ankette beklenildiği gibi 27 öğretmen adayı diyagramın taralı kısmının $\frac{3}{4}$ ile temsil edileceğini ifade etmişlerdir. "Hayır" yazan öğretmen adaylarından biri $\frac{3}{4}$'ün bu şekle göre bir bütün oluşturamadığını yazmıştır. Diyagramın taralı kısmının $\frac{3}{5}$'e karşılık gelip gelmemesi hususunda 17 kişi olumlu yanıt verirken, 11 öğretmen adayı "hayır" demiş ve birisi de "evet ve hayır" olarak belirtmiştir. "Evet" diyen öğretmen adaylarının tamamı dairenin tamamlanması gerektiğini ifade ederken, "hayır" diyen öğretmen adaylarının çoğu yalnızca dört parça olduğunu ve bunun üçünün taralı olduğunu belirtmiştir. Son olarak "evet ve hayır" yazan öğretmen adayı eksik parçanın taralı olup olmadığına bağlı olduğunu öne sürmüştür. Üçüncü ihtimal olarak, bütün katılımcılar diyagramın taralı kısmını temsil etmek için $\frac{3}{10}$'ün kullanılamayacağını söylemiştir. Katılımcıların verdikleri tipik açıklama 10 değil sadece dört parçanın olduğu olmuştur. Bazı öğretmen adayları daireyi tamamlayarak ve her bir kısmı iki parçaya ayırarak 10 parçanın olabileceğini, fakat bu durumda taralı kısmın $\frac{3}{10}$ değil de $\frac{6}{10}$ ile temsil edilebileceğini ifade etmiştir. İkinci anketin dördüncü etkinliğinde öğrencilere diyagramın taralı kısmının $1\frac{1}{2}$ ile temsil edilip edilemeyeceği sorulmuştur. Öğretmen adaylarının çoğu "hayır" olarak belirtirken yedi tanesi ise "evet" olarak cevaplamıştır. Öğretmen adaylarının bilişsel süreçlerini daha derinlemesine anlamak adına yazılı gerekçeleri incelenmiştir. $1\frac{1}{2}$'deki durumun aksine yalnızca üç öğretmen adayı diyagramın taralı kısmının $\frac{1}{2}$ ile temsil edilebileceğini belirtmiştir.

Noh ve Sabey (2014) tarafından yürütülen çalışmada 164 öğretmen adayının kesirlerle çarpma anlayışları bir problem yazma ve kesirlerle çarpmayı gösteren sembolik ifadeler için çizilen modelleri yorumlama bağlamlarında incelenmiştir. Bu çalışmanın diğer yönü, öğretmen adaylarının çizilen modelleri yorumlama kabiliyetinin kesirlerle çarpmayı yorumlama yaklaşımlarıyla nasıl ilişkili olduğunu araştırmaktır. $\frac{2}{3}\times\frac{5}{7}$ için bir problem yazmaları istenmiştir ve verilen modellerden hangisinin $1\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}=1$'i göstermede kullanılamayacağı sorulmuştur. Sonuç olarak 164 öğretmen adayından 49 tanesinin problemi yazmada geçerli bir yorumlama kullandığı, parçanın parçasının en sık kullanılan geçerli yorum olduğu görülmüştür. İkinci soruda öğretmen adaylarının çoğu sayı doğrusu modeli ile gösterimin kullanılmayacağını belirtmiş, bunun nedeni olarak da diğer üç seçenekte alan modeli kullanılması olarak görülmüştür. Öğretmen adaylarının %65'i bu soruya doğru cevap verememiştir. Parçanın parçası yorumunun kesirlerde çarpma için çizilen modeller hakkında akıl yürütmek için en faydalı yorum olduğu hipotezi ileri sürülmüştür. Kesirlerde çarpma modeli yorumlanıyorken parçanın parçası mantıklı ve uygun bir yorum olarak görünmesine rağmen, 28 öğretmen adayının bu yoruma başvurmadığı görülmüştür.

Erdem ve diğerleri (2015) tarafından yürütülen çalışmanın amacı ortaokul matematik öğretmen adaylarının kesirlerle çarpma ve bölme işlemlerinde modelleme becerilerini incelemektir. Yapılan çalışma mevcut durumu incelemeyi amaçladığı için betimsel araştırma niteliğine sahiptir. İki devlet üniversitesinde Eğitim Fakültesi Matematik Öğretmenliği Bölümü'nde öğrenim görmekte olan Özel Öğretim Yöntemleri I-II dersini almış 104 son sınıf öğretmen adayı çalışmanın katılımcılarını oluşturmuştur. Üç soru kesirlerle çarpma, üç soru kesirlerle bölme olmak üzere altı sorudan oluşan "Kesirlerde Modelleme Testi" veri toplama aracı olarak kullanılmıştır. Öğretmen adaylarına testi cevaplamaları için 50 dakika süre verilmiştir. Verilerin analizinde betimsel istatistik kullanılmıştır. Her soru ayrı ayrı incelenmiş ve değerlendirilmiş, her soru için frekans ve yüzde tabloları verilmiştir. Alanyazın yardımıyla (Forrester ve Chinnappan, 2010; Toluk-Uçar, 2009) geliştirilen rubrik katılımcılar tarafından verilen cevapların değerlendirilmesinde kullanılmıştır. Cevaplar incelendiğinde katılımcıların yarısından fazlasının tamamen doğru cevap verdiği, genellikle kesirlerle çarpmada kesirlerle bölmeye göre daha iyi performans gösterdikleri, katılımcıların en iyi performansı $2\times\frac{1}{3}$ işleminde gösterdikleri, en çok $\frac{2}{3}\div\frac{1}{2}$ işleminde zorlandıkları ve bu soruda oluşturdukları modellerde en az açıklamayı yaptıkları, bir doğal sayı ile basit kesrin çarpılmasını ve bölünmesini gerektiren işlemlerde daha doğru ifadeler kullandıkları ve daha iyi modeller oluşturdukları bulunmuştur. Öğretmen adaylarının çoğu $2\times\frac{1}{3}$ işleminde iki tane $\frac{1}{3}$ oluşturma bilgisine sahiptirler ve oluşturdukları modellerde bu bilgiyi kullanmışlardır. $\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}$ işlemini temsil etmek için öğretmen adayları önce bir çarpanı geometrik şekil üzerinde dikey olarak göstermiş, sonra diğer çarpanı geometrik şekil üzerinde yatay olarak göstermiş ve sonra da kesişimlerini almıştır. Bazı öğretmen adayları ise $\frac{2}{3}$'nin yarısını almış ve buna göre bir model oluşturmuştur. $\frac{2}{5}\times\frac{1}{3}$ işlemi öğretmen adaylarının model oluşturmada en çok zorlandıkları çarpma işlemi olmuştur. Katılımcıların çoğu bu işlem için alan ya da bölge modeli, bazı öğretmen adayları ise doğru olmayan uzunluk modelleri kullanmışlardır. $2\div\frac{1}{2}$ işlemi için bazı öğretmen adaylarının iki bütünün içinde kaç tane $\frac{1}{2}$'lik olduğunu sayma bilgisine sahip olduğu, bazı öğretmen adaylarının ise bu işlem için doğru modeller oluşturamadıkları ve kesirlerle bölme kuralını uyguladıkları görülmüştür. $\frac{1}{3}\div\frac{1}{6}$ işlemi için verilen cevaplar incelendiğinde bazı öğretmen adaylarının $\frac{1}{6}$ kesrini bir ölçek olarak düşünebildikleri, $\frac{1}{3}\div\frac{1}{6}$ işlemini $\frac{1}{3}$ kesri ile belirtilen büyüklük içinde $\frac{1}{6}$ ile belirtilen büyüklükten kaç tane olduğunu sayarak buldukları gözlemlenmiştir. Diğer taraftan bazı öğretmen adayları bu işlem için bir model oluşturamamış ve yine sadece kesirlerle bölme kuralını uygulamışlardır. $\frac{2}{3}\div\frac{1}{2}$ işleminde katılımcıların çoğu $\frac{2}{3}$ ile temsil edilen büyüklük içinde $\frac{1}{2}$'lik büyüklüklerden kaç tane olduğunun sayılarak bulunabileceğini kavrayamamışlardır.

Son ve Lee (2016) tarafından yürütülen çalışmanın amacı öğretmen adaylarının üç farklı bağlamda (sözlü problem, sadece sayısal problem, grafik gösterim) kesirlerle çarpma anlayışlarını inceleyerek, öğretmen adaylarının matematiksel yeterlik profillerini karakterize etmektir. Çalışmanın katılımcılarını Amerika'da büyük bir Güneydoğu üniversitesine kayıtlı yaşları 22-27 arası olan 2. sınıf 60 öğretmen adayı oluşturmuştur. Çalışmada önceki çalışmalara (Bezuk ve Armstrong, 1995; Ma, 1999) dayanan bir etkinlik tasarlanmış ve kullanılmıştır. Bu etkinlik katılımcıların tamamlaması gereken üç sorudan oluşmuştur. Birinci ve üçüncü sorular katılımcıların alan bilgisini (özel alan bilgisi) değerlendirmeyi, ikinci soru ise kesirlerle çarpmayı içeren sözlü problemleri öğretmek için kullanılabilecek olası öğretim yaklaşımlarını sunmalarını isteyerek pedagojik stratejilerini (alan ve öğretim bilgisi) değerlendirmeyi amaçlamaktadır. Birinci soruda öğretmen adaylarına bir problem verilmiş ve onu nasıl çözecekleri sorulmuştur. İkinci soruda kendilerine verilen problemi beşinci sınıflarda nasıl kullanacakları sorulmuş ve öğrencilere anlamlı hale getirmek için resimler, çizimler gibi grafiksel temsiller kullanabilecekleri belirtilip, problemi bazı temsiller kullanarak öğrencilere açıklamaları istenmiş, öğrencilerin bu problemi çözmede hangi kavramları bilmeleri gerektiğini düşündükleri sorulmuş, öğrencilerin zaten $\frac{3}{4}$'ün anlamını bildikleri belirtilmiş ve mümkün olduğunca açıklamaları istenmiştir. Üçüncü soruda $\frac{3}{4} \times \frac{2}{3}$ işlemini nasıl çözecekleri sorulmuş sözel ifadeler, çizimler, kesir çubukları gibi çoklu temsillerle cevaplarını gerekçelendirmeleri istenmiştir. Verilerin analizi dört aşamadan oluşmuştur: İlk aşamada öğretmen adaylarının cevapları okunmuştur, sonra cevapların doğruluğu belirlenmiş, üçüncü olarak kullanılan strateji, açıklama ve model türleri keşfedilmiş ve son olarak da veriler nicel ve nitel olarak yorumlanmıştır. Verilerin analizi sonucunda, katılımcıların yaklaşık %40'ının kesirlerle çarpmayı içeren bir bağlam olarak bir sözel problemi fark ettiği, temsilleri doğru bir şekilde kullandığı ve doğru bir çarpma ifadesine dönüştürdüğü görülmüştür. Öğretmen adayları uzunluk modeli, küme modeli ve alan modeli olmak üzere çeşitli grafiksel temsiller kullanmıştır. Çok az katılımcı kesirlerde çarpmanın altında yatanın oranın oranı kavramı olduğunu fark etmesine rağmen, çoğu altında yatan anlamı standart geleneksel algoritmaya dayandırmıştır. Katılımcıların %73'ü kesirlerde çarpmayı doğru grafiksel temsiller kullanarak göstermiştir. Sözel problemi doğru şekilde cevaplayan katılımcıların %89'u verilen sözel problemi uygun bir temsil ile çözmüştür. Bununla birlikte %11'i verilen sözel problemi çözmede grafiksel gösterimler kullanarak düşüncelerini açıklamada zorluk çekmiştir. Grafiksel gösterimler arasından öğretmen adayları çoğunlukla kesir çubukları kullanmayı, ardından alan modeli kullanmayı tercih etmişlerdir. 16 katılımcı verilen problemi çözmede doğru grafiksel temsil kullanımında başarısız olmuştur. Öğretmen adaylarının $\frac{3}{4}$'ün $\frac{1}{3}$'ini grafiksel temsiller ile göstermesindeki zorluklar üç kategoride özetlenmiştir: bazı öğretmen adayları tek bir bütünle ilişkili olarak bölmeyi düşünmüşler, bütünün parçasını parçalamaya uygulamamışlar ve bu nedenle iki kesri farklı temsiller üzerinde göstermişlerdir. Diğer hata türü öğretmen adaylarının parçanın parçasını tanımlayamamasına ilişkindir. Grafiksel temsillerle ilişkili üçüncü hata ise $\frac{3}{4}$'ün $\frac{1}{3}$'inin temsilini anlamadaki eksiklikle ilgilidir. Öğretmen adayları temsile nereden başlamaları gerektiğini bilmemektedirler.

Yapılan çalışmalar incelendiğinde öğretmen adayları tarafından kesirlerde model kullanımı konusunda en çok tercih edilen modelin genellikle alan modeli olduğu (Erdem ve diğ., 2009; Toluk-Uçar, 2009), kesirlerle çarpma işleminin kesirlerle bölme işlemine göre model ile daha kolay ve doğru şekilde temsil edildiği (Erdem ve diğ., 2015), kavramsal anlamada eksikliklerinin olması nedeni ile kesirlerle çarpma ve bölme işlemlerini modeller yardımıyla açıklamak yerine standart işlemlerden faydalandıkları görülmüştür (Erdem ve diğ., 2015; Son ve Lee, 2016; Toluk-Uçar, 2009).

2.3. Alanyazın Taraması Özeti

Önceki çalışmalar incelendiği zaman öğretmen bilgisi üzerine yapılan çalışmalara yoğun bir ilgi olduğu görülmüştür. Farklı araştırmacılar tarafından iyi bir öğretim için gerekli olan öğretmen bilgisi türleri ve bileşenleri farklı şekillerde tanımlanmıştır, bazı ortak bileşenler de yer almıştır. PAB ilk olarak Shulman (1986) tarafından ortaya atılmış ve Shulman'dan sonra birçok araştırmacı PAB bileşenleri üzerinde çalışmalar yapmışlardır. Araştırmacıların PAB bileşenleri incelendiği zaman benzerlikler ve farklılıklar olduğu görülmüştür. Çok sayıda araştırmacı öğrenci bilgisi üzerinde durmuştur (An ve diğ., 2004; Baker ve Chick, 2006; Baki, 2010; Ball ve diğ., 2008; Grossman, 1990; Fennema ve Franke, 1992; Hashweh, 2005; Kennedy ve diğ., 1993; Kovarik, 2008; Lee, 2006; Shulman, 1987).

PAB ile ilgili çalışmalar incelendiğinde öğretmenlerin ve öğretmen adaylarının PAB'larının genel olarak PAB bileşenleri açısından incelendiği görülmüştür (Akkaş, 2014; Altaylı, Konyalıoğlu, Hızarcı ve Kaplan, 2014; Baştürk ve Dönmez, 2011a, 2011b; Bukova-Güzel, 2010; Gökkurt, 2014; Gökkurt, Şahin, Soylu ve Doğan, 2015; Güler, 2014; Karahasan, 2010; Kim, 2004; Şahin, Erdem, Başıbüyük, Gökkurt ve Soylu, 2014; Yeşildere ve Akkoç, 2010). Öğretmenlerin ya da öğretmen adaylarının PAB'larını geliştirmeye yönelik çalışmalara ise daha az rastlanmıştır (Lannin ve diğ., 2013). Alanyazında öğretmenlerin/öğretmen adaylarının kesirlerde alan bilgisi ve PAB'ına, kesirlerle çarpma ve bölme işlemlerine yönelik bilgilerine (AB, PAB) dair çok sayıda çalışmaya da rastlanmıştır (Aksu ve Konyalıoğlu, 2015; Arslan-Kılcan, 2006; Azim, 1995; Ball, 1990; Borko ve diğ., 1992; Chestnut-Andrews, 2007; Chinnappan ve Desplat, 2012; Cluff, 2005; De Castro, 2008; Gökkurt ve diğ., 2013; Işıksal ve Çakıroğlu, 2011; Leinhardt ve Smith, 1985; Li ve Huang, 2008; Li ve Smith, 2007; Newton, 2008; Özel, 2013; Simon, 1993). Model kullanımı ile ilgili çalışmalar olduğu da görülmüş (Contreras ve Martinez-Cruz, 2014; Erdem ve diğ., 2015; Noh ve Sabey, 2014; Son ve Lee, 2016; Toluk-Uçar, 2009), fakat kesirlerle çarpma ve bölme işlemlerinde model kullanımına yönelik AB ve PAB'ı inceleyen bir çalışmaya rastlanmamıştır. Bu nedenle söz konusu tez çalışması öğretmen adaylarının kesirlerle çarpma ve bölme işlemlerinde model kullanımına ilişkin AB'lerini ve PAB'larını incelemeyi amaç edinmiştir. Öğretmen adaylarının PAB'larının incelenmesinde taşıdıkları önem dikkate alınarak öğrenci bilgisi ve matematiksel temsiller bilgisinin PAB bileşenleri olarak alınmasına karar verilmiştir.

ÜÇÜNCÜ BÖLÜM: YÖNTEM

Bu bölümde araştırma modeli, araştırmada yer alan katılımcılar, kullanılan veri toplama araçları ve veri analizi hakkındaki bilgiler ayrı ayrı başlıklar halinde açıklanmıştır.

3.1. Araştırma Modeli

Araştırmada Ortaokul matematik öğretmen adaylarının kesirlerde model kullanımına yönelik alan bilgileri ve kesirlerle çarpma ve bölme işlemlerinde model kullanımına yönelik PAB'ları ile kesirlerle çarpma ve bölme işlemlerinde model kullanımına yönelik alan bilgilerini öğretimlerine nasıl yansıttıklarının ayrıntılı olarak incelenmesi gerektiği için nitel araştırma yaklaşımlarından biri olan durum çalışması deseninden yararlanılmıştır.

Yıldırım ve Şimşek (2013) nitel araştırmayı gözlem, görüşme ve doküman analizi gibi nitel veri toplama araçlarının kullanıldığı, algıların ve olayların doğal ortamda gerçekçi ve bütüncül bir biçimde ortaya konmasına yönelik nitel bir sürecin izlendiği araştırma olarak tanımlamıştır. Denzin ve Lincoln (2005'den akt. Merriam, 2013) tarafından ise nitel araştırma "Gözlemleyici dünyanın tam ortasına konan yerleşik bir aktivite" olarak tanımlanmıştır (s.13). Denzin ve Lincoln (2005'den akt. Merriam, 2013) nitel araştırmacıların, olguları doğal ortamında çalıştıklarını ve böylece olguları anladıklarını ya da insanların onlara ne gibi anlamlar yüklediklerini yorumladıklarını ifade etmişlerdir. Creswell (2014) nitel araştırmayı şöyle tanımlamaktadır:

> Nitel araştırma sosyal ya da beşeri bir probleme bireylerin veya grupların atfettiği anlamları keşfetme ve anlamaya yönelik bir yaklaşımdır. Araştırma süreci; soruların ve işlem basamaklarının geliştirilmesi, genellikle katılımcıların kendi ortamlarından veri toplanması, özel durumlardan genel temalara ulaşılarak tümevarımsal veri analizi yapılması, araştırmacıların verilerin anlamını yorumlama aşamalarını kapsamaktadır. Yazılan son rapor esnek bir yapıya sahiptir. Bu çerçevede araştırma yapan kişiler, tümevarımsal üsluba, bireysel anlama odaklanmaya ve bir durumun karmaşıklığını yorumlamaya önem veren araştırma tarzını desteklemektedirler (s.4).

Merriam (2013) nitel araştırmanın doğasını anlamada dört özelliğin anahtar niteliğinde olduğunu ifade etmiştir: Temel vurgu süreç, anlayış ve anlam üzerinedir; araştırmacı, veri toplama ve analizinde temel belirleyicidir; süreç tümevarımsaldır; ürün etraflı ve zengin betimlenmelidir. Genellikle verilerin katılımcıların kendi ortamlarından toplanması, verilerin analizinde tümevarımsal veri analizi yapılması, verilerin anlamını yorumlama çalışmaları ve elde edilen bulguların kapsamlı bir şekilde betimlenmiş olması sebebiyle tez çalışmasında nitel araştırma yöntemi seçilmiştir.

Nitel araştırma yaklaşımları farklı araştırmacılar tarafından farklı şekilllerde sınıflandırılmakta ve bir ya da birden fazla olayın, ortamın, programın, sosyal grubun ya da diğer birbirine bağlı sistemlerin derinlemesine incelendiği durum çalışmaları (Büyüköztürk, Çakmak, Akgün, Karadeniz ve Demirel, 2013) nitel araştırma yönteminin desenlerinden biri olarak kabul edilmektedir. Durum çalışması; Cohen, Manion ve Morrison (2005) tarafından tek bir öğrencinin, sınıfın, okulun karakteristiklerinin derinlemesine incelenmesi olarak tanımlanmaktadır. Güncel bir olguyu kendi gerçek yaşam çerçevesi içinde çalışan, olgu ve içinde bulunduğu içerik arasındaki sınırların kesin hatlarıyla belirgin olmadığı ve birden fazla kanıt veya veri kaynağının mevcut olduğu durumlarda kullanılan, görgül bir araştırma yöntemidir (Yin, 1984'den akt. Yıldırım ve Şimsek, 2013). Durum çalışmasının "nasıl" ve "niçin" sorularını temel alan, araştrmacının kontrol edemediği bir olgu ya da olayı derinliğine incelemesine olanak veren araştırma yöntemi olduğunu söylemek mümkündür (Yıldırım ve Şimşek, 2013).

Nitel durum çalışmasının en önemli özelliğinin bir ya da birkaç durumun derinliğine araştırılması olduğu ifade edilmektedir (Yıldırım ve Şimşek, 2013). Yani bir duruma ilişkin etkenler (ortam, bireyler, olaylar, süreçler vb.) bütüncül bir yaklaşımla araştırılarak ilgili durumu nasıl etkiledikleri ve ilgili durumdan nasıl etkilendikleri üzerine odaklanılmaktadır. Durum çalışmalarında genellikle birden fazla veri toplama yöntemi kullanılmaktadır. Bu sayede zengin ve birbirini teyit edebilecek veri çeşitliliğine ulaşmak hedeflenmektedir. Durumlar birbirinden farklı olduğu için sonuçların genellenmesi söz konusu olmamaktadır (Yıldırım ve Şimşek, 2013). Söz konusu tez çalışmasında incelenmiş olan durumun katılımcıların model kullanımına yönelik AB'leri, PAB'ları ve AB'lerini PAB'larına nasıl yansıttıkları olduğu göz önüne alındığında, ortaya çıkan yorumlamalar ve açıklamalar ilgili duruma özgü olup genelleme amacı taşımamaktadır. Öğretmen adaylarının model kullanıma yönelik AB'lerini ve PAB'larını ortaya çıkarmak için gözlem, görüşme ve dökümanlar veri toplama aracı olarak kullanılarak veri çeşitliliğine ulaşılmak hedeflenmiştir. Aynı zamanda öğretmen adaylarının model kullanımları derinlemesine incelenerek ayrıntılı bir şekilde betimlenmiştir. Bu nedenlerle tez çalışmasının yöntemi olarak "durum çalışması"nın seçilmesine karar verilmiştir.

Yin (2002) durum çalışmasının bütüncül tek durum deseni, iç içe geçmiş tek durum deseni, bütüncül çoklu durum deseni ve iç içe geçmiş çoklu durum deseni olmak üzere dört türü olduğunu belirtmektedir. Bütüncül tek durum deseninde tek bir analiz birimi vardır. İç içe geçmiş tek durum deseninde tek bir durum içinde birden fazla alt tabaka veya birim olabilir. Bütüncül çoklu durum deseninde her durum kendi başına bütüncül olarak ele alınır ve daha sonra birbiriyle karşılaştırılır. İç içe geçmiş çoklu durum deseninde de yine birden fazla durum vardır. Ele alınan her bir durum kendi içinde alt birimlere ayrılarak çalışılabilmektedir (Yıldırım ve Şimşek, 2013). Araştırmada öğretmen adaylarının kesirlerde ve kesirlerle çarpma ve bölme işlemlerinde model kullanımına yönelik AB'leri ve PAB'ları incelenmiş, AB'leri alan modeli, küme modeli ve uzunluk modeli bağlamında ayrı ayrı incelenmiş, PAB'ları öğrenci bilgisi ve matematiksel temsiller bilgisi bileşenleri bağlamında ele alınmış, sonrasında AB'lerinin öğretimlerine yansıması incelenmiştir. Bu nedenle araştırmada iç içe geçmiş çoklu durum deseni kullanılmıştır.

3.2. Katılımcılar

Söz konusu tez çalışmasında öğretmen adaylarının kesirlerde model kullanımına yönelik AB'leri, kesirlerle çarpma ve bölme işlemlerinde model kullanımına yönelik PAB'ları ve AB'lerini öğretimlerine nasıl yansıttıkları incelemek amaçlandığı için öğretmen adaylarının kesirlere ve kesirlerde model kullanımına ilişkin bilgilerinin olması gerektiği düşünülmüştür. Öğretmen adaylarının programda kesirlerle çarpma ve bölme işlemlerinin nasıl işlendiği hakkında bilgi sahibi olmaları beklendiği için ortaokul matematik öğretim programına da aşina olmaları istenmiştir. Aynı zamanda öğretmen adaylarının ders planının nasıl yapılacağı hususunda da bilgi sahibi olmaları gerekmektedir. Bu nedenle çalışmanın katılımcılarını seçerken Özel Öğretim Yöntemleri I ve II derslerini almış olmak bir kriter olarak belirlenmiş ve çalışmanın katılımcılarını belirlemede amaçlı örneklem yöntemlerinden olan ölçüt örnekleme yöntemi kullanılmıştır. Ölçüt örneklemin mantığında daha önceden belirlenmiş bazı önem ölçütlerini karşılayan tüm durumları çalışma ve gözden geçirme yatmaktadır. Ölçüt örneklemdeki asıl nokta seçilecek olan durumların bilgi verme açısından zengin olmasıdır (Patton, 2014).

Kriterlerde belirtilen Özel Öğretim Yöntemleri I ve II derslerinin içeriği şu şekildedir:

> Özel Öğretim Yöntemleri I Ders İçeriği: Alana özgü temel kavramlar ve bu kavramların alan öğretimiyle ilişkisi, alan öğretiminin genel amaçları, kullanılan yöntem, teknik, öğrenme – öğretme yaklaşımları, araç-gereç ve materyaller. İlgili Öğretim Programının incelenmesi (amaç, kazanım, tema, ünite, etkinlik, v.b.). Ders, öğretmen ve öğrenci çalışma kitabı örneklerinin incelenmesi ve değerlendirilmesi.
>
> Özel Öğretim Yöntemleri II Ders İçeriği: Problem ve problem çözme nedir? Problem çözmenin önemi, problemlerin sınıflandırılması, problem çözme öğretiminin amaçları ve problem çözme süreci; dört işlem problemlerinin çözümünün öğretimi, sıradışı problemleri çözme stratejileri. Doğal sayılar ve doğal sayılarda işlemler, kesirler ve öğretimi, ölçüler ve öğretimi, veri işleme, geometri öğretimi. Proje Tabanlı Öğrenme. Ders planı hazırlama, sunma ve değerlendirme.

Özel Öğretim Yöntemleri I ve II derslerinde ayrıca Van de Walle ve diğerlerinin (2013) İlkokul ve Ortaokul Matematiği kitabı kullanılmıştır. Bu kitapta kesirlerin nasıl öğretilmesi gerektiğine ve kesirlerde model kullanımına yönelik bilgiler yer almaktadır. Ayrıca Özel Öğretim Yöntemleri II ders öğrenme kazanımlarında "İlköğretim 6-8. sınıf matematik dersi öğretim programında yer alan bir konuda ders planı tasarlar ve uygular" ifadesi yer almaktadır.

Belirlenen kriterler doğrultusunda 2015-2016 Eğitim-Öğretim yılında Türkiye'de bir devlet üniversitesinin Eğitim Fakültesi Matematik Eğitimi Anabilim Dalı’nda öğrenim görmekte olan ve Özel Öğretim Yöntemleri I ve II derslerini almış 4. sınıf dört öğretmen adayı çalışmanın katılımcılarını oluşturmuştur. Katılımcıların ikisi erkek, ikisi kadındır. Öğretmen adaylarının Özel Öğretim Yöntemleri II dersi final sınavında yer alan kesirlerle bölme işleminde model kullanımı ile ilgili soruya vermiş olduğu cevaplara göre bir seçim yapılmak istenmiş ve çalışmanın altı öğretmen adayı ile yürütülmesi planlanmış, fakat öğretmen adaylarının isteksiz oluşları nedeni ile çalışma gönüllü öğretmen adayları ile yürütülmüştür. Çalışmada öğretmen adaylarının isimleri gizli tutulmuş, kendilerine ilişkin bilgiler verilirken ve veriler analiz edilirken belirlenen takma isimler kullanılmıştır. Çalışmada yer alan öğretmen adaylarının takma isimleri İlker, İpek, Cemil ve Hale olarak belirlenmiştir. Öğretmen adaylarından İpek üniversite sınavına ikinci girişinde bu programı kazanmış, Cemil ve Hale lise mezuniyeti sonrası ilk sınavlarında bu programı tercih etmiş, İlker ise yabancı öğrenci sınavı ile bu programa kayıt yaptırmıştır. İpek Anadolu Öğretmen Lisesi’nden Hale düz liseden ve Cemil Anadolu Lisesi’nden mezun olmuşlardır. Katılımcı öğretmen adayından İlker yabancıdır ve Türkçe iletişim becerileri sınırlıdır. Bu nedenle de ders esnasında öğrencilerle iletişim kurmakta ve öğrenciler tarafından anlaşılmakta diğer öğretmen adaylarına kıyasla daha fazla zorluk çekmiştir. İlker anabilim dalının yedinci yarıyılında yer alan seçmeli derslerden “Hata Kaynakları” dersini alan tek öğretmen adayıdır ve bu derste de öğrencilerin kesirler konusundaki kavram yanılgılarını inceleyecen bir proje yapmıştır. Öğretmen adaylarının Özel Öğretim Yöntemleri I ve II ders notları Tablo 3.1’de yer almıştır.

Tablo 3.1
Öğretmen Adaylarının Özel Öğretim Yöntemleri I-II Ders Notları

Dersin Adı/Öğretmen Adayı	İlker	İpek	Cemil	Hale
Özel Öğretim Yöntemleri I	56	77	73	72
Özel Öğretim Yöntemleri II	63	77	91	66

3.3. Veri Toplama Araçları

Nitel araştırmalarda çok sayıda yöntem ve kaynak kullanılarak insan deneyimlerine ilişkin sözlü ve yazılı anlatımlar ya da kayıtlar incelenmektedir. Tek bir nitel araştırma projesinde birden çok veri toplama kaynağı kullanılabilmektedir (Punch, 2011). Nitel araştırmalarda en çok kullanılan veri toplama araçlarının başında görüşme, odak grup görüşmesi, gözlem ve doküman incelemesi gelmektedir (Yıldırım ve Şimşek, 2013).

Durum çalışmasında veriler genellikle görüşmeler, alandaki gözlemler ve belgelerden elde edilmektedir (Merriam, 2013). Durum çalışmalarında mümkün olduğu ölçüde birden fazla veri toplama yöntemi kullanması önerilmektedir, böylece araştırmanın veri tabanının zenginleşeceği, araştırmanın sonunda ulaşılacak sonuçların daha geniş bir bakış açısıyla yapılması veya alternatif yorumlara ulaşılmasını mümkün kılacağı, sonuç olarak da araştırmada geçerlik ve güvenirliğin önemli derecede artacağı ifade edilmektedir (Yıldırım ve Şimşek, 2013). Söz konusu tez çalışması kapsamında araştırmanın geçerlik ve güvenirliğini arttırmak amacıyla görüşmeler, gözlemler ve dokümanlar veri toplama aracı olarak kullanılmıştır.

AB'ye yönelik veriler öğretmen adaylarının kesirlerde model kullanıma yönelik AB'lerini ortaya çıkarmak amaçlı her bir öğretmen adayıyla bir kez olmak üzere yapılan dört görüşme, AB görüşme formuna ait dört video kaydı, AB görüşme formu dökümanlarından elde edilmiştir. PAB'a yönelik veriler öğretmen adaylarının kesirlerle çarpma ve bölme işlemine yönelik gerçekleştirdikleri derslere ait üç öğretmen adayının iki ders saati, bir öğretmen adayının ise üç ders saati gözlem verisi olmak üzere dokuz gözlem verisi, öğretmen adaylarının hazırlamış oldukları toplam sekiz ders planı, iki öğretmen adayının ders için hazırlamış olduğu ders notları (kesirlerle çarpma ve bölmede toplam dört adet), bir öğretmen adayının öğrencilere vermiş olduğu iki çalışma kağıdı, bu çalışma kağıtları üzerine yapılmış bir görüşme ve görüşmeye ait video kaydının incelenmesinden oluşmuştur.

3.3.1. Görüşmeler

Görüşme, sosyal bilimler alanında yapılan çalışmalarda kullanılan en yaygın veri toplama yöntemidir. Bu durum görüşme yönteminin; bireylerin deneyimlerine, tutumlarına, görüşlerine, şikayetlerine, duygularına ilişkin bilgi edinmede oldukça etkili bir yöntem olmasından kaynaklanmaktadır (Briggs, 1986'dan akt. Yıldırım ve Şimşek, 2013). Stewart ve Cash (1985) görüşmeyi "önceden belirlenmiş ve ciddi bir amaç için yapılan soru sorma ve yanıtlama tarzına dayalı karşılıklı ve etkileşimli bir iletişim süreci" olarak tanımlamışlardır (s. 7). Patton'a (2014) göre görüşmenin amacı, bir bireyin iç dünyasına girmek ve onun bakış açısını anlamaktır. Nitel görüşmeler diğer insanların bakış açılarının anlamlı, bilinebilir ve açığa çıkartılabilir olduğu varsayımı ile başlamaktaktadır (Patton, 2014). Patton (2014) görüşmelerin bir insanın zihninden neler geçtiğini açığa çıkarmak ve insanların hikayelerini bir araya getirmek için yapıldığını ifade etmektedir. Görüşme, gözlemleyemediğimiz davranışlar, duygular veya insanların etraflarındaki dünyayı nasıl nasıl ifade ettiklerini öğrenmek için gereklidir (Merriam, 2013). Veri toplamanın temel şekli olan görüşme tekniğinin kullanılmasının, istenilen verinin çeşidi ve görüşme tekniğinin o bilgiyi alabilmek için en iyi yol olup olmadığı sorusuna bağlı olduğu ifade edilmektedir (Merriam, 2013).

Öğretmen adaylarının kesirlerde model kullanımına yönelik AB'lerini ortaya çıkarmak için öğretmen adaylarına dokuz sorudan oluşan yarı-yapılandırılmış AB görüşme formu (EK 2) uygulanmıştır. Öğretmen adaylarının tümüyle bu form üzerine bir görüşme gerçekleştirilmiştir. AB görüşme formu en başta 12 sorudan oluşmuştur. Alınan iki uzman görüşü doğrultusunda soruların aynı amaca hizmet ederek ölçme aracının geçerliğini olumsuz yönde etkilemesi ve soru sayısının fazla olması nedeni ile öğretmen adaylarından bıkkınlıktan istenilen cevabın alınamaması düşünceleri ile dokuz soruya indirilmiş ve sorulardan birinde düzeltme yapılmıştır. Uzman görüş formunda her soru için "Bu soruyu araştırmanın amacı için yeterli olup olmadığına göre nasıl puanlarsınız?" ve "Açıklık, netlik ve anlaşılırlığına göre bu soruyu nasıl puanlarsınız?" soruları yer almış ve uzmanlardan soruları 0=en az, 5=en çok olacak şekilde puanlamaları istenmiştir. Ayrıca her bir soru ile ilgili görüş ve önerilerini belirtmeleri istenmiştir.

AB görüşme formunun hazırlanmasında literatürden yararlanılmıştır. Alan bilgisi görüşme formunda yer alan birinci soru Chestnut-Andrews (2007) örnek alınarak (soru ifadesi olarak) hazırlanmış, ikinci soru Lamon'dan (2006), üçüncü soru Hurrell'den (2013), yedinci soru Noh ve Sabey'den (2014), sekizinci soru Bütün'den (2005), dokuzuncu soru Lee'den (2010) alınmıştır. Çalışmada yer alan dördüncü soru denklik kavramının kesirler için önemli olduğu düşüncesi ile Chestnut-Andrews (2007) örnek alınarak (soru ifadesi olarak), beşinci soru Birgin ve Gürbüz (2009) örnek alınarak, altıncı soru da Işık'ın (2011) çalışması örnek alınarak araştırmacı tarafından oluşturulmuştur (EK 2). AB görüşme formunda yer alan tüm sorular literatürden seçilirken öğretmen ya da öğretmen adaylarına uygulanmış olmasına dikkat edilmiştir. AB görüşme formunda yer alan soruların ilk üçü (1-3. sorular) verilen kesirlerin model ile temsiline yönelik, iki soru (4-5. sorular) denk kesirlerin model ile temsiline yönelik, iki soru (6-7. sorular) kesirlerle çarpma işleminin model ile temsiline yönelik ve iki soru (8-9. sorular) da kesirlerle bölme işleminin model ile temsiline yöneliktir. Birinci, dördüncü, altıncı ve sekizinci sorular öğretmen adaylarının istedikleri modelleri kullanmalarına olanak verdiği için açık uçlu sorular olarak değerlendirilebilir. İkinci soruda öğretmen adaylarının küme modeline yönelik AB'leri, üçüncü soruda alan modeli ve küme modeline yönelik AB'leri, beşinci soruda uzunluk modeline yönelik AB'leri, yedinci ve dokuzuncu sorularda da alan modeli ve uzunluk modeline yönelik AB'leri değerlendirilmek istenmiştir. Görüşme formunda model ile temsil edilmiş sorular da yer aldığı için öğretmen adaylarının model kullanımlarını etkilememek, kendilerinde var olan bilgilerini ortaya çıkarabilmek amacı ile tüm sorular tek tek verilmiş ve cevaplanan soruya bir daha geri dönülmemiştir.

Öğretmen adaylarında var olan bilgiyi daha net ortaya çıkarabilmek ve daha derinlemesine bilgi edinebilmek için görüşme tekniğinin uygun olduğuna karar verilmiştir. Öğretmen adaylarına her soruda “Model ile gösterebilir misin?”, “Farklı bir model ile gösterebilir misin?, “Yaptıklarını açıklayabilir misin?” şeklinde standart sorular yöneltilmiş fakat öğretmen adaylarının verdikleri cevaplara göre düşüncelerini ortaya çıkarmak amacı ile ilave sorular da yöneltilmiştir. Bu nedenle tez çalışmasında yarı-yapılandırılmış görüşme kullanılmıştır.

Tez çalışması kapsamında her öğretmen adayı ile bir kere olmak üzere toplam dört bireysel görüşme gerçekleştirilmiştir. Öğretmen adaylarının her biri ile yapılan görüşmeler yaklaşık olarak 2,5 saat sürmüştür. Görüşmeler Matematik Eğitimi Anabilim Dalı’nın yüksek lisans dersliğinde gerçekleştirilmiştir. Bu derslikte U şeklinde yerleştirilmiş masa ve sandalyeler, bunların karşısında da bir tahta yer almaktadır. Ayrıca Anabilim Dalı’na ait bir kitaplık ve de projeksiyon bulunmaktadır. Bu derslik fakültede lisans derslerinin işlendiği dersliklerden küçük olup, yaklaşık 15 kişilik bir kapasiteye sahiptir. Görüşmeler öğretmen adaylarından alınan izin doğrultusunda video kamera ile kayıt altına alınmıştır. Öğretmen adaylarına uygulanan alan bilgisi görüşme formu EK 2’de verilmiştir.

Öğretmen adaylarından İpek kesirlerle çarpma ve bölme işlemlerine yönelik gerçekleştirdiği derslerinde öğrencilere çalışma kağıtları dağıtmış ve dersten sonra bu çalışma kağıtlarını toplamıştır. İpek ile ders sonrası öğrencilerin çalışma kağıtları üzerine yarı-yapılandırılmış bir görüşme gerçekleştirilmiştir. Bu görüşme araştırmacının ofisinde yapılmış olup yaklaşık olarak bir saat sürmüştür. Öğretmen adayının izni doğrultusunda, yapılan görüşme video kamera ile kayıt altına alınmıştır. Bu görüşme için bir görüşme formu hazırlanmamıştır. Öğretmen adayına “Öğrenciler burada ne yapmış olabilir, ne düşünmüş olabilir?", "Burada öğrencilerin sahip olduğu kavram yanılgıları hakkında bir şey söyleyebiliyor musun?" soruları yöneltilmiştir. Tüm çalışma kağıtları tek tek incelenmiştir.

3.3.2. Gözlemler

Gözlem nitel araştırmalarda en yaygın olarak kullanılan bir diğer veri toplama yöntemidir ve herhangi bir kurumda veya ortamda oluşan davranışı ayrıntılı olarak tanımlamak amacıyla kullanılmaktadır. Gözlemler davranışı olduğu gibi kaydetme imkanı sağlamaktadır ve gözlemlerin en önemli özelliği araştırmacıya veriye ilk elden ulaşma olanağı sağlamasıdır (Yıldırım ve Şimşek, 2013). Gözlem tekniğinin en önemli özelliğinin gözlenilenlerin kendi doğal ortamları içinde bulunması olduğu belirtilmektedir (Karasar, 2010).

Tez çalışması kapsamında öğretmen adaylarının "6.1.4.4. İki kesrin çarpma işlemini yapar ve anlamlandırır" ve "6.1.4.7. İki kesrin bölme işleminin yapar ve anlamlandırır" kazanımlarına yönelik 6. sınıflarda gerçekleştirdikleri dersler öğretmen adaylarının kesirlerle çarpma ve bölme işlemlerinde model kullanımına yönelik PAB'larını ayrıntılı olarak tanımlamak amacıyla gözlemlenmiştir. Öğretmen adaylarının dersleri Okul Deneyimi ve Öğretmenlik Uygulaması dersleri kapsamında gittikleri uygulama okullarında gözlemlenmiştir. Öğretmen adaylarının çalışmaya dahil olmasındaki gecikme nedeni ile belirlenen kazanımlar altıncı sınıflarda yıllık planda belirlenen zamanlarda değil de her bir öğretmen adayı için çalışmaya katıldıkları zamanlara göre farklı tarihlerde gerçekleştirilmiştir. Hale kesirlerle çarpma dersini 24.12.2015 tarihinde, kesirlerle bölme dersini 17.05.2016 tarihinde, İlker kesirlerle çarpma ve bölme derslerini 05.05.2016 tarihinde, İpek kesirlerle çarpma ve bölme derslerini 29.12.2015 tarihinde ve Cemil kesirlerle çarpma dersini 14.01.2016, kesirlerle bölme dersini 14.04.2016 tarihinde gerçekleştirmiştir. Gözlemlenen derslerde öğretmen adayları genellikle soru-cevap şeklinde devam eden klasik bir öğretim gerçekleştirmişlerdir. Hiçbir öğretmen adayı teknolojiden ya da başka herhangi bir öğretim materyalinden faydalanmamıştır. Yalnızca İpek çalışma kağıtlarını her bir sırada bir tane olacak şekilde verdiği için bir nevi grup çalışması yapmak istemiştir. Sınıflar ard arda sıralanmış sıraların ve karşılarında tahtanın yer aldığı yaklaşık olarak 30 kişiden oluşan standart sınıflardır. Araştırmacı öğretmen adaylarının derslerine müdahele etmeden sadece ders esnasında yapılanları gözlemlemiş ve not almıştır. Araştırmacı derse herhangi bir müdahalede bulunmadığı için sınıftaki öğrenciler üzerinde herhangi bir etkisi olmamıştır. Öğretmen adaylarının PAB'ları belirli zamanlarda ve kısa süreli (üç öğretmen adayı için iki, bir öğretmen adayı için üç ders saati) örnekler alınarak gözlendiği için araştırmada aralıklı gözlem kullanılmıştır. Böylelikle araştırma kapsamında dokuz saatlik ders gözlemi gerçekleştirilmiştir. Öğretmen adaylarından Hale uygulamasını Okul Deneyimi dersi kapsamında gittiği okuldaki Seçmeli Matematik dersinde gerçekleştirdiği için okuldaki danışman öğretmen tarafından öğretmen adayına iki ders saati uygulama imkanı tanınmıştır. Seçmeli Matematik dersi olması nedeni ile sınıfta yaklaşık olarak 20 öğrenci yer almıştır. Ders gözlemlerinde belirli bir gözlem formu kullanılmamış, sadece derslere ait notlar tutulurken öğretmen adaylarının ders esnasında öğrencilere karşı davranışları, öğrencilere verdiği cevaplar, öğretmen adayları ve öğrenciler arasında geçen diyaloglar, öğrencilerin ve öğretmen adaylarının model kullanımlarına dikkat edilmiştir. Araştırmacı öğretmen adaylarından uygulama öncesi ders planlarını kendisine göndermesini istemiş ve hazırlanan planları incelemiştir. Öğretmen adaylarına geri bildirimde bulunulduktan sonra planların sınıfta uygulaması gerçekleştirilmiştir.

3.3.3. Dökümanlar

Doküman incelemesi araştırılması hedeflenen olgu veya olaylar hakkında bilgi içeren yazılı materyallerin analizini kapsamaktadır (Yıldırım ve Şimşek, 2013). Dökümanlar araştırmacıya katılımcıların dili ve kelimelerini elde etme imkanı vermektedir (Creswell, 2014). Nitel araştırmalarda doğrudan gözlem veya görüşmenin olanaklı olmadığı durumlarda veya araştırmanın geçerliğini arttırmak amacı ile çalışılan araştırma problemi ile ilişkili yazılı ve görsel materyaller ve malzemeler de araştırmaya dahil edilebilmektedir (Yıldırım ve Şimşek, 2013). Hangi dökümanların önemli olduğu ve veri kaynağı olarak kullanılabileceği araştırma problemi ile yakından ilgilidir (Yıldırım ve Şimşek, 2013).

Tez çalışması kapsamında öğretmen adaylarının alan bilgisi görüşme formları, "6.1.4.4. İki kesrin çarpma işlemini yapar ve anlamlandırır" ve "6.1.4.7. İki kesrin bölme işleminin yapar ve anlamlandırır" kazanımlarına yönelik hazırlamış oldukları toplam sekiz ders planı ve iki öğretmen adayının ders için hazırlamış oldukları toplam dört ders notu ve bir de öğretmen adaylarından İpek'in öğrencilere vermiş olduğu çalışma kağıtları doküman analizine tabi tutulmuştur. Aynı zamanda gözlemlenen derslere ait gözlem verileri ve öğretmen adaylarıyla yapılan görüşmelere ait video kayıtlarının yazıya aktarılmış formları da çalışmanın diğer dökümanlarını oluşturmuştur. Bu dökümanlar analizlerin teker teker yapılabilmesini kolaylaştırmış ve bulguları desteklemek amacıyla derslerden kesitler verilmesinde de bu dökümanlardan yararlanılmıştır. Öğretmen adayları ders planlarını Özel Öğretim Yöntemleri II dersi kapsamında hazırladıkları plan formatını (bk. EK 3) dikkate alarak hazırlamışlardır. Bu ders planları öğretmen adaylarının uygulaması öncesinde araştırmacı ile incelenerek düzenlenmiştir. Öğretmen adaylarının hazırlamış oldukları ders planları EK 3'te verilmiştir.

3.4. İşlem Basamakları

Araştırma kapsamında ilk olarak, katılımcı öğretmen adaylarına çalışma hakkında bilgilendirme yapılmıştır. Bilgilendirme yapıldıktan sonra dört öğretmen adayıyla farklı zamanlarda kesirlerde model kullanımına yönelik AB'lerini ortaya çıkarmak amacıyla görüşmeler gerçekleştirilmiştir. Her bir öğretmen adayıyla yapılan görüşmeler yaklaşık 2,5 saat sürmüş ve video kamera ile kayıt altına alınmıştır.

Görüşmelerin ardından öğretmen adaylarından "6.1.4.4. İki kesrin çarpma işlemini yapar ve anlamlandırır" ve "6.1.4.7. İki kesrin bölme işlemini yapar ve anlamlandırır" kazanımlarına yönelik ders planları hazırlamaları istenmiştir. Öğretmen adaylarının Okul Deneyimi ve Öğretmenlik Uygulaması dersleri kapsamında staja gittikleri okullardaki danışman öğretmenleri ve okul müdürleri yapılacak olan çalışma hakkında bilgilendirilmiştir. Öğretmen adayları farklı zamanlarda ve farklı okullarda planlarını uygulamışlardır. Öğretmen adaylarının kesirlerle çarpma ve bölme işlemlerinde model kullanımına yönelik PAB'larını ortaya çıkarmak amacı ile üç öğretmen adayının ikişer saatlik dersleri ve bir öğretmen adayının da üç saatlik dersi gözlemlenmiştir. Bu öğretmen adayı uygulamasını Seçmeli Matematik dersinde gerçekleştirdiği için uygulama okulundaki danışman öğretmen tarafından kesirlerle çarpma işlemine yönelik dersini iki saat uygulama imkanı tanınmıştır.

3.5. Verilerin Analizi

Verilerin analizinde içerik analizi kullanılmıştır. İçerik analizi Cohen, Manion ve Marrison (2005) tarafından eldeki yazılı bilgilerin temel içeriklerinin ve içerdikleri mesajların özetlenmesi ve belirtilmesi işlemi olarak tanımlanmaktadır. Büyüköztürk ve diğerleri (2013) içerik analizinin çalışma metni veya metinlerinden oluşan bir kümenin içindeki belli kelimelerin veya kavramların varlığını belirlemeye yönelik yapıldığını belirtmektedirler. Yıldırım ve Şimşek (2013) içerik analizinde temelde yapılan işlemin birbirine benzeyen verileri belirli kavramlar ve temalar çerçevesinde bir araya getirmek ve bunları okuyucunun anlayabileceği bir biçimde düzenleyerek yorumlamak olduğunu ifade etmektedirler.

Öğretmen adaylarının model kullanımı konusundaki AB'lerini ortaya çıkarmak amacı ile görüşmeler gerçekleştirilmiştir. Bu görüşmelerin video kayıtları birebir yazıya aktarılarak incelenmiştir. Alan bilgisi görüşme formunun verileri formda yer alan sorulara göre öğretmen adaylarının verilen kesirleri model ile göstermelerine yönelik AB'leri, kesirlerin denkliğini model ile göstermelerine yönelik AB'leri, kesirlerle çarpma işleminde model kullanımına yönelik AB'leri ve kesirlerle bölme işleminde model kullanımına yönelik AB'leri kategorileri altında ayrı ayrı incelenmiştir. Her bir kategori öğretmen adaylarının sırasıyla alan modeli, küme modeli ve uzunluk modelini nasıl kullandıklarını ayrıntılı olarak açıklayan alt kategorilere ayrılmıştır. Öğretmen adaylarının oluşturdukları modeller ve modelleri oluştururken neye dikkat ettikleri ayrıntılı olarak incelenerek her bir kategori altında öğretmen adaylarının alan modeli, küme modeli ve uzunluk modeline dair AB'lerini yansıtan şekillerden yararlanılmıştır. Öğretmen adaylarının alan bilgisi görüşme formlarında oluşturdukları temsiller ve görüşme verilerinden doğrudan alıntılar yapılmıştır. Öğretmen adaylarının kesirlerde model kullanımına yönelik AB'lerini yansıtan tablolar öğretmen adaylarından AB görüşme formu aracılığıyla elde edilen veriler doğrultusunda oluşturulduğu için içerik analizinden faydalanılmıştır. Ayrıca alan bilgisi görüşme formundan elde edilen veriler bir uzman tarafından da analiz edilerek tutarlık sağlanmaya çalışılmıştır. Öğretmen adaylarının alan bilgisi görüşme formundan elde edilen verilerin analizi sonucu elde edilen kodlar Tablo 3.2, Tablo 3.3, Tablo 3.4 ve Tablo 3.5'te yer almıştır.

Tablo 3.2

Öğretmen Adaylarının Verilen Kesirleri Model ile Göstermelerine Yönelik AB'lerine İlişkin Oluşturulan Kodlar

Kategoriler	Kodlar
Alan modeli	Kesrin paydasının eş parçaların tamamı olduğunu bilme, kesrin payının eş parçalardan alınacak kısmın olduğunu bilme
Küme modeli	Kesrin paydası kadar nesne grubu oluşturma ve bu nesne gruplarından pay kadar nesne grubunu seçme
	Bir bütündeki nesne sayısını belirlerken ve istenilen kesri temsil ederken oran-orantı kullanma
Uzunluk modeli	Cuisenaire çubukları ile kesrin payı kadar uzunluğu uç uca ekleme
	İki sayı arasını kesrin paydası kadar eş parçaya ayırma ve edilen uzunluğu kesrin payı kadar yineleme

Tablo 3.3

Öğretmen Adaylarının Kesirlerin Denkliğini Model ile Göstermelerine Yönelik AB'lerine İlişkin Oluşturulan Kodlar

Kategoriler	Kodlar
Alan modeli	İki kesrin temsili sonucu oluşan taralı alanların aynı yere denk geliyor olması
Küme modeli	İki kesre göre gruplanabilmesi için paydaların EKOK'ları kadar sayma nesnesi alma, bu nesneleri kesirlerin paydalarına göre eş gruplara ayırıp, pay kadar grubu seçme, İki durumdaki nesne sayılarını karşılaştırma
Uzunluk modeli	İki sayı arasını kesrin paydası kadar eş parçaya ayırma ve edilen uzunluğu kesrin payı kadar yineleme, oluşan uzunlukları ikinci kesrin payına göre de eş parçalara ayırma, pay kadar yineleme, sayı doğrusu üzerinde aynı yere denk geliyor olmalarına dikkat etme
	Denk kesirleri elde etmek için genişletme işlemi yapma

Tablo 3.4

Öğretmen Adaylarının Kesirlerle Çarpma İşlemini Model ile Göstermelerine Yönelik AB'lerine İlişkin Oluşturulan Kodlar

Kategoriler	Kodlar
Alan modeli	Kesrin paydasının eş parçaların tamamı olduğunu bilme, kesrin payının eş parçalardan alınacak kısmın olduğunu bilme, seçilen parçanın yeni bütün olduğunu bilme, ikinci kesrin paydası kadar eş parçalara ayırma ve payı kadar alma, sonucu yorumlarken baştaki bütünü dikkate alma
	Doğal sayı ile kesrin çarpımında kesri temsil etme ve eş parçalar olmasından hareketle parçaları bir araya getirerek bütüne tamamlamaya çalışma
Küme modeli	Payda kadar grup oluşturma ve pay kadarını alma/seçme, seçilen parçanın yeni bütün olduğunu bilme, tekrar oluşturduğu gruplar içinde 2. kesri oluşturabilecek şekilde nesne seçme, elde edilen nesne sayısının toplam nesne sayısına oranını çarpma işleminin sonucu olarak ifade etme
	Doğal sayı ile kesrin çarpımında doğal sayı kadar nesneyi kesrin paydası kadar eş gruba ayırma ve pay kadar grubu seçme
Uzunluk modeli	Doğal sayı ile kesrin çarpımında; sayı doğrusu üzerinde iki sayı arasını kesrin paydası kadar eş aralığa ayırma, kesrin payı kadar uzunluğu doğal sayı adedince yineleme
	Kesrin paydası kadar eş parçalama yapma, elde edilen uzunlukları pay kadar yineleme, elde edilen parçaları yeni bütün olarak alıp ikinci kesrin paydası kadar uzunluk içerisinden pay kadar uzunluğu seçme, sonucu ilk bütüne göre yorumlama

Tablo 3.5
Öğretmen Adaylarının Kesirlerle Bölme İşlemini Model ile Göstermelerine Yönelik AB'lerine İlişkin Oluşturulan Kodlar

Kategoriler	Kodlar
Alan modeli	Kesrin paydasının eş parçaların tamamı olduğunu bilme, kesrin payının eş parçalardan alınacak kısmın olduğunu bilme, seçilen parçanın içinde ikinci kesirden kaç tane olduğunu bulma
	Doğal sayının kesre bölümünde doğal sayı kadar bütünü kesrin paydası kadar parçaya ayırma, pay kadarlık kaç parça olduğunu sayma
Küme modeli	Payda kadar grup oluşturma ve pay kadarını alma/seçme, tekrar oluşturduğu gruplar içinde 2. kesir kadar kaç nesne grubu olduğunu belirleme
Uzunluk modeli	Doğal sayıyı kesrin paydası kadar eş parçaya ayırma, pay kadar uzunluğun kaç kere uç uca eklenerek doğal sayıya ulaşılabileceğini ölçme
	İki kesrin bölümünde kesirleri ortak payda haline getirerek işlemi doğal sayılarda bölme işlemi haline getirme, bölen kadar uzunluklar ile bölünen uzunluğu ölçme

Ders gözlemlerine ilişkin gözlem verileri analiz edilirken, elde edilen yazılı veriler ayrıntılı olarak incelenmiş ve PAB bileşenlerine ilişkin çerçeve göz önüne alınarak derslerdeki ilgili kesitler belirlenmiştir. Gözlem verileri "öğrenci bilgisi" ve "matematiksel temsiller bilgisi" bileşenlerine göre ayrı ayrı analiz edilmiştir. Öğrenci bilgisi Shulman'ın (1986) PAB tanımı, Kovarik'in (2008) PAB çerçevesi dikkate alınarak "öğrenci ön bilgisi", "öğrenci zorlukları", "öğrenci hataları/kavram yanılgıları", "anlamanın değerlendirilmesi" ve öğrenci düşüncesini anlamanın, öğrencilere düşüncelerini açıklama imkanı vermenin öneminden hareketle "öğrenci düşüncesine odaklanma" alt kategorileri altında değerlendirilmiştir. Öğretmen adaylarının öğrenci bilgilerini değerlendirmek için literatürden faydalanarak (An ve diğ., 2004; Gökkurt, 2014; Özaltun, 2014) bazı kriterler belirlenmiş ve bazı kriteler de araştırmacı tarafından oluşturulmuştur. Öğrenci hataları/kavram yanılgılarında yer alan kriterler belirlendikten sonra aynı kriterler öğrenci zorlukları için oluşturulmuştur. Belirlenen kriterler Tablo 3.6'da yer almıştır.

Tablo 3.6

Öğremen Adaylarının Öğrenci Bilgisini İncelemek için Oluşturulmuş Kriterler

Alt Bileşenler	Kriterler
Öğrenci ön bilgisi	Öğrencilerin konu ile ilgili ön bilgilerini belirleme Öğrencilerin ön bilgilerini ortaya çıkaracak sorular sorma Ön bilgi ile yeni bilgi arasında bağlantı kurma
Öğrenci hataları/kavram yanılgıları	Dersi planlarken öğrencilerin sahip olabileceği kavram yanılgıları ve hataları göz önünde bulundurma Ders esnasında öğrencilerin sahip olduğu hata ve kavram yanılgılarını fark edebilme Öğrencilerin sahip olduğu hata ve kavram yanılgılarının nedenlerini belirleme Öğrencilerin sahip olduğu hata ve kavram yanılgılarını ortadan kaldırmak için çözümler üretme Öğrencilerin sahip olduğu hata ve kavram yanılgılarını ortaya çıkaracak uygun sorular sorma
Öğrenci zorlukları	Dersi planlarken öğrencilerin zorlanabileceği hususları göz önünde bulundurma Ders esnasında öğrencilerin zorlandıkları noktaları fark edebilme Öğrenci zorluklarını ortadan kaldırmak için çözüm üretme Öğrenci zorluklarının nedenlerini belirleme Öğrencilerin zorlandıkları noktaları ortaya çıkaracak uygun sorular sorma
Anlamanın değerlendirilmesi	Öğrencilerin ön bilgilerini değerlendirme/ölçme Öğrencilerin konuyu anlayıp anlamadıklarını değerlendirme Öğrencilerin sahip olduğu hata/kavram yanılgılarını sınıf içi diyaloglardan ve öğrencinin yazılı dokümanlarından tespit etme Öğrencilerin sahip olduğu hata/kavram yanılgılarının farkına varmalarını sağlayacak şekilde dönüt ve düzeltmeler yapma
Öğrenci düşüncesine odaklanma	Öğrencilerin düşüncelerini ortaya çıkarmak için soru sorma Öğrencilere düşüncelerini açıklama imkânı tanıma Öğrencinin oluşturduğu modeli anlama ve açıklama Öğrencileri farklı modeller oluşturmaya teşvik etme

Gözlemlenen derslerde öğrenci bilgisi kategorisi ile ilgili öğretmen adaylarından elde edilen veriler belirlenen kriterler doğrultusunda her öğretmen adayı için ayrı ayrı ele alınmıştır. Öğretmen adaylarının hazırlamış oldukları ders planları ve ders notları da öğretmen adaylarının kesirlerle çarpma ve bölme işlemlerinde model kullanımlarına yönelik PAB'larını ortaya çıkarmak amacı ile analiz edilmiştir. Bu veriler de "öğrenci bilgisi" ve "matematiksel temsiller bilgisi" bileşenlerine göre ayrı ayrı analiz edilerek oluşturulan kategoriler içerisine dahil edilmiştir. Ayrıntılı betimlemeler yaparak, ders planlarından, ders notlarından ve de gözlem verilerinden doğrudan alıntılar yaparak veriler örneklendirilmiştir.

Ayrıca bir öğretmen adayının öğrencilere vermiş olduğu çalışma kağıtlarının incelenmesine yönelik öğretmen adayı ile bir görüşme gerçekleştirilmiştir. Bu görüşmelerden öğretmen adayının “öğrenci bilgisi” ve “matematiksel temsiller bilgisi”ne yönelik veriler elde edilmiş ve analize dahil edilmiştir. Öğretmen adaylarından öğrenci bilgisine yönelik elde edilen veriler belirlenen kriterler bağlamında ele alınmış, her bir kriter altındaki tepkileri belirlenmiştir. Öğretmen adaylarının matematiksel temsiller bilgisi tablolar yardımı ile özetlenmiştir. Bu tablolar derslerden elde edilen gözlem verileri, öğrenci çalışma kağıtları üzerine yapılan görüşmeler ve ders notlarından elde edilen veriler yardımıyla oluşturulmuştur. Öğretmen adaylarının kesirlerle çarpma işleminde matematiksel temsiller bilgisi öğretmen adaylarının derste modelleri hangi amaçla kullandıklarına bağlı olarak önce “çarpma işlemi yapmanın bir yolu olarak model kullanımı” ve “çarpma algoritmasını keşfettirmek amaçlı model kullanımı” olarak kategorilendirilmiştir. Öğretmen adayı verilen problemlerin çözümünün model yardımı ile bulunmasının ardından öğrencilerden bir de algoritma ile sonucun bulunmasını istiyor ve algoritma ile model arasında bir bağlantı kurmaya çalışmıyorsa “çarpma işlemi yapmanın bir yolu olarak model kullanımı” kategorisinde yer almıştır. Ardından öğretmen adaylarının derslerinde, ders planlarında ve ders notlarında yer verdikleri problemlere bağlı olarak “doğal sayı ile kesrin çarpımı” ve “iki kesrin çarpımı” alt kategorilerine ayrılmış ve problemlerin çözümünde yer verdikleri modellere göre bu kategorilerde alan modeli, küme modeli ve uzunluk modelinin kullanımı ayrı ayrı analiz edilmiştir. Kesirlerle bölme işleminde matematiksel temsiller bilgisi de yine öğretmen adaylarının derslerinde model kullanma amaçlarına bağlı olarak “bölme işlemi yapmanın bir yolu olarak model kullanımı” ve “ters çevir-çarp algoritmasını keşfettirmek amaçlı model kullanımı” olarak kategorilendirilmiştir. Öğretmen adayı verilen problemlerin çözümünün model yardımı ile bulunmasının ardından öğrencilerden ters çevir-çarp algoritması kullanarak da çözümün yapılmasını istiyorsa ve algoritma ile model arasında bir bağlantı kurmaya çalışmıyorsa "bölme işlemi yapmanın bir yolu olarak model kullanımı" kategorisi içerisinde yer almıştır. Oluşturulan kategoriler öğretmen adaylarının derslerinde, ders planlarında ve ders notlarında yer verdikleri problemlere bağlı olarak "doğal sayının kesre bölümünde", "kesrin doğal sayıya bölümünde", "iki kesrin bölümünde" olmak üzere alt kategorilere ayrılmış ve bu kategorilerde alan modeli kullanımları ayrı ayrı analiz edilmiştir.

Son aşamada öğretmen adaylarının kesirlerle çarpma ve bölme işlemlerinde model kullanımına yönelik AB'lerini öğretimlerine nasıl yansıttıklarını incelemek amaçlanmıştır. Bu amaçla alan bilgisi görüşme formuna verilen yanıtlar ve gözlem verileri birlikte kullanılmıştır. Veriler "kesirlerle çarpma işleminde model kullanımına yönelik AB'sinin öğretime yansıması" ve "kesirlerle bölme işleminde model kullanımına yönelik AB'sinin öğretime yansıması" olarak iki ayrı başlık altında analiz edilmiştir. Her bir öğretmen adayının AB'sini öğretimine nasıl yansıttığı kesirlerle çarpma ve bölme işlemleri bağlamında ayrı ayrı incelenmiştir.

3.6. Araştırmanın Geçerliği ve Güvenirliği

Nitel araştırmalarda geçerliği ve güvenirliği tanımlayan terimlere ve geçerlik ve güvenirliği sağlama süreçlerine ilişkin farklı yaklaşımlar bulunmaktadır (Creswell, 2014). Creswell (2014) nitel araştırmalarda geçerliği bulguların doğruluğunu değerlendirme, güvenirliği farklı projeler ve farklı araştırmacılar açısından da araştırmacının yaklaşımının tutarlığı olarak ifade etmektedir. Lincoln ve Cuba (1985'den akt. Yıldırım ve Şimşek, 2013) "iç geçerlik" yerine "inandırıcılık", "dış geçerlik" yerine "aktarılabilirlik", "iç güvenirlik" yerine "tutarlık" ve "dış güvenirlik" yerine de "teyit edilebilirlik" kavramlarını kullanmakta ve nitel araştırmalarda niteliği arttırabilecek bir takım stratejiler önermektedirler.

Lincoln ve Cuba (1985) inandırıcılığın sağlanmasında uzun süreli etkileşim, derin odaklı veri toplama, çeşitleme, uzman incelemesi ve katılımcı teyidinin kullanmasını önermektedirler (akt. Yıldırım ve Şimşek, 2013). Uzun süreli etkileşim ile araştırmacının veri kaynakları (katılımcılar, gözlenen ortamlar, dökümanlar vb.) ile uzun süreli bir etkileşim içinde olması gerektiği (Yıldırım ve Şimşek, 2013) ve etkileşim içinde olunması gereken sürenin araştırmanın doğasına ve veri kaynaklarının özelliğine göre değişebileceği ifade edilmektedir (Yıldırım ve Şimşek, 2013). Söz konusu tez çalışmasında katılımcılar, gözlenen ortam ve çalışmadan elde edilen dökümanlar ile çalışmanın amacı doğrultusunda yeteri kadar vakit geçirerek inandırıcılık sağlanmaya çalışılmıştır. Merriam (2013) araştırmanın inandırıcılığını arttırmada kullanılabilecek en çok bilinen ve uygulanan stratejinin çeşitleme olduğunu ifade etmektedir. Denzin (1978) veri toplamada çoklu yöntemin kullanılması, çoklu veri kaynaklarından yararlanılması, birden fazla araştırmacının katılımı veya ortaya çıkan bulguları karşılaştırma, kontrol etme ve onaylamada yararlanılacak çoklu kuramların işe koşulması olarak dört çeşitleme türü önermektedir (akt. Merriam, 2013). Tez çalışmasında öğretmen adaylarıyla yapılan görüşmelerden elde edilen bulguların desteklenmesinde alan bilgisi görüşme formu dökümanları, öğretmen adaylarının PAB'larını ortaya çıkarmada ders planları ve ders gözlemleri de birlikte kullanılarak araştırmanın inandırıcılığı sağlanmaya çalışılmıştır. Yine alan bilgisi görüşme formu hazırlandıktan sonra alanında uzman iki kişinin görüşlerine başvurulmuştur. En başta 12 sorudan oluşması planlanan alan bilgisi görüşme formu alınan uzman görüşleri doğrultusunda soruların aynı amaca hizmet ederek araştırmanın geçerliğini olumsuz yönde etkilemesi ve öğrencilerde bıkkınlık meydana getirerek istenilen cevaplara ulaşamama düşünceleri ile dokuz soruya indirilmiştir. Araştırma deseni, toplanan veriler, bunların analizi ve yazımına kadar olan süreçte tez danışmanının görüşlerine başvurup geri bildirimleri doğrultusunda düzeltmelerde bulunulmuştur.

Nitel araştırmalarda dış geçerlik yerine "aktarılabilirlik" kavramı kullaılmaktadır. Aktarılabilirliği sağlamak için ayrıntılı betimleme ve amaçlı örnekleme olmak üzere iki yöntem önerilmektedir (Yıldırım ve Şimşek, 2013). Merriam (2013) tarafından da nitel bir çalışmaya ait sonuçların başka bir duruma uyarlanabilme olasılığının arttırılmasında kullanılabilecek çeşitli stratejilerden birinin zengin ve yoğun tanımlama olduğu ifade edilmektedir. Zengin ve yoğun tanımlama, "ortamın ve katılımcıların tanımlanması kadar katılımcı görüşmelerinden, araştırma notlarından ve dökümanlardan yapılan alıntılar biçiminde sunulan uygun kanıtlarla desteklenen bulguların detaylı tanımlanması" anlamına gelmektedir (Merriam, 2013). Creswell (2014) nitel araştırmacıların ortamın detaylı betimlemesini sağladıklarında sonuçların daha gerçekçi olduğunu ve zenginleştiğini ifade etmektedir. Söz konusu tez çalışmasında bulguların sunulmasında ayrıntılı betimlemeler yapılarak, öğretmen adaylarıyla yapılan görüşmelerden, ders gözlemlerinden ve araştırmada kullanılan dökümanlardan doğrudan alıntılar verilerek ve çalışmanın amacı doğrultusunda dördüncü sınıf öğretmen adayları seçilerek "aktarılabilirlik" sağlanmıştır.

Araştırmada bir yabancı öğrenci yer almıştır. Bu öğrenci araştırma için belirlenen ölçütleri sağladığı düşüncesiyle araştırmaya dahil edilmiştir. Aynı zamanda bu öğrenci hakkında yeterli tanımlamalar yapılmıştır. Bu nedenle çalışmada yabancı öğrencinin yer almasının geçerliği olumsuz yönde etkilemediği düşünülmektedir.

Bir nitel araştırmacı tutarlılığı sağlamak için çeşitleme, uzman incelemesi, araştırmacının konumu ve denetleme tekniği stratejilerini kullanmaktadır (Merriam, 2013). Lincoln ve Guba (1985'den akt. Merriam, 2013) bağımsız bir okuyucunun araştırmacının kullandığı yol ve yöntemi takip ederek bir çalışmanın bulgularını doğrulayabileceğini belirtmektedirler. Nitel bir araştırma kapsamında denetleme tekniği verilerin nasıl toplandığını ve kategorilerin nasıl oluşturulduğunu inceleme süresince kararların nasıl verildiğini detaylı bir şekilde ortaya koymaktadır. Denetleme tekniği bir kitap veya tez büyüklüğündeki araştırma raporlarında genellikle yöntem bölümü içerisinde bulunmaktadır. Bu da çalışmanın nasıl gerçekleştirildiği ve verilerin nasıl analiz edildiğinin deteylı bir anlatımı olarak ifade edilmektedir (Merriam, 2013). Erlandson, Harris, Skipper ve Allen (1993) de tutarlığın sağlanması için tutarlık incelemesi yapılmasını önermekte ve tutarlık incelemesinin araştırmaya dışarıdan bir gözle bakılarak araştırmacının baştan sona gerçekleştirdiği etkinliklerde tutarlı davranıp davranmadığını ortaya koyduğunu belirtmektedirler (akt. Yıldırım ve Şimşek, 2013). Tez çalışmasında çeşitleme kullanılarak ve alan bilgisi görüşme formundan elde edilen verilerin başka bir uzman tarafından da analizi yapılarak tutarlık sağlanmaya çalışılmıştır. Aynı zamanda araştırmanın hazırlık aşamasında ve araştırma boyunca, veri toplama araçlarının oluşturulmasında ve verilerin toplanmasında araştırmacının tutarlı davranıp davranmadığı tez danışmanı tarafından kontrol edilerek tutarlık sağlanmaya çalışılmıştır.

Yıldırım ve Şimşek (2013) dış güvenirliğin sağlanmasına yönelik olarak şu önlemlerin alınabileceğinden bahsetmiştir: araştırmacı, araştırma sürecindeki kendi konumunu açık hale getirmeli, araştırmada veri kaynağı olan bireyler açık bir biçimde tanımlanmalı, araştırma sürecinde oluşan sosyal ortamlar ve süreçler tanımlanmalı, elde edilen verilerin analizinde kullanılan kavramsal çerçeveler ve varsayımlar tanımlanmalı, veri toplama ve analiz yöntemleri ile ilgili ayrıntılı açıklamalar yapılmalı. Dış güvenirliği (teyit edilebilirliği) sağlamak için araştırmacının araştırmanın yöntemlerini ve aşamalarını açık ve ayrıntılı bir şekilde tanımlayıp tanımlamadığı, çalışmanın farklı aşamalarında neler yaptığının anlaşılıp anlaşılamadığı, sonuçların ortaya konan verilerle açık bir şekilde ilişkilendirilip ilişkilendirilmediği, araştırmacının bireysel varsayım, ön yargı ve yönelimlerinin farkında olup olmadığı, araştırmanın ham verilerinin saklanmış olup olmadığı sorularına cevap vermesi gerektiği ifade edilmektedir (Yıldırım ve Şimşek, 2013, s.). Araştırmada araştırmacının rolü ve araştırmanın katılımcıları açık bir biçimde tanımlanmıştır. Veri toplama ve analiz yöntemleri de ayrıntılı olarak açıklanmıştır. Tez çalışmasında araştırmanın yöntemi açık bir şekilde tanımlanmış, sonuçlar ortaya konan verilerle ilişkilendirilmiş ve ham veriler araştırmacı tarafından saklanmıştır.

3.7. Araştırmacının Rolü

Araştırmacı, ilk olarak öğretmen adaylarıyla gerçekleştirilecek olan Alan Bilgisi Görüşme Formunu hazırlamış ve uzman görüşüne sunmuştur. Alınan uzman görüşleri doğrultusunda Alan Bilgisi Görüşme Formuna son halini vermiştir. Tez çalışmasına başlamadan önce ilk olarak dördüncü sınıf öğretmen adaylarına çalışma hakkında bilgi vererek çalışmaya katılımları konusunda ikna etmeye çalışmıştır. Çalışmaya katılacak öğretmen adaylarının belirlenmesinin ardından katılımcıların Okul Deneyimi ve Öğretmenlik Uygulaması dersleri kapsamında staja gittikleri okullardaki danışman öğretmenleri ile müdürlerini bilgilendirmiş ve izinlerini almıştır. Sonrasında Pamukkale Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü ve Denizli İl Milli Eğitim Müdürlüğü'nden öğretmen adaylarının gittiği staj okullarında araştırma yapabilmek için gerekli olan resmi iznin verilmesine ilişkin başvuru yapmıştır. Bu esnada öğretmen adaylarına Alan Bilgisi Görüşme Formu uygulanmıştır.

Bu araştırmada, öğretmen adaylarıyla yapılan yarı-yapılandırılmış görüşmelerin yürütülmesi ve video kaydına alınması, öğretmen adaylarının derslerinin gözlemlenmesi ve gözlem verilerinin oluşturulması araştırmacının bizzat kendisi tarafından gerçekleştirilmiştir. Gözlem sürecinde araştırmacı, öğretmen adaylarının ve öğrencilerin sınıf içi davranışlarını etkilemeyecek ve sınıfta doğal ortamı bozmayacak bir yere oturmuştur.

Araştırmanın etik olması açısından, öğretmen adaylarına isimlerinin gizli tutulacağı, görüşmeler ve gözlemler ile elde edilen verilerin başka bir yerde farklı bir amaç ile kullanılmayacağı açıklanmıştır.

DÖRDÜNCÜ BÖLÜM: BULGULAR VE YORUM

Bu bölümde öğretmen adaylarının kesirlerde model kullanımına yönelik AB'leri, kesirlerle çarpma ve bölme işlemlerinde model kullanımına yönelik PAB'larının nasıl olduğunu ve kesirlerle çarpma ve bölme işlemlerinde model kullanımına yönelik AB'lerini öğretimlerine nasıl yansıttıklarını belirlemek amacıyla toplanan verilerin analizinden elde edilen bulgulara yer verilmektedir. Bulgular sunulurken öğretmen adaylarının AB'lerini ve PAB'larını daha net ortaya çıkarmak amaçlı derslerin ve görüşmelerin yazıya aktarılmış formatlarından alınan kesitlere yer verilmektedir.

4.1. Öğretmen Adaylarının Kesirlerde Model Kullanımına Yönelik AB'lerine İlişkin Bulgular ve Yorum

Öğretmen adaylarının kesirlerde model kullanımına yönelik AB'leri sunulurken, öğretmen adaylarına yöneltilen dokuz sorudan oluşan AB görüşme formunun bulgularına yer verilmektedir. AB görüşme formunun birinci, ikinci ve üçüncü sorularında öğretmen adaylarından verilen kesirleri model ile göstermeleri, dördüncü ve beşinci sorularda kesirlerin denkliğini modelden faydalanarak göstermeleri istenmiştir. Altıncı ve yedinci sorularda kesirlerle çarpma işleminde model kullanımına yönelik AB'leri incelenirken sekizinci ve dokuzuncu sorularda kesirlerle bölme işleminde model kullanımına yönelik AB'leri incelenmiştir. Öğretmen adaylarından her bir soruda yaptıklarını açıklaması istenmiştir. Aynı zamanda bir model ile temsil ettikten sonra farklı bir model ile de temsil etmeleri istenmiştir. Tablo 4.1'de öğretmen adaylarının hangi sorularda hangi modelleri kullandıklarına yer verilmiştir.

Tablo 4.1

Öğretmen Adaylarının AB Görüşme Formu Sorularında Kullandıkları Modeller

Soru No	Sorunun İçeriği	Alan modeli	Küme modeli	Uzunluk Modeli
1	Verilen kesri model ile gösterme	İlker, İpek, Cemil, Hale	İlker, İpek, Hale	İlker, Hale
4a	Kesirlerin denkliğini model ile gösterme	İlker, İpek, Cemil, Hale	İlker, İpek, Cemil, Hale	İlker
4b	Kesirlerin denkliğini model ile gösterme	İlker, İpek, Cemil, Hale	İlker, İpek, Cemil, Hale	İlker
6a	Kesirlerle çarpma işlemi	İpek, Cemil, Hale	İlker, İpek, Cemil	İlker
6b	Kesirlerle çarpma işlemi	İlker, İpek, Cemil, Hale	İlker, İpek, Cemil	
6c	Kesirlerle çarpma işlemi	İlker, İpek, Cemil	İpek, Hale	İlker, Cemil
8a	Kesirlerle bölme işlemi	İlker, İpek, Cemil, Hale	İpek, Cemil	
8b	Kesirlerle bölme işlemi	İpek, Cemil	Cemil	
8c	Kesirlerle bölme işlemi	İpek, Cemil, Hale	İlker	Cemil

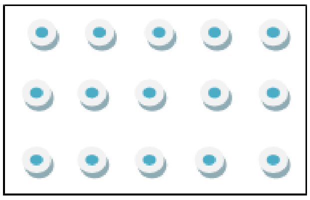
Öğretmen adaylarının bir bütünü referans alarak kesri yorumlama, eş parçalama ve miktar anlamlarına sahip olmalarından dolayı kesirlere yönelik AB'leri burada ayrıntılı olarak analize tabi tutulmamıştır. Öğretmen adaylarının sadece model kullanımına yönelik AB'leri dikkate alınmıştır. Model kullanımına yönelik AB'leri alan modeli, küme modeli ve uzunluk modeli bağlamında ayrı ayrı ele alınmıştır.

4.1.1. Öğretmen Adaylarının Verilen Kesirleri Model ile Göstermelerine Yönelik AB'lerine İlişkin Bulgular ve Yorum

Öğretmen adaylarının verilen kesirleri model ile göstermelerine yönelik AB'leri şu sorular kullanılarak analiz edilmiştir:

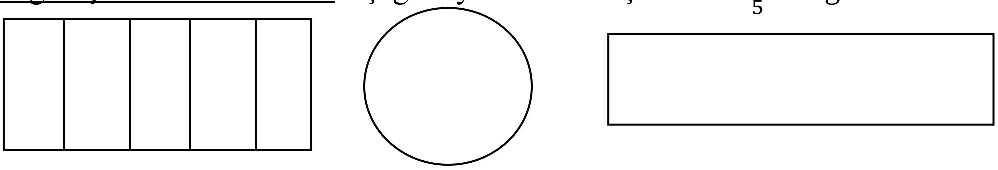
AB görüşme formu 1. Soru: $\frac{13}{7}$ kesrini model ile gösteriniz.

AB görüşme formu 2. Soru:

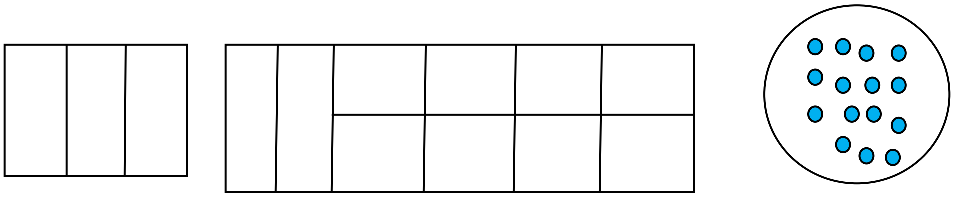


15 sayma nesnesi bir kümenin $\frac{5}{6}$'i ise $1\frac{1}{2}$ kesri sayma nesneleri ile nasıl gösterilebilir?

<u>AB görüşme formu 3. Soru:</u> Aşağıda yer alan tüm şekillerin $\frac{2}{5}$'sini gösteriniz.



1 2 3



4 5 6

Bu sorularda öğretmen adaylarının kullandıkları alan, küme ve uzunluk modelleri ayrı ayrı analiz edilmiştir. Öğretmen adaylarının ifadelerinden kesitler verilerek modeli kullanırken neye dikkat ettiklerinin daha net bir şekilde ortaya konması amaçlanmıştır.

Birinci soruda bir öğretmen adayı hariç diğerleri öncelikle alan modeli kullanma yoluna gitmişlerdir. Diğer öğretmen adaylarından farklı olarak İlker öncelikle küme modelini kullanmayı tercih etmiştir. Cemil sadece alan modeli kullanırken, İlker ve Hale $\frac{13}{7}$ kesrini her üç modeli kullanarak temsil etmiş, İpek ise alan modeli ve küme modelini kullanmıştır. Tablo 4.2'de öğretmen adaylarının verilen kesirleri model ile göstermelerine yönelik AB'leri yer almıştır. Ardından öğretmen adaylarının her bir modele ilişkin AB'leri ayrıntılı olarak ele alınmıştır.

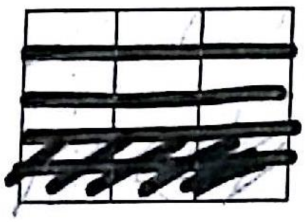
Tablo 4.2

Öğretmen Adaylarının Verilen Kesirleri Model ile Göstermelerine Yönelik AB'leri

Kategoriler	Kodlar	Öğretmen Adayı
Alan modeli	Kesrin paydasının eş parçaların tamamı olduğunu bilme, kesrin payının eş parçalardan alınacak kısmın olduğunu bilme	İlker, İpek, Cemil, Hale
Küme modeli	Kesrin paydası kadar nesne grubu oluşturma ve bu nesne gruplarından pay kadar nesne grubunu seçme	İpek, Hale
	Bir bütündeki nesne sayısını belirlerken ve istenilen kesri temsil ederken oran-orantı kullanma	İlker, Cemil
Uzunluk modeli	Cuisenaire çubukları ile kesrin payı kadar uzunluğu uç uca ekleme	Hale
	İki sayı arasını kesrin paydası kadar eş parçaya ayırma ve edilen uzunluğu kesrin payı kadar yineleme	İlker, İpek, Cemil, Hale

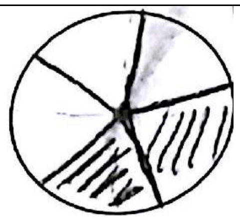
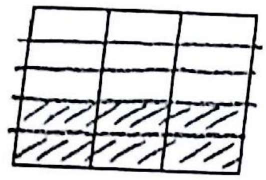
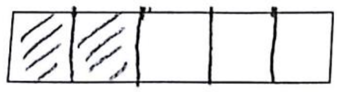
4.1.1.1. Öğretmen adaylarının verilen kesirleri alan modeli ile göstermelerine yönelik AB'lerine ilişkin bulgular. Öğretmen adayları verilen kesri alan modeli ile temsil etmede payda kadar eş parçalama yapma ve bu eş parçalar arasından pay kadarlık eş parçayı seçme bilgisini kullanmışlardır.

İlker üçüncü soruda verilen şekillerin $\frac{2}{5}$'sini nasıl gösterdiği sorulduğu zaman beş parçadan ikisini seçmesi gerektiğini, bu nedenle daireyi de beş eş parçaya ayırmaya çalışarak bu eş parçalardan iki tanesini seçeceğini ifade etmiştir. İlker üçüncü soruda yer alan dördüncü şekil üzerinde $\frac{2}{5}$ kesrini göstermek isterken zorlanmıştır. Beş eş parçaya ayırması gerektiğinin farkında olan İlker, şekil üç eş parçaya ayrılmış bir halde verildiği için önce beş parçaya nasıl ayırması gerektiği konusunda birtakım zorluklar yaşamıştır. Verilen şekil üzerindeki üç eş parçayı çeşitli şekillerde eş parçalara ayırmayı deneyen İlker bu parçalamalar sonucu altı eş parça elde etmiştir. Bir süre sonra İlker dikey olarak üç eş parçaya ayrılmış şekli yatay olarak beş eş parçaya ayırabileceğini fark etmiştir. $\frac{2}{5}$ kesrini temsil etmek için de bu beş eş parça arasından iki parçasını taramıştır. Şekil 4.1'de İlker'in $\frac{2}{5}$ kesrini temsili yer almıştır.



Şekil 4.1. İlker'in dikey olarak üç eş parçaya ayrılmış şekli yatay olarak beş eş parçaya ayırarak $\frac{2}{5}$ kesrini temsil etmesi, AB görüşme formu-3. Soru

İpek'ten üçüncü soruda yer alan şekiller üzerinde $\frac{2}{5}$ kesrini nasıl temsil ettiğini ifade etmesi istendiğinde, İpek ilk şeklin zaten beş parçaya ayrıldığını, geriye sadece iki parçasını seçmek kaldığını belirtmiştir. İpek diğer tüm şekillerde de beş parça içerisinden iki parçayı seçtiğini ifade etmiştir. Dördüncü şekil öğrencilere dikey olarak üç eş parçaya ayrılmış bir şekilde verilmiştir. İpek, dikey olarak üç eş parçaya ayrılmış şekli yatay olarak beş eş parçaya ayırıp, bu beş eş parça arasından iki eş parçayı seçmiştir. Yine bütün olarak verilen üçüncü şekli de kendisi beş eş parçaya ayırıp bu eş parçalar arasından yan yana iki tanesini seçmiştir. Şekil 4.2'de İpek'in $\frac{2}{5}$ kesrini alan modeli ile temsillerine yer verilmiştir.

 *a.* $\frac{2}{5}$ kesrini alan modeli ile temsili	 *b.* Dikey olarak üç eş parçaya ayrılmış şekli yatay olarak beş eş parçaya ayırarak $\frac{2}{5}$ kesrini temsil etmesi	 *c.* Bütün olarak verilmiş şekil üzerinde $\frac{2}{5}$ kesrini temsil etmesi

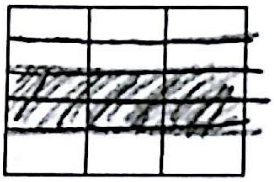
Şekil 4.2. İpek'in $\frac{2}{5}$ kesrini alan modeli ile temsilleri, (AB görüşme formu- 3. Soru)

İpek $\frac{13}{7}$ kesrini farklı bir model ile göstermek istediğinde Şekil 4.3'teki gibi çiçek yapraklarını kullanmayı düşünmüştür. Fakat aklında alan modelinde olduğu gibi eş parçalama fikri olan İpek bütünü bölme fikrini veremeyeceğini düşünerek böyle bir temsil kullanmaktan vazgeçmiştir.

Araştırmacı:	*Farklı şekilde de gösterebilir misin?*
İpek:	*Farklı şekildeee…. (düşünüyor). Yuvarlağı kullanabilirim. Yok bu olmaz herhalde. Çiçek yapmayı düşünmüştüm de. Her çiçeğin yedi yaprağı olur falan şeklinde.*
Araştırmacı:	*Niye vazgeçtin?*
İpek:	*Iı. Çünkü bunda bölmüş olmayacaktım. Çiçek zaten yedi yapraklı olacaktı. Bir bütünü bölme fikrini veremeyecektim.* (AB görüşme formu- 1.soru)

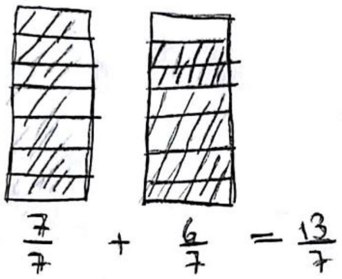
Şekil 4.3. İpek'in $\frac{13}{7}$ kesrini temsil etmek için çiçek yapraklarını kullanmak istemesi, (AB görüşme formu- 1. Soru)

$\frac{2}{5}$ kesrinin ne anlam ifade ettiğini bilen Cemil, üçüncü soruda dikey olarak üç eş parçaya ayrılmış bir şekil ile karşılaştığı zaman bu şeklin beş eş parçadan oluşması adına şekli yatay olarak parçalamayı tercih etmiştir. Oluşturduğu yatay beş eş grup arasından yatay iki eş grubu seçerek Şekil 4.4'teki gibi $\frac{2}{5}$ kesrini temsil etmiştir.



Şekil 4.4. Cemil'in $\frac{2}{5}$ kesrini temsili, (AB görüşme formu- 3. Soru)

Hale AB görüşme formunun birinci sorusunda yer alan $\frac{13}{7}$ kesrini $\frac{13}{7} = \frac{7}{7} + \frac{6}{7}$ şeklinde ifade etmiş, önce alan modeli ile bir tamı göstermiş ardından da $\frac{6}{7}$ kesrini temsil etmiştir. Bir tamı ifade ederken bütünü yedi eş parçaya ayırmış ve yedi parçanın tamamını seçmiştir. $\frac{6}{7}$ kesrini göstermek için ise bir bütünü yedi eş parçaya ayırmış, bu yedi eş parçanın altı eş parçasını seçmiştir. Hale'nin $\frac{13}{7}$ kesri için alan modeli ile oluşturduğu temsil Şekil 4.5'teki gibidir.



Şekil 4.5. Hale'nin $1\frac{6}{7}$ kesrini alan modeli ile temsili, (AB görüşme formu- 1. Soru)

Hale üçüncü soruda daire şeklinden yola çıkarak $\frac{2}{5}$ kesrini temsil etmek istediği zaman eş parçalama bilgisine sahip olmasından dolayı daireyi beş eş parçaya ayırmak istemiştir. Fakat beşin tek sayı olmasından yola çıkarak beş eş parçaya ayıramayacağını düşünmüştür. Bu düşüncesi üzerine de daireyi 10 eş parçaya ayırma yoluna gitmiştir. 10 eş parçaya ayıracağı zaman temsil edeceği kesrin $\frac{4}{10}$ olduğunu ifade etmektedir. Daire üzerindeki temsilde Hale denk kesir bilgisine başvurmuştur.

Hale:	*Gerçekten şunu 10'a bölemedim.*
Araştırmacı:	*Neden 10'a bölmeye çalışıyorsun?*
Hale:	*Ya $\frac{2}{5}$'si ya $\frac{4}{10}$'ünü göstericem yine aynı şey olucak.*
Araştırmacı:	*Neden illa ki 10 ama?*
Hale:	*Ama işte 10. Yani nasıl böleceğim? Sonuçta eşit parçaya da bölmem lazım ya o yüzden.* (ABAB görüşme formu, 3. Soru)

Hale, birinci soruda $\frac{13}{7}$ kesrini öncelikle alan modeli ile temsil etmiştir. Hale'ye neden farklı bir model değil de bu modeli kullandığı sorulmuştur. Hale kendisine en mantıklı gelen modelin bu model olduğunu, başka birine anlatacak olsa da yine bu modeli kullanarak bir anlatım gerçekleştireceğini ifade etmiştir.

Öğretmen adaylarından üçüncü soruda, verilen şekiller üzerinde $\frac{2}{5}$ kesrini göstermeleri istenmiştir. Tüm öğretmen adayları yan yana parçaları tarayarak $\frac{2}{5}$ kesrini gösterme yolunu tercih etmişlerdir. Neden bu şekilde bir gösterimi tercih ettikleri sorulmuştur ve öğretmen adaylarının her birinin cevabı ayrı ayrı ele alınmıştır.

İlker üçüncü soruda $\frac{2}{5}$ kesrini alan modeli ile temsil ederken payda kadar eş parçaya ayrılmış bir bütünde pay kadarlık bir eş parçayı seçmiştir. Bu seçimde hep yan yana eş parçaları tercih etmiştir. Fakat yan yana parçalar değil de pay kadar farklı farklı parçalar da seçse eş parçalar olmasından dolayı değişen herhangi bir durum olmadığını, oluşturduğu modelin yine aynı kesri temsil edeceğini bilmektedir.

Araştırmacı:	*Peki, gösterirken sen hep şu en baştaki kısımları taradın. Bak hep yan yana. Fark ettin mi?*
İlker:	*Evet.*
Araştırmacı:	*Neden öyle yaptın?*
İlker:	*Onu yani çizmek kolay olsun diye. Ama normalde bu böyle de olabilir, bir şunu tararım, böyle de tarayabilirim, böyle de tarayabilirim. Sonuç fark etmez.*
Araştırmacı:	*Bunlar (diğerleri) için de geçerli mi bu?*
İlker:	*Bunlar için de geçerli. Eşit ya… Mesela bunları aldım, bunları da alabilirdim aynı şekilde.* (AB görüşme formu, 3. Soru)

İpek de İlker gibi $\frac{2}{5}$ kesrini temsil ederken beş eş parça arasından yan yana bulunan eş parçaları kullanmayı tercih etmiştir. Bunun nedenini bir arada durmalarının güzel olduğu şeklinde ifade etmiştir Farklı iki parça seçse de $\frac{2}{5}$ kesrini temsil edebileceğini, çünkü tüm parçaların eş parçalar olduğunu belirtmiştir.

Cemil üçüncü sorudaki birinci, ikinci ve beşinci şekiller üzerinde $\frac{2}{5}$ kesrini, beş eş parça arasından ilk iki parçayı tarayarak temsil etmeyi tercih etmiştir. Üçüncü ve dördüncü şekiller üzerinde $\frac{2}{5}$ kesrini temsil etmek istediği zaman beş eş parça arasından ikinci ve üçüncü parçaları seçmiştir. Yine Cemil de eş parçalar olması nedeni ile farklı iki parçanın seçimi ile de aynı kesrin temsil edilebileceğini bilmektedir.

Cemil: *Şimdi bunu genelde en başta gösteririm zaten de hani farklı olsun diye şimdi ortada falan da gösterdim.*

Araştırmacı: *Yani şurada göstersen, burada göstersen de aynı şey olur muydu?*

Cemil: *Tabi ki olur ya. Bitişik olmasına da gerek yok. Farklı farklı gösterimleri olabilir.*

Araştırmacı: *Sen sadece alışkanlıktan bu şekilde gösterdin.*

Cemil: *Kolaylık diyelim yani alışkanlık değil de. Biraz daha kolay düşünme gibi.* (AB görüşme formu- 3. Soru)

Cemil $\frac{2}{5}$ kesrini temsil ederken yan yana bulunan iki eş parçayı seçmeyi tercih etmesine rağmen öğretimde sadece bu şekilde bir gösterimin tercih edilmemesi gerektiğini, aksi taktirde bu durumun öğrencilerin sadece o şekilde bir temsilin olduğunu düşünmelerine neden olacağını belirtmiştir.

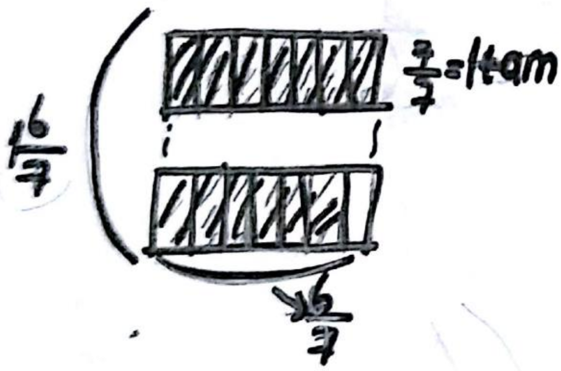
Hale, üçüncü soruda yer alan tüm şekiller üzerinde $\frac{2}{5}$ kesrini temsil etmek için beş eş parçadan oluşan bütünün ilk iki parçasını taramıştır. Neden bu şekilde yaptığı sorulduğu zaman ise “alışkanlık” tan bu şekilde bir gösterimi tercih ettiğini belirtmiştir.

Tüm öğretmen adayları verilen kesri alan modeli ile gösterirken bütünü payda kadar eş parçalama yoluna gitmektedirler. Bütünü eş parçalama ve bu parça sayısı öğretmen adaylarının alan modelini kullanırken tercih edecekleri şekli belirlemiştir. Payda tek olduğu zaman öğretmen adayları daireyi eş parçaya ayıramayacaklarını düşünerek öncelikle alan modelini dikdörtgen kullanarak temsil etmeyi tercih etmişlerdir.

İpek’in $\frac{13}{7}$ kesrini ifade ederken alan modeli kullanmasına yönelik tercihi aşağıdaki kesit ile belirtilmiştir ve Şekil 4.6’da $\frac{13}{7}$ kesrini alan modeli ile nasıl temsil ettiği gösterilmiştir.

Araştırmacı: *Neden böyle göstermeyi tercih ettin?*

İpek: *Çünkü yuvarlak çizmiş olsaydım yediye bölmek zor olacaktı, yedi eş parçaya bölmek. Hani tam olarak tutturamayabilirim falan diye düşündüm. O yüzden bu şekilde gösterdim. Bunları kullanmak daha kolay.* (AB görüşme formu-1. soru).



Şekil 4.6. İpek'in $\frac{13}{7}$ kesrini alan modeli ile göstermesi, (AB görüşme formu- 1. Soru)

Cemil de $\frac{13}{7}$ kesrini alan modeli ile gösterirken paydası tek olmasından dolayı, eşit parçalara ayırması gerektiğini bildiği için, daire ile temsil etmede zorlanacağını ifade etmiştir. Sonrasında ise eşit parçalar olduğunu farz ederek $\frac{13}{7}$ kesrini ile temsil etmiştir.

Cemil: *Nasıl göstereceğiz? (düşünüyor) Modelleri hatırlayamadım ki. Alanda da yani 7 tek olduğu için.*

Araştırmacı: *Tek olması ile nasıl alakası var?*

Cemil: *Nasıl alakası var mı?*

Araştırmacı: *Evet.*

Cemil: *Yani tek olduğu için nasıl 7 parçaya böleceğiz?*

Araştırmacı: *Bölemez misin?*

Cemil: *Böleriz de şey olmaz hani. Çok şey olmaz, ıı. Eşit olmaz. Böyle direk çizeceğimize böyle 7'yi hesaplamamız lazım buradan (dairenin merkezinden) 3'e bölme gibi düşünüp onu hesaplamamız lazım. Eşit olduğunu farz etmemiz lazım. Böleriz yediye ya, niye bölmeyelim.* (AB görüşme formu- 1. Soru)

4.1.1.2. Öğretmen adaylarının verilen kesirleri küme modeli ile göstermelerine yönelik AB'lerine ilişkin bulgular. Öğretmen adaylarının verilen kesirleri küme modeli ile göstermelerine yönelik AB'leri incelenirken ilk üç sorunun tamamı dikkate alınmıştır. İpek ve Hale'nin küme modeli ile temsilde gruplama bilgisine başvurduğu görülmüştür. Öğretmen adayları paydayı dikkate alarak bir tamı ifade eden kümeyi belirlemişlerdir. İpek ve Hale payda kadar eş grup oluşturmuşlar ve bu eş gruplardan pay kadarlık grubu seçmişlerdir. İlker ve Cemil ise işlemsel düzeyde bir bilgi kullanmıştır. Gruplama bilgisi kullanmak yerine oran-orantı kullanarak bir kümedeki nesne sayısını belirlemişler ve bir tamdan hareketle istenilen kesri temsil etmede yine oran-orantı kullanmışlardır.

İlker ikinci soruda yer alan $\frac{5}{6}$ kesrinin küme modeli ile temsilinden hareketle $1\frac{1}{2}$ kesrini küme modeli ile temsil edeceği zaman, önce bir tamı temsil eden kümeyi bulmaya çalışmıştır. Bunun için bir tamı ifade eden kümenin kaç sayma nesnesinden oluştuğunu oran-orantı kullanarak belirlemiştir. Bir tamda kaç sayma nesnesi olduğunu bulduktan sonra $\frac{1}{2}$ kesrinin bir tamın yarısı olduğunu düşünerek 18'i ikiye bölmüştür. Böylelikle $\frac{1}{2}$ kesrinin dokuz sayma nesnesinden oluştuğunu ifade etmiştir.

İlker: $\frac{5}{6}$*'ini vermiş. Yani benden bir tamı istiyor, bir de yarısını istiyor.*

Araştırmacı: *Hıhı, evet.*

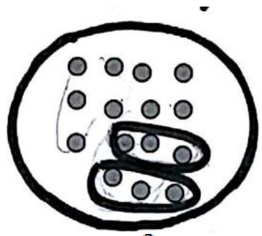
İlker: *15 tane oluyorsa… Böyle….*

Araştırmacı: *Nasıl yaptın?*

İlker: *İlk önce* $\frac{5}{6}$*, 15 tane oluyorsa demek ki bir tam olması için 18 olacak. 18 bir tam olmuş. Ondan sonra yarısı da…18'in yarısı kaçtır? 9'dur. Böyle yaptım.* (AB görüşme formu- 2. Soru)

İlker üçüncü soruda, verilen kümenin $\frac{2}{5}$'sini bulurken işlemsel düzeyde bir bilgi kullanmıştır. Beşin üç ile genişletilmesi sonucu 15 elde edildiğini düşünen İlker, ikiyi de üç ile genişleterek altı sonucunu bulmuştur. Bunun üzerine verilen küme üzerinde altı sayma nesnesini seçerek $\frac{2}{5}$ kesrini küme modeli ile temsil etmiştir. Fakat yine de altı sayma nesnesini seçerken toplam altı sayma nesnesini seçmek yerine her grupta üç sayma nesnesi olacak şekilde iki grup nesne seçmeyi tercih etmiştir. İlker'in $\frac{2}{5}$ kesrini küme modeli ile temsili Şekil 4.7'deki gibidir.

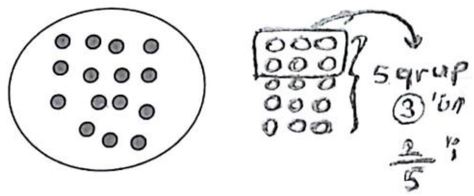
Burada zaten toplam (küme modelinde) 15 tane var. 15 tanenin ....aa 20 tane mi yapıyor? Bir dakika (nesneleri saymaya başlıyor). Hıh 15 tane var. 15 tane ne demek, yani üç ile genişletilmiş demek. Evet *üç ile genişletilmiş demek. Üç, altı. Altı da 15'in $\frac{2}{5}$'si oluyor burada.* (İlker- AB görüşme formu,3. Soru)



Şekil 4.7. İlker'in $\frac{2}{5}$ kesrini küme modeli ile temsili, (AB görüşme formu- 3. Soru)

İpek üçüncü soruda yer alan küme üzerinde $\frac{2}{5}$ kesrini temsil etmek isterken dağınık halde verilen 15 sayma nesnesini payda kadar gruptan oluşacak şekilde ifade etmek gerektiğini düşünmüştür. 15 sayma nesnesi ile beş eş grup oluşturulacaksa her bir eş grupta üç sayma nesnesinin yer alacağını belirlemiştir. Bu üçlü beş eş grup arasından iki tane grubu seçmiştir. Böylece $\frac{2}{5}$ kesrini Şekil 4.8'deki gibi temsil etmiştir. İpek'in $\frac{2}{5}$ kesrini küme modeli ile göstermesine yönelik bir kesit aşağıda verilmiştir:

> *Bir nevi bölme işlemi gibi. Her kesri bölme işlemi gibi düşünüyorum. Ve bölen beş olduğu için, beşe bölünen bir grup, bu grubun beşe bölünen bir grup olduğunu düşünüyorum. Yani beşe gruplayacağım bir sayma nesnesi grubu. O yüzden beşli üç grup elde ettim. Pardon üçlü beş grup. Karıştı biraz. Beş grup üç var burada dedim. Ve o beş grubun arasından da ikisini, iki grubunu aldım üçlerin. Altı tane sayma nesnesi bu grubun $\frac{2}{5}$'si oldu.* (İpek- AB görüşme formu, 3. Soru)



Şekil 4.8. İpek'in $\frac{2}{5}$ kesrini küme modeli ile temsili, (AB görüşme formu- 3. Soru)

Cemil ikinci soruda $1\frac{1}{2}$ kesrini küme modeli ile temsil edeceği zaman önce bir tamı belirten kümeyi belirlemek istemiştir. Bunu belirlerken oran orantıdan faydalanmış, bir tamda kaç nesne olacağını bulmuştur. $1\frac{1}{2}$'yi "bir tam+tamın yarısı" (bk. Şekil 4.9) şeklinde ele almıştır. Bir tamın 18 sayma nesnesinden oluştuğunu bulmuş, $\frac{1}{2}$ kesrinin de tamın yarısı olmasında dolayı dokuz nesne kullanılarak temsil edilebileceğini, yani $1\frac{1}{2}$ kesrinin gösteriminin 27 sayma nesnesi ile gerçekleştirilebileceğini ifade etmiştir.

Cemil 27 sayma nesnesini küme modeli ile temsil etmede, bütün nesneleri bir kümede mi yoksa iki ayrı küme şeklinde mi göstermesi gerektiği konusunda bir kararsızlık yaşamıştır. Daha anlaşılır olacağını düşünerek ayrı kümeler şeklinde göstermeye karar vermiştir. Cemil'in yaşadığı bu kafa karışıklığı küme modeli ile ilgili bilgisinin yeterli düzeyde olmadığını göstermektedir. Cemil'in $1\frac{1}{2}$ kesrini küme modeli ile temsili Şekil 4.9'da yer almıştır.

Cemil: *A kümesinin (bir tam olarak belirttiği kümeyi A kümesi olarak isimlendiriyor) $1\frac{1}{2}$'si diyelim, eşittir diyelim.*

Yani 27 tane çizeceğiz. Bir tam diye ayıracak mıyız?

Araştırmacı: *Ayıracak mıyız sence?*

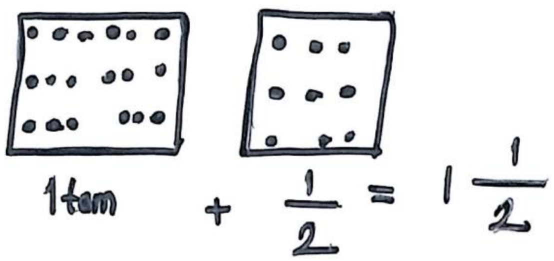
Cemil: *Ayırabiliriz de ayırmayabiliriz de. Soruda bize hani $\frac{5}{6}$ diye gösterdiği için ayıralım ya, ayırmak daha mantıklı. Ama sorudaki gösterim şeyi benim kafamı karıştırdı.*

Araştırmacı: *Neden?*

Cemil: *Şimdi ben bunu ayırırsam yani bir kümenin $1\frac{1}{2}$'si olduğunu ifade etmiş olurum burada.*

...

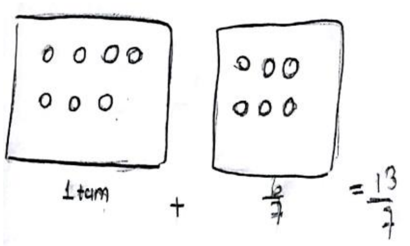
İşte o zaman ben ayırayım, daha şey olsun. Daha anlaşılır olsun. Ayrıca daha anlaşılır olur gibi geliyor bana, herhalde. (AB görüşme formu-2. Soru)



Şekil 4.9. Cemil'in $1\frac{1}{2}$ kesrini küme modeli ile gösterimi, (AB görüşme formu- 2. Soru)

Hale'nin küme modeli konusunda en başta kafası biraz karışmıştır. Hale bir bütün alması gerektiğini bilmektedir, fakat bu bütünü nasıl belirleyeceğini kestirememiştir. Birinci soruda Hale payda kadar nesneden oluşacak şekilde, aslında her biri tek nesneden oluşan yedi eş grup şeklinde bir tamı ifade eden kümeyi belirlemiş ve bir tamdan yola çıkarak $\frac{6}{7}$'yı temsil etmiştir. $\frac{6}{7}$'yı temsil etmek için yedi eş grup arasından altı grubu seçmiştir. Fakat en başta kullandığı bu temsil ona saçma gelmiş, yaptığı şeyi anlamlandıramamış, sonrasında ise $\frac{13}{7}$ kesrini yaptığı şekilde ifade edebileceğini belirtmiştir. Hale'nin $\frac{13}{7}$ kesrini küme modeli ile temsili Şekil 4.10'da verilmiştir.

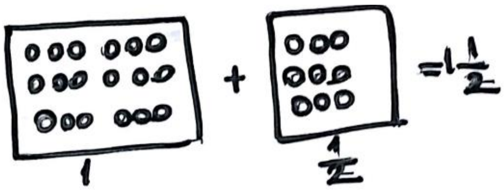
Hale:	*Küme modelinde şey değil mi, yani böyle bir şey oluyordu onu gruplayabiliyorduk. Ama işte burada direk o kesri küme modeli ile nasıl gösteririm bilmiyorum.*
Araştırmacı:	*Yani orda küme olarak ne alıyorsun, yani bütün olarak neyi alıyorsun?*
Hale:	*Yani orda bir bütün almam lazım. Burada neyi alacağım? Kafama göre mi yine bir bütün alacağım?*
Araştırmacı:	*Burada da bir bütün yok mu? Bir bütünden bahsedemiyor musun* $1\frac{6}{7}$ *için?*
Hale:	*Bir bütün var tamam. Yani o zaman gene aynı olacak şuna bir bütün diyeceğim. Sonra diğerini de yani bu şekilde mi olacak?* *Bu ne anlam ifade edecek ama? Ama ben buna bir tam diyebilirim, kafama göre bir tam dedim mi yani şimdi? Tamam bu şekilde olur ama bu hiç mantıklı değil bence.* *...*
Hale:	*Ya farklı şekilde yapılıyor ama şu an benim aklıma gelmiyor. Şu an aklıma gelen bu, ama bu da hiç mantıklı gelmiyor. Burada bir tam, burada* $\frac{6}{7}$ *mi var yani? Ama aslında olabilir ya. Yani bu şekilde de olabilir belki.*
Araştırmacı:	*Neden belki?*
Hale:	*Ya şimdi küme var şöyle. Yedi tane şey var. Ben buna bir tam dedim. Sonra aynısından altı tane aldım. O da* $\frac{6}{7}$ *yaptı. Tamam işte artık bu ikisi* $\frac{13}{7}$ *yaptı. Şu an ben* $\frac{13}{7}$*'yi göstermiş oldum.* (AB görüşme formu, 1. Soru)



Şekil 4. 10. Hale'nin $\frac{13}{7}$ kesrini küme modeli ile temsili, (AB görüşme formu- 1. Soru)

$\frac{5}{6}$ kesrinin 15 sayma nesnesi yardımı ile temsil edildiği ve $1\frac{1}{2}$ kesrinin temsil edilmesinin istendiği ikinci soruda, Hale 15 sayma nesnesinin yinelenen üçerli beş gruptan oluştuğunu düşünmüştür. Bu soru için, bir tamda payın altı olduğu bilgisinden yola çıkarak altı tane yinelenen üçlü grup oluşturmuştur. Hale, bir tamı dikkate alarak $\frac{1}{2}$ kesrini ifade etmesi gerektiğini belirtmiştir. $\frac{1}{2}$ kesrinin bir tamın yarısı olması nedeni ile bir tam için oluşturduğu grubun yarısını almıştır ve böylelikle $1\frac{1}{2}$ kesrini küme modeli ile Şekil 4. 11'deki gibi temsil etmiştir.

> *Yani ben bu 15'i beş parçaya şey yaptım. Yani şu 15, beşerli böldüğümde üçerli şekilde parçaladım. Sonra bir parça da kendim koydum. Çünkü altıdaymış. Bir tane oradan. Bu ana küme oldu şu an. Hani buna göre bunu belirleyeceğim (bir tama göre, $\frac{1}{2}$'i). O zaman zaten bir tamı, kendisini buraya koydum. Sonra bunun yarısı da bu. Bu da* $1\frac{1}{2}$. (Hale- AB görüşme formu, 2. Soru)



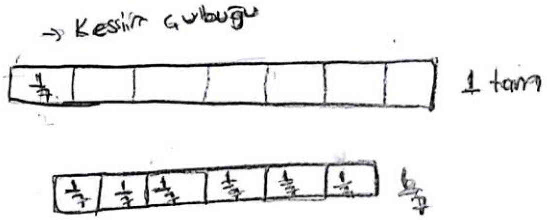
Şekil 4.11. Hale'nin $1\frac{1}{2}$ kesrini küme modeli ile temsili, (AB görüşme formu- 2. Soru)

4.1.1.3. Öğretmen adaylarının verilen kesirleri uzunluk modeli ile göstermelerine yönelik AB'lerine ilişkin bulgular. Uzunluk modeli, öğretmen adaylarının verilen kesirleri model ile temsil etmede en az başvurdukları model olmuştur. Hale birinci soruda $\frac{13}{7}$ kesrini temsil etmek için Cuisenaire çubuklarını kullanırken, İlker $\frac{13}{7}$ kesrini temsil etmede sayı doğrusunu kullanmıştır. Diğer iki öğretmen adayının ise verilen üç sorudan hareketle uzunluk modeli hakkındaki AB'leri incelenememiştir.

İlker, $\frac{13}{7}$ kesrini uzunluk modellerinden olan sayı doğrusunu kullanarak temsil etmiştir. İlker'in kullandığı tek uzunluk modeli sayı doğrusu olmuştur. $\frac{13}{7}$ kesrinin bir tamdan fazla olduğunu bildiği için bu kesrin bir ve iki sayıları arasında yer aldığını bilmektedir. İlker, bir ve iki sayıları arasını yedi eş parçaya bölmüştür ve $\frac{1}{7}$'lik uzunluğu altı kere yineleyerek, bu parçalardan altıncısının geldiği noktayı kesrin bulunduğu yer olarak belirlemiştir.

Hale Cuisenaire çubuklarından bahseden tek öğretmen adayı olmuştur. Cuisenaire çubuklarında $\frac{1}{7}$'lik uzunluğun var olduğunu ifade etmiştir. $\frac{13}{7}$ kesrini $\frac{7}{7}+\frac{6}{7}$ şeklinde düşünmüştür Bir tamı göstermek için bu çubuklardan yedi tane kullanılması, yani bu $\frac{1}{7}$'lik uzunluktan uç uca yedi tane eklenmesi gerektiğini ifade etmiştir. $\frac{6}{7}$ kesrini de bu çubuklardan uç uca altı tane ekleyerek göstermiştir. Bu oluşturduğu model Hale'nin uzunluk modelinin temelinde yatan yineleme fikrini burada ortaya koyduğunu göstermektedir. Hale'nin $\frac{13}{7}$ kesrini kesir çubukları ile temsiline Şekil 4.12'de yer verilmiştir.

> *Ya kesir çubukları var şu Causaniere bir şey diyorlar ondan. Orda zaten $\frac{1}{7}$'likler var ya, onun mesela 7 tanesini dizdiğimizde, sonra bir de 6 tane.*
>
> *Şöyle $\frac{1}{7}$'likler üzerinde zaten yazıyor. Bunlardan 7 tane dizdiğimde bir tam olacak zaten.*
>
> *Sonra bundan işte gene aynı bir de 6 tane.*
>
> *Zaten bir tamı da gösteren çubuk da var. Bu bir tam, $1\frac{6}{7}$ bu şekilde. Bunların hepsi işte $\frac{1}{7}$ (her bir parçayı kastediyor).* (Hale- AB görüşme formu, 1. Soru)



Şekil 4.12. Hale'nin $\frac{13}{7}$ kesrini kesir çubuğu ile temsili, (AB görüşme formu- 1. Soru)

Hale, birinci soruda uzunluk modeli kullanmadan önce $\frac{13}{7}$ kesrini alan modeli kullanarak temsil etmiştir. Hale aşağıdaki diyalogda yer aldığı şekilde alan modelinde de $\frac{1}{7}$'lik birimler oluştuğunu ve bunların pay adedince yinelendiğini, bu nedenle oluşturduğu temsilin her iki modele de uygun olduğunu belirtmiştir. Hale, uzunluk modeli ve alan modeli konusunda kafa karışıklığı yaşayan tek öğretmen adayıdır.

Hale: *Şimdi $\frac{13}{7}$ bileşik kesir. $\frac{7}{7}+\frac{6}{7}$ den. Bu $\frac{7}{7}$ işte. Bir bütün yedi parçaya bölünmüş. Sonra buradan da yedi parçaya bölünmüş altısı alınmış. $\frac{6}{7}$ de bu. Toplam bu ikisi $\frac{13}{7}$ yani.*

Araştırmacı: *Sen şimdi burada nasıl göstermiş oldun bunu?*

Hale: *Bunu nasıl göstermiş oldum? Model ile göstermiş oldum.*

Araştırmacı: *Modelle gösterdin ama nasıl bir modelle gösterdin? Hangi modeli kullanmış oldun?*

Hale: *Hı.. uzunluk modeli mi? Değil mi? Alan modeli mi oluyor? Yani bilmiyorum ikisini. Uzunluğa da giriyor aslında alana da giriyor.*

Araştırmacı: *Neden öyle düşündün?*

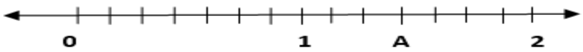
Hale: *Ya şimdi hani böyle taralı alan falan yapıyoruz ya alan modeli gibi oluyor. Uzunluk da sonuçta hani uzunluk bunların her biri işte $\frac{1}{7}$, $\frac{1}{7}$... ikisi de bence oluyor gibi.* (AB görüşme formu-1. Soru)

4.1.2. Öğretmen Adaylarının Kesirlerin Denkliğini Model ile Göstermelerine Yönelik AB'lerine İlişkin Bulgular ve Yorum

Öğretmen adaylarının kesirlerin denkliğini model ile göstermelerine yönelik AB'leri şu sorular kullanılarak analiz edilmiştir:

<u>AB görüşme formu 4. Soru:</u> Denk kesir ne demektir? $\frac{2}{5}$ ve $\frac{6}{15}$, $\frac{3}{7}$ ve $\frac{9}{14}$ kesirlerinin denk olup olmadığını model yardımıyla gösteriniz.

<u>AB görüşme formu 5. Soru:</u>



Yukarıdaki sayı doğrusu üzerinde ifade edilen A kesrine denk olan dört kesri sayı doğrusu kullanarak gösteriniz. Yaptığınız işlemlerin açıklamalarını yapınız.

Dördüncü soruda öğretmen adaylarından verilen kesirlerin denk olup olmadığını model yardımı ile belirlemeleri istenmiştir. Öğretmen adaylarının kullandıkları modellerden yola çıkarak kesirlerin denkliğinde o modeli kullanmalarına yönelik AB'leri incelenmiştir. Beşinci soruda ise bir sayı doğrusu verilmiş ve bu sayı doğrusundan hareketle A kesrine denk olan kesirleri yine sayı doğrusunda göstermeleri istenmiştir. Bu soruda öğretmen adaylarının hem uzunluk modeline yönelik bilgilerine hem de kesirlerin denkliğinde uzunluk modeli kullanmalarına yönelik bilgilerine ulaşılmıştır.

Kesirlerin denk olup olmadığının model yardımı ile belirlenmesinin istendiği dördüncü soruda öğretmen adayları yine ilk olarak alan modelini kullanma eğiliminde olmuşlardır. İpek, Hale ve Cemil alan modelinin yanı sıra küme modelini kullanırken, İlker her üç modeli de kullanarak kesirlerin denk olup olmadığını göstermiştir. Öğretmen adaylarının kesirlerin denkliğini model ile göstermelerine yönelik AB'leri Tablo 4.3'te yer almıştır. Ardından öğretmen adaylarının kesirlerin denkliği (ya da denk olmadıklarını) göstermede model kullanımına yönelik bilgileri alan, küme ve uzunluk modeli bağlamında ayrı ayrı incelenmiş ve öğretmen adaylarının ifadelerinden kesitler verilerek desteklenmiştir.

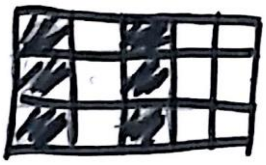
Tablo 4.3
Öğretmen Adaylarının Kesirlerin Denkliğini Model ile Göstermelerine Yönelik AB'leri

Kategoriler	Kodlar	Öğretmen Adayı
Alan modeli	İki kesrin temsili sonucu oluşan taralı alanların aynı yere denk geliyor olması	İlker, İpek, Cemil, Hale
Küme modeli	İki kesre göre gruplanabilmesi için paydaların EKOK'ları kadar sayma nesnesi alma, bu nesneleri kesirlerin paydalarına göre eş gruplara ayırıp, pay kadar grubu seçme	İlker, İpek, Hale
	İki durumdaki nesne sayılarını karşılaştırma	İlker, İpek, Hale, Cemil
Uzunluk modeli	İki sayı arasını kesrin paydası kadar eş parçaya ayırma ve edilen uzunluğu kesrin payı kadar yineleme, oluşan uzunlukları ikinci kesrin payına göre de eş parçalara ayırma, pay kadar yineleme, sayı doğrusu üzerinde aynı yere denk geliyor olmalarına dikkat etme	İlker, Hale
	Denk kesirleri elde etmek için genişletme işlemi yapma	İlker, İpek, Cemil

4.1.2.1. Öğretmen adaylarının kesirlerin denkliğini alan modeli ile göstermelerine yönelik AB'lerine ilişkin bulgular. Öğretmen adayları verilen kesirlerin denk olup olmadığını alan modeli yardımı ile belirlerken taralı kısımların aynı yere denk geliyor olması bilgisini kullanmışlardır. İpek ve Cemil aynı bütünü iki kesrin paydasına göre eş parçaya ayırmış ve pay kadar eş parçasını taramış, bu seçilen eş parçaların aynı yere denk geliyor olması bilgisini kullanmışlardır. Hale ve İlker ise paydası küçük olan kesrin paydasına göre bir eş parçalama yapmış ve ardından bütün ikinci kesrin paydası kadar eş parçadan oluşacak şekilde bir parçalama daha gerçekleştirmiştir. İki parçalama sonucunda kesirlerin temsil ettiği miktarları karşılaştırmışlardır. Öğretmen adayları aynı zamanda denk kesirlerde bütünün aynı olduğu bilgisine de sahiptirler. Oluşturdukları modeller bu bilgiye sahip olduklarını göstermektedir. Öğretmen adaylarının kesirlerin denkliğinde alan modeli kullanımına yönelik bilgileri incelenirken her iki kesir grubu için de aynı yaklaşımı kullandıkları için İpek ve İlker'in $\frac{2}{5}$ ve $\frac{6}{15}$ kesirlerinin denkliğini gösterdikleri, Cemil ve Hale'nin de $\frac{3}{7}$ ve $\frac{9}{14}$ kesirlerinin denk olmadığını gösterdikleri modeller dikkate alınmıştır.

İlker $\frac{2}{5}$ ve $\frac{6}{15}$ kesirlerinin denk olup olmadığını alan modeli kullanarak belirlerken bütünü dikey olarak beş eş parçaya ayırmış ve bu eş parçalar arasından iki tanesini seçmiştir. Dikey olarak beş eş parçaya ayırdığı modeli yatay olarak da üç eş parçaya ayırmış ve böylelikle 15 eş parça elde etmiştir. İlker burada paydaları dikkate alarak bir parçalama gerçekleştirmiştir. Dikey olarak taradığı alanları ve en son 15 parçaya ayrılmış haldeki taralı alanları birbiri ile kıyasladığı zaman her iki durumda da taralı kısımların aynı yerler olduğunu fark etmiş ve bu kısımların aynı büyüklükte olduğunu, yani aynı büyüklüğü temsil ettiğini sadece farklı parçalarla gösterildiğini belirtmiştir. İlker'in $\frac{2}{5}$ kesrini temsil eden model üzerinden $\frac{6}{15}$ kesrini temsil etmeye çalışması denk kesirlerde bütünün aynı olduğu bilgisine sahip olduğunu göstermektedir. Şekil 4.13'te İlker'in $\frac{2}{5}$ ve $\frac{6}{15}$ kesirlerinin denkliğini alan modeli ile nasıl temsil ettiğine yer verilmiştir.

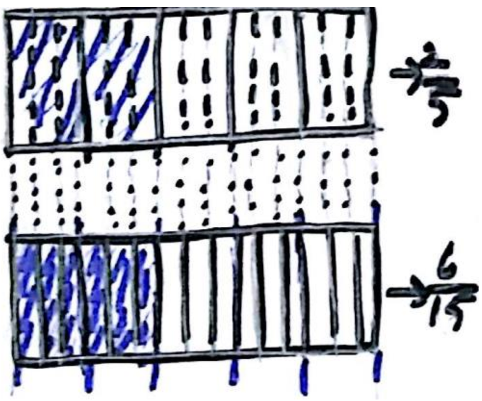
> *Bunu mesela şöyle düşüncem: yani yatay olarak düşünecek olursam;* $\mathbf{\frac{2}{5}}$ *oluyor. İşte ondan sonra bu dikdörtgen dikdörtgen olarak düşünecek olursam kaç tane 1,2,3,4,5,6. İşte* $\mathbf{\frac{6}{15}}$ *oluyor. Yani bunlar denktir. Aynı büyüklükte ama sadece parçaları farklı gibi.* (İlker- AB görüşme formu, 4. Soru)



Şekil 4.13. İlker'in $\frac{2}{5}$ ve $\frac{6}{15}$ kesirlerinin denkliğini alan modeli ile temsili, (AB görüşme formu- 4. Soru)

İpek $\frac{2}{5}$ ve $\frac{6}{15}$ kesirlerinin denk olup olmadığını belirlerken önce $\frac{2}{5}$ kesrini alan modeli ile temsil etmiştir. Bütünü dikey olarak beş eş parçaya ayırmış ve bu eş parçalardan iki tanesini seçmiştir. $\frac{2}{5}$ kesrini temsil eden modelin altına yine aynı bütünden hareketle, $\frac{6}{15}$ kesrini temsil eden bir model çizmiştir. Aynı bütünü bu defa 15 eş parçaya ayırmış ve bu 15 eş parça arasından altı tanesini seçmiştir. İki modeli karşılaştırdığı zaman taralı kısımlarının aynı yerlere denk geldiğini fark etmiş ve bu nedenle de denk kesirler olduğunu ifade etmiştir. İpek'in $\frac{2}{5}$ ve $\frac{6}{15}$ kesirlerinin denk olup olmadığını nasıl belirlediğine yönelik alan modeli temsili Şekil 4.14'teki gibidir.

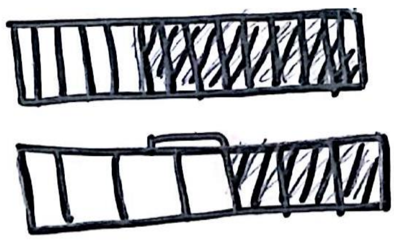
> *Burada $\frac{2}{5}$. Aynı zamanda ben bu kesrin genişletildiğinde yani paydaları eşitlenmiş hallerini düşündüğümde de nasıl görüneceğini tam bölmesem de nokta nokta ile belirttim. Aşağıya da 15 parçaya ayrılmış bir bütün çizeceğim. Ama aynı bütün olduğunu belirtmek için alt alta çizdim. Birbirinin tamamen sınır olarak aynısı. Bu kesirler denkse taranan kısımları aynı yerlere denk gelmeli. Onları şey yapacağım (nokta noktalar ile yukarıdan uzatarak tam alt alta gelmesini sağlıyor). Bu beşte iki, $\frac{2}{5}$ kesri.*
>
> *Burada da $\frac{6}{15}$'i göstereceğim. Aynı yere denk geliyor. Yani ikisi eşit, yani bir bütünün eşit parçaları olduğu için.* (İpek- AB görüşme formu, 4. Soru)



Şekil 4.14. İpek'in $\frac{2}{5}$ ve $\frac{6}{15}$ kesirlerinin denkliğini alan modeli ile göstermesi, (AB görüşme formu- 4. Soru)

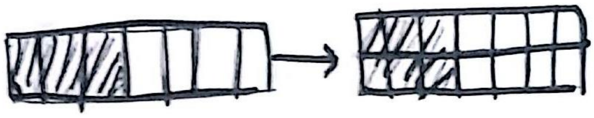
Cemil, model kullanımından yola çıkarak kesirlerin denkliği hakkında bir yorumda bulunmadan önce sadeleştirmeden yola çıkarak $\frac{3}{7}$ ve $\frac{9}{14}$ kesirlerinin denk olmadığını ifade etmiştir. Zaten Cemil denk kesir nedir diye sorulduğu zaman "iki kesrin en sadeleştirilmiş halinin aynı olmasıdır" şeklinde bir cevap vermiştir. Cemil kesirlerin denkliğinin işlemsel olarak verdiği anlamı söylemiştir.

Cemil de İpek gibi kesirlerin denk olup olmadığını belirlerken alt alta çizilmiş iki modelden yararlanmıştır. İki modelin aynı hizada olmasını istemesinin denk kesirlerde bütünün aynı olduğu bilgisinden kaynaklandığı düşünülmektedir. $\frac{3}{7}$ ve $\frac{9}{14}$ kesirlerinin denk olup olmadığını alan modeli yardımı ile belirlerken öncelikle bütünü 14 eş parçaya ayırmış ve bu eş parçalardan dokuz tanesini seçmiştir, yani Cemil önce $\frac{9}{14}$ kesrini temsil etmeyi tercih etmiştir. Ardından aynı bütünü yedi eş parçaya ayırmış ve bu eş parçalardan üç tanesini seçmiştir. İki modeldeki taralı kısımların tam olarak birbirine denk gelmediğini gören Cemil bu iki kesrin denk kesirler olmadığını belirtmiştir. Şekil 4.15'te Cemil'in iki kesrin denk olmadığını alan modeli ile nasıl temsil ettiği yer almıştır.



Şekil 4.15. Cemil'in $\frac{3}{7}$ ve $\frac{9}{14}$ kesirlerinin denk olmadığının alan modeli ile temsil etmesi, (AB görüşme formu- 4. Soru)

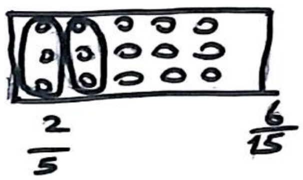
Hale, $\frac{3}{7}$ ve $\frac{9}{14}$ kesirlerinin denk olup olmadığını alan modeli ile belirlerken önce $\frac{3}{7}$ kesrini temsil etmiştir. Bütünü dikey olarak yedi eş parçaya ayırmış ve bu yedi eş parçadan üç tanesini seçmiştir. Dikey olarak yedi eş parçaya ayırdığı dikdörtgeni yatay olarak da iki eş parçaya ayırarak 14 eş parça elde etmiştir. Hale, "denk kesirlerde bütün aynıdır" bilgisinden hareketle yedi eş parçaya böldüğü bütünü 14 eş parçadan oluşan bir bütün haline getirerek denkliğin var olup olmadığını göstermek istemiştir. En başta taradığı üç parçanın, 14 eş parça arasından altı parçaya denk geldiğini gören Hale, 14 eş parçaya ayrılmış modelin $\frac{6}{14}$ kesrini temsil ettiğini bu nedenle de $\frac{3}{7}$ ve $\frac{9}{14}$ kesirlerinin denk olmadığını ifade etmiştir. Şekil 4.16'da Hale'nin $\frac{3}{7}$'ün $\frac{6}{14}$ kesrine denkliğini alan modeli ile gösterdiği temsil yer almıştır.



Şekil 4.16. Hale'nin $\frac{3}{7}$ kesrinin $\frac{6}{14}$ kesrine denkliğini alan modeli ile temsili, (AB görüşme formu- 4. Soru)

4.1.2.2. Öğretmen adaylarının kesirlerin denkliğini küme modeli ile göstermelerine yönelik AB'lerine ilişkin bulgular. Öğretmen adaylarından üç tanesi kesirlerin denk olup olmadığını küme modeli ile belirlerken gruplama bilgisinden yararlanmışlardır. Her iki kesrin paydasına göre de gruplanabilecek şekilde bir bütündeki sayma nesnesi sayısını belirlemişlerdir. Her iki kesrin paydasına göre eş gruplamalar yapıp, bu eş gruplardan pay kadar grubu seçmişlerdir. Her iki durumdaki nesne sayısının eşit olup olmamasını dikkate alarak kesirlerin denk olup olmadığını belirlemişlerdir. Cemil ise işlemsel bilgi kullanarak, hiçbir gruplamadan bahsetmeden kesirlerin denkliği hakkında yorumlamalarda bulunmuştur. Öğretmen adaylarının kesirlerin denkliğini küme modeli ile temsil etmelerine yönelik bilgileri ayrıntılı olarak incelenmiştir.

İlker iki kesrin denk olup olmadığının model yardımı ile belirlenmesinin istendiği dördüncü soruda alan modeli ile temsilin ardından küme modeli ile temsili tercih etmiştir. Küme modelinde kümede yer alacak nesne sayısını belirlemede kesirlerin paydalarını dikkate almıştır. Denkliği belirlemek için nesneleri her iki grubun payda sayısına göre gruplamıştır. $\frac{2}{5}$ ve $\frac{6}{15}$ kesirlerinin denkliğini küme modeli ile temsil ederken önce bir tamı belirten kümeyi 15 sayma nesnesi ile oluşturmayı düşünmüştür. Bu 15 sayma nesnesini $\frac{2}{5}$ kesrini temsil etmek üzere beş eş gruptan oluşacak şekilde gruplara ayırmak istemiştir. Her bir eş grubun üç sayma nesnesinden oluşacağını belirlemiş ve bu üçlü grupları payda kadar yineleme sonucu yani, beş kere yineleyerek sıralı şekilde yerleştirilmiş üçlü beş grup elde etmiştir. Bu beş eş grup arasından iki tanesini seçerek $\frac{2}{5}$ kesrini temsil etmiştir. $\frac{2}{5}$ kesrinin temsilinde altı nesne olduğunu fark etmiştir. Ardından 15 sayma nesnesini 15 eş gruptan oluşacak şekilde düşündüğü zaman eş grupların sadece tek bir nesneden oluştuğunu görmüştür. Bu eş gruplardan altı tanesi seçildiğinde temsil edilen kesir $\frac{6}{15}$ olmaktadır. Dolayısıyla İlker, kesirlerin paydalarına göre farklı eş gruplamalar yapıp, bu eş gruplamalar arasından pay kadar bir eş grubu seçtiği zaman nesne sayılarının aynı olduğunu fark etmiştir ve bu noktadan hareketle iki kesrin denk kesirler olduğunu bulmuştur. Şekil 4.17'de İlker'in $\frac{2}{5}$ ve $\frac{6}{15}$ kesirlerinin denkliğini küme modeli ile temsili yer almıştır.

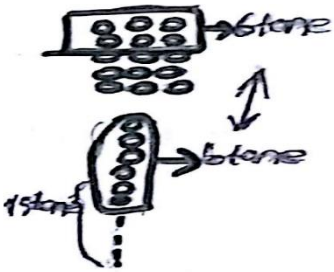


Şekil 4.17. İlker'in $\frac{2}{5}$ ve $\frac{6}{15}$ kesirlerinin denkliğini küme modeli ile temsili, (AB görüşme formu-4. Soru)

Kesirlerin denk olup olmadığını küme modeli yardımı ile belirlemeye çalışan İpek, nesnelerin dağınık bir şekilde duruyor olduğunu varsaymıştır. Denk olup olmadıkları belirlenecek iki kesri de payda kadar grup arasından pay kadarlık grubu seçecek şekilde küme modeli ile temsil etmiştir. Bir tamı temsil eden nesne sayısını her iki kesrin paydasına göre de gruplayabilmek adına kesirlerin paydalarını dikkate alarak belirlemiştir. Her iki temsildeki nesne sayısının eşit olması ya da olmamasından yola çıkarak kesirlerin denkliği hakkında bir çıkarımda bulunmuştur.

İpek $\frac{2}{5}$ ve $\frac{6}{15}$ kesirlerinin denkliğini küme modeli kullanarak gösterirken beş ve 15 eş grup oluşturabilmek adına bir bütünün 15 sayma nesnesinden oluşmasına karar vermiştir. $\frac{2}{5}$ kesrini temsil etmek adına 15 sayma nesnesini beş eş gruptan oluşacak şekilde gruplamayı ve bu eş gruplardan iki tanesini seçmeyi düşünmüştür. 15 sayma nesnesinin beş eş grup şeklinde ifade edilebilmesi için her bir eş grupta üç sayma nesnesinin yer alması gerektiğini bulmuştur ve bu üçlü beş eş gruptan üçlü iki grubu seçmiştir. Seçilen üçlü iki gruptaki nesne sayısının altı olduğunu ifade etmiştir. Ardından 15 sayma nesnesini 15 eş gruptan oluşacak şekilde gruplamak istemiştir. 15 eş gruba ayırdığı zaman her bir eş grubun tek bir sayma nesnesinden oluşacağını belirlemiştir. $\frac{6}{15}$ kesrini temsil edebilmek adına bu 15 eş grup arasından altı grubu seçmiştir. Sonrasında her iki temsildeki sayma nesnelerinin sayısını incelemiştir. Sayma nesnelerinin sayısının eşitliğinden yola çıkarak bu iki kesrin denk kesirler olduğunu ifade etmiştir. Şekil 4.18'de İpek'in $\frac{2}{5}$ ve $\frac{6}{15}$ kesirlerinin denkliğini küme modeli ile temsiline yer verilmiştir.

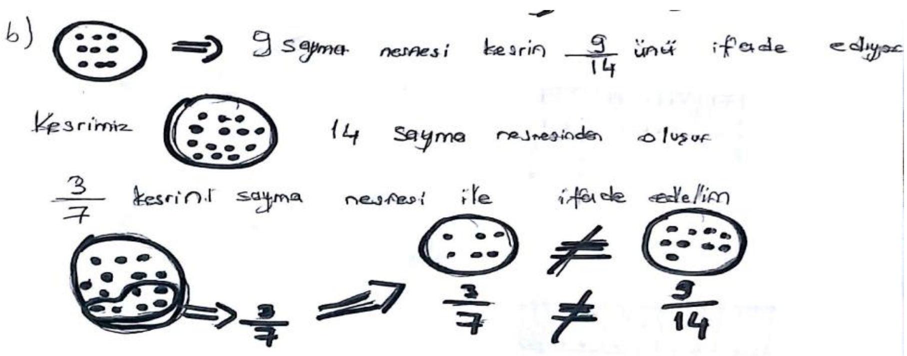
> *Şöyle olur mu acaba? O zaman da şöyle olması gerekirdi; başlangıçtaki grubumuzun 15 ile başlaması gerekirdi. Hı, evet yapabilirdik, O zaman da bir bütünümüz 15 tane sayma nesnesi olurdu. Karışık bir şekilde duruyor olurdu. İlk durumda onları beş gruba ayırırdım ve onun $\frac{2}{5}$'sini, yani üç tane. Beş tane üçlü grup oluştururdum. Ve bunların iki tane üçlü grubunu alırdım. Sayısını yazardım altı tane diye. Ve 15'li, paydası 15 olduğu için 15 tane birlik grup oluşacaktı bu sefer. Alt alta 15 tane. Bunların içinden yine 15'te altısını alırdım. Bu ikisinin eşit olmasından yine bunu çıkarıp denk kesirleri anlatabilirdik.* (İpek- AB görüşme formu, 4. Soru)



Şekil 4.18. İpek'in $\frac{2}{5}$ ve $\frac{6}{15}$ kesirlerinin denkliğini küme modeli ile temsili, (AB görüşme formu- 4. Soru)

Cemil kesirlerin denk olup olmadıklarını küme modeli ile temsil etmek istediğinde kendilerine soru olarak yöneltilen ikinci sorudaki gibi bir ifade kullanmıştır. Cemil tıpkı İpek gibi iki ayrı küme oluşturmuştur. Bu kümeler, verilen kesirleri temsil eden kümelerdir. Her iki temsildeki nesne sayısının eşit olması ya da olmamasından yola çıkarak kesirlerin denk olup olmadıklarını belirlemiştir. Fakat Cemil kesirleri temsil eden kümeleri oluştururken gruplama bilgisinden faydalanmamıştır.

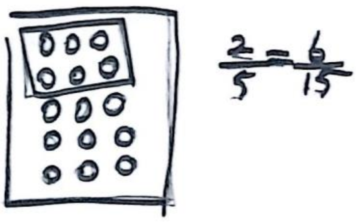
Cemil $\frac{3}{7}$ ve $\frac{9}{14}$ kesirlerinin denk olup olmadığını gösterirken küme modelini işlemsel bilgi ile oluşturmuştur. İkinci soruda yer alan “15 sayma nesnesi bir kümenin $\frac{5}{6}$’i ise” ifadesinden hareketle $\frac{9}{14}$’un 9 sayma nesnesi ile temsil edildiğini belirtmiştir. $\frac{9}{14}$’un 9 sayma nesnesinden oluşması nedeniyle bir bütünün 14 sayma nesnesinden oluştuğunu ifade etmiştir. $\frac{3}{7}$’ün de 14’de altıya karşılık geldiğini söyleyerek $\frac{3}{7}$ kesrini 14 sayma nesnesi arasından yan yana duran altı tanesini seçerek temsil etmiştir (bk. Şekil 4.19). $\frac{9}{14}$ ve $\frac{3}{7}$ kesirlerini temsil eden kümeleri karşılaştırmış ve nesne sayılarının farklı olmasından yola çıkarak denk kesirler olmadıklarını belirtmiştir. Şekil 4.19’da Cemil’in $\frac{3}{7}$ ve $\frac{9}{14}$ kesirlerinin denk olmadığını küme modeli ile nasıl gösterdiğine yer verilmiştir.



Şekil 4.19. Cemil’in $\frac{3}{7}$ ve $\frac{9}{14}$ kesirlerinin denk olmadığını küme modeli ile temsil etmesi, (AB görüşme formu- 4. Soru)

Hale kesirlerin denkliğini küme modeli yardımı ile incelemek için öncelikle bir bütünün kaç sayma nesnesi ile temsil edilebileceğini belirlemiştir. Bu nesne sayısını belirlemede, her iki kesrin paydasına göre de gruplayabilmek açısından, kesirlerin paydası etkili olmuştur. $\frac{2}{5}$ ve $\frac{6}{15}$ kesirlerinin denk olup olmadığını belirlemek için ilk olarak $\frac{2}{5}$ kesrini küme modeli ile temsil etmek istemiştir. Bu temsilde 15 sayma nesnesini yinelenen beş eş grup şeklinde ifade etmiştir (bk. Şekil 4.20). Her bir grubun üç sayma nesnesinden oluştuğunu bulmuştur ve üçlü grupları bir bütün olarak düşünüp bu üçlü grupların beş kere yinelenmesi sonucu bir küme oluşmuştur. Bu yinelenen gruplar arasından iki grubu seçerek $\frac{2}{5}$ kesrini temsil etmiştir. Bu 15 sayma nesnesini, nesnelerin her biri ayrı bir grup olacak şekilde gruplamak istediğinde 15 eş grup elde edileceğini, tekli gruplama sonucu üçlü iki gruptan tekli altı grup elde edildiğini, bu temsilin de $\frac{6}{15}$'yı gösterdiğini düşünmüştür. Her iki temsilde nesne sayılarının eşit olmasından yola çıkarak da kesirlerin denk olduğunu ifade etmiştir. Şekil 4.20'de Hale'nin $\frac{2}{5}$ ve $\frac{6}{15}$ kesirlerinin denkliğini küme modeli ile temsiline yer verilmiştir.

> *Şu an ben bunları mesela şu üçlü grupları bir bütün olarak düşündüğümde şu an beş parçam var. Şu an ben burayı alıyorum.* $\frac{2}{5}$ *oluyor. Ama her birini ayrı düşündüğümde 15 parçam var. 15'ten de altısını almış oluyorum. Bu şekilde yaptım.* (Hale- AB görüşme formu, 4. Soru)



Şekil 4.20. Hale'nin $\frac{2}{5}$ ve $\frac{6}{15}$ kesirlerinin denkliğini küme modeli ile temsili, (AB görüşme formu- 4. Soru)

4.1.2.3. Öğretmen adaylarının kesirlerin denkliğini uzunluk modeli ile göstermelerine yönelik AB'lerine ilişkin bulgular. Öğretmen adaylarından sadece İlker dördüncü soruda verilen kesirlerin denk olup olmadığını belirlemede uzunluk modelinden faydalanmıştır. Diğer öğretmen adaylarının denk kesirleri göstermede uzunluk modeli kullanımına yönelik bilgileri sadece beşinci soru yardımıyla elde edilmiştir. İlk üç soruda da hiç uzunluk modeli kullanmamış olan Cemil ve İpek'in uzunluk modeline ait bilgileri de yine beşinci soru yardımıyla elde edilebilmiştir.

İlker $\frac{2}{5}$ ve $\frac{6}{15}$ kesirlerinin denkliğini sayı doğrusu kullanarak temsil etmek için önce sayı doğrusu üzerinde $\frac{2}{5}$ kesrini temsil etmek istemiştir. Bunun için sıfır ve bir sayıları arasını beş eş parçaya ayırmış ve $\frac{1}{5}$'lik uzunluğun iki kere yinelenmesi sonucu bu eş parçaların ikinci parçasını seçmiştir. $\frac{6}{15}$ kesrini temsil etmek için de her bir eş aralığı üç eş parçaya daha ayırmıştır. İlker, burada kesirlerin paydalarını dikkate alarak bir parçalama yapmış ve eş aralığın karşılık geldiği birimi pay kadar yineleyerek de kesri temsil etmiştir. Her iki paylaşım sonucunda pay kadarlık yinelemeler sonucu aynı noktaya ulaşılıyorsa bu kesirlerin denk kesirler olduğunu ifade etmiştir.

İlker, beşinci soruda her bir sayı arasındaki aralığın kaç eş parçaya ayrıldığına bakmış ve yedi eş parça olduğunu belirlemiştir. A noktasına ulaşmak için bu yedi eş parçanın yani, $\frac{1}{7}$'lik uzunluğun üç kere yinelendiğini fark etmiştir. A noktası zaten bir ve iki sayıları arasında yer aldığı için kesrin bir tamdan fazla olması gerektiğini bilmektedir. İlker, A noktasının $1\frac{3}{7}$ kesrine denk geldiğini belirlemiştir. Denk kesirler elde etmek için her bir eş aralığı da eş parçalara ayırmak gerektiğini düşünmektedir. Önce aşağıda görüşme alntısında geçtiği şekilde her bir eş aralığı iki eş parçaya daha ayırmış ve 14 eş aralık elde etmiştir. Bu $\frac{1}{14}$'lik uzunluğun kaç kere yinelendiğini hesaplayarak A noktasının $\frac{20}{14}$ kesrine karşılık geldiğini görmüştür. Sonrasında her bir eş aralığı üç, dört ve beş aralığa daha ayırmayı düşünmüştür. Bu eş parçalamalar sonucu elde edeceği denk kesirleri ise işlemsel olarak düşünmüştür. Bu kesirlerin denkliğini belirlerken neye dikkat ettiği sorulduğu zaman büyüklüklerinin zaten aynı olduğunu, ne kadar küçük parçalara ayırsa da büyüklüğün değişmediğini ifade etmiştir.

İlker: *Yani işte parça parça…Kaç tane parça yaparım?*

Araştırmacı: *Kaç tane yaparsın?*

İlker: *Şunu ikişer ikişer bölsek en başta. Şöyle yapabilirim. Bu da denk kesir oluyor. Yani $1\frac{3}{7}$. Burası ise işte ne oluyor, yine aynı şekilde 1…*

İkişer ikişer böldüm…

Araştırmacı: *Yani hangi kesri elde ettin ikişer ikişer böldüğünde?*

İlker: *İkişer ikişer böldüğümde hangi kesri elde ettim? 14'te 1,2,…(sayıyor) o zaman 20'de 14 elde ettim ikişer ikişer yaptığımda.*

Dört tane farklı değil mi?

Araştırmacı: *Evet, dört farklı.*

İlker: *O zaman bu ikişer ikişer yaptığımı da yine… İkişer vazgeçtim, üçer üçer yapabilirim. Ama yazmam gerekiyor. Üçer üçer yapacağım zaman, o zaman demek ki bu ne oluyor? Elde ettiğim kesir ne olacak?* $\frac{30}{21}$ *olacak, yani üçer üçer yaptığım kesir. Dörder dörder yaptığım zaman ise şöyle olacak yani yine aynı şekilde* $\frac{40}{28}$ *olacak. Daha da mesela beşer beşer de yapabilirim. Beşer beşer yaptığımda da işte,* $\frac{50}{35}$.

Araştırmacı: *Peki bunları yaparken neye dikkat ettin? Yani denk kesir olup olmadığını belirlerken neyi dikkate aldın?*

İlker: *Neyi dikkate aldım? Çünkü bu büyüklüğü zaten aynı. Yani sadece ne kadar parçalarsam da yani daha küçük küçük, minik minik parçalar yapabilirim. Ama yine de büyüklük değişmeyecek, hep aynı kalacağı için istediğim bir büyüklük alırım. İstersem burasını (parçalanık kısımları) 10 tane parçalayabilirim mesela. Yani hiç fark etmez, büyüklük değişmez. Sadece parçalama değişeceğine dikkat ederek öyle yaptım yani.* (AB görüşme formu- 5. Soru)

İpek, beşinci soruda A noktasına karşılık gelen kesri bulurken iki sayı arasının kaç eş parçaya ayrıldığına dikkat etmiştir. $\frac{1}{7}$'lik uzunluğun üç kere yinelendiğini fark etmiş, A noktasının bir ve iki sayıları arasında bulunmasından hareketle de A noktasına karşılık gelen kesrin $1\frac{3}{7}$ olduğunu bulmuştur. İpek uzunluk modelinde payda kadar eş parçaya ayırma ve bu eş parçalama sonucu oluşan uzunlukların pay kadar yinelenmesi bilgisini kullanarak A kesrini elde etmiştir (bk. Şekil 4.21). Denk kesirleri bulmak için $1\frac{3}{7}$ kesrini bileşik kesir haline getirmiştir. $\frac{10}{7}$ kesrini iki, üç, dört ve beş ile genişletme sonucu denk kesirler elde etmiştir. Denk kesirleri önce işlemsel bilgi kullanarak bulmuş, ardından bu kesirleri üç farklı sayı doğrusu kullanarak temsil etmiştir. Verilen kesirleri sadece sayı doğrusu üzerinde göstermiş, sayı doğrusundan yola çıkarak denk kesirler elde etmemiştir. Burada İpek'in kesirlerin denkliğini uzunluk modeli ile göstermesine yönelik AB'sinin zayıf olduğu görülmüştür. Şekil 4.21'de İpek'in A kesrine denk kesirleri nasıl temsil ettiğine yer verilmiştir.

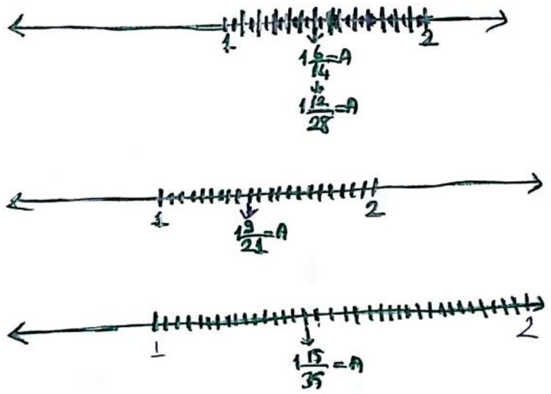
Araştırmacı: *O kesri nasıl buldun?*

İpek: *Eee. Sayı doğrusunda bir birimlik uzaklıkların her ikisinde de kaça bölündüğüne baktım (0-1, 1-2 arası). Çünkü burası farklı bir sayıya bölünseydi (0-1 arası) gerçi bu fark etmezdi. Önce şuraya baktım (1-2 arası). Sonra şurayla da (0-1 arası) kontrol ettim gibi bir şey oldu öyle. Burası bir tamdı zaten. Buradan sonra 1 ile 2'nin arası kaça bölünmüş ona baktım. Yediye bölünmüş. O yüzden de 7'de işte şuralar kaçıncı parçaya denk geliyorsa diye bu yüzden* $1\frac{1}{7}$*,* $1\frac{2}{7}$*,* $1\frac{3}{7}$ *olarak saymaya devam ettim. Bu kesrin* $1\frac{3}{7}$ *olduğunu buldum.*

Buna denk olan kesirleri bulabilmek için bileşik kesre çevirmek benim için daha rahat geliyor. $1\frac{3}{7}$*,* $\frac{10}{7}$*'ye karşılık geliyor. Ben denk kesirleri bulabilmek için genişletme işlemi yapıyorum. O yüzden de* $\frac{10}{7}$*'yi 2 ile genişleticem önce ve* $\frac{20}{14}$ *bulacağım. 3 ile genişletebilirim. Buna denk de başka… 1.kesrimiz bu denk olarak* ($\frac{20}{14}$)*, 2. Kesrimiz 3 ile genişletilmiş hali* $\frac{10}{7} = \frac{30}{21}$ *olsun.*

$\frac{40}{28}$ *de 4 ile genişletilmiş hali olsun. 5 ile genişletilmiş hali de* $\frac{50}{35}$*. Bu da 4. Kesrimiz olsun.*

4 kesri de sayı doğrusu kullanarak göstermek istersem; sayı doğrusuna 1'den başlarım ve 1'den sonra şunları bileşik kesre çevirmem lazım tabi. 14 parçaya ayıracağım ve 6. parçayı işaretleyeceğim (6.Parçayı bulmak için sayıyor). Burası A kesrine denk olan kesir.28 parçaya bölünmüş halini de aralarına tekrar (diyerek 14 eş parçayı eş iki parçaya daha ayırdı, 14'lük kısımları daha büyük, 28'lik kısımları da daha küçük çizgiler ile gösterdi) Denk olmuş oluyor o zaman A'ya. $\frac{30}{21}$*'i göstericem şimdi. Onun için başka bir sayı doğrusu yapalım. Çünkü o artık çok karışık olacak. Yine 1'den itibaren başlayalım. 21 parça elde etmem lazım. Burası 2 olacak ve dokuzuncu parçayı işaretlemem gerekiyor (sayarak 9.parçaya ulaşıyor). Burası* $1\frac{9}{21}$*. 35'e bölmek için de başka bir sayı doğrusu kullanacağım. 1'den başlayalım (sayarak 35 parçaya ayırdı) Burada da 15. parçayı alacağım. (3-6-9-1-2-15 şeklinde 3'erli sayarak ulaştı)* $1\frac{15}{35}$*. Bu da* $1\frac{15}{35}$ *denk kesrine denk gelecek.* (AB görüşme formu, 5. Soru)



Şekil 4.21. İpek'in A kesrine denk kesirleri sayı doğrusu ile temsili, (AB görüşme formu-5. Soru)

Cemil de diğer öğretmen adayları gibi A noktasına karşılık gelen kesri belirlerken aşağıda görüşme alıntısında geçtiği şekilde iki sayı arasının kaç eş parçaya ayrıldığını, yani ne kadarlık uzunluklara ayrıldığını belirlemiştir. $\frac{1}{7}$'lik uzunluğun üç kere yinelendiğini görmüş ve A noktasının bir ve iki sayıları arasında yer almasından hareketle A noktasının $1\frac{3}{7}$ kesrine karşılık geldiğini bulmuştur. Cemil de uzunluk modelinde payda kadar eş parçaya ayırma ve bu eş parçalama sonucu oluşan uzunlukların yinelenmesi bilgisini kullanmaktadır.

Cemil: *Üç, altı, yedi oluyor (bir ve iki sayıları arasının kaç eş parçaya ayrıldığını saydı). A kesri eşittir 1 tam yedide üç (A=* $1\frac{3}{7}$*).*

Araştırmacı: *Bunu nasıl belirledin?*

Cemil: *Yani bu eşit aralıklarla olan çizgiler olduğu için sayı doğrusunda bir tam zaten burada var. Sadece burayı düşündüm. Burada da soldan sağa doğru gideceğimiz için yediye ayrılmış ve üçünü geçmiş. Bir tam burada vardı, burada da üç. Yediye ayrılmıştı.* $1\frac{3}{7}$ *oluyor. Yani bu da* $\frac{10}{7}$ *oluyor.* (AB görüşme formu-5. Soru)

Cemil, denk kesirlerin aynı yerde olduğunu belirtmiştir. A noktasının üzerine B, C, D ve E noktalarını eklemiştir. Bu noktaların karşılık geldiği kesirleri ayrı ayrı belirtmiştir. Bu kesirleri bulurken sadece genişletme işlemi uygulamıştır. İşlemsel olarak denk kesirleri bulmuştur. Bulduğu kesirlerin sayı doğrusunda A noktası ile aynı yerde olduğunu, çünkü aynı çokluğu ifade ettiklerini belirtmiştir. Bu denk kesirleri sayı doğrusunda nasıl gösterebileceği sorulduğu zaman oranları değiştirmesi gerektiğini yedi parçaya ayrılmış olan aralıkları yine bölmesi gerektiğini söylemiştir.

Cemil: *Denkler zaten aynı yerdedir de…*
Araştırmacı: *Bunları nasıl belirledin?*
Cemil: *A kesrini baz alarak katlarını, yani az önce de dedik pay ve paydanın eşit katları olması lazım kesirlerin denk olması için. Ona bakarak belirledik. Bu B kesri 2 katı, 2 ile çarpmış gibi pay ve paydayı. Bunu dörtle (C), bunu sekizle (D) bunu da (E) üç ile çarpmış gibi düşündüm. Ama sayı doğrusunda hepsi A kesrinin bulunduğu yerde bulunacaktır. Çünkü aynı çokluğu ifade ederler.*
Araştırmacı: *Diyelim ki B'yi göstermek istedin sayı doğrusu üzerinde. Nasıl gösterirdin?*
Cemil: *Yani oranları değiştirmem gerekiyor. Tek tek paydaların çizgilerini mi yapalım?*
Araştırmacı: *Nasıl yapabilirsin? Buradan anlatabilirsin (soruda verilen sayı doğrusu üzerinden).*
Cemil: *Ee tamam. İkiye böleriz direk. Her bir boşluğu ikiye bölünce, her bir alanı ikiye bölünce o zaman bir tam, yedi paydasını değil de 14 paydasını elde etmiş oluruz. Şöyle; sayalım. 1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,13,14. Paydası 14. B de 14 burada vardı. Altı da burada var. 14, altı daha 20. Yani* $\frac{20}{14}$ *oluyor.* (AB görüşme formu- 5. Soru*)*

Hale, beşinci soruda A noktasına karşılık gelen kesri belirlemek için aralığın kaç eş parçaya ayrıldığını ve A noktasının kaç kere yineleme sonucu oluştuğunu belirlemiştir. A noktasının her bir eş aralığın üç kere yinelenmesi sonucu oluştuğunu görmüştür. Hale, $1\frac{3}{7}$

kesrine denk kesirler elde etmek için her bir eş aralığı iki eş parçaya daha ayırarak 14 eş parça, yani $\frac{1}{14}$'lik uzunluklar elde etmiştir. Bu $\frac{1}{14}$'lik uzunluğun kaç kere uç uca eklendiğini sayarak $\frac{20}{14}$ denk kesrini elde etmiştir.

Hale, ikinci bir denk kesir elde etmek için $\frac{1}{14}$'lik uzunlukları da iki eş parçaya ayırarak $\frac{1}{28}$'lik uzunluklar elde etmiştir. A noktasına kadar bu $\frac{1}{28}$'lik uzunluğun kaç kere yinelendiğini sayarak $\frac{40}{28}$ denk kesrini elde etmiştir. Farklı denk kesirler elde etmek için de aynı işlemi uygulayabileceğini ifade etmiştir. Hale, böldüğü aralıkları aşağıda görüşme alıntısında geçtiği şekilde hep iki eş aralığa daha parçalamayı düşünmektedir. 28 eş aralığı iki eş aralığa daha bölerek 56 parça elde edebileceğini böylece de üçüncü denk kesir olarak $\frac{80}{56}$ kesrini bulabileceğini ifade etmiştir. Neden her böldüğü aralığı ikiye bölerek devam ettiği sorulduğunda eşit olsun diye herhalde cevabını vermiştir. Her aralığı üçe böldüğü zaman da yine üçe bölerek devam etmek gibi bir düşünceye sahiptir. Fakat aralıklarda farklı parçalamalar yapsa da denk kesirler elde edebileceğini bilmektedir.

Araştırmacı:	*Neden hep böyle her böldüğün aralığı ikiye bölerek devam ediyorsun?*
Hale:	*Bilmiyorum ki ya eşit olsun diye herhalde.*
Araştırmacı:	*Tamam aralıkları eşit yapacaksın ama neden hep ikinin katlarına bölüyorsun?*
Hale:	*Bilmiyorum şu an. Neden üçer üçer bölmedim? Sebepsiz.*
Araştırmacı:	*Yani orda denk kesir elde etmeye çalışırken senin için ikiye bölmek sonucunda mı sadece denk kesir elde ediliyor?*
Hale:	*Hayır tabi ki de. Üç parçaya da bölebilirdim. Bilmiyorum yani, eşit olsun diye yaptım ama niye öyle yaptım… Ya direk aklıma o geldi. Ama tabi ikiye bölerek de yapamam, yani sadece onla.*
Araştırmacı:	*Mesela üçe bölsen ne olurdu o aralığı?*
Hale:	*Olurdu, bir şey olmazdı. Ben ama yapmamışım. Ama o zaman daha böyle git gide daha zor değil mi yani? Sonuçta üçe bölmek, ikiye bölmek yani. İkiye bölmek daha şey değil mi?*
Araştırmacı:	*Sen nasıl düşünüyorsun şimdi? Yani üçe böleceksin ya o üçe böldüğün aralığı daha sonra tekrar mı üçe bölmeyi düşünüyorsun sürekli olarak? Yani hep bir böldüğün şeye mi devamında bir daha bölmeyi düşünüyorsun?*

Hale: *Yani ama sonuçta dört kesir bulmayacak mıydım? Ama öyle olunca yani öyle olacak.*

….

Araştırmacı: *Yani denk kesir ne? Bu kesre denk kesirleri nasıl elde edebilirsin?*

Hale: *Yani aynı bütünü, aynı parçayı göstermesi gerekiyor.*

Araştırmacı: *Tamam. Üçe bölsen ne olurdu mesela bu aralıkları, ikiye değil de?*

Hale: *Olurdu. Ama bu sefer daha ilerisini bulacağım ya o zaman teker teker bir daha üçe bölecektim.*

Araştırmacı: *İşte onu demek istedim ben de. Sen hep bir böldüğün şeyi hep ona mı bölmen gerektiğini düşünüyorsun?*

Hale: *Yani ben şu an öyle yaptım.*

Araştırmacı: *Bu kesre ($\frac{10}{7}$) denk kesirler hangileri onu düşün bi.*

Hale: *Mesela $\frac{30}{21}$ diyelim.*

Araştırmacı: *Peki bu ($\frac{20}{14}$), bu da denk di mi?*

Hale: *Evet.*

Araştırmacı: *Bu? Bu da denk. Burada kaça böldün? Dörde. Orda üçe böldün.*

Hale: *Evet.*

Araştırmacı: *Yani denk kesir değil mi? Bu da denk buna. Onu demek istedim. Hep aynısına mı bölmen gerekiyor? Sen hep şey düşünüyorsun değil mi? İkiye bölüyorsun, sonra dört kesir dediği için sen o böldüğün ikiyi bir daha ikiye bölüyorsun.*

Hale: *Evet hep öyle yaptım.*

Araştırmacı: *Burada öyle yaptın değil mi? Ama ikiye bölsen de bir kesri bulsan, sonra üçe bölsen de aynı aralığı, bulsan olmaz mıydı? Sonra dörde bölsen, ya da mesela beşe bölsen aynı aralığı, bulsan. O da denk kesir olmaz mıydı?*

Hale: *Olurdu. Ama beşe bölmek daha da küçülmeyecek mi yani?*

Araştırmacı: *Evet küçülecek.*

Hale: *Ben işte o aralıklardan dolayı hani o şekilde düşündüm. İkiye bölmek daha kolay.*

Araştırmacı: *Evet. Daha kolay tabi. Ama sana her böldüğün aralığı ikiye bölmek kolay geliyor.*

Hale: *Hıhı.* (AB görüşme formu-5. Soru)

4.1.3. Öğretmen Adaylarının Kesirlerle Çarpma İşleminde Model Kullanımına Yönelik AB'lerine İlişkin Bulgular ve Yorum

Öğretmen adaylarının kesirlerle çarpma işleminde model kullanıma yönelik AB'leri AB görüşme formunda yer alan şu sorular kullanılarak analiz edilmiştir:

AB görüşme formu 6. Soru:

a. $\frac{1}{5} \times 1\frac{1}{4}$

b. $\frac{2}{3} \times \frac{4}{5}$

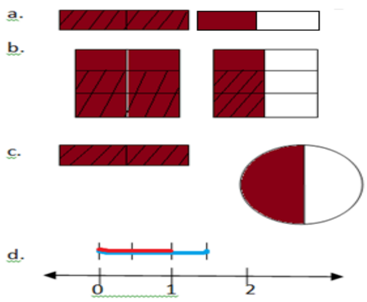
c. $\frac{2}{5} \times 10$

işlemlerinin çözümü nasıl yapılabilir? Açıklayınız.

b. şıkkında verilen işlemden yararlanarak kesirlerle çarpma algoritmasının geliştirilmesi için nasıl bir modelden yararlanabileceğinizi açıklayınız.

AB görüşme formu 7. Soru:

$1\frac{1}{2} \times \frac{2}{3} = 1$ olduğunu göstermede aşağıdaki modellerden hangisi/hangileri kullanılamaz?



Öğretmen adaylarının her birinin kesirlerle çarpma işleminde kullandıkları alan, küme ve uzunluk modelleri ayrı ayrı analiz edilmiştir. Öğretmen adaylarının ifadelerinden kesitler verilerek modeli kullanırken neye dikkat ettiklerinin daha net bir şekilde ortaya konması amaçlanmıştır. Tablo 4.4'te öğretmen adaylarının kesirlerle çarpma işleminde model kullanımına yönelik AB'leri yer almıştır. Ardından her bir modele ilişkin AB'leri ayrıntılı olarak ele alınmıştır.

Tablo 4.4
Öğretmen Adaylarının Kesirlerle Çarpma İşlemini Model ile Göstermelerine Yönelik AB'leri

Kategoriler	Kodlar	Öğretmen Adayı
Alan modeli	Kesrin paydasının eş parçaların tamamı olduğunu bilme, kesrin payının eş parçalardan alınacak kısmın olduğunu bilme, seçilen parçanın yeni bütün olduğunu bilme, ikinci kesrin paydası kadar eş parçalara ayırma ve payı kadar alma, sonucu yorumlarken baştaki bütünü dikkate alma	İlker, İpek, Cemil, Hale
	Doğal sayı ile kesrin çarpımında kesri temsil etme ve eş parçalar olmasından hareketle parçaları bir araya getirerek bütüne tamamlamaya çalışma	İlker, İpek, Cemil
Küme modeli	Payda kadar grup oluşturma ve pay kadarını alma/seçme, seçilen parçanın yeni bütün olduğunu bilme, tekrar oluşturduğu gruplar içinde 2. kesri oluşturabilecek şekilde nesne seçme, elde edilen nesne sayısının toplam nesne sayısına oranını çarpma işleminin sonucu olarak ifade etme	İlker, İpek, Cemil
	Doğal sayı ile kesrin çarpımında doğal sayı kadar nesneyi kesrin paydası kadar eş gruba ayırma ve pay kadar grubu seçme	İpek, Hale
Uzunluk modeli	Doğal sayı ile kesrin çarpımında; sayı doğrusu üzerinde iki sayı arasını kesrin paydası kadar eş aralığa ayırma, kesrin payı kadar uzunluğu doğal sayı adedince yineleme	İlker, Cemil
	Kesrin paydası kadar eş parçalama yapma, elde edilen uzunlukları pay kadar yineleme, elde edilen parçaları yeni bütün olarak alıp ikinci kesrin paydası kadar uzunluk içerisinden pay kadar uzunluğu seçme, sonucu ilk bütüne göre yorumlama	İlker, İpek, Cemil, Hale

Öğretmen adayları verilen işlemleri öncelikle çarpma algoritması kullanarak yapmışlardır. Kendilerinden model kullanmaları istendiği zaman ise öncelikle alan modeli kullanarak göstermeyi tercih etmişlerdir. Yine tüm öğretmen adayları kesirlerle çarpma işlemini küme modeli ile temsil etmeye çalışmışlardır. Fakat sadece İlker ve Cemil uzunluk modeli kullanarak bir temsil gerçekleştirmeyi düşünmüştür.

İlker altıncı soruda yer alan işlemleri nasıl yapacağı sorulduğu zaman "çarparım tabi ki" cevabını vermiştir. Yani ilk olarak algoritma kullanmayı tercih etmiştir. Çarpma işleminin normalde tekrarlı toplama olduğunu ifade etmiştir. $\frac{1}{5}\times 1\frac{1}{4}$ işlemini "$\frac{1}{5}$'in $1\frac{1}{4}$'i kaçtır?", $\frac{2}{3}\times\frac{4}{5}$ işlemini "$\frac{2}{3}$'nin $\frac{4}{5}$'ü kaçtır demek istiyor", $\frac{2}{5}\times 10$ işlemini de "10 tane $\frac{2}{5}$ demek istiyor burda" şeklinde belirtmiştir. İlker, iki kesrin çarpma işlemini "parçanın parçası" şeklinde yorumlarken, bir doğal sayı ile kesrin çarpımını da “kesri doğal sayı adedince toplama/tekrarlı toplama” şeklinde ifade etmiştir.

İpek altıncı soruda yer alan kesirlerle çarpma işlemlerinin çözümlerini öncelikle algoritma kullanarak gerçekleştirmiş ve aşağıda görüşme alıntısında geçtiği şekilde işlemlerin ne ifade ettiği sorulduğu zaman iki kesrin çarpımını “parçanın parçası” olarak yorumlamıştır. Verilen iki kesirden büyük olandan yola çıkarak büyük kesrin belli bir miktarının (küçük kesri kadarının) alınması şeklinde ifade etmeyi tercih ettiğini belirtmiştir. Öğrencilere anlatacağı zaman da yine büyük kesirden başlayarak hareket edeceğini söylemiştir.

Araştırmacı: *Bu işlemler ne ifade ediyor senin için?*

İpek: *Yani, ne ifade ediyor? $\frac{1}{5}$’in $\frac{5}{4}$’i olabilir ya da 1$\frac{1}{4}$, bir bütün ve bir çeyreğin $\frac{1}{5}$’inin alınması hani yorumlayacak olursam. Ya da şurda (b şıkkı için) $\frac{4}{5}$’ün $\frac{2}{3}$’si. Yani şöyle biz $\frac{1}{5}$’e. Pardon biz şurdan başlayalım. Eee buna 5’te 4 evet.*

Araştırmacı: *Neden oradan başlıyorsun? ($\frac{4}{5}$’ün $\frac{2}{3}$’si olması)*

İpek: *Çünkü ilk etapta şunu düşünmek daha kolay geliyor; hani bütünsel olan, büyük olan bir şeyin küçük parçasını almak. Kesirlere bu şekilde alıştığımız için oradan başlamak bana daha kolaymış gibi geliyor anlatmaya. Hani diğerini kurgulamak için bir katı olarak düşünmem gerekiyor. Hani o ayrı bir şey olmuş oluyor. Anlatacak olsam büyük olandan başlarım yani öğrencilere.* (AB görüşme formu- 6. Soru)

Cemil, kesirlerle çarpma işlemlerini ilk başta çarpma algoritması kullanarak gerçekleştirmiştir. Cemil’e $\frac{1}{5}\times1\frac{1}{4}$ işleminin ne ifade ettiği sorulunca, “basit kesir ile bileşik kesrin çarpımı cevabını vermiştir Ardından $\frac{1}{5}\times1\frac{1}{4}$ işleminin $\frac{5}{4}$’ün $\frac{1}{5}$’ini ifade ettiğini belirtmiştir. Cemil de tıpkı İpek ve İlker gibi kesirlerle çarpma işlemini ifade ederken “parçanın parçası” yorumunu kullanmıştır. Bir kesir ile doğal sayının çarpımını ise “doğal sayının bir miktarının alınması, kesrin doğal sayı kadar katı ve tekrarlı toplama” şeklinde ifade etmiştir.

Hale, diğer üç öğretmen adayının da yaptığı gibi kesirlerle çarpma işlemlerini çarpma algoritması kullanarak gerçekleştirmiştir. Doğal sayı ile kesrin çarpımını tekrarlı toplama şeklinde ifade etmiştir. Hale iki kesrin çarpma işlemini yaparken "parçanın parçası" yorumunu kullanmıştır.

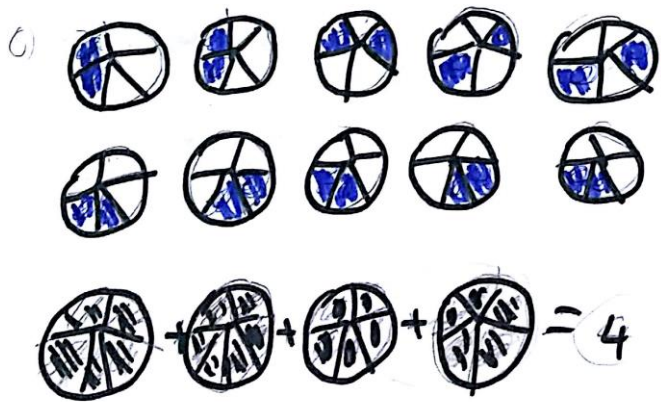
4.1.3.1. Öğretmen adaylarının kesirlerde çarpma işleminde alan modeli kullanmalarına yönelik AB'lerine ilişkin bulgular. Öğretmen adaylarının kesirlerle çarpma işleminde alan modeli kullanımına yönelik bilgilerini incelemede altıncı sorudaki işlemleri temsil etmek için oluşturdukları modeller ve yedinci sorunun ilk üç şıkkında bulunan alan modeli ile oluşturulmuş temsiller kullanılmıştır. İki kesrin çarpımı için oluşturdukları modeller tüm öğretmen adaylarının kesrin paydasının eş parçaların tamamı olduğunu bilme, kesrin payının eş parçalardan alınacak kısmın olduğunu bilme, seçilen parçanın yeni bütün olduğunu bilme, ikinci kesrin paydası kadar eş parçalara ayırma (ya da ilk kesrin payı kadar parçanın seçimi sonucu ikinci kesrin paydası kadar eş parça oluşmuşsa yeni bir parçalama yapmadan) ve payı kadar alma, sonucu yorumlarken baştaki bütünü dikkate alma bilgisine sahip olduklarını göstermiştir. Aynı zamanda İlker, İpek ve Cemil doğal sayı ile kesrin çarpımında, doğal sayı kadar eş bütün alma, her bir bütünde kesri temsil etme ve eş parçalar olmasından hareketle parçaları bir araya getirerek bütüne tamamlamaya çalışma bilgisi ile modeller oluşturmuşlardır.

$\frac{2}{3} \times \frac{4}{5}$ işlemini alan modeli ile temsil ederken İlker öncelikle bir bütünü üç eş parçaya ayırmış ve bu eş parçalardan iki tanesini seçmiştir. Yani İlker aşağıda görüşme alıntısında geçtiği şekilde ilk olarak $\frac{2}{3}$ kesrini temsil etmeyi tercih etmiştir. Artık $\frac{2}{3}$'lik kısmı bütün olarak alarak bunun üzerinden $\frac{4}{5}$ kesrini göstermiştir. Bu gösterimde modeli yatay olarak beş eş parçaya ayırmış ve dört eş parçasını da seçmiştir. Toplamda 8 kesişen taralı eş parça elde eden İlker, bu taralı parçaların toplam parça sayısı içindeki durumunu göz önüne alarak (yani ilk bütüne göre yorumlayarak) çarpma işleminin sonucunu alan modeli yardımı ile bulmuştur.

> $\frac{2}{3}$ *böyle mesela. Bununla çarpma nasıl gösterilir? Yani bu, bunun zaten soruda* $\frac{2}{3}$*'nin* $\frac{4}{5}$*'ü kaçtır demek istiyor soruda. Demek ki bunu bir şekilde şöyle yapabilirim, şöyle yapabilirim; (yatay olarak 5 eş parçaya ayırdı)*
>
> $\frac{4}{5}$*'ü istiyor di mi burada?* $\frac{4}{5}$ *ne demek burada? Yaniii, şöyle yaparım. Yani bize bunun bütün olarak alacak olursak 15 tane oluyor (saydı parçaları). Bir de kaç tane aldık biz burada, 8 tane. Yani* $\frac{8}{15}$*.* (İlker- AB görüşme formu, 6. Soru)

İlker $\frac{2}{5}\times 10$ işlemini alan modeli kullanarak temsil etmede dairelerden faydalanmıştır (bk. Şekil 4.22). Sonucun dört çıkacağını bildiği için başlangıçta sadece dört tane daire çizmiştir. Sonucun nasıl dört olduğunu göstermesinin gerektiği söylenince 10 daire çizmeye karar vermiştir. Bu dairelerin her birini beş eş parçaya ayırmış ve bu eş parçalardan iki tanesini seçmiştir. İlker, bu işlemin sonucunu bulmada tekrarlı toplamadan faydalanmıştır. 10 daireyi de aynı bütünler olarak ele almıştır ve bu dairelerdeki parçaların eş parçalar olduğunu bilmektedir. Bu nedenle de dairelerde yer alan $\frac{2}{5}$'lik kısımları bir araya getirerek sonucu bulmuştur. Şekil 4.22'de İlker'in $\frac{2}{5}\times 10$ işlemini alan modeli ile temsiline yer verilmiştir.

İlker:	*Hepsi beş parça olacak. Böyle eşit olduğunu düşünelim. Diğerleri de aynı şekilde. Hepsinin* $\frac{2}{5}$*'si.*
Araştırmacı:	*Tamam 10 tane çizdin* $\frac{2}{5}$*. Peki bunun sonucunu nasıl buldun?*
İlker:	*10 tane* $\frac{2}{5}$*'yi topluyorum. Diyorum ki şöyle olacak;(alta bir daire daha çizdi) İşte ikisini aldım buradan (ilk model), bu ikisini alıp buraya koydum (ikinci modelden), işte buradan bir tane aldım (üçüncü modelden). Tekrar bir boşluk çizeyim (boş bir daire çizmeyi kastediyor). Bir tanesini aldım yerleştirdim burada (üçüncü modeldeki kalan diğer taralı kısım). Diğer ikisini aldım (dördüncü modelden) yerleştiriyorum, bunun ikisini aldım (beşinci modelden) yerleştiriyorum. Bir tane daha boşluk yapayım. İkisini aldım (altıncı modelden), ikisini aldım (yedinci modelden), bir aldım (sekizinci modelden). (Yeni bir daire çizdi) birini alıyorum (sekizinci modelden), ikisini alıyorum (dokuzuncu modelden), burasının da ikisini aldığımda (onuncu modelden) bunların toplamı dört tam oluyor demek ki.* (AB görüşme formu- 6. Soru)



Şekil 4.22. İlker'in $\frac{2}{5} \times 10$ işlemini alan modeli ile temsili, (AB görüşme formu- 6. Soru)

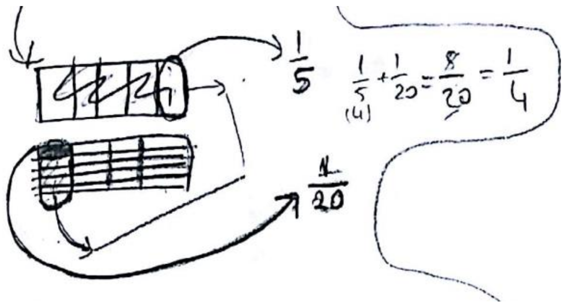
Altıncı soruda öğretmen adaylarından verilen işlemler için modeller oluşturmaları istenirken, yedinci soruda ise verilen modelleri yorumlamaları istenmiştir. İlker $1\frac{1}{2} \times \frac{2}{3} = 1$ işlemi için alan modeli kullanılarak gösterilen a ve b şıklarının uygun olduğunu ifade etmiştir. c şıkkında eş parçalara sahip olmamalarından dolayı iki ayrı model olduğunu, bu nedenle de c şıkkında yer alan modelin verilen işlem için uygun bir temsil olmadığını belirtmiştir. İlker modelleri yorumlarken payda kadar eş parçadan pay kadarlık parçanın seçilmesini, bunun artık yeni bütün olarak alınıp ikinci kesrin paydası kadar eş parça arasından yine pay kadar eş parçanın seçilmesi ve bu eş parçaların baştaki bütün içindeki konumunu dikkate almıştır.

İpek, $\frac{1}{5} \times 1\frac{1}{4}$ işlemini alan modeli ile göstereceği zaman, öncelikle $1\frac{1}{4}$'i temsil etmeyi tercih etmiştir. Bu temsilde bir tam ve bir de bir tamın $\frac{1}{4}$'ini göstermiştir (bk. Şekil 4.23). Bu temsilde payda kadar eş kadar parçalama yapma ve pay kadarını seçme fikrini kullanmıştır. $1\frac{1}{4}$'i temsil ettikten sonra, her iki modelin ayrı ayrı $\frac{1}{5}$'ini almış ve bulduğu sonuçları toplamıştır. Burada artık $1\frac{1}{4}$'i yeni bütün olarak alarak, her bir modelde ayırdığı beş parça üzerinden bir parçasını almıştır. Sonucu yorumlarken son olarak elde ettiği kısımların baştaki bütüne göre konumunu dikkate almıştır. Şekil 4.23'te İpek'in $\frac{1}{5} \times 1\frac{1}{4}$ işlemini alan modeli ile temsili yer almıştır.

İpek: *Yani modelleyecek olursam, yani $\frac{5}{4}$'ü modelleyecek olursam; bir tam ve $\frac{1}{4}$ olacak. Tüm bunların $\frac{1}{5}$'ini almak daha kolay olacak. Şu parçanın $\frac{1}{5}$'ini alıp, şu parçanın da $\frac{1}{5}$'ini alırsam, bu ikisini bir araya getirirsem…*

Araştırmacı: *Nasıl alırsın onları?*

İpek: *5 eşit parçaya bölerim ve bir parçasını alırım. Şu bir bütünün $\frac{1}{5}$'i olur zaten. Bu da zaten $\frac{1}{4}$ idi. Bu parçanın $\frac{1}{5}$'ini almak için tekrar beşe bölmem lazım. Şu şekilde böldüğümü farz ediyorum (yatay olarak 5 parça). Bunun içinden de bir parçasını almış olacağım bu şekilde. Şöyle $\frac{1}{4}$ parçanın $\frac{1}{5}$'i. Zaten bütünü dört eş parçaya ayırmıştık. O da $\frac{1}{4}$ parçayı beşe ayırdığım için diğerlerini de beşe ayırmam lazımdı bütün hakkında yorum yapabilmem için. Toplamda 20 parçaya ayrılmış oldu ve bu 20 parçanın içinde şu aldığım $\frac{1}{4}$'in $\frac{1}{5}$'i bir parça. 20'de 1 parça yapıyor. $\frac{1}{5}$ ile $\frac{1}{20}$'yi topladığım zaman $\frac{5}{20}$ yapıyor. Onu da sadeleştirirsem $\frac{1}{4}$ yapıyor.* (AB görüşme formu- 6. Soru)



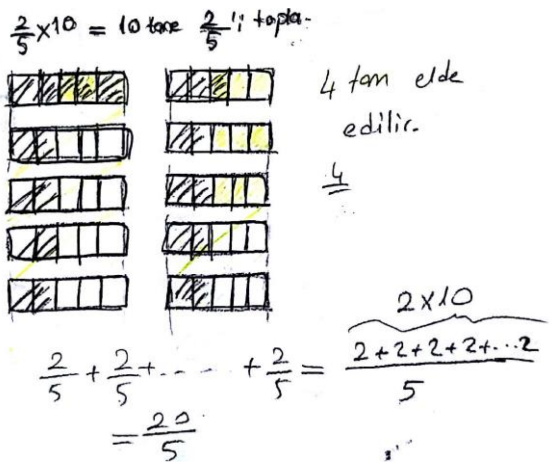
Şekil 4.23. İpek'in $\frac{1}{5} \times 1\frac{1}{4}$ işlemini alan modeli ile temsili, (AB görüşme formu- 6. Soru)

Benzer şekilde İpek, $\frac{2}{3} \times \frac{4}{5}$ işlemini alan modeli ile temsil ederken bir bütün almış, bu bütünü üç eş parçaya ayırmış ve iki eş parçasını almıştır. Ardından aşağıdaki görüşme alıntısında yer aldığı şekilde bu taralı kısımları yeni bütün olarak alıp, oluşturduğu modeli dikey olarak da beş eş parçaya ayırmış ve dört eş parçasını taramıştır. Kesişen taralı kısımların tüm parçalar içindeki oranının da çarpma işleminin sonucunu verdiğini ifade etmiştir.

> *$\frac{2}{3}$'lik parçanın $\frac{4}{5}$'ü alınacak. Bunları düşündüğümüzde artık benim bütünüm bu olacak. Bunun $\frac{4}{5}$'ünü hesaplamam gerekiyor. O yüzden bütünümü artık böyle bölerim (dikey olarak) ve bunun $\frac{4}{5}$'ünü bulabilmek için bunu beşe bölmem gerekiyor. Ama en baştaki bütün hakkında yine konuşabilmek için de yine geriye kalan parçaların da bunların bölündüğü gibi beşe bölünmesi gerekiyor. Böylelikle bütünüm 15 parçaya bölünmüş oluyor. Önce şunu beşe böldüm, içinden dördünü almam lazım. En sonda elde ettiğim kısım şuralar. Yine bir bütüne oranını bulmak istiyorsam da 8 parça elde etmiş oluyorum. Son durumda 8 parçanın tamamına oranı da $\frac{8}{15}$ oluyor.* (İpek- AB görüşme formu, 6. Soru)

İpek, doğal sayı ile kesrin çarpımını “tekrarlı toplama” olarak ya da “doğal sayının belirli bir miktarının alınması” olarak yorumlamaktadır. $\frac{2}{5}\times 10$ işlemini yaparken 10 tane bütün almış ve her bütünün $\frac{2}{5}$’sini temsil etmek için bütünleri beş eş parçaya ayırmış ve bu eş parçalardan iki tanesini almıştır. Bütünlerin aynı olmasından yola çıkarak her bütündeki eş parçaları bir araya getirerek bu eş parçaların ne kadar yaptığını hesaplamıştır. Şekil 4.24’te İpek’in $\frac{2}{5}\times 10$ işlemini alan modeli ile temsili yer almıştır.

> *$\frac{2}{5}\times$10= çarpmanın anlamından 10 tane $\frac{2}{5}$’i toplamak gibi düşünürsem…Aynı bütün olduklarını belirtmek için böyle yaptım (ilk modelin kenarlarından aşağıya doğru nokta nokta iniyor)*
>
> *Bunlarla kaç bütün elde edebileceğimi bu parçayı yani şu parçaların diğerlerinin boşluklarını doldurmaya çalışması gibi bir yöntem izleyebiliriz. Bu ikisi şuraya gelsin gibi düşünüp bunu yok sayabiliriz. Bu ikisinden bir tanesi burayı doldursa bir tanesini buraya aktarsak bu da gitti mesela. Bu ikisini buraya aktardık. Şunları şunları bitirdik, şuradan devam edelim (1. ve 2. Model tarandı, şuradan devam edelim dediği dördüncü model). İkisini buraya aktardık, bunlar gitti. Şunun biri buraya gitti, biri buraya gitti, bu gitti. Geriye iki parça kaldı (en alttaki model üzerinde 2 taralı kısım kaldı). Bunları da buraya aktardığımda 4 tam elde edilir. Sonuç dörttür.* (İpek- AB görüşme formu, 6. Soru)



Şekil 4.24. İpek’in $\frac{2}{5}\times 10$ işlemini alan modeli ile temsili, (AB görüşme formu- 6. Soru)

İpek, yedinci sorunun a ve b şıklarının $1\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}=1$ işlemini göstermeye uygun olduğunu, c şıkkında ise parçaların eş parçalar olmamasından dolayı böyle bir temsilden söz edilemeyeceğini ifade etmiştir. Aşağıdaki görüşme alıntısındaki İpek’in ifadeleri eş parça fikrine sahip olduğunu göstermektedir.

> *Kullanılabilir. Çünkü $1\frac{1}{2}$, $\frac{3}{2}$ yapıyor. Bu şekilde iki tane tam. Biri tam karalanmış, diğeri yarım karalanmış olmalı ve üç parçalık bir durum içinden yorum yapmamız, yani şu parçanın şu kadarlık*

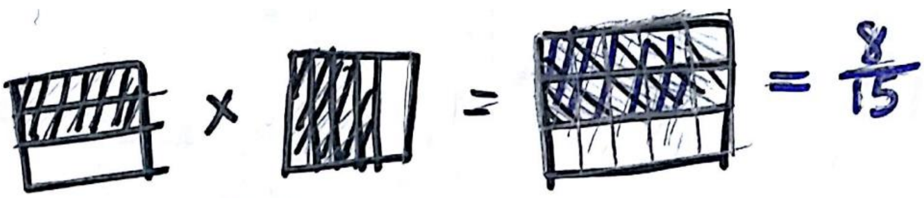
kısmını soruyor bize. Bu parça artık bizim bütünümüz oluyor. Üç parçalık bir bütünümüz var, üç eş parçalık. Onun ikisini istiyor bizden. Doğrudur yani.

(b şıkkı için) $1\frac{1}{2}$ *yine doğru. Yine şu üç parçalık bütün üzerinden yorum yapmak istersek üçe bölünmüş her parça ve her parçanın ikilik kısmı alınmış. Bu da doğru olur.*

(c şıkkı için) Bu doğru olmaz. Çünkü buradaki parçaların her biri eşit parçalardı. Ve şu (paydadaki 3) üç eş parçayı ifade ediyor. Eş olduğuna emin olduğum bu parçalar arasından ben ikiyi seçebiliyorum. Ama burada, tamam başlangıç için bir tam ve bir bütünün yarısını $\frac{3}{2}$*'yi elde etmişim. Payda eş parçayı gösteriyor sonuçta. Bu eş parçalar arasından şunu seçmem lazım. O yüzden bu gösterim olmaz, yanlış.* (İpek- AB görüşme formu, 7. Soru)

Cemil, kesirlerle çarpma işleminin öğretiminde saydam kesir kartlarının kullanımına aşina olduğu için, $\frac{2}{3}\times\frac{4}{5}$ işlemini gerçekleştirirken $\frac{2}{3}$ ve $\frac{4}{5}$ kesirlerini alan modeli kullanarak saydam kesir kartları üzerinde temsil ettiğini düşünmüştür. Ve bu iki kesir kartının üst üste geldiği taralı kısımları belirleyip, bu taralı kısımların iki saydam kesir kartının üst üste gelmesi sonucu oluşan toplam parça sayısına oranının çarpma işleminin sonucunu verdiğini ifade etmiştir. Saydam kesir kartlarında $\frac{2}{3}$ ve $\frac{4}{5}$ kesirlerini temsil etmede "payda kadar eş parçalama yapma ve pay kadarlık kısmını seçme" bilgisini kullanmıştır. Cemil, İpek ve İlker'in belirttiği gibi bir kesri model ile temsil ettikten sonra onun belirli bir miktarını almak için artık o kesri yeni bütün olarak aldığını ifade etmemiştir. Şekil 4.25'te Cemil'in $\frac{2}{3}\times\frac{4}{5}$ işlemini temsili yer almıştır.

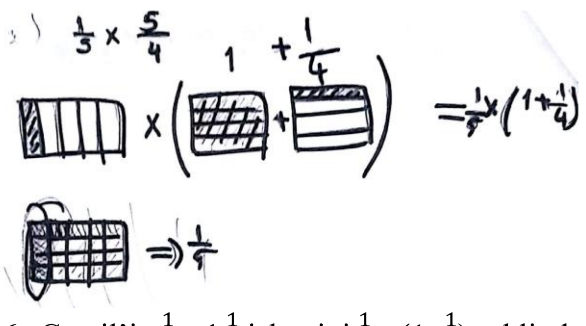
$\frac{2}{3}$*'ü şöyle yapalım. Diğerini de şöyle yapalım.* $\frac{2}{3}\times\frac{4}{5}$*. Şimdi bunu bunun üzerine koyacağız. Şu an paydamız 15 oldu burada. Bu 4'ünü kullandık (çarpım için oluşturduğu modelde 5x3'lük bir dikdörtgen oluşturdu. Bunun 4 sütununu kastediyor). Şöyle de ikisini kullanmış olalım (yatay olarak ilk iki satır). Kesiştiği yerler bizim için çarpmamızın sonucunu, değerini ifade ediyor, çarpma işleminin sonucunu. Şurası yani; 8 tane (taralı kısımlar). Toplam 15'di. O zaman* $\frac{8}{15}$ *oluyor.* (Cemil- AB görüşme formu, 6. Soru)



Şekil 4.25. Cemil'in $\frac{2}{3}\times\frac{4}{5}$ işlemini saydam kesir kartları kullanıyor gibi alan modeli ile temsili, (AB görüşme formu- 6. Soru)

Cemil $\frac{1}{5}\times1\frac{1}{4}$ işlemini model ile temsil ederken yine saydam kesir kartları kullanıyormuş gibi hareket etmiştir. $\frac{1}{5}\times1\frac{1}{4}$ işlemini $\frac{1}{5}\times(1+\frac{1}{4})$ şeklinde ele almış ve bu şekilde temsil etmiştir. Fakat çarpım sonucunu bulurken sanki üç kesrin çarpma işlemini yapıyormuş gibi hareket etmiştir. Üç modeldeki taralı kısımları ifade ederek hepsinin üst üste geldiği kısımları çarpma işleminin sonucu olarak yorumlamak istemiştir. Yaptığı işlem ile model ile oluşturduğu temsil sonucu aynı sonucun çıkmadığını fark edinde de bir kere kesişimin yeterli olduğunu belirtmiştir. Sonrasında bunu uydurduğunu söylemiş, yanlış düşündüğünün farkına varmıştır. Cemil'in $\frac{1}{5}\times1\frac{1}{4}$ işlemini model ile temsil etmeye yönelik oluşturduğu yanlış temsil Şekil 4.26 ile gösterilmiştir. Sonrasında Cemil $\frac{1}{5}\times1\frac{1}{4}$ işlemini $(\frac{1}{5}\times1)+(\frac{1}{5}\times\frac{1}{4})$ şeklinde ifade etmiş ve Şekil 4.27'de görüldüğü şekilde model ile temsil etmiştir.

Cemil:	*Yine üzerine koysak? Bu sefer de üçünün de kesiştiği yeri mi alacağız acaba? Öyle alsak çıkıyor. Üzerine koysak...Buradan gelen burası olur (altına 5x4'lük dikdörtgen çizdi. Buradan dediği $\frac{1}{5}$ kesrini temsil eden model. İlk sütünü tarayarak temsil ediyor) Hepsi zaten şöyle yapalım. Tamamını (böylece bir tamı temsil etmiş oluyor). Diğeri de (kesişim için oluşturduğu modeldeki ilk satırı taralı alan olarak seçiyor)*
Araştırmacı:	*Orası mı yaptı?*
Cemil:	*Hmm. Orası değil de şurdan başlıcaz (bu defa sütun olarak düşünüyor). İkisini kesiştirdik ya şöyle dört burdan alcaz bir de burdan alcaz (ilk sütun ve ikinci sütunun da ilk satırını seçiyor)*
Araştırmacı:	*Neden bir tane ordan aldın?*
Cemil:	*Pardon ya. Bunu niye aldım ben? Bu yok. Sadece burası olacak (ilk sütun). Burası da işte $\frac{1}{5}$ oldu değil mi? Evet, çıkmadı.*



Şekil 4.26. Cemil'in $\frac{1}{5}\times1\frac{1}{4}$ işlemini $\frac{1}{5}\times(1+\frac{1}{4})$ şeklinde ele alırken oluşturduğu yanlış temsil, (AB görüşme formu- 6. Soru)

Araştırmacı: *Demek ki bir şeyi eksik yaptın. Sen şimdi 1 tam ve $\frac{1}{5}$'i mi kesiştirdin?*

Cemil: *Bir şeyi eksik yaptım bir saniye. Neyi eksik yaptım? Beş kare olduğunu işte, o yüzden eksik oldu ya. Ben onu çizdim ya az önce. Şimdi şöyle burdan beş kare ($\frac{1}{4}$ modelini belirtiyor burada)Şunun içinde 5 kare çizmemiz lazımdı. Biz bunu çizince dört kare oldu, beşinciyi çizdim (beşinci dediği ikinci sütunun ilk satırındaki kısım). Ama beşinci iki kere kesişmiş oldu, üç kere kesişmiş olmadı orası. Ama burayı alırsak doğru çıkıyor (ikinci sütunun ilk satırındaki kısım). O zaman şöyle bir şeye varacağız; bir kere kesişmesi yeterli, kesiştiği yerlerin hepsini sayacağız. Bence böyle.*

….

Araştırmacı: *Üçünün kesim noktasını mı aldın yani?*

Cemil: *Üçünün kesim noktası değil. Üçünün kesimini alırsak $\frac{1}{5}$ çıkıyor, doğru cevap çıkmıyor. En az iki kesim noktası. Kesişen her yere, iki veya üç, bunu önemsemeden kesişen her yeri alırsak sonuç şu an doğru çıktı. Ama belki rastgele de olabilir yani.*

Araştırmacı: *Şurada mesela, yani $\frac{1}{5}$ ve $\frac{1}{4}$'in kesişiminde*

Cemil: *İkisinin kesişiminde?*

Araştırmacı: *Kesişen her yeri buraya aldın mı?*

Cemil: *Evet $\frac{1}{20}$ oluyor o zaman da.*

Araştırmacı: *Bunula bunu düşünürsen o zaman şu kısmı mı kesişir diyorsun? Ee zaten burayı almadın mı burda?*

Cemil: *Hıhı. Evet. Biz onu… Toplama gibi yapsak…*

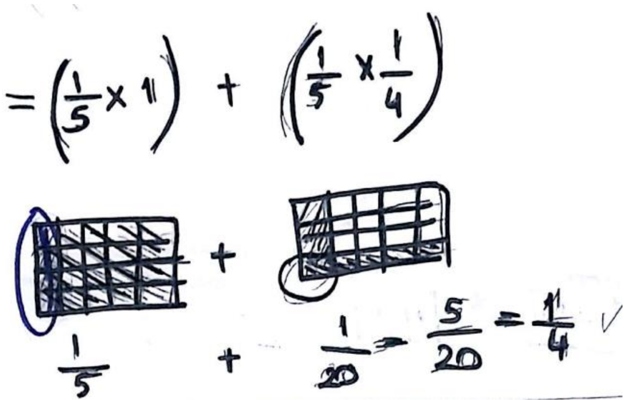
Araştırmacı: *Neden böyle hepsini birlikte alma gereği hissettin?*

Cemil: *İşte farklı bir işlem deyince bir de bunu deneyelim dedik olmadı yani. Bunu artı yapsak olmaz yani işlem önceliği var. Yani $1+\frac{1}{4}$ yapsak. Ayrı ayrı dağıtıp ayrı ayrı işlem yapsak o zaman olur.*

…

Araştırmacı: *Burada neyi eksik düşünmüşsün?*

Cemil: *Buradaaa neyi eksik düşündüümm? Ee burda zaten benim düşündüğüm bir şey yoktu başlarken de. Deneme amaçlı yaptık o da olmadı. Şu üçünün kesişimini bulabilir miyim dedim, olmadı. Bir eksik düşünme değil de böyle bir şey zaten olmayacak, olmaz. Çünkü üç farklı kesir giriyor o zaman sanki çarpmışım gibi. Şu işlemi dağıtalım, şöyle dağıtalım. $\frac{1}{5}\times(1+\frac{1}{4})$ yapalım. Eşittir diyelim. Burdan; şurası $\frac{1}{5}$. Diğer her şey de(bir tamu kastediyor)…Şuranın değeri ne oldu? $\frac{1}{5}$ oldu. Artı… burası da ikisinin kesişimi $\frac{1}{20}$ oldu. Bu ikisini toplayınca da $\frac{5}{20}$ oldu. Bu da $\frac{1}{4}$ yapar.*
(AB görüşme formu-6.Soru)



Şekil 4.27. Cemil'in $\frac{1}{5} \times 1\frac{1}{4}$ işlemini temsili, (AB görüşme formu- 6. Soru)

Cemil yedinci soruda verilen alan modellerinde "payda kadar eş parçalama yapma, bu eş parçalardan pay kadarlık kısmı seçme, artık bunu yeni bütün olarak alıp ikinci kesrin paydası kadar eş parça arasından payı kadar eş parçayı seçme ve ilk bütüne göre sonucu yorumlama" bilgilerini kullanmıştır. Cemil kendi oluşturduğu alan modellerinde saydam kesir kartları kullanıyormuş gibi hareket edip ilk kesri model ile temsil ettikten sonra bunu yeni bütün olarak ele aldığını belirtmemesine rağmen aşağıda görüşme alıntısında yer aldığı şekilde bu soruya vermiş olduğu cevap bu bilgiye sahip olduğunu göstermiştir.

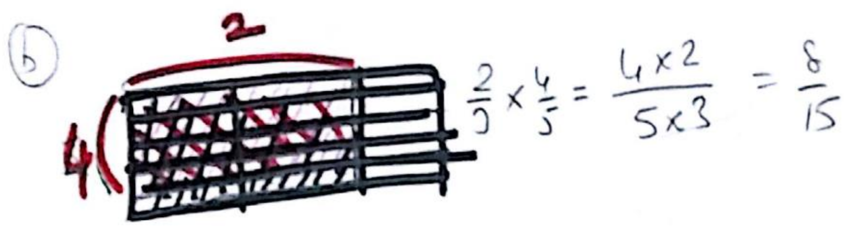
> *Bunu ($1\frac{1}{2}$) gösterip sonra bunun üzerinden bunu bütün alıp ikisini alıyor. Bu cevap doğru. Bu gösterilir (a şıkkı), bu da (b şıkkı). Öncelikle $1\frac{1}{2}$'yi göstermiş. Sonra da bunu bir tam alıp (yani $1\frac{1}{2}$'lik kısmı) ikisini almış. Bu da bir bütüne eşit. Bunda da yine $1\frac{1}{2}$'yi göstermiş. Sonra yine $\frac{2}{3}$'sini almış Bu da aynı şekilde yani. Bir farklılık yok ki.* (Cemil- AB görüşme formu, 7. Soru)

Cemil c şıkkında verilen alan modelinin $1\frac{1}{2} \times \frac{2}{3} = 1$ işlemi uygun bir model olmadığını belirtmiştir. Verilen modelin eş parçalara sahip olmamasından dolayı $1\frac{1}{2}$ kesrini temsil edemeyeceğini, bir tam ve bir de $\frac{1}{2}$'in gösterildiğini fakat ikisinin $1\frac{1}{2}$'i gösteremeyeceğini ifade etmiştir.

Hale $\frac{2}{3} \times \frac{4}{5}$ işlemini alan modeli ile temsil ederken öncelikle bir bütün almış, bu bütünü üç eş parçaya ayırmış ve bu eş parçalardan iki tanesini seçmiştir. Artık bunu yeni bütün olarak ele alıp bu temsil üzerinden ikinci kesre göre yatay olarak beş eş parçalama daha yapıp dört eş parçasını almıştır. Sonucu yorumlarken en baştaki bütünü dikkate almıştır.

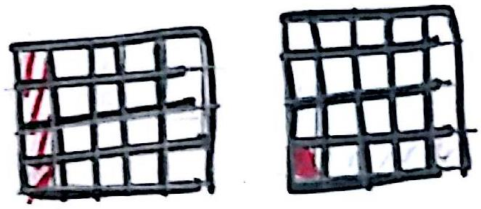
$\frac{2}{3}\times\frac{4}{5}$ işleminden yola çıkarak çarpma algoritmasının geliştirilmesine yönelik bir şey söyleyip söyleyemeyeceği sorulduğunda, Hale taralı kısımların alanının toplam alana oranından faydalanabileceğini belirtmiştir. Şekil 4.28'de Hale'nin $\frac{2}{3}\times\frac{4}{5}$ işlemini alan modeli ile temsiline ve çarpım sonucunu dikdörtgenin alanından faydalanarak nasıl bulduğuna yer verilmiştir.

> *Mesela şu taralı şurası 2 birim, şurası 5 birim, pardon 5 birim diyorum, tamamı 5 şurası 4 birim. Şu iç kısmın alanı 4×2, tamamının alanı 5×3. O da işte hani* $\frac{2}{3}\times\frac{4}{5}$*'ti ya kesrimiz. Şu an tam tersi yazsam daha iyi görür ama bu şekilde (çarpmada 4'ü önce yazmıştı, onu söylüyor). Yani bu aslında* $\frac{8}{15}$. (Hale, AB görüşme formu, 6. Soru)



Şekil 4.28. Hale'nin $\frac{2}{3}\times\frac{4}{5}$ işlemini alan modeli ile temsili, (AB görüşme formu- 6. Soru)

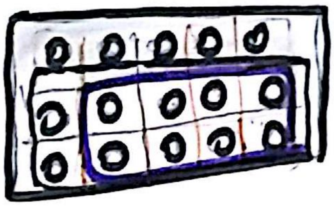
Hale, $\frac{1}{5}\times1\frac{1}{4}$ işlemini alan modeli kullanarak temsil etmek için önce bir tam ve bir tamın $\frac{1}{4}$'ini göstermiştir. $1\frac{1}{4}$'in $\frac{1}{5}$'ini göstereceği için $1\frac{1}{4}$'i yeni bütün olarak ele almıştır. Oluşturduğu modelleri dikey olarak beş eş parçaya ayırmış ve bu eş parçalardan bir tanesini seçmiştir. İki modeldeki taralı kısımların ilk bütüne göre ne kadara denk geldiğini bulmuştur ve iki sonucu toplayarak çarpma işleminin sonucunu elde etmiştir. Şekil 4.29'daHale'nin $\frac{1}{5}\times1\frac{1}{4}$ işlemini alan modeli ile temsiline yer verilmiştir.



Şekil 4.29. Hale'nin $\frac{1}{5} \times 1\frac{1}{4}$ işlemini alan modeli ile temsili, (AB görüşme formu- 6. Soru)

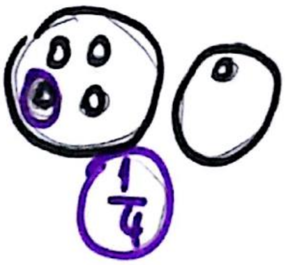
4.1.3.2. Öğretmen adaylarının kesirlerle çarpma işleminde küme modeli kullanmalarına yönelik AB'lerine ilişkin bulgular. Öğretmen adaylarının kesirlerle çarpma işleminde küme modeli kullanımına yönelik AB'lerine ilişkin bulgular altıncı sorudaki işlemleri temsil etmek için oluşturdukları modeller aracılığıyla elde edilmiştir. İki kesrin çarpımına yönelik oluşturdukları küme modelleri İlker, İpek ve Cemil'in payda kadar grup oluşturma ve pay kadarını alma/seçme, seçilen parçanın yeni bütün olduğunu bilme, tekrar oluşturduğu gruplar içinde ikinci kesri oluşturabilecek şekilde nesne seçme, elde edilen nesne sayısının toplam nesne sayısına oranını çarpma işleminin sonucu olarak ifade etme bilgisine sahip olduklarını göstermiştir. Ayrıca İpek ve Hale doğal sayı ile kesrin çarpımını küme modeli ile temsil ederken doğal sayı kadar nesneyi kesrin paydası kadar eş gruba ayırma ve pay kadar grubu seçme bilgisini kullanmışlardır.

$\frac{2}{3} \times \frac{4}{5}$ işlemini alan modeli ile temsil ettikten sonra İlker bir de küme modeli kullanarak temsil etmiştir. Küme modeli ile temsil ederken $\frac{2}{3} \times \frac{4}{5}$ işlemini $\frac{2}{3}$'nin $\frac{4}{5}$'nün alınması şeklinde yorumlamıştır. Bu nedenle önce $\frac{2}{3}$ kesrini temsil etmiştir. Bu temsilde beşe de gruplanabilmesi açısından 15 sayma nesnesi almıştır. Bu 15 sayma nesnesini her bir grupta beş sayma nesnesi yer alacak şekilde üç eş gruba ayırmış ve bu gruplardan iki tanesini seçmiştir. Burada yinelenen gruplar şeklinde bir gösterim kullanmıştır. Daha sonra bu $\frac{2}{3}$'lik nesne grubunu yeni bütün olarak alıp, bu iki nesne grubunun dikey olarak yinelenen beş gruptan oluştuğunu fark etmiş ve bu gruplardan dört tanesini seçmiştir. Çarpma işleminin sonucunu ifade ederken son durumdaki nesne sayısının toplam nesne sayısına oranını kullanmıştır. Şekil 4.30'da İlker'in $\frac{2}{3} \times \frac{4}{5}$ işlemini küme modeli ile temsili yer almıştır.



Şekil 4.30. İlker'in $\frac{2}{3} \times \frac{4}{5}$ işlemini küme modeli ile temsili, (AB görüşme formu- 6. Soru)

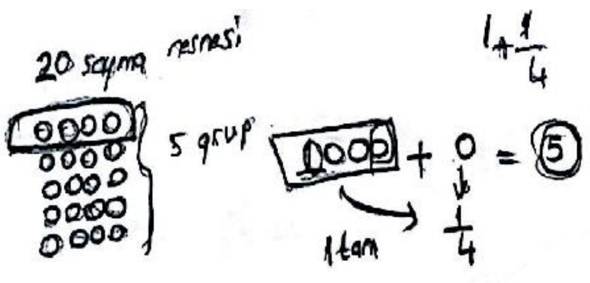
İlker $\frac{1}{5} \times 1\frac{1}{4}$ işlemini uzunluk modeli ile temsil ettikten sonra küme modeli ile de temsil etmeyi tercih etmiştir. Önce bir tamda kaç sayma nesnesinin yer alacağını belirlemiştir. Bir tamı ifade eden kümeyi belirledikten sonra bu tamın $\frac{1}{4}$'ini temsil etmiştir. İlker burada nesne sayısını belirlemede kesrin paydasını dikkate almıştır. Her grupta en az bir sayma nesnesinin yer alacak olması nedeni ile bir tamı belirten kümeyi dört sayma nesnesi kullanarak oluşturmuştur. Dört sayma nesnesinin $\frac{1}{4}$'inin bir sayma nesnesi yapması dolayısıyla $\frac{1}{4}$ kesrini bir sayma nesnesi kullanarak temsil etmiştir. Sonrasında bu $1\frac{1}{4}$'lik sayma nesnelerini bir bütün olarak ele alıp bunun $\frac{1}{5}$'ini bulmuştur. "Toplamda beş sayma nesnesi vardır ve beşin $\frac{1}{5}$'i bir sayma nesnesidir." bilgisinden hareketle bir sayma nesnesini seçmiştir ve bu sayma nesnesinin dört sayma nesnesinden oluşan kümenin $\frac{1}{4}$'i olduğunu ifade etmiştir. Şekil 4.31'de İlker'in $\frac{1}{5} \times 1\frac{1}{4}$ işlemini küme modeli ile temsili yer almıştır.



Şekil 4.31. İlker'in $\frac{1}{5} \times 1\frac{1}{4}$ işlemini küme modeli ile temsili, (AB görüşme formu- 6. Soru)

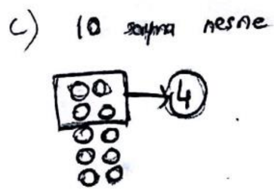
İpek, $\frac{1}{5}\times1\frac{1}{4}$ işlemini alan modeli ile temsil ettikten sonra küme modeli ile temsil etmiştir. İlk olarak kesirlerin paydasını dikkate alarak hem dörde hem beşe gruplanabilmesi açısından bir tamı 20 sayma nesnesi kullanarak göstermiştir. Bu sayma nesnelerinin $\frac{1}{5}$'ini temsil etmek için nesneleri beş eş gruptan oluşacak şekilde yinelenen dörtlü beş grup oluşturmuştur ve bu gruplardan birini almıştır. Burada payda sayısına göre grup oluşturmuş ve bu gruplardan pay kadarlık eş grubu seçmiştir. Bu bir grup nesne içerisinde dört tane sayma nesnesi yer almaktadır. Bu sayma nesnelerinin $1\frac{1}{4}$'ini temsil etmek için önce dört sayma nesnesinden oluşan grubu bir tam olarak almış ve sonra bir sayma nesnesini de $\frac{1}{4}$ kesrini temsil etmek üzere almıştır. $1\frac{1}{4}$ kesrinin beş sayma nesnesinden oluştuğunu görmüştür. Zaten $1\frac{1}{4}$'in bir tamdan daha büyük olması nedeni ile bir tamda yer alan nesne sayısından daha fazlası ile temsil edilmesi gerektiğini düşünmektedir. Şekil 4.32'de İpek'in $\frac{1}{5}\times1\frac{1}{4}$ işlemini küme modeli ile temsiline yer verilmiştir.

> *20 sayma nesnesinden oluşan bir grup alırdım ve bu gurubun $\frac{1}{5}$'ini alacağıma göre beş parçaya ayırmam gerekiyor. Dört parçadan oluşacak her bir parça.20'yi beş parçaya ayırdım. Her parçada dört nesne var. Dörtlü beş grup olmuş oluyor. Bunun içinden bir tanesini almış oldum. Ee şimdi bana bu çarpma işlemi bunu elde ettiğim miktarın $\frac{5}{4}$, yani $1\frac{1}{4}$'ü. 1 tam olucak. Yani o dördün hepsi olacak. Ve bunun üzerine ek olarak çünkü $1\frac{1}{4}=1+\frac{1}{4}$ olarak yazabiliriz. Bunun da 1 tam+ bunun da $\frac{1}{4}$'i bir tane sayma nesnesi yapıyor. Beş sayma nesnesi yapıyor diye düşünebilirim. Sanırım evet. Bu şekilde de düşünebilirdik ve zaten elimizdeki şeyin $\frac{5}{4}$'ü kendinden büyük bir şey yapmış oluyor. Çarpma işlemi gibi ifade edebiliriz.* (İpek- AB görüşme formu, 6. Soru)



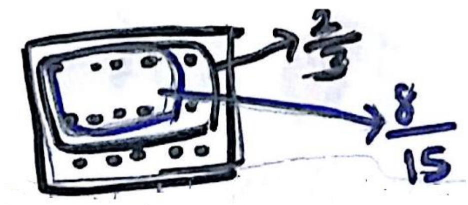
Şekil 4.32. İpek'in $\frac{1}{5}\times1\frac{1}{4}$ işlemini küme modeli ile temsili, (AB görüşme formu- 6. Soru)

İpek, $\frac{2}{5}\times10$ işlemini küme modeli ile temsil ederken bu işlemi 10 sayma nesnesinin $\frac{2}{5}$'sinin alınması olarak ifade etmiştir. 10 sayma nesnesi aldığında bunu kesrin paydasını dikkate alarak eş gruplara ayırmış ve bu gruplardan pay kadar grubunu alarak $\frac{2}{5}$ kesrini Şekil 4.33'teki gibi temsil etmiştir.



Şekil 4.33. İpek'in $\frac{2}{5}\times10$ işlemini küme modeli ile temsili, (AB görüşme formu, 6. Soru)

Cemil, $\frac{2}{3}\times\frac{4}{5}$ işlemini saydam kesir kartlarını düşünerek alan modeli ile temsil ettikten sonra başka bir model ile göstermesi istendiğinde küme modelini kullanmıştır. Her iki kesre göre de gruplanabilmesi açısından bir tamda 15 sayma nesnesinin yer almasına karar vermiştir. Bu sayma nesnelerini kullanarak $\frac{2}{3}$ kesrini temsil etmek için beşli üç yinelenen eş grup oluşturmuş ve bu eş gruplardan iki tanesini seçmiştir. $\frac{2}{3}$'nin $\frac{4}{5}$'ünü temsil edeceği için artık $\frac{2}{3}$ kesrini temsil eden sayma nesneleri grubunu yeni bütün olarak ele almıştır. $\frac{2}{3}$ kesrinin 10 sayma nesnesinden oluştuğunu belirlemiş ve 10'un $\frac{4}{5}$'ünün sekiz olduğunu ifade etmiştir. Bu nedenle sekiz sayma nesnesini seçmiştir. Sekiz sayma nesnesini seçerken oluşan ikili beş grup içerisinden dört grubu seçtiğini ifade etmemesine rağmen temsilini bu şekilde gerçekleştirmiştir. Çarpma işleminin sonucunu bu sayma nesneleri yardımı ile belirlemede, son olarak aldığı nesne sayısının toplam nesne sayısına oranını kullanmıştır. Yani sonucu yorumlamada en baştaki bütünü dikkate almıştır. Şekil 4.34'te Cemil'in $\frac{2}{3}\times\frac{4}{5}$ işlemini küme modeli ile temsiline yer verilmiştir.



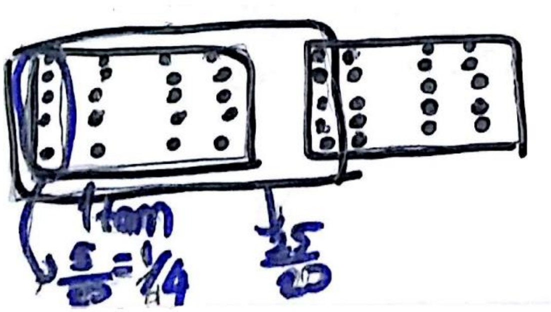
Şekil 4.34. Cemil'in $\frac{2}{3} \times \frac{4}{5}$ işlemini küme modeli ile temsili, (AB görüşme formu- 6. Soru)

Aşağıdaki görüşme alıntısında Cemil'den $\frac{1}{5} \times 1\frac{1}{4}$ işlemini model kullanarak temsil etmesi istendiğinde $1\frac{1}{4}$ kesri bir tamdan fazla olduğu için önce $\frac{2}{3} \times \frac{4}{5}$ işlemini yaparken kullandığı temsili (sanki saydam kesir kartları kullanıyormuş gibi hareket ederek) kullanamayacağını bu nedenle mecburen küme modeli kullanacağını ifade etmiştir.

Cemil: *Yani a'da mecburen bu modeli kullanacağız (küme modelini söylüyor). Çünkü tamı geçmiş, bununla gösteremeyiz ($\frac{2}{3} \times \frac{4}{5}$ işleminin temsilindeki gibi) Evet kullanamayız ki.*
Araştırmacı: *Sen hep kesir kartları üzerinden mi düşünüyorsun?*
Cemil: *Yok. Yani ilk başta evet. Onu kullanamayız. O zaman pullara geçebiliriz, Pulları kullanabiliriz a'da.* (AB görüşme formu, 6. Soru)

Cemil küme modeli kullanırken ilk olarak bir tamın kaç sayma nesnesinden oluşacağını belirlemiştir. İki kesrin paydası 20'de eşitlendiği için bir tamın 20 sayma nesnesinden oluşacağını belirtmiştir. Bu 20 sayma nesnesini kullanarak $\frac{5}{4}$'in $\frac{1}{5}$'ini temsil etmiştir. $\frac{5}{4}$ kesrinin paydasını dikkate alarak 20 sayma nesnesini kullanarak beşli dört yinelenen grup oluşturmuştur. Bu şekilde iki tam oluşturmuş, ilk modelin tamamını ikinci modelin beşli bir grubunu seçerek $1\frac{1}{4}$ kesrini temsil etmiştir. Bu temsilde 25 sayma nesnesinin olduğunu, bir tamda 20 nesnenin bulunmasından dolayı beş tanesinin ikinci modelden alındığını, bunun aynı zamanda $\frac{25}{20}$ kesrini temsil ettiğini ifade etmiştir. Kesri $\frac{25}{20}$ olarak ifade ettikten sonra $\frac{1}{5}$ kesrinin de $\frac{5}{25}$'e denk olmasını kullanarak $\frac{25}{20}$'nin $\frac{5}{25}$'ini bulmak istemiştir. Toplamda 25 sayma nesnesi vardır ve bu sayma nesnelerinden beş tanesini seçerek $\frac{25}{20}$'nin $\frac{5}{25}$'ini temsil etmiştir. Beş sayma nesnesinin bir bütün içindeki miktarını dikkate alarak da çarpma işleminin sonucunu belirlemiştir. Şekil 4.35'te Cemil'in $\frac{1}{5}\times1\frac{1}{4}$ işlemini küme modeli ile temsiline yer verilmiştir.

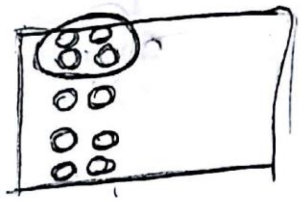
Cemil: *20 puldan oluşsun.*
Araştırmacı: *Neden 20 puldan oluşması gerektiğini düşünüyorsun?*
Cemil: *Kolay olsun diye. Paydaları eşitleyince 20 olduğu için o yüzden kolay olsun diye. Şöyle yapalım. Böyle 20 oldu. Şimdi bu bir tamımız bizim (çizdiği model). Ama sorumuz şöyle olsun; $\frac{5}{4}$ kesrinin $\frac{1}{5}$'i kaçtır olsun. Yani önceliğimiz $\frac{5}{4}$'ten $\frac{1}{5}$'i bulmak olsun. Şimdi $\frac{1}{5}$'ten $\frac{5}{4}$'ü bulmamız daha zor gelebilir. Şunu da aynı şekilde tam yapıp seçelim (ikinci modeli çiziyor). Buradan $\frac{5}{4}$ neydi 25, yani 20'de 25 olacak. 20 burada var (ilk model). Buradan 5 daha almamız lazım (ikinci model). Burası bizim $\frac{25}{20}$'miz. Şimdi şöyle diyelim; $\frac{25}{20}$ kesrinin $\frac{4}{20}$'si kaçtır? Yani $\frac{5}{25}$'i olur. 25 tane var, bunun 5'i. Evet bu aynı zamanda (yani $\frac{4}{20}$) $\frac{5}{25}$ olur. O zaman 25 tane pul burada var. Yani şu an şu çizdiğim şey $\frac{25}{20}$ oluyor. $\frac{25}{20}$'nin $\frac{5}{25}$'i. Yani burada 25 vardı zaten, 5'i şurası, şurasını soruyor. Burası diyor kaçtır. Ee zaten bizim bir tamımız 20 puldan ibaretti. 5'i de $\frac{5}{20}$ olur. O da $\frac{1}{4}$ olur.* (AB görüşme formu- 6. Soru)



Şekil 4.35. Cemil'in $\frac{1}{5}\times1\frac{1}{4}$ işlemini küme modeli ile temsili, (AB görüşme formu- 6. Soru)

Hale, $\frac{2}{5}\times10$ işlemini küme modeli ile temsil etmeyi tercih etmiştir. 10 sayma nesnesini kesrin paydasını dikkate alarak gruplamıştır. İkili beş grup oluşmuştur. Bu ikili grupların her biri $\frac{1}{5}$'i temsil etmişti. Bu $\frac{1}{5}$'lik grupların iki kere yinelenmesi sonucu $\frac{2}{5}$ kesrinin temsili oluşmuş ve iki sayma nesnesi grubundaki toplam nesne sayısı çarpma işleminin sonucunu vermiştir. Şekil 4.36'da Hale'nin $\frac{2}{5}\times10$ işlemini küme modeli ile temsiline yer verilmiştir.

verilmiştir.



Şekil 4.36. Hale'nin $\frac{2}{5} \times 10$ işlemini küme modeli ile temsili, (AB görüşme formu- 6. Soru)

4.1.3.3. Öğretmen adaylarının kesirlerle çarpma işleminde uzunluk modeli kullanmalarına yönelik AB'lerine ilişkin bulgular. Öğretmen adaylarının her birinin uzunluk modeline yönelik AB'leri oluşturdukları temsiller ve yedinci sorunun d şıkkında yer alan temsil aracılığıyla elde edilmiştir. Doğal sayı ile kesrin çarpımında İlker ve Cemil, sayı doğrusu üzerinde iki sayı arasını kesrin paydası kadar eş aralığa ayırma, kesrin payı kadar uzunluğu doğal sayı adedince yineleme bilgisini kullanmışlardır. Yedinci soruya verdikleri cevaplar ise tüm öğretmen adaylarının iki kesrin çarpımına yönelik kesrin paydası kadar eş parçalama yapma, elde edilen uzunlukları pay kadar yineleme, elde edilen parçaları yeni bütün olarak alıp ikinci kesrin paydası kadar uzunluk içerisinden pay kadar uzunluğu seçme, sonucu ilk bütüne göre yorumlama bilgisine sahip olduklarını göstermiştir.

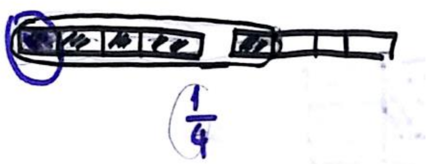
İlker, $\frac{2}{5} \times 10$ işlemini alan modeli ile temsil ettikten sonra uzunluk modellerinden olan sayı doğrusu ile temsil etmeyi tercih etmiştir. Sayı doğrusu 0-10 aralığındadır. Her bir aralığı payda kadar eş parçaya ayırma bilgisinden yola çıkarak her iki sayı arasını beş tane $\frac{1}{5}$'lik uzunluğa ayırmıştır (bk. Şekil 4.37). Bu uzunlukların iki tanesini yineleyerek her iki sayı arasında $\frac{2}{5}$'lik uzunluğu göstermiştir. Sonra bu uzunlukların eş uzunluklar olmasından yola çıkarak $\frac{2}{5}$'lik uzunluğu 10 kere yinelemiş, uç uca eklemiş ve dört sonucuna ulaşmıştır. Şekil 4.37'de İlker'in $\frac{2}{5} \times 10$ işlemini sayı doğrusu ile temsiline yer verilmiştir.

İlker: *Sayı doğrusu olabilir. Hatta sayı doğrusu, sayı doğrusu şöyle olabilir aslında. 0 diyelim, 1 diyelim, 2,3 4,5,6,7,8,9,10. 10 tane diyelim di mi? Hepsini beşer tane böldüm (1'den 10'a kadar tüm aralıkları). Bu ikisini aldığım zaman, bu ikisini*

	aldığım zaman… (1'den 10'a kadar tüm sayıların $\frac{2}{5}$'lik kısmını almak için hepsinden 2 birim gösteriyor, her bir aralıktan)
Araştırmacı:	*Ne oldu yani şimdi?*
İlker:	*Şimdi bunları toplayacağım. Bir sayı doğrusu modeli çizebilirim.*
Araştırmacı:	*Peki sana bir şey soracağım. Peki bak şurası ile şurasını düşün (sayı doğrusundaki ilk $\frac{2}{5}$'lik kısım ile ikincisi). Burası ne yapar? Burası da aynı kesri ifade ediyor mu?*
İlker:	*Onu da düşündüm. Aynen (sonra iki birim iki birim ilerleyerek devam ediyor) Bunda ikisini topladım, bunda ikisini topladım, diğer ikisini topladım, diğer ikisini topladım….*

Şekil 4.37. İlker'in $\frac{2}{5}\times 10$ işlemini sayı doğrusu ile temsili, (AB görüşme formu- 6. Soru)

İlker, $\frac{1}{5}\times 1\frac{1}{4}$ işlemini temsil ederken ilk olarak uzunluk modelini kullanmıştır. Burada kesir şeritleri ile $1\frac{1}{4}$'in $\frac{1}{5}$'ini temsil etmiştir. Önce bir tamı ardından da $\frac{1}{4}$ kesrinin temsilini oluşturmuştur. Kesir şeritlerini kullanırken onlara alan modeli ile temsil yapıyormuş gibi muamele etmiştir. Eş parçalama yapmış, bu eş parçalardan pay kadarını seçmiş, sonrasında bu eş parçaların tümünü yeni bütün olarak ele alıp bu parçaların arasından ikinci kesir kadarını seçmiştir. Sonucu bulurken en baştaki bütünü dikkate almıştır. Şekil 4.38'de İlker'in $\frac{1}{5}\times 1\frac{1}{4}$ işlemini uzunluk modeli ile temsiline yer verilmiştir.



Şekil 4.38. İlker'in $\frac{1}{5}\times 1\frac{1}{4}$ işlemini uzunluk modeli ile temsili, (AB görüşme formu- 6. Soru)

İlker yedinci soruda verilen uzunluk modelinin $1\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}=1$ işlemini temsil etmek için uygun bir model olduğunu belirtmiştir. İlk olarak $1\frac{1}{2}$ kesrinin temsili sonucu üç eş parçanın oluştuğunu görmüştür. Bu üç eş parçanın iki tanesinin $\frac{2}{3}$ kesrini ifade ettiğinin, bunun da bir tam yaptığının farkına varmıştır.

İpek'in kesirlerle çarpma işleminde uzunluk modeli kullanımına yönelik bilgisini belirlemede yalnızca yedinci sorunun d şıkkı kullanılmıştır. d şıkkında verilen temsilin $1\frac{1}{2} \times \frac{2}{3} = 1$ işlemini için uygun bir model olduğunu belirtmiştir. Aşağıda görüşme alıntısında geçtiği şekilde iki birimlik uzunluğun iki eş parçaya bölündüğünü ve $1\frac{1}{2}$'lik kısımda $\frac{1}{2}$'lik üç eş parçanın olduğunu ifade etmiştir ve bunu yeni bütün olarak ele almıştır. Üç eş parça olmasından dolayı $\frac{2}{3}$ kesrini temsil etmek için üç parçaya ayırmaya gerek olmadığını ve bunlardan iki eş parçanın alındığını belirtmiştir.

> *Önce iki birimlik mesafe ikişer eş parçaya bölünmüş. Dört eş parça olmuş. Yok ikişer eş parçaya bölünmüş. Bir bütün alınmış bu durumda ve onun yarısı da alınmış. Son durumda elimizde üç tane eş parça var. Yani tekrar üçe bölmemize gerek kalmayacak. Üç eş parçanın da ikisi alınmış şurada gördüğüm kadarıyla. O yüzden bu da olur.* (İpek- AB görüşme formu, 7. Soru)

$\frac{2}{5} \times 10$ işlemini alan modeli ile temsil ettikten sonra Cemil'e farklı bir model ile daha bir temsil gerçekleştirip gerçekleştiremeyeceği sorulmuştur. Cemil'e fikir vermek adına sayı doğrusu üzerinde denk kesir gösteriminden yola çıkarak sayı doğrusunun bir model olup olmadığını sorulmuştur. Cemil sayı doğrusunun bir model olduğunu, sayı doğrusu modeli olarak isimlendirildiğini ifade etmiştir. $\frac{2}{5} \times 10$ işlemini sayı doğrusu kullanarak nasıl temsil edeceği sorulmuştur ve Cemil tekrarlı toplama şeklinde, $\frac{2}{5}$'yi 10 kez toplayarak gösterebileceğini belirtmiştir. Cemil sayı doğrusuna sıfır ile 10 arası sayıları yerleştirmiştir (bk. Şekil 4.39). Her bir birimi (iki sayı arasını) kesrin paydasını dikkate alarak beş eş parçaya ayırmış ve $\frac{1}{5}$ birimlik eş uzunluklar elde etmiştir. Bu eş uzunlukların iki kere yinelenmesi/uç uca eklenmesi sonucu $\frac{2}{5}$ kesrinin temsiline ulaşmıştır. Kesrin doğal sayı ile çarpımını tekrarlı toplama şeklinde yorumlayarak bu $\frac{2}{5}$'lik uzunlukları 10 defa uç uca ekleyerek çarpma işleminin sonucunu bulmuştur. Şekil 4.39'da Cemil'in $\frac{2}{5}\times 10$ işlemini uzunluk modeli ile temsiline yer verilmiştir.

Cemil: *Orada sadece toplama şeklinde gösterebilirim sadece, tekrarlı toplama yaparak, $\frac{2}{5}$'i 10 kez toplayarak gösterebilirim. Öyle olur. Sıfırdan 10'a kadar sayıları yazalım.*

Araştırmacı: *$\frac{2}{5}\times 10$ dediği için mi 10'a kadar gösterdin sayı doğrusunda?*

Cemil: *Evet. Şimdi bu ifade zaten söylemiştik. Her tamı da beşe böldüğümüz için direk şuradan şöyle yapabiliriz. Bunu 10 defa yapacağız. Her biri $\frac{2}{5}$ oluyor. Her biri de $\frac{2}{5}$ olunca da şurada bitiyor, yani 10 defa toplayınca. O zaman işte dört oluyor. Böyle bir şey yapabiliriz.* (AB görüşme formu- 6. Soru)

Şekil 4.39. Cemil'in $\frac{2}{5}\times 10$ işlemini uzunluk modeli ile temsili, (AB görüşme formu- 6. Soru)

Cemil, yedinci sorunun d şıkkında yer alan uzunluk modelinin $1\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}=1$ işlemini temsil etmek için uygun olduğunu belirtmiştir. Önce $1\frac{1}{2}$ kesrinin temsil edildiğini, sonra bunun artık yeni bütün olarak ele alınıp bunun $\frac{2}{3}$'sinin alındığını ifade etmiştir.

Hale $1\frac{1}{2}$ kesrinin gösteriminde üç eş parça olduğunu söylemiştir. Artık bu eş parçaları yeni bütün olarak ele almıştır. $\frac{2}{3}$ kesrini temsil etmek için bu üç eş parçadan iki eş parçanın seçildiğini ifade etmiştir.

4.1.4. Öğretmen Adaylarının Kesirlerle Bölme İşleminde Model Kullanımına Yönelik AB'lerine İlişkin Bulgular ve Yorum

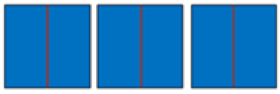
Öğretmen adaylarının kesirlerle bölme işleminde model kullanıma yönelik AB'leri AB görüşme formunda yer alan şu sorular kullanılarak analiz edilmiştir:

AB görüşme formu 8. Soru: Kesirlerde bölme işlemi içeren problemleri çözmek için farklı yöntemler geliştirilebilir. Aşağıdaki gibi problemleri nasıl çözersiniz?

a. $1\frac{3}{4}\div\frac{1}{2}$ **b.** $1\frac{2}{5}\div 2\frac{2}{3}$

c. $\frac{7}{5} \div \frac{1}{3}$ işlemini ortak payda algoritmasına yönelik bir modelle açıklayınız.

<u>AB görüşme formu 9. Soru:</u> $3 \div \frac{1}{2}$ işleminde bölümü gösteren bu model nasıl yorumlanabilir?



Öğretmen adaylarının her birinin kesirlerle bölme işleminde model kullanıma yönelik AB'leri alan modeli, uzunluk modeli ve küme modeli bağlamında yukarıda belirtilen iki soru yardımıyla ayrıntılı olarak incelenmiştir. Bulgular aynı zamanda öğretmen adaylarının kesirlerle bölme işlemine yönelik AB'lerini de ortaya koymuştur. AB görüşme formunun sekizinci sorusu öğretmen adaylarının istedikleri modeli kullanmalarına imkân tanıdığı için açık uçlu bir soru olarak değerlendirilebilir. Dokuzuncu soruda ise alan modeli ve uzunluk modeli kullanılarak temsil edilmiş işlemler hakkındaki yorumlarından yola çıkarak kesirlerle bölme işleminde alan modeli ve uzunluk modeli kullanmalarına yönelik bilgileri elde edilmiştir. Tablo 4.5'te öğretmen adaylarının kesirlerle bölme işleminde model kullanımına yönelik AB'leri yer almıştır. Ardından her bir modele ilişkin AB'leri ayrıntılı olarak ele alınmıştır.

Tablo 4.5
Öğretmen Adaylarının Kesirlerle Bölme İşlemini Model ile Göstermelerine Yönelik AB'leri

Kategoriler	Kodlar	Öğretmen Adayı
Alan modeli	Kesrin paydasının eş parçaların tamamı olduğunu bilme, kesrin payının eş parçalardan alınacak kısmın olduğunu bilme, seçilen parçanın içinde ikinci kesirden kaç tane olduğunu bulma	İlker, İpek, Cemil, Hale
	Doğal sayının kesre bölümünde doğal sayı kadar bütünü kesrin paydası kadar parçaya ayırma, pay kadarlık kaç parça olduğunu sayma	İlker, İpek, Cemil, Hale

Kategoriler	Kodlar	Öğretmen Adayı
Küme modeli	Payda kadar grup oluşturma ve pay kadarını alma/seçme, tekrar oluşturduğu gruplar içinde 2. kesir kadar kaç nesne grubu olduğunu belirleme	İlker, İpek, Cemil
Uzunluk modeli	Doğal sayıyı kesrin paydası kadar eş parçaya ayırma, pay kadar uzunluğun kaç kere uç uca eklenerek doğal sayıya ulaşılabileceğini ölçme	İlker, İpek, Cemil, Hale
	İki kesrin bölümünde kesirleri ortak payda haline getirerek işlemi doğal sayılarda bölme işlemi haline getirme, bölen kadar uzunluklar ile bölünen uzunluğu ölçme	Cemil

Üç öğretmen adayı kesirlerle bölme işlemlerinin çözümünü öncelikle ters çevir-çarp algoritması kullanarak gerçekleştirmiştir. Model ile göstermeleri istendiği zaman ise ilk olarak alan modeli kullanmayı tercih etmişlerdir.

İlker'e sekizinci soruda yer alan bölme işlemlerinin ne ifade ettiği sorulmuştur. İlker, "İşte dağıtma mı, işte bir şeyler dağıtıyorsunuz. Paylaşım, paylaştırma" cevabını vermiştir. İlker'in bölme işleminin anlamlarını hatırlamasını sağlamak amacıyla 6÷3 işlemine yönelik olarak problem kurması istenmiştir. İlker ilk olarak parçalara ayırma anlamını taşıyacak şekilde "6 kalemimiz var. Biz 3 kişiye bu kalemleri eşit olarak dağıttık. Her bir kişiye kaç kalem düşecektir?" problemini kurmuştur. Yine 6÷3 işlemini kullanarak farklı bir problem kurması istenmiştir. İlker ikinci olarak kurduğu problemde sadece kalem yerine elma, kişi yerine de kardeş ibarelerini kullanmıştır. İlker'e yine paylaştırma anlamı taşıyacak şekilde bir problem kurduğu ifade edilmiştir. Sonra İlker'den $1\frac{3}{4} \div \frac{1}{2}$ işlemini göz önüne alması istenmiştir. İlker "Bu $1\frac{3}{4}$'ü $\frac{1}{2}$'ye paylaşcaz. $\frac{1}{2}$'ye paylaşmak… Bir dakika, $\frac{1}{2}$'ye nasıl paylaştırcaz? Hee, $\frac{1}{2}$'ye paylaştırmak ne demek? $\frac{1}{2}$'lik kaç grup oluyor hani di mi? Kaç tane $\frac{1}{2}$ var?" cevabını vermiştir. Bu işlemden yola çıkarak İlker kesirlerle bölme işleminde bir paylaşımdan söz edilmediğini, bölmenin ölçme anlamının kullanıldığını fark etmiştir.

İpek verilen bölme işlemlerini "bölünenin içinden bölen kesir kadarlık kaç grup oluşturabilirim?" şeklinde düşünebileceğini belirtmiştir. İpek $1\frac{3}{4} \div \frac{1}{2}$ işleminde $1\frac{3}{4}$'ü kurabiye, $\frac{1}{2}$'i bir porsiyon kurabiye olarak alıp, bu kurabiyelerden kaç porsiyon kurabiye çıkabileceğini düşünmüştür. $1\frac{2}{5} \div 2\frac{2}{3}$ işleminde kesirleri bileşik kesir haline getirerek $\frac{7}{5} \div \frac{8}{3}$ işlemini de yine bölmenin ölçme anlamını taşıyacak şekilde "$\frac{7}{5}$'in içinde kaç tane $\frac{8}{3}$'lük grup var?" şeklinde ifade etmiştir. Ardından kesirleri ortak paydalı hale getirerek bir de $\frac{21}{15}$'in içinde kaç tane $\frac{40}{15}$ olduğu sorusuna cevap aramış, bunun da 21'in içinde kaç tane 40 var?" şeklinde ifade edilebileceğini belirtmiştir. İpek $\frac{7}{5} \div \frac{1}{3}$ işlemini de kesirleri ortak paydalı hale getirerek bölmenin ölçme anlamını taşıyacak şekilde ifade etmiştir.

Cemil'e verilen işlemlerin ne ifade ettiği sorulduğu zaman $1\frac{3}{4} \div \frac{1}{2}$ işlemini "$1\frac{3}{4}$'ün içerisinde kaç tane $\frac{1}{2}$ vardır?" şeklinde ifade etmiştir. $1\frac{2}{5} \div 2\frac{2}{3}$ işlemini İpek gibi $\frac{7}{5} \div \frac{8}{3}$ haline dönüştürmüş ve bu işlemi "$\frac{7}{5}$'in içinde $\frac{8}{3}$ kaç defa vardır?" şeklinde açıklamıştır. $\frac{7}{5} \div \frac{1}{3}$ işlemini de ortak payda haline dönüştürerek " $\frac{21}{15}$'in içinde kaç tane $\frac{5}{15}$ var diye buluyoruz." şeklinde ifade etmiştir.

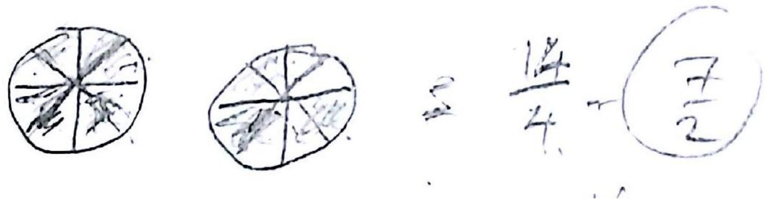
Hale'ye sekizinci soruda yer alan işlemlerin ne ifade ettiği sorulduğu zaman $1\frac{3}{4} \div \frac{1}{2}$ işleminin "$1\frac{3}{4}$'ün içinde kaç tane $\frac{1}{2}$ var?" şeklinde açıklanabileceğini, $1\frac{2}{5} \div 2\frac{2}{3}$ ve $\frac{7}{5} \div \frac{1}{3}$ işlemlerinin de benzer şekilde ifade edilebileceğini belirtmiştir. Hale'nin burada kesirlerle bölme işleminde bölmenin ölçme anlamının kullanıldığı bilgisine sahip olduğu görülmüştür.

4.1.4.1. Öğretmen adaylarının kesirlerle bölme işleminde alan modeli kullanmalarına yönelik AB'lerine ilişkin bulgular. Öğretmen adaylarının kesirlerle bölme işleminde alan modeli kullanmalarına yönelik AB'leri sekizinci soruda yer alan işlemleri temsil etmede kullandıkları modeller ve dokuzuncu sorudaki alan modeli temsili aracılığıyla elde edilmiştir. İki kesrin bölümüne yönelik oluşturdukları modeller tüm öğretmen adaylarının kesrin paydasının eş parçaların tamamı olduğunu bilme, kesrin payının eş parçalardan alınacak kısmın olduğunu bilme, seçilen parçanın içinde ikinci kesirden kaç tane olduğunu bulma (bölmenin ölçme anlamı) bilgisine sahip olduklarını göstermiştir. Fakat İlker ve Hale küçük kesrin büyük kesre bölümünü gerektiren $1\frac{2}{5} \div 2\frac{2}{3}$ işlemini model ile temsil edememiştir. Aynı zamanda tüm öğretmen adayları doğal sayının kesre bölümünde doğal sayı kadar bütünü kesrin paydası kadar parçaya ayırma, pay kadarlık kaç parça olduğunu sayma bilgisini kullanmışlardır.

İlker, $1\frac{3}{4} \div \frac{1}{2}$ işlemini ilk olarak alan modeli ile temsil etmek istemiştir. Daire şeklinden yararlanarak $1\frac{3}{4}$'ü temsil etmiştir. Oluşturduğu modelde daireleri ortadan ikiye bölerek kaç tane $\frac{1}{2}$ olduğunu bulmaya çalışmıştır. İlker $\frac{1}{2}$'e bölmek ile ikiye bölmeyi karıştırmıştır. Aslında ikiye böldüğünü fark etmesine rağmen ikiye bölmek ile $\frac{1}{2}$'e bölmenin farklı şeyler olduğunu ayırt edememiştir. $\frac{1}{2}$'e bölerek $\frac{7}{2}$ sonucunu elde ettiği için model kullanarak da o sonucun $\frac{7}{2}$ olduğunu söylemiştir. Aslında ikiye bölerek kaç eş parça olduğunu saymıştır. Öncesinde "$\frac{1}{2}$'lik kaç grup var?" şeklinde düşünmesine rağmen bu bilgiyi model üzerinde kullanamamıştır. Şekil 4.40'ta İlker'in $1\frac{3}{4} \div \frac{1}{2}$ işlemi yerine $1\frac{3}{4} \div 2$ işlemini alan modeli ile temsili yer almıştır.

İlker:	*Şu an burada iki eşit parçaya böldüğünde kaç tane $\frac{1}{2}$ oluyor mesela?*
Araştırmacı:	*Neden ikiye böldün?*
İlker:	*Neden ikiye böldüm, $\frac{1}{2}$...*
Araştırmacı:	*Bak sen ikiye bölün. Ama bak burada ne diyor bölü $\frac{1}{2}$ diyor.*
İlker:	*Yani birini bir parçayı ikiye bölmek. Yani yarısını aldım yani yarıyı aldım.*

Araştırmacı:	*O zaman ikiye bölmüş olmuyor musun?*
İlker:	*İkiye bölmüş oluyorum yani.*
Araştırmacı:	*Sen şu anda zaten bunu ikiye bölmüş oldun.*
İlker:	*Şu an ikiye bölmüş oluyorum kaç tane var burada? Sekiz tane burada. Kaç tane burası da?*
Araştırmacı:	*O zaman sonuç kaç oluyor?*
İlker:	*O zaman şöyle $\frac{14}{4}$ mü oluyor? Yani öyle oluyor, ondan sonra $\frac{7}{2}$ olcak olur.*



Şekil 4.40. İlker'in $1\frac{3}{4} \div \frac{1}{2}$ işlemi yerine $1\frac{3}{4} \div 2$ işlemini alan modeli ile temsili, (AB görüşme formu- 8. Soru)

Araştırmacı:	*Sen $\frac{7}{2}$ sonucunu bulmak istediğin için mi $\frac{14}{4}$ yazdın? Peki o zaman bir de şöyle yap; $1\frac{3}{4}$'ü ikiye böl. İkiye böl sonuç kaç çıkacak?*
İlker:	*İkiye mi böleyim?*
Araştırmacı:	*Yani şurada yaptığın gibi işlem olarak yap.*
İlker:	$\frac{7}{4} \div 2 = \frac{7}{8}$
Araştırmacı:	*Peki şurada ikiye böldüğünde ne buldun?*
İlker:	*İşte ikiye böldüm de ama bu modeli… Bir dakika…* (AB görüşme formu 8.soru)

İkiye bölmek ile $\frac{1}{2}$'e bölmek arasında kafası karışan İlker'e "kaç tane $\frac{1}{2}$'lik vardır?" dediği ifadeleri hatırlatılmıştır. Yine $6 \div 3$ işlemini kullanarak bölmenin ölçme anlamını taşıyacak şekilde düşünmesi istenmiştir. İlker "altıda kaç tane üç var?" şeklinde düşünerek $1\frac{3}{4} \div \frac{1}{2}$ işlemini de "$1\frac{3}{4}$'ün içinde kaç tane $\frac{1}{2}$ var?" olarak ifade etmiştir. Tekrar alan modeli ile $1\frac{3}{4}$ kesrini temsil etmiştir. Bu temsilde kesrin paydasını dikkate alarak eş parçaları oluşturmuştur. Bu eş parçaların ne kadarının seçileceğini belirlemede kesrin payını dikkate almıştır. İlker $1\frac{3}{4}$'ün içinde kaç tane $\frac{1}{2}$ olduğunu bulacağı için $\frac{1}{2}$'i bir tam olarak almıştır. Ve bölme işleminin sonucunu buna göre yorumlamıştır. Önce bir tamda kaç tane $\frac{1}{2}$'lik olduğunu bulmuştur. Bir tam iki tane yarımdan oluştuğu için iki tane $\frac{1}{2}$'lik olduğunu söylemiştir. Sonrasında ikinci modeldeki $\frac{1}{2}$'lik kısımları belirlemiştir.

İlker'den farklı bir model ile göstermesi istendiğinde yine alan modeli kullanmış, fakat bu defa daire yerine kare kullanmayı tercih etmiştir. Alan modeli kullanırken olduğu gibi paydayı dikkate alarak eş parçalama yapmış, bu eş parçalardan pay kadarlık kısmını seçmiştir. Bölmenin ölçme anlamını kullanarak da taralı kısımlarda kaç tane $\frac{1}{2}$'lik olduğunu belirlemiştir. Yine burada dairede olduğu gibi $\frac{1}{2}$'i bir tam olarak alıp, bölme işleminin sonucunu bu noktadan hareketle bulmuştur.

İlker b şıkkında yer alan $1\frac{2}{5} \div 2\frac{2}{3}$ işlemini aşağıda görüşme alıntısında geçtiği şekilde "$1\frac{2}{5}$'de kaç tane $2\frac{2}{3}$ var?" şeklinde bölmenin ölçme anlamını taşıyacak şekilde ifade etmiştir. Önce bir tamı iki tama bölmek sonra diğer kesirli kısımları da birbirine bölerek bir işlem gerçekleştirmek istemiştir. Fakat nasıl yapması gerektiğini düşünemeyerek bu şıkkı cevaplayamamıştır.

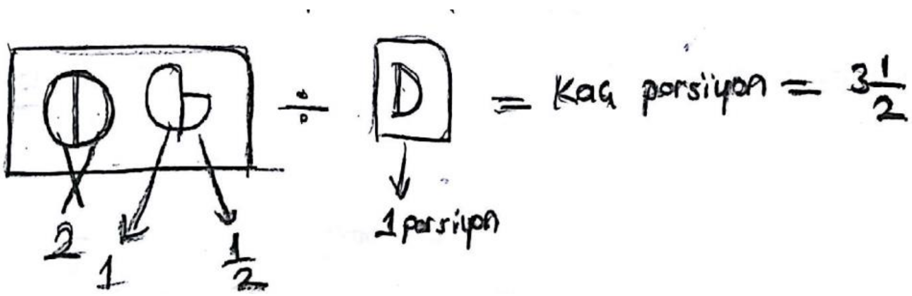
İlker:	*Şöyle bir şey yapayım; 1* $\frac{2}{5}$*'de kaç tane* $2\frac{2}{3}$ *var? Şöyle bir şey olabilir mi acaba? Ama bu iki tam. Parçaları mı sayacağız ki? Bunun sonucunu kaç buldum?*$\frac{21}{5}$.
Araştırmacı:	*Üçe mi parçaladın? Neden üçe parçalamak istedin?*
İlker:	*Çünkü biz bunu tam olarak alırsak diğer kısımlarını da bakarsak diye düşündüm. Kaç tane iki tam diyebiliriz? Olmayacak herhalde bence.*
Araştırmacı:	*Farklı bir şekilde düşünsen.*
İlker:	*Farklı mi düşüneyim? Farklı nasıl düşünebilirim?*
Araştırmacı:	*Şimdi bu bir tam, bu da iki tam. Bir tamın içinde iki tamı düşünürsek zaten bir tam çıkması mümkün mü?*
İlker:	*Değil.*
Araştırmacı:	*Kesirli bir şey çıkması lazım o zaman yani. Bir bütünden az bir şey çıkması lazım.*
İlker:	*Hıhı. Bir tamdan iki tam çıkmaz yani.*
Araştırmacı:	*Yani o, onun o zaman içinden bir şey de bir şeyi gibi olacak.*

İlker:	*Demek ki bu demek. Parçalanması gerekiyor bu biri. Nasıl parçalanır o zaman? O zaman şöyle bir şey olacak; hani ikiden mesela birden bunun çıkması, yani $\frac{1}{2}$ olcak herhalde di mi?*
Araştırmacı:	$\frac{1}{2}$ *derken?*
İlker:	*Yani mesela bir tamdan bir, ikiye bölelim gibi.*
Araştırmacı:	*Ama bak biri* $1\frac{2}{5}$*, diğeri de* $2\frac{2}{3}$*. Sen önce bir ile ikiyi böldün, sonra diğerlerini mi böleceksin?*
İlker:	*Yani onun gibi bir şey düşünmeye çalıştım. İşte mesela eğer bire iki kesirli bir şey çıkacak da ama nasıl bir şey çıkacak? Aklıma bir şey gelmiyor ya.* (AB görüşme formu- 7. Soru)

Öğretmen adaylarından dokuzuncu soruda verilen modelleri $3 \div \frac{1}{2}$ işlemi için yorumlamaları istenmiştir. a şıkkında kesirlerle bölme işleminde alan modeline yönelik bilgileri incelenirken, b şıkkında kesirlerle bölme işleminde uzunluk modeli kullanımına yönelik bilgileri incelenmiştir. İlker'in $3 \div \frac{1}{2}$ işlemini "üçün içinde kaç tane $\frac{1}{2}$ var?" şeklinde ifade etmesi doğal sayının kesre bölümünün bölmenin ölçme anlamını taşıdığını bildiğini göstermektedir. İlker burada $\frac{1}{2}$'i bir tam olarak alıp, bu tamdan kaç tane olduğunu belirlemiştir.

İpek'e sekizinci soruda yer alan işlemlerin ne ifade ettiği sorulduğunda İpek $1\frac{3}{4}$'ü bölünen, $\frac{1}{2}$'i bölen olarak ifade etmiştir. Bir problem oluşturarak $1\frac{3}{4} \div \frac{1}{2}$ işleminin anlamını açıklamış ve alan modeli ile temsil etmiştir. Problemde $1\frac{3}{4}$'ü kurabiye olarak aldığı için $1\frac{3}{4}$'ü temsil eden modelde daire şeklini kullanmıştır. Bu temsilde bir tam almış ve bir de $\frac{3}{4}$ kesrini göstermiştir. Kurabiye olarak gösterimi tercih ettiği için taralı alan kullanarak göstermek yerine kurabiyenin dört eş parçadan üç eş parçasını gösterecek bir temsil kullanmıştır. Bölmenin ölçme anlamını kullanarak kaç tane $\frac{1}{2}$'lik kurabiye olduğunu saymıştır. İpek de İlker gibi $\frac{1}{2}$'i bir tam olarak alıp bölme işleminin sonucunu ona göre yorumlamıştır. Şekil 4.41'de İpek'in $1\frac{3}{4} \div \frac{1}{2}$ işlemini alan modeli ile temsili yer almıştır.

İpek:	*Şurada bir, yani pasta gibi ne bileyim bir nesne, paylaştırılabilecek bir şey. Yarımlık yani böldüğüm (bölünen ve böleni düşündü). Şunu ($\frac{1}{2}$) bölen olarak düşünürsem şu da bölünen ($1\frac{3}{4}$) olduğuna göre bölünen içinde bölenden kaç tane var? Yani "bölünenin içinden bölen kesir kadarlık kaç grup oluşturabilirim?" gibi bir şeyler düşünebilirim. Biz bunları özel öğretimde falan görürken bunların problemleri genelde işte kesirlerde yarım porsiyon, mesela $\frac{1}{2}$ ya şu, bölen $\frac{1}{2}$ ise şu bütünün içinde porsiyonun atıyorum şu kurabiye olsun ($1\frac{3}{4}$ kurabiye). Şu da o kurabiyelerin bir porsiyonunun kaç kurabiye yaptığı olsun ($\frac{1}{2}$ porsiyon). Kaç porsiyon kurabiye çıkar problemi gibi düşünüyorduk biz.*
Araştırmacı:	*Peki bu sana bir şey çağrıştırıyor mu bölmeyle ilgili?*
İpek:	*Gruplama.*
Araştırmacı:	*Anlamlarıyla ilgili.*
İpek:	*Yani bölmenin anlamı olarak paylaştırma gibi söylemeye çalıştığı. Tekrarlı çıkarma. İkisi de aynı yere varıyor sonuçta ya hani. O yüzden ben bunu kurabiye problemi gibi ele alırsam elimde $1\frac{3}{4}$ kurabiye var gibi düşünebilirim. 1 tam kurabiye, bir de $\frac{3}{4}$'lük kurabiyeden elimde bu kadar kurabiye var. Kaç tane yarım kurabiye? (burada araya bölme işlemi koydu modeller arası)Kaç porsiyon yapar gibi düşünüp şunları artık bunların içinden kaç tane yarım çıkartabilirim diye düşüneceğim. Bundan iki tane yarım çıkacak (bir tamı ortadan ikiye böldü). Bundan iki porsiyon çıkacak. Şuradan bir porsiyon daha çıkacak. Ve buradan $\frac{1}{2}$ porsiyon yani bir porsiyonun yarısı gelecek. Kaç porsiyon çıkar sorusunun cevabı da $3\frac{1}{2}$ olacak.* (AB görüşme formu, 8. Soru)



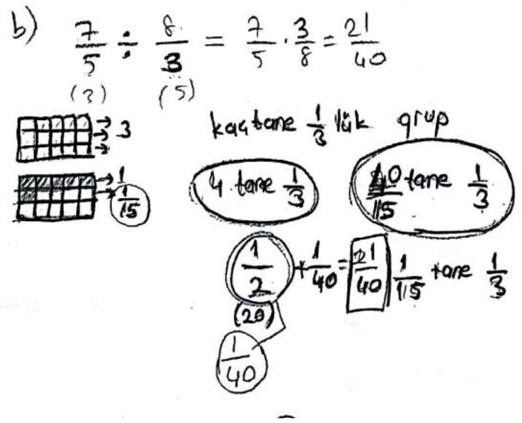
Şekil 4.41. İpek'in $1\frac{3}{4} \div \frac{1}{2}$ işlemini alan modeli ile temsili, (AB görüşme formu- 8. Soru)

$\frac{7}{5} \div \frac{8}{3}$ işlemini ters çevir-çarp algoritması ile yapan İpek, ardından bu işlemi alan modeli ile temsil etmek istemiştir. $\frac{7}{5} \div \frac{8}{3}$ işleminin "$\frac{7}{5}$'nin içinde kaç tane $\frac{8}{3}$'lük grup var?" demek olduğunu söylemiştir. İpek'in $\frac{7}{5} \div \frac{8}{3}$ işlemini alan modeli ile nasıl temsil ettiği Şekil 4.42'de gösterilmiştir. Bu temsili oluştururken nelere dikkat ettiğine dair bir kesit aşağıdaki gibidir:

$\frac{7}{5}$ *yapar.* $\frac{8}{3}$ *yapar (tamsayılı kesirleri bileşik kesre çevirdi). İşlemin sonucunda* $\frac{21}{40}$ *çıkar.*

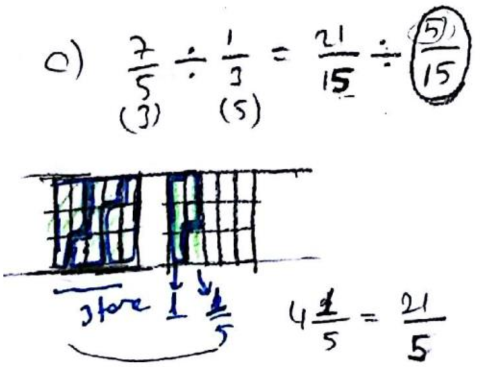
$\frac{7}{5} \div \frac{8}{3} = \frac{7}{5} \times \frac{3}{8} = \frac{21}{40}$

Modelleyecek olursam; $\frac{7}{5}$'in içinde kaç tane $\frac{8}{3}$'lük grup var? Burada şunu bulmak daha kolay olur gibi; $\frac{7}{5}$'in içinde kaç $\frac{1}{3}$'lük grup olduğunu bulmak daha kolay gelecek. Bunun için de bu şekilde yapsam(modelleri yatay olarak eş 3 parçaya ayırdı). Burada üç tane $\frac{1}{3}$'lük grup var. Burda da şu parçaları şuraya taşısam bir tane de burada kalır. Burada üç tane vardı. Burada da bir tane var. Kaç tane $\frac{1}{3}$'lük grup var? Bu da $\frac{1}{3}$'lük grubun $\frac{1}{5}$'i var. Yani $\frac{1}{15}$ olmuş oluyor. $\frac{1}{3}$'ün $\frac{1}{5}$'ini almış oldum. 4 tane $\frac{1}{3}$'lük grup var. Bu da 8, $\frac{8}{3}$ yani 8 tane $\frac{1}{3}$'lik grubun yarısı yapar. O yüzden şuna bakarak şunu yorumlarsam; şurda $\frac{1}{2}$'lik bir şey çıkacak. Vee $\frac{1}{15}$ yani bunu nasıl bulucam? (düşünüyor)$\frac{1}{15}$ tane $\frac{1}{3}$'lük grup ($\frac{8}{3}$'ün paydasını da 5 ile genişleterek 15'e eşitledi). $\frac{40}{15}$ diye düşünürsem $\frac{40}{15}$ tane $\frac{1}{3}$'lük grup, $\frac{1}{15}$ tane $\frac{1}{3}$'lük grup (ikisini karşılaştırdı). Bu, bunun $\frac{1}{40}$'i. ($\frac{1}{15}$, $\frac{40}{15}$'in). O zaman $\frac{1}{40}$. Bu yarımın yanına bir de $\frac{1}{40}$ gelecek. $\frac{1}{2}+\frac{1}{40}=\frac{21}{40}$. (İpek- AB görüşme formu, 8. Soru)



Şekil 4.42. İpek'in $1\frac{2}{5} \div 2\frac{2}{3}$ işlemini alan modeli ile temsili, (AB görüşme formu- 8. Soru)

$\frac{7}{5} \div \frac{1}{3}$ işlemini model ile göstermeden önce İpek yine bir gerçek yaşam durumu düşünmüştür. Ortak payda algoritmasına yönelik bir model oluşturması istendiği için ortak paydanın 15 olduğunu düşünerek daire kullanarak temsil etmek yerine dikdörtgen kullanmayı tercih etmiştir. Kesir bir tamdan büyük olduğu için modeli oluştururken iki tane dikdörtgenden faydalanmıştır. İlkinin tamamını seçerken ikincisinin ($\frac{21}{15} = \frac{15}{15} + \frac{6}{15}$ olması nedeni ile) altı eş parçasını seçmiştir. Modelde 21 eş parça oluşmuştur. Bu gösterimde İpek $\frac{5}{15}$'i yani beş taralı kısmı bir tam olarak düşünmüş ve bu 21 eş parça içinde kaç tane beş eş parça olduğunu incelemiştir. Bir tamda üç tane, $\frac{6}{15}$'lık kısımda da bir tane daha $\frac{5}{15}$ olduğunu bulmuştur. Geriye bir tek taralı kısım kalmıştır. Beş eş parçayı bir tam olarak aldığı için geriye kalan bu bir parçanın beş parçanın $\frac{1}{5}$'i olduğunu ifade etmiştir. Şekil 4.43'te İpek'in $\frac{7}{5} \div \frac{1}{3}$ işlemini alan modeli ile temsili yer almıştır.



Şekil 4.43. İpek'in $\frac{7}{5} \div \frac{1}{3}$ işlemini alan modeli ile temsili, (AB görüşme formu- 8. Soru)

Öğretmen adaylarından sekizinci soruda kesirlerle bölme işlemlerini model ile temsil etmeleri istenirken dokuzuncu soruda verilen modelleri yorumlamaları istenmiştir. İpek'e $3 \div \frac{1}{2}$ işlemin nasıl bir anlam taşıdığı sorulunca bu işlemin tekrarlı çıkarma anlamı taşıdığını ifade etmiştir. Yorum olarak da birinci sayı ile ikinci sayının paydasının çarpıldığı çıkarımında bulunmuştur. İpek'in $3 \div \frac{1}{2}$ için verilen alan modeline dair yorumları aşağıdaki kesitteki gibidir:

İpek:	*3 tamın içinden kaç tane $\frac{1}{2}$'lik, yarımlık yani, parça çıkacağını göstermek için burda (a şıkkı) 3 tam var. Her birini yarımşar ayırmışız ve $\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}$ ... altı parça elde etmişiz. Doğru bir gösterim. Yani bunu porsiyon yorumlamayla da yapabilirdik.*
Araştırmacı:	*Bu o zaman nasıl bir anlam ifade ediyor? Nasıl bir anlam taşıyor?*
İpek:	*Yani bunun anlamı şöyle; $\frac{1}{2}$'lik parçalardan arıyorum ya her bütün ikiye parçalanmış oluyor. Yani her bir bütünden, her bir bütünü ben sonuca götürürken 2 paça kabul edeceğim yani. Şunu da bir kesir olarak düşünsem mesela hani çıkarabileceğim bir sonuç olarak şu sayı diğer kesrin paydasıyla çarpılmış gibi düşünebilirim*
Araştırmacı:	*Onu demek istemedim aslında. Dedin ya porsiyon söylüyorum falan diye. O seni bölmeyle ilgili nasıl bir anlama götürüyor? Bölmenin hangi anlamına götürüyor?*
İpek:	*Tekrarlı çıkarma. Yorum olarak da "Birinci sayımız ikinci sayının paydasıyla çarpılmış" çıkarımında bulunabilirim.* (AB görüşme formu, 9. Soru)

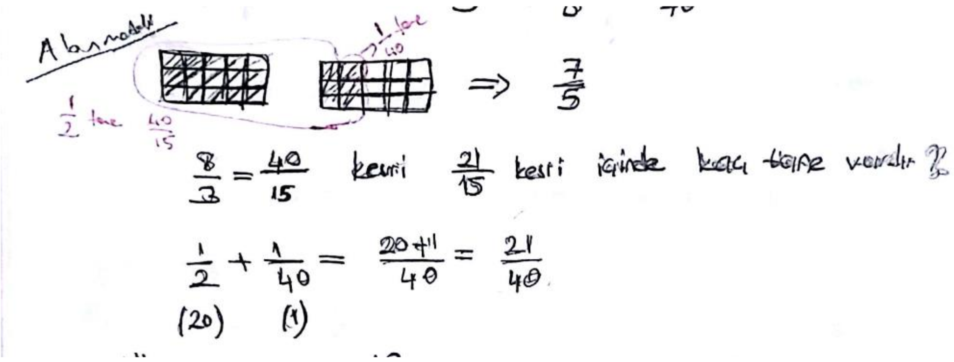
Cemil, $1\frac{2}{5} \div 2\frac{2}{3}$ işleminin ne ifade ettiği sorulunca "$\frac{7}{5}$'in içinde $\frac{8}{3}$ kaç defa vardır?" cevabını vermiştir. Verilen işlemi alan modeli ile temsil etmek istemiştir. Cemil'in $1\frac{2}{5} \div 2\frac{2}{3}$ işlemini alan modeli ile nasıl temsil ettiğine yönelik bir kesit aşağıdaki şekilde belirtilmiştir ve Şekil 4.44'te bu işlemin alan modeli ile temsili yer almıştır.

Cemil: *$\frac{8}{3}$=$\frac{40}{15}$ mı eşit? (sekiz bölü üç, 15'te 40'a mı eşit) Çıkaracağız bu sefer.*

Nasıl bağdaştıracağız bu ikisini? Şimdi şurada bir $\frac{1}{2}$ tane var. Şöyle $\frac{1}{2}$ tane $\frac{40}{15}$. Burada da kaç tane var. $\frac{1}{40}$ tane mi var? $\frac{1}{2}+\frac{1}{40}=\frac{20+1}{40}=\frac{21}{40}$.

Araştırmacı: *Nasıl karar verdin onlara? Burada dedin ki $\frac{1}{2}$ tane $\frac{40}{15}$ var. Buna nasıl karar verdin?*

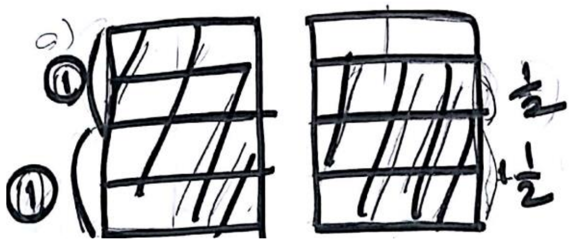
Cemil: *Burada 20 tane var çünkü. 20 tane kareyi hesapladım. 20 tane kare bunun yarısı,40'ın yarısıdır. O yüzden $\frac{1}{2}$ tane var dedim. Bir tane kare de 40'ın $\frac{1}{40}$'idir. $\frac{1}{40}$ tane var. Sonra ikisini topladım.* (AB görüşme formu, 8. Soru)



Şekil 4.44. Cemil'in $1\frac{2}{5} \div 2\frac{2}{3}$ işlemini alan modeli ile temsili, (AB görüşme formu- 8. Soru)

Cemil dokuzuncu soruda bölmenin ölçme anlamını kullanarak 3÷ $\frac{1}{2}$ işleminin "üçün içinde kaç tane $\frac{1}{2}$ var?" demek olduğunu belirtmiştir. $\frac{1}{2}$'lik kaç parça olduğunu saymış ve altı tane olduğunu görmüştür.

Hale, $1\frac{3}{4} \div \frac{1}{2}$ işlemini algoritma kullanmadan model ile temsil etme yoluna giden tek öğretmen adayı olmuştur. $1\frac{3}{4} \div \frac{1}{2}$ işleminin "1 $\frac{3}{4}$'ün içinde kaç tane $\frac{1}{2}$ var?" demek olduğunu ifade etmiştir. Bir tamı ve $\frac{3}{4}$'ü ifade eden modeli paydayı dikkate alarak dört eş parçaya ayırmıştır. Oluşturduğu modelde kaç tane $\frac{1}{2}$'lik olduğunu belirleyeceği için $\frac{1}{2}$'i tam olarak düşünmüştür. Bir tamda iki tane $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{4}$'lük kısımda bir tane daha $\frac{1}{2}$ olduğunu görmüştür. Geriye kalan $\frac{1}{4}$'lik kısmı da bir tamı $\frac{1}{2}$ olarak aldığı ve $\frac{1}{4}$ de $\frac{1}{2}$'in yarısı olduğu için bölme işleminin sonucunun $3\frac{1}{2}$ olduğunu ifade etmiştir. Şeki 4.45'te Hale'nin $1\frac{3}{4} \div \frac{1}{2}$ işlemini alan modeli ile temsiline yer verilmiştir.



Şekil 4.45. Hale'nin $1\frac{3}{4} \div \frac{1}{2}$ işlemini alan modeli ile temsili, (AB görüşme formu- 8. Soru)

Hale yine $\frac{7}{5} \div \frac{1}{3}$ işlemini temsil etmek için alan modeli kullanmıştır. Ortak payda algoritmasına yönelik bir modelle açıklayacağı için $\frac{7}{5}$'yi $\frac{21}{15}$, $\frac{1}{3}$'i de $\frac{5}{15}$ haline getirmiştir. $\frac{21}{15}$ kesri bir tamdan büyük olduğu için temsilde iki dikdörtgene yer vermiştir. $\frac{21}{15} = \frac{15}{15} + \frac{6}{15}$ olmasından hareketle ilk modeli parçalara ayrılmamış şekilde göstermiş, ikinci model üzerinde de on beş eş parçanın altı eş parçasının $\frac{6}{15}$ kesrini gösterdiğini bildiği için sadece altı parçasını göstermiştir. $\frac{21}{15}$'in içinde kaç tane $\frac{5}{15}$ olduğunu bulmaya çalışmıştır. Burada beş eş parçayı bir tam olarak almıştır. Bir bütünde 15 eş parça olduğu için $\frac{15}{15}$ kesrinin içinde üç tane $\frac{5}{15}$ olduğunu ifade etmiş, fakat bunu model yardımı ile belirlememiştir. $\frac{6}{15}$ kesri de on beş eş parça içinden altı eş parça ile temsil edildiğinden bu altı parçanın beş tanesinin bir tam yaptığını, geriye kalan bir eş parçanın da beş eş parçanın $\frac{1}{5}$'i olduğunu, bu nedenle bölme işleminin sonucunun $4\frac{1}{5}$ olduğunu belirtmiştir.

Hale, $1\frac{2}{5} \div 2\frac{2}{3}$ işleminde bölen daha büyük olduğu için model ile temsil etmekte zorlanmıştır. Dokuzuncu sorudaki $3 \div \frac{1}{2}$ işlemini "üçün içinde kaç tane $\frac{1}{2}$ var, yarım var?" şeklinde yorumlamıştır. Tamların içinde kaç tane yarım olduğunu saymış ve altı yarım olduğunu görmüştür.

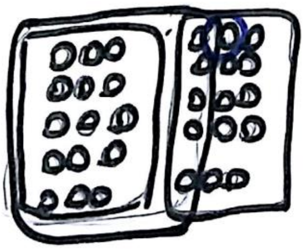
4.1.4.2. Öğretmen adaylarının kesirlerle bölme işleminde küme modeli kullanmalarına yönelik AB'lerine ilişkin bulgular. Öğretmen adaylarının kesirlerle bölme işleminde küme modeli kullanmalarına yönelik AB'leri sekizinci soruda yer alan işlemleri temsil etmede kullandıkları modeller aracılığıyla elde edilmiştir. İki kesrin bölümüne yönelik oluşturdukları küme modelleri; İlker, İpek ve Cemil'in payda kadar grup oluşturma ve pay kadarını alma/seçme, tekrar oluşturduğu gruplar içinde ikinci kesir kadar kaç nesne grubu olduğunu belirleme (ölçme anlamı) bilgisine sahip olduklarını göstermiştir.

İlker $\frac{7}{5} \div \frac{1}{3}$ işlemini "$\frac{7}{5}$'nin içinde kaç tane $\frac{1}{3}$ var?" şeklinde ifade etmiştir. $\frac{7}{5}$ kesrini alan modeli ile temsil etmek istemiş ve paydayı dikkate alarak daire şeklinde bir model oluşturmuştur. $\frac{7}{5}$'nin bir tamdan fazla olması nedeni ile iki daire kullanmıştır. Yani $\frac{7}{5} = \frac{5}{5} + \frac{2}{5}$ şeklinde düşünmüş ve paylarını dikkate alarak taralı kısımları oluşturmuştur. İlker önce ortak payda algoritmasının ne demek olduğunu anlayamamıştır Toplama işleminden yola çıkarak ortak payda algoritması ile ne kastedildiği kavratılmıştır. Ortak payda haline gelince "$\frac{21}{15}$'in içinde kaç tane $\frac{5}{15}$ var?" şeklinde ifade etmiştir. Alan modelinden vazgeçerek küme modeli ile temsil etmeye karar vermiştir. Kesrin paydasını dikkate alarak bir tamda yer alacak sayma nesnesi sayısını belirlemiştir. Her nesne grubu bir sayma nesnesinden oluşacak şekilde bir tamı ifade eden küme 15 sayma nesnesinden oluşmuş, ikinci kümede ise altı sayma nesnesi yer almıştır. Burada İlker beş sayma nesnesini bir tam olarak almıştır. 15 sayma nesnesinde beşli üç grup olduğunu, altı sayma nesnesinden beşinin bir grup oluşturduğunu, yani dört tam olduğunu ve geriye de bir sayma nesnesi kaldığını bulmuştur. Bir tam beş sayma nesnesinden oluştuğu için bir sayma nesnesinin $\frac{1}{5}$'i ifade ettiğini söylemiştir. İlker'in $\frac{7}{5} \div \frac{1}{3}$ işlemini küme modeli ile temsili Şekil 4.46'da ve küme modeli ile işlemin sonucunu nasıl bulduğu aşağıdaki kesitte yer almıştır.

İlker: *$\frac{21}{15}$ değil mi? Bölü mü $\frac{5}{15}$ diycem yine o zaman? Bunun içinde kaç tane $\frac{5}{15}$ var diyebilirim. Küme modeli yapalım bence. Bir tam olsun bu. Ondan sonra bunun içinde kaç tane $\frac{5}{15}$ var? Burada şöyle bir tane, iki tane oldu. Üç tane çıktı buradan. Bir de buradan dört tane çıktı (ikinci kümeden) yani. Bir de burası kaldı? $4\frac{1}{15}$. Dört tam çıktı değil mi?*

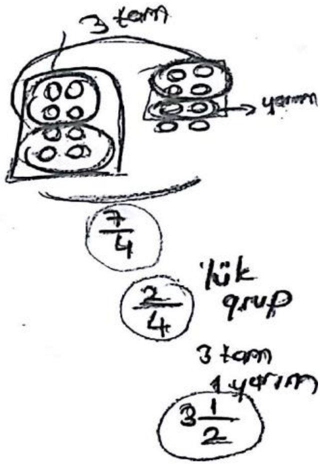
Araştırmacı: *Evet. Sonra bir tane kaldı. Bu bir tane de $\frac{5}{15}$'in ne kadarı yapar? Sen $\frac{1}{15}$ dedin.*

İlker: *Dört tane. Kaç tane var burada? Bir tane kalıyor işte $\frac{1}{15}$ diycez. (biraz düşünüyor) Beş beş grupladığımız için o zaman $\frac{1}{5}$ olacak.* (AB görüşme formu, 7. Soru)



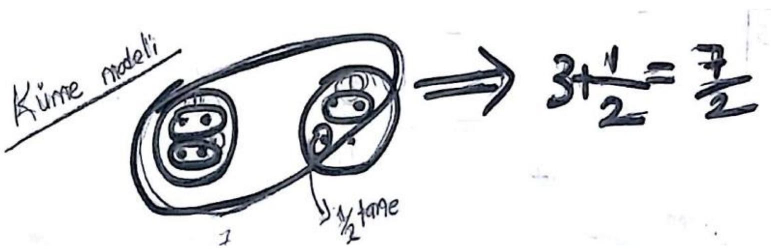
Şekil 4.46. İlker'in $\frac{7}{5} \div \frac{1}{3}$ işlemini küme modeli ile temsili, (AB görüşme formu- 7.soru)

İpek'ten $1\frac{3}{4} \div \frac{1}{2}$ işlemini farklı bir modelle göstermesi istendiğinde İpek $\frac{7}{4}$'ün içinde $\frac{1}{2}$'den kaç tane olduğunu düşünmüştür. Bunun da tekrarlı çıkarma gibi olduğunu düşünerek" çıkarma işlemi yapabilmek için paydalarının eşit olması gerekiyor gibi düşüneceğim. $\frac{1}{2}$ ile hani şeyleri içindeki $\frac{1}{2}$'lik parçaları da daha rahat görebilmek için paydalarının eşit olması gerekiyor diye düşüneceğim" şeklinde bir açıklama yapmıştır. Paydalarının eşitliği sonucu sorunun artık "$\frac{7}{4}$'ün içinde kaç tane $\frac{2}{4}$ var?" haline geldiğini bunun da "yedinin içinde kaç tane iki var?" sorusuna dönüştüğünü söylemiştir. $\frac{7}{4} \div \frac{2}{4}$ işlemini küme modeli ile temsil etmek istemiştir. Önce pay ve paydayı dikkate alarak bir tamda ikili dört grup, $\frac{3}{4}$'te ikili üç grup olacak şekilde $\frac{7}{4}$ kesrini temsil etmiştir. Bölmenin ölçme anlamını kullanarak bu oluşan ikili yedi grup içinde kaç tane ikili iki grup oluşacağını saymıştır. Burada ikili iki grup bir tam olmuştur. Sonuçta bir tamda ikili iki gruptan iki tane olduğunu, $\frac{3}{4}$'lük kısımda bir tane ikili iki grup, bir de ikili tek grup olduğunu, bunun da ikili iki grubun yarısı yaptığını görmüştür. İpek'in $1\frac{3}{4} \div \frac{1}{2}$ işlemini küme modeli ile temsili Şeki 4.47'de yer almıştır.



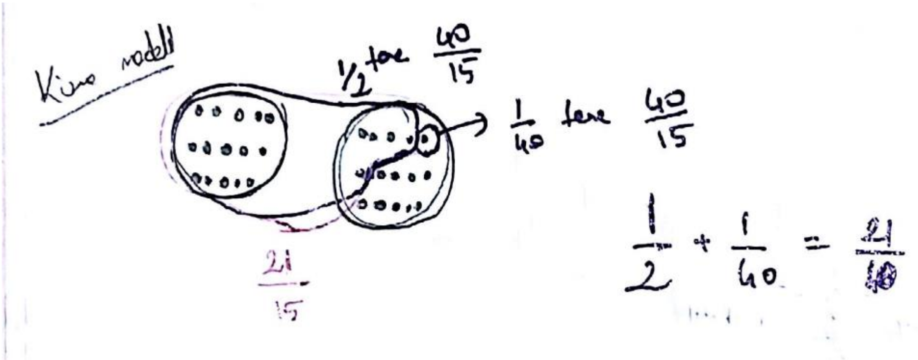
Şekil 4.47. İpek'in $1\frac{3}{4} \div \frac{1}{2}$ işlemini küme modeli ile temsili, (AB görüşme formu- 8. Soru)

Cemil, $1\frac{3}{4} \div \frac{1}{2}$ işlemini alan modeli ile temsil ettikten sonra küme modeli ile temsil etmiştir. Önce kesrin paydasını dikkate alarak bir tamda dört sayma nesnesinin yer alacağını belirlemiştir. $1\frac{3}{4}$ kesrini yedi sayma nesnesinden oluşacak şekilde temsil etmiştir. Bunun içinde kaç tane $\frac{1}{2}$ olduğunu bulmak istemiştir. $\frac{1}{2}$ kesri bir tamın yarısı olduğu için bir tam dört sayma nesnesinden oluştuğundan iki sayma nesnesini kaç tane $\frac{1}{2}$'lik olduğunu belirlerken bir tam olarak ele almıştır. Bir tamda iki $\frac{1}{2}$'lik olduğunu, $\frac{3}{4}$'lük kısımda bir tam, bir de $\frac{1}{2}$ tane $\frac{1}{2}$'lik olduğunu ifade etmiştir. Cemil'in $1\frac{3}{4} \div \frac{1}{2}$ işlemini küme modeli ile temsili Şekil 4.48'de yer almıştır.



Şekil 4.48. Cemil'in $1\frac{3}{4} \div \frac{1}{2}$ işlemini küme modeli ile temsili, (AB görüşme formu-8. Soru)

Cemil $1\frac{2}{5} \div 2\frac{2}{3}$ işlemini küme modeli ile temsil etmek için alan modelinde olduğu gibi ortak payda algoritması kullanmıştır. Bir tamda 15 sayma nesnesi yer almıştır. $\frac{21}{15}$ kesrini temsil etmek için 21 sayma nesnesi kullanmıştır. İçinde kaç tane 40 sayma nesnesi olduğunu bulmak istemiştir. Yine alan modelinde olduğu şekilde belirlemiştir. İkisinin arasında bir fark olmadığını, alan yerine sadece sayma nesnelerini kullandığını, alan ve küme modelini ayrı ayrı kullanmanın bir anlamı olmadığını belirtmiştir. Şekil 4.49'da Cemil'in $1\frac{2}{5} \div 2\frac{2}{3}$ işlemini küme modeli ile temsili yer almıştır.

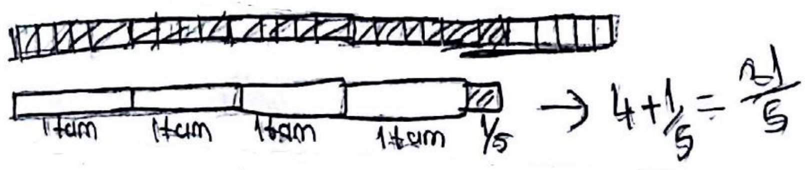


Şekil 4.49. Cemil'in $1\frac{2}{5} \div 2\frac{2}{3}$ işlemini küme modeli ile temsili, (AB görüşme formu- 8. Soru)

4.1.4.3. Öğretmen adaylarının kesirlerle bölme işleminde uzunluk modeli kullanmalarına yönelik AB'lerine ilişkin bulgular. İlker, İpek ve Hale kesirlerle bölme işlemini uzunluk modeli kullanarak temsil etmemiştir. Uzunluk modeli kullanımına yönelik AB'lerini belirlemede yalnızca dokuzuncu sorunun b şıkkı kullanılmıştır. Öğretmen adayları bu soruda $\frac{1}{2}$ birimlik uzaklığı referans alarak üçe kadar olan uzaklığın bu $\frac{1}{2}$'lik birimlerden kaç tane kullanılarak ölçülebileceğini düşünmüştür.

Cemil, kesirlerle bölme işleminde uzunluk modeli kullanan tek öğretmen adayı olmuştur. $\frac{7}{5} \div \frac{1}{3}$ işlemini alan modeli ile temsil ettikten sonra uzunluk modeli ile temsil etmiştir. Ortak payda algoritmasına yönelik bir modelle açıklayacağı için 21'in içinde kaç tane beşlik olduğunu göstermeye çalışmıştır. Beşlik uzunluklar almış ve bu uzunluğu referans alarak 21 birimlik uzunluğu ölçmek istemiştir. Dört tane beşlik uzunluğun yeterli olmadığını geriye bir birim kaldığını ifade etmiştir. O bir birimin de beşlik uzunluğun $\frac{1}{5}$'i olduğu için 4 tane bir de $\frac{1}{5}$ tane beşlik uzunluktan gerekli olduğunu söylemiştir. Cemil'in $\frac{7}{5} \div \frac{1}{3}$ işlemini uzunluk modeli ile temsili Şekil 4.50'de yer almıştır.

21'i beşliklerle göstermeye çalıştım. Beşlik uzunluklarla dört tane ile gösteremeyiz, bir tane fazla kalıyor, bir tane daha koydum. Sonra üstünü taradım mı diyeyim, taramadım. Çubuk olarak düşünürsek tarayamayız zaten. Sonra altına beşlik koydum, bir tane daha koydum, bir tane daha koydum, bir tane daha koydum. Ama şurada bir $\frac{1}{5}$'lik kısım kaldı onu da bir tane birlikten geldim koydum. Kaç tane beşlikten olduğunu sordum işte. Dört tane var bir de $\frac{1}{5}$ tane var. O da $\frac{21}{5}$ oluyor. (Cemil- AB görüşme formu, 8. Soru)



Şekil 4.50. Cemil'in $\frac{7}{5} \div \frac{1}{3}$ işlemini uzunluk modeli ile temsili, (AB görüşme formu- 8. Soru)

Öğretmen adaylarının verilen kesirleri model ile göstermelerine yönelik AB'leri, kesirlerin denkliğini model ile göstermelerine yönelik AB'leri, kesirlerle çarpma ve bölme işlemlerinde model kullanımına yönelik AB'leri alan modeli, küme modeli ve uzunluk modeli bağlamında ayrıntılı olarak incelendiğinde öğretmen adaylarının AB'lerinin genel olarak yeterli düzeyde olduğu görülmüştür Öğretmen adayları tarafından çoğunlukla ilk kullanılan model alan modeli olmuştur ve alan modeli ile temsilde genel olarak dikdörtgen şekli kullanılmıştır.Öğretmen adayları tarafından en az tercih edilen model uzunluk modeli olmuştur. Uzunluk modeli ile temsil edilmiş işlemleri doğru şekilde yorumlayabilmelerine rağmen kendileri kullanmayı tercih etmemişlerdir. Yine öğretmen adayları sayı doğrusu yardımıyla denk kesirler elde etmede genel olarak işlemsel düzeyde bir bilgi kullanmışlardır.

4.2. Öğretmen Adaylarının Kesirlerle Çarpma ve Bölme İşlemlerinde Model Kullanıma Yönelik PAB'larına İlişkin Bulgular ve Yorum

Bu bölümde öğretmen adaylarının kesirlerde çarpma ve bölme işlemlerinde model kullanımına yönelik PAB'larının nasıl olduğu incelenmiştir. Verilerin analizi belirlenmiş olan kuramsal çerçevedeki PAB bileşenlerine göre yapılmıştır. Bulguların ortaya konmasında öğretmen adaylarının hazırlamış oldukları ders planları, ders için hazırlamış oldukları notlar ve gerçekleştirmiş oldukları derslerin gözlemlerinden elde edilen veriler paralel bir şekilde analiz edilerek birlikte sunulmuştur.

Öğretmen adaylarının derslerine, ders planlarına ve hazırlamış oldukları notlara ilişkin bulgular sunulurken PAB bileşenlerinin ve alt bileşenlerinin her biri için ayrı ayrı analizlere yer verilmiştir ve alt bileşenler de kategorilere ayrılarak bu kategorilerde öğretmen adaylarının sergilediği yaklaşımlar incelenmiştir. Her öğretmen adayının dersi ayrı ayrı ele alınmış ve söz konusu bileşenlere ilişkin analizlerin daha iyi ortaya konulması için derslerden veya kullanılan dokümanlardan kesitler verilerek örneklemeler yapılmıştır.

4.2.1. Öğretmen Adaylarının Kesirlerle Çarpma İşleminde Model Kullanıma Yönelik PAB'larına İlişkin Bulgular ve Yorum

Bu kısımda öğretmen adaylarının 6. Sınıflarda "6.1.4.4. İki kesrin çarpma işlemini yapar ve anlamlandırır." kazanımına yönelik gerçekleştirdikleri derslerin gözlemlenmesi sonucu elde edilen verilerin analizine, bu kazanıma yönelik hazırlamış oldukları ders planlarının ve ders notlarının analizine yer verilmiştir. Aynı zamanda bir öğretmen adayının inceleme çalışması olarak öğrencilere vermiş olduğu çalışma kağıtları da o öğretmen adayı için analize dahil edilmiştir.

Belirlenmiş olan kuramsal çerçevede PAB bileşenleri olarak "öğrenci bilgisi" ve "matematiksel temsiller bilgisi" yer almaktadır. Veriler bu bileşenler açısından ayrı ayrı analiz edilmiştir. Bu bileşenler de alt bileşenlerden oluşmaktadır. Her bir alt bileşen ayrı şekilde ele alınmış ve öğretmen adaylarının derslerinden, ders planlarından ve hazırlamış oldukları notlardan kesitler verilerek veriler desteklenmiştir.

4.2.1.1. Öğretmen adaylarının kesirlerle çarpma işleminde model kullanımına yönelik öğrenci bilgisi. Bulgular öğrenci bilgisinin "öğrenci ön bilgisi", "öğrenci hataları/kavram yanılgıları", "öğrenci zorlukları", "anlamanın değerlendirilmesi", "öğrenci düşüncesine odaklanmaalt bileşenlerine göre ayrı ayrı ele alınmıştır.

4.2.1.1.1. Öğretmen adaylarının kesirlerle çarpma işleminde öğrenci ön bilgisi. Öğrenci ön bilgisine ilişkin bulgular öğrencilerin konu ile ilgili ön bilgilerini belirleme, öğrencilerin ön bilgilerini ortaya çıkaracak sorular sorma ve ön bilgi ile yeni bilgi arasında bağlantı kurma kategorilerinde ayrı ayrı ele alınmıştır.

4.2.1.1.1.1. Öğrencilerin konu ile ilgili ön bilgilerini belirleme. İlker ve Cemil planlarında kesirlerle çarpma işleminde öğrencilerin doğal sayılarda çarpma işlemi ve kesir kavramına yönelik ön bilgilere sahip olmaları gerektiğini belirtmişlerdir. Aynı zamanda ders planlarında çarpma işleminin anlamını hatırlatacaklarını ve doğal sayı ile kesrin çarpımına yönelik bir problem vereceklerini ifade etmişlerdir. İki öğretmen adayı da planında yer verdiği şekilde derslerine çarpma işleminin anlamını hatırlatarak başlamıştır. Bu hatırlatmada örnek üzerinden hareket etmişlerdir. İlker öğrencilere 5×10'un ne demek olduğunu sormuş, bir öğrencinin "beş kere 10" demesi üzerine İlker "10+10+10+10+10" şeklinde ifade etmiş ve öğrencilere "Biz bunu toplamak yerine çarpıyoruz öyle değil mi?" sorusunu yöneltmiştir. Sınıfın hep bir ağızdan "evet" diye cevap vermesi üzerine çarpmanın toplamanın kısa yolu olarak kabul edilip edilemeyeceğini sormuş, fakat öğrencilerden bir cevap alamamış, bunun üzerine öğrencilere ilave bir soru yöneltmemiştir. Ders planında gerekli ön bilgiler olarak "Çarpma işleminin anlamını kavrar. Kesrin sadeleştirilmesi işlemlerini yapar. Bir kesrin pay ve paydasının ne anlama geldiğini kavrar. Bir kesri modelleyebilir" ifadelerine yer veren İpek dersinde diğer iki öğretmen adayı gibi çarpma işleminin anlamını hatırlatmak için bir örnekten faydalanmıştır. İpek ve İlker'in aksine Cemil toplama işleminden hareketle doğal sayılarda çarpma işleminin anlamını hatırlatmak istemiştir. Öğrencilere "10 tane 20 sayısının toplamı kaçtır?" diye sormuş ve bir öğrenci de "200" diye cevap vermiş ve ardından ona "Hemen nasıl yaptın, topladın?" diye sormuştur.

Farklı bir öğrenci "çarparak" cevabını vermiştir. Cemil "Ama ben toplayarak diyorum. Toplayarak yapmayacak mıyız?" diye sormuş ve öğrencilerden bir tanesi "çarpma toplamanın kısa yoludur" diye cevap vermiştir. Öğrencilere "nasıl toplamanın diye sormuş?", fakat tekrarlı toplama olduğu cevabını kendisi vermiştir. Cemil burada öğrencilerin ön bilgilerini belirlemede çok da başarılı olamamıştır. İpek diğer iki öğretmen adayının aksine daha fazla sayıda öğrenciye söz hakkı vermesi ve çarpmanın taşıdığı anlamı birlikte ifade ettikleri için öğrencilerin bu konudaki ön bilgilerini belirlemede daha başarılı olmuştur. Hale ise dersine sadece "model hakkında bilgisi olan var mı?" sorusu ile başlamıştır. Hale kesirlerle çarpma işlemine geçmeden önce öğrencilerin ön bilgilerini belirlemede ve gerekli ön bilgileri onlara hatırlatmada başarısız olmuştur. Hale derse bir ön bilgi yoklaması ve hatırlatması ile başlamamıştır.

İlker öğrencilere "model biliyor musunuz?" diye sormuş ve $\frac{3}{4}$'ü model ile göstermelerine istemiştir. Öğrencilerden bir tanesine söz hakkı vermiştir. Öğrenci $\frac{3}{4}$ kesrini alan modeli ile temsil etmiştir ve İlker burada öğrenciye kesri nasıl temsil ettiğine yönelik bir soru yöneltmemiştir. Öğrencinin temsilinin ardından sadece "herkes anladı mı bunu?" diye sormuştur. Burada İlker farklı öğrencilere farklı temsiller oluşturma imkânı tanımamış ve çeşitli öğrencilerin ön bilgilerini belirleme girişiminde bulunmamıştır. Öğrencilerin "evet" şeklinde cevap vermelerinden tüm öğrencilerin kesrin model ile temsiline yönelik bilgiye sahip olduklarını varsaymıştır. Tüm öğrencilerin ön bilgilerini belirleyemediği için de eksikliklerini belirleyip göz önünde bulunduramamıştır. Sonraki problemlerde öğrencilerin oluşturdukları temsillerden yola çıkarak kesrin model ile temsiline yönelik ön bilgileri hakkında fikir sahibi olabilmiştir. Cemil ve Hale ise dersinde öğrencilerin kesirlerin model ile temsiline yönelik ön bilgilerini belirlememiştir. Sadece öğrencilerin ders esnasında oluşturduğu temsiller ile kesirlerin model ile temsiline yönelik bilgileri hakkında fikir sahibi olabilmiştir. İpek öğrencilere $\frac{2}{3}$ kesrinin ne anlama geldiğini sormuştur. İpek burada kesrin anlamı, pay ve paydanın anlamları üzerinde durmuş ve öğrencilerin bu konudaki ön bilgilerini belirlemiştir. Bu ön bilgi hatırlatmasının ardından İpek öğrencilerden $\frac{2}{3}$ kesrini model ile göstermelerini istemiştir. Fakat kesrin sadece alan modeli ile temsili gerçekleştirilmiş, farklı öğrencilerden temsiller oluşturmaları istenmemiştir. Bu nedenle İpek öğrencilerden $\frac{2}{3}$ kesrini model ile göstermelerini isteyerek öğrencilerin sadece alan modeline yönelik bilgilerini belirleyebilmiştir.

Tüm öğretmen adayları iki kesrin çarpımına geçmeden öğrencilere doğal sayı ile kesrin çarpımına yönelik işlemler ve problemler vermişlerdir. Böylece öğrencilerin doğal sayı ile kesrin çarpımını model ile temsil etme ve verilen problemlerin hangi işlem kullanılarak çözülebileceğine dair ön bilgilerini belirlemek istemişlerdir. İpek ve Hale'nin dersinde doğal sayı ile kesrin çarpımında küme modeli de kullanılırken, İlker ve Cemil'in dersinde ise sadece alan modeli kullanılmıştır. İlker doğal sayı ile kesrin çarpımına yönelik "Altı öğrenci okulun bahçesinde kişi başı bir pastanın $\frac{2}{3}$'sini yediklerine göre toplam kaç pasta yemişlerdir?" problemini yazdırmıştır. Öğrencinin $\frac{2}{3}$ kesrini temsilinin ardından oluşturulan temsildeki parçaların eşit olmadığını söyleyerek eş parçalar olması gerektiğine vurgu yapmak istemiştir. Fakat burada öğrenciye herhangi bir soru yöneltmediği için öğrencinin bu konudaki bilgisini ve eksikliklerini belirleyememiştir. Öğrenci temsilinin ardından sonucun dört olduğunu söylemiş, İlker öğrenciye sonucu nasıl bulduğunu sormamış ve öğrencinin "eş parçalar olmasından dolayı taralı kısımları bir araya getirerek bütüne tamamlama" yaklaşımını kullandığını varsayarak öğrencinin oluşturduğu temsilin açıklamasını yapmıştır. İlker bu soru için farklı bir öğrenciye söz hakkı vermemiş ve böylece öğrencilerin doğal sayı ile kesrin çarpımının model ile temsiline yönelik bilgilerini belirlemede başarısız olmuştur. Problemin çözümünün model yardımı ile bulunmasının ardından İlker öğrencilere farklı şekilde nasıl bulabileceklerini sormuştur. Öğrencilerden bir tanesi çarparak yapabileceklerini söylemiş sadeleştir ve çarp ile cevabı bulmuştur. Başka bir öğrenci ise altı tane $\frac{2}{3}$'nin toplanabileceğini söylemiştir. Böylece İlker bu öğrencinin ön bilgisini belirleyebilmiş, "$\frac{2}{3}+\frac{2}{3}+\frac{2}{3}+\frac{2}{3}+\frac{2}{3}+\frac{2}{3}$" şeklinde ifade etmiş ve fakat sonucun $\frac{12}{3}$ olduğunu kendisi söylemiştir. İpek "altı arkadaş origami etkinliği düzenleyecek. Her biri bir kağıdın $\frac{2}{3}$'sini kullanıyorsa toplam ne kadar kağıt gerekir?" probleminin çözümümü model yardımı ile bulması için bir öğrenciye söz hakkı vermiştir. İpek böylece öğrencinin kesirleri model ile temsil etme ve doğal sayı ile kesrin çarpımının alan modeli ile temsiline yönelik ön bilgisi hakkında bilgi sahibi olabilmiştir. İpek'in sonucun algoritma ile değil de farklı bir şekilde bulunacağını söylemesi üzerine öğrenci tekrarlı toplama ile sonuca ulaşmıştır. İpek öğrenciyi model üzerinden sonucu bulmaya yönlendirerek kesirlerle toplama işlemi ve çarpma işleminin tekrarlı toplama olduğu konularındaki ön bilgileri hakkında fikir sahibi olmuştur. Ders esnasında tüm öğrencilerin modellerini inceleyerek ön bilgilerini belirleyemeyen İpek dersten sonra öğrencilerin çalışma kağıtlarını inceleyerek öğrenci ön bilgilerini belirleyebilmiştir. Cemil doğal sayı ile kesrin çarpımının model ile temsilinde öğrenciyi tamamen kendisi yönlendirmiş, öğrenci bütünü eş parçalara ayırmayınca eş parçalara ayırması gerektiğini kendisi söylemiştir. Aynı zamanda verilen problemin hangi işlem kullanılarak çözülebileceğini de kendisi söylediği için öğrencilerin ön bilgilerini belirlemede başarısız olmuştur. Hale $6\times\frac{1}{2}$ işlemini model ile temsil etmeleri için öğrencilere zaman tanımıştır. Bu esnada sınıf içerisinde dolaşarak öğrencilerin oluşturduğu temsilleri incelemiştir. Öğrencilerin oluşturmuş olduğu temsilleri inceleyerek kesirlerin model ile temsiline yönelik ve doğal sayı ile kesrin çarpımının model ile temsiline yönelik öğrenci ön bilgileri hakkında fikir sahibi olabilmiştir. Soruyu çözmesi için tahtaya bir öğrenci kaldıran Hale öğrencinin başta aldığı bütün ile sonuç olarak elde ettiği bütünlerin aynı olmadığını fark etmiş ve öğrenciye oluşturduğu temsilin $3\frac{1}{2}$ olduğunu, üç tam şeklinde olması gerektiğini söylemiş ve başta aldığı bir tamı göstermiştir. Hale burada öğrenciye herhangi bir soru sormamış, bu nedenle onun sahip olduğu ön bilgiyi belirlemede başarısız olmuştur. Bu işlemin alan modeli ile temsilinden sonra Hale bir de küme modeli ile temsile yer vermiştir. Temsili oluştururken öğrencilere “$\frac{1}{2}$ ne demektir?” diye sorarak öğrencilerin kesrin anlamı konusundaki ön bilgilerini belirleyebilmiştir.

Cemil öğrencilere verdiği “Elindeki şekerlerin $\frac{2}{5}$’sinin $\frac{2}{3}$’sini arkadaşı Ethem’e veren İbrahim’in elinde baştaki toplam şeker miktarının kaçta kaçı kalmıştır?” probleminin çözümü model yardımı ile bulunduktan sonra sonucun bir de algoritma yardımıyla bulunmasını istemiştir. Öğrencilere bu esnada hangi işlemin yapılması gerektiğini ve kesir çizgisinin altında ve üstünde kalan sayıların neler olduğunu sorarak öğrencilerin ön bilgilerini belirlemiştir. Diğer tüm öğretmen adaylarından farklı olarak Hale iki kesrin çarpımının model ile temsilinde dikdörtgenin alanından faydalanmak istemiştir. Burada öğrencilere dikdörtgenin alanının nasıl bulunduğunu sorarak ön bilgilerini belirlemek istemiştir.

4.2.1.1.1.2. Öğrencilerin ön bilgilerini ortaya çıkaracak sorular sorma. İlker, İpek ve Cemil öğrencilerin doğal sayılarda çarpma işleminin anlamına yönelik ön bilgilerini belirlemek için sorular yöneltmişlerdir. İlker “Beş tane 10 toplamak öyle değil mi?”, “Biz çarpmayı toplamanın kısa yolu olarak kabul edebiliriz değil mi?” şeklinde öğrenciyi yönlendirici ve aslında cevabı kendisinin verdiği sorular kullanmıştır. Cemil ise sorduğu sorunun cevabını kendisi vererek öğrenci ön bilgisini ortaya çıkartmada etkili sorular kullanamamıştır. İpek öğrencilere sorduğu sorular karşısında düşüncelerini açıklama imkânı tanımıştır. Aynı zamanda İpek öğrencilere $\frac{2}{3}$ kesrinin ne anlama geldiğini sorarak kesrin taşıdığı anlam konusunda öğrenci ön bilgilerini belirlemek istemiştir. İpek'in dersine yönelik bir kesit aşağıda yer almıştır:

İpek:	*Ve biz $\frac{2}{3}$ gibi bir kesrin neyi ifade ettiğini biliyorduk arkadaşlar?*
Öğrenci 1:	*Üç parçaya ayrılmış, ikisi alınmış.*
İpek:	*Neyi?*
Öğrenci 2:	*Bütünün.*
İpek:	*Bir bütün. Bunun adı neydi? (3 için soruyor)*
Sınıf:	*Payda.*
***İpek*:**	*Bu? (2 için)*
Sınıf:	*pay*
İpek:	*O zaman bir bütünü kesirler ne yapıyordu?*
Sınıf:	*Paydaya bölüp payı kadar alınıyor.*
İpek:	*Bir bütünü paydası kadar bölüp payı kadarının alınması demekti. Bunu model kullanarak nasıl ifade edebiliriz?*
Öğrenci 3:	*Bir bütünü üç parçaya bölüp, ikisini alırız*. (İpek- kesirlerle çarpma ders gözlemi)

İpek dersinde öğrencilere pay ve payda kavramlarını hatırlatmış, pay ve paydanın işlevinden hareketle öğrencilerin kesri model ile temsil etmelerini sağlamıştır. Burada İpek'in öğrencilerin ön bilgilerini ortaya çıkarmak için etkili ve uygun sorular kullandığı görülmüştür. İlker öğrencilerden $\frac{3}{4}$ kesrini model ile temsil etmelerini istemiş, fakat temsili nasıl oluşturduklarını sorgulamamıştır.

Doğal sayı ile kesrin çarpımının alan modeli ile temsilinde Hale öğrenci ön bilgisini ortaya çıkartmak için uygun sorular kullanmamıştır. $6\times\frac{1}{2}$ işlemini tahtada model ile temsil eden öğrenci başlangıçta ve sonuçta farklı bütünler almıştır. Hale burada öğrenciye neden bu şekilde bir temsil oluşturduğunu sormamıştır. Hale gibi İlker ve Cemil de öğrencilerin doğal sayı ile kesrin çarpımının alan modeli ile temsiline yönelik öğrenci ön bilgilerini ortaya çıkaracak sorular kullanmamışlardır. İpek ders esnasında öğrencilerin oluşturdukları temsilleri incelemiş, oluşturdukları temsiller karşısında onlara bazı sorular yöneltmiştir.

Fakat arada geçen bu diyaloglar tam olarak anlaşılamadığı için İpek'in etkili sorular kullanıp kullanmadığı hakkında tam bir gözlemde bulunulamamıştır. Sadece tahtaya çıkan öğrenciye temsilini oluştururken baştaki bütünün ne olduğunu sormuş, öğrenci kâğıdın $\frac{2}{3}$'sinin kullanıldığını, yani üçe bölünüp ikisinin kullanıldığını söylemiş ve altı bütün üzerinde $\frac{2}{3}$ kesrini temsil etmiştir. Öğrencinin bu şekilde bir açıklama yapmasının ardından İpek başka bir soru yöneltmemiş, sadece öğrenciden çözümü algoritma kullanmadan bulmasını istemiştir. Öğrenci tekrarlı toplama kullanarak sonucu bulmuştur. Bunun üzerine İpek öğrencilere yapılan işlemin zaten problemin çözümü için bir ipucu verdiğini söylemiş ve problemin çözümünde hangi işlemin kullanılacağını düşündüklerini sormuştur. Öğrencilerin "çarpma" diye cevap vermesi üzerine ilave bir soru yöneltmemiştir. İpek "24 arabanın $\frac{3}{4}$'ü gri renkliyse kaç araba gri renklidir?" probleminde öğrencilerin 24 tane bütün çizmede zorlanacaklarını düşünerek başka bir yöntem düşünmeleri için yönlendirmiştir. Bu problemin küme modeli ile temsiline yönelik İpek'in dersinden bir kesit aşağıdaki gibidir:

İpek: *Şimdi 24 tane arabamız var. 24 taneyi az önce yaptığımız gibi yapabilirsiniz. Ama çok uzun sürecek. Başka bir yöntem bulmamız gerekiyor. Mesela 24'ün $\frac{3}{4}$'ü. Bu bizim neyimizdi (4)?*

Öğrenciler: *Payda.*

İpek: *Payda ne yapıyordu?*

Öğrenci 1: *Bölüyordu.*

İpek: *Bölüyordu. Peki bölme ne anlama geliyor?*

Öğrenciler: *Parçalamak.*

İpek: *Parçalamak başka?*

Öğrenci 2: *Ayırmak.*

Öğrenci 3: *Bir parçayı eşit olarak.*

İpek: *Parçalamak değil mi? Biz neyi parçalayacağız peki?*

Öğrenci 4: *Arabayı.*

İpek: *Her arabayı parçalarsak arabayı kullanabilir miyiz? O yüzden 24 tane arabayı ne yapacağız arkadaşlar?*

Öğrenciler: *Böleceğiz.*

İpek: *Dörde böleceğiz. Dörde böldüğümüzde… Bunu nasıl ifade edebiliriz?*

Öğrenci 5: *Neyi nasıl ifade edebiliriz?*

İpek: *Gösterir misin? (diyerek bir kızı tahtaya kaldırdı)Yani arkadaşlar 24÷4 işlemini*

…

İpek: *Peki şu an elimizde dörde parçalanmış bir ne oluştu? Model oluştu değil mi arkadaşlar? Şimdi ne yapmam gerekiyor? Ben paydanın işlevini yerine getirdim. Sırada ne var?*

Öğrenci 6: *Pay kadar alacağız.*

İpek: *Pay kadar alacağız.* (İpek-Kesirlerle çarpma ders gözlemi)

Verilen alıntıdan İpek'in öğrencilerin pay ve paydanın taşıdığı anlam konusundaki ön bilgilerini ortaya çıkarmada uygun sorular kullandığı görülmektedir. Paydanın taşıdığı anlamdan yola çıkarak İpek öğrencilerin küme modeli temsili oluşturmalarını, 24'ü dörde bölmeyi düşünmelerini istemiştir. Fakat öğrencilerden böleceğiz cevabını almasına rağmen 24'ün dörde bölüneceğini kendisi söylediği için bu noktada etkili bir soru kullanamadığı görülmüştür. Öğrenci 24 küçük dikdörtgeni eş dört gruptan oluşacak şekilde yerleştirdikten sonra İpek paydanın işlevinin yerine getirildiğini söylemiş ve sıradaki işlemin ne olduğunu sormuştur. Bunun üzerine öğrenci pay kadar grup seçmesi gerektiğini belirtmiştir. Öğrenci bu esnada ne yapacağını anladığı için İpek'in etkili bir soru kullandığı düşünülmüştür.

İlker ve Cemil de doğal sayı ile kesrin çarpımına yönelik verilen problemlerin çözümünün hangi işlem kullanılarak yapılacağına dair sorular kullanmışlardır. Fakat bu sorular öğrencilerin ön bilgilerini ortaya çıkarmada etkili olmamıştır. Aynı zamanda İlker ve Cemil söz hakkı verdikleri öğrencilere kesirlerin model ile temsiline yönelik sorular da sormuşlardır. Fakat yine bu sorularda öğrencinin cevap vermesine imkân tanımamışlar, öğrenciyi kendileri yönlendirmişlerdir. Hale $\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}$ işlemini öğrencilerden model ile göstermelerini istemiştir. Öğrencilere $\frac{2}{3}$'nin nasıl gösterileceğini sormuş, ardından kendisi bütünü üç eş parçaya ayırmıştır. Sonrasında öğrencilere "Şu an üçe ayırdım. İkisini tarayacağım değil mi?" şeklinde bir soru yöneltmiştir. Hale burada öğrencilere kesirlerin model ile temsiline yönelik ön bilgilerini ortaya çıkarmak amaçlı soru soruyormuş gibi görünse de aslında cevabı kendisinin verdiği bir soru kullanmıştır. Hale ikinci ders saatinde de çok sayıda soru kullanmış, fakat bu sorular cevapları kendisinin vermesi nedeni ile öğrenci ön bilgilerini ortaya çıkarmak için uygun ve etkili sorular olmamıştır.

Cemil, dersinde verdiği problemin model ile temsilinden sonra öğrencilerden çözümün farklı bir yolla daha bulunmasını istemiştir. Öğrencilere çarpma işleminin nasıl yapıldığını ve İpek'in de dersin başında öğrencilere sorduğu gibi kesir çizgisinin altında ve üstünde kalan sayıların neler olduğunu sormuştur. Öğrencilerin pay ve payda şeklinde cevap vermeleri üzerine ilave bir soruya gerek olmadığını düşünerek başka bir soru daha yöneltmemiştir.

İpek öğrencilere iki kesrin çarpımının alan modeli ile temsilinde sonucu bulurken pay ve paydanın taşıdığı anlamla bağlantı kuracak şekilde ve modeli oluştururken kesirlerde çarpma işleminin taşıdığı anlamla bağlantı kurmalarını sağlayacak sorular yöneltmiştir.

Hale diğer öğretmen adaylarından farklı olarak verilen çarpma işleminin alan modeli ile temsilinde dikdörtgenin alanında faydalanmıştır. Öğrencilere dikdörtgenin alanının nasıl bulunduğunu sormuş, verilen model üzerinde taralı alanı ve toplam alanı söylemelerini istemiştir. Öğrencilerin doğru bir şekilde cevap vermeleri üzerine ilave bir soru yöneltmemiştir.

4.2.1.1.1.3. Ön bilgi ile yeni bilgi arasında bağlantı kurma. İpek ve Cemil kesirlerin model ile temsilinde pay ve paydanın taşıdığı anlamlar ile bağlantı kurmuşlardır. İlker ve Cemil doğal sayı ile kesrin çarpımının alan modeli ile temsilinde tüm parçaların eş olmasından hareketle taralı kısımları bir araya getirerek bütüne tamamlamaya çalışmışlardır. Cemil "6A sınıfı gezi kulübü üyesi altı öğrenci akşam yemeğinde buluşuyorlar. Kişi başı bir ekmeğin $\frac{2}{3}$'si tüketildiğine göre toplam kaç ekmek tüketilmiştir?" probleminde öğrenciyi her kişinin yediği ekmeği ekleyerek bütüne tamamlama yaklaşımı ile sonucu bulmaya yönlendirdiği burada aynı zamanda çarpmanın tekrarlı toplama olduğu bilgisi ile bağlantı da kurulduğu görülmüştür. İpek de dersinde doğal sayı ile kesrin çarpımını model ile temsil etmek üzere tahtaya kalkan öğrencinin çarpma işlemi kullanmadan sonucu bulmasını istemiştir. Öğrenci burada tekrarlı toplama kullanmış, sonrasında problemin çözümünün çarpma işlemi ile yapılacağı ifade edilmiştir. Burada çarpmanın tekrarlı toplama olması ve kesirlerle toplama işlemi ön bilgileri ile bağlantı kurulmuştur. İlker ise "Altı öğrenci okulun bahçesinde kişi başı bir pastanın $\frac{2}{3}$'sini yediklerine göre toplam kaç pasta yemişlerdir?" probleminin çözümü model yardımı ile bulunduktan sonra öğrencilerden farklı şekilde de sonuca ulaşmalarını istemiştir. Bir öğrenci altı tane $\frac{2}{3}$'nin toplanacağını söylemiştir. Öğrencinin bu ifadesi üzerine İlker "$\frac{2}{3}+\frac{2}{3}+\frac{2}{3}+\frac{2}{3}+\frac{2}{3}+\frac{2}{3}$" şeklinde ifade etmiştir ve kesirlerle toplama işlemi kullanarak sonuç bulunmuştur. Böylece İpek'in dersinde olduğu gibi çarpma işleminin tekrarlı toplama olduğu ve kesirlerle toplama işlemi ön bilgileri ile bağlantı kurulmuştur.

Doğal sayı ile kesrin çarpımının küme modeli ile temsilinde İpek ve Hale pay ve paydanın taşıdığı anlam ile bağlantı kurmuşlardır. İpek küme modeli ile temsilde öğrencilere pay ve paydanın işlevini sormuş, öğrencilerin paydanın işlevinin bölmek olduğunu söylemeleri üzerine bölmenin taşıdığı anlamı ifade etmelerini istemiştir. Bölmenin anlamından hareketle öğrenci nesneleri kesrin paydası kadar eş gruba ayırmıştır. Bunun ardından İpek öğrencilere paydanın işlevinin yerine getirildiğini söylemiş ve sırada yapılacak olan şeyin ne olduğunu sormuştur. Öğrenci pay kadar nesne grubunun seçileceğini belirtmiştir. Hale ise dersinde $6\times\frac{1}{2}$ işlemini alan modeli dışında bir de küme modeli ile temsil etmiştir. Küme modeli ile temsil etmek için öğrencilere $\frac{1}{2}$'in ne anlama geldiğini sormuştur. Kesrin taşıdığı anlamdan hareketle işlemi küme modeli üzerinde temsil etmiştir.

Tüm öğretmen adayları iki kesrin çarpımının alan modeli ile temsilinde kesirlerle çarpma işleminin taşıdığı anlam ile ve iki kesrin çarpımının alan modeli ile temsili ve sonucun yorumlanmasında pay ve payda kavramları ile bağlantı kurmaya çalışmışlardır. İlker "Elinizde bir pizzanın $\frac{3}{4}$'ü kalmış. Bu kadar pizzanın $\frac{1}{3}$'ini erkek kardeşinize verirseniz kardeşiniz bir bütün pizzanın ne kadarını almış olur?" probleminin çözümü için bir öğrenciye söz hakkı vermiş, öğrencinin oluşturduğu temsilin ardından kendisi de bir temsil oluşturmuştur. Burada problemi model ile temsil etmede iki kesrin çarpma işleminin anlamı ile, kesirleri model ile gösterirken ve sonucu yorumlamada pay ve paydanın taşıdığı anlamla bağlantı kurmuştur. Bu işlemleri yaparken soru ifadeleri kullansa bile cevabı da kendisi verdiği için öğrencilerin bağlantı kurmalarını sağlamada başarısız olmuştur. İlker'in $2\frac{1}{2} \times \frac{3}{5}$ işlemini model ile temsil etmek üzere söz hakkı verdiği öğrenci iki kesir için farklı temsiller oluşturmuştur. İlker burada öğrencinin temsili oluştururken kesirlerle çarpma işleminin taşıdığı anlam ile bağlantı kurmasını sağlayamamıştır. İlker'in aksine öğrenciler temsillerini oluştururken sorduğu sorular ile İpek öğrencilerin kesirlerle çarpma işleminin taşıdığı anlam, pay ve paydanın taşıdığı anlamla bağlantı kurmalarını sağlamıştır. "Zahide'nin evinde bir pizzanın $\frac{3}{4}$'ü bulunuyor. Bu pizzanın $\frac{1}{3}$'ini erkek kardeşine verdiğine göre erkek kardeşi bütün bir pizzanın kaçta kaçını almış olur?" probleminde Cemil öğrencinin temsili oluşturmasında kesirlerle çarpma işleminin taşıdığı anlam ve sonucun bulunmasında pay ve paydanın taşıdığı anlam ile bağlantı kurmasını sağlarken, "Elindeki şekerlerin $\frac{2}{5}$'sinin $\frac{2}{3}$'sini arkadaşı Ethem'e veren İbrahim'in elinde baştaki toplam şeker miktarının kaçta kaçı kalmıştır?" probleminde elde edilen taralı alanı bulmada cevabı kendisinin vermesi nedeni ile öğrencinin ön bilgi ile bağlantı kurmasını sağlayamamıştır. $\frac{2}{3} \times \frac{1}{3}$ işleminde $\frac{2}{3}$ kesrinin temsilinin ardından daha sonra taralı kısımların $\frac{1}{3}$'inin alınacağını belirterek kesirlerde çarpma işleminin alan modeli ile temsilinde kesirlerde çarpma işleminin taşıdığı anlam ile bağlantı kurmuştur. Çarpma işleminin temsilinin ardından oluşan taralı kısmı yorumlamada yine pay ve paydanın taşıdığı anlam ile bağlantı kurulmuştur. $\frac{4}{5}\times\frac{1}{2}$ işleminin alan modeli ile temsilinde Hale yine kesirlerde çarpma işleminin taşıdığı anlamla bağlantı kurmuş, pay ve paydanın taşıdığı anlamlar ile kesirleri model ile temsil etmiştir. Bir öğrenci oluşturulan temsilin ardından neden $\frac{4}{5}$'ün temsili ile oluşan taralı kısımların $\frac{1}{2}$'inin alındığını sormuştur. Hale öğrenciye başta taradığı alanın orası olduğunu söyleyerek, kalan bir parçayı başta taramadığını belirterek açıklamaya çalışmıştır. Hale burada öğrencinin kesirlerle çarpma işleminin taşıdığı anlamla bağlantı kurmasını sağlayacak şekilde sorular yöneltmemiştir. Hale ilk dersinde son olarak $\frac{3}{4}$'ün $\frac{1}{3}$'inin bulunmasını istemiştir. Bir öğrenciye işlemi model ile temsil etmesi için söz hakkı vermiştir. Öğrenciden $\frac{3}{4}$ kesrini model ile göstermesini istemiş, temsilin ardımdan "şimdi bunun $\frac{1}{3}$'ini göstereceğim, değil mi ben, sadece taralı alanın?" diye sorarak öğrencinin kesirlerle çarpma işleminin taşıdığı anlam ile bağlantı kurmasını sağlamak istemiştir. Fakat öğrenci sorduğu sorulara cevap vermemiş, tüm şekli üçe böleceğini fakat sadece taralı kısımların içinden bir parçayı alacağını kendisi ifade etmiştir. Çarpma işleminin alan modeli ile temsilinin ardından sonucu bulmak için Hale dikdörtgenin alanından faydalanmıştır.

4.2.1.1.2. Kesirlerle çarpma işleminde öğrenci hataları/kavram yanılgıları. Öğrenci hataları/kavram yanılgıları alt bileşenine ilişkin bulgular dersi planlarken öğrencilerin sahip olabileceği kavram yanılgıları ve hataları göz önünde bulundurma, ders esnasında öğrencilerin sahip olduğu hata ve kavram yanılgılarını fark edebilme, öğrencilerin sahip olduğu hata ve kavram yanılgılarının nedenlerini belirleme, öğrencilerin sahip olduğu hata ve kavram yanılgılarını ortadan kaldırmak için çözümler üretme, öğrencilerin sahip olduğu hata ve kavram yanılgılarını ortaya çıkaracak uygun sorular sorma kategorilerinde ayrı ayrı ele alınmıştır.

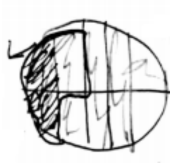
Hiçbir öğretmen adayının ders planında öğrencilerin sahip olabileceği hata ve kavram yanılgılarını göz önünde bulundurmaya dair bir ifade yer almamıştır.

4.2.1.1.2.1. Ders esnasında öğrencilerin sahip olduğu hata ve kavram yanılgılarını fark edebilme. İpek, Cemil ve Hale modelini incelediği öğrencilerin sahip olduğu hata/kavram yanılgılarını fark edebilirken İlker ise öğrencilerin sahip olduğu hata/kavram yanılgılarını genellikle fark edememiştir.

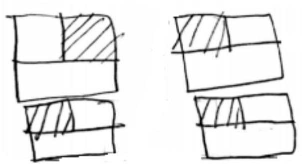
İlker öğrencilere $6\times\frac{2}{3}$ işlemi kullanılarak çözümü bulunabilecek bir problem sormuştur. Burada $\frac{2}{3}$ kesrini "üçte iki" şeklinde okuduğu için model ile temsil etmek için tahtaya çıkan öğrenci $6\times\frac{3}{2}$ kesrinin temsilini oluşturmuş ve dokuz sonucunu bulmuştur. İlker ilk önce öğrencinin yaptığı hatayı anlamamıştır. Sınıftaki öğrencilerin "Hocam yanlış olmadı mı?" demesi üzerine yapılan hatanın farkına varmış ve "Bir pastanın ne diyor? Üçte ikisi diyor" şeklinde okumuştur. Öğrencilerin $\frac{2}{3}$ hocam demesi üzerine tahtaya kalkan öğrenci $\frac{2}{3}$ kesrini temsil etmesi gerektiğini fark etmiştir. Öğrenci $\frac{2}{3}$ kesrini temsil ederken bütünü üç parçaya ayırmış, fakat eş parçalar oluşturmamıştır. İlker öğrenciye "Bunlar eşit değil bak" diyerek ikazda bulunmuştur. Fakat öğrencinin burada bir kavram yanılgısına mı sahip olduğu yoksa şekli mi düzgün oluşturamadığı İlker tarafından sorgulanmadığı için belirsiz olarak kalmıştır.

İlker öğrencilerden "Elinizde bir pizzanın $\frac{3}{4}$'ü kalmıştır. Bu kadar pizzanın $\frac{1}{3}$'ini erkek kardeşinize verirseniz bir bütün pizzanın ne kadarı kalmış olur?" probleminin çözümünü öncelikle model kullanarak yapmalarını istemiştir. Bir öğrenciye söz hakkı vermiştir ve bu öğrenci iki kesri de ayrı ayrı temsil etmiş, aralarına çarpma işareti koymuş ve zihninden algoritma kullanarak bulduğu sonucu da farklı bir model üzerinde göstermiştir. İlker öğrencinin neden bu şekilde bir temsil oluşturduğunu ve sonucu nasıl bulduğunu sorgulamamıştır. Bunun yerine kendisi model ile temsilin nasıl olacağını açıklamıştır. Burada öğrencinin kesirlerle çarpmanın ne anlama geldiğinin farkında olmadığı, bu nedenle $\frac{3}{4}$'ün $\frac{1}{3}$'ini almak yerine farklı temsiller kullandığı görülmüştür. Burada öğrencinin sahip olduğu yanılgıların ve yaptığı hatanın farkında olmayan İlker bir sonraki soruda öğrenci iki kesri farklı modeller üzerinde temsil etmek için iki ekmek şekli çizip aralarına da çarpma işareti koyduğunda öğrenciye "Yani bunu nasıl çarpacaksın? Şu an iki ekmek var burada nasıl çarpacaksın?" diyerek öğrencinin yaptığı hatanın farkına varmıştır. Öğrenciyi tek model üzerinde temsil etmek üzere yönlendirmiştir. Fakat önce ekmek temsili üzerinde gidilmiş, ekmekteki parçaların eş parçalar olmadığını İlker fark etmemiş, öğrencinin yaptığı hatayı da giderme yoluna gitmemiştir.

İpek "Bir ekmeğin $\frac{9}{10}$'unun $\frac{2}{3}$'sini bulunuz" probleminde öğrencilerden $\frac{9}{10} \times \frac{2}{3}$ işlemini model ile göstermelerini beklemiştir. Tahtaya kalkan öğrenci önce $\frac{9}{10}$ kesrini temsil etmiştir. İpek öğrenciye "Şimdi bir ekmeğin $\frac{9}{10}$'unun yani bu kadarlık kısmının kaçta kaçını soruyor?" diye bir soru yöneltmiştir. Öğrenci $\frac{9}{10}$'un $\frac{2}{3}$'sini bulacağını söylemiş fakat on parçaya ayırıp dokuz parçasını taradığı temsilde ilk iki parçayı tarayarak $\frac{2}{3}$ kesrini temsil göstermiştir. İpek öğrencilere yapılanın doğru olup olmadığını sormuştur. Öğrenciler "hayır" diye cevap verince İpek "$\frac{2}{3}$ ne anlama gelir?" diye sorarak öğrenciyi yönlendirmiştir. Bunun üzerine öğrenci dikey olarak on eş parçaya ayrılan bütünü yatay olarak da üç eş parçaya ayırmış ve iki parçasını taramıştır. Ayrıca İpek öğrencilere vermiş olduğu çalışma kağıtlarını ders sonrasında incelemiş ve öğrencilerin yaptıkları hakkında yorumlarda bulunmuştur. İpek öğrencilerin yaptıklarını genel olarak anlayabilmiş ve hatalarını fark edebilmiştir. Öğrencilerin bazılarının bütünü eş olmayacak şekilde parçalara ayırdığını görmüştür. Şekil 4.51 ve 4.52'de öğrencilerin bütünü eş olmayan parçalara ayırdıkları görülmektedir.



Şekil 4.51. Öğrencinin "Bir ekmeğin $\frac{9}{10}$'unun $\frac{2}{3}$'sini bulunuz" sorusu için oluşturduğu temsil, (İpek- kesirlerle çarpma çalışma kâğıdı)

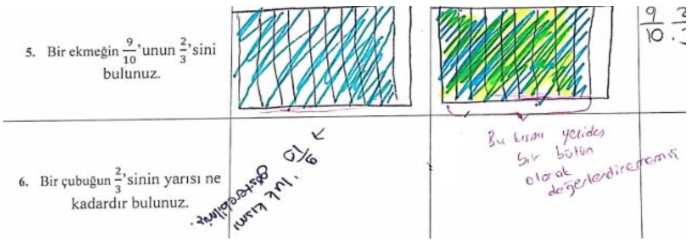


Şekil 4.52. Öğrencinin "4 kekin $\frac{1}{3}$'i ne kadar kek yapar?" sorusu için oluşturduğu temsil, (İpek- kesirlerle çarpma çalışma kâğıdı)

İncelenen çalışma kağıdında bir öğrencinin altı bütün oluşturmak yerine bir bütünü altı parçaya ayırdığı ve $6\times\frac{2}{3}$ işlemini model ile temsil etmek için Şekil 4.53'teki gibi altıya ayrılmış bir bütün ve $\frac{2}{3}$ kesrinin temsillerini oluşturduğu görülmüştür. İpek burada öğrencinin bir hata yaptığını veya kavram yanılgısına sahip olduğunu fark edebilmiş, fakat dersten sonra farkına vardığı için öğrencinin bir hata mı yaptığı yoksa kavram yanılgısına mı sahip olduğu belirsiz olarak kalmıştır.

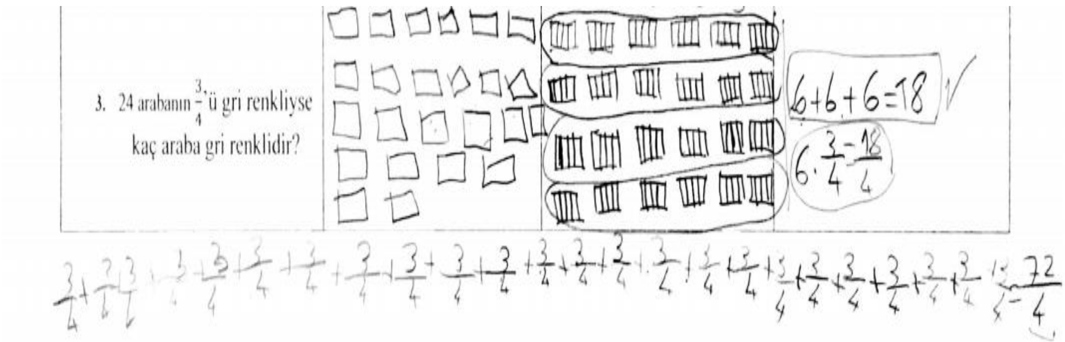
Şekil 4.53. Öğrencinin "6 arkadaşa origami etkinliği düzenleyecek. Her biri bir kâğıdın $\frac{2}{3}$'sini kullanıyorsa toplam ne kadar kâğıt gerekir?" problemi için oluşturduğu temsil, (İpek- kesirlerle çarpma çalışma kâğıdı)

Yine öğrencilerin iki kesrin çarpımında ilk kesri model ile temsil ettikten sonra ikinci kesri temsil etmede hata yaptıkları görülmüştür. Şekil 4.54'te öğrencilerin bu hatasına yönelik bir örnek yer almıştır. İpek öğrenci tarafından oluşturulan Şekil 4.54'te temsili dersten sonra gördüğü için öğrencinin neden böyle bir temsil oluşturduğunu sorgulayamamış ve öğrenci bir kavram yanılgısına sahipse bunu ortaya çıkaramamıştır.



Şekil 4.54. Öğrencinin "Bir ekmeğin $\frac{9}{10}$'unun $\frac{2}{3}$'sini bulunuz" sorusu için oluşturduğu temsil, (İpek- kesirlerle çarpma çalışma kâğıdı)

Bir öğrenci çalışma kağıdında yer alan "24 arabanın $\frac{3}{4}$'ü gri renkliyse kaç araba gri renklidir?" probleminde 24 bütün oluşturmuş ve bu bütünlerin her birini dörde parçalamıştır. Bu 24 bütünü dört sıra olacak şekilde çizmiştir. Sonucu da küme modelinde elde edildiği şekilde yazmıştır. İpek burada öğrencinin küme modelindeki gruplama mantığını anladığını ifade etmiştir. Fakat modelinde bir karmaşa olması üzerinde durmamıştır. Burada öğrenci hem alan modeli kullanıyor gibi bütünleri eş parçalara ayırmış hem de bütünleri dörde gruplamıştır. Bu öğrencinin temsili Şekil 4.55'te yer almıştır.



Şekil 4.55. Öğrencinin "24 arabanın $\frac{3}{4}$'ü gri renkliyse kaç araba gri renklidir?" sorusuna yönelik oluşturduğu temsil, (İpek- kesirlerle çarpma çalışma kâğıdı)

Cemil "6A sınıfı gezi kulübü üyesi altı öğrenci akşam yemeğinde buluşuyorlar. Kişi başı bir ekmeğin $\frac{2}{3}$'si tüketildiğine göre toplam kaç ekmek tüketilmiştir?" probleminin çözümünü öğrencilerden model kullanarak bulmalarını istemiştir. Sınıftan bir öğrenciyi tahtaya kaldırarak çarpma işlemine yönelik modelini oluşturmasını istemiştir. Öğrencinin oluşturduğu model sonucunda öğrenciye “Bak $\frac{2}{3}$’si. Sen kaçını aldın orada? İkiye böldün. Paydayı üç diye söylüyorum ben sana. Yani kaça bölmen lazım?” demiştir. Öğrenci üçe böleceğini söylemiş ve üçe bölünmüş bir bütün çizmiştir. Fakat bu defa da bütün eş parçalardan oluşmamıştır. Cemil “Eşit mi onlar? Bu üçü eşit mi?” diye sorarak öğrencinin hatasını/kavram yanılgısını düzeltmek istemiştir. Öğrencinin temsili eş düşünerek mi oluşturduğu yoksa eş olmasının önemsiz olduğunu mu düşündüğü belirsiz olarak kalmıştır. Cemil öğrencinin neden bütünü ikiye ayırdığını ve de sonrasında bütünü neye göre üç parçaya ayırdığını sorgulamamıştır. Cemil öğrencinin eş parçalardan oluşmayan bir bütün çizdiğini gördükten sonra öğrenciye “Ben yardımcı oluyorum sana. Ortasına bir nokta koy. Çiz onu ortaya kadar. Birini ben çizeyim, diğerlerini sen çiz” diyerek bir bütün almış ve bu bütünü üç eş parçaya ayırmıştır. “Şu bir ekmek olsun” demiş ve öğrenciye “Kaç tane çizeceksin şimdi oraya?” diye sormuştur. Öğrenci “üç” cevabını verince Cemil “Neden? Altı öğrenci var. Her biri bir ekmeğin $\frac{2}{3}$’sini yiyor. Bence sırayla yapalım bunu bir ekmeği çizmeden. Önce birinciyi tüketelim, sonra ikinciyi çizelim olmaz mı?” demiştir. Öğrenciden cevap alamayınca her bir kişinin yediği iki parçalık kısmı taraya taraya ilerleyerek toplam dört bütün oluşturmuşlardır.

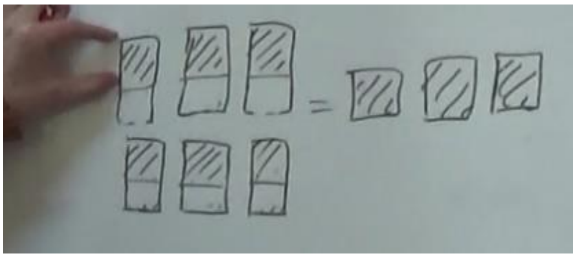
Cemil “Zahide’nin elinde bir pizzanın $\frac{3}{4}$’ü bulunuyor. Bu pizzanın $\frac{1}{3}$’ini erkek kardeşine verdiğine göre erkek kardeşi bütün bir pizzanın kaçta kaçını almış olur?” probleminde öğrencinin sonucun $\frac{1}{3}$ olduğunu söylemesi üzerine yaptığı hatayı fark etmiştir.

Hale öğrencilerden $6\times\frac{1}{2}$ işlemini model ile temsil etmelerini istemiştir. Bu esnada sınıfta dolaşarak öğrencilerin temsillerini incelemiştir. Oluşturduğu modeli gösteren bir öğrenciye “Bak bunlar aynı büyüklükte mi?” diye sormuştur. Hale burada öğrencinin eş olmayan bütünler çizdiğini fark edebilmiş, fakat burada öğrenci düşüncesini ortaya çıkaracak bir soru sormadığı için öğrencinin bir çizim hatası mı yaptığı yoksa bir kavram yanılgısına mı sahip olduğu belirsiz olarak kalmıştır. Aynı şekilde bu soru için tahtaya kalkan öğrenci de başta farklı bütünler almış, sonucu farklı bütünler üzerinden temsil etmiştir. Hale öğrencinin oluşturduğu temsildeki hatayı fark edebilmiştir.

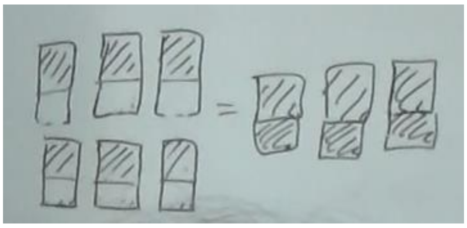
4.2.1.1.2.2. Öğrencilerin sahip olduğu hata ve kavram yanılgılarının nedenlerini belirleme. Öğretmen adayları ile ders sonrası bir görüşme gerçekleştirilmediği için öğretmen adaylarının öğrencilerin sahip olduğu hata/kavram yanılgılarının nedenlerine ilişkin görüşleri alınamamıştır. Sadece İpek'in ders sonrası öğrenci çalışma kağıtlarını incelemesi ile öğrencilerin sahip olduğu hata/kavram yanılgılarının nedenlerini genel olarak belirleyebildiği görülmüştür. İpek bütünü eş parçalara ayırmayan öğrencilerde bütünü eş parçalama fikrinin gelişmemiş olduğunu belirtmiş, iki kesrin çarpma işleminin alan modeli ile temsilinde hata yapan öğrencilerin ikinci kesri temsil ederken ilk kesrin temsili sonucu oluşan taralı alanı yeni bütün olarak değerlendiremediklerini ifade etmiştir. Fakat öğretmen adaylarının öğrencilerinin sahip olduğu hata/kavram yanılgılarını ortadan kaldırmak için uygun çözümler üretememesi nedeni ile öğrencilerin sahip olduğu hata/kavram yanılgılarının nedenlerini belirlemede zorluklara sahip oldukları düşünülmektedir.

4.2.1.1.2.3. Öğrencilerin sahip olduğu hata ve kavram yanılgılarını ortadan kaldırmak için çözümler üretme. İlker öğrencilerin sahip olduğu hata/kavram yanılgılarını ortadan kaldırmak için uygun çözümler üretememiştir. Öğrencilerin oluşturduğu temsillerin ardından verilen problemler için uygun temsili kendisi oluşturmuştur. İpek "Bir ekmeğin $\frac{9}{10}$'unun $\frac{2}{3}$'sini bulunuz" probleminde öğrencinin ilk kesrin temsilinden sonra ikinci kesri temsil etmede zorlanması üzerine öğrenciyi $\frac{2}{3}$ kesrinin anlamını düşünmeye yönlendirerek doğru bir temsil oluşturmasını sağlamıştır. Fakat farklı öğrencilerin sahip oldukları hata/kavram yanılgıları varsa bunları ders sonrası fark edebildiği için öğrencilerin bu hata/kavram yanılgılarını ortadan kaldıracak uygun çözümler üretmemiştir. Cemil "6A sınıfı gezi kulübü üyesi altı öğrenci akşam yemeğinde buluşuyorlar. Kişi başı bir ekmeğin $\frac{2}{3}$'si tüketildiğine göre toplam kaç ekmek tüketilmiştir?" probleminin çözümü için söz hakkı verdiği öğrencinin kesir temsil ederken bütünü üç yerine iki parçaya ayırdığını, üç parçaya ayırdığı zaman ise eş olmayan parçalara ayırdığını fark etmiştir. Fakat burada öğrenciyi tamamen kendisi yönlendirmiş, öğrenci bir kavram yanılgısına sahipse bunu ortadan kaldıracak uygun bir çözüm üretememiştir. "Zahide'nin elinde bir pizzanın $\frac{3}{4}$'ü bulunuyor. Bu pizzanın $\frac{1}{3}$'ini erkek kardeşine verdiğine göre erkek kardeşi bütün bir pizzanın kaçta kaçını almış olur?" probleminde sonucu bulmakta hata yapan öğrenciye bütün bir pizzanın kaçta kaçını yediğini sorduğunu hatırlatarak ve bir bütün pizzanın dört parçadan oluştuğunu "Burası bir bütün pizza değil mi dört parça?" sorusu ile belirterek öğrencinin doğru sonuca ulaşmasını sağlamıştır.

Hale $6\times\frac{1}{2}$ işleminin model ile temsilinde hata yapan öğrenciye "Ama sen bunları böyle göstermişsin. Bunlar $3\frac{1}{2}$ ama. Üç tam şeklinde olacak öyle değil mi? Senin bir tamın buydu." diyerek öğrenciyi yönlendirmiştir. Burada Hale'nin uygun bir çözüm üretemediği öğrenciye direkt cevabı söylediği görülmüştür. Şekil 4.56'da öğrencinin $6\times\frac{1}{2}$ işlemi içim oluşturduğu ilk temsil, Şekil 4.57'de bu işlem için oluşturduğu son temsil yer almıştır.



Şekil 4.56. Öğrenci 6'nın $6\times\frac{1}{2}$ işlemine yönelik ilk oluşturduğu temsil, (Hale- kesirlerle çarpma ders gözlemi)



Şekil 4.57. Öğrenci 6'nın $6\times\frac{1}{2}$ işlemine yönelik son oluşturduğu temsil, (Hale- kesirlerle çarpma ders gözlemi)

Hale öğrencilerden $\frac{4}{5}$'ün $\frac{1}{2}$'ini model ile göstermelerini istemiştir. Bir öğrenciye söz hakkı vermiş ve öğrenci tahtada temsilini oluşturmuştur. Öğrencinin yaptıklarını "Şimdi $\frac{4}{5}$'i gösterdik. Beşe bölünmüş, dördü alınmış değil mi? Sonra bunun $\frac{1}{2}$'sini de buldum. İkiye böldüm. Sonuç şu an şu." şeklinde açıklamıştır. Bunun üzerine öğrencilerden bazıları "ben de aynısını yaptım" demişlerdir. Hale öğrencilere iki kesrin çarpımının model ile nasıl temsil edildiğini bir daha açıklamıştır. Bunun üzerine öğrencilerden bir tanesi "Ortadan ikiye böldünüz. $\frac{1}{2}$ yapacaktınız. Ama bir tanesini almadınız" demiştir. Hale öğrenciye "Ama benim başta taradığım alan neresiydi? Burası değil miydi? Burasını zaten taramadım ben. Bunun $\frac{1}{2}$'sini istemedim ki. $\frac{4}{5}$'in, buranın $\frac{1}{2}$'sini" diye cevap vermiştir. Bir sonraki örnekte de aynı hatayı yapan öğrenciyi "Gel beraber tahtada yapalım" diyerek çağırmıştır. Öğrencilerin aynı hatayı yapmaya devam etmeleri Hale'nin öğrenci hatalarını/kavram yanılgılarını ortadan kaldırmak için uygun bir çözüm üretemediğini göstermiştir. Bu temsilde taralı kısmın (yani $\frac{3}{4}$'lük) $\frac{1}{3}$'inin alınacağını vurgulamıştır. Hale'nin bu temsile yönelik dersinden bir kesit aşağıdaki gibidir:

> *Tamam $\frac{3}{4}$ burası. Bunun $\frac{1}{3}$'ünü göstereceğim değil mi ben, sadece taralı alanın? Çünkü $\frac{3}{4}$ burası yapıyor. Ben bunun $\frac{1}{3}$'ünü… Nasıl yaparsın? Üçe bölmen gerekmez mi? Üçe bölersin. Bak üçe bölerken hepsini böldüm? Ama ben burayı istiyorum. Şimdi buradan ne yapmam gerekiyor? Böldüm, üçte birini almam lazım. Yani şurayı, değil mi? Burayı da almıyoruz (taralı olmayan kısımdaki yer) Şu an ne yaptı? Yani tüm 12 parçadan üçü oldu.* (Hale-Kesirlerle çarpma ders gözlemi)

Yukarıda yer alan kesit ile Hale'nin cevabı kendisinin verdiği sorular kullandığı, bu nedenle öğrencinin sahip olduğu hatayı/kavram yanılgısını belirleyerek buna uygun bir çözüm üretemediği görülmüştür.

4.2.1.1.2.4. Öğrencilerin sahip olduğu hata ve kavram yanılgılarını ortaya çıkaracak uygun sorular sorma. Üç öğretmen adayının öğrencilerin sahip olduğu hata/kavram yanılgılarını ortaya çıkarmak için uygun sorular kullanmadığı görülmüştür. Öğrenciler kesri temsil ederken bütünü eş olmayan parçalara ayırmış, payda kadar eş parçaya ayırmamışlar, iki kesri farklı modeller üzerinde temsil etmişler ya da ilk kesri temsil ettikten sonra ikinci kesri temsil etmede hata yapmışlardır. Fakat öğretmen adayları öğrencilerin yaptıklarının nedenlerini sorgulamamışlar, öğrencilerin hata mı yaptıklarını yoksa bir kavram yanılgısına mı sahip olduklarını belirlememişlerdir. Öğrencilerin oluşturdukları temsilleri açıklamalarını istemedikleri ve uygun sorular kullanmadıkları için kesirlerin model ile temsilinde öğrencilerin çizim hatası mı yaptıkları yoksa bir kavram yanılgısına mı sahip oldukları belirsiz olarak kalmıştır. İpek ders esnasında öğrencilere modellerini yerlerinde oluşturmaları için zaman vermiş ve bu esnada öğrencilerle diyalog halinde olmuştur. İpek ve öğrenciler arasında geçen diyaloglar tam olarak anlaşılamadığı için İpek'in öğrencilerin sahip olduğu hata/kavram yanılgılarını ortaya çıkarmada uygun sorular kullanıp kullanmadığı tam olarak gözlemlenememiştir. Derste ilk kesri temsil ettikten sonra ikinci kesri temsil etmede hata yapan öğrenciye İpek hatasını/kavram yanılgısını ortaya çıkaracak bir soru yöneltmemiş, sadece öğrenciyi doğru temsili oluşturması için yönlendirmiştir.

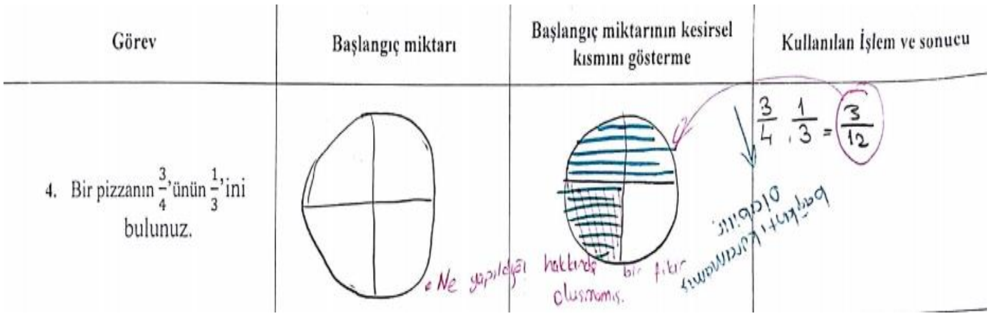
4.2.1.1.3. Kesirlerle çarpma işleminde öğrenci zorlukları. Öğrenci zorlukları alt bileşenine ilişkin bulgular dersi planlarken öğrencilerin zorlanabileceği hususları göz önünde bulundurma, ders esnasında öğrencilerin zorlandıkları noktaları fark edebilme, öğrenci zorluklarını ortadan kaldırmak için çözüm üretme, öğrenci zorluklarının nedenlerini belirleme, öğrencilerin zorlandıkları noktaları ortaya çıkaracak uygun sorular sorma kategorilerinde ayrı ayrı ele alınmıştır.

Hiçbir öğretmen adayının ders planında öğrencilerin zorlanacağı noktaları göz önünde bulunduracağına dair bir ifade yer almamıştır. Aynı zamanda hiçbir öğretmen adayı öğrenci zorluklarının nedenini belirleyememiş, öğrenci zorluklarını ortaya çıkaracak uygun sorular soramamıştır.

4.2.1.1.3.1. Ders esnasında öğrencilerin zorlandıkları noktaları fark edebilme. Öğretmen adaylarından sadece İpek ders sonrası çalışma kağıtlarını inceleyerek öğrencilerin zorlandığı noktaları fark edebilmiştir. Cemil ise genel olarak öğrencilerin zorlandıkları noktaları fark edebilirken, İlker ve Hale ise öğrencilerin tamamının zorlandıkları noktaları fark edememişlerdir.

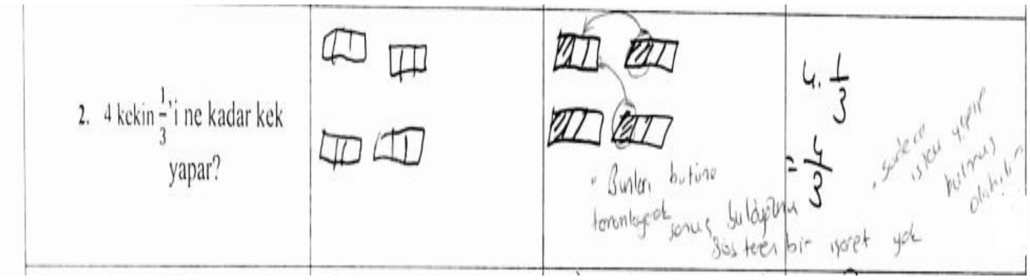
İpek öğrencilere vermiş olduğu çalışma kağıtlarını ders bitiminde öğrencilerden toplamış ve öğrencilerin neler yaptığını incelemiştir. Bu inceleme sonucunda çok sayıda öğrencinin model ve işlem arasında bir bağlantı kurmadığını belirtmiştir. Öğrencilerin modelden yola çıkarak buldukları sonucu yazmaları gerekiyorken çarpma algoritması kullanarak sonucu buldukları görülmüştür. Bazı öğrencilerin sadeleştirme yapmış olması da öğrencilerin modelden yola çıkarak sonucu bulmakta zorlandıklarını, algoritma kullandıklarını göstermiştir.

İpek öğrencinin Şekil 4.58’de yer alan temsilini inceledikten sonra öğrencinin ne yapıldığı konusunda bir fikrinin oluşmadığını ve işlem ile model arasında bağlantı kuramadığını belirtmiştir.



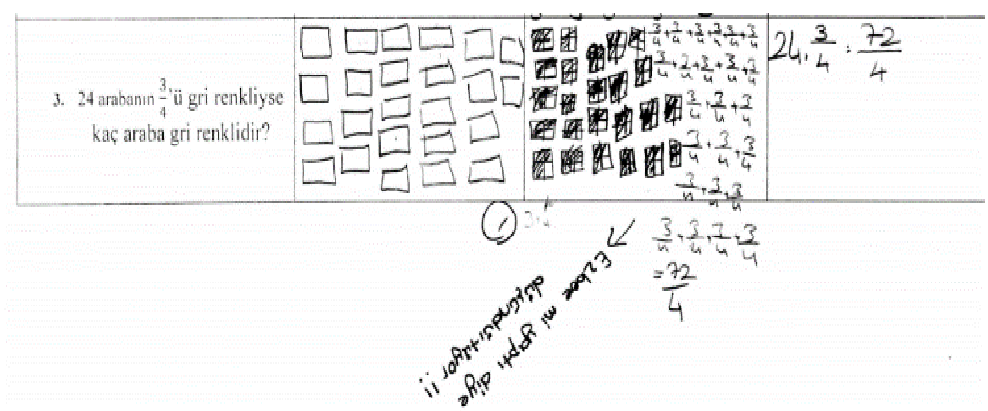
Şekil 4.58. Öğrencinin “Bir pizzanın $\frac{3}{4}$’ünün $\frac{1}{3}$’ini bulunuz.” sorusu için oluşturduğu temsil, (İpek- kesirlerle çarpma çalışma kâğıdı)

İpek öğrencinin Şekil 4.59’da yer alan temsilini incelemiş ve taralı kısımları birbirine tamamlayarak sonucu bulduğuna dair bir işaretin olmadığını ve sadece işlem yapıp sonucu bulduğunu düşündüğünü belirtmiştir. İpek burada öğrencinin yaşadığı zorluğu fark etmiştir.



Şekil 4.59. Öğrencinin “4 kekin $\frac{1}{3}$’i ne kadar kek yapar?” sorusu için oluşturduğu temsil, (İpek- kesirlerle çarpma çalışma kâğıdı)

“24 arabanın $\frac{3}{4}$’ü gri renkliyse kaç araba gri renklidir?” probleminde İpek öğrencilerin 24 araba çizmede zorlanacaklarını düşünmüş ve onlardan başka bir yöntem düşünmelerini istemiştir. Öğrencilere paydanın işlevini hatırlatarak bölme ile ilişkilendirmiş ve 24’ü gruplama fikrini vermek istemiştir. Bu sorunun çözümü sınıfta küme modeli kullanılarak yapılmış olmasına rağmen öğrencilerin çoğu 24 bütün oluşturmuş ve her bütünün $\frac{3}{4}$’ünü göstermiştir. Ve yapılan işlem olarak tekrarlı toplama kullanmışlardır. Bu nedenle İpek öğrencilerin küme modelini anlamada zorluk çektiklerini düşünmüştür. Öğrencilerin bu soruda oluşturdukları temsillere yönelik bir örnek Şekil 4.60’da verilmiştir.



Şekil 4.60. Öğrencinin "24 arabanın $\frac{3}{4}$'ü gri renkliyse kaç araba gri renklidir?" sorusu için oluşturduğu temsil, (İpek- kesirlerle çarpma çalışma kâğıdı)

Cemil "6A sınıfı gezi kulübü üyesi altı öğrenci akşam yemeğinde buluşuyorlar. Kişi başı bir ekmeğin $\frac{2}{3}$'si tüketildiğine göre toplam kaç ekmek tüketilmiştir?" problemini model ile temsil etmek üzere tahtaya kalkan öğrencinin temsili oluşturmada zorlandığını fark etmiştir. Aynı şekilde problemin çözümü model yardımı ile bulunduktan sonra aynı öğrencinin verilen problemin çözümünün hangi işlem kullanılarak bulunabileceğinde zorlandığını da fark etmiştir. Yine Cemil iki kesrin çarpımına yönelik verdiği problemde öğrencinin temsili oluşturmakta zorlandığını fark etmiştir. Hale de bazı öğrencilerin iki kesrin çarpımının alan modeli ile temsilinde zorlandıklarını fark etmiştir.

4.2.1.1.3.2. Öğrenci zorluklarını ortadan kaldırmak için çözüm üretme. İlker iki kesrin çarpımının model ile temsilinde öğrencilerin zorlanması üzerine kendisi problemleri model ile temsil etmiş, bu zorlukları ortadan kaldırmak için uygun bir çözüm üretememiştir. İpek öğrencilerin "24 arabanın $\frac{3}{4}$'ü gri renkliyse kaç araba gri renklidir?" problemini alan modeli ile temsil etmede zorlanacaklarını düşünerek küme modeli ile temsil etmeye yönlendirmiştir.

Hale de tıpkı İpek gibi doğal sayı ile kesrin çarpımına yönelik problemin alan modeli ile temsilinde öğrencilerin zorlanabileceklerini düşünerek onları küme modeli ile temsil etmeye yönlendirmiştir. İki kesrin çarpımının alan modeli ile temsilinde iki kesrin çarpma işleminin anlamını vurgulayarak ve pay ve paydanın anlamlarını vurgulayarak öğrenci zorluklarını gidermek istemiştir. Fakat öğrencilerin temsilde zorlanmaya devam etmeleri ile öğrenci zorluklarını ortadan kaldırmak için uygun bir çözüm üretilemediği düşünülmüştür.

Cemil "Elindeki şekerlerin $\frac{2}{5}$'sinin $\frac{2}{3}$'sini arkadaşı Ethem'e veren İbrahim'in elinde baştaki şeker miktarının kaçta kaçı kalmıştır?" probleminde bir öğrenciyi tahtaya kaldırmıştır. Öğrenci $\frac{2}{5}$ kesrini temsil etmek için bir daire çizmiş ve bu daireyi nasıl beşe ayıracağını bir süre düşünmüştür. Cemil bunun üzerine öğrenciye "Burada sen $\frac{2}{5}$'yi göstermekte zorlanabilirsin bence" demiş ve öğrenci çizdiği daire şeklini silerek dikdörtgen üzerinde dikey olarak beş eş parçaya ayırıp iki eş parçasını tarayarak $\frac{2}{5}$ kesrini temsil etmiştir. Cemil'in burada eş parçalara ayırmanın daha kolay olması nedeni ile dikdörtgen tercih etmesi uygun bir çözüm olarak görülebilir, fakat Cemil burada öğrenciye daire üzerinde $\frac{2}{5}$ kesrini temsil etme imkânı tanımamış, öğrencinin bir hata/kavram yanılgısı/zorluğa sahip olup olmadığını belirlememiştir. Ardından $\frac{2}{5}$ kesrini temsil etmek için oluşturduğu dikdörtgenin üzerinde yatay parçalamalar yapıyor gibi hareket ederek $\frac{2}{3}$ kesrini nasıl temsil edeceğini düşünmüştür. Bunun üzerine Cemil öğrencinin zorlandığını düşünmüş ve öğrenciye "İstersen aynı şeklin üzerinden çizebilirsin. Nasıl yapacaksın bilmiyorum da. Ya da şey olacaksa yanına çiz ikisini birleştirelim" demiştir. Bunun üzerine öğrenci $\frac{2}{3}$ kesri için de ayrı bir temsil oluşturmuştur. Cemil öğrenciye iki modeli nasıl birleştireceğini sormuştur. İki modeli üst üste koyduğu zaman ikisinin kesiştiği bir alan elde edileceğini söylemiştir. Kesişen bu alanın neyi ifade ettiğini sorduğu zaman bir öğrenci "tüm parçanın kaçta kaçı olduğunu verecek" demiştir. Öğrenci iki modeli de dikey parçalara ayrılmış şekilde göstermiştir. Bu nedenle öğrenci iki modeli nasıl kesiştireceği, bir araya getireceği konusunda zorlanmıştır. Cemil bu zorlanmanın nedeninin öğrencinin model çiziminden kaynaklandığını fark etmiş ve nasıl bir çizim yapılabileceği konusunda öğrencilerin fikrini almak istemiştir. Öğrencilerden bir tanesi “birini yatay çizeceğiz” demiştir. Bu cevaptan yola çıkarak Cemil öğrencinin iki kesrin çarpımını model üzerinde temsil etmesini sağlamıştır. Fakat başka herhangi bir açıklama yapmamıştır. Bu nedenle öğrencilerin yapılmış olan bu temsili anlamamış olabilecekleri ve öğrencilerde zorluğun devam edebileceği düşünülmüştür.

4.2.1.1.4. Kesirlerle çarpma işleminde anlamanın değerlendirilmesi. Anlamanın değerlendirilmesi alt bileşenine ilişkin bulgular öğrencilerin ön bilgilerini değerlendirme/ölçme, öğrencilerin konuyu anlayıp anlamadıklarını değerlendirme, öğrencilerin sahip olduğu hata/kavram yanılgılarını sınıf içi diyaloglardan ve öğrencinin yazılı dokümanlarından tespit etme, öğrencilerin sahip olduğu hata/kavram yanılgılarının farkına varmalarını sağlayacak şekilde dönüt ve düzeltmeler yapma kategorilerinde ayrı ayrı ele alınmıştır.

4.2.1.1.4.1. Öğrencilerin ön bilgilerini değerlendirme/ölçme. İlker, İpek ve Cemil öğrencilerin çarpmanın anlamı, doğal sayı ile kesrin model ile temsili konusundaki ön bilgilerini belirlemek isterken, Hale öğrencilerin doğal sayılarda çarpmanın anlamı konusundaki ön bilgilerini değerlendirme faaliyetinde bulunmamıştır. Fakat İlker ve Cemil çarpmanın anlamı konusunda çok sayıda öğrenciye söz hakkı vermemiş, öğrencileri yönlendirici (cevabı aslında içinde olan) sorular kullanmışlardır. Bu nedenle öğrencilerin ön bilgilerini tam olarak değerlendirememiştir. İpek ise öğrencilere cevabı veren sorular kullanmamış, öğrencilerin verdiği cevaplar ile çarpmanın ne anlam taşıdığını birlikte ifade etmişlerdir. Dersin başında İlker ve İpek öğrencilerden bir kesri model ile temsil etmelerini istemiştir. İlker sadece bir öğrenciye söz hakkı vermiş ve sadece alan modeli ile temsil gerçekleşmiştir. Aynı zamanda İlker öğrenciye temsili nasıl oluşturduğunu sormamıştır. İlker yine burada öğrencilerin ön bilgilerini değerlendirebilecek yeterli faaliyette bulunmamıştır. İpek’in dersinde de kesrin sadece alan modeli ile temsili gerçekleşmiştir.

İpek de İlker gibi kesirlerin model ile temsili konusunda yeterli ölçme/değerlendirme faaliyetinde bulunmamıştır. Sadece pay ve paydanın taşıdığı anlamdan yola çıkarak kesir alan modeli ile temsil edildiği için alan modeli ile temsil konusundaki öğrenci anlamalarını değerlendirebilmiştir. Cemil ve Hale ise dersin başında öğrencilerin kesirlerin model ile temsiline yönelik ön bilgilerini değerlendirememişlerdir. Doğal sayı ile kesrin çarpımına yönelik İlker ve Cemil sadece bir problem vermiş, temsil için de bir öğrenciye söz hakkı vermişlerdir. Bu nedenle bu öğretmen adaylarının yeterli ölçme/değerlendirme faaliyetinde bulunmadığı düşünülmektedir. İpek'in doğal sayı ile kesrin çarpımına yönelik üç problem, Hale'nin ise iki problem vermesi ve hem alan hem de küme modelleri kullanmaları ile diğer iki öğretmen adayına göre daha yeterli bir ölçme/değerlendirme faaliyetinde bulundukları söylenebilir.

4.2.1.1.4.2. Öğrencilerin konuyu anlayıp anlamadıklarını değerlendirme. İlker, Cemil ve Hale öğrencilerin doğal sayı ile kesrin çarpımı ve iki kesrin çarpımında model kullanımına yönelik anlamalarını sadece sınıf içerisinde sordukları sorular için öğrencilerin oluşturdukları temsiller yardımıyla elde edebilmiştir. Öğrencileri tahtaya çıkartarak modellerini oluşturmalarını istemişler, böylece o öğrencileri değerlendirme şansına sahip olmuşlardır. Fakat ders esnasında tüm öğrencilerin modellerini inceleyemedikleri için tüm öğrencileri değerlendirememişlerdir. İpek ve Hale sordukları sorulardan sonra bir süre bekleyerek öğrencilere düşünme fırsatını daha çok vermiş ve bu esnada öğrencilerin modellerini incelemişlerdir. İpek öğrencilere ders esnasında bir çalışma kağıdı vermiştir. Bu çalışma kağıdını dersten sonra inceleyerek öğrencilerin anlamalarını değerlendirebilme şansına sahip olmuştur.

İlker planında ders sonrası kısmında sadece üç tane çarpma işlemine ve "Öğrencilere bu ders saatinde neler öğrendikleri sorulur ve özetlenir" ifadesine yer vermiştir. Fakat İlker dersin sonunda bir değerlendirme yapmamıştır. Ayrıca dersinde alan modeli hariç başka bir model kullanmadığı için öğrencilerin kesirlerle çarpma işleminde alan modeli hariç diğer modellerdeki anlamalarını değerlendirememiştir. İlker modelleri çarpma algoritmasının keşfi için değil de çarpma işlemi yapmanın bir yolu gibi gösterdiği için öğrencilerin çarpma algoritmasının keşfine yönelik anlamalarını da değerlendirememiştir.

İpek dersinde öğrencilerin anlamalarını değerlendirmede çok başarılı olamamıştır. "Sorusu olan var mı?" diye sorduğu zaman öğrencilerden bazıları parmak kaldırmış, fakat İpek öğrencileri fark etmemiştir. İpek doğal sayı ile kesrin çarpımının alan modeli ve küme modeli ile temsil edilmesine yönelik öğrenci anlamalarını değerlendirebilirken, iki kesrin çarpımın ise sadece alan modeli ile temsil edilmesine yönelik öğrenci anlamalarını değerlendirebilmiştir. İpek oluşturulan modellerden yola çıkarak çarpma algoritmasını keşfettirmeye çalışmıştır. Öğrencilerin verdikleri yanıtlarla bu konudaki anlamalarını değerlendirmeye çalışmıştır.

İpek planında ölçme ve değerlendirme kısmına yer veren tek öğretmen adayı olmuştur. İpek ders planında ölçme ve değerlendirme kısmına şu şekilde yer vermiştir:

> ***Gözlem:***
> *Bir doğal sayı ile kesrin çarpma işlemini yapıp, anlamlandırabiliyorlar mı?*
> *İki kesrin çarpma işlemini yapıp, anlamlandırabiliyorlar mı?*
> ***Soru:***
> *Bir tarlanın $\frac{4}{5}$'ünün $2\frac{1}{2}$'sini keşfettiğiniz algoritma yardımıyla hesaplayıp sonucunuzun doğru olup olmadığını model yardımıyla kontrol ediniz.* (İpek- Kesirlerle çarpma ders planı)

Cemil dersinde son olarak kullandığı uzunluk modeli hariç hep alan modeli kullanımına yer vermiştir. Cemil soruların çözümünde genellikle öğrenciyi kendisi yönlendirmiştir. Öğrencilerin düşünmeleri için yeterli zamanı vererek onların kendi modellerini oluşturmalarını sağlamamıştır. Öğrencilere yerlerinde de modellerini oluşturmaları için fırsatlar vererek oluşturdukları modelleri incelememiştir. Bu nedenle Cemil öğrencilerin anlamalarını değerlendirmede çok başarılı olamamıştır. Aynı zamanda sadece alan modeli kullanımına yönelik anlamalarını değerlendirme şansına sahip olmuştur.

Uzunluk modelini dersin sonunda kullandığı için zil çalmış ve öğrencilerin çoğu temsilin nasıl oluşturulduğunu dinlememiştir. Cemil dersin sonunda öğrencileri değerlendirmek amaçlı hiçbir faaliyette bulunmamıştır. Planında ders sonrası kısmında İlker gibi çarpma işlemlerine ve "Öğrencilere bu ders saatinde neler öğrendikleri sorulur, konu toparlanır ve üzerinde tartışılır" ifadesine yer vermiştir.

Hale doğal sayı ile kesrin çarpımına yönelik dersinde alan modeli ve küme modeli kullanımına yer vermiştir. $6\times\frac{1}{2}$ işleminin alan modeli ile temsilini bir öğrenci oluştururken küme modeli ile temsilini ise kendisi oluşturmuştur. İkinci ders saatinde de yine doğal sayı ile kesrin çarpımını gerektirecek problemlerden birinde öğrencileri küme modeli ile temsil etmeye yönlendirmiştir. Böylece öğrencilerin küme modeli ile temsile yönelik anlamalarını değerlendirebilmiştir. Hale de diğer tüm öğretmen adayları gibi iki kesrin çarpımında alan modeli ile temsile yer vermiştir. Böylece öğrencilerin sadece alan modeli kullanmalarına yönelik anlamalarını değerlendirme şansına sahip olmuştur. Öğrencileri farklı modeller kullanmak üzere yönlendirmemiştir. Hale de İpek gibi öğrencilere çarpma algoritmasını keşfettirmeye çalışmıştır. Fakat öğrencilerin bu amaca ulaşıp ulaşmadıklarını değerlendirememiştir. Hale dersin sonunda diğer tüm öğretmen adayları gibi bir ölçme - değerlendirme faaliyetinde bulunmamıştır. Planında ise ders sonrası kısmında "Öğrencilerden $\frac{1}{5}\times\frac{2}{3}$ işleminin önce bununla ilgili bir problem kurmaları daha sonra bu işlemi alan modeliyle göstermeleri ve sonucunu bulmaları istenir. Daha sonra öğrencilerin sonuçları dinlenir" ifadesine yer vermiştir.

4.2.1.1.4.3. Öğrencilerin sahip olduğu hata/kavram yanılgılarını sınıf içi diyaloglardan ve öğrencinin yazılı dokümanlarından tespit etme. İlker öğrencilerin sahip olduğu hata/kavram yanılgılarını büyük oranda sınıf içi diyaloglardan tespit edememiştir. İpek öğrencilerin çalışma kağıtlarını ders sonunda inceleyerek sahip oldukları hata/kavram yanılgılarını genel olarak fark edebilmiş, yaptıkları hakkında bir yorumda bulunabilmiştir. Cemil ve Hale ise modelini incelediği öğrencilerin sahip olduğu hata/kavram yanılgılarını tespit edebilmiştir.

4.2.1.1.4.4. Öğrencilerin sahip olduğu hata/kavram yanılgılarının farkına varmalarını sağlayacak şekilde dönüt ve düzeltmeler yapma. İlker öğrencilere uygun dönüt ve düzeltmede bulunamamıştır. İpek derste iki kesrin çarpımının alan modeli ile temsilinde ikinci kesrin gösteriminde öğrencinin yaptığı hata karşısında kesrin anlamını düşünmeye yönlendirerek hatasının farkına varmasını sağlamıştır.

Cemil bütünü payda kadar eş parçaya ayırmayan ve eş olmayan parçalara ayıran öğrenciye “Bak $\frac{2}{3}$’si. Sen kaçını aldın orada? İkiye böldün. Paydayı üç diye söylüyorum ben sana. Yani kaça bölmen lazım?” ve “Eşit mi onlar? Bu üçü eşit mi?” ifadeleri ile dönüt ve düzeltmede bulunmuştur. Fakat Cemil’in uygun bir dönüt ve düzeltmede bulunamadığı görülmüştür. İki kesrin alan modeli ile temsili yardımıyla sonucu bulmakta hata yapan öğrenciye baştaki bütünü ve kaç parçadan oluştuğunu göstererek öğrencinin doğru cevaba ulaşmasını sağlamıştır.

Hale doğal sayı ile kesrin çarpımında başta aldığı bütün ile sonradan aldığı bütün farklı olan öğrenciye baştaki bütününü göstermiştir. Farklı büyüklükte bütünler oluşturan öğrenciye “Bak bunlar aynı büyüklükte mi?” sorusunu yöneltmiştir. İki kesrin çarpımının alan modeli ile temsilinde taralı kısımların neden ikinci kesir kadarının alındığını anlamayan öğrenciye tamamının değil o kesir kadarlık kısmının diğer kesir kadarlık kısmının istendiğini anlatmaya çalışmıştır. Hale’nin de Cemil gibi tam olarak uygun bir dönüt ve düzeltmede bulunamadığı görülmüştür.

4.2.1.1.5. Kesirlerle çarpma işleminde öğrenci düşüncesine odaklanma. Öğrenci düşüncesine odaklanma alt bileşenine ilişkin bulgular öğrencilerin düşüncelerini ortaya çıkarmak için soru sorma, öğrencilere düşüncelerini açıklama imkânı tanıma, öğrencinin oluşturduğu modeli anlama ve açıklama, öğrencileri farklı modeller oluşturmaya teşvik etme kategorilerinde ayrı ayrı ele alınmıştır.

4.2.1.1.5.1. Öğrencilerin düşüncelerini ortaya çıkarmak için soru sorma. İlker dersinde çok sayıda soru kullanmış, fakat bu sorular öğrenci düşüncelerini ortaya çıkarmak için uygun sorular olmamıştır. İlker derste sadece öğrencilere "bu işlemi model ile nasıl gösterebilirsiniz? Model dışında nasıl bu sonucu bulabilirsiniz? Bu problem bizden ne istiyor?" şeklinde sorular yöneltmiştir. İlker'in öğrencilerin fikirlerini tam olarak ortaya çıkarmak amaçlı ve öğrencileri düşünmeye sevk eden sorular sormadığı görülmüştür. Doğal sayılarda çarpma işleminin anlamına yönelik sorduğu sorular cevabı kendisinin verdiği sorular olmuştur. İlker öğrencilerden $\frac{3}{4}$ kesrini temsil etmelerini istemiş, bir öğrencinin alan modeli ile temsilinden sonra öğrenciye temsili nasıl oluşturduğunu sormamıştır. Ayrıca öğrencilerin kesri farklı modeller üzerinde temsil etmelerine yönelik bilgilerini ortaya çıkartıcı sorular da kullanmamıştır. Dersin ilerleyen aşamalarında da İlker verdiği problemlerin model ile temsili konusunda öğrencilerin temsilleri nasıl oluşturduklarına dair sorular yöneltmemiştir. Doğal sayı ile kesrin çarpımına yönelik verdiği problem alan modeli ile temsil edildikten sonra öğrencilere sonucun farklı bir şekilde nasıl bulunabileceğini sorarak öğrencilerin bu konudaki düşüncelerini almak istemiştir. İlker öğrencilerin iki kesrin çarpma işleminde model kullanımına yönelik hatalı oluşturdukları temsillerde öğrencilere neden o şekilde yaptıklarını sormamış ve kendisi ayrı bir temsil üzerinden sorunun çözümünü gerçekleştirmiştir. İlker'in öğrenci düşüncesini ortaya çıkarma bilgisinin zayıf olduğu görülmüştür.

İpek dersin başında öğrencilerin çarpmanın anlamı konusundaki bilgilerini belirlemek istemiştir. Öğrencilere "3×5 bize ne anlam ifade eder?" diye sormuş ve öğrencilerin verdiği cevaplardan sonra "Üç tane beş derken neyi kastediyoruz?" sorusunu yöneltmiştir. Yine $\frac{2}{3}$ kesrinin neyi ifade ettiği, pay ve paydanın neler olduğu, bu kesrin model kullanarak nasıl temsil edebileceği konularında da öğrenci fikirlerini ortaya çıkarmak istemiştir. İpek kesrin anlamı ile pay ve payda arasında bağlantı kurarak öğrencilerin kesri model ile temsil etmelerinde bir nevi yönlendirici olmuştur. Fakat bir öğrencinin $\frac{2}{3}$ kesrini alan modeli ile temsilinden farklı olarak kesrin farklı bir temsiline yer verilmemiştir. İpek de İlker gibi öğrencilerin kesrin farklı modeller ile temsiline yönelik bilgilerini ortaya çıkartıcı sorular kullanmamıştır.

İpek “Altı arkadaş origami etkinliği düzenleyecek. Her biri bir kâğıdın $\frac{2}{3}$’sini kullanıyorsa kaç kâğıt gerekir?” probleminin çözümünü model kullanarak bulunduktan sonra öğrencilere “Bu yaptığımız işlem hangi çarpma işlemi ile gösterilebilirdi?” sorusunu yöneltmiştir. Öğrencilerin $6\times\frac{2}{3}$ cevabını vermesi üzerine ek bir soru sorma ihtiyacı hissetmemiştir.

İpek “Arkadaşlar herkes üçüncü soruda 24 tane arabayı nasıl çizeceğiz diye mi düşünüyor?” diye sorarak öğrencilerin fikirlerini almak istemiştir. Bazı öğrencilerin “çizdik bile hocam” diye cevap vermesi üzerine öğrencilere “Başka bir yöntem düşünen yok mu?” diye sorarak öğrencileri düşünmeye sevk etmiş ve farklı düşünceye sahip olan öğrencileri ortaya çıkarmak istemiştir. Dersin sonunda İpek model ile bulmuş oldukları sonuçları işlemlerin karşısına yazarak öğrencilerin çarpma işleminin nasıl yapıldığı konusundaki fikirlerini almak istemiştir. İpek’in kesirlerde çarpma algoritmasını keşfettirmesine yönelik bir kesit aşağıdaki gibidir:

İpek:	*Şimdi arkadaşlar bütün bu işlemler sizlere çarpma işleminin nasıl yapıldığına dair bilgi veriyor. Neden öyle olduğunu söyleyerek açıklayalım. Bu işlemin nasıl yapıldığına dair incelemelerde bulunacaktık. İşlem buymuş ve sonucu buymuş. Hepsini incelediğimizde hepsinin nasıl bir ortak noktasını görüyoruz. Bu işlemler nasıl yapılmış olabilir?*
Öğrenciler:	*Çarpmayla.*
İpek:	*Çarpmayla yapılmış. Kesirlerde çarpma işlemi nasıl yapılmış olabilir?*

Öğrenciler: *Toplayarak. Çarparak.*

İpek: *Bir arkadaşımız pay ve paydayla ilgili bir şey söylemişti.*

Öğrenci 8: *Pay ile pay çarpılır. Payda ile payda çarpılır.*

İpek: *Pay ile pay çarpılır. Payda ile payda çarpılır. Buna nasıl ulaştık? Bu sonuca nasıl ulaştık?*

Öğrenciler: *İşlem, çarpma.*

İpek: *Peki o işlemlerde nasıl yapılacağına dair ipuçları var. O ipuçlarını görebiliyor musunuz? Mesela arkadaşımızın dediği doğru olabilir mi? Pay ile pay, payda ile payda çarpılarak mı yapılıyor bu işlem?*

Öğrenciler: *Evet.*

İpek: *Nereden anladık?*

Öğrenci 8: *Hepsi öyle.*

İpek: *Hepsi öyle. Pay ile pay, payda ile de payda çarpılarak sonucu bulabiliriz dedi arkadaşınız. Mesela beş. Ne yapılmış? Pay ile pay çarpılmış. Dokuz ile iki çarpılmış, 18. Payda ile de payda çarpılmış, sonuç 30 çıkmış. Hepsinde böyle mi arkadaşlar. Bunların paydasının bir olduğunu düşünelim. Hepsinde bu algoritma işliyor mu? O zaman yazalım. Kim yazdıracak bana kesirlerde çarpma işleminin nasıl yapıldığını?*

Öğrenciler: *Pay ile pay, payda ile de payda çarpılıyor.* (Kesirlerle çarpma ders gözlemi)

Yukarıda yer alan kesitten yola çıkarak İpek'in öğrencilerin çarpma algoritmasının nasıl olduğuna dair düşüncelerini ortaya çıkarmak için uygun sorular kullandığı görülmektedir. Aynı zamanda İpek iki kesrin çarpma işleminin model ile temsiline yönelik sorduğu sorular ile de öğrenci düşüncelerini ortaya çıkarmada kısmen başarılı olmuştur. İpek'in verdiği çalışma kağıdında iki kesrin çarpımıyla alakalı olarak "Bir ekmeğin $\frac{9}{10}$'unun $\frac{2}{3}$'sini bulunuz" problemi yer almaktadır. İpek bu soruyu model kullanarak çözmek için bir öğrenciyi tahtaya kaldırmıştır. Öğrencinin dikdörtgen şeklindeki bir bütünü on parçaya ayırıp dokuz parçasını alarak $\frac{9}{10}$ kesrini temsil ettiğini belirtmiştir. Bundan sonra öğrenciye "Şimdi bir ekmeğin $\frac{9}{10}$'unun yani bu kadarlık kısmının kaçta kaçını soruyor?" sorusunu yönelterek öğrenciyi düşündürmek ve fikrini almak istemiştir. Öğrenci $\frac{9}{10}$'un $\frac{2}{3}$'si şeklinde cevap vermiş, fakat oluşturduğu taralı alanda ilk iki parçayı tarayarak temsili gerçekleştirmiştir. Burada İpek $\frac{2}{3}$ kesrinin ne anlama geldiğini sormuş ve öğrenci yaptığı hatanın farkına vararak modeli bu defa yata olarak üç eş parçaya ayırmış ve iki eş parçasını seçmiştir.

Cemil de İlker gibi dersinde çok sayıda soru cümlesi kullanmış, fakat bu sorular öğrenci düşüncelerini ortaya çıkarıcı sorular olmamıştır. Yine öğrencilerin temsilleri nasıl oluşturduklarına yönelik düşüncelerini de ortaya çıkarmak amaçlı sorular yöneltmemiştir. Aynı zamanda öğrencileri farklı modeller ile teşvik etmeye yönlendirmediği için verilen problemin farklı modeller üzerinde de temsil edilmesine yönelik öğrenci düşüncelerini ortaya çıkarmak amaçlı sorular kullanmamıştır. Cemil öğrencilere son olarak verdiği $2\frac{1}{2} \times \frac{3}{5}$ işleminde bir öğrenciyi işlemi model ile temsil etmek üzere tahtaya kaldırmıştır. Öğrenciye $2\frac{1}{2}$'in ne demek olduğunu, ne ifade ettiğini sormuştur. Öğrencilerden bir cevap gelmemiş ve sayı doğrusunda bu kesrin nasıl temsil edildiğini göstermiştir. Cemil burada öğrencilerin fikirlerini almak için bu soruyu yöneltmiş olsa da öğrencilerin cevap vermemeleri üzerine onları yönlendirmemiş ve cevap vermeleri için teşvik etmemiştir.

Cemil öğrencilere "Elindeki şekerlerin $\frac{2}{5}$'sinin $\frac{2}{3}$'sini arkadaşı Ethem'e veren İbrahim'in elinde toplam şeker miktarının kaçta kaçı kalmıştır? problemini yazdırmıştır. Çarpma işlemini model ile temsil etmesi için bir öğrenciye söz hakkı vermiştir. Öğrenci $\frac{2}{5}$ kesrini temsil ettikten sonra "İstersen aynı şeklin üzerinden çizebilirsin. Ya da şey olacaksa yanına çiz ikisini birleştirelim" diyerek öğrenciyi yönlendirmiştir. Böylece öğrenci iki kesir için farklı temsiller oluşturmuştur. Burada Cemil öğrenciyi saydam kesir kartları kullanarak kesirlerde çarpma işlemi yapıyormuş gibi davranmaya yönlendirmiştir. Cemil iki kesrin kesişim noktalarının neyi ifade ettiğini öğrencilere sorarak onların bu konudaki fikirlerini almak istemiştir. İki kesri nasıl birlikte temsil edileceğini sorduğunda bir öğrencinin tek kesirlerde demesi üzerine öğrencinin tek model üzerinde demek istediğini düşünmüş ve bu şekilde ifade etmiştir. Fakat Cemil dersinde soru soruyormuş gibi davransa da aslında bu soruları kendi düşüncelerini belirtmek ve öğrencilere onaylatmak için kullanmıştır. Cemil'in öğrenciyi iki kesrin çarpımında saydam kesir kartları kullanıyormuş gibi yönlendirdiğine dair dersinden bir kesit aşağıdaki gibidir:

Cemil:	*Şimdi bunu nasıl birleştirirsin? Çizmeden söyle.*
Öğrenci 1:	*Genişletirim.*
Cemil:	*Normalde sen bunları aynı boyda çizdin değil mi? Bunu beşe böldün, bunu üçe böldün. Bunları üst üste koyunca sen neyi elde edeceksin? İkisinin bir kesim noktasını değil mi? İkisinin kesiştiği alanı elde edeceksin. Bu kesiştiği alan da bize neyi verecek?*
Öğrenci 1:	*Düşünüyor.*
Cemil:	*Neyi verecek bize kesiştiği alan? (bu defa soruyu sınıfa yöneltiyor) Neyi verecek?*
Öğrenci 2:	*Kesiştiği alan mı? Tüm parçanın kaçta kaçı olduğunu verecek.*
Cemil:	*Hıhı, evet. Tüm parçanın kaçta kaçı olduğunu verecek. Biz şimdi bunları nasıl üst üste koyacağız? Sen şimdi buradan aynı şekilde koysan kesiştiği alanı elde edebilir miyiz? Gözle görebilir miyiz yani, kaçta kaçı olduğunu görebilir miyiz? Bence göremeyiz. İkisi de dikey şu an. Üstüne koyduğumuzda göremeyebiliriz. Peki ne yapacağız?*
Öğrenci 3:	*Çarpacağız.*
Cemil:	*Çarpacağız, güzel. Model üzerinde biz ne yapacağız? İki kesrimizi de biz şu an model üzerinde gösterdik. Bu modellerin ikisini bir şey yapacağız ve sonucu elde edeceğiz. Modellerin amacı zaten o değil mi?*
Öğrenci 4:	*Tek kesirde göstereceğiz.*
Cemil:	*Tek modelde göstereceğiz, tek model. Şimdi tek modelde göstermemiz için az önce de dediğim gibi bunu bunun üzerine koyduğumuzda…Koy bakalım yap.*
Öğrenci 1:	*Başka bir yerde?*
Cemil :	*Başka bir yerde evet yap. İkisinin üst üste olduğunu göster. Şimdi neden zorlanıyorsun biliyor musun? İkisini dikey şekilde çizdin mesela. Bunu mesela söyleyecek olan var mı farklı şekilde? Nasıl çizeceğiz?*
Öğrenci 5:	*Birini yatay çizeceğiz.*
Cemil:	*Hıhı, birini yatay çizeceğiz. Bak şimdi şunu şöyle yapsaydık eğer ve ikisini alsaydık. Şimdi bunları birleştirmek daha kolay olmaz mıydı görmesi? Tamam şimdi yap bakalım.* (Kesirlerle çarpma ders gözlemi)

Yukarıda yer alan kesitte Cemil'in hem öğrencilere düşüncelerini açıklama imkânı tanıyan sorular sorduğu, hem de cevabını kendisinin verdiği sorular sorduğu görülmüştür. Aynı soru üzerinde Cemil öğrencilere hangi işlemin yapılması gerektiğini ve sonra da çarpma işleminin nasıl yapıldığını sormuştur. Bu soruda öğrencilerin bir de çıkarma işlemi yapmaları gerekmektedir. Çalışmanın amacı dışında olduğu için o kısımlar analize alınmamıştır. Cemil burada öğrencilere “Alttakilerin ismi ne? Üsttekilerin ismi ne?” diye sorarak pay ve paydanın neler olduğunu hatırlatmıştır. Öğrencilerin kesir çizgisinin altında ve üstünde kalan sayıları pay ve payda olarak adlandırması üzerine sınıftaki öğrencilerin bir tanesinin çarpmanın nasıl yapıldığını açıklamasını istemiştir. Sonra öğrencinin söylediği verilen işlem üzerinde uygulanarak bilginin doğruluğu test edilmiştir. Aslında Cemil öğrencilerden model ile sonucu bulmalarını istediği her problemden sonra yapılan işlemin doğruluğunu kontrol etmek adına sonucu bir de çarpma algoritmasıyla buldurmuştur. Cemil’in amacı aslında modelden yola çıkarak algoritmayı keşfettirmek iken Cemil modeli bir çözüm yöntemi olarak ele almıştır. Bu amacın verdiği yönlendirme ile aslında öğrencilere algoritma kullanarak çözüm yaptırmasına rağmen öğrencilerin algoritmanın nasıl olduğu konusundaki fikirlerini almak istemiştir.

Hale kesrin ne ifade ettiği, verilen kesrin model ile nasıl temsil edilebileceği, çarpma işleminin nasıl yapıldığı, verilen problemin hangi işlem kullanılarak çözülebileceği, kesirlerde çarpmanın alan modeli ile temsilinde elde edilen taralı kısmın yorumlanması, ikinci kesrin nasıl temsil edileceği konularında soru ifadeleri kullanmıştır. Fakat öğrencilerin düşüncelerini ortaya çıkarmada çok etkili sorular kullanamamıştır.

4.2.1.1.5.2. Öğrencilere düşüncelerini açıklama imkânı tanıma. İlker doğal sayılarda çarpma işleminin taşıdığı anlam konusunda öğrencilere düşüncelerini açıklama imkânı tanırken, problemlerin model ile temsilinden sonra öğrencilerden oluşturdukları temsilleri açıklamalarını istemediği için öğrencilere düşüncelerini açıklama imkânı tanımamıştır. Cemil öğrencilere çarpmanın anlamı konusundaki düşüncelerini açıklama imkânı tanımıştır. Öğrencileri model oluşturma konusunda kendisi yönlendirdiği için ve sorduğu sorularda cevabı kendisi verdiği için öğrencilere düşüncelerini açıklama imkânı tanımamıştır. İpek ise bu iki öğretmen adayı gibi çok fazla cevabı kendisinin verdiği sorular kullanmamış, öğrencilerin verdiği cevapları dinlemiş, öğrencilere düşüncelerini açıklamak için daha fazla imkân tanımıştır.

Hale öğrencilerden $\frac{2}{3} \times \frac{1}{3}$ işlemini model ile temsil etmelerini istemiştir. Burada öğrencilere $\frac{2}{3}$'yi nasıl gösterebileceklerini sormuştur. Öğrenciler "üçe ayırıp, ikisini alırız" şeklinde cevap vermişlerdir. Hale bir bütünü üç eş parçaya ayırıp bu eş parçalardan iki tanesini tarayarak kesri temsil etmiştir. Bu temsilin ardından bunun $\frac{1}{3}$'inin nasıl bulunacağı konusunda öğrenci fikirlerini almak istemiştir. Bir öğrencinin "yine üçe böler birini alırsınız" demesi üzerine öğrencilere "üçe nasıl böleyim?" diye sormuştur. Öğrenciler "yan" şeklinde cevap vermişlerdir. Burada öğrenciler dikey olarak eş parçalara ayrılmış olan bütünün $\frac{1'}{3}$ ini temsil etmek için yatay olarak da üç eş parçaya ayrılması gerektiğini söylemişlerdir. Hale de öğrencilerin yan ifadesinden bunu anlamış ve bu şekilde bir temsil gerçekleştirmiştir. En son olarak elde ettiği taralı kısımların nasıl ifade edileceğini sorduğunda öğrenciler "dokuzda iki" şeklinde cevap vermişlerdir. Sınıfta farklı şekilde cevap veren öğrenci olmamıştır ve bu nedenle de Hale öğrencilere ek bir soru yöneltmemiştir. Burada Hale'nin öğrencilere düşüncelerini açıklama imkânı tanıdığı görülmektedir.

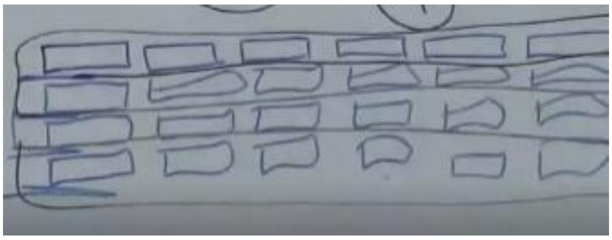
Hale "Candan sınıfta paylaşmak üzere 25 gofret getiriyor. Gofretlerin $\frac{3}{5}$'ü bitter çikolatalıdır. Kaç tane bitter çikolatalı gofret vardır?" probleminin çözümünün küme modeli yardımı ile bulunmasını istemiştir. Öğrencinin oluşturduğu temsilin ardından ona neden bu şekilde gösterdiğini sorarak öğrenciye düşüncesini açıklama imkânı tanımıştır.

Hale öğrencilere "Yulaflı muzlu kek tarifinde bir bardağın $\frac{3}{4}$'ü kadar yulaf eklemek gerekiyor. Kek $\frac{1}{2}$ büyüklükte yapılacak olsaydı ne kadar yulaf eklemek gerekirdi?" problemini yöneltmiştir. Problemi yazdırdıktan sonra neyin bulunması gerektiğini sormuştur. Öğrenciler yulafı diye cevap verince Hale yulafı nasıl bulacağını sormuştur. Bir öğrenci “bölme işlemi yaparak” cevabını vermiştir. Hale’nin “bölme işlemi mi yapacağım?” diye sorması üzerine “çarpma” olarak düzeltmiştir. Bunun üzerine Hale neyi çarpacağını sormuş ve öğrenci de $\frac{3}{4}$ ile $\frac{1}{2}$’i cevabını vermiştir. Hale öğrencilerden en son iki örneğin işlemlerine bakmalarını istemiş ve buradan yola çıkarak “Çarpma işleminde ne gördünüz?” diye sormuştur. Öğrenciler “modelleme” diye cevap vermiştir. Bunun üzerine Hale “modelleme yaptık. Modelleme yapmadan da nasıl bulabilirdim?” diye sormuştur. Öğrenciler “işlemini yaparak, direk çarparak” cevabını vermişlerdir. Hale burada öğrencilerin iki kesrin çarpma işleminin nasıl yapıldığına dair fikirlerini ortaya çıkarmak istemiştir ve öğrencilere düşüncelerini açıklama imkânı tanımıştır. Hale’nin dersinde genel olarak öğrencilere düşüncelerini açıklama imkânı tanıdığı görülmüştür.

4.2.1.1.5.3. Öğrencinin oluşturduğu modeli anlama ve açıklama. İlker doğal sayı ile kesrin çarpımına yönelik verdiği problemi model ile temsil etmesi için bir öğrenciye söz hakkı vermiştir. Öğrenci önce kesri üçte iki olarak okunduğu için $\frac{3}{2}$ olarak almış ve ona yönelik bir temsil oluşturmuştur. Ardından sınıftaki öğrencilerin ikaz etmesi üzerine altı bütün almış ve her bir bütünün $\frac{2}{3}$’sini göstermiştir. Burada İlker öğrenciye modeller üzerindeki parçaların eş olduğunu ve bu nedenle taralı parçaları bir araya getirerek sonucun bulunabileceğini söylemiştir. Öğrenci ardından sonucun dört olduğunu ifade etmiştir. Fakat öğrencinin kullanılan model ile mi sonucu bulduğu yoksa zihninden mi işlem yaparak sonucu söylediği belirsiz kalmıştır. Çünkü öğrenci $\frac{2}{3}$ yerine $\frac{3}{2}$ kesrini aldığı zaman sonucu çarpma algoritması kullanarak bulmuştur. Fakat İlker öğrenci modeli oluşturduktan sonra öğrencinin düşüncesiymiş gibi taralı alanları bir araya getirerek sonucun bulunduğunu açıklamıştır. Aynı zamanda İlker iki kesrin çarpma işlemini temsil etmede iki kesir için farklı temsiller kullanan öğrencilerin yaptıklarını anlamamış, farkına varmamış ve kendisi bir temsil oluşturmuştur.

İpek $24\times\frac{3}{4}$ işlemi kullanılarak çözülebilecek problemin küme modeli ile temsili için bir öğrenciye söz hakkı vermiştir. Öğrenci 24 küçük dikdörtgeni dört satır şeklinde Şekil 4.61'deki gibi çizmiştir. İpek öğrencinin temsilini aşağıdaki kesitteki gibi ifade etmiştir:

İpek:	*24 bizim bütünümüzdü. Ve arkadaşınız da ne yaptı? 24'ü dörde parçaladı. Parçalarımızdan biri bu, biri bu, biri bu, biri bu. Dört parçamız oldu arkadaşlar. Peki şu an elimizde dörde parçalanmış bir ne oluştu? Model oluştu değil mi arkadaşlar? Şimdi ne yapmam gerekiyor? Ben paydanın işlevini yerine getirdim. Sırada ne var?*
Öğrenci 6:	*Pay kadar alacağız.*
İpek:	*Pay kadarını alacağız. Pay kadarını nasıl alırız göstermek ister misin?*
Öğrenci 6:	*Dört tane grup var. Üç tane grup alacağız.*
İpek:	*Arkadaşınız diyor ki; dört tane gruba ayırdık. Ayırdığımız gruplardan üç tanesini alacağım diyor, pay üç olduğu için. Ve sonuç olarak da 18 buldu. Yani her bir sırada altı araba olduğunu söyledik. Altı, altı, altı, toplamda 18.* (İpek'in kesirlerle çarpma ders gözlemi)



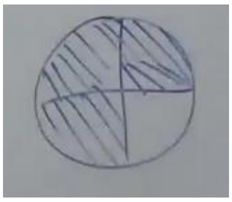
Şekil 4.61. Öğrenci 6'nın $24\times\frac{3}{4}$ işlemini temsil etmek için 24'ü dört gruba ayırdığı temsili, (İpek- Kesirlerle çarpma ders gözlemi)

Yukarıda yer alan kesitten İpek'in öğrencinin oluşturmuş olduğu küme modeli temsilini anladığı ve oluşturulan temsili öğrencilere açıkladığı görülmektedir.

İpek "Bir pizzanın $\frac{3}{4}$'ünün $\frac{1}{3}$'ini bulunuz" şeklinde verdiği problemin çözümünü model ile gerçekleştirmek için sınıftaki öğrencilerden bir tanesini seçmiştir. Şekil 4.62'de'de Öğrenci 7'nin $\frac{3}{4}$ kesrini alan modeli ile temsiline, Şekil 4.63'te $\frac{3}{4}\times\frac{1}{3}$ işlemini alan modeli ile temsiline yer verilmiştir. Öğrencinin model ile temsiline yönelik İpek ile arasında geçen konuşmalar ve İpek'in öğrencinin temsiline yönelik yaptığı açıklamalar aşağıda yer alan kesitteki gibidir:

Öğrenci 7: *(Önce dikdörtgen çiziyor. Fakat sonra parçaları eş olmadı diye düşünerek daire çiziyor.)*

İpek: *Şimdi arkadaşlar bu bizim başlangıç miktarımızdı öyle değil mi?*



Şekil 4.62. Öğrenci 7'nin $\frac{3}{4}$ kesrini alan modeli ile temsili, (İpek- kesirlerle çarpma ders gözlemi)

Ve bu pizzanın $\frac{3}{4}$'ünün de kaçta kaçını istiyor? $\frac{1}{3}$'ini.

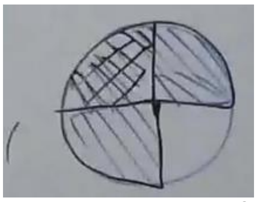
Öğrenci 7: *Yani bunun $\frac{1}{3}$'ini bulacağız.*

İpek: *Artık bütünümüz ne oldu arkadaşlar? Şu kısım yeni bütünümüz oldu ve bunun da $\frac{1}{3}$'i isteniyor.*

Öğrenci 7: *Yani bu bütün için aslında 3 tane $\frac{1}{3}$ oluyor.*

İpek: *Zaten bütün üç parçaya ayrılmış diyor arkadaşınız. Tekrar bir bölme işlemi yapmama gerek yok diyor. O zaman bu bütünün $\frac{1}{3}$'lik kısmını bana gösterebilir misin?*

Öğrenci 7:



Şekil 4.63. Öğrenci 7'nin $\frac{3}{4} \times \frac{1}{3}$ işlemini alan modeli ile temsili, (İpek- kesirlerle çarpma ders gözlemi)

İpek: *Evet, bu şekilde arkadaşlar ikinci sayfada yapmanız gerekenler. Son olarak bizim taradığımız şu kısım başlangıç miktarının ne kadarıydı? Bakalım. Şu siyah kısım $\frac{3}{4}$'ünün $\frac{1}{3}$'i. Başlangıç miktarının kaçta kaçı? Bir bütünün kaçta kaçı?*

Öğrenci 8: $\frac{1}{4}$.

İpek : *$\frac{1}{4}$'e denk geliyor.* (Kesirlerle çarpma ders gözlemi)

İpek burada hem öğrencinin model kullanımı konusundaki fikirlerini açıklamış hem de işlemin sonucunun ne olduğuna dair, modelden yola çıkarak, öğrencilerin fikirlerini ortaya çıkarmak istemiştir.

Cemil, öğrencileri model oluşturma konusunda yönlendirdiği için öğrenciler tarafından oluşturulan modelleri anlamış, fakat oluşturulan temsillerden sonra açıklamasını yapmamıştır.

Hale $6\times\frac{1}{2}$ işlemi için öğrencinin oluşturduğu temsili "Altı tam var dedin, değil mi? Hepsinin yarısını aldın. Bu ne yaptı? Üç tam yaptı" şeklinde açıklamıştır. Burada Hale'nin öğrencinin oluşturduğu temsili anladığı ve açıkladığı görülmektedir. Yine iki kesrin çarpımının alan modeli ile temsilinde Hale öğrencilerin oluşturdukları temsilleri anlamıştır.

4.2.1.1.5.4. Öğrencileri farklı modeller oluşturmaya teşvik etme. İlker ve Cemil öğrencileri sadece çarpma algoritması kullanmaya sevk etmiştir. Çok sayıda öğrenciye söz hakkı vererek onların nasıl modeller oluşturabileceklerini incelememiş ve bu konudaki fikirlerini almamıştır. Hale ve İpek ise içinde 24 ve 25 doğal sayıları geçen problemler verdikleri için öğrencilerin alan modeli ile temsilde zorlanacaklarını düşünerek onları küme modeli ile temsil etmeye yönlendirmişlerdir. Fakat bu öğretmen adayları da ders esnasında öğrencileri farklı modeller üzerinde temsil etmeye teşvik etmemiş, bir soru için farklı temsil gerçekleştiren öğrenciler varsa bunları ortaya çıkarmamışlardır. Cemil bir problemde diğer öğretmen adaylarından farklı olarak öğrenciyi saydam kesir kartları kullanıyor gibi hareket etmeye yönlendirmiştir.

4.2.1.2. Öğretmen adaylarının kesirlerle çarpma işleminde model kullanımına yönelik matematiksel temsiller bilgisi. Bu kısımda PAB'ın matematiksel temsiller bileşenine ilişkin bulgulara odaklanılmıştır. Öğretmen adaylarından iki tanesi verdikleri işlem ve problemlerin sonucunun model yardımı ile bulunmasını isterken iki öğretmen adayı ise model ile sonucun bulunmasının ardından bir de çarpma algoritması kullanarak sonucun bulunmasını istemişlerdir. Bu nedenle öğretmen adaylarının model kullanım bilgileri incelenirken "Çarpma işlemi yapmanın bir yolu olarak model kullanımı" ve "Çarpma algoritmasını keşfettirmek amaçlı model kullanımı" olmak üzere iki kategori oluşturulmuştur. Her öğretmen adayının doğal sayı ile kesrin çarpımında ve iki kesrin çarpımında hangi modelleri kullandıkları ve model kullanımında neye dikkat ettikleri Tablo 4.6'da özetlenmiştir. Tablonun devamında öğretmen adaylarının her birinin model kullanım bilgileri ayrı ayrı ele alınmıştır. Öğretmen adaylarının derslerinden, ders planlarından ve hazırlamış oldukları ders notlarından kesitler verilerek veriler örneklendirilmiş ve desteklenmiştir.

Tablo 4.6'da öğretmen adaylarının matematiksel temsiller bilgisi bileşenine ait verilerin analizi sunulmuştur. Tablonun devamında öğretmen adaylarının doğal sayı ile kesrin çarpımına, iki kesrin çarpımına yönelik matematiksel temsiller bilgileri alan modeli, küme modeli ve uzunluk modeli bağlamında alt başlıklar halinde detaylı olarak sunulmaktadır.

Tablo 4.6

Öğretmen Adaylarının Kesirlerle Çarpma İşleminde Model Kullanımına Yönelik Matematiksel Temsiller Bilgisi Bileşenine Ait Bulgular

<table>
<tr><th colspan="3">Kategoriler</th><th>Gerçekleştiren Ö.A.</th><th>Yaklaşım</th></tr>
<tr><td rowspan="7">Çarpma İşlemi Yapmanın Bir Yolu Olarak Model Kullanımı</td><td rowspan="2">Doğal sayı ile kesrin çarpımında</td><td rowspan="2">Alan modeli</td><td>İlker</td><td rowspan="2">• Doğal sayı kadar bütün oluşturma
• Oluşan bütünleri kesrin paydası kadar parçaya ayırma ve payı kadarını seçme ile her bütünde verilen kesri temsil etme
• Sonucu bulmada her parçanın eş olmasından hareket ederek taralı kısımları bütüne tamamlamaya çalışma</td></tr>
<tr><td>Cemil</td></tr>
<tr><td rowspan="5">İki kesrin çarpımında</td><td rowspan="2">Alan modeli</td><td>İlker</td><td>• Bütünü ilk kesrin paydası kadar eş parçaya ayırma ve pay kadarını seçme
• Elde edilen taralı kısmı yeni bütün olarak ele alma
• Bu kısmın ikinci kesir kadarını alma (oluşan taralı alan ikinci kesrin paydası kadar eş parçadan oluşuyorsa bu eş parçalardan payı kadar parçayı seçme)
• Sonucu yorumlamada baştaki bütünü dikkate alma</td></tr>
<tr><td>Cemil</td><td>• Bütünü ilk kesrin paydası kadar eş parçaya ayırma ve pay kadarını seçme
• Elde edilen taralı kısmı yeni bütün olarak ele alma
• Bu kısmın ikinci kesir kadarını alma (oluşan taralı alan ikinci kesrin paydası kadar eş parçadan oluşuyorsa bu eş parçalardan payı kadar parçayı seçme)
• Sonucu yorumlamada baştaki bütünü dikkate alma
• İki kesri birini yatay birini dikey ve eşit büyüklükte olacak şekilde temsil etme ve iki temsili üst üste koyarak kesişimlerini belirleme
• Bu kesişen parçaların toplam parça sayısı içindeki oranını çarpma işleminin sonucu olarak ele alma</td></tr>
<tr><td>Küme modeli</td><td>Cemil</td><td>• Paydaların ekokları kadar sayma nesnesi alma
• Bu sayma nesnelerini ilk kesrin payına göre gruplama ve pay kadar grubu seçme
• Bu seçilen nesneleri yeni bütün olarak ele alma
• Nesneleri ikinci kesrin payına göre gruplama ve payı kadarını seçme
• Sonuç olarak elde edilen nesne sayısının toplam nesne sayısına oranını çarpma işleminin sonucu olarak bulma</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Uzunluk modeli</td><td>İlker</td><td rowspan="2">• Sayı doğrusunda iki sayı arasını payda kadar eş parçaya ayırma sonucu oluşan uzunlukları pay kadar yineleme
• Oluşan parçaları yeni bütün olarak ele alma
• İkinci kesri temsil etmek için bu parçalar payda kadar ise payı kadar parçasını seçme
• Uzunluğun kaç kere yinelendiğini inceleyerek sonucu bulma</td></tr>
<tr><td>Cemil</td></tr>
</table>

Kategoriler			Gerçekleştiren Ö. A.	Yaklaşım
Çarpma algoritmasını keşfettirmek amaçlı model kullanımı	Doğal sayı ile kesrin çarpımında	Alan modeli	İpek	• Doğal sayı kadar bütün oluşturma • Oluşan bütünleri kesrin paydası kadar parçaya ayırma ve payı kadarını seçme ile her bütünde verilen kesri temsil etme • Sonucu bulmada tekrarlı toplama kullanma ya da her parçanın eş olmasından hareket ederek taralı kısımları bütüne tamamlamaya çalışma
			Hale	• Doğal sayı kadar bütün oluşturma • Oluşan bütünleri kesrin paydası kadar parçaya ayırma ve payı kadarını seçme ile her bütünde verilen kesri temsil etme • Sonucu bulmada her parçanın eş olmasından hareket ederek taralı kısımları bütüne tamamlamaya çalışma • Başlangıçta alınan bütün ile sonuç olarak elde edilen bütün aynıdır bilgisi
		Küme modeli	İpek Hale	• Doğal sayıyı kesrin paydası kadar eş gruba ayırma ve bu gruplardan pay kadarını seçme • Bu gruplarda yer alan toplam nesne sayısının çarpma işleminin sonucu olduğunu bulma
	İki kesrin çarpımında	Alan modeli	İpek	• Bütünü ilk kesrin paydası kadar eş parçaya ayırma ve pay kadarını seçme • Elde edilen taralı kısmı yeni bütün olarak ele alma • Bu kısmın ikinci kesir kadarını alma (oluşan taralı alan ikinci kesrin paydası kadar eş parçadan oluşuyorsa bu eş parçalardan payı kadar parçayı seçme) • Sonucu yorumlamada baştaki bütünü dikkate alma • Bütünü ilk kesrin paydası kadar eş gruba ayırma, payı kadarını seçme, • Bütünü farklı (dikey ya da yatay) yönden ikinci kesrin paydası kadar eş parçaya ayırma ve payı kadarını seçme • Kesişim sonucu oluşan parça sayısının toplam parça sayısına oranı ile sonucu bulma
			Hale	• Bütünü ilk kesrin paydası kadar eş gruba ayırma, payı kadarını seçme, • Bütünü farklı (dikey ya da yatay) yönden ikinci kesrin paydası kadar eş parçaya ayırma ve payı kadarını seçme • Kesişim sonucu oluşan parça sayısının toplam parça sayısına oranı ile sonucu bulma /taralı alanın bütünün alanına oranından sonucu bulma

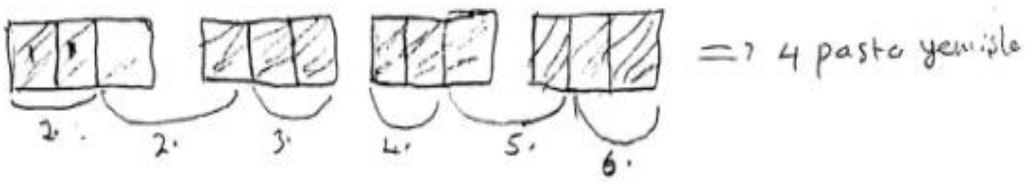
Öğretmen adaylarının amacı aslında kesirlerin çarpımını model ile temsil ederek ulaşılan sonuçları ve yapılan işlemleri öğrencilere inceletip çarpma algoritmasının keşfettirilmesidir. Fakat İlker ve Cemil derslerinde modeli çarpma algoritmasını keşfettirme amaçlı değil çarpma işlemi yapmanın bir yolu olarak kullanmıştır. Verdikleri problemlerin model ile temsilinden sonra bir de çarpma algoritması kullanılarak yapılmasını istemişlerdir.

4.2.1.2.1. Öğretmen adaylarının doğal sayı ile kesrin çarpımında alan modeli kullanımına yönelik matematiksel temsiller bilgisi. Öğretmen adaylarının doğal sayı ile kesrin çarpımında alan modeli kullanımına yönelik matematiksel temsiller bilgileri ayrı ayrı ele alınmış ve örneklerle desteklenmiştir.

İlker dersinde doğal sayı ile kesrin çarpımında sadece alan modeli kullanımına yer vermiştir. Bir öğrenciyi tahtaya kaldırmış, ondan temsilini oluşturmasını istemiştir. Öğrenci $\frac{2}{3}$ kesrini önce $\frac{3}{2}$ kesri olarak anlamış ve buna yönelik bir model oluşturmuştur. Öğrencilerin yapılan hatanın farkına vararak yanlış yapıldığını söylemesi üzerine İlker öğrenciye problemde yer alan kesrin $\frac{2}{3}$ olduğunu söylemiştir. Bunun üzerine öğrenci altı bütün oluşturmuş ve her bir bütünde $\frac{2}{3}$ kesrini temsil etmiştir. İlker öğrenciye tüm parçaların eş olduğunu söyleyerek taralı olmayan kısımlara taralı kısımları taşıyarak sonucu elde edebileceğini söylemiştir. İlker öğrenci böyle bir işlem yapmasa da "arkadaşınız diyor ki" diyerek kendi temsil bilgisini öğrencilere sunmuştur. İlker'in $6\times\frac{2}{3}$ işleminin sonucunu model ile nasıl bulduğuna dair dersinden bir kesit aşağıdaki gibidir:

> *Arkadaşınız diyor ki ekleyerek şöyle bir şey yaparım mesela. Şöyle bir şey oldu; Bir kişi $\frac{2}{3}$ yemişti. Bir kişi burada yedi değil mi? İkinci kişi burada, ikisini yedi ikinci kişi, değil mi? Üçüncü kişi ise bu kadar yedi. Dördüncü kişi bu kadar yedi. Beşinci kişi bu kadar yedi. Toplam kaç tane pasta var burada?* (İlker- Kesirlerle çarpma ders gözlemi)

İlker ders için hazırlamış olduğu notlarda da aynı şekilde bir yaklaşım kullanarak çarpma işleminin sonucunu bulmuştur. İlker'in ders notlarında oluşturduğu temsil Şekil 4.64'te gösterilmiştir.



Şekil 4.64. İlker'in $6\times\frac{2}{3}$ işlemini alan modeli ile temsili, (Kesirlerde çarpma ders notları)

İpek planında öğretimde hangi modellere yer vereceğini belirtmemiştir. Öğrencilere vermiş olduğu çalışma kağıdı dışında bir ders notu da hazırlamamıştır. İpek sadece bir soru için öğrencileri küme modeli ile temsil etmeye yönlendirmiştir. İpek tüm soruları model ile temsil etmesi için bir öğrenciye söz hakkı vermiştir. Bu öğrenciler alan modeli ile temsil etmeyi tercih etmiş ve İpek de başka modeller ile de temsil edip edemeyeceklerini sorgulamamıştır. İpek'in model kullanımına yönelik bilgisi öğrencilerin modellerini oluştururken yaptığı yönlendirmeler ve öğrenci ifadelerini açıklamalarından elde edilmiştir.

İpek'in doğal sayı ile kesrin çarpımını model ile temsil etmede; doğal sayı adedince bütün alma, bu bütünlerde kesri temsil etme ve kesri doğal sayı adedince tekrarlı toplayarak sonucu elde etme ve/veya bütünlerdeki parçaların eş olmasından hareketle taralı parçaları bir araya getirerek bütüne tamamlamaya çalışma bilgisine sahip olduğu görülmüştür. Derste öğrenci $6\times\frac{2}{3}$ işlemini temsil etmek için altı bütün oluşturmuş, bu bütünlerde $\frac{2}{3}$ kesrini temsil etmiştir. İpek'in oluşturulan temsilden sonra "ne kadar kağıt kullanıldığını görebiliyoruz değil mi artık?" demesi üzerine öğrenci üç ile çarpıp ikiye böleceğini söylemiştir. Bunun üzerine İpek öğrenciden çarpma algoritması kullanmadan, toplamların kaç olduğunu başka bir yöntemle bulmasını istemiştir. Öğrenci de altı tane $\frac{2}{3}$'yi toplayarak sonucu elde etmiştir. Burada İpek'in öğrenciyi tekrarlı toplama ile sonucu bulmaya yönlendirdiği anlaşılmıştır.

Ayrıca öğrencilere vermiş olduğu çalışma kağıdında bir öğrencinin “4 kekin $\frac{1}{3}$’i ne kadar kek yapar?” sorusunda dört ayrı $\frac{1}{3}$ temsili oluşturduğunu, işlemin sonucunu da $\frac{4}{3}$ olarak bulduğunu, fakat taralı kısımları bütüne tamamlayarak sonuca ulaştığına dair bir kanıt olmadığını söylemiştir. Bu düşüncesi onun doğal sayı ile kesrin çarpımının alan modeli ile temsilinde bütüne tamamlayarak sonuca ulaşma bilgisine sahip olduğunu göstermiştir.

Cemil $6\times\frac{2}{3}$ işlemini temsil etmede bütüne tamamlama yaklaşımını kullanmıştır. Hem hazırlamış olduğu ders notlarında bu yaklaşımı sergilemiş hem de derste öğrenciye yaptığı yönlendirmeler ile oluşturdukları temsilde bu yaklaşım kullanılmıştır. Cemil’in dersinde öğrenciyi model oluşturması konusunda nasıl yönlendirdiğine dair bir kesit aşağıdaki gibidir:

Cemil: *Bence sırayla yapalım bunu çizmeden önce. Birinci ekmeği tüketelim, sonra ikinciyi çizelim olmaz mı? Bir ekmeğin $\frac{2}{3}$’sini tüketiyor bir öğrenci. Bir öğrencinin tükettiği yeri tara, tamam. Bu birinci öğrenci değil mi? Geriye kaldı kaç öğrenci? Beş öğrenci kaldı evet. Şimdi ikincinin tükettiği ekmeği tarayalım. Farklı kalemle tarayalım istersen. $\frac{1}{3}$’ini yedi. Şimdi diğer ekmeğe başlayacak. Tamam bu da ikinci öğrencinindi. Şimdi üçüncü öğrencimiz de yedi. Şimdi üç öğrenci kaldı. Tamam onu da çiz yine. Bu dördüncü öğrenci tamam. Şimdi beşinci öğrenci. Beşinci öğrenci bir parça yedi şu an, $\frac{1}{3}$’ini yedi. O zaman bir ekmek daha yapacağız yoksa doymayacak bunlar. Altı öğrenci de bir ekmeğin $\frac{2}{3}$’sini yemiş oldu. Toplam kaç ekmek tüketilmiş oldu o zaman?*

Öğrenciler: *Dört.* (Cemil- Kesirlerle çarpma ders gözlemi)

Cemil’in ders için hazırlamış olduğu notlarda $6\times\frac{2}{3}$ işlemi için nasıl bir temsil oluşturduğu Şekil 4.65’te gösterilmiştir.

Şekil 4.65. Cemil’in $6\times\frac{2}{3}$ işlemini alan modeli temsili, (kesirlerle çarpma ders notu)

Hale dersinde öğrencilerden $6\times\frac{1}{2}$ işlemini model ile temsil etmelerini istemiştir. Hale öğrencilerden bir tanesine söz hakkı vererek öğrenciye temsilini tahtada oluşturma fırsatı vermiştir. Öğrenci önce altı bütün almış, sonra her bir bütünü ikiye ayırıp, bir parçasını tarayarak her bütünün $\frac{1}{2}$'ini göstermiş ve sonucun üç olduğunu söylemiştir. Hale öğrencinin oluşturduğu temsilin açıklamasını yapmış, sonra öğrencinin sonuç olarak elde ettiği bütünlerin başlangıçtaki bütünlerden farklı olduğunu fark etmiştir. Öğrenciye başlangıçtaki bütününü göstererek temsilde oluşturduğu hatanın farkına varmasını sağlamıştır. Öğrenciye yaptığı yönlendirme ve açıklamalardan sonra Hale'nin doğal sayılar ile kesrin çarpımında alan modeli kullanımına yönelik bilgisine ulaşılmıştır.

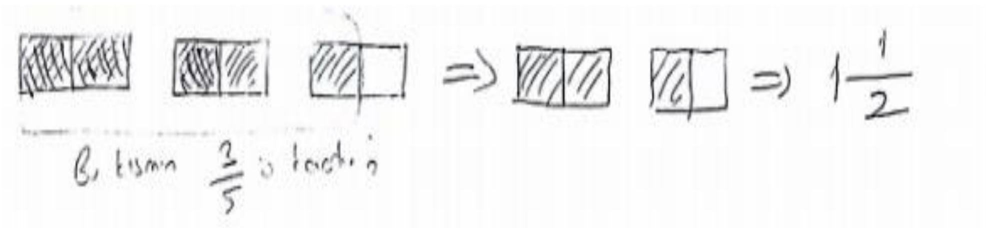
4.2.1.2.2. Öğretmen adaylarının doğal sayı ile kesrin çarpımında küme modeli kullanımına yönelik matematiksel temsiller bilgisi. Doğal sayı ile kesrin çarpımında sadece Hale ve İpek küme modeli temsiline yer vermiştir.

İpek "24 arabanın $\frac{3}{4}$'ü gri renkliyse kaç araba gri renklidir?" probleminde öğrencileri küme modeli ile temsil oluşturmaya teşvik etmiştir. Öğrencilere paydanın işlevini anımsatmış oradan bölme ile bağlantı kurarak öğrencilerde bütünü gruplama fikrini oluşturmak istemiştir. Öğrencilerden bir tanesine söz hakkı vermiş ve öğrenci 24 küçük dikdörtgeni dört sıra olacak şekilde çizmiştir. İpek öğrencinin bu temsilinden sonra "Arkadaşınız ne yaptı? 24'ü dörde parçaladı. Parçalarımızdan biri bu, biri bu, biri bu, biri bu. Dört parçamız olmuş oldu arkadaşlar. …Ben paydanın işlevini yerine getirdim. Sırada ne var?" demiş ve öğrenciler pay kadarının seçilmesi gerektiğini söylemişlerdir. Bunun üzerine öğrenciye "pay kadarını nasıl alacağız göstermek ister misin?" diye sormuş ve öğrenci oluşturulmuş olan dört gruptan üç grubu seçmiştir. Oluşan temsilin ardından İpek "Arkadaşınız diyor ki dört tane gruba ayırdık. Ayırdığımız gruplardan üç tanesini alacağım diyor, pay üç olduğu için. Ve sonuç olarak da 18 buldu. Yani her bir sırada altı araba olduğunu söyledik. Altı, altı, altı, toplamda 18" açıklamasını yaparak doğal sayı ile kesrin çarpımını küme modeli ile temsilde doğal sayıyı kesrin paydası kadar eş gruba ayırma, bu gruplardan pay kadarını seçme, bu gruplarda yer alan toplam nesne sayısını sonuç olarak yorumlama bilgisine sahip olduğunu göstermiştir.

$6\times\frac{1}{2}$ işleminin alan modeli ile temsilinden sonra Hale bu işlemi kendisi küme modeli ile temsil etmiştir. Bu temsilde altı sayma nesnesi almış, $\frac{1}{2}$'in anlamından hareketle iki grup olduğunu ve ikide biri istediği için bir grubu seçtiğini belirtmiştir. Sonuç olarak seçtiği gruplardaki toplam nesne sayısını dikkate almıştır.

4.2.1.2.3. Öğretmen adaylarının iki kesrin çarpma işleminde alan modeli kullanımına yönelik matematiksel temsiller bilgisi. Bütün öğretmen adayları derslerinde iki kesrin çarpımını model ile temsil etmede alan modelini kullanmışlardır.

İlker dersinde iki kesrin çarpımına yönelik olarak sadece alan modeli kullanmıştır. Hazırlamış olduğu notlarda ise bir de uzunluk modeli yer almıştır. İlker derste öğrencilerden $2\frac{1}{2}\times\frac{3}{5}$ işlemini model ile göstermelerini istemiştir. Tahtaya kaldırdığı öğrenci $2\frac{1}{2}$ ve $\frac{3}{5}$ kesirlerini ayrı şekilde temsil etmiş ve aralarına çarpma işareti koymuştur. Bir süre nasıl yapması gerektiğini düşünmüştür. Bu esnada zihninden algoritma kullanarak sonucun kaç olduğunu hesaplamaya çalışmış ve sonra algoritma ile bulduğu sonucu da yine farklı bir model üzerinde temsil etmiştir. Öğrenci $2\frac{1}{2}$ ve $\frac{3}{5}$'ü ve ikisini çarptığı zaman elde ettiği $1\frac{1}{2}$'i gösterdiğini ifade etmiştir. İlker öğrencinin temsilini silerek kendisi bir temsil oluşturmuştur. Önce $2\frac{1}{2}$ kesrini göstermiştir. Sonra $\frac{3}{5}$'ünü nasıl göstereceğini öğrencilere sormuştur. Oluşturduğu tamları da eş iki parçaya ayırmış ve sayarak toplam beş parçanın taralı olduğunu görmüştür. Sonrasında öğrencilere yine "Nasıl bulabiliriz?" diye sormuştur. Ne yapması gerektiği konusunda kafası karışan İlker notlarına bir göz atmıştır. Notlarını inceledikten sonra ne yapılması gerektiğini anlamış ve temsilin nasıl olacağını öğrencilere anlatmaya başlamıştır. Toplam beş taralı parça olduğunu söylemiş ve üç parçasını seçerek çarpma işlemini temsil etmiştir. İlker hazırlamış olduğu ders notlarında derste anlattığı şekilde bir temsile yer vermiştir. İlker'in ders notunda $2\frac{1}{2} \times \frac{3}{5}$ işlemini alan modeli ile nasıl temsil ettiğine yönelik bir kesit Şekil 4.66'daki gibidir.



Şekil 4.66. İlker'in $2\frac{1}{2} \times \frac{3}{5}$ işlemini alan modeli ile temsili, (Kesirlerle çarpma ders notu)

İpek' dersinde iki kesrin çarpımında sadece alan modeli temsili kullanılmıştır. İpek öğrencilere modellerini oluşturma fırsatı vermiş ve öğrenciler modellerini oluştururken onları yönlendirmiş ve yaptıklarını açıklamıştır. İpek $\frac{3}{4} \times \frac{1}{3}$ işlemini model ile temsil etmesi için bir öğrenciye söz hakkı vermiştir. Öğrenci önce $\frac{3}{4}$ kesrini temsil etmiş, ardından İpek ona "Ve bu pizzanın $\frac{3}{4}$'ünün de kaçını istiyor?" diye sorarak öğrenciye artık $\frac{3}{4}$'lük kısmın yeni bütün olarak alınması gerektiğini vurgulamak istemiştir. Öğrenci "Yani bunun $\frac{1}{3}$'ini bulacağız" demiştir. Bunun üzerine İpek "Şu kısım yeni bütünümüz oldu ve bunun da $\frac{1}{3}$'i isteniyor" demiştir. Ardından öğrenci $\frac{3}{4}$'lük kısmı yeni bütün olarak ele almış ve "bu bütün için üç tane $\frac{1}{3}$ oluyor" demiştir. Bunun üzerine İpek öğrenciden $\frac{1}{3}$'lik kısmını göstermesini istemiştir. Öğrencini temsilinin ardından "şu kısım başlangıç miktarının ne kadarıydı? Başlangıç miktarının kaçta kaçı? Bir bütünün kaçta kaçı?" diye sorarak elde edilen taralı kısmın ilk bütüne göre değerlendirilmesi gerektiğini vurgulamıştır. Burada İpek'in yaptığı yönlendirmeler ve açıklamalar ile iki kesrin çarpımını alan modeli ile temsil etmede "ilk kesrin paydasına göre bütünü eş parçalara ayırma, payı kadar parçayı seçme, o kısmı artık yeni bütün olarak ele alma, taralı kısımları sayarak ikinci kesrin paydası kadar parçadan oluşuyorsa payı kadar parçayı seçme ve son olarak elde edilen taralı kısmın ilk bütün içindeki oranını sonuç olarak ele alma" bilgisini kullandığı görülmüştür.

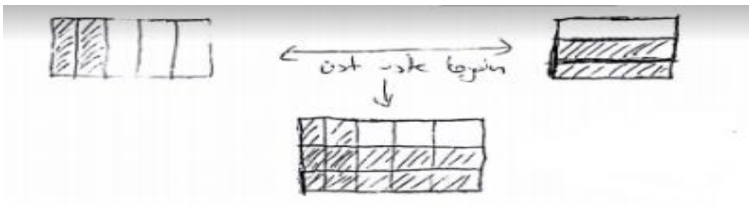
"Bir ekmeğin $\frac{9}{10}$'unun $\frac{2}{3}$'sini bulunuz" sorusunda İpek yine öğrencilerden birine söz hakkı vererek temsilini oluşturmasını sağlamıştır. Burada öğrenci bütünü 10 eş parçaya ayırmış ve dokuz parçasını taramıştır. İpek, öğrenci $\frac{9}{10}$ kesrini temsil ettikten sonra öğrenciye "$\frac{9}{10}$'unun yani bu kadarlık kısmının kaçta kaçını soruyor? Şimdi bütünün ne oldu?" diyerek elde edilen taralı kısmın artık yeni bütün olarak ele alınması gerektiğini vurgulamak istemiştir. Öğrenci $\frac{9}{10}$'un $\frac{2}{3}$'sini bulacağını söylemiş, fakat ikinci kesrin payını dikkate alarak taralı dokuz kısmın ilk iki kısmını tarayarak $\frac{2}{3}$ kesrini göstermiştir. Burada İpek, öğrenciye $\frac{2}{3}$'nin ne anlama geldiğini sorarak öğrencide farkındalık oluşturmuştur. Bunun üzerine öğrenci dikey olarak 10 eş parçaya ayırdığı bütünü yatay olarak da üç eş parçaya ayırmış ve iki parçasını taramıştır. Öğrencilerin oluşturulan temsilin karışık olduğunu söylemesi üzerine İpek öğrencinin yaptığı şekilde modeli bir daha oluşturmuş ve öğrencinin oluşturduğu temsilin açıklamasını yapmıştır. Bu temsilden İpek'in iki kesrin çarpımında alan modeli kullanımına yönelik bilgisi elde edilmiştir. İpek'in derste oluşturduğu modele yönelik yaptığı açıklamalara dair bir kesit aşağıdaki gibidir:

İpek: *Arkadaşınızın yaptığını yeniden daha düzenli şekilde yapıyorum. Ve içinden dokuz parçasını aldı. Ve daha sonra dedi ki bu kısmın da $\frac{2}{3}$'sini bulması gerektiğini farketti ve dedi ki ben bu bütünü bir de ayrıca bu taraftan üçe bölersem (yatay olarak) şu 9 parçalık bütünün de $\frac{2}{3}$'sini bulabilirim dedi ve oradan da şu taradığımız kısmın bu kısmı $\frac{2}{3}$'sini almak için şu üç parçadan ikisini seçersem bulmuş olurum.*

Peki arkadaşlar başlangıçtaki bütüne göre şu kısım kaçta kaç yapıyor?

Öğrenciler: $\frac{18}{30}$. (Kesirlerle çarpma ders gözlemi)

İki kesrin çarpımının alan modeli ile temsilinde Cemil tüm öğretmen adaylarından farklı olarak her iki kesir için de ayrı temsiller oluşturmuş ve bu temsilleri birleştirmiştir. Burada bütünleri aynı büyüklükte almıştır. Kesişim sonucu elde edilen taralı parça sayısının toplam parça sayısına oranından çarpma işleminin sonucunu bulmuştur “Elindeki şekerlerin $\frac{2}{5}$’sinin $\frac{2}{3}$’sini arkadaşı Ethem’e veren İbrahim’in elinde baştaki şeker miktarının toplam kaçta kaçı kalmıştır?” probleminde dersinde de öğrenciyi iki ayrı temsiller oluşturması ve sonra onları bir araya getirerek kesişimlerini bulması konusunda yönlendirmiştir. Burada öğrencinin temsillerden birini yatay birini dikey şekilde oluşturmasını ve böylece bir kesişim elde edilmesini sağlamıştır. Aynı zamanda öğrencinin çizmiş olduğu bütünler için “aynı büyüklükte mi onlar?” diye sorarak bütünlerin aynı olduğunu vurgulamak istemiştir. Cemil hazırlamış olduğu ders notunda da bu problem için aynı yaklaşıma yer vermiştir. Cemil’in ders notunda bu probleme yönelik oluşturduğu temsil Şekil 4.67’de yer almıştır.

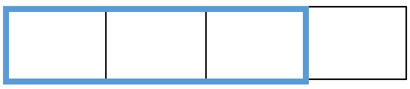


Şekil 4.67. Cemil’in $\frac{2}{5} \times \frac{2}{3}$ işlemini alan modeli ile temsili, (kesirlerle çarpma ders notu)

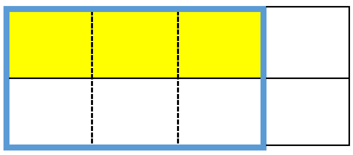
Hale öğrencilerden “Yulaflı muzlu kek tarifinde bir bardağın $\frac{3}{4}$’ü kadar yulaf eklemek gerekiyor. Kek $\frac{1}{2}$ büyüklükte olsaydı ne kadar yulaf eklemek gerekirdi” problemini model ile temsil etmelerini istemiştir. Öğrenciler yapılan yönlendirmeler ile problemin $\frac{3}{4} \times \frac{1}{2}$ işlemi ile ifade edileceğini belirtmişlerdir. Hale önce $\frac{3}{4}$ kesrini, bütünü dikey olarak dört eş parçaya ayırıp üç eş parçasını tarayarak temsil etmiştir. Oluşturduğu temsili yatay olarak da eş iki parçaya ayırmış ve bir parçasını taramıştır. Hale sonucu bulmada iki taralı alanın kesişimi sonucu oluşan taralı parça sayısının tüm parça sayısı içindeki oranını dikkate almıştır. Temsil ederken toplam kaç eş parçaya ayrıldığını görmek adına bütünü ikiye ayırmış fakat sadece

$\frac{3}{4}$'lük kısmın $\frac{1}{2}$ini almıştır. Bu soruda ayrıca Hale aynı temsil üzerinde bir de dikdörtgenin alanını kullanmıştır. Taralı parçaların alanının bütünün alanına oranından çarpma işleminin sonucunu bulmuştur. Hale'nin bu problemin çözümü için ders planından alınmış bir kesit aşağıdaki gibidir:

Bir tarifin 1/2 ini yani yarısını yapmak istediğimizde tarifteki tüm malzemelerin yarısını kullanırız. Buradan yola çıkarak yarım kek yapmak için 3/4 ün 1/2 i kadar yulaf eklememiz gerekir.
3/4 ün 1/2 i 1/2 çarpı 3/4 işleminin sonucunu verir. Bu işlem alan modeli kullanılarak yapılır.
Şekil1 de mavi çerçeve bütünün 3/4 ü ifade eder. Şekil2 de sarı alan 3/4 ün 1/2 ini gösterir.
Taralı alanın bütüne oranını bulurken dikdörtgenin alanından faydalanılır.
(taralı alan: 3x1=3   ve bütün: 2x4=8)
3/4 ün 1/2 i başlangıçtaki bütünün 3/8 ü kadar olduğu için 3/4x1/2=3/8 dir.



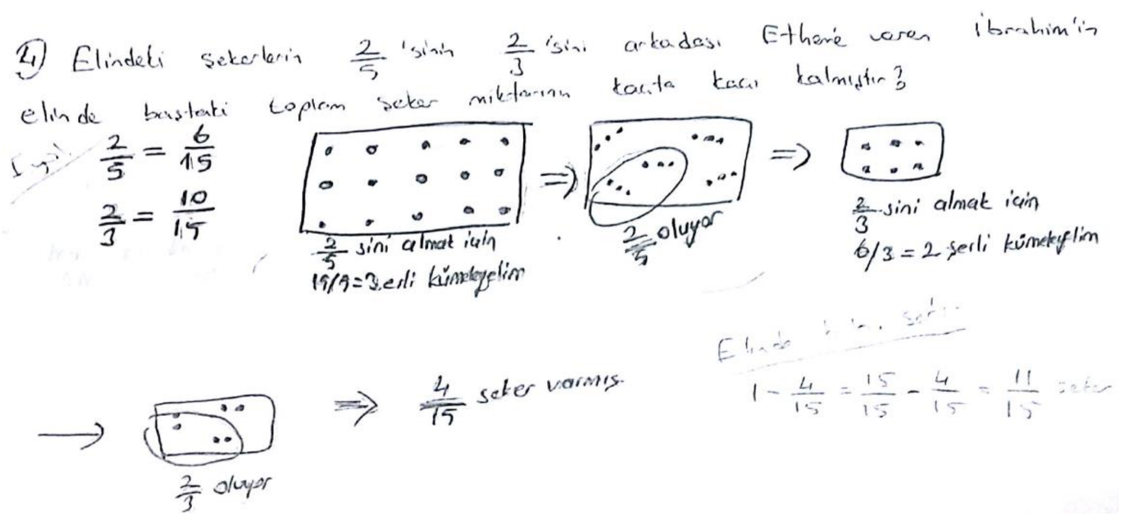
Şekil 1: 3/4



Şekil 2:1/2x3/4=3/8

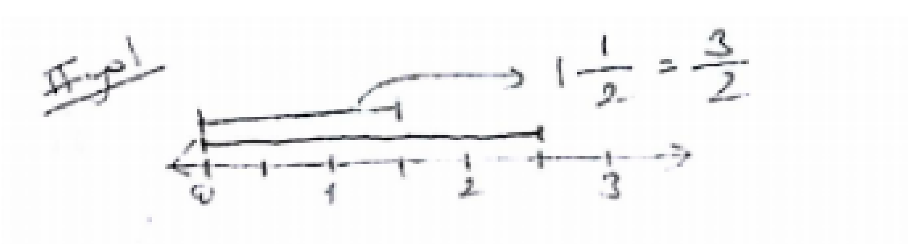
(Hale, kesirlerle çarpma ders planı)

4.2.1.2.4. Öğretmen adaylarının iki kesrin çarpma işleminde küme modeli kullanımına yönelik matematiksel temsiller bilgisi. İki kesrin çarpma işlemini küme modeli ile temsil eden tek öğretmen adayı Cemil olmuştur. Cemil hazırlamış olduğu ders notlarında $\frac{2}{5} \times \frac{2}{3}$ işlemini alan modeli dışında bir de küme modeli ile temsil etmiştir. Cemil önce iki kesrin paydasını eşitlemiştir. Eşitleme sonucu paydaların 15 olduğunu görmüş ve bir bütünün 15 sayma nesnesinden oluşmasına karar vermiştir. Bu 15 sayma nesnesini önce üç sıradan oluşacak şekilde yerleştirmiştir. İlk kesrin paydası beş olduğu için 15'i beşe bölmüş ve elde ettiği sonucun her gruptaki nesne sayısı olduğunu belirtmiştir. Ardından nesneleri üçerli grup olacak şekilde yerleştirmiş ve bu gruplardan iki tanesini seçmiştir. Seçtiği nesneleri artık yeni bütün olarak ele almış ve $\frac{2}{3}$ kesrini temsil etmek için üç gruptan oluşacak şekilde yerleştirmiştir. Bu üç nesne grubundan yine iki nesne grubunu seçmiştir. Sonuçta dört nesne almış ve toplam nesne sayısının 15 olmasından hareketle sonucun $\frac{4}{15}$ olduğunu belirtmiştir. Şekil 4.68'de Cemil'in $\frac{2}{5} \times \frac{2}{3}$ işlemini küme modeli ile temsili yer almıştır.



Şekil 4.68. Cemil'in $\frac{2}{5} \times \frac{2}{3}$ işlemini küme modeli ile temsili, (kesirlerle çarpma ders notu)

4.2.1.2.5. Öğretmen adaylarının iki kesrin çarpma işleminde uzunluk modeli kullanımına yönelik matematiksel temsiller bilgisi. İlker sadece $2\frac{1}{2} \times \frac{3}{5}$ işlemini uzunluk modeli ile de temsil etmiştir. Fakat bu temsile dersinde yer vermemiş, sadece hazırlamış olduğu ders notlarında yer vermiştir. İlker $2\frac{1}{2}$ kesrini $\frac{5}{2}$ şeklinde düşünerek sayı doğrusunda iki sayı arasını iki parçaya ayırmış, $\frac{1}{2}$'lik uzunluklar elde etmiş ve bu uzunluğun beş kere yinelenmesi sonucu $2\frac{1}{2}$ kesrini sayı doğrusu üzerinde temsil etmiştir. $2\frac{1}{2}$'lik uzunluğu artık yeni bütün olarak ele almış ve bu uzunluğun beş eş parçadan oluştuğunu görmüştür. $\frac{3}{5}$ kesrinin anlamından hareketle beş parçadan üçünü seçerek iki kesrin çarpımı sonucuna ulaşılmıştır. Şekil 4.69'da İlker'in $2\frac{1}{2} \times \frac{3}{5}$ işlemini uzunluk modeli ile temsili yer almıştır.



Şekil 4.69. İlker'in $2\frac{1}{2} \times \frac{3}{5}$ işlemini uzunluk modeli ile temsili, (kesirlerle çarpma ders notu)

$2\frac{1}{2} \times \frac{3}{5}$ işlemini Cemil de aynı İlker gibi hem alan hem de uzunluk modeli ile temsil etmiştir. İki öğretmen adayı hem alan hem de uzunluk modelinde aynı şekilde bir temsil oluşturmuştur. İlker'den farklı olarak Cemil sadece dersinde alan modeli ile temsil yerine uzunluk modeli ile temsili tercih etmiştir. Cemil $2\frac{1}{2} \times \frac{3}{5}$ işlemini tahtaya yazmış ve öğrencilere bu işlemi sayı doğrusu üzerinde göstereceklerini söylemiştir. Öğrencilere "gördünüz değil mi sayı doğrusu?" diye sormuş ve öğrencilerden "evet" cevabını almıştır. Cemil'in sayı doğrusunda sıfır ile üç arası sayılar yer almıştır. Cemil'in sayı doğrusunu bu şekilde oluşturmasında $2\frac{1}{2}$ kesrinin iki ile üç sayıları arasında bulunduğunu bilmesinden kaynaklandığı düşünülmüştür. Cemil öğrencilere $2\frac{1}{2}$ kesrinin ne ifade ettiğini sormuştur. Sonra bir öğrenciye söz hakkı vererek onun $2\frac{1}{2}$ kesrini sayı doğrusu üzerinde göstermesini istemiştir. Öğrenciye her aralığı ikiye böldüğünü ve ona göre göstermesi gerektiğini söylemiştir. Öğrenci $2\frac{1}{2}$ kesrinin yerini belirledikten sonra Cemil kaç aralık oluştuğunu saymıştır. "Beş aralık var. $\frac{3}{5}$'ünü göstereceğiz. Nasıl göstereceğiz? Beşte üçü, şurası yani." diyerek çarpma işleminin sonucunu sayı doğrusu üzerinde temsil etmiştir.

Öğretmen adaylarının derslerinin gözlemlenmesi, ders planları ve ders notlarının incelenmesi sonucu doğal sayı ile kesrin çarpımı ve iki kesrin çarpımında öncelikle alan modeli kullanma eğiliminde oldukları görülmüştür. Öğretmen adayları temsilleri oluşturan öğrenciler de olsa onları farklı bir temsil oluşturmaları konusunda yönlendirmemiştir. Öğretmen adayları alan modeli temsilinde ağırlıklı olarak dikdörtgen kullanmışlardır. İlker ve Cemil derslerinde model kullanımının yanı sıra çarpma algoritması kullanmış olsalar da model ile algoritma arasında bir bağlantı kurmamışlardır.

4.2.2. Öğretmen Adaylarının Kesirlerle Bölme İşleminde Model Kullanıma Yönelik PAB'larına İlişkin Bulgular ve Yorum

Bu kısımda öğretmen adaylarının 6. Sınıflarda "İki kesrin bölme işlemini yapar ve anlamlandırır." kazanımına yönelik gerçekleştirdikleri derslerin gözlemlenmesi sonucu elde edilen verilerin analizine, bu kazanıma yönelik hazırlamış oldukları ders planlarının ve ders notlarının analizine yer verilmiştir. Aynı zamanda İpek'in "inceleme çalışması" adı altında öğrencilere vermiş olduğu çalışma kağıtları da İpek'in verilerinin analizinde dikkate alınmıştır.

Veriler "öğrenci bilgisi" ve "matematiksel temsiller bilgisi" bileşenleri bağlamında ayrı ayrı analiz edilmiştir. Bu bileşenler de alt bileşenlerden oluşmaktadır. Her bir alt bileşen ayrı şekilde ele alınmış ve öğretmen adaylarının derslerinden, ders planlarından ve hazırlamış oldukları notlardan kesitler verilerek veriler desteklenmiştir.

4.2.2.1. Öğretmen adaylarının kesirlerle bölme işleminde model kullanımına yönelik öğrenci bilgisi. Bulgular öğrenci bilgisinin "öğrenci ön bilgisi", "öğrenci hataları/kavram yanılgıları", "öğrenci zorlukları", "anlamanın değerlendirilmesi", "öğrenci düşüncesine odaklanma" alt bileşenlerine göre ayrı ayrı ele alınmıştır.

4.2.2.1.1. Öğretmen adaylarının kesirlerle bölme işleminde öğrenci ön bilgisi. Öğrenci ön bilgisi alt bileşenine ilişkin bulgular öğrencilerin konu ile ilgili ön bilgilerini belirleme, öğrencilerin ön bilgilerini ortaya çıkaracak sorular sorma ve ön bilgi ile yeni bilgi arasında bağlantı kurma kategorilerinde ayrı ayrı ele alınmıştır.

4.2.2.1.1.1. Öğrencilerin konu ile ilgili ön bilgilerini belirleme. Tüm öğretmen adayları öğrencilerin bölmenin taşıdığı anlam ile ilgili ön bilgilerini belirlemek istemiştir. Diğer öğretmen adaylarının aksine İpek öğrencilerin bölmenin hem ölçme hem de parçalara ayırma anlamına yönelik ön bilgilerini belirlemiştir. Aynı zamanda tüm öğretmen adayları doğal sayı ile kesrin bölümüne yönelik öğrenci ön bilgilerini de belirlemek için derslerinde problemlere yer vermişlerdir. Cemil ve Hale hem kesrin doğal sayıya hem de doğal sayının kesre bölümüne yönelik problemlere yer vermiştir. Çarpma işleminin ardından aynı sınıfta bölme işlemine geçen İlker ve İpek öğrencilerin model kullanımı konusundaki ön bilgilerini belirlemeye çalışmazken, diğer iki öğretmen adayı farklı zamanlarda farklı sınıflarda olmalarına rağmen kesrin model ile temsili konusundaki öğrenci ön bilgilerini belirlemeye çalışmamıştır. Dersin başında doğal sayılarda bölme işleminin model ile temsiline yönelik İlker ve Hale bir hatırlatmada bulunurken, İpek ve Cemil ise böyle bir hatırlatmada bulanmamıştır. Tüm öğretmen adayları derslerinde sadece alan modeli kullanmışlardır. Bu nedenle öğrencilerin doğal sayı ile kesrin bölümünde alan modeli kullanmalarına yönelik ön bilgileri hakkında bilgi sahibi olabilmişlerdir.

İlker ders planında ön bilgiler olarak “doğal sayılarda bölme işlem ve kesir kavramı” ifadelerine yer vermiştir. Planında dersine bölme işlemi deyince akıllarına ne geldikleri sorularak başlayacağını ve bölme işleminde birinci sayının içinde ikinci sayıdan kaç tane olduğunun bulunmaya çalışıldığının kavratılacağını ve önce doğal sayının kesre bölümüne yönelik, sonra kesrin doğal sayıya bölümüne yönelik olarak iki problemin model kullanılarak çözüleceğini belirtmiştir. İlker dersine planında yer verdiği şekilde bölme işleminin anlamını hatırlatarak başlamıştır. Öğrencinin verdiği yanıtlar doğrultusunda bölmenin ölçme anlamı üzerinde durmuştur. Planında yer vermese de bölmenin ölçme anlamı üzerinde dururken 6÷2 işlemini küme modeli ile temsil etmiştir. Ardından doğal sayının kesre bölümüne yönelik bir problem yazdırmıştır. Öğrencilerden bir tanesi temsilini alan modeli kullanarak oluşturmuş ve İlker farklı bir öğrenciye söz vermediği için tüm öğrencilerin ön bilgilerini belirlemesi mümkün olmamıştır. Problemin çözümünün model yardımı ile bulunmasının ardından İlker öğrencilere problemin çözümünün farklı şekilde nasıl yapılabileceğini sormuştur. Böylece öğrencilerin verilen problemin hangi işlem kullanılarak çözülebileceğine dair ön bilgilerini belirlemek istemiş, fakat model ve işlem arasında bir bağlantı kurmaya çalışmadığı için model sadece bir çözüm yöntemi olarak kalmıştır. İlker planında yer vermesine rağmen dersinde kesrin doğal sayıya bölümüne yönelik problemi öğrencilere yazdırmamıştır.

İpek'in dersinde $6 \div 2$ işleminin "altının içinde kaç tane iki olduğu" ve "iki kişiye altı nesneyi paylaştırmak" anlamlarına geldiği ifade edilerek bölmenin ölçme ve parçalara ayırma anlamı hatırlatılmıştır. İpek bu işlem için öğrencilere "bölen, bölünen" in neler olduğunu sormuş, öğrencilerin ön bilgilerini belirlemiş ve bölen, bölüm ve bölünen aracılığıyla bölme işleminin ölçme anlamı bölünen sayı içinde kaç tane bölen olduğunu bölümün anlatması şeklinde ifade edilmiştir.

Cemil ders planında gerekli ön bilgiler olarak aynı İlker gibi "doğal sayılarda bölme işlemi ve kesir kavramı" ifadelerine yer vermiş ve bölme işleminin anlamını hatırlatarak, ardından "Bir doğal sayıyı kesre böler ve bir kesri doğal sayıya böler" kazanımına yönelik iki örnek yardımı ile konunun hatırlanacağından bahsetmiştir. Cemil dersine planında yer verdiği şekilde öğrencilere "Bölme işlemi sizin için ne ifade ediyor?" sorusu ile başlamıştır. Öğrencilerin cevaplarını aldıktan sonra kesrin doğal sayıya bölümü ve doğal sayının kesre bölümüne yönelik iki problem yazdırarak problemlerin çözümünün model yardımı ile bulunmasını istemiştir. Cemil öğrencilerin model kullanımı konusundaki ön bilgilerini belirlememiş, bölmenin taşıdığı iki farklı anlam üzerinde durmamış ve öğrencilerden verilen problemlerin direk model ile temsilini istemiştir. Ayrıca öğrenciler sadece alan modeli ile temsil etmiş, her problemi bir öğrenci temsil etmiş ve diğer öğrencilerin temsilleri incelenmemiştir. Bu nedenle tüm öğrencilerin ön bilgilerini belirlemede yetersiz kalmıştır.

Hale diğer öğretmen adaylarından farklı olarak planında gerekli ön bilgiler kısmında "Pay ve payda kavramlarını bilir. Bir bütünün belirtilen kesir kadarını bulur" ifadelerine yer vermiştir. Hale planında bölmenin anlamını hatırlatmak için bir soru ile derse başlayacağını belirtmiş ve model ile temsil edilmediği zaman hangi işlem kullanılarak çözümün yapılacağını sorarak bölmenin anlamının anlaşılacağını belirtmiştir. Hale planında yer verdiği şekilde dersine girişte kullandığı "10 elmam var. Bunu altı kişiye nasıl paylaştırabilirim?" problemi ile öğrencilere bölmenin anlamını hatırlatmak istemiştir. Hale burada kendisi bir temsil oluşturmuş, öğrencilerin kendi temsillerini oluşturmalarına imkân tanımamıştır. Bu nedenle öğrencilerin doğal sayılarda bölme işleminin model ile temsiline yönelik ön bilgilerini belirlememiştir. Dersin başında öğrencilerin kesirlerin model ile temsili konusundaki bilgilerini de ortaya çıkarmasa da verdiği problemlerde öğrencilerin oluşturdukları temsiller ile kesirlerin sadece alan modeli ile temsiline yönelik ön bilgilerini belirleyebilmiştir. "Ayşe'nin üç tane evi var. Temizliğini $1\frac{1}{4}$ saatte yapıyor. Bir evin temizliğini ne kadar saatte yapar?" problemi sadece alan modeli ile temsil edilmiş, farklı öğrencilere kendi temsillerini açıklama imkânı verilmemiştir. Bu nedenle öğrenci ön bilgileri tam olarak belirlenememiştir.

4.2.2.1.1.2. Öğrencilerin ön bilgilerini ortaya çıkaracak sorular sorma. Tüm öğretmen adayları öğrencilere bölme işleminin anlamını belirlemeye yönelik sorular sormuşlardır. Bunun için üç öğretmen adayı bir örnek vermiş ve örnekten hareket ederek verdikleri işlemin ne anlama geldiğini sormuşlardır. Cemil bölmenin taşıdığı anlam konusunda tam bir sonuca varmamıştır, bu nedenle öğrencilerin ön bilgilerini ortaya çıkarmak için uygun sorular kullanmadığı düşünülmektedir. Aynı şekilde İlker de bölmenin anlamı konusunda öğrenci ön bilgilerini ortaya çıkarmak amaçlı uygun sorular kullanmamış, "bir sayının içinde kaç tane olduğunu bulmak" ifadesi ile bölmenin anlamını ifade etmeye çalışmıştır. Ardından 6÷3 işlemini küme modeli ile temsil etmiş, öğrencilere temsilin nasıl yapılabileceği konusundaki ön bilgilerini ortaya çıkarmak amaçlı sorular yöneltmemiş, işlemin altının içinde kaç tane iki demek olduğunu, buradan hareketle bölmenin aynı zamanda gruplama demek olduğunu belirtmiştir. Yine tüm öğretmen adayları verilen problemlerin hangi işlem kullanılarak yapılacağına dair sorular sormuşlardır. Doğal sayı ile kesrin bölümüne yönelik öğrenci ön bilgilerini belirlemek için tüm öğretmen adayları problemlerden faydalanmıştır. "Ayşe'nin üç tane evi var. Temizliğini $1\frac{1}{4}$ saatte yapıyor. Bir tane evin temizliğini ne kadar saatte yapar?" probleminin model ile temsiline yönelik Hale etkili sorular kullanmamıştır. Öğrenciye oluşturduğu $1\frac{1}{4}$ temsilini üçe bölmesi gerektiğini kendisi söylemiştir ve temsili kendisi oluşturmuştur. Yine Hale kesrin doğal sayıya bölümünün model ile temsilinde öğrenci ön bilgilerini ortaya çıkarmak için etkili ve uygun sorular kullanmamış, temsili kendi oluşturmuştur. Yine verdiği problemin çözümünde hangi işlemin kullanılacağını kendisi söylemiştir. Cemil dersinde doğal sayı ile kesrin bölümüne problemlerde öğrencilere temsillerini oluşturma imkânı tanımış, sorduğu sorular ile öğrencilerin temsilleri nasıl oluşturduklarını öğrenmiştir. Fakat diğer tüm öğretmen adayları gibi Cemil de öğrencilerin alan modeli kullanımına yönelik öğrenci ön bilgileri dışında farklı model kullanımına yönelik öğrenci ön bilgilerini ortaya çıkaracak sorular sormamıştır. Cemil iki kesrin bölümünün model ile temsilinde zorlanan öğrenciye $\frac{5}{8}$ kesrinin ne anlama geldiğini sormuştur, öğrenci burada bütünü sekiz eş parçaya ayırmak yerine sekiz bütün oluşturacağını söylemiştir. Burada Cemil öğrencinin neden böyle bir ön bilgiye sahip olduğunu belirlemede başarısız olmuştur, bir tamın sekize bölüneceğini kendisi söyleyerek öğrenciyi böyle bir temsil oluşturması konusunda yönlendirmiştir. İpek öğrencilere vermiş olduğu doğal sayı ile kesrin bölümüne yönelik problemlerde öğrencilerin zorlanması üzerine problemleri birlikte temsil etmeye karar vermiştir. Soruda porsiyonu $\frac{1}{2}$ kurabiye ise ifadesi geçtiği için öğrencilere $\frac{1}{2}$'in taşıdığı anlamı sormuştur. Burada İpek öğrencilerin kesrin taşıdığı anlama yönelik ön bilgilerini ortaya çıkarmak amaçlı bir soru kullanmıştır. Problemin model ile temsilinin ardından İpek öğrencilerden verilen problemin işlemsel ifadesini istemiştir. Öğrencilere farklı cevaplar vermiş, çarpma işlemi ile temsil etmişlerdir. Burada İpek öğrencilerin model ile bulunan sonuç ve işlem ile bulunan sonucu karşılaştırmalarını istemiştir. Böylece öğrencilerin kesirlerde çarpma işlemine yönelik öğrenci ön bilgilerini ortaya çıkaracak sorular kullanmıştır.

4.2.2.1.1.3. Ön bilgi ile yeni bilgi arasında bağlantı kurma. İlker, Cemil ve Hale model oluşturma, model ile elde edilen sonucu yorumlama esnasında pay ve payda kavramları ile bağlantı kurmuşlardır. Tüm öğretmen adayları doğal sayının kesre bölümünün alan modeli ile temsilinde bölmenin ölçme anlamı ile bağlantı kurmuşlardır.

İpek öğrencilere vermiş olduğu çalışma kağıdında $\frac{1}{2}$ kurabiyenin bir porsiyon olduğunu belirtmiş ve öğrencilerden iki, üç ve dört kurabiyeden kaç porsiyon çıkacağını düşünmelerini istemiştir. Verilen sorunun model ile temsilinde bölmenin ölçme anlamı ile bağlantı kurulmuştur. Öğrenciler verilen problemin hangi işlem kullanılarak temsil edileceğini anlamayınca öğrencilerin anlamalarını sağlamak için “Burada da belli bir sayının içinde diğer sayıdan kaç tane olduğunu aramıyor muyum aslında?” diye sorarak bölmenin ölçme anlamı ile bağlantı kurmuştur.

Cemil dersinde ön bilgi hatırlatması yapıp doğal sayı ile kesrin bölümüne yönelik problemlerin çözümlerini de model yardımı ile bulduktan sonra iki kesrin bölme işlemine yönelik “Bir porsiyon $\frac{1}{2}$ kurabiyedir. $\frac{5}{8}$ kurabiyeden kaç adet porsiyon elde ederiz?” problemini yazdırmıştır. Öğrencilerden bir tanesini problemin çözümünü model kullanarak bulması için tahtaya kaldırmıştır. Öğrenci önce $\frac{1}{2}$ kesrini temsil etmiş ve ardından $\frac{5}{8}$ kesrini temsil edeceği zaman Cemil “Sen sekize böleceksin şimdi değil mi?” diye sorarak öğrencinin paydanın anlamı ile bağlantı kurmasını sağlamıştır. Aynı zamanda öğrencilere $\frac{5}{8}$’in ne demek olduğunu sormuş ve bir tamı sekize bölüp beşini aldığını ifade etmiştir. Cemil öğrencinin oluşturduğu $\frac{5}{8}$ temsilinde oluşan sekiz parçayı eş parçalar olarak kabul ettiklerini belirterek bütünün payda kadar eş parçaya ayrılması gerektiğini vurgulamıştır. Cemil bu soruda öğrenciye bir porsiyonun ne olduğunu sormuştur. Öğrenci "$\frac{1}{2}$, yarım" ifadesini kullanmıştır. Cemil $\frac{5}{8}$ kurabiyenin kaç porsiyon yaptığının bulunmasının istendiğini hatırlatmış ve öğrencilere ne yapılacağını sormuştur. Öğrencilerden bir tanesi yarısının bir porsiyon olduğunu belirtmiş ve Cemil de öğrenciden $\frac{5}{8}$'lik kısım içindeki yarımı bulmasını istemiştir. Cemil burada öğrencinin $\frac{1}{2}$ kesrinin anlamı ile bağlantı kurmasını sağlamıştır. Beş taralı kısmın dört tanesi bir porsiyon olarak seçildikten sonra geriye kalan bir porsiyonun yorumlanmasında da pay ve paydanın taşıdığı anlamla bağlantı kurulmuştur. Temsil sonucu bir tam ve $\frac{1}{4}$ porsiyon olduğu görülmüş ve toplam porsiyon sayısını belirlerken bir tam ve $\frac{1}{4}$ toplanarak $1\frac{1}{4}$ sonucu elde edilmiştir.

Cemil dersinde son olarak öğrencilere "Ebrunun $2\frac{1}{4}$ litre deterjanı vardır. Her makineye $\frac{3}{4}$ litre deterjan koyduğuna göre kaç makine doldurabilir?" problemini yazdırmıştır. Yine öğrencilerden bir tanesine söz hakkı vererek ondan temsilini oluşturmasını istemiştir. Fakat zil çalıp öğrenciler çıkmak istediği için temsili kendisi oluşturmaya karar vermiştir. Önce $2\frac{1}{4}$'i temsil edeceğini söylemiş ve buradaki tamların eşit olacağını vurgulamıştır. Cemil burada bütünlerin eş bütünler olması gerektiği ön bilgisi ile bağlantı kurmak istemiştir.

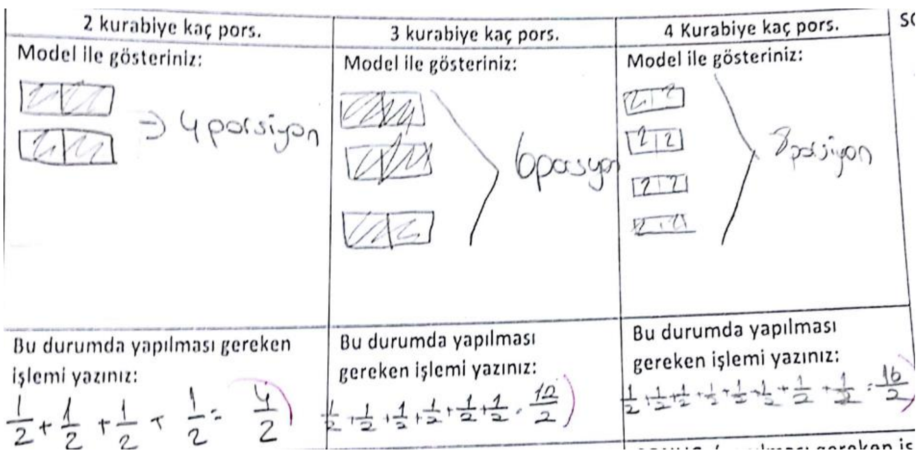
"10 elmam var. Bunu altı kişiye nasıl paylaştırabilirim?" probleminin temsilinde Hale bölmenin parçalara ayırma anlamı ile bağlantı kurmuştur. Hale sorunun çözümünü model ile temsil etmek için 10 bütün çizmiştir. Her bir kişiye bir elma düşeceği ve geriye kalan dört elma olduğu söylenmiştir. Hale geri kalan dört elmanın altı kişiye nasıl paylaştırılabileceğini öğrencilere sormuş ve öğrencilerden bir tanesinin dört elmanın altıya bölüneceğini söylemesi üzerine geri kalan dört bütünün her birini altı eş parçaya ayırmıştır. Hale altı eş parçanın dört eş parçasını tarayarak bunun bir kişinin yiyeceği elma miktarı olduğunu söylemiş ve öğrencilere bir kişinin ne kadar elma yemiş olacağını sormuştur. 1,4 cevabının verilmesi üzerine bütünü göstermiş, bütünün altı parçaya ayrıldığını ve dördünün alındığını söylemiştir. Hale bu ifadesi ile öğrencilerin kesri bulmalarında eş parçaların tamamının kesrin paydasını verme ve seçili parçaların kesrin payını verme bilgisi ile bağlantı kurmalarını sağlamıştır. "Ayşe'nin üç tane evi var. Temizliğini $1\frac{1}{4}$ saatte yapıyor. Bir evin temizliğini ne kadar saatte yapar?" probleminin temsili için de yine bölmenin parçalara ayırma anlamı ile bağlantı kurulmuştur. Kesrin doğal sayıya bölümünü gerektiren problemin ardından Hale öğrencilere doğal sayının kesre bölümüne yönelik bir problem yazdırmıştır. Bu problemin model ile temsilinde bölmenin ölçme anlamından faydalanılmıştır.

4.2.2.1.2. Kesirlerle bölme işleminde öğrenci hataları/kavram yanılgıları. Öğrenci hataları/kavram yanılgıları alt bileşenine ilişkin bulgular dersi planlarken öğrencilerin sahip olabileceği kavram yanılgıları ve hataları göz önünde bulundurma, ders esnasında öğrencilerin sahip olduğu hata ve kavram yanılgılarını fark edebilme, öğrencilerin sahip olduğu hata ve kavram yanılgılarının nedenlerini belirleme, öğrencilerin sahip olduğu hata ve kavram yanılgılarını ortadan kaldırmak için çözümler üretme, öğrencilerin sahip olduğu hata ve kavram yanılgılarını ortaya çıkaracak uygun sorular sorma kategorilerinde ayrı ayrı ele alınmıştır.

Hiçbir öğretmen adayının ders planında öğrencilerin sahip olabileceği hata ve kavram yanılgılarını göz önünde bulunduracağına dair bir ifade yer almamıştır. Aynı zamanda öğretmen adaylarıyla ders sonrası bir görüşme gerçekleştirilmediği için öğrencilerin sahip olduğu hata/kavram yanılgılarının nedenlerine ilişkin görüşleri alınamamıştır. Yine hiçbir öğretmen adayı öğrencilerin sahip olduğu hata/kavram yanılgılarını ortaya çıkarmak için uygun sorular kullanmamıştır.

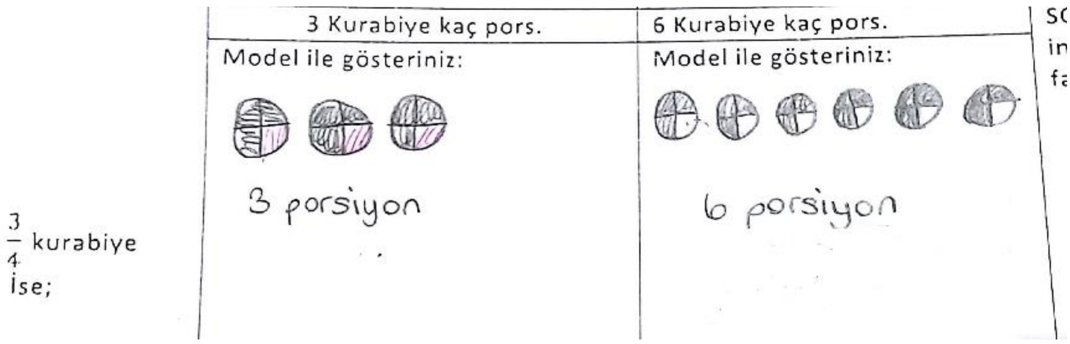
4.2.2.1.2.1. Ders esnasında öğrencilerin sahip olduğu hata ve kavram yanılgılarını fark edebilme. İlker'in dersinden öğrencilerin model kullanımı konusundaki kavram yanılgılarını ya da hatalarını ortaya çıkaracak bir bulgu elde edilememiştir. Doğal sayının kesre bölümünün model ile temsilinden sonra işlem kullanılarak da çözümünün bulunmasını istediği problemde bir öğrencinin bölme işlemine çarpma işlemi yapıyor gibi (ilk kesrin payı ile ikinci kesrin paydasını sadeleştiriyor öğrenci) muamele ettiğini görmüş ve öğrenciye bölme işlemi yapacağını söylemiştir.

İpek ders esnasında ve dersten sonra öğrencilerin çalışma kağıtlarını incelediği zaman öğrencilerin sahip olduğu hata/kavram yanılgılarını fark edebilmiştir. İpek öğrencilere vermiş olduğu çalışma kağıtlarını ders sonrası incelediğinde öğrencilerden bazılarının problemin çözümünde bölme işlemi yerine çarpma işlemi kullandıklarını görmüştür. Öğrencilerden bazıları ise tekrarlı toplama işlemini kullanmışlardır. Şekil 4.70'te "Porsiyonu $\frac{1}{2}$ kurabiye ise, iki, üç ve dört kurabiyenin kaç porsiyon yaptığı" sorusuna dair öğrencinin model ve işlem temsili yer almıştır.



Şekil 4.70. "Porsiyonu $\frac{1}{2}$ kurabiye ise, iki, üç ve dört kurabiyenin kaç porsiyon yaptığı" sorusuna dair öğrencinin model ve işlem temsili, (İpek- kesirlerle bölme çalışma kâğıdı)

İpek incelemiş olduğu çalışma kağıtları sonucunda bir öğrencinin üç kurabiye ve altı kurabiye olarak üç ve altı bütün çizdiğini, her bir bütünde $\frac{3}{4}$'ü gösterdiğini ve sonucu da üç porsiyon ve altı porsiyon olarak bulduğunu görmüştür. Şekil 4.71'de öğrencinin oluşturduğu temsil yer almıştır.



Şekil 4.71. "Porsiyonu $\frac{3}{4}$ kurabiye ise üç ve altı kurabiyenin kaç porsiyon yaptığı" sorusuna dair öğrencinin alan modeli ile oluşturduğu temsil- (İpek, kesirlerde bölme çalışma kâğıdı)

Cemil öğrencilerden kesrin doğal sayıya bölümünü gerektirecek bir problem kurmalarını istemiştir. Burada öğrencilerin hatalı problemlerini fark edebilmiştir. Kesirlerde bölme işleminin temsilinde payda sekiz olduğu için sekiz bütün olması gerektiğini düşünen öğrenciyi fark etmiştir. Aynı zamanda öğrenci bütünü eşit olmayan parçalara ayırdığı zaman eşit parçalar olması gerektiğini belirtmiştir.

Hale model üzerinde temsil edilen kesri ifade etmede hata yapan öğrencileri fark etmiştir. Problemin hangi işlem kullanılarak çözülebileceği sorusuna çarpma olarak cevap veren öğrenci hatasını fark edebilmiştir.

4.2.2.1.2.2. Öğrencilerin sahip olduğu hata ve kavram yanılgılarını ortadan kaldırmak için çözümler üretme. İlker verilen problemleri temsil etmede hata ve kavram yanılgısına sahip öğrenciler varsa bunları fark edemediği için ortadan kaldırmak için de bir çözüm üretmemiştir.

İpek öğrenciler problemin hangi işlem kullanılarak çözüleceğini bulmakta zorlanınca bölmenin ölçme anlamı ile bağlantı kurmaya çalışmıştır. Bölme işlemi yapılması gerektiği belirlendikten sonra bile öğrenciler hangi bölme işleminin yapılması gerektiği konusunda hatalı cevaplar vermişlerdir. Burada da öğrencileri 6÷2 işlemi için başta kurmuş oldukları altının içinde kaç tane iki olduğu sorusunu düşünmeye yönlendirmiş ve iki soru arasındaki benzerliği keşfetmelerini istemiştir.

Cemil iki kesrin bölümüne yönelik olarak “Bir porsiyon $\frac{1}{2}$ kurabiyedir. $\frac{5}{8}$ kurabiyeden kaç adet porsiyon elde ederiz?” problemini yazdırmıştır. Öğrencilerden bir tanesine söz hakkı vererek temsilini tahtada oluşturmasını istemiştir. Öğrenci $\frac{1}{2}$ ve $\frac{5}{8}$ kesirlerini ayrı ayrı temsil etmek istemiş, farklı büyüklükte iki bütün alarak birini iki, birini sekiz parçaya ayırmıştır. Cemil $\frac{1}{2}$ kesrine yönelik temsili göstererek öğrenciye kaç kurabiye yaptığını sormuştur. Öğrenci bir porsiyon olduğunu söylemiştir. Cemil porsiyon olarak istemediğini, kurabiye olarak sorduğunu söylemiştir. Öğrenci iki cevabını vermiştir. Cemil bir kurabiye olduğunu söylemiş ve sekize ayrılmış bütünü göstererek onun kaç kurabiye olduğunu sormuştur. Öğrenci “sekiz, sekize bölünmüş” cevabını vermiştir. Bunun üzerine Cemil öğrencilere $\frac{5}{8}$ kesrinin ne anlama geldiğini hatırlatmış ve elde sekiz tam değil de bir tam olduğunu söylemiştir. Öğrencinin oluşturduğu temsilleri göstererek “Ee peki bu bir kurabiye ise bu nasıl bir kurabiye? Bu bir kurabiye ise bu nasıl bir kurabiye?” diye sormuş ve ikisinin de bir tam olması nedeni ile eşit olmaları gerektiğini söylemiştir. Fakat öğrenci yine sekiz tam çizeceğini düşünmeye devam etmiştir. Cemil öğrenciye sekiz tane kurabiye istenmediğini, bir kurabiyenin sekize bölünmesinin istendiğini söylemiştir. Bunun üzerine öğrenci bütünü birbirine eş olmayan sekiz parçaya ayırmıştır. Cemil öğrenciye $\frac{5}{8}$ kesrini göstererek bunun sekiz eş parça demek olduğunu söylemiştir. Burada Cemil’in öğrenci hatalarını/kavram yanılgılarını fark ettiği görülmüştür. Fakat $\frac{5}{8}$ kesrinin ne anlama geldiğini söylemesinin ardından öğrencinin hala sekiz bütün mü çizeceğini sorması öğrencinin hatasını/kavram yanılgısını anlamasında çok etkili olamadığını ve gidermek için uygun bir çözüm kullanamadığını göstermiştir.

Hale dersine 10 elmanın altı kişiye nasıl paylaştırılabileceği sorusu ile başlamıştır. 10 daire çizmiş ve altı kişinin zaten bir bütün elma yiyeceğini belirterek ilk altı dairenin altına bir, iki, üç, dört, beş, altı yazarak öğrencilerin yiyeceği elmalar olduğunu ifade etmiştir. Geri kalan dört elmanın nasıl paylaştırılabileceğini öğrencilere sormuştur. Öğrencilerden bir tanesi her elmanın altı parçaya ayrılacağını söylemiştir. Hale elmaların her birini altı eş parçaya ayırmış ve dört kısmını tarayarak bir kişinin altı parçadan dört parçasını daha yiyebileceğini söylemiş ve bunun ne kadar elma ettiğini sormuştur. Her bir elmanın altı eş parçaya ayrılması gerektiğin söyleyen öğrenci altı parçadan dört parçasının 1,4 elma ettiğini söylemiştir. Hale öğrencinin bu hatasını fark ederek bir bütünün altıya bölündüğünü ve dördünün alındığını söylemiştir. Öğrenci bu defa da 1,2 cevabını vermiştir. Başka bir öğrenci ise $\frac{1}{6}$ olduğunu söylemiştir. Bunun üzerine Hale öğrencilere taralı alanın ve bütünün ne kadar olduğunu hatırlatarak öğrencilerin kesri doğru temsil etmelerini sağlamıştır. “Ayşe’nin üç tane evi vardır. Temizliğini $1\frac{1}{4}$ saatte yapıyor. Bir tane evin temizliğini ne kadar saatte yapar?” probleminde önce $1\frac{1}{4}$ kesri alan modeli ile temsil edilmiş, sonra da her bir $\frac{1}{4}$’lik parça üç parçaya daha ayrılarak toplam 15 eş parça elde edilmiştir. Öğrenci bir evin temizliğini bulmak için 15’i üçe bölmüş, beş bulmuş ve bir evin temizliğinin $\frac{5}{15}$ saatte yapılacağını söylemiştir. Hale burada öğrenciye bütünü kaç parçaya ayırdığını sorarak ve elinde bu parçalardan beş tanesinin olduğunu belirterek, öğrencinin $\frac{5}{12}$ sonucunu bulmasını sağlamıştır.

$\frac{3}{4}$ kurabiyeden $\frac{1}{2}$ kurabiyelik kaç porsiyonun çıkacağı model ile bulunduktan sonra Hale bu soruda hangi işlemin yapılması gerektiğini sormuştur. Öğrencinin verdiği hatalı cevapları fark eden Hale öğrencinin doğru sonuca ulaşabilmesi için yeterli yönlendirmeyi yapamamıştır. Hale ile öğrenci arasında geçen konuşmalar şu şekildedir:

Hale:	*Şimdi bunun işlemini yap. Yani ne işlem yapman gerekiyor?*
Öğrenci 1:	*1*$\frac{1}{2} \div 2$ *iki yaparız. Çünkü yarısı.*
Hale:	*Bu zaten sonuçtu. Bunu sonuç olarak bulduk.*
Öğrenci 1:	*2*$\div \frac{3}{4}$*. İki ile dördü çarparız sekiz.*
Hale:	*İki nereden geldi?*
Öğrenci 1:	*Ee yarım porsiyon*
Hale:	*Tamam da yarım porsiyon diyorsun iki yazıyorsun.*
Öğrenci 1:	$\frac{1}{2} \div \frac{3}{4}$
Hale:	*Bir porsiyon* $\frac{1}{2}$ *kurabiye ise* $\frac{3}{4}$ *kurabiyeden kaç porsiyon çıkar dediğimizde* $\frac{1}{2}$*'yi* $\frac{3}{4}$*'e mi böleriz? Ne yaparız?*
Öğrenci 1:	*Şöyle yandan işlem yaparız.*
Hale:	*Yandan işlem ne?*
Öğrenci 1:	*Bununla bunu böleriz (1÷3, 2÷4 gibi).*
Hale:	*Ya bu soru ne olur?* $\frac{3}{4}$*'ü benim* $\frac{1}{2}$*'ye bölmem gerekmiyor mu?*
Öğrenci 1:	*Evet*
Hale:	*tamam. Sen ne yapıyorsun?* $\frac{1}{2}$*'yi* $\frac{3}{4}$*'e bölmüyor musun?* (Hale- kesirlerle bölme ders gözlemi)

4.2.2.1.3. ***Kesirlerle bölme işleminde öğrenci zorlukları.*** Öğrenci zorlukları alt bileşenine ilişkin bulgular dersi planlarken öğrencilerin zorlanabileceği hususları göz önünde bulundurma, ders esnasında öğrencilerin zorlandıkları noktaları fark edebilme, öğrenci zorluklarını ortadan kaldırmak için çözüm üretme, öğrenci zorluklarının nedenlerini belirleme, öğrencilerin zorlandıkları noktaları ortaya çıkaracak uygun sorular sorma kategorilerinde ayrı ayrı ele alınmıştır.

Hiçbir öğretmen adayının ders planında öğrencilerin zorlanacağı noktaları göz önünde bulunduracağına dair bir ifade yer almamıştır.

4.2.2.1.3.1. Ders esnasında öğrencilerin zorlandıkları noktaları fark edebilme. İlker iki kesrin bölümünün alan modeli ile temsilinde sadece tahtaya kalkan öğrencinin zorlandığını fark etmiştir.

İpek porsiyonu $\frac{1}{2}$ kurabiye olarak verdiği ve iki, üç ve dört kurabiyenin kaç porsiyon yaptığını sorduğu soruda öğrencilerin hem uygun model hem de uygun işlemi kullanmakta zorlandıklarını görmüştür.

Cemil dersinde öğrencilerden $\frac{1}{2} \div 2$ işlemi için bir problem kurmalarını istemiştir. Çok sayıda öğrenciye söz hakkı vermiş, onların oluşturdukları problemleri dinlemiştir. Öğrencilerin verilen işlem için uygun problem oluşturmada zorlandıklarını fark etmiştir. İki kesrin bölümünün alan modeli ile temsili için ise sadece tahtaya kalkan öğrencinin yaşadığı zorluğu fark edebilmiştir. Diğer öğretmen adayları gibi farklı öğrencilere söz hakkı vermediği için onların temsillerini oluşturmada bir zorluğa sahip olup olmadıklarını fark edememiştir.

Hale dersinde öğrencilere kesrin doğal sayıya bölümünü gerektirecek bir problem yazdırmış ve öğrencilere temsillerini oluşturmaları için süre tanımıştır. Bu esnada sınıfta dolaşarak öğrencilerin oluşturduğu temsilleri incelemiştir. Bu esnada öğrencilerin kesrin doğal sayıya bölümünün model ile temsilinde öğrencilerin zorlandıklarını fark edebilmiştir. İki kesrin bölme işleminin model ile temsilinde de Hale öğrencilerin zorlandıklarını fark etmiştir. Ve yine öğrenciler problemin çözümü için hangi işlemin kullanılması gerektiğini belirlemede de zorlanmışlardır. Hale dersin sonunda öğrencilerden yapılan işlemleri incelemelerini istemiştir. Öğrencilerden yapılan işlemlerde nasıl bir kural olduğunu düşünmelerini istemiştir. Öğrenciler bölme algoritmasının nereden geldiğini bulmada zorlanmışlardır.

4.2.2.1.3.2. Öğrenci zorluklarını ortadan kaldırmak için çözüm üretme. İlker öğrenci zorluklarını ortadan kaldırmak için uygun çözümler üretememiştir. “Bir porsiyon $\frac{1}{2}$ kurabiyedir. $\frac{5}{8}$ kurabiyeden kaç adet porsiyon elde edebiliriz?” probleminde İlker öğrencilerden bir tanesini problemin çözümünü model yardımı ile yapması için tahtaya kaldırmıştır. Öğrenci $\frac{1}{2}$ kesrini temsil etmiş ve sonra ne yapacağını düşünmüştür. $\frac{1}{2}$ ekleyerek sonucu bulacağını söylemiş ve İlker de ona “Nasıl ekleyeceğiz?” diye sormuştur. İlker burada öğrenciye yönlendirmede bulunarak temsili onun oluşturmasını sağlamak yerine bölme işlemini model kullanarak kendisi temsil etmiştir.

İpek öğrenciler doğal sayı ile kesrin bölümüne yönelik problemleri model ile temsil etmekte zorlanınca onları model ile çözümün gerçekleştirilmesinde bir tamın içinde kaç yarım olduğunu düşünmeye yönlendirmiştir. Öğrenciler aynı zamanda problemin çözümünde hangi işlemin kullanılacağını belirlemede zorlanmışlar, bu zorluğu gidermek için bölmenin ölçme anlamı ile bağlantı kurmuş, başta 6÷2 işlemi için oluşturmuş oldukları problem ile bağlantı kurmalarını istemiştir.

Cemil öğrencinin iki kesrin bölümünü model ile temsil etmede zorlandığını fark etmiş, fakat bu öğrencinin zorlandığı noktayı ortadan kaldıracak uygun çözümler üretememiştir. Öğrenci temsili oluşturamayınca farklı bir öğrenciye söz hakkı vererek ondan temsili oluşturmasını istemiştir.

Hale dersinde öğrencilerin kesrin doğal sayıya bölümünü alan modeli ile temsil etmede zorlandıklarını fark etmiştir. Üç evin temizliğinin $1\frac{1}{4}$ saat olarak verildiği ve bir evin temizliğinin ne kadar sürdüğünün sorulduğu problemde Hale öğrencilerden önce $1\frac{1}{4}$’i model ile göstermelerini istemiştir. Öğrenciler kesri temsil ettikten sonra devamında ne yapacaklarını kestirememişlerdir. Hale öğrencilere soruda üç evin temizliğinin verildiğini, fakat bir evin temizliğinin ne kadar sürdüğünün sorulduğunu söylemiştir. Öğrenciler temsil için bir süre uğraştıktan sonra bir öğrenciyi tahtaya kaldırmıştır. Hale $1\frac{1}{4}$ kesrini alan modeli ile temsil etmiş ve bir evin temizliğini bulmak için model üzerinde nasıl bir işlem yapacaklarını sormuştur. Öğrencilerin fikirlerini almak ve o şekilde yönlendirmek yerine kendisi her bir $\frac{1}{4}$'lik kısmı üç eş parçaya ayıracağını söylemiştir. Ne yapmaları gerektiğini uygun sorularla öğrencilerin bulmalarını sağlamak yerine kendisi ne yapılması gerektiğini söylemiştir. Bu nedenle öğrenciler sonrasında yine zorluk yaşamaya devam edebilecekleri için öğrencilerin zorlandıkları noktayı ortadan kaldırmak için uygun bir çözüm üretemediği düşünülmektedir. Sonuçta 15 eş parça elde edilmiştir. Öğrenci 15'i üçe bölerek, bir evin temizliğinin ne kadar sürede yapıldığını bulmak istemiştir. Fakat öğrenci burada referans alacağı bütünün ne olduğunu belirlemede zorlanmıştır. Hale burada bir tamın kaç parçaya bölünmüş olduğunu sorarak öğrenciyi yönlendirmiştir. Öğrenci bu yönlendirme ile bölme işleminin sonucunu doğru olarak ifade edebilmiştir.

İki kesrin bölümünün model ile temsilinde ve problemin çözümünün hangi işlem kullanılarak gerçekleştirileceğini belirlemede zorlanan öğrencilerin hangi noktada zorlandıklarını belirleyerek onları uygun sorularla yönlendirmek yerine kurabiye ve porsiyon ifadeleri ile verdiği sorularda öğrencilerin önce kurabiyeyi temsil etmelerini söylemiş, sonra temsil edilen kurabiye içinde kaç porsiyon olduğunu kendisi söylemiştir. Yine verilen problemin hangi işlem kullanılarak çözümünün gerçekleştirileceğini belirlemede zorlanan öğrencileri bölmenin anlamını düşündürerek bir yönlendirme yapmak yerine uygun olmayan sorular sormuş, öğrenci cevabı bulamayınca kendisi "şu şekilde olmaz mı?" şeklinde aslında cevabı kendisinin verdiği soru ifadeleri kullanmıştır.

4.2.2.1.3.3. Öğrenci zorluklarının nedenlerini belirleme. Öğretmen adayları ile ders sonrası bir görüşme gerçekleştirilmediği için öğrencilerin neden zorlanmış olacaklarına dair düşünceleri alınamamıştır. Yapılan ders gözlemi sonucu öğretmen adaylarının öğrenci zorluklarını gidermek için uygun çözümler üretememelerinden hareketle zorluğun nedenlerini belirleyemediği düşünülmüştür. Sadece İpek ders sonrası öğrenci çalışma kağıtlarını incelerken öğrencilerin doğal sayı ile kesrin bölümünü model ile ve işlem ile temsil etmede zorlanmalarının nedeninin anlamdan kaynaklanan bir problem olduğunu belirtmiştir.

4.2.2.1.3.4. Öğrencilerin zorlandıkları noktaları ortaya çıkaracak uygun sorular sorma. Hiçbir öğretmen adayı dersinde öğrencilerin zorlandıkları noktaları ortaya çıkarmada etkili sorular kullanmamıştır. Sadece İpek öğrencilerin verilen problemlerin çözümünde hangi işlemin kullanılacağını belirlemekte zorlandıklarını fark edince “Belli bir sayının içinde diğer sayıdan kaç tane olduğunu arıyorsam hangi işlemi yapıyordum arkadaşlar?” sorusunu sorarak öğrencilerin anlamdan kaynaklanan bir problem mi yaşadıklarını ortaya çıkarmak istemiştir.

4.2.2.1.4. *Kesirlerle bölme işleminde anlamanın değerlendirilmesi.* Anlamanın değerlendirilmesi alt bileşenine ilişkin bulgular öğrencilerin ön bilgilerini değerlendirme/ölçme, öğrencilerin konuyu anlayıp anlamadıklarını değerlendirme, öğrencilerin sahip olduğu hata/kavram yanılgılarını sınıf içi diyaloglardan ve öğrencinin yazılı dokümanlarından tespit etme, öğrencilerin sahip olduğu hata/kavram yanılgılarının farkına varmalarını sağlayacak şekilde dönüt ve düzeltmeler yapma kategorilerinde ayrı ayrı ele alınmıştır.

4.2.2.1.4.1. Öğrencilerin ön bilgilerini değerlendirme/ölçme. İlker, öğrencilerin bölme işleminin anlamı, doğal sayının kesre bölümünün alan modeli ile temsili ve algoritma ile temsili konularında sınırlı sayıda öğrenci ön bilgisini değerlendirebilmiştir. Bölme işleminin sadece ölçme anlamı üzerinde durulmuştur. Doğal sayılarda bölmenin model ile temsilini sadece kendisi göstermiş, bu nedenle öğrencileri değerlendirememiştir.

İpek öğrencilerin bölme işleminin anlamı, bölen-bölünen-bölüm kavramları konusundaki ön bilgilerini değerlendirmede başarılı olmuş, öğrencilerin doğal sayının kesre bölümünün model ile temsili ve kullanılacak işlem konusundaki ön bilgilerini dersten sonra çalışma kağıtlarını inceleyerek daha net bir şekilde değerlendirebilmiştir. Öğrencilerin doğal sayılarda bölme işleminin model ile temsiline yönelik ön bilgilerini değerlendirmemiştir.

Cemil bölmenin anlamı konusunda sadece iki öğrenciye söz hakkı vererek tüm öğrencileri değerlendirememiştir. Doğal sayının kesre bölümünün alan modeli ile temsili ve algoritma ile temsili konularında söz hakkı verdiği öğrencileri değerlendirebilmiştir. Kesrin doğal sayıya bölümüne yönelik bir problem kurmalarını isteyerek öğrencilerin bölme işleminin anlamı konusundaki anlamalarını değerlendirebilmiştir. Fakat model ile temsil konusunda sadece bir öğrenciye söz hakkı vererek tüm öğrencileri değerlendirememiştir.

Hale öğrencilerin doğal sayılarda bölmenin anlamı ve model ile temsili, doğal sayının kesre bölümüne ve kesrin doğal sayıya bölümü ve model ile temsili konusundaki ön bilgilerini değerlendirmek için bir problemden faydalanmıştır. Fakat doğal sayılarda bölme işleminde temsili kendisi oluşturduğu ve öğrencilere kendi temsillerini oluşturma imkânı tanımadığı için öğrencilerin ön bilgilerini değerlendirmede yeterli bir ölçme/değerlendirme faaliyetinde bulunmamıştır. Verdiği problemler ile öğrencilerin bölmenin ölçme ve parçalara ayırma anlamına yönelik anlamalarını değerlendirme şansına da sahip olmuştur.

4.2.2.1.4.2. Öğrencilerin konuyu anlayıp anlamadıklarını değerlendirme. Tüm öğretmen adayları öğrencilerin anlamalarını öğrencilerin ders esnasında oluşturmuş oldukları modeller, sorulara vermiş oldukları cevaplar ve gözlemleri aracılığıyla değerlendirebilmiştir. Hiçbir öğretmen adayı dersinde alan modeli dışında bir model kullanmamış ve öğrencileri de farklı bir model kullanmaya yönlendirmemiştir. Bu nedenle öğretmen adayları öğrencilerin sadece alan modeli kullanımlarına yönelik anlamalarını değerlendirebilmiştir. İpek öğrencilerin anlamada zorlanması nedeni ile dersinde iki kesrin bölme işlemine geçememiştir. Bu nedenle öğrencilerin sadece doğal sayı ile kesrin bölme işleminde alan modeli kullanımına yönelik anlamalarını değerlendirme şansına sahip olmuştur. İpek derste öğrencilere vermiş olduğu çalışma kağıtlarını dersten sonra inceleyerek öğrencilerin anlamalarını daha net bir şekilde değerlendirebilmiştir.

İlker süresi yetmediği için dersin sonunda konuya yönelik bir özet yapamamış, dersin sonunda öğrencilerin anlamalarını değerlendirmeye yönelik olarak bir çalışma yürütmemiştir. Planında ise ölçme-değerlendirme kısmı oluşturmamış, sadece ders sonrası kısmı altında yapacaklarını belirtmiştir. İlker planında "Bu ders saatinde öğrencilere neler öğrendikleri sorulur ve özetlenir." ifadesine ve dört tane de bölme işlemine yer vermiştir. Verdiği bu bölme işlemlerinin nasıl yapılacağına dair herhangi bir açıklama yapmamıştır. Bu nedenle verilen bu işlemlerin sadece algoritma kullanılarak çözümünün gerçekleştirileceği düşünülmüştür.

İlker'in dersinde problemlerin çözümleri alan modeli, ters çevir- çarp algoritması ve de ortak payda algoritması kullanılarak temsil edilmiştir. İlker öğrencilerden farklı modeller oluşturmalarını istememiş ve buna yönelik bir yönlendirme de yapmamıştır. Böylece İlker öğrencilerin alan modeli dışında bölme işleminin model ile temsiline yönelik anlamalarını değerlendirememiştir. Ayrıca oluşturulan model ile yapılan ters çevir-çarp algoritması arasında bir bağlantı kuramadığı için öğrencilerin algoritmanın nereden geldiğine yönelik anlamalarını da değerlendirememiştir.

İpek öğrencilere vermiş olduğu çalışma kağıtlarını ders sonrası incelediğinde öğrencilerin çoğunun ne yapması gerektiğini anlamadığını görmüştür. Bazı öğrenciler model ile doğru temsil etmiş, yapılması gereken işlem kısmına da tekrarlı toplama işlemini yazmışlardır. İpek anlatmak istediği şeyin net olmamasından kaynaklı beklediği sonucu elde edemediğini ifade etmiştir.

İpek planında ders sırasında yapacaklarını şöyle belirtmiştir:

1. Derse ilk çalışma kâğıdı dağıtılarak başlanır. Bu çalışma kâğıdında kurabiyelerden kaç porsiyon çıkacağını hesaplayarak öğrencilerden modeller yardımıyla problemler çözdürülür.

2. Bu problemin hangi işlem yardımıyla çözülebileceği ve nedeni öğrencilere sorulur. Yapılan işlemin bölme olduğu fark edilir.

3. Yapılan işlemin bölme olduğu fark edildikten sonra kutucuklara hangi bölme işleminin bu problemi çözeceğini yazmaları istenir. Ve işlem yapmadan buldukları sonuçlar bu işlemin de sonucu olarak yazdırılır. Ve öğrencilerden bu bölme işleminin nasıl yapılmış olabileceğini ve nedenini keşfetmeleri istenir. Ulaştıkları sonucu çalışma kâğıdının sonuç kısmına yazmaları istenir. Algoritmayı bu şekilde fark etmeleri beklenir. (İpek-kesirlerle bölme ders planı)

İpek'in ders planında yer alan bu ifadelerden dersi sırasında öğrencilerin modellerine yönelik anlamalarını değerlendireceği, problemin çözümü için hangi işlemin kullanılabileceğine yönelik anlamalarımı değerlendireceğini ve algoritmayı fark etmelerine yönelik anlamalarını değerlendirmeyi amaçladığı çıkarılabilir. Ayrıca ders planında ölçme-değerlendirme kısmına şu şekilde yer vermiştir:

Gözlem:

Bir doğal sayı ile bir kesrin bölme işlemini yapıp, anlamlandırabiliyorlar mı?
İki kesrin bölme işlemini yapıp, anlamlandırabiliyorlar mı?
Soru:

Porsiyonu 1/8 kurabiye olan kurabiyelerden 5/4 tane kurabiyeniz varsa kaç porsiyon elde edebilirsiniz? İşlemi algoritma yardımıyla ve model ile nasıl yapılır gösteriniz. (İpek- kesirlerle bölme ders planı)

İpek'in süresi yetmediği için iki kesrin bölme işlemine geçememiş ve ders planında yer verdiği şekilde gözlemler ile öğrencilerin iki kesrin bölme işlemini yapıp, anlamlandırıp anlamlandıramadığını değerlendirememiştir.

Cemil'in dersinde alan modeli dışında farklı bir temsil kullanılmamıştır. Cemil bu nedenle alan modeli dışındaki öğrenci anlamalarını değerlendirememiştir. Aynı zamanda Cemil model ile elde edilen sonuçlardan yola çıkarak öğrencilerde ters çevir-çarp algoritmasının keşfedilmesini sağlamamıştır. Bu nedenle ters çevir-çarp algoritmasının nereden geldiğine yönelik öğrenci anlamalarını değerlendirememiştir. Cemil ders planında ders sonrası kısmında dört adet bölme işlemine yer vermiş ve bu örneklerin sırasıyla çözüleceğini söylemiştir. Bir de "öğrencilere bu ders saatinde neler öğrendikleri sorulur, konu toparlanır ve üzerinde tartışılır" ifadesine yer vermiştir. Fakat ders sonunda hiçbir ölçme-değerlendirme faaliyetinde bulunmamıştır.

Hale dersinde doğal sayının kesre bölünmesine yönelik, kesrin doğal sayıya bölünmesine yönelik ve iki kesrin bölme işlemine yönelik problemler yazdırmıştır. Hale bu problemlerin çözümünün model ile bulunmasını istemiştir. Öğrencilere düşünmesi için zaman tanımış ve bu esnada sınıfta dolaşarak öğrencilerin modellerini incelemiştir. Böylece öğrencilerin anlamalarını değerlendirmeye çalışmıştır. Aynı zamanda bu modellerde öğrencilerin neyi bütün olarak referans alacaklarını ve verilen problemlerin çözümünde hangi işlemlerin kullanılacağına dair anlamalarını da değerlendirmeye çalışmıştır. Ayrıca sorularda öğrenciler kesirleri model üzerinde temsil ettikleri ve alan modeli kullandıkları için öğrencilerin kesirleri alan modeli ile temsil etmelerine yönelik anlamalarını da değerlendirebilmiştir.

4.2.2.1.4.3. Öğrencilerin sahip olduğu hata/kavram yanılgılarını sınıf içi diyaloglardan ve öğrencinin yazılı dokümanlarından tespit etme. İlker verilen problemin çözümünün işlem ile bulunması için tahtaya kalkan öğrencinin işlem hatası yaptığını fark etmiştir. Model kullanımı konusunda hata ve kavram yanılgısına sahip öğrenciler varsa onları tespit edememiştir. İpek ders esnasında modelini incelediği ve söz hakkı verdiği öğrencilerin, dersten sonra da öğrencilerin çalışma kağıtlarını inceleyerek öğrenci hata/kavram yanılgılarını tespit edebilmiştir.

Cemil söz hakkı verdiği öğrencilerin hata/kavram yanılgılarını fark edebilmiştir. Sınıfın genelini tespit edememiştir. Sadece öğrencilerden problem kurmalarını istediği zaman çok sayıda öğrenciye söz hakkı verdiği için öğrencilerin problem kurmada hata yaptıkları ve zorlandıklarını fark edebilmiştir. Hale modelini incelediği ve söz hakkı verdiği öğrencilerin hata/yanılgı/zorluklarını tespit edebilmiştir.

4.2.2.1.4.4. Öğrencilerin sahip olduğu hata/kavram yanılgılarının farkına varmalarını sağlayacak şekilde dönüt ve düzeltmeler yapma. İlker dersinde söz hakkı alarak tahtaya kalkan öğrencinin bölme işlemi yapacakken çarpma işlemi yapıyormuş gibi hareket ettiğini fark etmiştir. Öğrenciye bölme işlemi yaptığını hatırlatmıştır. Etkili bir dönüt gibi görünmese de öğrenci çarpma işlemi yapıyor gibi davrandığını fark etmiştir. İpek öğrenciler verilen problemlerin model ile temsilinden sonra uygun işlemi yazmakta zorlanınca ve hata yapınca onları bölmenin ölçme anlamını düşünmeye ve başta $6 \div 2$ işlemi için ifade ettikleri anlamlar ile bağlantı kurmaya yönlendirmiştir. Aynı zamanda öğrenciler problemin çözümü için çarpma işlemi oluştururken İpek model ile bulunan sonucu ve çarpma işlemi ile elde edilen sonucu karşılaştırmalarını isteyerek doğru bir işlem kullanıp kullanmadıklarının farkına varmalarını sağlamıştır.

Cemil iki kesrin bölümünün model ile temsilini gerçekleştirmek üzere tahtaya kalkan öğrencinin kesri temsil etmede ve işlemi temsil etmede zorlandığını ve hata yaptığını fark etmiştir. Burada öğrenciye problemde yer alan kesrin ne ifade ettiğini sorarak öğrencinin hatasının/yanılgısının farkına varmasını sağlamak istemiştir. Fakat öğrenci kesrin ne anlama geldiği söylenmesine rağmen kesri temsil etmekte zorlanmış ve hata yapmıştır. Bu nedenle Cemil'in öğrenciye etkili bir dönüt ve düzeltmede bulunamadığı düşünülmüştür.

Hale dersin sonunda öğrencilerin problemin çözümünde kullanacakları işlemleri incelemelerini ve bu işlemlerden yola çıkarak bölme işleminde nasıl bir kural olabileceğini düşünmelerini istemiştir. Öğrencilere söz hakkı vererek onların düşüncelerini almak istemiştir. Öğrenciler bölme algoritmasını bulmakta zorlanmış, neyin sorulduğunu tam olarak anlamamıştır. Hale ise öğrencilerin algoritmayı keşfetmelerine yönelik etkili bir dönüt ve düzeltmede bulunamamıştır.

4.2.2.1.5. Kesirlerle bölme işleminde öğrenci düşüncesine odaklanma. Öğrenci düşüncesine odaklanma alt bileşenine ilişkin bulgular öğrencilerin düşüncelerini ortaya çıkarmak için soru sorma, öğrencilere düşüncelerini açıklama imkânı tanıma, öğrencinin oluşturduğu modeli anlama ve açıklama, öğrencileri farklı modeller oluşturmaya teşvik etme kategorilerinde ayrı ayrı ele alınmıştır.

4.2.2.1.5.1. Öğrencilerin düşüncelerini ortaya çıkarmak için soru sorma. İlker öğrenci düşüncelerini ortaya çıkarmada etkili sorular kullanamamıştır. Bölme işleminin anlamını hatırlattıktan sonra İlker 6÷2 işlemini küme modeli ile temsil etmiştir. Temsilini oluşturduktan sonra öğrencilere "Mesela altı tane şey var. Kaç tane iki var bunun içinde diyebiliriz değil mi?" diye sormuştur. Bu soru için öğrenciler cevap vermemişlerdir. Öğrenci fikirlerini ortaya çıkarmak amaçlı sorulmuş olsa da tam olarak işlevini yerine getirememiştir. İlker öğrencilere bir problem yazdırmıştır. Bu problemin cevabı bir öğrenci tarafından alan modeli kullanılarak sekiz olarak bulunmuştur. İlker öğrencilere "sekiz kişi yiyecek doğru mu?" diye sorarak farklı bir düşünceye sahip olan öğrenciler varsa onları ortaya çıkarmak istemiştir. Burada yine hiçbir öğrenci cevap vermemiştir.

İlker doğal sayı ile kesrin bölümüne yönelik bir hatırlatma yaptıktan sonra iki kesrin bölümüne yönelik olarak "Bir porsiyon $\frac{1}{2}$ kurabiyedir. $\frac{5}{8}$ kurabiyeden kaç adet porsiyon elde edebiliriz?" problemini yazdırmıştır. Öğrencilere "bunu modellerle nasıl gösterebiliriz?" diye sormuştur. Öğrencilerden bir tanesini temsilini oluşturması için tahtaya kaldırmıştır. Öğrenci $\frac{1}{2}$ kesrini temsil etmiştir. İlker problemin ne istediğini ve sonucunun nasıl bulacağını öğrenciye sormuştur. Öğrenci "Öğretmenim $\frac{1}{2}$ ekleyerek" demiştir. İlker "Nasıl ekleyeceğiz?" diye sorarak öğrenci düşüncesini ortaya çıkarmak istemiştir. Ardından kendisi işlemin çözümüne yönelik bir temsil oluşturmuştur. Önce $\frac{5}{8}$ kesrini alan modeli ile daireyi sekiz eş parçaya ayırıp beş eş parçasını seçecek şekilde temsil etmiştir. Dört parçasını bir porsiyon olarak almış ve geri kalan bir parçanın da kaç porsiyon yapacağını öğrencilere sormuştur. Tahtaya bölme işlemini temsil etmek üzere kalkan öğrenci $\frac{1}{4}$ cevabını vermiştir. İlker "O zaman demek ki son olarak ne diyeceğiz burada?" diye sormuştur. Öğrenci cevabın $1\frac{1}{4}$ olduğunu söylemiştir. İlker öğrencilerin ilk kesir içinde ikinci kesirden kaç tane olduğuna dair fikirlerini ortaya çıkarmak istemiştir.

İpek öğrencilere doğal sayının kesre bölümünün model ile ve algoritma ile temsiline yönelik, kesrin anlamına yönelik sorular sormuştur. İpek öğrencilere çalışma kağıdındaki soruları cevaplandırmaları için zaman vermiştir. Bu esnada sınıf içerisinde dolaşarak öğrencilerin temsillerini kontrol etmiştir. Öğrencilere "Bir kurabiyeden yarım porsiyonluk kaç porsiyon çıkar?" diye sorarak hem onların fikirlerini ortaya çıkarmak hem de onları çözüme ulaşmaları konusunda yönlendirmek istemiştir. Öğrencilerin bir süre uğraşmasının ardından "birlikte yapalım" demiştir. "Şimdi bizim kurabiyelerimizin porsiyonu her bir kurabiyenin ikide biri. İkide biri başka nasıl ifade edebiliyorduk arkadaşlar?" diye sormuştur. Öğrenciler $\frac{1}{2}$ diye cevap verince onlardan $\frac{1}{2}$'nin kelime anlamını düşünmelerini istemiştir. Öğrenciler "yarım, bir bütünün yarısı" şeklinde cevap vermişlerdir. Öğrencilerden bir tanesi temsilini oluşturmak için tahtaya kalkmış ve $\frac{1}{2}$ kesrine yönelik bir temsil oluşturmuştur. İpek öğrenciye bir kurabiyenin yarısını bulmuş olduğunu söylemiş ve kendisinden ne istendiğini sormuştur. Öğrenci "kaç porsiyon" diye cevap vermiştir. İpek öğrencinin oluşturduğu temsili kurabiye kabul etmiş ve "sen bu kurabiyeden yarımşar yarımşar kaç porsiyon çıkartabilirsin?" diye sormuştur. Öğrenci "iki" diye cevap vermiş ve İpek "onu nasıl gösterirsin? Burası bir porsiyondu. Peki geri kalan yarısı nedir? Çöp müdür? Onu atar mıyım? Yarısından bir porsiyon çıkarsa diğer yarsını atar mıyım arkadaşlar?" diye sorarak öğrencilerin fikirlerini ortaya çıkarmak istemiştir. Öğrenciler geri kalan $\frac{1}{2}$'lik kısmın da bir porsiyon yapacağını söylemişlerdir. Öğrencilerden bir tanesi "Aslında bu iki porsiyon. İki porsiyon değil mi?" şeklinde bir soru yöneltmiştir. İpek öğrenciye neden iki porsiyon olduğunu sormuştur. Öğrenci $\frac{1}{2}$'lik kısmın bir porsiyon, geri kalan $\frac{1}{2}$'lik kısmın da yine bir porsiyon yaptığını söylemiştir. Bunun üzerine İpek öğrencinin ifadelerini "Arkadaşımız diyor ki; bu bir parça $\frac{1}{2}$'lik bir parçadır. Bu parça da $\frac{1}{2}$'lik bir parçadır. Ve $\frac{1}{2}$'lik her bir parça bir porsiyon oluşturduğu için buradan kaç porsiyon çıkarttık?" şeklinde açıklamıştır. İki kurabiyeden $\frac{1}{2}$'lik dört porsiyon çıktığı bulunduktan sonra İpek öğrencilere bu soru için nasıl bir işlem kullanıldığını sormuştur. "Her bir porsiyon $\frac{1}{2}$ kurabiye ise kaç tane $\frac{1}{2}$'lik kurabiye vardır? olarak düşüneceğiz. Şu düşündüğümüz şeyin işlemsel olarak ifadesi ne olabilir arkadaşlar?" diye sorarak öğrencilerin fikirlerini ortaya çıkarmak ve öğrencilere hangi işlem ile temsil edilebileceğine dair yönlendirmede bulunmak istemiştir.

Cemil öğrencilere sormuş olduğu sorunun model ile temsilinden sonra model kullanmadan işlem ile yapan varsa onların nasıl yaptığını sormuştur. Burada öğrencilerin hem verilen problem için hangi işlemin kullanılabileceğine dair anlamalarını değerlendirebilmiş, hem de öğrencilere düşüncelerini ortaya çıkarabilme imkânı tanımıştır. Öğrencilere verilen işlemleri nasıl yaptıklarına dair sorular sorarak onların bu konudaki fikirlerini ortaya çıkarmıştır.

Cemil derste öğrencilerden $\frac{1}{2} \div 2$ işlemine yönelik bir problem oluşturmalarını istemiştir. Öğrencilerin oluşturduğu problemleri dinledikten sonra "Ayşe annenin elinde $\frac{1}{2}$ litre süt vardır. Ayşe anne bu sütü ikiz bebeklerine eşit miktarda içireceğine göre bir bebeğine kaç litre süt içirmiş olur?” problemini yazdırmıştır. Bir öğrenciye problemin çözümüne yönelik temsili oluşturması için söz hakkı vermiştir. Öğrenci temsili sonucu $\frac{1}{4}$ bulmuştur ve bunu “Şu kadarı Ayşe annenin elindeki süt. Bir tane bebeğine verebilmesi için elindeki sütü ikiye bölmesi gerekli.” ifadesi ile açıklamıştır. Cemil öğrencinin temsilinden sonra “Şuraya ne dedik? Bu yarısı değil mi?” diye sormuş, öğrencinin düşüncesini ortaya çıkartmak istemiştir. Öğrencinin yarısı olduğunu ifade etmesini, onu belirtmesini istemiştir. Öğrenciye neresinin $\frac{1}{2}$ yaptığını sormuş öğrenci de bütünü ikiye ayırdığı zaman elde ettiği her iki parçanın da $\frac{1}{2}$ olduğunu söylemiştir.

Hale doğal sayılarda bölme işleminin model ile temsili, doğal sayının kesre bölümünün, kesrin doğal sayıya bölümünün ve iki kesrin bölümünün model ile temsili ve algoritma ile temsili esnasında öğrencilere sorular yöneltmiştir. Fakat problemlerin model ile temsili ve algoritma ile temsili konusunda çok etkili sorular kullanamamıştır. Hale hariç diğer öğretmen adayları dersine bölmenin anlamına yönelik bir hatırlatma ile başlamış, öğrencilere bölmenin taşıdığı anlamı sormuşlardır. İpek burada sorduğu sorular ile öğrencilerin hem parçalara ayırma hem de ölçme anlamını hatırlamalarını sağlamıştır.

Cemil doğal sayı ile kesrin bölümüne yönelik problemlerin çözümü model yardımı ile yapıldıktan sonra iki kesrin bölümüne yönelik problemler yazdırmıştır. Bunlardan ilki “Bir porsiyon $\frac{1}{2}$ kurabiyedir. $\frac{5}{8}$ kurabiyeden kaç adet porsiyon elde ederiz?” olmuştur. Cemil öğrencilerden düşünmelerini istemiş ve düşünmeleri için fırsat tanımıştır. Daha sonra öğrencilerden birini tahtaya kaldırarak ondan problemin çözümü için bir temsil oluşturmasını istemiştir. Öğrenci önce $\frac{1}{2}$ = (eşittir) yazıp bir bütünü ikiye ayırmış, daha sonra $\frac{5}{8}$ = (eşittir) yazıp bir bütünü sekiz parçaya ayırmıştır. Öğrencinin bu temsilinden sonra Cemil $\frac{1}{2}$ kesrini temsil etmek için oluşturduğu modeli göstererek “bu kurabiye kaç kurabiye?

diye sormuştur. Öğrenci bir porsiyon olduğunu söylemiştir. Cemil porsiyon olarak sormadığını, kurabiye olarak kaç tane olduğunu sorduğunu belirtmiştir. Bu defa öğrenci iki cevabını vermiştir. Cemil "İki mi? Bir değil mi?" demiş ve bir de $\frac{5}{8}$ kesrini temsil etmek üzere oluşturulan sekiz parçaya ayrılmış bütünü göstererek onun kaç kurabiye olduğunu sormuştur. Öğrenci "sekiz, sekize bölünmüş" cevabını vermiştir. Sınıftaki öğrenciler dört olduğunu söylemiştir. Öğrencilerin bu cevabı üzerinde Cemil bu defa sınıfa "Kaç kurabiye bu?" diye sorarak öğrencilerin fikirlerini ortaya çıkarmak istemiştir. Cemil öğrencilerin bu konudaki hatalarını fark edip, onlara yönlendirmelerde bulunduktan sonra tahtaya çıkan öğrenciden şimdi ne yapacağını söylemesi istemiş ve soruda kendinden isteneni oraya yansıtması gerektiğini belirtmiştir. Öğrenci sekiz tane kurabiye çizeceğini söylemiş ve Cemil bir kurabiyeyi sekiz parçaya bölmesi gerektiğini söylemiştir. Öğrenci daireyi sekiz parçaya ayırdıktan sonra Cemil nasıl bir işlem yapacağını sormuştur. Öğrenci beş parçasını alacağını söylemiştir. Öğrenci parçanın beş parçasını taradıktan sonra şimdi neyi göstermesi gerektiğini amaçlarının ne olduğunu sorarak öğrencinin düşüncesini öğrenmek istemiş ve bir porsiyonun ne olduğunu sormuştur. Öğrenci bir porsiyonun $\frac{1}{2}$, yarım kurabiye olduğunu söyledikten sonra nasıl yapılacağını öğrencilere sorarak sınıftaki öğrencilerin fikirlerini ortaya çıkarmak istemiştir. Öğrencilerden bir tanesi yarısının bir porsiyon olduğunu belirtmiştir. Cemil öğrencinin bu ifadesine odaklanarak tahtadaki öğrenciye oluşturulan temsildeki yarımın ne olduğunu sormuştur. Öğrenci dört parçayı seçerek oranın bir porsiyon yaptığını ifade etmiştir. Cemil bunun üzerine geri kalanın neyi ifade ettiğini sorarak öğrencilere yine fikirlerini ortaya çıkarma imkânı tanımıştır. Öğrenci dört parçanın birini aldığını, bu nedenle $\frac{1}{4}$ yani çeyrek olduğunu söylemiştir. Cemil neyin çeyreği diye sormuş ve öğrenci de bir porsiyonun çeyreği olduğunu ifade etmiştir. Ardından Cemil öğrencinin $\frac{1}{4}$'i nasıl bulduğunu sınıfa açıklamıştır. Sorunun toplam kaç porsiyon istediğini hatırlatarak bir porsiyon ve $\frac{1}{4}$ porsiyonun ne yapılacağını sormuştur. Öğrenci birleştireceğim cevabını vermiştir. Cemil ne yapacağını yazmasını isteyince sınıftaki öğrenciler de toplayacaklarını söylemiştir.

Hale derse öğrencilere bölmenin anlamını hatırlatmak için “10 elmam var. Bunu altı kişiye nasıl paylaştırabilirim?” problemini sorarak başlamıştır. Hale sorunun çözümünü model ile temsil etmek için önce 10 elmayı temsil etmek üzere 10 daire çizmiştir. Her bir dairenin altına bir, iki, üç, dört, beş, altı diye yazarak her bir kişinin bir elma yiyeceğini belirtmiştir. Geri kalan dört elmanın altı kişiye nasıl paylaştırılabileceğini öğrencilere sorarak öğrencilerin bu konudaki fikirlerini ortaya çıkarmak istemiştir. Hale aynı zamanda burada öğrencileri farklı çözüm yolları oluşturmaya teşvik etmiş ve onlara düşüncelerini açıklama fırsatı vermiştir. Öğrencilerden bir tanesi dört elmanın altıya bölüneceğini söylemiştir. Hale her birini değil mi diye sorarak öğrencinin fikrini ortaya çıkarmak istemiştir. Öğrenci her birinin bölüneceğini, 24 tane parça elde edileceğini ifade etmiştir. Bunun üzerine Hale her bir daireyi altı eş parçaya ayırmış ve 24 parça elde etmiştir. Öğrencilere “24 eş elmam oldu değil mi? Evet, sonra?” diye sorarak devamında ne yapılması gerektiği konusunda öğrencilerin fikirlerini ortaya çıkarmak istemiştir. Öğrenci altı parçaya ayrılan her elmadan her kişiye bir parça vereceğini söylemiştir. Hale bunun üzerine bir elmanın altı parçasından dört parçasını tarayıp o kısmın bir kişiye verileceğini belirterek öğrencilere bir kişinin kaç elma almış olacağını sormuştur. Öğrencilerin verdiği hatalı cevaplar üzerine taralı alanın ne kadar olduğunu sormuştur. Öğrenciler dört olduğunu söylemişler ve ardından Hale bütünün ne olduğunu sormuştur. Öğrenciler böylece $\frac{4}{6}$ kesrini ifade edebilmişlerdir. Hale öğrencilere bir kişinin toplam kaç elma aldığını sormuştur. Öğrenciler Hale’nin “Yani $\frac{4}{6}$’sını veriyorum herkese. Zaten bir kişi bir tam elma almıştı değil mi? Bir de $\frac{4}{6}$’sını aldı” ifadelerinden sonra $1\frac{4}{6}$ cevabını vermişlerdir. $1\frac{4}{6}$ sonucu bulunduktan sonra Hale model ile bulunan sonuç ve yapılacak işlem arasında bağlantı kurabilmek için kesrin bileşik kere çevrilmesini istemiştir. Öğrenciler bileşik kesre çeviremeyince Hale bileşik kesre çevrilmiş halin $\frac{10}{6}$ olduğunu söylemiştir. Ardından zaten 10 elma olduğunu ve altı kişiye paylaştıralım deyince hangi işlemi kullanıldığını öğrencilere sormuştur? Öğrenciler bölme olduğunu söylemişlerdir.

Doğal sayılarda bölme işleminin model ile temsilinden sonra Hale öğrencilere kesrin doğal sayıya bölümüne yönelik olan "Ayşe'nin üç tane evi vardır. Temizliğini $1\frac{1}{4}$ saatte yapıyor. Bir tane evin temizliğini ne kadar saatte yapar?" problemini yazdırmıştır. Hale öğrencilere düşünmeleri ve model ile temsillerini oluşturmaları için zaman vermiştir. Bu esnada öğrencilerin yaptıklarını kontrol ederek onlara yönlendirmelerde bulunmaya çalışmıştır. Bir öğrencinin yaptığı temsili incelediğinde öğrencinin $1\frac{1}{4}$ kesrini temsil ettiğini görmüş ve "Şimdi ne yapman gerekiyor?" diye sormuştur. Fakat öğrenci cevap vermeyince kendisi soruda üç evin temizliğinin verilmiş olduğunu, bir tane evin temizliğinin istendiğini bu nedenle de üçe bölmesi gerektiğini söylemiştir. Aslında başlangıçta öğrenci fikrini ortaya çıkarmak için soru soruyor gibi görünse de öğrencinin ne düşündüğünü ortaya çıkarmak için etkin bir soru kullanamamıştır. Öğrenciler yerlerinde bir süre uğraştıktan sonra Hale öğrencilerden bir tanesini tahtaya kaldırmıştır. Hale kendisi $1\frac{1}{4}$ kesrini alan modeli ile temsil etmiştir. Sonra soruda üçe bölünmesinin istendiğini belirtmiş ve öğrenciye nasıl üçe böleceğini sormuş, fakat burada öğrencinin fikrini ortaya çıkarmasına imkân tanımadan "Şöyle her birini üçe bölemez miyiz?" demiştir. Öğrenci Hale'nin bu sözü üzerine bir tam ve $\frac{1}{4}$'lik kısmı üç eş parçaya ayırarak 15 eş parça elde etmiştir. Hale öğrenciye devamında ne yapacağını sormuştur. Öğrenci 15'i üçe böleceğini ve sonucun beş olduğunu söylemiştir. Hale "Yani beş ne?" diye sormuş ve öğrenci de $\frac{5}{15}$ (15'te beş) cevabını vermiştir. Öğrencinin bu cevabından sonra Hale bu beş eş parçayı ayrı şekilde çizmiş ve bu parçaların ne kadarlık parçalar olduğunu sormuştur. Öğrenci çeyrek olduğunu söylemiştir. Hale çeyrek mi diye sorduğu zaman ise çeyreğin biraz küçüğü olduğunu belirtmiştir. Hale model üzerinde çeyreği öğrenciye göstermiştir. Bütünü kaç eş parçaya ayırdığını sormuş, öğrenci de 12 olduğunu söylemiştir. Bunun üzerine her bir küçük parçanın bütünün ne kadarı olduğunu sormuştur. Öğrenci $\frac{1}{12}$ olduğunu ve bu nedenle beş parçanın da $\frac{5}{12}$ olduğunu söylemiştir.

Kesrin doğal sayıya bölümüne yönelik bir problemin çözümü model ile temsil edildikten sonra Hale öğrencilere “Porsiyonu $\frac{1}{2}$ kurabiye ise iki kurabiye kaç porsiyon yapar?” sorusunu yönelmiştir. Öğrencilerden bir tanesine söz hakkı vererek tahtaya kaldırmıştır. Öğrenci bir daire çizmiş ve bunu ortadan ikiye ayırarak $\frac{1}{2}$ kurabiyeyi temsil etmek istemiştir. Öğrencinin bu temsilinin üzerine Hale öğrenciye neyi gösterdiğini sorarak düşüncesini ortaya çıkarmak istemiştir. Öğrenci $\frac{1}{2}$ kurabiyeyi gösterdiğini söylemiş ve Hale de “Şu kurabiye değil mi?” diyerek öğrencinin temsilindeki bütünü ikiye ayıran parçayı silip bütün haline getirmiştir. Soruda iki kurabiye geçtiği için öğrenciden bir daire daha çizmesini istemiştir. Öğrenci soruda her porsiyonun $\frac{1}{2}$ kurabiye olarak verildiğini söyleyerek bütünleri ortadan ikiye ayırmıştır. Hale bir bütünün yarısını göstererek “şurası bir porsiyon değil mi? diye sormuş ve kalan $\frac{1}{2}$’lik kısımları da ikinci, porsiyon, üçüncü porsiyon, dördüncü porsiyon olarak adlandırmıştır. Burada öğrenciye yine sorular yöneltmiş fakat cevap beklemek yerine kendisi cevapları vermeyi tercih etmiştir. Model ile oluşturulan temsil sonucu dört porsiyon elde edilebileceği bulunduktan sonra Hale öğrenciye işlemle yapsaydı bu soru için hangi işlemi kullanacağını sormuştur. Öğrenci çarpma işlemi cevabını vermiş, Hale öğrenciye neyi çarpacağını sormuştur. Ardından öğrenci kullanacağı işlemin bölme işlemi olduğunu, çünkü kurabiyeleri böldüğünü söylemiştir. Hale tekrar öğrenciye bu soruyu işlemle yapsan nasıl yaparsın? Yani iki kurabiyeyi $\frac{1}{2}$’ye bölme değil mi bu?” diye sormuştur. Öğrencinin düşünmesine imkân tanımak ve cevabı onun bulmasını sağlamak yerine kendisi yine cevabı vermiştir. $2 \div \frac{1}{2}$ işleminin sonucunun dört olduğunu da yine kendisi söylemiştir.

Doğal sayının kesre ve kesrin doğal sayıya bölünmesine yönelik örnekler yapıldıktan sonra iki kesrin bölümüne yönelik örneklere geçilmiştir. Hale bu defa öğrencilere $\frac{3}{4}$ kurabiyeden $\frac{1}{2}$'lik kaç porsiyon çıkacağını sormuştur. Öğrencilerden bir tanesini tahtaya kaldırmıştır. Öğrenciye önce kurabiyeyi göstermesini söylemiştir. Temsil sonucu oluşan üç taralı kısımdan ikisini seçerek "Şurası bir porsiyon yapmaz mı? diye sormuştur. Öğrenci yapacağını söylemiş ve geri kalan bir parçanın kaç porsiyon yapacağını sormuştur. Bir parçalık kısmın da $\frac{1}{2}$ porsiyon olduğu bulunduktan sonra Hale öğrenciye toplam kaç porsiyon olduğunu sormuştur. Hale sorduğu sorular ile iki kesrin bölme işleminin alan modeli ile temsilinde öğrenci fikirlerini ortaya çıkarmak istemiştir. Fakat öğrenciler düşüncelerini söyledikten sonra onları yönlendirmek yerine kendisi "Böyle mi yapar, şöyle olmaz mı?" şeklinde sorular kullanmıştır. $1\frac{1}{2}$ porsiyon sonucuna ulaşıldıktan sonra Hale öğrenciden problemin çözümü için kullanılacak işlemi yazmasını istemiştir. Öğrenci $1\frac{1}{2} \div 2$ yapacağını çünkü yarısı olduğunu söylemiştir. Hale öğrenciye $1\frac{1}{2}$'in sonuç olduğunu söyledikten sonra öğrenci bu defa da $2 \div \frac{3}{4}$ işlemini yazmıştır. Hale öğrenciye ikinin nereden geldiğini sorarak öğrencinin düşüncesini ortaya çıkarmak istemiştir. Öğrenci yarım porsiyon olduğu için iki yazdığını söylemiş, Hale de yarım diyorsun ama iki yazıyorsun diyerek öğrenciye karşılık vermiştir. Öğrenci bunun üzerine $\frac{1}{2} \div \frac{3}{4}$ işlemini yazmış ve Hale de "Bir porsiyon $\frac{1}{2}$ kurabiye ise $\frac{3}{4}$ kurabiyeden kaç porsiyon çıkar dediğimizde $\frac{1}{2}$'yi $\frac{3}{4}$'e mi böleriz? Ne yaparız?" diye sormuştur. Öğrenci yandan işlem yapılacağını söylemiştir. Bunun üzerine Hale öğrencinin yandan işlem ile neyi kastettiğini anlamak için yandan işlemin ne olduğunu sormuştur. Bu soru üzerine öğrenci biri üçe böleceğini, ikiyi de dörde böleceğini söylemiştir. Öğrencinin verdiği bu cevaptan sonra Hale "Ya bu soruda ne olur? $\frac{3}{4}$'ü benim $\frac{1}{2}$'ye bölmem gerekmiyor mu?" diye sormuştur. Hale yapılacak işlem konusunda öğrenci fikrini ortaya çıkarma ve doğru işlemi bulmak üzere yönlendirmede başarısız olmuştur.

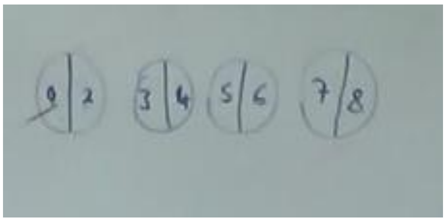
Hale dersin sonunda öğrencilerden yapılan işlemleri incelemesini istemiştir. İşlemlerde neler gördüklerini, nasıl bir kural olduğunu düşündüklerini sormuştur. Hale dersinin sonunda öğrencilerin modelden elde edilen sonuçlardan yola çıkarak algoritmanın nasıl yapılacağı konusundaki fikirlerini öğrenmek istemiştir.

4.2.2.1.5.2. Öğrencilere düşüncelerini açıklama imkânı tanıma. İlker, sorduğu sorulara öğrenciler cevap vermediği ya da cevabını kendisi verdiği için öğrencilere her zaman düşüncelerini açıklama imkânı tanımamıştır. Verilen problemlerin alan modeli ile temsili ve algoritma ile temsili konusunda sınırlı sayıda öğrenciye düşüncesini açıklama imkânı tanımıştır. Farklı öğrencilere farklı temsiller oluşturma ve düşüncelerini açıklama imkânı tanımamıştır. İpek, verilen problemin hangi işlem ile temsil edileceğine yönelik öğrencilere düşüncelerini açıklama imkânı tanımıştır. Ayrıca öğrencilere çalışma kağıtları dağıtarak model ve algoritma ile temsil etme konusundaki düşüncelerini kâğıt üzerinde açıklama imkânı tanımıştır.

Cemil, sorduğu sorular karşısında farklı öğrencilere söz hakkı vererek düşüncelerini açıklama imkânı tanımıştır. Çok sayıda öğrenciye söz hakkı vererek modelini oluşturma imkânı tanımamıştır. Hale, problemlerin model ile temsili ve algoritma ile temsili konusunda cevapları kendisi vererek ve temsili kendisi oluşturarak öğrencilere düşüncelerini açıklamaları için yeteri imkânı tanımamıştır. Doğal sayılarda bölme işleminin model ile temsili konusunda ise çok sayıda öğrenciye düşüncesini açıklama fırsatı vermiştir.

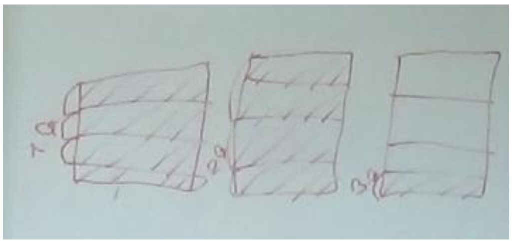
4.2.2.1.5.3. Öğrencinin oluşturduğu modeli anlama ve açıklama. Tüm öğretmen adayları öğrencilerin oluşturdukları modelleri anlamışlardır.

İlker öğrencinin doğal sayının kesre bölümüne yönelik oluşturduğu temsili anlamış ve öğrencinin oluşturduğu temsilin açıklamasını yapmıştır. Şekil 4.72'de öğrencinin $4 \div \frac{1}{2}$ işlemi için oluşturduğu temsil yer almıştır.



Şekil 4.72. Öğrencinin $4 \div \frac{1}{2}$ işlemi için oluşturduğu temsil, (İlker- kesirlerle bölme ders gözlemi)

İlker dersinde son olarak öğrencilere "Ayşe'nin $2\frac{1}{4}$ litre sütü vardır. Her buzdolabına $\frac{3}{4}$ litre süt koyduğuna göre kaç tane buzdolabına koyabilir?" problemini yöneltmiştir. İlker öğrencilere temsillerini oluşturma fırsatı vermiş, sınıfta dolaşarak öğrencilerin yaptıklarını incelemiştir. Öğrencilerden bir tanesine temsilini tahtada gösterme fırsatı vermiştir. Çarpma işleminde kesirlerin çarpımı için ayrı temsiller oluşturan öğrenci kesirlerde bölme işleminde yine iki kesir için farklı modeller kullanmıştır. Üç eş parça için bir dolap kullanıldığını düşünen öğrenci $2\frac{1}{4}$'lik kısımlar içinde kaç üç parça olduğunu saymıştır. Öğrencinin temsilinin ardından İlker öğrencinin oluşturduğu temsili sınıfa anlatmıştır. Öğrencinin "Ayşe'nin $2\frac{1}{4}$ litre sütü vardır. Her buzdolabına $\frac{3}{4}$ litre süt koyduğuna göre kaç tane buzdolabına koyabilir?" problemi için oluşturduğu temsil Şekil 4.73'teki gibidir.



Şekil 4.73. Öğrencinin $2\frac{1}{4} \div \frac{3}{4}$ işlemini alan modeli ile temsili, (İlker- kesirlerle bölme ders gözlemi)

Cemil bölmenin ölçme anlamı hatırlandıktan sonra öğrencilere "Birbirine eşit altı adet çikolata herkes $\frac{1}{2}$ adet yiyecek şekilde dağıtılıyor. Kaç kişi çikolata yemiş olur?" problemini yöneltmiştir. Cemil öğrencilerden bir tanesine tahtada yapması için söz hakkı vermiştir. Öğrenciye "Sen o zaman altı tane çikolata mı çizeceksin?" diye sorarak hem öğrencinin düşüncesini ortaya çıkarmak istemiş hem de öğrenciyi yönlendirmek istemiştir. Öğrenci altı bütün çizmiş, her bütünü ikiye ayırmış ve her yarımı $\frac{1}{2}$ kişinin yiyeceğinden hareketle 12 kişinin bu çikolatadan yiyebileceğini ifade etmiştir. Cemil burada öğrencinin düşüncesini anlamış, anlamayan öğrenciler olduğunu düşünerek de şu şekilde izah edilebileceğini söylemiştir:

> *Altı tane olduğu için 12'dir. Güzel. Şöyle de izah edebiliriz arkadaşlarınıza. Belik anlamayanlar olmuş olabilir. Mesela bir kişi yedi değil mi çikolatayı? Bir kişi yemiş olsun. Birinci kişi bunu yedi artık. Bu artık yok, bunu sildik. Şimdi ikinciye geçtik. Bunu yedi. Üç…Bu şekilde sayarak da yine kaçı elde ederiz arkadaşlar?* (Cemil- kesirlerle bölme ders gözlemi)

Cemil "Ayşe annenin elinde $\frac{1}{2}$ litre süt vardır. Ayşe anne bu sütü ikiz bebeklerine eşit miktarda içireceğine göre bir bebeğine kaç litre süt içirmiş olur?" problemi için öğrencinin oluşturduğu temsili şu şekilde açıklamıştır:

> *Yani elindeki mesela öncelikle bir litrelik bir şişe aldı arkadaşınız. O bir litrelik şişeyi yan çevirmiş ama olsun (yatay çizdiği için). Bir litrelik bir şişe. Yarısı süt ile dolu. $\frac{1}{2}$ litre süt vardı. Ee şimdi iki tane çocuğu var, bebeği var. İkisine eşit miktarda vereceğine göre dediği gibi arkadaşınızın bu yarısını ikiye ayırarak, ikiye ayırarak ne yaptı? Bir bebeğin içeceği süt miktarını buldu. Yani $\frac{1}{4}$. Evet, güzel.*

Cemil'in burada öğrencinin oluşturduğu temsili anladığı ve öğrencilere de temsilin nasıl yapıldığını açıkladığı görülmektedir.

4.2.2.1.5.4. Öğrencileri farklı modeller oluşturmaya teşvik etme. Tüm öğretmen adayları derslerinde sadece alan modeline yer vermiş ve öğrencileri farklı bir model ile temsil etmeye yönlendirmemişlerdir. Aynı zamanda bir problemde sadece bir öğrencinin temsili incelenmiştir. İlker ve Cemil verilen problemler model ile temsil edildikten sonra öğrencilerden problemi ortak payda algoritması ve ters çevir-çarp algoritması ile de temsil etmelerini istemiştir.

4.2.2.2. Öğretmen adaylarının kesirlerle bölme işleminde model kullanımına yönelik matematiksel temsiller bilgisi. Bu kısımda PAB'ın matematiksel temsiller bileşenine ilişkin bulgulara odaklanılmıştır. Öğretmen adaylarından iki tanesi verdikleri problemlerin sonucunun model yardımı ile bulunmasını isterken iki öğretmen adayı ise model ile sonucun bulunmasının ardından bir de ters çevir-çarp algoritması ve ortak payda algoritması kullanarak sonucun bulunmasını istemişlerdir. Bu nedenle öğretmen adaylarının model kullanım bilgileri incelenirken "Bölme işlemi yapmanın bir yolu olarak model kullanımı" ve "Ters çevir-çarp algoritmasını keşfettirmek amaçlı model kullanımı" olmak üzere iki kategori oluşturulmuştur. Her öğretmen adayının doğal sayı ile kesrin bölümünde ve iki kesrin bölümünde hangi modelleri kullandıkları ve model kullanımında neye dikkat ettikleri Tablo 4.7'de özetlenmiştir. Tablonun devamında öğretmen adaylarının her birinin model kullanım bilgileri ayrı ayrı ele alınmıştır. Öğretmen adaylarının derslerinden, ders planlarından ve hazırlamış oldukları ders notlarından kesitler verilerek veriler örneklendirilmiş ve desteklenmiştir.

Tablo 4.7'de öğretmen adaylarının kesirlerle bölme işleminde model kullanımına yönelik matematiksel temsiller bilgisi bileşenine ait verilerin analizi sunulmuştur.

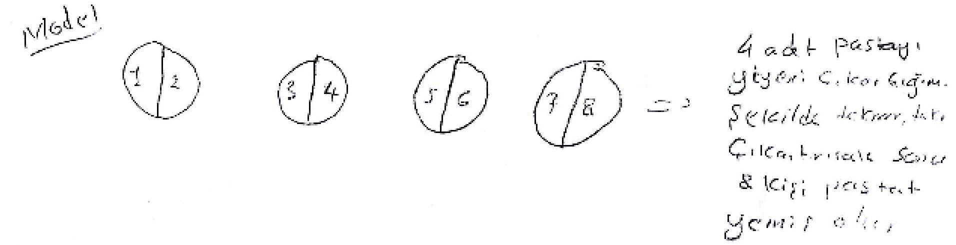
Tablo 4.7

Öğretmen Adaylarının Kesirlerle Bölme İşleminde Model Kullanımına Yönelik Matematiksel Temsiller Bilgisi Bileşenine Ait Bulgular

Kategoriler			Gerçekleştiren Ö.A.	Yaklaşım
Bölme İşlemi Yapmanın Bir Yolu Olarak Model Kullanımı	Doğal sayının kesre bölümünde	Alan modeli	İlker Cemil	• Doğal sayı kadar bütünü kesrin paydası kadar eş parçaya ayırma • Pay kadar kaç eş parça olduğunu sayma (bölmenin ölçme anlamı) • Pay kadar parça bir tam olarak kabul ediliyor • Tekrarlı çıkarma kullanma (Cemil)
	Kesrin doğal sayıya bölümünde	Alan modeli	İlker Cemil	• Kesri payda kadar eş parçaya ayırma ve pay kadar parçayı seçme • Oluşan her bir eş parçayı doğal sayı kadar parçaya bölme • Elde edilen toplam parça sayısını doğal sayıya bölerek elde edilen parçanın ne kadar yaptığını bulmada bütünün içinde kaç parça olduğuna dikkat etme (bölmenin parçalara ayırma anlamı)
	İki kesrin bölümünde	Alan modeli	İlker Cemil	• Bütünü bölünen kesrin paydası kadar eş parçaya ayırma, payı kadarını seçme • Oluşan taralı alanda bölen kesirden ne kadar olduğunu bulma (bölmenin ölçme anlamı)
Ters çevir-çarp algoritmasını keşfettirmek amaçlı model kullanımı	Doğal sayının kesre bölümünde	Alan modeli	İpek Hale	• Doğal sayı kadar bütünü kesrin paydası kadar eş parçaya ayırma • Pay kadar kaç eş parça olduğunu sayma (bölmenin ölçme anlamı) Pay kadar parça bir tam olarak kabul ediliyor
	Kesrin doğal sayıya bölümünde	Alan modeli	Hale	• Kesri payda kadar eş parçaya ayırma ve pay kadar parçayı seçme • Oluşan her bir eş parçayı doğal sayı kadar parçaya bölme • Elde edilen toplam parça sayısını doğal sayıya bölerek elde edilen parçanın ne kadar yaptığını bulmada bütünün içinde kaç parça olduğuna dikkat etme (bölmenin parçalara ayırma anlamı)
	İki kesrin bölümünde	Alan modeli	Hale	• Bütünü bölünen kesrin paydası kadar eş parçaya ayırma, payı kadarını seçme • Oluşan taralı alanda bölen kesirden ne kadar olduğunu bulma (bölmenin ölçme anlamı)

4.2.2.2.1. Öğretmen adaylarının doğal sayının kesre bölümünde alan modeli kullanımına yönelik matematiksel temsiller bilgisi. Tüm öğretmen adayları derslerinde doğal sayının kesre bölümünde alan modeli kullanımına yer vermişlerdir.

İlker derste öğrencilere bölmenin anlamını hatırlattıktan sonra "Birbirine eşit dört adet pasta herkes $\frac{1}{2}$ adet yiyecek şekilde dağıtılıyor. Kaç kişi pasta yemiştir.?" probleminin çözümünün model kullanılarak bulunmasını istemiştir. Öğrencilerden bir tanesine söz hakkı vermiştir. Öğrenci dört bütün almış ve bu bütünleri ikiye ayırmıştır. Her bir bütündeki bir parçayı bir kişinin yiyeceği pasta olarak alarak sekiz kişinin pasta yiyeceğini bulmuştur. İlker öğrencinin bu temsilini anlamış ve başka bir yönlendirmede bulunmamıştır. Bu durum İlker'in doğal sayının kesre bölümünde alan modeli kullanımına yönelik matematiksel temsiller bilgisini göstermiştir. İlker hazırlamış olduğu ders notlarında da öğrencinin oluşturduğu şekilde bir temsile yer vermiştir. İlker'in "Birbirine eşit dört adet pasta herkes $\frac{1}{2}$ adet yiyecek şekilde dağıtılıyor. Kaç kişi pasta yemiştir.?" problemi için oluşturduğu temsil Şekil 4.74'te yer almıştır.



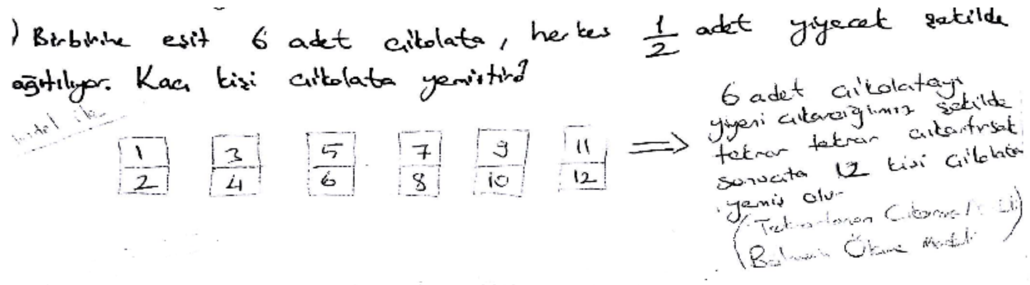
Şekil 4.74. İlker'in "Birbirine eşit dört adet pasta herkes $\frac{1}{2}$ adet yiyecek şekilde dağıtılıyor. Kaç kişi pasta yemiştir.?" problemi için oluşturduğu temsil, (Kesirlerle bölme ders notu)

İpek derste öğrencilere bir çalışma kâğıdı dağıtmıştır. Çalışma kağıdının ilk sayfasında doğal sayının kesre bölümüne yönelik sorular, ikinci sayfada ise kesrin kesre bölümüne yönelik sorular yer almıştır. Derste süresi yetmediği için sadece doğal sayının kesre bölümüne yönelik sorular üzerinde durabilmiştir. İki kurabiyeden $\frac{1}{2}$ kurabiyelik kaç porsiyon çıkacağı sorusunda İpek öğrencilere $\frac{1}{2}$'in ne anlama geldiğini sormuştur. Öğrencilerden kelime anlamını düşünmelerini istemiştir. Öğrenciler bir bütünün yarısı olduğunu ifade etmişlerdir. Bir kurabiyeden yarımşar yarımşar kaç porsiyon çıkacağından hareketle iki kurabiyeden kaç porsiyon çıkacağını buldurmak istemiştir. Aslında sorduğu şeyin "Bir kurabiyenin içinde kaç tane yarım var? sorusu olduğunu söylemiştir. Bütünlerde kaç yarım parça olduğu sayılarak sonuç elde edilmiştir. İpek derste üç ve altı kurabiyeden $\frac{3}{4}$'lük kaç porsiyon çıkabileceği soruları üzerinde duramamıştır. Dersten sonra öğrencilerin çalışma kağıtlarını incelerken kullandığı ifadeler ile bu sorunun çözümüne yönelik bilgilerine ulaşılmış ve İpek'in doğal sayının kesre bölümünde "doğal sayı kadar bütünü kesrin paydası kadar eş parçaya ayırma, bu eş parçalardan pay kadar kaç parça olduğunu bulma ve bir tam olarak kesrin payını alma" bilgisine sahip olduğu görülmüştür.

Cemil bölmenin anlamını hatırlattıktan sonra doğal sayıyı kesre bölmeyi gerektirecek bir problem yazdırmıştır. Öğrencilerden bu problem için model kullanmalarını istemiştir. Öğrencilerden bir tanesini seçerek tahtaya kaldırmıştır. Öğrenci soruda birbirine eşit altı adet çikolata ifadesi geçtiği için altı bütün oluşturmuş ve herkes $\frac{1}{2}$ adet yiyeceği için de her bütünü ikiye ayırmıştır. Herkes iki parçanın bir çarpasını yiyeceği için $\frac{1}{2}$'lik kaç parça olduğunu sayarak 12 sonucunu elde etmiştir. Cemil öğrencinin temsilini anlamış ve öğrencilere bir kez de kendisi anlatmıştır. Cemil kendisi anlatırken tekrarlı çıkarma kullanmıştır. Derste kullandığı bu açıklama Cemil'in doğal sayının kesre bölümünde alan modeli kullanımına yönelik matematiksel temsiller bilgisini göstermiştir. Cemil bu soruyu derste öğrencilere şu şekilde izah etmiştir:

> *Altı tane olduğu için 12'dir. Güzel. Şöyle de izah edebiliriz arkadaşlarınıza. Belki anlamayanlar olmuş olabilir. Mesela bir kişi yedi değil mi çikolatayı? Bir kişi yemiş olsun. Birinci kişi bunu yedi artık. Bu artık yok, bunu sildik. Şimdi ikinciye geçtik, bunu yedi. Üç… Bu şekilde sayarak da yine kaç elde ederiz arkadaşlar?* (Cemil- Kesirlerle bölme ders gözlemi)

Cemil hazırlamış olduğu notlarda da yine tekrarlı çıkarma kullandığı belirtecek şekilde bir temsile yer vermiştir. Cemil'in bu soru için oluşturduğu temsil Şekil 4.75'teyer almıştır.

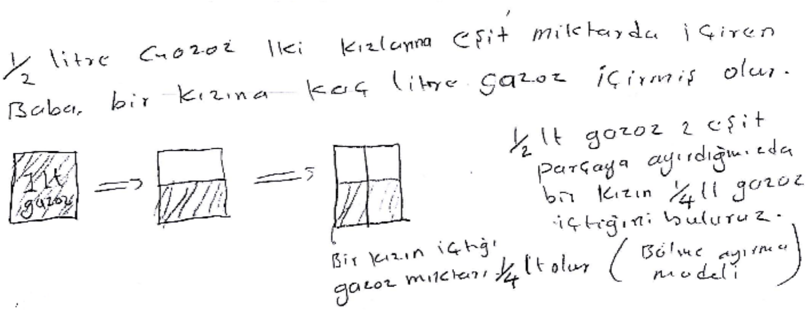


Şekil 4.75. Cemil'in "Birbirine eşit altı adet çikolata herkes $\frac{1}{2}$ adet yiyecek şekilde dağıtılıyor. Kaç kişi çikolata yemiş olur?" problemi için oluşturduğu temsil, (kesirlerle bölme ders notu)

Hale dersinde doğal sayının kesre bölümüne yönelik olarak iki kurabiyeden $\frac{1}{2}$ kurabiyelik kaç porsiyon çıkacağını ve iki kurabiyeden $\frac{3}{4}$'lük kaç porsiyon çıkacağını öğrencilerden model ile bulmalarını istemiştir. Burada öğrencileri önce kurabiyeyi temsil etmek üzere bütünleri oluşturmaları ve sonra bütün içinden kaç porsiyon çıkacağını bulmak için bütünü kesrin paydasına göre eş parçaya ayırma ve bu eş parçalardan içinde kesrin payı kadar kaç parça olduğunu bulmaya yönlendirmiştir. İki kurabiyeden $\frac{3}{4}$'lük kaç porsiyon çıkacağı sorusunda öğrenci iki bütün almış ve bu bütünleri dörde bölmüştür. Hale'nin bir porsiyonun $\frac{3}{4}$ olduğunu söylemesi üzerine öğrenci her iki bütündeki üç eş parçayı bir porsiyon olarak almış ve iki bütünde kalan bir parçanın (yani toplan iki parça) yarım porsiyon yaptığını söylemiştir. Öğrenci burada bütünün dört eş parçaya ayrılmış olması nedeni ile iki parçanın yarım porsiyon yaptığını düşünmüştür. Hale iki parça olduğunu bir parça daha olsaydı bir porsiyon yapacağını, bu nedenle de $\frac{2}{3}$ porsiyon yaptığını söylemiştir. Hale'nin ifadeleri doğal sayının kesre bölümünde alan modeli kullanımına yönelik matematiksel temsiller bilgisini göstermiştir.

4.2.2.2.2. Öğretmen adaylarının kesrin doğal sayıya bölümünde alan modeli kullanımına yönelik matematiksel temsiller bilgisi. Cemil ve Hale dersinde kesrin doğal sayıya bölünmesini gerektirecek probleme de yer verirken İlker ise sadece hazırlamış olduğu notlarda yer vermiştir.

İlker hazırlamış olduğu notlarda öğrencilerden $\frac{1}{2} \div 2$ işlemine yönelik bir problem kurmalarını isteyeceğini belirtmiştir. Kendisi "$\frac{1}{2}$ litre gazozu iki kızına eşit miktarda içiren baba, bir kızına kaç litre gazoz içirmiş olur?" problemini oluşturmuştur. İlker'in $\frac{1}{2} \div 2$ işlemine yönelik oluşturduğu temsil kesrin doğal sayıya bölümünde alan modeli kullanımına yönelik matematiksel temsiller bilgisini göstermiştir. Şekil 4.76'da İlker'in oluşturduğu problem için temsili yer almıştır.

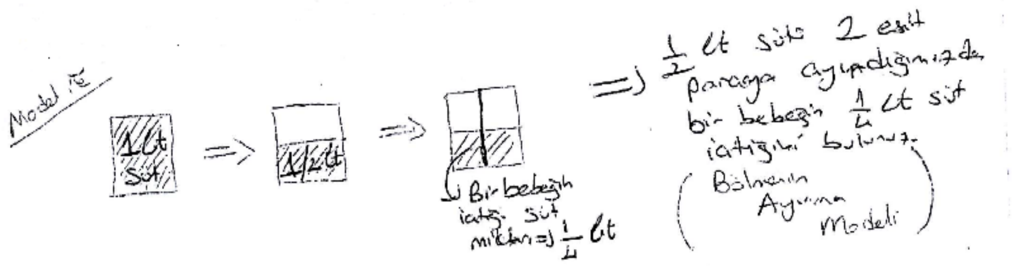


Şekil 4.76. İlker'in "$\frac{1}{2}$ litre gazozu iki kızına eşit miktarda içiren baba, bir kızına kaç litre gazoz içirmiş olur?" problemi için oluşturduğu temsil, (kesirlerle bölme ders notu)

Cemil derste öğrencilerden $\frac{1}{2} \div 2$ işlemine yönelik bir problem kurmalarını istemiştir. Öğrencilerin oluşturduğu problemleri dinledikten sonra "Ayşe annenin elinde $\frac{1}{2}$ litre süt vardır. Ayşe anne bu sütü ikiz bebeklerine eşit miktarda içireceğine göre bir bebeğine kaç litre süt içirmiş olur?" problemini yazdırmıştır. Öğrencilerden bir tanesine modelini tahtada oluşturması için söz hakkı vermiştir. Öğrenci bütünü önce ikiye ayırmış ve bunun Ayşe annenin elindeki süt olduğunu ifade etmiştir. Ardından bir bebeğine verebilmesi için ikiye bölmesi gerektiğini ifade ederek oluşturduğu temsili bir daha ikiye bölmüş ve $\frac{1}{4}$ sonucunu elde etmiştir. Cemil öğrencinin oluşturduğu temsili öğrencilere bir kez daha anlatmıştır. Cemil'in ifadeleri kesrin doğal sayıya bölümünde alan modeli kullanımına yönelik matematiksel temsiller bilgisini yansıtmıştır. Cemil derste öğrencinin oluşturduğu temsili şu şekilde açıklamıştır:

> *Neresi $\frac{1}{2}$ yapıyor? Hee, orası ve orası da (öğrenci gösteriyor). Onun ikisi de $\frac{1}{2}$'yi temsil ediyor. Evet güzel değil mi? Yani elindeki mesela öncelikle bir litrelik bir şişe aldı arkadaşınız. O bir litrelik şişeyi yan çevirmiş ama olsun (yatay çizdiği için). Bir litrelik bir şişe. Yan çevirince bu süt böyle mi durur tabi o da tartışılır. Önemsiz bu. Yarısı süt ile dolu. $\frac{1}{2}$ litre süt vardı. Ee şimdi iki tane çocuğu var, bebeği var. İkisine eşit miktarda vereceğine göre dediği gibi arkadaşınızın bu yarısını ikiye ayırarak, ikiye ayırarak ne yaptı? Bir bebeğin içeceği süt miktarını buldu. Yani $\frac{1}{4}$. Evet, güzel.* (Cemil-kesirlerle bölme ders gözlemi)

Cemil hazırlamış olduğu ders notlarında da bu problem için öğrencinin oluşturduğu şekilde bir temsile yer vermiştir. Cemil'in oluşturduğu temsil Şekil 4.77'de yer almıştır.

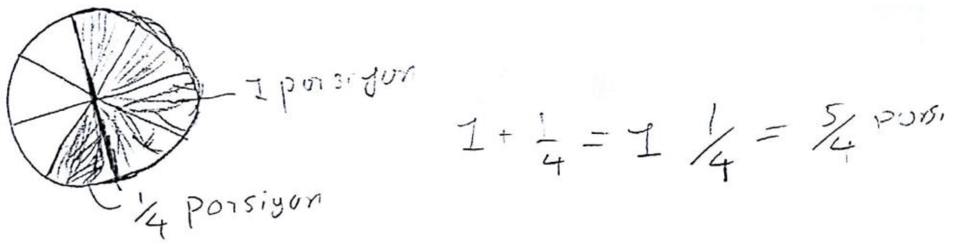


Şekil 4.77. Cemil'in "Ayşe annenin elinde $\frac{1}{2}$ litre süt vardır. Ayşe anne bu sütü ikiz bebeklerine eşit miktarda içireceğine göre bir bebeğine kaç litre süt içirmiş olur?" problemi için oluşturduğu temsil, (kesirlerle bölme ders notu)

Hale doğal sayılarda bölme işlemini model ile temsil ettikten sonra kesrin doğal sayıya bölünmesini gerektiren "Ayşe'nin üç tane evi var. Temizliğini $1\frac{1}{4}$ saatte yapıyor. Bir tane evin temizliğini ne kadar saatte yapar?" problemini sormuştur. Öğrencilere düşünmeleri için zaman tanımıştır. Bu esnada öğrencilerin oluşturdukları temsilleri inceleyerek yönlendirmelerde bulunmuştur. Hale öğrencileri önce kesri model ile temsil edecek, ardından oluşturdukları temsili üçe bölecek şekilde yönlendirmiştir. Öğrencilerin yerlerinde model ile temsil etmeye çalışmalarının ardından bir öğrenciyi tahtaya kaldırmıştır. Hale kendisi burada $1\frac{1}{4}$ kesrini alan modeli ile temsil etmiştir. Oluşan temsilin üç evin temizliği olduğunu bir evin temizliğini bulmak için üçe bölmek gerektiğini söylemiştir. Nasıl üçe bölüneceğini sormuş ve öğrencinin cevabını beklemeden her bir parçayı üçe böleceğini ifade etmiştir. $1\frac{1}{4}$ kesrini ifade eden beş eş parça üç parçaya daha ayrılarak 15 eş parça elde edilmiştir. Bu 15 eş parça üç evin temizliği olduğu için öğrenci 15'i üçe bölerek bir evin temizliğini bulmuştur. Fakat öğrenci üçe bölerek elde ettiği bu beş parçanın $\frac{5}{15}$ olduğunu söylemiştir. Hale beş eş parçayı ayrı şekilde çizerek öğrenciye bu parçaların ne kadarlık parçalar olduğunu söylemiştir. Öğrenci toplam 15 parça olduğu için bu beş parçanın $\frac{5}{15}$ olduğunu düşünmüştür. Hale öğrenciye bütünü kaç eş parçaya böldüklerini hatırlatarak öğrencinin $\frac{5}{12}$ sonucunu elde etmesini sağlamıştır. Hale'nin oluşturduğu temsil ve yaptığı açıklamalar onun kesrin doğal sayıya bölümünde alan modeli kullanımına yönelik matematiksel temsiller bilgisini yansıtmıştır.

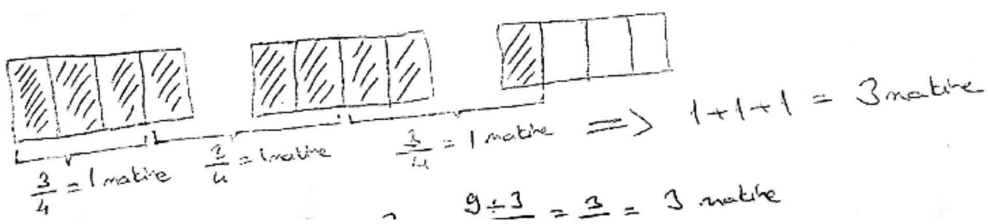
4.2.2.2.3. Öğretmen adaylarının iki kesrin bölümünde alan modeli kullanımına yönelik matematiksel temsiller bilgisi. İpek hariç tüm öğretmen adayları derslerinde iki kesrin bölümünün model ile temsilinde alan modeli kullanımına yer vermişlerdir. İpek öğrenciler doğal sayının kesre bölümünü anlamakta zorlandıkları için iki kesrin bölümünün model ile temsiline geçememiştir.

İlker doğal sayının kesre bölümüne yönelik bir problem yazdırdıktan sonra iki kesrin bölümüne yönelik olan "Bir porsiyon $\frac{1}{2}$ kurabiyedir. $\frac{5}{8}$ kurabiyeden kaç adet porsiyon elde ederiz?" problemini yazdırmıştır. Öğrencilerden bir tanesine temsilini tahtada oluşturması için söz hakkı vermiştir. Öğrencinin model ile temsilde zorlanmasının ardından kendisi modeli oluşturarak öğrenciden kendisini dinlemesini istemiştir. İlker önce $\frac{5}{8}$ kesrini daire üzerinde daireyi sekiz eş parçaya ayırıp beş eş parçasını seçecek şekilde temsil etmiştir. Bu taralı kısım içinde kaç tane $\frac{1}{2}$ olduğunu aradığını söylemiştir. Burada dört eş parça kesrin yarısını temsil ettiği için bir porsiyon olarak alınmıştır. Geri kalan bir parça bir porsiyonun dört parçadan oluşması nedeni ile $\frac{1}{4}$ porsiyon olarak alınmıştır. İlker'in problem için oluşturduğu temsili ve yaptığı açıklamaları iki kesrin bölümünde alan modeli kullanımına yönelik matematiksel temsiller bilgisini yansıtmıştır. İlker hazırlamış olduğu notlarda derste anlattığı şekilde bir temsil kullanmıştır. İlker'in bu problem için oluşturduğu temsil Şekil 4.78'de yer almıştır.



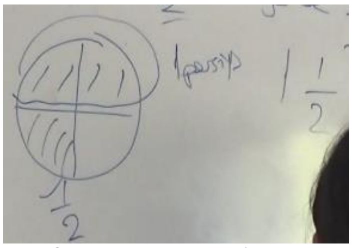
Şekil 4.78. İlker'in "Bir porsiyon $\frac{1}{2}$ kurabiyedir. $\frac{5}{8}$ kurabiyeden kaç adet porsiyon elde ederiz?" problemi için oluşturduğu temsil, (kesirlerle bölme ders notu)

Cemil dersinde iki kesrin bölümüne yönelik olarak "Ebru'nun $2\frac{1}{4}$ litre deterjanı vardır. Her makineye $\frac{3}{4}$ litre deterjan koyduğuna göre kaç makine doldurabilir?" problemini yazdırmıştır. Ders süresi bittiği için bu sorunun çözümünü model kullanarak kendisi oluşturmuştur. Önce birbirine eşit iki tam çizeceğini, sonra bir de dörtte biri göstereceğini söylemiştir. Her makine $\frac{3}{4}$ litre deterjan aldığı için bütünleri de dört parçaya ayırmış ve içinde kaç üç parça olduğunu aramıştır. Cemil hazırlamış olduğu notlarda da aynı şekilde bir gösterime yer vermiştir. Cemil'in bu soru için oluşturduğu temsil Şekil 4.79'da yer almıştır.



Şekil 4.79. Cemil'in "Ebru'nun $2\frac{1}{4}$ litre deterjanı vardır. Her makineye $\frac{3}{4}$ litre deterjan koyduğuna göre kaç makine doldurabilir?" problemi için oluşturduğu temsil, (kesirlerle bölme ders notu)

Hale iki kesrin bölümüne yönelik olarak öğrencilere $\frac{3}{4}$ kurabiyeden $\frac{1}{2}$porsiyonluk kaç kurabiye çıkacağını sormuştur. Öğrencilerden bir tanesine söz hakkı vermiştir. Öğrenci önce porsiyonu temsil eden kurabiyeyi temsil etme yoluna gitmiştir. Hale öğrenciyi önce kurabiyeyi çizmesi yönünde yönlendirmiş ve öğrencinin ikiye ayırdığı bütünü dört eş parçaya ayırmıştır. Dört eş parçadan üç eş parçayı tarayarak soruda geçen kurabiyeyi temsil ettiğini ifade etmiştir. Hale'nin bir porsiyonun $\frac{1}{2}$ kurabiye aldığını söylemesi üzerine öğrenci "yarısı" ifadesini kullanmıştır. Bunun üzerine Hale "Şurası bir porsiyon yapmaz mı?" diye sorarak model üzerinde iki eş parçayı seçmiştir. Geri kalan bir parçanın da yarımın yarısı olması nedeni ile $\frac{1}{2}$ porsiyon yaptığı belirtilmiştir. Şekil 4.80'de bu soru için oluşturulan temsil yer almıştır.



Şekil 4.80. $\frac{3}{4}$ kurabiyeden $\frac{1}{2}$porsiyonluk kaç kurabiye çıkacağını bulmada kullanılan temsil, (Hale, kesirlerle bölme ders gözlemi)

Öğretmen adaylarının kesirlerle çarpma ve bölme işlemlerine yönelik derslerinin gözlemlenmesi, ders planlarının ve hazırlamış oldukları ders notlarının incelenmesi sonucu öğrenci bilgilerinin orta düzeyde olduğu, matematiksel temsiller bilgisine bakıldığında ise özellikle alan modeline yönelik bilgilerinin yeterli düzeyde olduğu görülmüştür. Öğretmen adayları tarafından oluşturulmuş uzunluk modelleri ve küme modelleri de bu modellere yönelik yeterli düzeyde matematiksel temsiller bilgisine sahip olduklarını göstermiştir. Genel olarak bakıldığında öğretmen adaylarının PAB'larının orta düzeyde olduğu ortaya çıkmıştır.

4.3. Öğretmen Adaylarının Kesirlerle Çarpma ve Bölme İşlemlerinde Model Kullanımına Yönelik AB'lerini Öğretime Nasıl Yansıttıklarına İlişkin Bulgular ve Yorum

Araştırmanın birinci alt problemi bağlamında öğretmen adaylarının kesirlerle model kullanımına yönelik AB'leri incelenmiştir. İkinci alt problem bağlamında ise öğretmen adaylarının kesirlerle çarpma ve bölme işlemlerinde model kullanımına yönelik PAB'larının nasıl olduğu incelenmiştir. Bu kısımda ise öğretmen adaylarının AB görüşme formunda yer alan sorulara verdikleri cevaplar ile elde edilen AB'lerini öğretime nasıl yansıttıkları ele alınmıştır. Öğretmen adaylarının AB'lerini öğretimlerine nasıl yansıttıkları incelendiğinden her bir öğretmen adayı ayrı ayrı ele alınmıştır. Bulguların ortaya konmasında AB görüşme formundan ve ders gözlemlerinden elde edilen veriler kullanılmıştır.

4.3.1. Öğretmen Adaylarının Kesirlerle Çarpma İşlemlerinde Model Kullanımına Yönelik AB'lerini Öğretime Nasıl Yansıttıklarına İlişkin Bulgular ve Yorum

Öğretmen adaylarının AB'lerini kesirlerle çarpma işlemini model kullanarak işledikleri derslerine nasıl yansıttıklarını incelemek için AB görüşme formunun altıncı ve yedinci sorularından elde edilen veriler ile ders gözlemlerinden elde edilen veriler kullanılmıştır. Her bir öğretmen adayı ayrı ayrı ele alınmıştır. Öğretmen adaylarının AB görüşme formuna verdikleri cevaplardan ve derslerinden kesitler verilerek veriler desteklenmiş ve örneklendirilmiştir.

4.3.1.1. İlker'in kesirlerle çarpma işleminde model kullanıma yönelik AB'sinin öğretimine yansıması. AB görüşme formunda öğretmen adaylarından $\frac{2}{5} \times 10$ işlemini model kullanarak göstermeleri istenmiştir. İlker 10 eş daire almış ve her bir daireyi beş eş parçaya ayırıp iki parçasını tarayarak $\frac{2}{5}$ kesrini temsil etmiştir. İlker parçaların eş parçalar olmasından hareketle taralı kısımları bir araya getirerek bütüne tamamlamaya çalışmıştır. İlker'in bu işlemi alan modeli ile nasıl gösterdiğine yönelik bir kesit aşağıdaki gibidir:

Araştırmacı: *Tamam 10 tane çizdin $\frac{2}{5}$. Peki bunun sonucunu nasıl buldun sen şimdi?*

İlker: *10 tane $\frac{2}{5}$'yi topluyorum.*

Araştırmacı: *Tamam topla. Nasıl topladın şimdi?*

İlker: *Tamam topluyorum. Diyorum ki şöyle olacak;(alta bir daire daha çizdi)*

İşte ikisini aldım buradan (ilk model), bu ikisini alıp buraya koydum (ikinci modelden), işte buradan bir tane aldım (üçüncü modelden). Tekrar bir boşluk çizeyim (boş bir daire çizmeyi kastediyor). Bir tanesini aldım yerleştirdim burada (üçüncü modeldeki kalan diğer taralı kısım). Diğer ikisini aldım (dördüncü modelden) yerleştiriyorum, bunun ikisini aldım (beşinci model) yerleştiriyorum. Bir tane daha boşluk yapayım. İkisini aldım (altıncı modelden), ikisini aldım (yedinci modelden), bir aldım (sekizinci modelden). (Yeni bir model çizdi) birini alıyorum (sekizinci modelden), ikisini alıyorum (dokuzuncu modelden), burasının da ikisini aldığımda (onuncu modelden) bunların toplamı dört tam oluyor demek ki. (AB görüşme formu -6. Soru)

İlker dersinde doğal sayı ile kesrin çarpımına yönelik "Altı öğrenci kişi başı bir pastanın $\frac{2}{3}$'sini yediklerine göre toplam kaç pasta yemişlerdir?" probleminin çözümünün model kullanılarak yapılmasını istemiştir. Öğrencilerden bir tanesine söz hakkı vererek tahtaya kaldırmıştır. Öğrenci altı bütün çizmiş ve her bir bütünde $\frac{2}{3}$ kesrini temsil etmiştir. Bütündeki tüm parçaların eş olduğu bilgisine sahip olan İlker öğrencinin oluşturduğu temsil sonucunda bütünün eş parçalardan oluşmadığını görmüş ve öğrenciyi uyarmıştır. Öğrenci her bir bütünde $\frac{2}{3}$ kesrini temsil ettikten sonra nasıl bulduğuna dair bir açıklama yapmadan sonucun dört olduğunu söylemiştir. Ardından İlker öğrencinin oluşturduğu temsili, AB görüşme formunda yaptığı şekilde, parçaların eş olmasından hareketle bütüne tamamlamaya çalışmıştır. İlker'in ifadeleri şu şekildedir:

> *Arkadaşınız diyor ki ekleyerek şöyle bir şey yaparım mesela (eş parçalar olduğu için taralı olmayan kısımlara taralı kısımları taşıyarak bütünler haline getirmeye çalışıyor). Şöyle bir şey oldu; Bir kişi $\frac{2}{3}$ yemişti. Bir kişi burada yedi değil mi, ikinci kişi burada, ikisini yedi ikinci kişi. Değil mi? Üçüncü kişi ise bu kadar yedi. Dördüncü kişi bu kadar yedi. Beşinci kişi bu kadar yedi. Altıncı kişi bu kadar yedi. Toplam kaç tane pasta var burada?* (İlker-kesirlerle çarpma ders gözlemi)

AB görüşme formunda İlker $\frac{2}{3} \times \frac{4}{5}$ işlemini alan modeli ile temsil etmiştir. Bütün üzerinde önce $\frac{2}{3}$ kesrini göstermiştir. Bu temsil sonucu oluşan taralı alanın artık yeni bütün olduğunu ve bunun $\frac{4}{5}$'ünü alacağını belirtmiştir. İlk temsil sonucu beş eş parça oluşmadığı için dikey olarak parçalara ayırdığı bütünü yatay olarak üç eş parçaya ayırmış ve dört eş parçasını seçmiştir. İlker böylece sekiz eş taralı parça elde etmiştir. Bütünün toplam 15 eş parçadan oluşması nedeni ile bu sekiz parçanın bütünün $\frac{8}{15}$'i olduğunu ifade etmiştir. İlker derste iki kesrin çarpımına yönelik $\frac{3}{4} \times \frac{1}{3}$, $\frac{3}{5} \times \frac{2}{3}$ işlemleri kullanılarak çözülebilecek iki problem ve $2\frac{1}{2} \times \frac{3}{5}$ işlemini vermiştir. İlker bu işlemlerin çözümünün model kullanılarak bulunmasını istemiştir. Her üç soru için de tahtaya kalkan öğrenciler iki kesri farklı modeller üzerinde temsil etmiş ve çarpma işlemi yapıyor gibi modeller arasına çarpma işareti koymuştur. Öğrencilerin oluşturduğu temsillerden sonra İlker işlemleri alan modeli kullanarak bir de kendisi temsil etmiştir. İlker temsili gerçekleştirirken payda kadar eş parçaya ayırma ve payı kadarını seçme bilgisini kullanmıştır. Ardından oluşan taralı kısımları yeni bütün olarak ele alıp, bu bütünler de ikinci kesrin paydası kadar eş parçadan oluştuğu için bu eş parçalardan pay kadar parçayı seçmiştir. Sonucu ifade ederken elde edilen parçanın en baştaki bütünün kaçta kaçı olduğuna dikkat etmiştir. İlker AB görüşme formunda yer alan yedinci soruda da önce $1\frac{1}{2}$ kesrinin gösterildiğini, ardından bu kısmın yeni bütün olarak alınıp oluşan üç parçadan ikisi alınarak $\frac{2}{3}$kesrinin temsil edildiğini ve bunun sonucunun da bir tam yaptığını ifade etmiştir. Bu bilgiyi öğretimine de yansıtan İlker derste $\frac{3}{4} \times \frac{1}{3}$ işlemine yönelik temsili şu şekilde açıklamıştır:

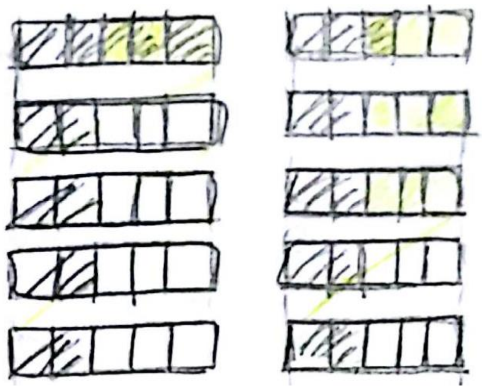
> *Elimizde üç parça var. Bunu bütün olarak düşünecek olursak bunun $\frac{1}{3}$'ini…Kaç tane var? Bir, iki, üç. Şu kadar pizza. Bu pizza elimizdeki, bu kadar pizza. Bu kadar vermiyor muyuz kardeşimize? (üç taralı kısım olduğunu gösteriyor, ve bunun üçte biri bir olduğu için artık bir parçanın kardeşe verildiğini, bütün de dört parçadan oluştuğu için dörtte birin verildiğini anlatıyor.) İşte burada mesela kaç tane var? Üç tane. Üç tane var, birini verdiğimizde kaç tane işte bu olmuyor mu yani, bu dilim olmuyor*

mu? Bu bütün pizzanın kaçta kaçı oluyor? Yani $\frac{1}{4}$i oluyor. Demek ki biz kardeşimizin tüm pizzanın $\frac{1}{4}$'ini yediğini buluyoruz burda. (İlker-kesirlerle çarpma ders gözlemi)

4.3.1.2. İpek'in kesirlerle çarpma işleminde model kullanıma yönelik AB'sinin öğretimine yansıması. İpek AB görüşme formunda yer alan $\frac{2}{5}\times10$ işlemini alan modeli ve küme modeli kullanarak temsil etmiştir. İpek dersinde de yine doğal sayı ile kesrin çarpımını gerektiren problemlerin çözümünde alan modeli ve küme modeli kullanmıştır. AB görüşme formunda $\frac{2}{5}\times10$ işlemini alan modeli ile temsil etmek için 10 eş bütün almış ve her bir bütünde $\frac{2}{5}$ kesrini temsil etmiştir. Ardından parçaların eş olmasından hareketle parçaları bir araya getirerek bütüne tamamlamaya çalışmıştır. İpek bu bilgisini derste model kullanımı ile sonucu elde etmek için öğrencileri yönlendirmede kullanmıştır. İpek AB görüşme formunda bunu şu şekilde ifade etmiştir:

Bunlarla kaç bütün elde edebileceğimi bu parçayı yani şu parçaların diğerlerinin boşluklarını doldurmaya çalışması gibi bir yöntem izleyebiliriz. Bu ikisi buraya gelsin gibi düşünüp bunu yok sayabiliriz. Bu ikisinden bir tanesi burayı doldurursa bir tanesini buraya aktarsak bu da gitti mesela. Bu ikisini buraya aktardık. Şunları, şunları bitirdik. Şuradan devam edelim. İkisini buraya aktardık, bunlar gitti. Şunun biri buraya gitti, biri buraya gitti, bu gitti. Geriye iki parça kaldı. Bunları da buraya aktardığımda dört tam elde edilir. Sonuç dörttür. (İpek-AB görüşme formu- 6. Soru)

Şekil 4.81.'de İpek'in $\frac{2}{5}\times10$ işlemi için oluşturduğu alan modeli temsili yer almıştır.



Şekil 4.81. İpek'in $\frac{2}{5}\times10$ işlemini alan modeli temsili, (AB görüşme formu- 6. Soru)

İpek AB görüşme formunda aynı zamanda toplama işlemi öğrencilerin bildikleri bir şey olduğu için 10 tane $\frac{2}{5}$'nin toplanması ile de sonucun bulunabileceğini ifade etmiştir. İpek dersinde de öğrenci altı tane bütün üzerinde $\frac{2}{3}$ kesrini gösterdikten sonra öğrenciye sonucun model üzerinden görülebildiğini algoritmayı henüz keşfetmedikleri için sonucu oradan bulamayacağını ifade etmiştir. Bunun üzerine öğrenci de altı tane $\frac{2}{3}$'yi toplayarak dört sonucunu elde etmiştir.

AB görüşme formunda İpek $\frac{2}{5}\times 10$ işlemini küme modeli ile temsil etmek için 10 tane sayma nesnesinin $\frac{2}{5}$'si gibi düşünmüş ve beşli iki grup oluşturmuştur. Bu gruplardan da iki tanesini seçerek iki gruptan elde edilen dört nesnenin sonuç olduğunu söylemiştir. İpek dersinde de öğrencileri $24\times\frac{3}{4}$ işlemini küme modeli ile temsil etmeleri için yönlendirmeye çalışmıştır. Öğrencilerin bölmenin anlamı ile bağlantı kurmalarını sağlayarak $24\div 4$ işlemini düşünmelerini istemiştir. Öğrencilerden bir tanesine söz hakkı vermiştir. Öğrenci 24 küçük dikdörtgeni dört sıra halinde yerleştirmiştir. İpek öğrencinin bu temsilinden sonra 24'ün dörde parçalandığını, her bir sıranın bir parça olduğunu "parçalarımızdan biri bu, biri bu, biri bu, biri bu" ifadeleri ile anlatmıştır. Öğrencilere paydanın işlevinin yerine getirildiğimi söylemiş ve artık yapılması gerekenin ne olduğunu sormuştur. Öğrenciler pay kadar almak olduğunu söylemişlerdir. İpek nesneleri kesrin paydası kadar gruba ayırma ve pay kadar grubu seçme bilgisini bu şekilde öğretime yansıtmıştır.

İki kesrin çarpma işleminde ilk kesri temsil edildikten sonra taralı kısmın artık yeni bütün olduğunu bilen İpek bu bilgisini öğretime de yansıtmış ve öğrenciler ilk kesri temsil ettikten sonra artık o kısmın yeni bütün olduğunu ve o kısmın verilen kesir kadarının bulunacağını belirtmiştir. AB görüşme fomunda en son olarak elde edilen taralı kısmın en baştaki bütünün kaçta kaçı olduğuna dikkat eden İpek, çarpma işleminin sonucunu bulurken dersinde de en baştaki bütünü dikkate almıştır. İpek derste $\frac{3}{4}\times\frac{1}{3}$ işlemi kullanılarak çözülebilecek bir problem yazdırmış ve öğrencilerden çözümü model ile bulmalarını istemiştir. Öğrencilerden bir tanesine temsilini oluşturması için söz hakkı vermiştir. Öğrenci önce $\frac{3}{4}$ kesrini temsil etmiştir. İpek yapılan temsil sonucu bunun başlangıç miktarı olduğunu ve soruda $\frac{3}{4}$'ün $\frac{1}{3}$'inin istendiğini belirtmiştir. Öğrenci taralı kısımların $\frac{1}{3}$'ini alacağını söylemiş ve İpek ardından öğrencilere taralı kısmın artık yeni bütün olduğunu ve buranın $\frac{1}{3}$'inin alınacağını ifade etmiştir. Öğrenci üç tane $\frac{1}{3}$ olduğunu söylemiştir. Bunun üzerine İpek de "Zaten üç parçaya ayrılmış diyor arkadaşınız. Tekrar bir bölme işlemi yapmama gerek yok diyor" ifadeleri ile oluşan taralı kısım ikinci kesrin paydası kadar parçadan oluştuğu için farklı bir bölme işlemine gerek olmadığını, sadece kesrin payı kadar parça seçmek gerektiğini söylemiştir. İpek AB görüşme formunda yer alan $1\frac{1}{2} \times \frac{2}{3}$ işlemi için verilen modellerin uygun olup olmadığının yorumlanmasını gerektiren yedinci soruda da ilk kesrin temsili sonucunda ikinci kesrin paydası kadar eş parça oluştuğunu ve bu parçalardan pay kadarı seçildiği zaman da verilen işlemin sonucunu verdiği için uygun bir model olduğunu belirtmiştir. İpek'in AB görüşme formunun yedinci sorusu için ifadeleri şu şekildedir:

> *Tamam. Kullanılabilir. Çünkü $1\frac{1}{2}$, $\frac{3}{2}$ yapıyor. Bu şekilde iki tane tam. Biri tam karalanmış, diğeri yarım karalanmış olmalı ve 3 parçalık bir durum içinden yorum yapmamız yani şu parçanın şu kadarlık kısmını soruyor bize. Bu parça artık bizim bütünümüz oluyor. 3 parçalık bir bütünümüz var, 3 eş parçalık. Onun ikisini istiyor bizden. Doğrudur yani.*
>
> *(b şıkkı için) $1\frac{1}{2}$ yine doğru. Yine şu 3 parçalık bütün üzerinden yorum yapmak istersek üçe bölünmüş her parça ve her parçanın 2'lik kısmı alınmış. Bu da doğru olur.* (İpek- AB görüşme formu, 7. Soru)

İpek $\frac{2}{3} \times \frac{4}{5}$ işlemini alan modeli ile temsil ederken önce bütün üzerinde $\frac{2}{3}$ kesrini temsil etmiştir. Oluşan taralı kısım içinde beş eş parça oluşmadığı için yatay olarak üç eş parçaya ayırdığı bütünü dikey olarak da beş eş parçaya ayırmış ve dört eş parçasını seçmiştir. Oluşan sekiz taralı kısmın bütünün 15 eş parçadan oluşması nedeni ile $\frac{8}{15}$ kesrini temsil ettiğini belirtmiştir. İpek dersinde de $\frac{9}{10} \times \frac{2}{3}$ işlemi kullanılarak çözülebilecek bir probleme yer vermiştir. Tahtaya kalkan öğrenci bütünü on eş parçaya ayırıp dokuz parçasını tarayarak $\frac{9}{10}$ kesrini temsil etmiştir. Bu temsilden sonra İpek öğrenciye bütününün ne olduğunu, yani neyin $\frac{2}{3}$'sini alacağını sormuştur. Öğrenci $\frac{9}{10}$'un $\frac{2}{3}$'sini bulacağını söylemiş fakat oluşan 10 eş parçanın iki parçasını tarayarak bu temsili gerçekleştirmiştir. İpek sınıftaki öğrencilere yapılanın doğru olup olmadığını sormuş ve öğrenciler de yanlış olduğunu söylemişlerdir. İpek temsili oluşturan öğrenciye $\frac{2}{3}$'nin ne anlama geldiğini sormuş ve öğrenci bu defa dikey olarak parçalara ayırdığı temsilini yatay olarak da üç eş parçaya ayırmış ve iki parçasını seçmiştir. Öğrencinin temsilinin ardından bir kez de İpek temsili oluşturmuş ve öğrencilere anlatmıştır. Elde edilen taralı kısmı "başlangıçtaki bütüne göre kaçta kaç yapıyor?" diye sorarak çarpma işleminin sonucunun bulunmasında en baştaki bütünün dikkate alındığı bilgisini öğretimine de yansıtmıştır.

4.3.1.3. Cemil'in kesirlerle çarpma işleminde model kullanıma yönelik AB'sinin öğretimine yansıması. Cemil AB görüşme formunda yer alan $\frac{2}{5}\times10$ işlemini alan modeli ve uzunluk modeli kullanarak temsil etmiştir. Cemil kesirlerde çarpma işlemini işlediği derste ise doğal sayı ile kesrin çarpımında sadece alan modeli kullanımına yer vermiştir. Cemil $\frac{2}{5}\times10$ işlemini temsil edecek bir problem kurmuştur. Kurduğu problemde 10 pizza yer aldığı için bütünü temsil etmede daireyi kullanmıştır. Cemil 10 daire çizmiş ve her bir daireyi beş parçaya ayırıp iki parçasını seçmiştir. Cemil'e pizzaların eşit büyüklükte olup olmadığı sorulduğunda Cemil her pizzanın eşit büyüklükte olduğunu ve eşit parçalara ayrıldığını söylemiştir. Bu parçaların eş olmasından hareketle pizzaların taralı kısımlarını bir araya getirerek bütüne tamamlamaya çalışmıştır. Cemil'in alan modeli ile $\frac{2}{5}\times10$ işleminin sonucunu nasıl bulduğuna dair bir kesit aşağıdaki gibidir:

> *Ee tamam bunları buraya yansıtırım o zaman (taralı kısımları aktarmaktan bahsediyor). Şimdi buradakilerin hepsini en başa alacağım. İki dilim buradan, iki dilim buradan yedik (ilk model) bu kendisiydi zaten, iki dilim daha buradan yedik, bu gitti (son model), bir dilim buradan bir dilim buradan yedik (birinci ve ikinci modeli karalıyor) bu da gitti (dokuzuncu model). İki dilim buradan yedik (ikinci model) kendisi gitti, şu an kendisini götürdüm. Onu da unutmayalım. İki dilim daha yedik bu gitti (sekizinci model). Şimdi iki dilim kendisini yedik (üçüncü model). Sonra iki dilim daha bunu yedik (yedinci model). Bir dilim buradan bir dilim de buradan yedik (üçüncü ve dördüncü model). İki*

dilim kendisini yedik (dördüncü model). Bir de bu kaldı (beşinci model), bunu yedik. Tamam. Toplam dört pizza yedik. (Cemil-AB görüşme formu, 6. Soru)

AB görüşme formunda bütüne tamamlama yaklaşımını kullanan Cemil derste de "6A sınıfı gezi kulübü üyesi altı öğrenci akşam yemeğinde buluşuyorlar. Kişi başı bir ekmeğin $\frac{2}{3}$'si tüketildiğine göre toplam kaç ekmek tüketilmiştir?" probleminin çözümünü bulurken aynı yaklaşımı kullanmıştır. Bir öğrenciyi tahtaya sorunun çözümünü model kullanarak yapması için kaldırmıştır. Öğrenci $\frac{2}{3}$ kesrini temsil etmek için bütünü üç yerine iki parçaya ayırmıştır. Kesrin paydası kadar eş parça olması gerektiğini bilen Cemil öğrenciye bütünü üçe bölmesi gerektiğini söylemiştir. Öğrenci yine kaç bütün oluşturması gerektiği konusunda zorlanmış, sonucu düşünerek hareket etmiştir. Bunun üzerine Cemil öğrenciyi her kişinin yediği ekmeği göstererek ilerleyecek şekilde bir temsil gerçekleştirmesi yönünde yönlendirmiştir.

Cemil AB görüşme formunda yer alan iki kesrin çarpımı işlemlerini alan modeli ile temsil ederken iki kesir için farklı gösterimler kullanmıştır. Biri yatay biri dikey parçalara ayrılmış şekilde eş iki bütün almış ve ikisinin kesişim noktalarının oluşan tüm parça sayısına oranının çarpma işleminin sonucunu verdiğini ifade etmiştir. Cemil saydam kesir kartları kullanıyormuş gibi hareket etmiştir. Cemil'in AB görüşme formunda $\frac{2}{3} \times \frac{4}{5}$ işlemi için oluşturduğu temsile dair açıklamaları şu şekildedir:

Şimdi bunu bunun üzerine koyacağız. Şu an paydamız 15 oldu burada. Bu dördünü kullandık (çarpım için oluşturduğu modelde 5x3'lük bir dikdörtgen oluşturdu. Bunun dört sütununu kastediyor). *Şöyle de ikisini kullanmış olalım (yatay olarak ilk iki satır. Kesiştiği yerler bizim için çarpmamızın sonucunu, değerini ifade ediyor, çarpma işleminin sonucunu. Şurası yani; sekiz tane. Toplam 15'di. O zaman* $\frac{8}{15}$ *oluyor*. (Cemil-AB görüşme formu, 6. Soru)

Aynı şekilde dersinde de $\frac{2}{5} \times \frac{2}{3}$ işlemini model ile temsil etmek üzere bir öğrenciye söz hakkı verdiği zaman öğrenciyi de iki temsil oluşturması için yönlendirmiştir. Kendisi eş bütünler bilgisine sahip olduğu için öğrencinin oluşturduğu temsillerden sonra öğrenciye "Normalde sen bunları aynı boyda çizdin değil mi?" diye sormuştur. Öğrenciye üst üste koyunca neyi elde edeceğini sormuş ve "İkisinin bir kesim noktası değil mi? sorusu ile öğrenciye bir kesişim noktası elde edeceğini hissettirmiştir. Ardından öğrencilere kesiştiği alanın neyi vereceğini sormuştur. Öğrenciler tüm parçaların kaçta kaçı olduğunu vereceğini söylemişlerdir. Cemil öğrenciye nasıl üst üste koyacağını sormuştur. Öğrenci iki temsili birleştirmekte zorlanmış ve bir öğrenci temsillerden birinin yatay çizileceğini söylemiştir. Öğrenci yatay ve dikey parçalara ayırılmış temsilleri birleştirmiş ve Cemil bir kesişim noktası elde ettiğini belirterek o kısmın etrafını çizerek belirginleştirmesini istemiştir. Sonra öğrenciden o çizdiği kısmın bütünün kaçta kaçı olduğunu ifade etmesini istemiştir. Cemil kendisi sahip olduğu bilgileri öğretimine de bu şekilde yansıtmıştır.

AB görüşme formunun yedinci sorusunda öğrencilere modeller verilmiş ve bu modellerin verilen işlem için uygun olup olmadığını belirlemeleri istenmiştir. Cemil bu soruda $1\frac{1}{2}$ kesrinin temsili ile üç eş parça oluştuğunu, artık buranın yeni bütün olarak alınarak bu kısmın $\frac{2}{3}$'sinin temsil edilmesi için bu üç parçadan iki parçasının seçilmesi gerektiğini ve bunun da bir tama eşit olduğunu söylemiştir. Cemil derste öğrencilere çözümü $\frac{3}{4} \times \frac{1}{3}$ işlemi kullanılarak bulunabilecek bir problem yazdırmış ve öğrencilerin çözümü model kullanarak bulmalarını istemiştir. Öğrencilerden birisini tahtaya kaldırmıştır. Öğrenci önce $\frac{3}{4}$ kesrini temsil etmiştir. Fakat öğrenci sonucun $\frac{1}{3}$ olduğunu ifade etmiştir. Bunun üzerine Cemil öğrenciden sadece $\frac{3}{4}$'lük kısmı çevreleyerek göstermesini ve orada kaç parça olduğunu söylemesini istemiştir. Öğrenci üç parça olduğunu söyleyince Cemil öğrenciye erkek kardeşin bir parçasını aldığını ifade etmiş ve erkek kardeşin aldığı kısmı ayrı bir şekil üzerinde temsil etmesini istemiştir. Öğrenci biraz düşünmüş ve yine $\frac{1}{3}$ cevabını vermiştir. Bunun üzerine Cemil öğrenciye bütünün dört parça olduğu ve kardeşin bu dört parçadan bir parçasını yediğini söylemiştir. Cemil'in bu ifadesi üzerine öğrenci sonucun $\frac{1}{4}$ yaptığını anlamıştır. Cemil ilk kesir temsil edildikten sonra o kısımların yeni bütün olarak alınıp bunun üzerinden işlem yapılması gerektiği ve sonucu bulmada en baştaki bütünün dikkate alındığı bilgisini bu şekilde öğretimine yansıtmıştır.

4.3.1.4. Hale'nin kesirlerle çarpma işleminde model kullanıma yönelik AB'sinin öğretimine yansıması. Hale AB görüşme formunda $\frac{2}{5}\times 10$ işlemini küme modeli ile temsil etmiştir. Bu temsilde 10 sayma nesnesi almış ve kesrin paydası beş olduğu için 10 sayma nesnesini beş gruba ayırmıştır. Hale dersinde de $6\times\frac{1}{2}$ işlemini öğrencinin alan modeli ile temsilinden sonra küme modeli ile temsil etmiştir. Altı tane sayma nesnesi almış ve bu altı sayma nesnesini üçlü iki gruptan oluşacak şekilde yerleştirmiştir. Öğrencilere $\frac{1}{2}$'in ne demek olduğunu sormuştur. $\frac{1}{2}$'in anlamından hareketle iki eş grup olduğunu ve bir grubunu istediğini belirtmiştir.

Hale AB görüşme formunda iki kesrin çarpma işlemini alan modeli ile temsil ederken bütünü ilk kesrin paydasına göre eş parçalara ayırmış ve pay kadarını seçmiştir. Artık taralı kısmı yeni bütün olarak alarak bütünleri ikinci kesrin paydasına göre eş parçalara ayırmış, pay kadar parçayı seçmiştir. Oluşan taralı kısmın toplam parça sayısı içindeki oranının çarpma işleminin sonucunu verdiğini ifade etmiştir. Aynı zamanda Hale $\frac{2}{3}\times\frac{4}{5}$ işleminin sonucu bulurken dikdörtgenin alanından faydalanmıştır. Taralı alanın oranının bütünün alanına oranından çarpma işleminin sonucunu bulmuştur. Hale derste öğrencilere iki kesrin çarpımına yönelik olarak "Yulaflı muzlu kek tarifinde bir bardağın $\frac{3}{4}$ 'ü kadar yulaf eklemek gerekiyor. Kek $\frac{1}{2}$ büyüklükte yapılacak olsaydı ne kadar yulaf eklemek gerekirdi?" problemini yazdırmıştır. İlk olarak $\frac{3}{4}$ kesrini temsil etmiş, ardından dört parçaya ayırdığı temsilini yatay olarak iki parçaya daha ayırmış ve bir parçasını seçmiştir. Oluşan üç taralı kısmın bütünün $\frac{3}{8}$'ü olduğunu ifade etmiştir. Ardından bir de farklı bir yol olarak taralı kısmın alanının bütünün alanına oranından çarpma işleminin sonucunu bulmuştur. Hale ilk ders saatinde öğrencilere problem yerine sadece işlem vermiş ve bu işlemleri model ile temsil etmelerini istemiştir. $\frac{4}{5} \times \frac{1}{2}$ işlemini alan modeli ile temsil ederken öğrencilerden bazıları $\frac{4}{5}$'ün $\frac{1}{2}$'ini almak yerine bütünün $\frac{1}{2}$'ini alarak Hale'nin oluşturduğu temsilde bir eksiklik olduğunu söylemişlerdir. Hale tamamının değil en başta taradığı kısmın yani $\frac{4}{5}$'lük kısmın $\frac{1}{2}$'ini aldığını ifade etmiştir. Böylece sahip olduğu AB'sini öğretimine yansıtmıştır.

4.3.2. Öğretmen Adaylarının Kesirlerle Bölme İşlemlerinde Model Kullanımına Yönelik AB'lerini Öğretime Nasıl Yansıttıklarına İlişkin Bulgular ve Yorum

Öğretmen adaylarının AB'lerini kesirlerle bölme işlemini model kullanarak işledikleri derslerine nasıl yansıttıklarını incelemek için AB görüşme formunun sekizinci ve dokuzuncu sorularından elde edilen veriler ile ders gözlemlerinden elde edilen veriler kullanılmıştır. Her bir öğretmen adayı ayrı ayrı ele alınmıştır. Öğretmen adaylarının AB görüşme formuna verdikleri cevaplardan ve derslerinden kesitler verilerek veriler desteklenmiş ve örneklendirilmiştir.

4.3.2.1. İlker'in kesirlerle bölme işleminde model kullanıma yönelik AB'sinin öğretimine yansıması. AB görüşme formunun dokuzuncu sorusunda öğretmen adaylarından $3 \div \frac{1}{2}$ işleminde bölümü gösteren modelleri yorumlamaları istenmiştir. İlker sorudaki alan modeli ile temsili "Burada zaten soruda üçte kaç tane $\frac{1}{2}$ var diyor. Üçte kaç tane $\frac{1}{2}$ varsa işte bunu ikiye ikiye ayırmış. Yani bir tane $\frac{1}{2}$, ki tane $\frac{1}{2}$, üç, dört, beş, altı tane $\frac{1}{2}$ oluyor." şeklinde yorumlamıştır. İlker burada bölmenin ölçme anlamı ile bağlantı kurarak üçün içinde kaç tane $\frac{1}{2}$ olduğunun bulunduğunu söylemiştir. İlker aynı bilgiyi öğretimine de yansıtmıştır. Derste öğrencilere “Birbirine eşit dört adet pasta herkes $\frac{1}{2}$ adet yiyecek şekilde dağıtılıyor. Kaç kişi pasta yemiştir?” probleminin çözümünü model kullanarak bulmalarını istemiştir. İlker öğrencilerden bir tanesine söz hakkı vererek tahtaya kaldırmıştır. Öğrenci dört adet bütün çizmiş ve bütünleri iki eş parçaya ayırmıştır. Bu dört bütün içinde bu yarım parçadan kaç tane olduğunu saymıştır. Öğrencinin temsilinin ardından İlker AB görüşme formunda yanıt verdiği şekilde bütünler üzerinde kaç $\frac{1}{2}$’lik parça olduğunu sayarak bölme işleminin sonucunu bulmuştur.

AB görüşme formunda yer alan $1\frac{3}{4} \div \frac{1}{2}$ işlemini İlker alan modeli kullanarak temsil etmiştir. İki bütün almış, bu bütünleri dört eş parçaya ayırmış, ilk bütünün tamamını, ikinci bütünün ise üç parçasını seçmiştir. Ardından bu kısımlar içinde $\frac{1}{2}$’lik kaç parça olduğunu saymıştır. Bir bütün zaten iki yarımdan oluştuğu için bir bütünden iki tam elde etmiş, ikinci bütünden ise bir tam ve bir de yarım $\frac{1}{2}$ parça elde etmiştir. İlker burada $\frac{1}{2}$’lik kısmı (iki eş parça) bir tam olarak ele almıştır. İlker derste öğrencilere iki kesrin bölümüne yönelik olarak “Bir porsiyon $\frac{1}{2}$ kurabiyedir. $\frac{5}{8}$ kurabiyeden kaç adet porsiyon elde edebiliriz?” problemini yazdırmış ve sonucun model kullanılarak bulunmasını istemiştir. İlker bir öğrenciyi tahtaya kaldırmış, fakat öğrencinin işlemi model ile temsil etmede zorlanması üzerine kendisini dinlemesini istemiştir. İlker önce $\frac{5}{8}$ kesrini bütünü sekiz eş parçaya ayırıp, beş parçasını seçerek temsil etmiştir. Ardından bu taralı kısım içinde $\frac{1}{2}$’lik kaç parça olduğunu incelemiştir. Bu temsilde dört eş parça kesrin yarısını gösterdiği için bu dört parçadan bir porsiyon çıkacağı (yani bir tam olarak alınıyor) ifade edilmiştir. İlker bir porsiyonda dört parça olduğunu söylemiş ve öğrenciye geri kalan bir parçanın kaç porsiyon yaptığını sormuştur. Öğrenci $\frac{1}{4}$ cevabını vermiştir. Bir tam ve $\frac{1}{4}$ ayrı ayrı bulunduktan sonra İlker öğrencilere “O zaman demek ki son olarak ne diyeceğiz burada? Kaç tane porsiyon elde edebiliriz? diye sorarak bölme işleminin sonucunun bulunmasını sağlamıştır.

4.3.2.2. İpek'in kesirlerle bölme işleminde model kullanıma yönelik AB'sinin öğretimine yansıması. İpek kesirlerle bölme işlemini işlediği dersinde iki kesrin bölme işleminin model ile nasıl temsil edilebileceğini öğrencilere gösterememiştir. Bu nedenle İpek'in doğal sayının kesre bölümü konusunda model kullanımına yönelik AB'sinin öğretimine nasıl yansıdığı incelenebilmiştir.

$3 \div \frac{1}{2}$ işleminde bölümü gösteren modellerin nasıl yorumlanabileceği sorusunda İpek "Üç tamın içinde kaç tane $\frac{1}{2}$'lik, yarımlık yani, parça çıkacağını göstermek için burada üç tam var. Her birini yarımşar ayırmışız ve $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}$… altı parça elde etmişiz." ifadelerini kullanmıştır. İpek bu bilgilerini aynı şekilde öğretime yansıtmıştır. Derste öğrencilerden iki kurabiye, üç kurabiye ve dört kurabiyenin içinden $\frac{1}{2}$'lik kaç porsiyon çıkacağını bulmalarını istemiştir. Öğrencilere $\frac{1}{2}$'in ne anlama geldiğini sormuş ve kelime anlamı olarak düşünmelerini istemiştir. Öğrenciler bütünün yarısı demek olduğunu söylemişlerdir. Öğrencilerin bu ifadesi üzerine İpek bir porsiyonun bir kurabiyenin yarısı olduğunu söylemiştir. Öğrencilerden bir tanesine söz hakkı vererek onu tahtaya kaldırmıştır. Öğrenci bir bütün almış ve üzerinde $\frac{1}{2}$ kesrini temsil etmiştir. İpek öğrenciye kurabiyenin yarısını bulduğunu ve sorulan sorunun kaç porsiyon çıkacağını bulmak olduğunu söylemiştir. İki kurabiyeden kaç porsiyon çıkacağını bulmadan önce öğrencilerden bir kurabiyeden yarımşar yarımşar kaç porsiyon çıkacağını düşünmelerini istemiştir. Öğrenci iki porsiyon çıkacağını söyleyince onu nasıl göstereceğini sormuştur. İpek öğrenci daha önce $\frac{1}{2}$ kesrini temsil ettiği için o kısmın bir porsiyon yaptığını söylemiş ve geri kalan parçanın ne olduğunu sormuştur.

Öğrenciler bütünün diğer yarısının da bir porsiyon yaptığını söylemişlerdir. Bir bütünden iki porsiyon çıkmasından hareketle iki kurabiyeden dört porsiyon çıkacağı bulunmuştur.

4.3.2.3. Cemil'in kesirlerle bölme işleminde model kullanıma yönelik AB'sinin öğretimine yansıması. Cemil dokuzuncu soruda yer alan $3 \div \frac{1}{2}$ işleminin üçün içinde kaç tane $\frac{1}{2}$ var demek olduğunu söylemiştir. Bu nedenle üç tamın alındığını ve içinde kaç tane $\frac{1}{2}$ olduğunun arandığını ifade etmiştir. $\frac{1}{2}$'lik parçaları saymış ve altı tane $\frac{1}{2}$'lik parça olduğunu söylemiştir. Cemil dersinde de öğrencilere doğal sayının kesre bölümüne yönelik olarak "Birbirine eşit altı adet çikolata herkes $\frac{1}{2}$ adet yiyecek şekilde dağıtılıyor. Kaç kişi çikolata yemiş olur?" problemini yazdırmıştır. Problemin çözümünü model ile temsil etmesi için bir öğrenciyi tahtaya kaldırmıştır. Öğrenciye "Sen o zaman altı tane çikolata mı çizeceksin? diye sorarak bütünleri çizerek temsile başlanacağını konusundaki bilgisini yansıtmıştır. Öğrenci bütünleri çizdikten sonra yarısı yeneceği için bütünleri ikiye böleceğini söylemiştir. İkiye ayırdığı parçalardan kaç tane olduğunu sayarak 12 sonucunu elde etmiştir.

Cemil AB görüşme formunda yer alan iki kesrin bölme işlemlerini alan modeli ile temsil ederken bölünen kesri model üzerinde temsil etmiş ve oluşan taralı kısımlar içinde bölen kesir kadar kaç parça olduğunu bulmaya çalışmıştır. Eğer kesirlerin paydaları denk ise direk doğal sayılarda bölme işlemi gibi düşünmüş ve bölünen kesrin payı kadar parça içerisinde bölen kesrin payı kadar kaç parça olduğunu aramıştır. Bölen kesrin payı kadar her parçayı bir tam olarak almıştır. AB görüşme formunun yedinci sorusunda öğretmen adaylarından $\frac{7}{5} \div \frac{1}{3}$ işlemini ortak payda algoritmasına yönelik bir modelle açıklamaları istenmiştir. Cemil kesirlerin paydalarını eşitleyerek yapılacak işlemi $\frac{21}{15} \div \frac{5}{15}$ haline getirmiştir. Alan modeli ile $\frac{21}{15}$ kesrini temsil ettikten sonra oluşan 21 eş parça içerisinde kaç beş parça olduğunu aramıştır. Cemil dersinde de $2\frac{1}{4} \div \frac{3}{4}$ işlemini alan modeli ile temsil etmiştir. Bütünlerin eş bütünler bilgisine sahip olan Cemil birbirine eş bütünler çizdiğini ifade etmiştir. Kesirlerin paydaları eşit olduğu için taralı kısımlarda kaç üç parça olduğunu saymıştır. Yani Cemil burada bir tamı üç parça olarak almıştır.

AB görüşme formunda yer alan $1\frac{3}{4} \div \frac{1}{2}$ işleminde Cemil iki bütün almış ve bu bütünler üzerinde $1\frac{3}{4}$ kesrini temsil etmiştir. Bu işlemin $1\frac{3}{4}$'ün içinde kaç tane $\frac{1}{2}$ var demek olduğunu söylemiş ve taralı alanlar içerisindeki $\frac{1}{2}$'lik parçaları saymıştır. Cemil burada $\frac{1}{2}$'i bir tam olarak ele almıştır. Cemil derste öğrencilere "Bir porsiyon $\frac{1}{2}$ kurabiyedir. $\frac{5}{8}$ kurabiyeden kaç adet porsiyon elde ederiz?" problemini yazdırmıştır. Problemin çözümünü model ile temsil etmek üzere tahtaya gelen öğrenciye $\frac{5}{8}$ kesrini temsil etmek isterken "sekize böleceksin değil mi?" diye sorarak bütündeki eş parçaların tamamının kesrin paydasını verdiği bilgisine sahip olduğunu göstermiştir. Öğrenci bütünü sekiz parçaya ayıracağında bir kurabiye çizmek yerine sekiz kurabiye çiziyor olduğunu düşünmüştür. Bunun üzerine Cemil öğrencilere $\frac{5}{8}$ kesrinin ne anlama geldiğini hatırlatarak sahip olduğu bilgisini öğretimine yansıtmıştır. Öğrenci bütünü sekiz parçaya ayırdığı zaman da eş olmayan parçalar elde etmiştir. Bütünün eş parçalardan oluştuğu bilgisine sahip olan Cemil öğrenciye oluşturduğu temsildeki parçaların eşit olup olmadığını sormuş ve eşit olması gerektiğini söylemiştir. $\frac{5}{8}$ kesrindeki sekizin sekiz eş parça demek olduğunu, bütünün sekiz eş parçaya bölünmesi gerektiğini ifade etmiştir. Bölme işlemini temsil etmede öğrencinin zorlanması üzerine Cemil başka bir öğrenciye söz hakkı vermiştir. Öğrenciye amaçlarının ne olduğunu, soruda ne verildiğini ve bir porsiyonun ne olduğunu söylemiştir. Öğrenci bir porsiyonun yarım olduğunu söylemiştir. Cemil sınıftaki öğrencilere nasıl yapılacağını sormuştur. Öğrencilerden bir tanesi "yarım bir porsiyon işte" demiştir. Öğrencinin bu ifadesinin üzerine Cemil "yarısı bir porsiyon ise tamam duralım" demiş ve tahtaya kalkan öğrenciden oluşturulan temsildeki yarımı bulmasını istemiştir. Öğrenci yarımı gösterdikten sonra Cemil geri kalanın ne yapılacağını sormuştur. Öğrenci dört parçanın birini aldığını bu nedenle de $\frac{1}{4}$ porsiyon yaptığını söylemiştir. Toplam kaç porsiyon yaptığı sorulduğu için ayrı ayrı bulunan bir tam ve $\frac{1}{4}$ toplanarak $1\frac{1}{4}$ sonucu elde edilmiştir.

4.3.2.4. Hale'nin kesirlerle bölme işleminde model kullanıma yönelik AB'sinin öğretimine yansıması. Hale AB görüşme formunda yer alan dokuzuncu sorudaki alan modeli temsilini "üç tam çizmişsiniz, yarısını almışsınız her birinin. Yani burada bir yarım, iki yarım, üç, dört, beş, altı" ifadeleri ile yorumlayarak doğal sayının kesre bölümünün model ile gösterimi konusundaki bilgisini ortaya çıkarmıştır. Hale dersinde doğal sayının kesre bölümüne yönelik olarak "Porsiyonu $\frac{1}{2}$ kurabiye ise iki kurabiye kaç porsiyon yapar?" problemini yöneltmiştir. Öğrencilere model kullanarak temsillerini oluşturmaları için zaman tanıdıktan sonra öğrencilerden bir tanesini tahtaya kaldırmıştır. Öğrenci bir bütün almış ve bu bütünü ikiye bölerek $\frac{1}{2}$ kurabiyeyi gösterdiğini söylemiştir. Hale öğrencinin çizdiği temsil karşısında "Şu kurabiye değil mi?" diyerek öğrencinin ikiye ayırdığı temsili bütün haline getirmiştir. Soruda iki kurabiye geçtiği için öğrenciden bir bütün daha çizmesini istemiştir. Öğrenci bir bütün daha çizdikten sonra porsiyonların $\frac{1}{2}$ olduğunu söyleyerek iki bütünü de ikiye ayırmıştır. Hale öğrencinin bütünleri ikiye ayırmasından sonra birinci bütünün yarısını göstererek "Şurası bir porsiyon değil mi?" diye sormuştur. Öğrencinin bir porsiyon olduğunu söylemesi üzerine geri kalan parçaları da iki, üç, dört şeklinde sayarak iki kurabiyeden dört porsiyon elde etmiştir.

Hale AB görüşme formunda yer alan $1\frac{3}{4} \div \frac{1}{2}$ işlemini alan modeli ile temsil etmiştir. İlk önce $1\frac{3}{4}$ kesrini model ile göstermiştir. Ardından oluşan taralı kısımlar içinde kaç tane $\frac{1}{2}$'lik parça olduğunu aramıştır. Dört eş parçaya ayırdığı bütünlerin iki parçasını seçerek bir tane $\frac{1}{2}$ olduğunu söylemiştir. Bir tamdan iki tane, $\frac{3}{4}$'lik kısımdan ise bir ve yarım tane $\frac{1}{2}$'lik parça elde etmiştir. Hale burada $\frac{1}{2}$'i, yani iki eş parçayı bir tam olarak kabul etmiş ve $\frac{3}{4}$'lük kısımdaki üç parçanın iki parçasının bir tam, geri kalan bir parçanın ise ikinin yarısı olması nedeni ile $\frac{1}{2}$ olduğunu ifade etmiştir. Sonuç olarak elde edilen bir tamlar ve $\frac{1}{2}$ bir araya getirilerek $3\frac{1}{2}$ sonucu elde edilmiştir. Hale bu sahip olduğu AB'sini öğretime de aynı şekilde yansıtmıştır. Derste öğrencilerden $\frac{3}{4}$ kurabiyeden $\frac{1}{2}$ kurabiyelik kaç porsiyon çıkacağını model kullanarak bulmalarını istemiştir. Tahtaya kaldırdığı öğrenciyi önce kurabiyeyi çizmesi konusunda yönlendirmiştir. Bu nedenle öğrencinin porsiyonu temsil etmek için ikiye ayırdığı bütünü dörde ayırarak üç parçasını taramıştır. $\frac{3}{4}$ kesrinin temsilinin ardından soruda bir porsiyonun $\frac{1}{2}$ olarak verildiğini hatırlatmıştır. Öğrenci yarısı ifadesini kullanmış ve öğrencinin bu ifadesi üzerine Hale "Şurası bir porsiyon yapmaz mı?" diyerek bütündeki iki eş parçayı seçmiştir. Geri kalan bir parçanın ise kaç porsiyon yapacağını sormuştur. Bir porsiyon iki parçadan oluştuğu için geri kalan bir parçanın $\frac{1}{2}$ porsiyon yaptığı ifade edilmiştir. Elde edilen bir porsiyon ve $\frac{1}{2}$ porsiyon sonuçları bir araya getirilerek toplam $1\frac{1}{2}$ porsiyon kurabiye çıkabileceği bulunmuştur.

Öğretmen adaylarının AB görüşme formuna verdikleri cevaplar ve ders gözlemleri birlikte ele alındığı zaman öğretmen adaylarının sahip oldukları AB'lerini doğrudan derslerine yansıttıkları, yani alan bilgileri doğrultusunda derslerine yön verdikleri görülmüştür. Öğretmen adayları sahip oldukları AB'leri sayesinde öğrenci hata/kavram yanılgılarını fark edebilmiş ve bunları ortadan kaldırmak için çözüm üretmeye çalışmışlardır. Sahip oldukları AB'leri doğrultusunda temsiller oluşturmuşlar ve öğrencileri de bu doğrultuda yönlendirmişlerdir.

BEŞİNCİ BÖLÜM: TARTIŞMA, SONUÇ VE ÖNERİLER

Ortaokul matematik öğretmeni adaylarının kesirlerde model kullanımına yönelik AB'lerini, kesirlerle çarpma ve bölme işlemlerinde model kullanımına yönelik PAB'larını ve model kullanımına yönelik AB'lerini öğretimlerine nasıl yansıttıklarını inceleyen tez çalışmasının bu bölümünde araştırmanın alt problemlerine ilişkin bulgular ışığında ulaşılan sonuçlar, tartışmalar ve son olarak da öneriler sunulmaktadır.

5.1. Öğretmen Adaylarının Kesirlerde Model Kullanımına Yönelik Alan Bilgilerine İlişkin Tartışma

Öğretmen adaylarına bir kesir verilip model ile göstermeleri istendiği zaman ilk olarak alan modeli kullanmayı tercih ettikleri görülmüştür. Alan modeli doğası gereği eş parçalamayı doğrudan yansıtan bir model olduğu için öğretmen adaylarının bu modeli tercih ettikleri düşünülmüştür. Tüm öğretmen adaylarının kesri alan modeli ile gösterirken bütünü payda kadar eş parçaya ayırma ve pay kadarını seçme bilgisine sahip olduğu görülmüştür. Tüm öğretmen adayları kesirleri alan modeli ile temsil ederken hep yan yana bulunan eş parçaları seçmeyi tercih etmişlerdir. Fakat tüm parçaların eş olduğu bilgisine sahip öğretmen adayları farklı parçalar seçseler de aynı kesri temsil edebileceklerini ifade etmişlerdir. Öğretmen adaylarının kesirleri alan modeli ile temsil etmeye yönelik AB'lerinin yeterli düzeyde olduğu ortaya çıkmıştır. Wheeldon'un (2008) çalışmasında araştırmadan elde edilen sonucu destekler nitelikte öğretmen adaylarının alan modeli ile oluşturulmuş temsillere ilişkin açıklamalarından yola çıkarak bütünü payda kadar eş parçaya ayırma ve pay kadarını seçme bilgisine sahip olduğu görülmüştür.

Öğretmen adayları verilen kesri küme modeli ile temsil ederken bir tamdaki nesne sayısını belirlemede kesrin paydasını dikkate almışlardır. Öğretmen adaylarından iki tanesi kesri küme modeli ile temsil ederken nesneleri kesrin paydası kadar eş gruplara ayırmış ve pay kadar grubu seçmiştir. Diğer iki öğretmen adayı ise kesirleri küme modeli ile temsil ederken oran-orantı kullanmış, gruplama fikrinden hiç bahsetmemiştir. Araştırmada elde edilen sonuca paralel olarak Wheeldon'un (2008) çalışmasında öğretmen adaylarının kesrin küme modeli ile temsilinde payda kadar eş grup arasından pay kadar eş grup seçme bilgisini kullandıkları görülmüştür.

Uzunluk modeli öğretmen adaylarının çalışmanın her aşamasında en az tercih ettikleri model olmuştur. Verilen kesrin model ile temsilinde uzunluk modeli iki öğretmen adayı tarafından kullanılmıştır. Sayı doğrusu aslında çokça bilinen bir temsil olmasına rağmen öğretmen adayları kesri sayı doğrusunda temsil etmeyi bile tercih etmemişlerdir. Oysa ki sayı doğrusu kesir kavramlarının öğretilmesinde ve değerlendirilmesinde sıklıkla kullanılmaktadır. Kesir öğretiminin başlangıcında sıklıkla parça-bütün anlamı vurgulanmakta ve öğrenciler kavramı sayı doğrusuna transfer etmekte zorlanmaktadırlar (Hannula, 2003). Sayı doğrusu kesirlerin ölçme anlamının anlaşılmasını gerektirmektedir ve birim kesrin ($\frac{1}{n}$) katlarıyla bir başlangıç noktasından uzaklığı belirlemede kullanılmaktadır (Charalambous ve Pitta-Pantazi, 2007). Kesirleri uzunluk modeli ile temsil eden öğretmen adaylarının uzunluk modelinin doğasına uygun şekilde hareket ettiği, birimleri yineleyerek uzunlukları uç uca ekleme fikrini kullandığı görülmüştür.

Öğretmen adayları verilen kesirlerin denk olup olmadığını öncelikle alan modeli kullanarak belirlemeyi tercih etmişlerdir. Paydası küçük olan kesre göre bir eş parçalama yaptıktan sonra elde edilen eş parçaları diğer kesrin paydasına göre de eş parçalara ayırmışlardır. Taralı kısımların aynı yere denk geliyor olmasından hareketle denk kesirler olduğunu söylemişlerdir. Wheeldon'un (2008) çalışmasında da elde edilen sonucu destekler nitelikte bulgular elde edilmiştir. Küme modeli ile kesirlerin denkliğini belirlemede öğretmen adayları iki kesrin paydasına göre bir tamda yer alan nesne sayısını belirlemişlerdir. Nesneleri her iki kesrin paydasına göre eş gruplara ayırıp, pay kadar grubu seçmişlerdir. Her iki temsil sonucu elde edilen nesne sayısından hareketle kesirlerin denkliğini belirlemişlerdir. Bir öğretmen adayının ise yine eş gruplara ayırma fikrini kullanmadığı görülmüştür. Bu öğretmen adayının temsilinde AB görüşme formunda yer alan ikinci sorunun etkili olduğu düşünülmektedir. Kesirlerin denk olup olmadığını belirlemede yalnızca bir öğretmen adayı uzunluk modeli kullanmıştır. Öğretmen adayı sayı doğrusu üzerinde kesirlerin paydalarına göre eş parçalamalar yapmıştır. Elde edilen uzunlukları kesrin payı kadar yineleyerek kesrin sayı doğrusu üzerindeki yerini tespit etmiştir. İki kesir sayı doğrusu üzerinde aynı noktaya denk geliyorsa bu kesirlerin denk kesirler olduğu sonucuna ulaşmıştır. Denk kesrin ne olduğu sorulduğunda genellikle işlemsel düzeyde açıklama yapan öğretmen adayları kullandıkları modeller ile işlemsel bilginin ötesine geçmişlerdir.

Uzunluk modeli ile temsili tercih etmeyen öğretmen adaylarının aslında sayı doğrusu üzerinde yer alan noktaya karşılık gelen kesri belirlemede zorlanmadıkları görülmüştür. Öğretmen adaylarından sayı doğrusu üzerinde belirtilen kesre denk kesirler elde etmeleri ve sayı doğrusunda göstermeleri istendiğinde öğretmen adayları işlemsel düzeyde bir bilgi ortaya koymuşlardır. Kesri belirledikten sonra denk kesir bilgilerini kullanarak pay ve paydayı aynı sayı ile çarparak denk kesirleri elde etmişlerdir. Öğretmen adaylarından bir tanesi ise yedi parçaya ayrılmış olan uzunlukları hep ikiye bölerek denk kesirler elde etmeye çalışmıştır. Böylece öğretmen adaylarının denk kesirlerin temsilinde uzunluk modeli kullanıma yönelik bilgilerinin zayıf olduğu ortaya çıkmıştır.

AB görüşme formunda öğretmen adayları kendilerine verilen çarpma işlemlerinin sonucunu öncelikle çarpma algoritması kullanarak elde etmişlerdir. Öğretmen adaylarına verilen işlemlerin ne anlama geldiği sorulmuştur. Öğretmen adayları iki kesrin çarpımında Noh ve Sabey (2014), Son ve Lee'nin (2006) çalışmalarında da ortaya çıkan parçanın parçası yorumunu kullanmışlardır. Doğal sayı ile kesrin çarpımında ise Azim'in (1995) çalışmasında bazı öğretmen adayları tarafından $\frac{1}{3}\times 6$ işlemi için kullanılan altının $\frac{1}{3}$'i ifadesine benzer bir ifade kullanılmıştır. Tüm öğretmen adaylarının iki kesrin çarpımı ve doğal sayı ile kesrin çarpımının anlamına yönelik bilgilerinin tam olduğu görülmüştür. Doğal sayı ile kesrin çarpımını alan modeli ile temsil eden öğretmen adayları doğal sayı kadar bütün üzerinde kesri temsil etmiş, tekrarlı toplama/eş parçaları bir araya getirip bütüne tamamlama yaklaşımını kullanmıştır. Öğretmen adaylarının doğal sayı ile kesrin çarpımına yönelik alan modeli temsilleri ve temsilleri nasıl oluşturduklarına dair açıklamaları incelendiğinde doğal sayı ile kesrin çarpımında alan modeli kullanımına yönelik yeterli düzeyde bir bilgiye sahip oldukları görülmüştür. Benzer şekilde Erdem ve diğerleri (2015) yaptıkları çalışma ile öğretmen adaylarının $2\times\frac{1}{3}$ işlemini alan modeli ile doğru şekilde temsil eden öğretmen adaylarının iki tane $\frac{1}{3}$ temsili oluşturduklarını ve daha sonra oluşan eş parçaları bütün üzerinde bir araya getirdiklerini görmüşlerdir. Doğal sayı ile kesrin çarpımını iki öğretmen adayı küme modeli ile temsil ederken, iki öğretmen adayı ise uzunluk modeli ile temsil etmiştir. Küme modeli ile temsilde öğretmen adayları yine nesneleri kesrin paydası kadar eş gruba ayırıp, pay kadar grubu seçerek temsili gerçekleştirmişlerdir. Öğretmen adaylarının oluşturdukları temsiller ve yaptıkları açıklamalar doğal sayı ile kesrin çarpımının küme modeli ile temsiline yönelik alan bilgilerinin yeterli düzeyde olduğunu göstermiştir. Uzunluk modeli kullanan öğretmen adaylarının 10'un $\frac{2}{5}$'sini bulacakları için sayı doğrusu üzerinde 0-10 arası sayılara yer verdikleri görülmüştür. Öğretmen adayları iki sayı arasını kesrin paydasının beş olması nedeni ile beş eş parçaya ayırmıştır. Kesrin payı da iki olduğu için çarpma işleminin tekrarlı toplama anlamını kullanarak $\frac{2}{5}$ birimlik uzunlukları 10 kere yineleme sonucu çarpma işleminin sonucunu elde etmişlerdir. Böylece doğal sayı ile kesrin çarpımında uzunluk modeli kullanan öğretmen adaylarının AB'lerinin yeterli düzeyde olduğu sonucuna ulaşılmıştır.

Öğretmen adayları iki basit kesrin çarpma işlemini alan modeli ile temsil ederken öncelikle bütünü ilk kesrin paydası kadar eş parçaya ayırıp, pay kadar parçasını seçmişlerdir. Elde edilen taralı kısımları artık yeni bütün olarak kabul edip bütünü ikinci kesrin paydası kadar (bu defa modeli diğer taraftan) eş parçalara ayırmış ve pay kadar parçayı seçmişlerdir. Sonuçta taralı kısımları yorumlarken en baştaki bütünü dikkate almışlardır. Burada taralı parça sayısının toplam parça sayısına oranını çarpma işleminin sonucu olarak bulmuşlardır. Benzer şekilde Erdem ve diğerleri (2015) tarafından yapılan çalışma ile öğretmen adaylarının çoğunun $\frac{1}{2} \times \frac{2}{3}$ işlemini temsil etmede aynı yaklaşımı kullandıkları ortaya çıkmıştır. Öğretmen adaylarından bir tanesi çarpma işleminin sonucunu dikdörtgenin alanından faydalanarak bulmuştur. Bir diğer öğretmen adayı ise diğer tüm öğretmen adaylarından farklı olarak iki kesri farklı modeller üzerinde temsil etmiş ve saydam kesir kartları kullanıyormuş gibi hareket etmiştir. Bu öğretmen adayının kesirlerle çarpma işleminde saydam kesir kartlarının kullanıldığı bilgisine sahip olmasından dolayı böyle bir gösterimi tercih ettiği düşünülmüştür. Tüm öğretmen adaylarının iki basit kesrin çarpımının alan modeli ile temsiline yönelik AB'lerinin yeterli düzeyde olduğu görülmüştür.

İki basit kesrin çarpma işlemini üç öğretmen adayı küme modeli ile temsil etmiştir. Bu öğretmen adayları kesirlerin EKOKu kadar sayma nesnesi alarak bu nesneleri önce ilk kesrin paydası kadar eş gruba ayırıp pay kadar eş grubu seçmişlerdir. Ardından daha önce de küme modeli ile temsil etmede gruplama fikrini kullanmayan öğretmen adayı bu temsildeki nesne sayısından hareketle yine oran-orantı kullanarak sonucu bulmuştur. Diğer iki öğretmen adayı ise gruplama fikrinden bahsetmiş, ikinci kesrin paydası kadar eş grup içerisinden pay kadar eş grubu seçmişlerdir. Bu iki öğretmen adayının küme modeli kullanımına yönelik AB’sinin yeterli düzeyde olduğu sonucuna ulaşılırken diğer öğretmen adayının ise bilgisinde eksiklerinin olduğu sonucuna ulaşılmıştır.

Basit kesir ile tamsayılı kesrin çarpma işleminin alan modeli ile temsilinde öğretmen adayları tamsayılı kesrin basit kesir kadarını almayı tercih etmişlerdir. Bu öğretmen adayları her iki temsilden edilen sonucu toplayarak çarpma işleminin sonucunu elde etmişlerdir. Öğretmen adaylarının böyle bir gösterimi tercih etmesinin nedeni olarak basit kesrin tamsayılı kesir kadarını göstermenin onlara daha zor gelecek olması düşünülmüştür. Saydam kesir kartları kullanıyormuş gibi hareket eden öğretmen adayı basit kesir ile tamsayılı kesrin çarpımında da yine aynı şekilde saydam kesir kartları kullanıyormuş gibi bir temsil oluşturmuştur. Önce üç kesrin çarpımı gibi davranıp üç temsilin kesişim noktalarını elde etmeye çalışmış ardından toplama işleminin dağılma özelliğini kullanıyor gibi temsillerden ayrı sonuçlar elde edip bunları toplayarak çarpma işleminin sonucunu bulmuştur. Bu öğretmen adayının kesirlerle çarpma işleminde saydam kesir kartlarının nasıl kullanılacağı konusundaki bilgisinin yeterli düzeyde olduğu sonucuna ulaşılmıştır.

Basit kesir ile tamsayılı kesrin çarpma işleminde üç öğretmen adayı küme modeli temsilini kullanmıştır. İpek adlı öğretmen adayı diğer iki öğretmen adayından farklı olarak bu defa basit kesrin tamsayılı kesir kadarını almıştır. Cemil ve İpek iki kesrin paydasının EKOK’u kadar sayma nesnesi alırken İlker önce tamsayılı kesri temsil ettiği için tamsayılı kesrin paydası kadar sayma nesnesi almştır. Cemil ve İpek küme modelinde bir tamı belirtip içinden kesri temsil etmek üzere nesneleri seçerken İlker ise kümesinde sadece kesri temsil edecek sayma nesnesine yer vermiştir.

İki kesrin çarpma işlemini uzunluk modeli ile yalnızca bir öğretmen adayı temsil etmiştir. Bu öğretmen adayı verilen kesrin temsil edilmesinde ve kesirlerin denk olup olmadığının belirlenmesinde de uzunluk modeli kullanmıştır. Böylece bu öğretmen adayının kesirlerde uzunluk modeli kullanımına yönelik bilgisinin yeterli düzeyde olduğu sonucuna ulaşılmıştır.

Sonuç olarak iki kesrin çarpımının öğretmen adaylarınca hem alan hem uzunluk hem de küme modelleri ile temsil edildiği görülmüştür. Benzer şekilde Toluk-Uçar (2009) tarafından yapılan çalışmada da öğretmen adaylarının uygulanan son testte ağırlıklı olarak alan modeli olmak üzere küme modeli ve sayı doğrusu modelleri de kullandığı ortaya çıkmıştır. Yine Son ve Lee'nin (2006) çalışmasında öğretmen adayları $\frac{3}{4} \times \frac{2}{3}$ işlemini hem alan hem uzunluk hem de küme modeli ile temsil etmişlerdir.

Çarpma işlemlerinde olduğu gibi bölme işlemlerinde de öğretmen adayları verilen işlemlerin çözümlerini öncelikle algoritma yardımıyla bulmuşlardır. Aldıkları eğitim ve alışmış olmaları nedeni ile öğretmen adaylarının ters çevir-çarp algoritmasını kullanma eğiliminde oldukları düşünülmüştür. Öğretmen adaylarına verilen işlemlerin ne anlama geldiği sorulmuştur. Verdikleri cevaplardan "bölmenin ölçme anlamı" olarak adlandıramasalar da öğretmen adaylarının tümünün bölmenin ölçme anlamı bilgisine sahip oldukları görülmüştür. Söz konusu tez çalışmasında elde edilen bulgunun aksine Ball (1990) öğretmen adaylarının kesirlerle bölmenin anlamı konusunda zorluklara sahip olduklarını bulmuştur. Yine Arslan-Kılcan (2006) tarafından yapılan çalışmada öğretmenlerden bazılarının kesirlerle bölme işlemini yorumlamalarının bölmenin parçalara ayırma anlamı ile sınırlı olduğu görülmüştür. Kesirlerle bölmeyi anlamak kesrin ne olduğu ve bölmenin ne anlama geldiğine dair derin bir anlayışa sahip olmayı gerektirmektedir (Matematik Bilimleri Konferans Kurulu (Conference Board of Mathematical Sciences), 2001). Flores (2002) kesirlerle bölmenin derin bir anlayışına sahip olmak için öğretmenlerin bölmenin çoklu anlamlarını ve onların kesirlerle nasıl ilişkili olduğunu ve çarpma ile bölme arasındaki ters ilişkiyi anlaması gerektiğini, kesirlerin derin anlayışına sahip olmanın öğretmenlerin öğrencilerin diğer kavramlar ve işlemlerle bağlantı kurmalarına yardım edeceği ve bu süreçlerin öğretmenler tarafından anlaşılmasına müsaade edeceğini ifade etmiştir.

AB görüşme formunda öğrencilerin en çok zorlandıkları kısım küçük kesrin büyük kesre bölümünün model ile gösterilmesi olmuştur. Öğretmen adaylarından iki tanesi bu bölme işlemini hiçbir model ile temsil edememişlerdir. Diğer iki öğretmen adayından birisi alan ve küme modeli ile temsil etmiş, bir öğretmen adayı ise sadece alan modeli ile temsil etmiştir. Cemil kesirlerin paydalarını eşitleyerek ortak payda haline getirmiş ve artık temsilde ilk kesrin payı kadar parça içerisinde ikinci kesrin payı kadar kaç parça olduğunu arar hale gelmiştir. Cemil küme modelini de aynı mantıkla oluşturmuştur. İpek ise model ile oluşturduğu sonucu bulurken biraz daha işlemsel bir bilgi kullanmıştır. Araştırmadan elde edilen bulguya paralel olarak Arslan-Kılcan (2006) yaptığı çalışma sonucunda öğretmenlerden hiçbirinin bölen kesrin bölünen kesirden büyük olduğu bir bölme işlemini anlamlandıramadıklarını ve böyle bir işlemi model kullanarak çözemediklerini ortaya çıkarmıştır.

İki kesrin bölme işleminin alan modeli ile temsilinde tüm öğretmen adayları önce bölünen kesri temsil etmiş ve içerisinde bölen kesirden ne kadar olduğunu bulmaya çalışmışlardır. Öğretmen adayları burada bölmenin ölçme anlamını kullanmışlardır. Benzer olarak Erdem ve diğerleri (2015) tarafından yapılan çalışmada da öğretmen adaylarından bazılarının $\frac{1}{3} \div \frac{1}{6}$ işlemini alan modeli ile temsil etmede aynı yaklaşımı kullandıkları görülmüştür. Yine Ball (1990) tarafından yapılan çalışmada $1\frac{3}{4} \div \frac{1}{2}$ işlemi için uygun temsiller oluşturan öğretmen adaylarının bölmenin ölçme anlamını kullanarak bir bütün ve $\frac{3}{4}$'lük kısım içinde kaç yarım olduğunu düşündükleri görülmüştür. Kesirler ortak payda haline geldiği zaman ise oluşan taralı kısımlarda bölen kesrin payı kadar kaç parça olduğunu aramışlardır. İlker en başta $\frac{1}{2}$'e bölmek ile ikiye bölmeyi karıştırmış ve oluşturduğu temsili ikiye bölerek bölme işleminin sonucunu elde etmeye çalışmıştır. Benzer şekilde Ball (1990) tarafından yapılan çalışmada bazı öğretmen adayları $1\frac{3}{4} \div \frac{1}{2}$ işlemi için iki ile bölmeyi içeren bir problem ya da model önermişler, ardından bölme işleminin $\frac{1}{2}$'i içerdiğini fark etmişlerdir. Hale kesirlerle bölme işleminin temsilinde sadece alan modeli kullanmıştır. İpek sadece tamsayılı kesrin basit kesre bölümünde küme modeli ile de temsili kullanmıştır. Cemil de İpek gibi alan modeli ve küme modeli ile temsil kullanmıştır. Kullandıkları modeller kesirlerle bölme işlemlerinde model kullanımına yönelik bilgilerinin yeterli düzeyde olduğunu göstermiştir. Kesirlerle bölme işleminde uzunluk modeli temsili kullanan tek öğretmen adayı Cemil olmuştur. Cemil'in ifadelerinden kesirlerle bölme işleminde sayı doğrusu kullanımına yönelik bilgisinin yeterli düzeyde olmadığı sonucuna ulaşılmıştır. Ardından Cemil iki kesri ortak paydalı hale getirmiş, artık doğal sayılarda bölme işlemi yapıyor gibi beş birimlik uzunluklar kullanarak bölme işlemini temsil etmiştir. Benzer şekilde Lee (2010) tarafından yapılan çalışmada öğretmenler bölünen kesir kadar uzunluğun içinde bölen kesir kadar uzunluktan kaç tane olduğu bulmaya çalışmışlardır. Diğer öğretmen adayları kesirlerle bölme işleminde uzunluk modeli kullanmasalar dahi kendilerine model ile temsili verilmiş sorudan yola çıkarak kesirlerle bölme işleminin uzunluk modeli ile temsiline yönelik alan bilgileri hakkında bir çıkarımda bulunulmuştur. Burada öğretmen adaylarının tamamının Lee'nin (2010) çalışmasındaki öğretmenler gibi üç birimlik uzunluğun $\frac{1}{2}$'lik uzunluktan ne kadar kullanılarak ölçülebileceği yaklaşımını kullandıkları görülmüştür.

5.2. Öğretmen Adaylarının Kesirlerle Çarpma ve Bölme İşlemlerinde Model Kullanımına Yönelik PAB'larına İlişkin Tartışma

Öğretmen adaylarının kesirlerle çarpma ve bölme işlemlerinde model kullanımına yönelik PAB'larına ilişkin sonuçlar ve tartışma "öğrenci bilgisi" ve "matematiksel temsiller bilgisi" bileşenlerine göre ayrı ayrı ele alınmıştır.

5.2.1. Öğretmen Adaylarının Kesirlerle Çarpma ve Bölme İşlemlerinde Model Kullanımına Yönelik Öğrenci Bilgisi Bileşenine İlişkin Tartışma

Öğrenme merkezli yaklaşımda, öğrenmeyi etkileyen en önemli faktör, öğrencilerin ön bilgileridir. Yeni bilgiler var olan bilgilerin üzerine kurulmaktadır (Baki, 2014). Öğrencilere yeni bir bilgi öğretirken ön bilgileri kullanma, öğretilecek konuyu anlamada, gözden geçirmede öğrencilere yardım etmektedir (An ve diğ., 2004). Genel olarak bakıldığında öğretmen adaylarının çoğunlukla gerekli ön bilgileri hatırlatarak derse giriş yaptıkları görülmüştür. Bu durum öğretmen adaylarının kesirlerle çarpma ve bölme işlemlerinin öğretiminde gerekli ön bilgiler konusundaki bilgilerinin yeterli denebilecek düzeyde olduğunu göstermektedir. Öğretmen adayları kesirlerle çarpma işlemini işleyecekleri derslerinde doğal sayılarda çarpma işleminin anlamı üzerinde, kesirlerle bölme işlemini işleyecekleri derslerinde ise doğal sayılarda bölme işleminin anlamı üzerinde durmuşlardır. Aynı zamanda iki kesrin çarpma ve bölme işlemlerine geçmeden önce doğal sayı ile kesrin çarpımı ve bölümünü öğrencilere hatırlatmışlardır. Öğretmen adayları bir nevi önceki dersin tekrarını yapmışlardır. Bu durum Karal-Eyüboğlu (2011), M. Baki (2012) ve Gökkurt'un (2014) çalışma sonuçlarında da ortaya çıkmıştır. Doğan-Temur (2011) tarafından yapılan çalışmada da benzer olarak kesir öğretiminde öğretmenlerin öğrencilerin ön bilgilerini yoklayarak derslerine başladıkları görülmüştür. İpek kesirlerle çarpma işlemine yönelik dersinde öğrencilere pay ve paydanın neler olduğunu sorarak kesir kavramı üzerinde de özellikle durmuş ve bu sayede öğrencilerin kesri model ile temsil etmeye yönlendirmiştir. Kesirlerle bölme işlemini işleyeceği derste de yine İpek diğer öğretmen adaylarından farklı olarak bölmenin her iki anlamı üzerinde de durmuş ve öğrenci cevapları doğrultusunda bir sonuca ulaşmışlardır. Bu durum İpek'in tüm öğrenci ön bilgisini belirlemede en başarılı öğretmen adayı olduğunu göstermektedir. Cemil ve Hale derslerinde hem doğal sayının kesre hem de kesrin doğal sayıya yönelik problemler vermesine rağmen bölmenin taşıdığı iki anlam üzerinde durmamışlardır. Hiçbir öğretmen adayı doğal sayılarda çarpma ve bölmenin model ile temsili üzerinde durmazken, Hale dersin başlangıcında doğal sayılarda bölme işleminin model ile temsiline yer vermiştir. Tüm öğretmen adayları kesrin model ile temsilinde öğrencilerin alan modeli kullanımına yönelik ön bilgilerini belirlemişlerdir. Sadece Hale ve İpek öğrencilere vermiş oldukları doğal sayı ile kesrin çarpımına yönelik problem ile küme modeli kullanımları hakkındaki ön bilgilerine dair bilgiye ulaşmışlardır.

Öğretmen adayları verilen işlemleri model üzerinde temsil ederken kesirlerle çarpma ve bölme işlemlerinin taşıdığı anlamlar ile bağlantı kurmuşlardır. Kesirleri alan modeli üzerinde temsil etme ve model ile elde edilen sonuçların kesir olarak ifade edilmesinde kesrin paydasının bütünün eş parçalarının tamamı olduğunu bilme ve kesrin payının da bütünden alınacak parçalar olması bilgisi ile bağlantı kurmuşlardır. Öğretmen adaylarının Chick ve Harris (2007) ve Bukova-Güzel'in (2010) çalışmasından elde edilen sonucu destekler nitelikte genellikle ön bilgi ile bağlantı kurdukları görülmüştür.

Hiçbir öğretmen adayının ders planında dersi planlarken öğrencilerin hata yapabileceklerini, kavram yanılgılarına sahip olabilecekleri noktaları göz önünde bulunduracaklarına dair bir ifade yer almamıştır. Öğretmen adayları öğrencilerin kesirlerle çarpma ve bölme işlemlerini model ile temsil ederken yaptıkları hataları ya da sahip oldukları kavram yanılgılarını büyük ölçüde fark edebilmişlerdir. Fakat hata ve kavram yanılgılarını ortaya çıkaracak uygun sorular sorma, öğrenci hata ve kavram yanılgılarını ortadan kaldırmak için çözüm üretmede ve bu hata ve yanılgılarının nedenlerini belirlemede eksiklikleri olduğu ortaya çıkmıştır. Genel olarak bakıldığında öğretmen adaylarının öğrencilerin kavram yanılgısına sahip olduğu ya da hata yaptığı yerlerde öğrencileri yönlendirmede eksikliklerinin olduğu görülmüştür. Bulunan sonucun aksine Kula (2011) limit kavramına ilişkin alan bilgilerinin ve alan öğretimi bilgilerinin öğretim süreçlerine yansımalarını incelediği çalışmasında öğretmen adaylarının öğrencilerin sahip olduğu kavram yanılgılarını ve anlama zorluklarını belirlemede yetersiz olduklarını gözlemlemiştir. Türnüklü ve Yeşildere (2007) tarafından yapılan çalışma da öğretmen adaylarının kesirler ve ondalık gösterim konusunda öğrencilerin kavram yanılgılarını belirlemede zorluğa sahip olduklarını göstermiştir. Gökkurt (2014) çalışmasında öğretmenleri öğrenci hataları açısından incelemiş, öğretmenlerin çoğunun genel olarak öğrenci hatalarını tespit etmede yeterli olduklarını görmüştür. Literatürde farklı matematik konuları üzerine yapılan çalışmalar da öğretmen adaylarının öğrenci hatalarını belirlemede yeterli düzeyde olduklarını göstermiştir (Stump, 1999; Karahasan, 2010; Gökkurt ve diğ., 2013; Gökkurt ve diğ., 2015). Ayrıca Gökkurt ve diğerleri de (2015) yaptıkları çalışma ile tez çalışmasında elde edilen sonucu destekler nitelikte öğretmen adaylarının öğrenci hatalarının giderilmesine yönelik çözüm önerilerinin yeterli düzeyde olmadığı sonucunu elde etmişlerdir. Yine Aksu (2015) tarafından yapılan çalışmada öğretmen adaylarının öğrenci hatalarının kaynağını belirlemede zorluk çektikleri sonucuna ulaşılmıştır. Kovarik (2008) ise yaptığı çalışma sonucunda birçok deneyimli öğretmenin öğrenci kavram yanılgıları konusunda bilgi sahibi olduğunu ortaya çıkarmıştır.

Hiçbir öğretmen adayı dersi planlarken öğrencilerin zorlanabileceği hususlar ve bu zorlukları göz önünde bulunduracaklarına dair bir ifadeye ders planında yer vermemiştir. Öğretmen adayları kesirlerle çarpma işleminde genel olarak öğrenci zorluklarını fark edemezken, kesirlerle bölme işleminde genel olarak fark edebilmişlerdir. Ayrıca genel olarak öğretmen adayları öğrenci zorluklarını ortadan kaldırmak için uygun çözümler üretememişler, bu zorlukları ortaya çıkaracak uygun sorular soramamışlar ve bu zorlukların nedenini belirleyememişlerdir. Didiş ve diğerleri (2014) etkili öğretim için öğretmenlerin öğrencilerin zorluk çektiği kavramların yanı sıra yanlış olmaları ortaya çıkarma yolları da aramaları gerektiğini ifade etmektedir. Araştırmada öğretmen adayları tarafından öğrencilerin zorluk çektiği kavramları ve yanlış anlamaları ortaya çıkarma yolları aranmamıştır. Benzer şekilde Even (1993) öğretmen adaylarının öğrencilerin yaşadıkları güçlükleri tanımlamada zorluk yaşadıklarını ortaya koymuştur. Bulunan sonucun aksine Kovarik (2008) öğretmenlerin öğrenci zorluklarını tanımlamada iyi beceriler ortaya koyduklarını bulmuştur.

Öğretmen adayları arasından yalnızca İlker Hata Kaynakları dersini almış ve hatta öğrencilerin kesirler konusundaki kavram yanılgıları üzerine bir proje tamamlamış olmasına rağmen öğrencilerin kesirlerle çarpma ve bölme işlemlerinde hata/kavram yanılgısı ve zorluklarını belirlemede ve bunların üstesinden gelmede zorlanmıştır. Bu durumun İlker'in yabancı olmasından kaynaklı olarak öğrencilerle tam olarak sağlıklı bir iletişim kuramamasından kaynaklanabileceği düşünülmekle beraber derste anlattığı konuya tam olarak hâkim olmamasının da neden olabileceği düşünülmektedir. Öğretmen adaylarının aldıkları eğitimin PAB'ları üzerinde etkisi olsa da farklı faktörlerin de PAB üzerinde etkili olduğu düşünülmüştür. Benzer olarak Kovarik'in (2008) çalışması öğretmenlik eğitiminde harcanan kısa zamanın PAB için yeterli öğretim sağlamadığını göstermiştir.

Kesirlerle çarpma işlemine yönelik dersinde Hale öğrenciler oluşturdukları modelleri gösterdikleri zaman onlara modeli nasıl oluşturduklarını sormak yerine "doğru", "yanlış" şeklinde ifadeler kullanmıştır. Didiş ve diğerlerinin (2014) çalışmasında çalışmada elde edilen bulguyu destekleyecek nitelikte öğretmen adaylarının öğrenci düşüncesinin yüzeysel ya da genel özellikleri üzerine odaklandıkları, çözüm girişimlerinin detaylarına dikkat etmedikleri, öğrencilerin düşünme biçimlerini sorgulamaktan ve tanımlamaktan ziyade doğru", "yanlış", "iyi" ifadelerini kullandıkları sonucu elde edilmiştir.

Ölçme-değerlendirme bilgisi, eğitimciler tarafından öğrenme-öğretme sürecini etkileyen en önemli unsurlardan biri olarak görülmektedir (Kaya, 2010). Genel olarak öğretmen adayları öğrencilerin ön bilgilerini ölçme/değerlendirme faaliyetinde bulunmuşlardır. Kesirlerle çarpma işleminde Hale öğrencilerin ön bilgilerini ölçmede en yetersiz ölçme/değerlendirme faaliyetinde bulunan öğretmen adayı olmuştur. Hale dersine "Model hakkında bilgisi olan var mı?" şeklinde bir soru ile başlamış ve ardından doğal sayı ile kesrin çarpımına yönelik bir probleme yer vermiştir. Hem kesirlerle çarpma işleminde hem de kesirlerle bölme işleminde öğretmen adayları öğrencilerin anlamalarını değerlendirebilecek bir faaliyet içerisinde bulunmamışlardır. Öğretmen adayları sadece ders esnasındaki gözlemleri ve öğrencilere sormuş oldukları sorular karşısında aldıkları cevaplar ve oluşturmuş oldukları temsiller ile öğrenci anlamalarını değerlendirebilmişlerdir. İpek ders sonrası öğrenci çalışma kağıtlarını inceleyerek öğrencilerin anlamaları hakkında bir bilgi edinebilmiştir. Ayrıca öğretmen adayları öğrencilerin hata ve kavram yanılgılarını değerlendirerek, öğrencilerin bu hata ve kavram yanılgılarının farkına varmalarını sağlayacak şekilde dönüt ve düzeltmede bulunmada orta düzeyde bir başarıya sahiplerdir. İpek hariç diğer öğretmen adaylarının hiçbirinin hazırlamış oldukları ders planlarında ölçme-değerlendirme kısmına yer vermemiş olmaları dikkate değer bir sonuç olarak bulunmuştur. Benzer şekilde Baştürk ve Dönmez (2011b) öğretmen adaylarının ölçme-değerlendirme bilgilerinin sınırlı olduğunu ortaya çıkarmıştır.

Öğretmen adayları hem çarpma hem de bölme işlemini işledikleri derslerinde çok miktarda soru kullanmışlardır. Fakat sordukları bu sorularla öğrenci düşüncelerini ortaya çıkarmada çok başarılı olamamışlardır. Cevaplarını genellikle kendileri söylemişler ve öğrencilerin düşünmesi için yeterli zamanı vermemişlerdir. Oysa öğretmenlerin sorduğu soruların niteliği öğrenci bilgisinin kazanımında etkili bir rol oynadığı için öğretmenler tarafından sorulan sorular oldukça önem taşımaktadır. Nitelikli soru sorabilen öğretmenlerin çocukların düşüncelerinin derinliğini daha iyi analiz edebilecekleri ifade edilmektedir (Moyer ve Milewiez, 2002). Ayrıca tüm öğretmen adayları bir soru bir model kullanılarak temsil edildiği zaman "Farklı bir şekilde gösterebilecek olan var mı?" şeklinde bir soru yönelterek farklı temsiller üzerinde gösterebilecek öğrenciler varsa bunları engellemiş ve öğrencileri alan modeli ve doğal sayı ile kesrin çarpımında İpek ve Hale'nin öğrencileri küme modeli kullanmaya yönlendirmeleri dışında bir model kullanmaya yönlendirmemişlerdir. İlker ve Cemil verilen problemler model ile temsil edilerek sonuç bulunduktan sonra algoritma kullanarak da öğrencilerden çözümlerini bulmalarını istemişlerdir. Fakat model ile bulunan sonuç ve algoritma arasında hiçbir ilişki kurmamışlardır. Öğretmen adayları genel olarak öğrencilerin oluşturdukları temsilleri anlamış ve sınıfta açıklamışlardır. Bireysel olarak düşünüldüğünde kesirlerle çarpma işleminde İlker iki kesrin çarpımı işlemlerinde öğrencilerin modellerini oluşturmalarına ve açıklamalarına imkân tanımak yerine kendisi temsili gerçekleştirmiştir.

Sonuç olarak öğretmen adaylarının öğrenci bilgilerinin orta düzeyde olduğu görülmüştür. Benzer şekilde Şahin ve diğerleri (2014) ile Gökkurt ve diğerleri (2015) yaptıkları çalışma ile öğretmen adaylarının öğrenci bilgilerinin orta düzeyde olduğunu belirlemişlerdir.

5.2.2. Öğretmen Adaylarının Kesirlerle Çarpma ve Bölme İşlemlerinde Model Kullanımına Yönelik Matematiksel Temsiller Bilgisi Bileşenine İlişkin Tartışma

Öğretmen adaylarından kesirlerle çarpma ve bölme işlemlerinde algoritmayı keşfettirmek amaçlı bir öğretim gerçekleştirmeleri ve bu amaçla model kullanmaları beklenirken iki öğretmen adayının hem kesirlerle çarpma hem de kesirlerle bölme işlemine yönelik derslerinde bu amacı gerçekleştirmeye çalıştığı, diğer iki öğretmen adayının ise model ile temsilin ardından öğrencilerin sonucu bir de algoritma ile bulmalarını isteyerek modeli kesirlerle çarpma ve bölme işlemi yapmanın bir yolu olarak kullandıkları görülmüştür. Oysa ki öğrencilerin kesirlerle ilgili sorun yaşamalarının temelinde büyük ölçüde formülleri ve algoritmaları ezberleme çabaları yatmaktadır (Hanson, 1995'den akt. Biber ve diğ., 2013). Bu iki öğretmen adayı işlemlerin model ile temsiline yer vermiş olmalarına rağmen kullanılan algoritma ve oluşturulan model arasında bir bağlantı kurmadıkları için öğrencilerin algoritmanın altında yatanın ne olduğunu kavramalarına engel oldukları düşünülmektedir.

Doğal sayı ile kesrin çarpımında öğretmen adayları doğal sayı adedince bütün üzerinde kesri temsil etmiş ve ardından taralı kısımları bir araya getirerek bütüne tamamlama yaklaşımını kullanmış ve öğrencileri de bu şekilde temsil etmeye yönlendirmişlerdir. Öğretmen adaylarının burada öğrenciler için uygun bir model seçtikleri ve uygun bir yaklaşımı benimsedikleri görülmüştür. Böylece öğrencilere bütün üzerindeki parçaların eş parçalar olduğu bilgisini de vurgulamış ve hatırlatmışlardır.

İpek ve Hale derslerinde doğal sayı ile kesrin çarpımında bir de küme modeli kullanımına yer vermişlerdir. İpek ve Hale burada soruda geçen doğal sayının büyük olması nedeni ile öğrencilerin 24 ve 25 bütün çizmekte zorlanabileceklerini düşünmüş ve bu nedenle de problemin küme modeli ile temsilini gerçekleştirmişlerdir. İpek ve Hale'nin burada öğrencilerin zorlanacakları hususları dikkate alarak bir model tercih ettikleri görülmüştür. Fennema ve Franke (1992) matematiğin anlaşılabilir temsillere çevirisinin matematik öğretmenini matematikçiden ayıran şey olduğunu ifade etmektedir. Norwood (1994) ise örnek seçimi ve temsillerin aynı zamanda öğrencilerin matematik öğrenmeye karşı olan inançlarını da etkilediğini ifade etmektedir. Bu iki öğretmen adayı (İpek ve Hale) da öğrenciler için daha anlamlı olacağını düşünerek verilen problemleri anlaşılır temsillere çevirerek küme modeli kullanmayı tercih etmişlerdir.

İki kesrin çarpımında tüm öğretmen adaylarınca ortak ve en çok kullanılan model alan modeli olmuştur. Benzer şekilde Çelik ve Çiltaş (2015) ile Doğan-Temur'un (2011) çalışmalarında öğretmenler tarafından kesir öğretiminde en çok kullanılan modelin alan modeli olduğu sonucu ortaya çıkmıştır. Öğretmen adaylarının öğrenciler için daha anlaşılır olacağını düşünmeleri ve öğrencilerin alan modeli kullanımına aşina olduklarını düşünmeleri nedeni ile derslerinde alan modeli kullanmayı tercih ettikleri düşünülmektedir. Ayrıca öğretmen adayları işlemleri genellikle dikdörtgen şekli üzerinde temsil etmeyi tercih etmişlerdir. Dikdörtgenin eş parçalara ayırmanın daha kolay olması nedeni ile tercih edildiği düşünülmektedir. Öğretmen adayları burada kesri bütünü kesrin paydası kadar eş parçaya ayırma, bu eş parçalar arasından pay kadar parçayı seçme, taralı kısımları yeni bütün olarak alma, bu taralı kısımlar içinde eğer ikinci kesrin paydası kadar eş parça varsa pay kadar eş parçayı seçme ve son olarak elde edilen taralı kısımların toplam parça sayısı içindeki oranını dikkate alma yaklaşımını kullanmışlardır. Ya da bütünü diğer taraftan ikinci kesrin paydası kadar daha eş parçaya ayırıp, pay kadar parçasını seçerek kesişen taralı alanları dikkate almışlardır. Öğretmen adayları çarpma işleminin anlamını kullanarak bir temsil oluşturmuş ve öğrencilerin oluşturacakları temsillerde bu yönde bir yönlendirmede bulunmuşlardır. Aynı zamanda bütünü parçalama esnasında eş parçalara ayrılacağı fikri vurgulanmıştır. Öğrencilerin kesirleri öğrenmesindeki bilişsel engellerden birinin eş parçalama kavramı olduğu ifade edilmektedir (Chestnut-Andrews). Küçük çocuklar okula bütünü parçalara ayırmanın informel bilgisi ile gelmelerine rağmen formel öğretimden sonra bile eş parçalamanın formal temsilinde zorluğa sahiptirler (Lamon, 1996). Araştırmada öğrencilerin eş parçalama konusunda zorluğa sahip olduklarının görülmesi ya da zorluğa sahip olabileceklerinin düşünülmesi nedeni ile öğretmen adayları tarafından eş parçalama fikri vurgulanmıştır.

İki kesrin çarpma işleminde Cemil dersinde yer vermemesine rağmen hazırlamış olduğu ders notlarında küme modeli ile temsile de yer vermiştir. Cemil'in uygun bir temsil oluşturduğu sonucuna ulaşılmıştır. Öğrenciler için anlamanın daha zor olacağı düşüncesiyle küme modeline dersinde yer vermediği ve bu durumun "öğretimde en önemli şey kullanım için en etkili modelin seçimidir" ifadesine uygun olduğu düşünülmektedir (Harvey, 2012).

İki kesrin çarpımının uzunluk modeli ile temsiline Cemil dersinde ve hazırlamış olduğu notlarda yer vermiş, İlker ise sadece hazırlamış olduğu notlarda yer vermiştir. Öğretmen adayları burada sayı doğrusu üzerinde ilk kesri temsil etmek üzere iki sayı arasını payda kadar eş parçaya ayırmış ve elde edilen uzunluğu pay kadar yinelemişlerdir. Ulaşılan uzunluğu artık yeni bütün olarak alıp, ikinci kesrin paydası kadar eş parça oluşmuşsa pay kadar parçayı seçmişler ve bu birim kesir kadar uzunluğun kaç kere yinelendiğini inceleyerek sonucu bulmuşlardır. Cemil'in dersinde farklı bir model kullanımını da öğrencilere göstermek ve öğrencilerin sayı doğrusu üzerinde gösterimi bildiklerini düşünmeleri nedeni ile böyle bir gösterimi tercih ettiği düşünülmektedir. Ball (1990) öğretmenlerin matematiksel fikirleri farklı şekillerde temsil edebilmeye ihtiyaç duyduklarını belirtmektedir.

Kesirlerle bölme işleminde öğretmen adayları tarafından kullanılan tek model alan modeli olmuştur. Çalışmadan elde edilen sonucu destekler nitelikte Kovarik (2008) çalışmasında öğretmenlerin birden fazla gösterim alanından yoksun olduklarını ortaya çıkarmıştır. Öğretmen adayları doğal sayının kesre bölümünde ve iki kesrin bölümünde bölmenin ölçme anlamından faydalanarak temsiller oluşturmuş ve öğrencileri yönlendirmiş, kesrin doğal sayıya bölümünde ise bölmenin parçalara ayırma anlamı üzerinde durmuşlardır.

Öğretmen adaylarının öğrencilere daha anlamlı gelecek olması düşüncesi ile sadece alan modeli temsili kullandıkları düşünülmektedir.

Öğretmen adayları doğal sayının kesre bölümünde doğal sayı kadar bütün içerisinde kesir kadar kaç parça olduğunu hesaplamışlardır. Kesrin doğal sayıya bölümünde bütünü kesrin paydası kadar eş parçaya ayırıp, pay kadarını seçerek kesri temsil etmiş, taralı kısımları doğal sayı adedince eş parçaya ayırmış, elde edilen toplam parça sayısını verilen doğal sayıya bölerek elde edilen parça sayısının bütün içindeki oranını dikkate almışlardır. İki ksrin temsilinde ise bölünen kesri alan modeli ile temsil ettikten sonra bölmenin ölçme anlamını kullanarak bölünen kesir kadar kısım içerisinde bölen kesirden ne kadar olduğunu belirlemeye çalışmışlardır. Öğretmen adaylarının oluşturdukları temsiller ve öğrencileri yönlendirmeleri incelendiği zaman kesirlerle bölme işlemini alan modeli ile temsilde uygun ve doğru modeller oluşturdukları görülmüştür. Fakat İlker ve Cemil algoritma ile model arasında bir bağlantı kurmadığı için derste model kullanma amaçlarının gereğini yerine getirememişlerdir. Bu nedenle Cemil ve İlker'in daha işlemsel bilgiye odaklı bir ders yürüttükleri düşünülmektedir. Kula (2011) yaptığı çalışmasında çalışmanın sonucuyla paralel şekilde üç öğretmen adayının kavramsal bilgiyi geliştirmeye daha çok odaklanırken, bir öğretmen adayının ise öğretimi işlemsel bilgiye odaklı sürdürdüğünü görmüş, Arslan-Kılcan (2006) kesir kavramıyla ilgili yaptığı çalışmasında dört öğretmenden üç tanesinin işlemsel bilgiye, bir tanesinin ise kavramsal bilgiye odaklı öğrenme ortamları sunarak derslerini yürüttüklerini gözlemlemiştir.

Öğretmen adayları tarafından, belirlenen 6.1.4.4. ve 6.1.4.7. kazanımlarının uygulamaları yıllık plandaki zamanından sonra gerçekleştirilmiştir. Öğrenciler daha önceden kesirlerle çarpma ve bölme işlemlerini algoritma kullanarak gerçekleştirdikleri için öğretmen adayları tarafından verilen problemlerin çözümünü model yardımı ile yapmak yerine algoritma kullanarak gerçekleştirme eğiliminde olmuşlardır. Öğretmen adaylarının da bu nedenle algoritmayı öğrencilere keşfettirme konusunda zorlandıkları düşünülmüştür. Çarpma ve bölme işlemlerinin nasıl yapıldığını bilen öğrenciler model ve algoritma arasında bir bağlantı kurmaya çalışmamışlardır.

5.3. Öğretmen Adaylarının Kesirlerle Çarpma ve Bölme İşlemlerinde Model Kullanımına Yönelik AB'lerini Öğretime Nasıl Yansıttıklarına İlişkin Tartışma

Öğretmen adaylarından AB görüşme formu aracılığıyla elde edilen cevaplar ve öğretmen adaylarını ders gözlemleri birlikte incelendiği zaman tüm öğretmen adaylarının hem kesirlerle çarpma hem de kesirlerle bölme işlemine yönelik derslerinde AB'lerini öğretimlerine yansıttıkları görülmüştür. Öğretmen adayları derste sahip oldukları AB'leri doğrultusunda temsiller oluşturmuş, öğrencileri de temsil oluştururken sahip oldukları AB'leri doğrultusunda yönlendirmişlerdir. Öğrencilerin yaptığı hatayı ve sahip oldukları kavram yanılgılarını kendi AB'leri sayesinde fark edebilmişler ve öğrencilere temsilleri oluştururken AB'leri doğrultusunda yönlendirmişlerdir. Örneğin, öğrenci kesri temsil ederken bütünü payda kadar eş parçaya ayırmamışsa bunu fark etmişler ve bütünün payda kadar ve eş parçalara ayrılacağını vurgulamışlardır. Sonuç olarak AB'nin öğrenci bilgisi ve matematiksel temsiller bilgisi üzerinde etkisinin olduğu yani, PAB'ı doğrudan etkilediği ortaya çıkmıştır. Benzer şekilde Even (1993) ortaöğretim matematik öğretmen adaylarının türev kavramına ilişkin AB'lerini ve PAB'larını incelediği çalışmasında AB'nin PAB'ı etkilediği sonucuna ulaşmıştır. Yine Wilson (1994) tarafından yapılan çalışmada yetersiz AB'nin PAB'ın özellikle açıklamalar ve temsillerle ifade bileşenlerinde eksikliklere neden olduğu bulunmuştur. Türnüklü ve Yeşildere (2007) de yaptıkları çalışma sonucunda matematik öğretim bilgisi ile matematik bilgisi arasında bağlantının olduğunu bulmuşlardır. Alanyazında rastlanan birçok çalışmanın yapılan çalışmanın sonucunu destekler nitelikte olduğu görülmüştür (Boz, 2004; Türnüklü, 2005; Capraro ve diğ., 2005; Gökkurt ve diğ., 2012; Aksu ve Konyalıoğlu, 2015). Gökkurt (2014) ve Gökbulut da (2010) yaptıkları çalışmalar ile elde edilen sonucu destekler nitelikte konu alan bilgisinin öğrenci bilgisini etkilediği sonucuna ulaşmışlardır. Öğretmenlerin AB düzeyleri yeterli olmadığı takdirde eksik bilgilerini öğrencilere aktarabilecekleri, öğrencilerin öğrenme güçlüklerini, hatalarını veya kavram yanılgılarını değiştirmekte başarısız olabilecekleri, yazılı kaynakları eleştirel bir şekilde kullanamayacakları belirtilmektedir (Hashweh, 1987; Kapyla, Heikkinen ve Asunta, 2009; Bukova-Güzel, Uğurel, Özgür ve Kula, 2010).

5.4. Öneriler

Kesirlerin öğrencilerin öğrenmede zorlandıkları bir konu olması nedeni ile kesirlerin anlaşılmasını kolaylaştıracak birtakım yollara ihtiyaç vardır. Bu yollardan bir tanesi de kesir kavramlarının öğretiminde modellere yer vermektir. Öğretmenlerin derslerinde uygun ve doğru modeller kullanması önem teşkil etmektedir. Öğretmenlerin derslerinde doğru ve uygun modeller kullanabilmeleri için öncelikle kendilerinin model kullanımı konusunda yeterli birAB'ye sahip olmaları gerekmektedir. Bu noktada Eğitim Fakültelerinde öğretim üyelerinin Özel Öğretim Yöntemleri ve Geogebra kullanılarak gerçekleştirilecek Öğretim Teknolojileri ve Materyal Tasarımı derslerinde kesirlerde model kullanımı konusunda öğrencileri yeterli derecede bilgilendirmesi, öğrencilerin bu konuda gereken AB'ye sahip olmalarını sağlamaya gayret etmesi gerekmektedir. Ayrıca AB'nin PAB'ı etkilediği göz önüne alındığında tam ve eksiksiz AB'ye sahip olmak önem taşımaktadır.

Öğretimden önce ve öğretim esnasında doğru kararlar verebilmek ve öğrencilerin ihtiyaçlarını göz önünde bulundurabilmek için öğretmen adayları mesleğe başlamadan önce öğrencilerin düşünme biçimleri hakkında bilgi sahibi olmalıdır. Üniversitelerdeki öğretim üyelerinin öğretmen adaylarında öğrenci düşüncesi bilgisinin gelişimine önem vererek, vereceği eğitimi öğrenci düşüncesi bilgisini geliştirici yönde planlaması önerilmektedir. Eğitim Fakültelerindeki öğretmenlik programlarının öğrencilerin yazılı açıklamaları, öğrencilerin sözlü açıklamalarının ya da derslerin video kayıtları, tahtadaki çizimler gibi gerçek sınıflardan elde edilen örnekler kullanılarak öğrencilerin düşünme yollarının yorumlanması ve anlaşılmasını geliştirmek için öğretmen adaylarına yardımcı olması sağlanabilir. Yapılan çalışma neticesinde öğretmen adaylarının öğrencilerin hata/kavram yanılgılarını farkedebilmelerine rağmen, bu hata/kavram yangılarını gidermek için uygun çözümler üretmede, uygun sorularla öğrencilerin hata/kavram yanılgılarını ortaya çıkarmakta eksikliklerinin olduğu görülmüştür. Bu noktadan hareketle üniversitede alınan derslerde öğrencilerin kesirler/kesirlerle işlemler ve bu işlemlerin model ile temsilinde öğrencilerin zorlanabilecekleri, hata ve kavram yanılgısına sahip olabilecekleri noktaların üzerinde durularak, bu zorluk/hata/kavram yanılgılarının giderilmesine yönelik uygun çözümler üretilmesi, öğrencilerin hepsinin fikirlerini beyan ederek çok sayıda görüş ve önerinin ortaya çıkması sağlanabilir.

Yapılan çalışma neticesinde elde edilen bir diğer sonuç öğretmen adaylarının öğrenci anlamalarını tam olarak değerlendirememeleri olmuştur. Bu noktada öğretmen adaylarının alacakları Ölçme-Değerlendirme dersinde ölçme-değerlendirme teknikleri hakkında bilgilendirilmeleri, model kullanarak işledikleri matematik eğitimi derslerinde öğrencilerin anlamalarını nasıl değerlendirebileceklerine dair bilgiye sahip olmaları gerektiği düşünülmektedir.

Söz konusu tez çalışması kapsamında öğretmen adaylarının kesirlerde model kullanımına yönelik PAB'ları "öğrenci bilgisi" ve "matematiksel temsiller bilgisi" bileşenleri bağlamında incelenmiştir. Öğretmen adaylarının kesirlerde model kullanımına yönelik PAB'ları hakkında daha fazla bilgi sahibi olmak için farklı PAB bileşenleri doğrultusunda da bir çalışma gerçekleştirilebilir. Çalışmada öğretmen adaylarının kesirlerle çarpma ve bölme işlemlerine yönelik PAB'ları incelenmiştir. Yapılacak farklı çalışmalar ile öğretmen adaylarının kesirlerle toplama-çıkarma, denklik, sıralama gibi farklı konulara ve bu konuların model ile öğretimine yönelik olarak da PAB'ları incelenebilir. Aynı zamanda kesirler dışında farklı konular için de öğretmen adaylarının model kullanımına yönelik PAB'ları incelenebilir.

Bu tez çalışması öğretmen adayları ile gerçekleştirilmiştir. Aynı çalışma bir de ortaokul matematik öğretmenleri ile gerçekleştirilerek hem öğretmenlerin kesirlerde model kullanımına yönelik AB'leri ve PAB'ları incelebilir hem de böylece öğretmen adayları ile öğretmenler arasında bir farklılık olup olmadığı belirlenebilir.

KAYNAKÇA

Abd Rahman, F., & Scaife, J. A. (2005). Assessing pre service teachers' pedagogical content knowledge using a bricolage approach. *International Journal of Learning*, *12*(10), 81-91.

Akgün, L., Çiltaş, A., Deniz, D., Çiftçi, Z., ve Işık, A. (2013). İlköğretim matematik öğretmenlerinin matematiksel modelleme ile ilgili farkındalıkları. *Adıyaman Üniversitesi Sosyal Bilimler Enstitüsü Dergisi, 12*, 1-34.

Akkaş, E. N. (2014). *Ortaokul 5. ve 7. sınıf matematik öğretmenlerinin geometri öğretim süreçlerinin ve geometrik-pedagojik alan bilgilerinin incelenmesi*. (Yayınlanmamış doktora tezi). Dokuz Eylül Üniversitesi, İzmir.

Aksu, Z., ve Konyalıoğlu, A. C. (2015). Sınıf öğretmen adaylarının kesirler konusundaki pedagojik alan bilgileri. *Kastamonu Üniversitesi Eğitim Dergisi*, *23*(2), 723-738.

Alacaci, C. (2014). Öğrencilerin kesirler konusundaki kavram yanılgıları. İçinde Bingölbali, E. ve Özmantar, M. F. (Ed.), *İlköğretimde karşılaşılan matematiksel zorluklar ve çözüm önerileri* (s. 63-94). Ankara: Pegem Akademi Yayıncılık.

Altaylı, D., Konyalıoğlu, A. C., Hızarcı, S., ve Kaplan, A. (2014). İlköğretim matematik öğretmen adaylarının üç boyutlu cisimlere ilişkin pedagojik alan bilgilerinin incelenmesi. *Middle Eastern & African Journal of Educational Research, 10,* 4-24.

An, S., Kulm, G., & Wu, Z. (2004). The pedagogical content knowledge of middle school, mathematics teachers in China and the U.S. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *7*, 145–172.

Arslan-Kılcan, S. (2006). *İlköğretim matematik öğretmenlerinin kesirlerde bölmeye ilişkin kavramsal bilgi düzeyleri.* (Yayınlanmamış yüksek lisans tezi). Abant İzzet Baysal Üniversitesi, Bolu.

Atay, D., Kaslıoğlu, Ö., & Kurt, G. (2010). The pedagogical content knowledge development of prospective teachers through an experientel task. *Procedia Social and Behavioral Sciences, 2*, 1421-1425.

Auseon, J. (1995). The role of pedagogical and subject matter knowledge in preservice art teaching. *Marilyn Zurmuehlen Working Papers in Art Education*, *13*(1), 54-68.

Azim, D. S. (1995, October). Preservice elementary teachers' understanding of multiplication involving fractions. The Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Colombus.

Baker, M., & Chick, H. (2006). *Pedagogical content knowledge for teaching primary mathematics: a case study of two teachers*. http://www.merga.net.au/documents/RP32006.pdf adresinden elde edilmiştir.

Baki, A. (1997). Çağdaş gelişmeler ışığında matematik öğretmenliği eğitimi programları. *Eğitim ve Bilim Dergisi*, *21*(1), 46-54.

Baki, A. (2010). Öğretmen eğitiminin lisans ve lisansüstü boyutlardan değerlendirilmesi. *İnönü Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi*, *11*(3), 15-31.

Baki, A. (2012, Haziran). *Matematik öğretme bilgisi*. Sözlü bildiri, X. Ulusal Fen Bilimleri ve Matematik Eğitimi Kongresi, Niğde Üniversitesi, Niğde.

Baki, A. (2014). *Kuramdan uygulamaya matematik eğitimi* (5. Baskı). Trabzon: Harf Yayınları.

Baki, M. (2012). *Sınıf öğretmeni adaylarının matematiği öğretme bilgilerinin gelişiminin incelenmesi: Bir ders imecesi (lesson study) çalışması*. (Yayımlanmamış doktora tezi). Karadeniz Teknik Üniversitesi, Trabzon.

Ball, D. L. (1988). Unlearning to teach mathematics. *For the Learning of Mathematics, 8*(1), 40–48.

Ball, D. L. (1990). Prospective elementary and secondary teachers' understanding of division. *Journal for Research in Mathematics Education*, *21*(2), 132–144

Ball, D. L., & McDiarmid, G. W. (1990). The subject matter preparation of teachers. In R. Houston (Ed.), *Handbook for research on teacher education* (pp. 437-449). Newyork: Macmillan.

Ball, D. L. (1993). Halves, pieces and twoths: constructing and using representational contexts in teaching fractions. In T.P. Carpenter, E. Fennema & T. A. Romberg (Ed.), *Rational numbers: an integration of research* (pp.157-195). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates, Inc.

Ball, D. L., & Cohen, D. K. (1999). Developing practice, developing practitioners: toward a practice-based theory of professional education. In G. Sykes & L. Darling-Hammond (Ed.), *Teaching as the learning profession: Handbook of policy and practice* (pp. 3-32). San Francisco: Jossey Bass.

Ball, D. L., & Bass, H. (2000). Interweaving content and pedagogy in teaching and learning to teach: knowing and using mathematics. In J. Boaler (Ed.), *Multiple perspectives on teaching and learning of mathematics* (pp. 83-104). Westport, CT: Ablex.

Ball, D. L., & Bass, H. (2003). Toward a practice-based theory of mathematical knowledge for teaching. In B. Davis & E. Simmt (Ed.), *Proceedings of the 2002 annual meeting of the Canadian mathematics education study group* (pp.3-14). Edmonton, Alberta, Canada: Canadian Mathematics Education Study Group.

Ball, D. L., Thames, M. H., & Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: what makes it special? *Journal of Teacher Education*, *59*(5), 389–407.

Banks, F., Leach, J., & Moon, B. (2005). Extract from new understandings of teachers pedagogic knowledge. *The Curriculum Journal*, *16*(3), 331-340.

Baştürk, S., & Dönmez, G. (2011a). Examining preservice teachers' pedagogical content knowledge with regard to curriculum knowledge, *International Online Journal of Educational Sciences, 3*(2), 743-775.

Baştürk, S., ve Dönmez, G. (2011b). Matematik öğretmen adaylarının pedagojik alan bilgilerinin ölçme ve değerlendirme bilgisi bileşeni bağlamında incelenmesi. *Ahi Evran Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi*, *12*(3), 17-37.

Bayazit, İ., Aksoy, Y., ve Kırnap, S. M. (2011). Öğretmenlerin matematiksel modelleri anlama ve model oluşturma yeterlilikleri. *e-Journal of New World Sciences Academy Education Sciences, 6*(4), 2495-2516.

Baykul, Y. (2014). *Ortaokulda matematik öğretimi (5-8. Sınıflar).* Ankara: Pegem Akademi Yayıncılık.

Behr, M. J., Lesh, R., Post., T., & Silver, E. A. (1983). Rational number concepts. In R. Lesh & M. Landau (Ed.), *Acquisitions of mathematics concepts and process* (pp. 92-126). Newyork: Academic Press.

Biber, A. Ç., Tuna, A., ve Aktaş, O. (2013). Öğrencilerin kesirler konusundaki kavram yanılgıları ve bu yanılgıların kesir problemleri çözümlerine etkisi. *Trakya Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi, 3*(2), 152-162.

Birgin, O., ve Gürbüz, R. (2009). İlköğretim II. kademe öğrencilerinin rasyonel sayılar konusundaki işlemsel ve kavramsal bilgi düzeylerinin incelenmesi. *Uludağ Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi, 22*(2), 529-550.

Blum, W. (1993). Mathematical modelling in mathematics education and instruction. In Breiteig (Ed.), *Teaching and Learning Mathematics in Context* (pp. 3-14). Chichester: Ellis Horwood Limited.

Blum, W., & Ferri, B. (2009). Mathematical modelling: can it be taught and learned. *Journal of Mathematical Modelling and Application, 1*(1), 45-58.

Bolat, M., & Sözen, M. (2009). Knowledge levels of prospective science and physics teachers on basic concepts on sound (sample of Samsun city). *Procedia Social and Behavioral Science, 1*, 1231–1238.

Borko, H., Eisenhart, M., Brown, C. A., Underhill, R. G., Jones, D., & Agard, P. C. (1992). Learning to teach hard mathematics: do novice teachers and their instructors give up too easily. *Journal for Research in Mathematics Education, 23*(3), 194-222.

Boz, N. (2004, Temmuz). *Öğrencilerin hatasını tespit etme ve nedenlerini irdeleme.* Sözlü bildiri, XIII. Ulusal Eğitim Bilimleri Kurultayı, İnönü Üniversitesi Eğitim Fakültesi.

Bukova- Güzel, E. (2010). An investigation of pre-service mathematics teachers' pedagogical content knowledge, using solid objects. *Scientific Research and Essays, 5*(14), 1872-1880.

Bukova-Güzel, E., Uğurel, I., Özgür, Z., & Kula, S. (2010). The review of undergraduate courses aimed at developing subject matter knowledge by mathematics student teachers. Procedia-Social and Behavioral Sciences, *2*(2), 2233-2238.

Bütün, M. (2005*). İlköğretim matematik öğretmenlerinin alan eğitimi bilgilerinin nitelikleri üzerine bir çalışma*. (Yayınlanmamış yüksek lisans tezi). Karadeniz Teknik Üniversitesi, Trabzon.

Büyüköztürk, Ş., Kılıç-Çakmak, E., Akgün, Ö. E., Karadeniz, Ş. ve Demirel, F. (2013). *Bilimsel araştırma yöntemleri* (15. Baskı). Ankara: Pegem Yayınları.

Cankoy, O. (2006). Matematik Öğretmenlerinin a^0, 0! ve a ÷ 0 ile ilgili konu temelli pedagojik alan bilgileri. *Kuram ve Uygulamada Eğitim Bilimleri*, *10*(2), 729-769.

Capraro, R. M., Capraro, M. M., Parker, D., Kulm, G., & Raulerson, T. (2005). The mathematics content knowledge role in developing preservice teachers' pedagogical content knowledge. *Journal of Research in Childhood Education, 20* (2), 108-124.

Charalambous, C. Y., & Pitta-Pantazi, D. (2005). Revisiting a theoretical model on fractions: implications for teaching and research. In Chick, H. L., & Vincent, J. L. (Ed.). *Proceedings of the 29th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, (2, pp. 233-240). Melbourne: PME.

Charalambous, C., & Pitta-Pantazi, D. (2007). Drawing on a theoretical model to study students' understandings of fractions. *Educational Studies in Mathematics*, *64*(3), 293–316.

Chestnut- Andrews, A. (2007). *Pedagogical content knowledge and scaffolds: measuring teacher knowledge of equivalent fractions in a didactic setting*. (Unpublished doctoral thesis). City University, Newyork.

Chick, H. Baker, M. Pham, T., & Cheng, H. (2006). *Aspects of teachers' pedagogical content knowledge for decimals.* Sözlü Bildiri, 30th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Prague.

Chinappan, M., & Desplat, B. (2000). Contextualisation of fractions: teachers' pedagogical and mathematical content knowledge for teaching. *Journal of Science and Mathematics Education in Southeast Asia*, *35*(1), 43-59.

Cluff, J. J. (2005). Fraction multiplication and division image change in pre-servise elementary teachers. (Unpublished master's thesis). Brigham Youth University, Provo, Utah.

Cochran, K. E., King, R. A., & DeRuiter, J. A. (1993). Pedagogical content knowing: An integrative model for teacher preparation. *Journal of Teacher Education, 44*(4), 263-272.

Cohen, L., Manion, L., & Morrison, K. (2005). *Research methods in education* (5. Baskı). London: Routledge.

Common Core State Standards (CCSS). (2010). *Mathematics standards.* http://www.corestandards.org/Math/ adresinden elde edildi.

Conference Board of the Mathematical Sciences. (2001). *The mathematical education of teachers*. Washington, DC: American Mathematical Society.

Contreras, J. N., & Martinez-Cruz, A. M. (2014). Prospective elementary teachers' explicit knowledge of the arbitrary nature of the unit within contexts involving fractions. *Journal of Mathematical Sciences & Mathematics Education, 9*(2), 43-51.

Cramer, K., & Henry, A. (2002). Using manipulative models to build number sense for addition of fractions. In B. Litwiller & G. Bright (Ed.), *Making Sense of Fractions, Ratios, and Proportions: 2002 Yearbook* (pp. 41-48). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Creswell, J. W. (2013). *Qualitative inquiry and research design: choosing among five approaches* ((M. Bütün ve S. B. Demir, Cev. Ed). Ankara: Siyasal Kitabevi.

Creswell, J. W. (2014). *Research design qualitative, quantitative and mixed methods approaches* (4. Baskı). (S. B. Demir, Cev.Ed.). Ankara: Eğiten Kitap Yayınevi.

Çelik, B., ve Çiltaş, A. (2015). Beşinci sınıf kesirler konusunun öğretim sürecinin matematiksel modeller açısından incelenmesi. *Bayburt Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi, 1*(10), 180-204.

Çelikten, M., Şanal, M., ve Yeni, Y. (2005). Öğretmenlik mesleği ve özellikleri. *Erciyes Üniversitesi Sosyal Bilimler Enstitüsü Dergisi, 19*(2), 207-237.

Davis, G., Hunting, R., & Pearn, C. (1993). Iterates and relation: Elliot and shannon's fraction shemes. In I. Hirabayashi, N. Nohda, K. Shigematsu & F. Lin (Ed.) *Proceedings Of The Seveenth Conference of The International Group for The Psychology of Mathematics Education* (154-161).

Davis, B., & Simmt, E. (2006). Mathematics-for-teaching: an ongoing investigation of the mathematics that teachers (need to) know. *Educational Studies in Mathematics, 61*(3), 293-319.

De Castro, B. V. (2004). Pre-service teachers' mathematical reasoning as an imperative for codified conceptual pedagogy in algebra: a case study in teacher education. *Asia Pacific Education Review, 5*(2), 157 – 166.

De Castro, B. V. (2008). Cognitive Models: The Missing Link to Learning Fraction Multiplication and Division. *Asia Pasific Education Review, 9*(2), 101-112.

Didiş, M. G., Erbaş, A. K., Çetinkaya, B., & Çakıroğlu, E. (2014). Prospective secondary mathematics teachers' interpretations of students' thinking. *Research in Mathematics Education, 16*(1), 77-78.

Doğan Temur, Ö. (2011). Dördüncü ve beşinci sınıf öğretmenlerinin kesir öğretimine ilişkin görüşleri: fenomenografik araştırma. *Dumlupınar Üniversitesi Sosyal Bilimler Dergisi*, *29*, 203-212.

Dönmez, G. (2009). *Matematik öğretmen adaylarının limit ve süreklilik kavramlarına ilişkin pedagojik alan bilgilerinin değerlendirilmesi.* (Yayınlanmamış yüksek lisans tezi). Marmara Üniversitesi, İstanbul.

Elbaz, F. (1981). The Teacher's "Practical Knowledge" Report of a Case Study. *Curriculum Inquiry*, *11*(1), 43-71.

Erdem, E., ve Soylu, Y. (2013). Öğretmen adaylarının KPSS ve alan sınavına ilişkin görüşleri. *Çankırı Karatekin Üniversitesi Sosyal Bilimler Enstitüsü Dergisi*, *4* (1), 223-236.

Erdem, E., Gökkurt, B., Şahin, Ö., Başıbüyük, K., & Soylu, Y. (2015). Examining prospective middle school mathematics teachers' modelling skills of multiplication and division in fractions. *Croatian Journal of Education*, *17*(1), 11-36.

Even, R. (1989). Prospective secondary mathematics teachers' knowledge and understanding of mathematical functions. (Unpublished doctoral thesis). Michigan State University, Michigan.

Even, R. (1993). Subject-matter knowledge and pedagogical content knowledge: prospective secondary teachers and the function concept. *Journal of Research in Mathematics Education*, *24*(2), 94–116.

Fennema, E., & Franke, M.L. (1992). Teachers knowledge and its impact. In D.A. Grouws (Ed.), *Handbook of mathematics teaching and learning* (pp. 147–164). New York: Macmillan Publishing Company.

Flores, A. (2002). Profound understanding of division of fractions. In B. Litweller & G. Bright (Ed.), *Making sense of fractions, ratios, and proportions* (pp. 237-246). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics Inc.

Gess-Newsome, J. (1999). Pedagogical content knowledge: An Introduction and Orientation. In J. Gess-Newsome & N. G. Nederman (Ed.), *Examining pedagogical content knowledge* (pp. 3-17). Dortrecht: Kluwer Academic Publishers.

Gilbert, J. K., Boulter, C. J., & Elmer, R. (2000). Positioning models in science education and in design and technology education. In J. K. Gilbert & C. J. Boulter (Ed.), *Developing models in science education* (pp. 3-17). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Gökbulut, Y. (2010). *Sınıf öğretmeni adaylarının geometrik cisimler konusundaki pedagojik alan bilgileri.* (Yayımlanmamış doktora tezi). Gazi Üniversitesi, Ankara.

Gökkurt. B., Şahin, Ö., ve Soylu, Y. (2012). Matematik öğretmenlerinin matematiksel alan bilgileri ile pedagojik alan bilgileri arasındaki ilişkinin incelenmesi. *The Journal of Academic Social Science Studies*, *5*(8), 997-1012.

Gökkurt, B., Şahin, Ö., Soylu, Y., ve Soylu, C. (2013). Öğretmen adaylarının kesirlerde ilgili pedagojik alan bilgilerinin öğrenci hataları açısından incelenmesi. *International Online Journal of Educational Sciences, 5*(3), 719-735.

Gökkurt, B. (2014). *Ortaokul matematik öğretmenlerinin geometrik cisimler konusunda ilişkin pedagojik alan bilgilerinin incelenmesi*. (Yayınlanmamış doktora tezi). Atatürk Üniversitesi, Erzurum.

Gökkurt, B. Şahin, Ö. Soylu, Y., & Doğan, Y. (2015). Pre-service teachers' pedagogical content knowledge regarding student mistakes on the subject of geometric shapes. *Elementary Education Online*, *14*(1), 55-71.

Güler, M. (2014). *Öğretmen adaylarının matematik öğretme bilgilerinin incelenmesi: cebir örneği* (Yayınlanmamış yüksek lisans tezi). Karadeniz Teknik Üniversitesi, Trabzon.

Hannula, M. (2003). Locating fraction on a number line. In N. A. Pateman, B. J. Dougherty & J. T. Zilliox (Ed.), *Proceedings of the 27th Conference of the international group for the psychology of mathematics education* (pp. 17–24). Center for Research and Development Group, University of Hawai.

Harrison, G. A. (2001). How do teachers and textbook writers model scientific ideas for students. *Reseach in Science Education*, *31*, 401-435.

Harvey, R. (2012). Stretching student teachers' understanding of fractions. *Mathematics Education Research Journal, 24*(4), 493-511.

Haser, Ç., & Ubuz, B. (2003). Students' conceptions of fractions: A study of 5th grade students. *Hacettepe Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi, 24*, 64-69.

Hashweh, M. Z. (2005). Teacher pedagogical constructions: a reconfiguration of pedagogical content knowledge. *Teachers and teaching: Theory and Practice*, *11*(3), 273-292.

Hill, H. C., Ball, D. B., & Schilling, S. G. (2008). Unpacking pedagogical content knowledge: conceptualizing and measuring teachers' topic-specific knowledge of students. *Journal for Research in Mathematics Teacher Education, 39*(4), 372-400.

Hill, H. C., Rowan, B., & Ball, D. L. (2005). Effects of teachers' mathematical knowledge for teaching on student achievement. *Amerikan Educational Research Journal, 42*(2), 371- 406.

Hirsh, C. R., & McDuffie, A. R. (Ed.) (2016). *Annual perspectives in mathematics education. Mathematical modeling and modeling mathematics.* The United States of America: NCTM.

Hurrell, D. P. (2013). *Effectiveness of teacher professional learning: enhancing the teaching of fractions in primary schools*. (Unpublished doctoral thesis). Edith Cowan University, Joondalup, Avustralya.

Işık, C. (2011). İlköğretim matematik öğretmeni adaylarının kesirlerde çarpma ve bölmeye yönelik kurdukları problemlerin kavramsal analizi. *Hacettepe Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi, 41*, 231-243.

Işıksal, M. (2006). *A study on pre-servıce elementary mathematıcs teachers' subject matter knowledge and pedagogıcal content knowledge regardıng the multıplıcatıon and dıvısıon of fractıons*. (Unpublished doctoral thesis). Middle East Technical University, Ankara.

Işıksal, M., & Çakıroğlu, E. (2011). The nature of prospective mathematics teachers' pedagogical content knowledge: the case of multiplication of fractions. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *14*, 213–230. doi: 10.1007/s10857-010-9160-x.

İpek, A. S., Işık, C., ve Albayrak, M. (2005). Sınıf öğretmeni adaylarının kesir işlemleri konusundaki kavramsal performansları. *Kazım Karabekir Eğitim Fakültesi Dergisi, 1*, 537-547.

Johnson, N. R. (1998). *A descriptive study of number sense and related misconceptions about selected rational number concepts exhibited by prospective elementary teachers.* (Unpublished doctoral thesis). University of South Florida, Tampa, Florida.

Kahan, J. A., Cooper, D. A., & Bethea, K. A. (2003). The role of mathematics teachers' content knowledge in their teaching: a framework for research applied to a study of student teachers. *Journal of Mathematics Teacher Education, 6*(3), 223-252.

Kapyla, M., Heikkinen, J., & Asunta, T. (2009). Influence of content knowledge on pedagogical content knowledge: the case of teaching photosynthesis and plant growth. *International Journal of Science Education, 31,* 1395-1415.

Karahasan, B. (2010). *Preservice secondary mathematics teachers' pedagogical content knowledge of composite and inverse functions*. (Unpublished doctoral thesis). Middle East Technical University, Ankara.

Karal-Eyüboğlu, I.S. (2011). *Fizik öğretmenlerinin pedagojik alan bilgi gelişimi*. (Yayımlanmamış doktora tezi). Karadeniz Teknik Üniversitesi, Trabzon.

Karasar, N. (2010). *Bilimsel araştırma yöntemi* (21. Baskı). Ankara: Nobel Yayıncılık.

Kaya, Z. (2010). *Fen ve teknoloji öğretmen adaylarının fotosentez ve hücresel solunum konusundaki teknolojik pedagojik alan bilgisinin (tpab) araştırılması.* (Yayımlanmamış yüksek lisans tezi). Fırat Üniversitesi, Elâzığ.

Kennedy, M. M., Ball, D. L., & McDiarmid, G. W. (1993). *A study package for examining and tracking changes in teachers' knowledge (Technical Series 93-1).* http://www-personal.umich.edu/~dball/papers/KennedyBallMcdiarmid.pdf sayfasından elde edilmiştir.

Kim, G. (2004). *The pedagogical content knowledge of two middle-school mathematics teachers.* (Unpublished doctoral thesis). University of Georgia, Gürcistan.

Kocaoğlu, Y. (2010). Beşinci sınıf öğrencilerinin kesirler konusunda yaptıkları hatalar ve kavram yanılgıları. *Dicle Üniversitesi Ziya Gökalp Eğitim Fakültesi Dergisi*, 14, 71-85.

Kocaoğlu, T., ve Yenilmez, K. (2010). Beşinci sınıf öğrencilerinin kesir problemlerinde yaptıkları hatalar ve kavram yanılgıları. *Dicle Üniversitesi Ziya Gökalp Eğitim Fakültesi Dergisi, 14*, 71-85.

Konyalıoğlu, A. C., Aksu, Z., & Şenel, E. Ö. (2012). The preference of visualization in teaching and learning absolute value. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 43*(5), 613-626.

Konyalıoğlu, A. C., Özkaya, M., ve Gedik, S. D. (2012). Matematik öğretmen adaylarının konu alan bilgilerinin hataya yaklaşımları açısından incelenmesi. *Iğdır Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Dergisi*, *2*(2), 27-32.

Kovarik, K. (2008). Mathematics educators' and teachers' perceptions of pedagogical content knowledge. (Unpublished doctoral thesis). Colombia University, Newyork.

Kubar, A. (2012). *Pre-service elementary mathematics teachers' knowledge about definitions of integers and their knowledge about elementary students' possible misconceptions and errors in describing integers.* (Unpublished master's thesis). Middle East Technical University, Ankara.

Kula, S. (2011). *Matematik öğretmen adaylarının dörtlü bilgi modeli ile alan ve alan öğretimi bilgilerinin incelenmesi: limit örneği.* (Yayınlanmamış yüksek lisans tezi). Dokuz Eylül Üniversitesi, İzmir.

Lamon, S. J. (1996). The development of unitizing: Its role in children's partitioning strategies. *Journal for Research in Mathematics Education, 27*, 170-193.

Lamon, S. J. (2006). *Teachig fractions and ratios for understanding* (2. Baskı). London: Lawrence Erlbaum Associates Publishers.

Lannin, J. K., Webb, M., Chval, K., Arbaugh, F., Hicks, S., Taylor, C., & Bruton, R. (2013). The development of beginning mathematics teacher pedagogical content knowledge. *J Math Teacher Education,* doi, 10.1007/s10857-013-9244-5.

Lee, K. (2006). *Teacher's knowledge of middle school students' mathematical thinking in algebra word problem solving*. (Unpublished doctoral thesis). Oregon State University, Oregon.

Lee, S. J. (2010). *Exploring middle grade teachers' knowledge of partitive and qutotitive fraction divisions.* (Unpublished doctoral thesis). University of Georgia, Athens, Georgia.

Leinhardt, G., & Smith, D. A. (1985). Expertise in mathematics instruction: subject matter knowledge. *Journal of Educational Psychology*, *77*, 247-271.

Li, Y., & Smith, D. (2007). Prospective middle school teachers' knowledge in mathematics and pedagogy for teaching- the case of fraction division. In J. H. Woo, H. C. Lew, K. S. Park & D. Y. Seo (Ed.). *Proceedings of the 31st conference of the international group for the psychology of mathematics education* (185-192). Seoul: PM.

Li, Y. (2008). What do students need to learn about division of fractions? *Mathematics Teaching in the Middle School, 13*(9), 546-552.

Li, Y., & Huang, R. (2008). Chinese elementary mathematics teachers' knowledge in mathematics and pedagogy for teaching: the case of fraction division. *ZDM Mathematics Education, 40*, 845-859.

Li, Y., & Kulm, G. (2008). Knowledge and confidence of pre-service mathematics teachers: the case of fraction division. *ZDM Mathematics Education, 40*, 833-843.

Livy, S., & Vale, C. (2011). First Yyear pre-service teachers' matheatical content knowledge: Methods of Solution for a Ratio Question. *Mathematics Teacher Education and Development, 13*(2), 22-43.

Lo, J. J., & Luo, F. (2012). Prospective elementary teachers's knowledge of fraction division. *Journal of Mathematics Teacher Education, 15*, 481-500, doi: 10.1007/s.10857-012.9221-4.

Ma, L. (1999). *Knowing and teaching elementary mathematics: teachers' understanding of fundamental mathematics in China and the United States*. Mahwah, NJ: Erlbaum.

Magnusson, S. Krajcik, J., & Borko, H. (1999). Nature, sources, and development of pedagogical content knowledge for science teaching. In J. Gess-Newsome ve N. G. Nederman (Ed.), *Examining pedagogical content knowledge* (pp. 95-132). Dortrecht: Kluwer Academic Publishers.

Marks, R. (1990). Pedagogical content knowledge: from a mathematical case to a modified conception. *Journal of Teacher Education, 41*, 3-11.

McDiarmid, G. W., Ball, D. L., & Anderson, C. (1989). Why staying one chapter ahead doesn't really work: subject-specific pedagogy. In M. C. Reynolds (Ed.), *Knowledge Base for the Beginning Teacher* (pp. 193-205). Elmsford, NY: Pergamon Press.

McLeod, R. & Newmarch, B. (2006). *Fractions.* https://www.ncetm.org.uk/public/files/257666/fractions_booklet.pdf adresinden elde edilmiştir.

Meriç, G., ve Tezcan, R. (2005). Fen bilgisi öğretmeni yetiştirme programlarının örnek ülkeler kapsamında değerlendirilmesi (Türkiye, Japonya, Amerika ve İngiltere örnekleri). *Balıkesir Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Dergisi*, *7*(1), 62-82.

Merriam, S. B. (2013). *Qualitative research a guide to design and implemantation* (3. Baskı). (S. Turan. Cev.). Ankara: Nobel Akademik Yayıncılık. (2009)

Meyer, B. (1998). *Instructional design and learning theory*. http://etad.usask.ca/802papers/mergel/brenda.htm adresinden elde edildi.

Millî Eğitim Bakanlığı (MEB), (2013). *Ortaokul matematik dersi öğretim programı (5-8. sınıflar)*. Devlet Kitapları Müdürlüğü, Ankara.

Millî Eğitim Bakanlığı (MEB), (2015). *İlkokul matematik dersi öğretim programı (1-4.sınıflar)*. Devlet Kitapları Müdürlüğü, Ankara.

Morine-Dershimer, G., & Kent, T. (1999). Complex nature and sources of pedagogical knowledge. In J. Gess-Newsome & N. G. Lederman (Ed.), *Examining pedagogical content knowledge* (pp. 21-50). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Moyer, P. S., & Milewicz, E. (2002). Learning to question: categories of question ingused by pre-service teachers during diagnostic mathematics interviews. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *5*(4), 293–315.

National Council of Teachers of Mathematics (NCTM). (2000). *Principles and Standards for School Mathematics*. http://www.nctm.org/Standards and-Positions/Principles-and-Standards/sayfasından elde edilmiştir.

Newton, K. J. (2008). An extensive analysis of preservice elementary teachers' knowledge of fraction. *American Educational Research Journal*, *45*(4), 1080-1110.

Niss, M. (1987). Applications and modelling in the mathematics curriculum- state and trends. *International Journal for Mathematical Education in Science and Technology*, *18*, 487-505.

Noh, J., & Sabey, K. (2014, April). *Preservice Elementary Teachers' Understanding of Fraction Multiplication.* Sözlü bildiri, NCTM Research Conference, New Orleans, LA.

Norwood, K.S. (1994). The effect of instructional approach on mathematics anxiety and achievement. *School Science and Mathematics*, *94*(5), 248-254.

NRC (2001). *Adding it up: Helping children learn mathematics*, Washington, D. C., National Academy Press.

Özaltun, A. (2014). *Matematik öğretmenlerinin mesleki gelişimleri: öğrenci düşüncesi bilgisinini öğretime yansıması.* (Yayımlanmamış yüksek lisans tezi). Dokuz Eylül Üniversitesi, İzmir.

Özel, S. (2013). An analysis of in-service teachers' pedagogical content knowledge of division of fractions. *Anthropologist, 16*(1-2), 1-5.

Parmar, R. (2003). Understanding the concept of "division": assesment considerations. *Exceptionality*, *11*(3), 177-189.

Patton, M. Q. (2014). *Qualitative research and evaluation methods* (1. Baskı). (M. Bütün, S. B. Demir, Cev.). Ankara: Pegem Akademi. (2002).

Pesen, C. (2007). Öğrencilerin kesirlerde ilgili kavram yanılgıları. *Eğitim ve Bilim*, *32*(143), 79-88.

Punch, R. S. (2014). *Sosyal araştırmalara giriş nicel ve nitel yaklaşımlar* (3. Baskı). (D. Bayrak, H. B. Arslan, Z. Akyüz, Cev.). Ankara: Siyasal Kitabevi.

Redmond, A. (2009*). Prospective elementary teachers' division of fractions understanding: a mixed methods study*. (Unpublished doctoral thesis). Oklahoma State University, Oklahoma.

Rizvi, N. F., & Lawson, M. J. (2007). Prospective teachers' knowledge: concept of division. *International Education Journal*, *8*(2), 377-392.

Rowan, B., Chiang, F., & Miller, R. J. (1997). Using research on employees' performance to study the effects of teachers on students' achievement. *Sociology of Education*, *70*, 256-284.

Rowland, T. (2013). The knowledge quartet: the genesis and application of a framework for analysis mathematics teaching and depending teacher' mathematics knowledge. *Journal of Education*, *1*(3), 15-43.

Sağırlı-Özturan, M. (2010). *Türev konusunda matematiksel modelleme yönteminin ortaöğretim öğrencilerinin akademik başarıları ve öz-düzenleme becerilerine etkisi.* (Yayınlanmamış doktora tezi). Atatürk Üniversitesi, Erzurum.

Sezer, E. (2012). *Matematik öğretimi dersi kapsamında kullanılan yazma etkinliklerinin sınıf öğretmeni adaylarının kesirler konusuna ilişkin pedagojik alan bilgilerine etkisi.* (Yayınlanmamış yüksek lisans tezi). Hacettepe Üniversitesi, Ankara.

She, X., Lan, W. Y., & Wilhlem, J. (2011). A Comparative study on pedagogical content knowledge of mathematics teachers in China and the United States. *New Waves-Educational Research & Development*, *14*(1). 35-49.

Shulman, L. S. (1986). Those who understand; Knowledge growth in teaching, *Educational Researcher*, *15*(2), 4-14.

Shulman, L. S. (1987). Knowledge and teaching: Foundation of the new reform. *Harvard Educational Review*, *57*(1), 1-21.

Simon, M. A. (1993). Prospective elementary teachers' knowledge of division. *Journal for Research in Mathematics Education*, *24*(3), 233-254.

Smith, D. C., & Neale, D. C. (1989). The construction of subject matter knowledge in primary science teaching. *Teaching and Teacher Education*, *5*(1), 1-20.

Sinicrope, R., Mick, H., & Kolb, J. (2002). Fraction division interpretations. In B. H. Litwiller (Ed.), *National Council of Teachers of Mathematics 2002 Yearbook: Making sense of fractions, ratios, and proportions*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Son, J. W., & Lee, J. E. (2016). Pre-service teachers’ understanding of fraction multiplication, representational knowledge and computational skills. *Mathematics Teacher Education and Development, 18*(2), 5-28.

Soylu, Y., ve Soylu, C. (2005). İlköğretim beşinci sınıf öğrencilerinin kesirler konusundaki öğrenme güçlükleri: kesirlerde sıralama, toplama, çıkarma, çarpma ve kesirlerde ilgili problemler. *Erzincan Eğitim Fakültesi Dergisi*, *7*(2), 101- 117.

Stavy, R., & Tirosh, D. (2000). *How students (mis)understand science and mathematics*. New York: Teacher college press.

Stayflidou, S., & Vosniadou, S. (2004). The development of students' understanding of the numerical value of fractions. *Learning and Instruction*, *14*(5), 503-518.

Stewart, C. J., & Cash, W. B. (1985). *Interviewing Principles and Practices* (14. Baskı). Dubuque IO: Wm. C. Brown Pub.

Stump, S. L. (1999). Secondary mathematics teachers' knowledge of slope. *Mathematics Education Research Journal*, *11*(2), 124–144.

Şahin, Ö., Erdem, E., Başıbüyük, K., Gökkurt, B., ve Soylu, Y. (2014). Ortaokul matematik öğretmenlerinin sayılarla ilgili pedagojik alan bilgilerinin gelişiminin incelenmesi. *Turkish Journal of Computer and Mathematics Education*, *5*(3), 207-230.

Şiap, İ. ve Duru, A. (2004). Kesirlerde geometriksel modelleri kullanabilme becerisi. *Kastamonu Eğitim Dergisi*, *12*(1), 89-96.

Tanışlı, D. (2013). İlköğretim matematik öğretmeni adaylarının pedagojik alan bilgisi bağlamında sorgulama becerileri ve öğrenci bilgileri. *Eğitim ve Bilim*, *38*(169), 80-95.

Themane, K. M. (2008). *Teachers' pedagogical content knowledge of teaching equivalent fractions in grade 3*. (Unpublished master’s thesis). University of Johannesburg Üniversitesi, Güney Afrika.

Thompson, F. M**.** (1993). A conceptual development of fraction multiplication and division. *Contemporary Education*, *65*(1), 29- 35.

Tirosh, D. (2000). Enhancing prospective teacher’ knowledge of children’s conceptions: the case of division of fractions. *Journal for Research in Mathematics Education*, *31*(1), 2-25.

Toluk, Z. (2002). İlkokul öğrencileirinin bölme işlemi ve rasyonel sayıları ilişkilendirme süreçleri. *Boğaziçi Üniversitesi Eğitim Dergisi*, *19*(2), 81-101.

Toluk-Uçar, Z. (2009). Developing pre-service teachers understanding of fractions through problem posing. *Teaching and Teacher Education*, *25*(1), 166-175.

Toluk Uçar, Z. (2011). Öğretmen adaylarının pedagojik içerik bilgisi: öğretimsel açıklamalar. *Turkish Journal of Computer and Mathematics Education*, *2*(2), 87-102.

Türkdoğan, A. (2011). *Yanlışın anatomisi: İlköğretim matematik sınıflarında karşılaşılan yanlışlara ve yanlışlara verilen dönütlerin analitik incelenmesi.* (Yayınlanmamış doktora tezi). Karadeniz Teknik Üniversitesi, Trabzon.

Türnüklü, A. (2000). Eğitim bilim araştırmalarında etkin olarak kullanılabilecek nitel bir araştırma tekniği: görüşme. *Kuram ve Uygulamada Eğitim Yönetimi*, *24,* 543- 559.

Türnüklü, E. (2005). Matematik öğretmen adaylarının pedagojik alan bilgileri ile matematiksel alan bilgileri arasındaki ilişki. *Eğitim Araştırmaları Dergisi*, *21*, 234–247.

Türnüklü, E., & Yeşildere, S. (2007). The pedagogical content knowledge in mathematics: pre-service primary mathematics teachers' perspectives in turkey. *Issues in the Undergraduate Mathematics Preparation of School Teachers: The Journal,* 1-13. (http://www.k-12prep.math.ttu.edu).

Van de Walle, J. A., Karp, K. S., ve Bay-Williams, J. M. (2013). *İlkokul ve ortaokul matematiği* (7. baskı). (S. Durmuş, Cev.). Ankara: Nobel Yayınevi.

Waller, L. I. (2012). *Math intervention teachers' pedagogical content knowledge and student achievement*. (Yayınlanmamış doktora tezi). Eastern Kentucky University, Richmond.

Wheeldon, D. (2008). *Developing mathematical practices in a social context: an instructional sequence to support prospective elementary teachers'*. (Unpublished doctoral thesis). University of Central Florida, Florida.

Wilson, S. M., Shulman, L. S., & Richert, A. E. (1988). "150 diffrerent ways of knowing: Represenations of knowledge in teaching. In J. Calderhead (Ed.), *Exploring teachers' thinking* (pp. 104-124). London: Cassell.

Yeşildere, S., ve Akkoç, H. (2010). Matematik öğretmen adaylarının sayı örüntülerine ilişkin pedagojik alan bilgilerinin konuya özel stratejiler bağlamında incelenmesi. *Ondokuz Mayıs Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi, 29*(1), 125-149.

Yıldırım, A., ve Şimşek, H. (2013). *Sosyal bilimlerde nitel araştırma yöntemleri* (9. Baskı). Ankara: Seçkin Yayıncılık.

Yim, J. (2010). Children 's strategies for division by fractions in the context of the area of a rectangle. *Educational Studies in Mathematics*, *73,* 105–120.

Zbiek, R. M. (1998). Prospective teachers' use of computing tools to develop and validate functions as mathematical models. *Journal for Research in Mathematics Education, 29*(2), 184-201.

Zembat, İ. Ö. (2007). Working on the same problem-Concepts; with the usual subjects-preservice elementary teachers. *İlköğretim Online*, *6*(2), 305-312. [Online]: http://ilkogretim-online.org.tr/vol6say2/v6s2m22.pdf adresinden alınmıştır.

EKLER

EK -1: Araştırma İzin Belgesi

T.C.
DENİZLİ VALİLİĞİ
İl Millî Eğitim Müdürlüğü

Sayı : 16605029/44-E.12970062 16/12/2015
Konu : Anket İzni

VALİLİK MAKAMINA

İlgi : Pamukkale Üniversitesi Rektörlüğünün 04/12/2015 tarih ve 23032 sayılı yazıları.

Pamukkale Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü İlköğretim Anabilim Dalı Matematik Eğitimi Bilim Dalı tezli yüksek lisans programı öğrencisi Nur Banu DURAN " İlköğretim Matematik Öğretmen Adaylarının Alan ve Pedagojik Alan Bilgileri Çerçevesinde Kesirlerde Çarpma ve Bölme İşlemlerinin Öğretimine İlişkin Kullandıkları Modeller " konulu tez kapsamında öğretmen adaylarına yönelik hazırlamış olduğu anketleri İlgi yazı gereği Müdürlüğümüze bağlı Pamukkale İlçesinde bulunan Ortaokullarda uygulamak istemektedir.

Yukarıda adı geçen müracaatlar ile ilgili (Lisans/Lisansüstü/Doktora) öğrencileri ve Öğretim Görevlilerinin ilgi yazıları ekinde belirtmiş oldukları okullarda, (Ortaöğretim/İlköğretim/Okulöncesi) konuları ile ilgili anket çalışmalarının "Araştırma, Yarışma ve Sosyal Etkinlik İzinleri" Genelgesinde belirtilen esaslar gereğince; Okul ve kurumların eğitim-öğretim faaliyetlerini aksatmayacak şekilde ve bu araştırma kapsamında elde edilen verilerin cd ortamında Müdürlüğümüze teslim edilmesi kaydıyla 2015/2016 eğitim-öğretim yılı içerisinde uygulamaları Müdürlüğümüzce uygun görülmüştür.

Olurlarınıza arz ederim.

Mahmut OĞUZ
Milli Eğitim Müdürü

OLUR
16/12/2015
Ali ŞANLIER
Vali a.
Vali Yardımcısı

Güvenli Elektronik İmzalı
Aslı İle Aynıdır
18/12/2015
Afiri ERKAN
V.H.K.İ.

T.C
DENİZLİ VALİLİĞİ
İl Milli Eğitim Müdürlüğü

PAMUKKALE ÜNİVERSİTESİ REKTÖRLÜĞÜNE

Kurumunuzca Müdürlüğümüzden talep edilen araştırma isteklerine ait Makam Onayı ve Müdürlüğümüzce Onay verilen anket formları ekte gönderilmiştir.

Gereğini rica ederim.

Ali ŞANLIER
Vali a.
Vali Yardımcısı

Ek:
1-Anket Formları

Sırakapılar Mah. Saltak Cad. No:76 Merkez / DENİZLİ
Tel No : (0 258) 265 55 54 Faks No: (0 258) 265 01 69
e-posta: strateji20@meb.gov.tr İnternet Adresi: http://denizli.meb.gov.tr

Bilgi için : S.GELMİŞ
V.H.K.İ.
Tel: (0 258) 265 55 54 / 708

Bu evrak güvenli elektronik imza ile imzalanmıştır. http://evraksorgu.meb.gov.tr adresinden acc5-9efd-3fc4-b86d-c060 kodu ile teyit edilebilir.

EK- 2: AB Görüşme Formu

Soru 1) $\frac{13}{7}$ kesrini model ile gösteriniz.

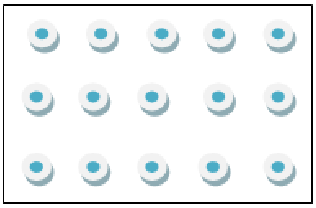
-Daha farklı bir model ile de gösterebilir misin?

-Neden bu modeli kullanmayı tercih ettin?

-Kullanabileceğin daha farklı modeller de var mı?

-Nasıl gösterdiğini açıklayabilir misin?

Soru 2)



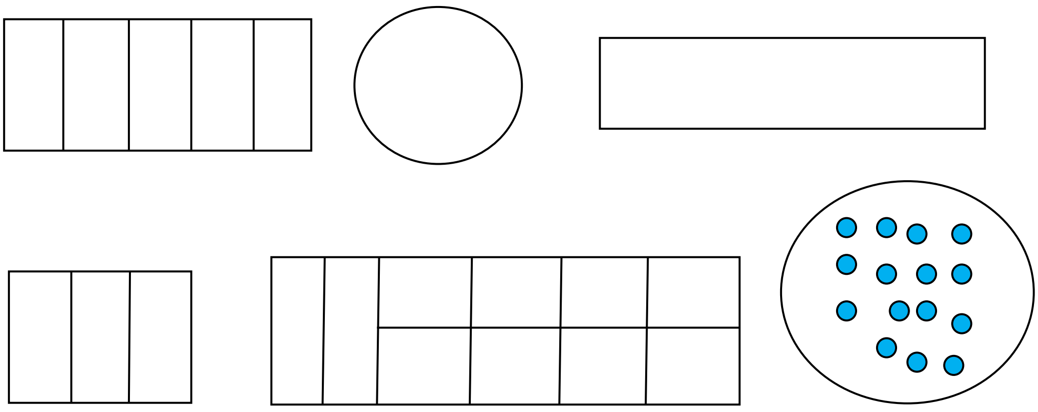
15 sayma nesnesi bir kümenin $\frac{5}{6}$'i ise $1\frac{1}{2}$ kesri sayma nesneleri ile nasıl gösterilebilir?

- $\frac{1}{2}$'i nasıl gösterebilirsin?

- $1\frac{1}{2}$ kesri neyi ifade ediyor?

- Sonucu nasıl bulduğunu açıklayabilir misin?

Soru 3) Aşağıda yer alan tüm şekillerin $\frac{2}{5}$'sini gösteriniz.



- Neden bu şekilde göstermeyi tercih ettin? Daha farklı şekilde de gösterebilir misin?

- Yaptıklarını açıklayabilir misin?

Soru 4) Denk kesir ne demektir?

a. $\frac{2}{5}$ ve $\frac{6}{15}$

b. $\frac{3}{7}$ ve $\frac{9}{14}$

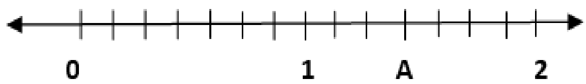
kesirlerinin denk olup olmadığını model yardımıyla gösteriniz.

- Sonucu nasıl bulduğunu açıklar mısın?

- Neden bu modeli kullanmayı tercih ettin?

- Daha farklı bir model kullanarak da gösterebilir misin?

Soru 5)



Yukarıdaki sayı doğrusu üzerinde ifade edilen A kesrine denk olan dört kesri sayı doğrusu kullanarak gösteriniz. Yaptığınız işlemlerin açıklamalarını yapınız.

- Denk kesirleri nasıl elde ettin?

- Kesirleri sayı doğrusunda gösterirken neye dikkat ettin?

- Bu kesirlerin denk kesirler olduğuna nasıl karar verdin?

Soru 6) a. $\frac{1}{5}\times1\frac{1}{4}$

b. $\frac{2}{3}\times\frac{4}{5}$

c. $\frac{2}{5}\times10$

işlemlerinin çözümü nasıl yapılabilir? Açıklayınız.

- Neden bu yöntemi kullanmayı tercih ettin? Başka ne şekilde yapabilirsin?

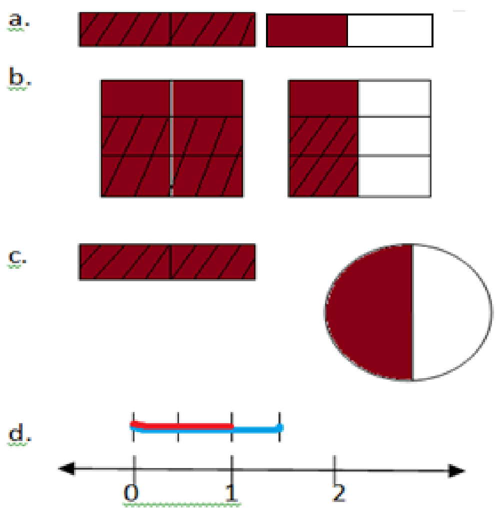
- Bu işlemler neyi ifade ediyor?

- Model kullanarak da gösterebilir misin?

- Neden bu modeli kullanmayı tercih ettin?

- Daha farklı bir model kullanarak da gösterebilir misin?

Soru 7) $1\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}=1$ olduğunu göstermede aşağıdaki modellerden hangisi/hangileri <u>kullanılamaz</u>?



- Bu modelin neden kullanılamayacağını düşünüyorsun?

Soru 8) Kesirlerde bölme işlemi içeren problemleri çözmek için farklı yöntemler geliştirilebilir. Aşağıdaki gibi problemleri nasıl çözersiniz?

a. $1\frac{3}{4} \div \frac{1}{2}$ **b.** $1\frac{2}{5} \div 2\frac{2}{3}$ **c.** $8 \div \frac{2}{3}$

- Neden bu yöntemi kullanmayı tercih ettin?

- Bu işlemler neyi ifade ediyor?

- Sonucu nasıl bulduğunu açıklayabilir misin?

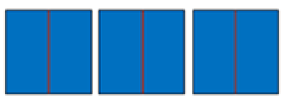
- Daha farklı bir şekilde yapacak olsan nasıl yapardın?

- Model kullanarak da gösterebilir misin?

- Neden bu modeli kullandın?

- Daha farklı bir model kullanarak da gösterilebilir mi?

Soru 9) $3 \div \frac{1}{2}$ işleminde bölümü gösteren bu model nasıl yorumlanabilir? (modeller sırayla gösterilir)



EK 3 Öğretmen Adaylarının Hazırlamış Oldukları Ders Planları

A) İlker'in Kesirlerle Çarpma Ders Planı

Ad Soyad:	
Sınıf-Tarih:	6. sınıf 05.05.2016
Süre:	40 dakika
Öğrenme Alanı:	Matematik
Alt Öğrenme Alanı:	Kesirlerle Çarpma İşlemi
Beceriler:	İletişim, İlişkilendirme, Akıl Yürütme
Kazanım:	6.1.4.4. İki kesrin çarpma işlemini yapar ve anlamlandırır.
Gerekli Ön Bilgi:	Doğal sayılarda çarpma işlemi, Kesir kavramı
Araç ve Gereçler:	Renkli Asetat Kalemler
Öğretim Yöntem ve Teknikleri:	Soru sorma teknikleri ve problem çözme yöntemleri

ÖĞRETME VE ÖĞRENME SÜRECİ

Ders öncesi;

Çarpma işlemi hatırlayalım. Çarpma nedir. 5x10 sızın için ne ifade ediyor. Diye soru yönelterek derse başlanır. Öğrencilerin fikirleri aldıktan sonra tekrar eden sayıların toplanmasının kısa yolu olarak özetlenir.

Okulun bahçesinde 6 öğrenci kişi başı bir pastanın $\frac{2}{3}$'sini yediklerine göre toplam kaç pasta yemişlerdir

Öncelikle problemi anlayalım. Öğrencilerden ne anladıkları kısaca açıklasınlar. İlk başta model kullanarak çözeriz. Sonra tekrarlı toplama metodu ile çözeriz son olarak ise çarpma şeklinde çözeriz.

1. Model 2. Toplayarak 3. Çarpma

Ders sırası;

- Elinizde bir pizzanın $\frac{3}{4}$'ü kalmış. Bu kalan pizzanın $\frac{1}{3}$'ini erkek kardeşinize verirseniz, kardeşiniz bir bütün pizzanın ne kadarını almış.

Öncelikle soruyu anlayalım. Sonra model ile çözelim. Son olarak çarpma işlemi kullanarak sonuca ulaşırız.

- Ermenin evinde bir bütün ekmeğin $\frac{3}{5}$'ini. Bulanan ekmeğin $\frac{2}{3}$'sini arkadaşına verdiğine göre arkadaşı bir bütün ekmeğin kaçta kaçı almıştır.

Öncelikle soruyu anlayalım. Sonra model kullanarak çözelim en son ise çarpma işlemi kullanalım

- $2\frac{1}{2}$ x $\frac{3}{5}$ model kullanarak çözelim son olarak çarpma işlemi.

Bunları hepsi öğrencilerle beraber çözülür.

Ders sonrası

a) $2\frac{2}{5}\, x\, \frac{1}{3}$ *b)*$3\frac{1}{2}\, x\, \frac{4}{5}$ c) $\frac{1}{2} \times \frac{3}{5}$

Öğrencilere bu ders saatinde neler öğrendikleri sorulur ve özetlenir.

B) İlker'in Kesirlerle Bölme Ders Planı

Ad Soyad:	
Sınıf-Tarih:	6.sınıf 05.05.2016
Süre:	40 dakika
Öğrenme Alanı:	Matematik
Alt Öğrenme Alanı:	Kesirlerle Bölme İşlemi
Beceriler:	İletişim, İlişkilendirme, Akıl Yürütme
Kazanım:	6.1.4.7. İki kesrin bölme işlemini yapar ve anlamlandırır.
Gerekli Ön Bilgi:	Doğal sayılarda bölme işlemi, Kesir kavramı
Araç ve Gereçler:	Renkli Asetat Kalemler
Öğretim Yöntem ve Teknikleri:	Soru sorma teknikleri ve problem çözme yöntemleri

ÖĞRETME VE ÖĞRENME SÜRECİ

Ders öncesi

Öğrencilere bölme işlemi denilince akıllarına neler geldiği sorulur. Bölme işleminde birinci sayının içinde ikinci sayıdan kaç tane olduğunu bulmaya çalıştığımız kavratılır.

Birbirine eşit 4 adet pasta, herkes $\frac{1}{2}$ adet parça yiyecek şekilde dağıtılıyor. Kaç kişi pasta yemişler?

Önce soruyu anlayalım. Model kullanarak çözelim. En son işlem kullanarak çözelim.

$\frac{1}{2}$ litre gazoz iki kızına eşit miktarda içiren baba, bir kızına kaç litre süt içirmiş olur?

Ders sırası

- Bir porsiyon $\frac{1}{2}$ kurabiyedir. $\frac{5}{8}$ kurabiyeden kaç tane porsiyon elde ederiz.

Öncelikle soruyu anlayalım. Sonra model kullanarak çözelim arkasından işlem yaparak çözelim.

- Ayşe'nin $2\frac{1}{4}$ litre sütü vardır. Her buzdolabına $\frac{3}{4}$ litre sütü koyduğuna göre kaç tane buzdolabı koyabilir.

Öncelikle soruyu anlayalım. Sonra model kullanarak çözelim arkasından işlem yaparak çözelim.

- $2\frac{1}{4} : \frac{3}{4}$ işlemi model kullanarak çözelim. Arkasından işlem de kullanarak sonucu bulalım.

Ders sonrası

a) $\frac{1}{5}:\frac{3}{5}$ **b)** $\frac{2}{5}:\frac{1}{3}$ **c)** $3\frac{2}{3}:\frac{1}{2}$ **d)** $1\frac{3}{5}:\frac{2}{3}$

Öğrencilere bu ders saatinde neler öğrendikleri sorulur ve özetlenir.

C) İpek'in Kesirlerle Çarpma Ders Planı

Planı hazırlayan	
Sınıf:	6.sınıf
Süre:	40 dk
Öğrenme Alanı:	Sayılar ve işlemler
Alt Öğrenme Alanı:	Kesirlerle İşlemler
Beceriler:	• 6.1.4.3. Bir doğal sayı ile bir kesrin çarpma işlemini yapar ve anlamlandırır. • 6.1.4.4. İki kesrin çarpma işlemini yapar ve anlamlandırır.
Kazanımlar:	• 6.1.4.3. Bir doğal sayı ile bir kesrin çarpma işlemini yapar ve anlamlandırır. • 6.1.4.4. İki kesrin çarpma işlemini yapar ve anlamlandırır.
Gerekli Ön Bilgiler:	• Çarpma işleminin anlamını kavrar • Kesirlerin sadeleştirilmesi işlemlerini yapar. • Bir kesrin pay ve paydasının ne anlama geldiğini kavrar. • Bir kesri modelleyebilir.
Araç ve Gereçler:	• Çalışma kâğıtları
Öğretim Yöntem ve Teknikleri:	Buluş yoluyla öğretim-Tümevarım. Drama yöntemi- role bürünme

ÖĞRETME VE ÖĞRENME SÜRECİ

Ders Öncesi:

1. Çarpma işleminin anlamları hatırlanır. Bunu yaparken öğrencilere kendilerini birer bilim insanı gibi hayal etmeleri telkin edilir. Öğrencilere "3x5" gibi bir çarpma işleminin ne anlama geldiği sorularak derse başlanır ve öğrencilerin cevapları yardımıyla ulaşılan sonuçlar listelenir.
    - Çarpmanın tekrarlı toplama olduğunun hatırlanması.
    - Her bir çarpanın diğerinden kaç tane olduğunun belirttiğinin hatırlanması.

   Sonuçlarına ulaşılmalıdır.

2. Bir kesrin pay ve paydasının ne anlama geldiği hatırlanır ve bir model yardımıyla bir kesir modellenir.
    - Paydanın bir bütünü kaç parçaya bölmemiz gerektiğini söylemesi hatırlanır.

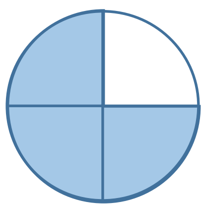
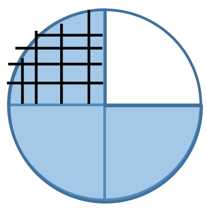
- Payın da bölünmüş parçalardan kaç tane alındığını belirtmesi hatırlanır.

Ders Sırası:

1. Bir doğal sayının kesir kadarının modeller yardımıyla hesaplayarak yapılan işlemin çarpma işlemi olduğunun farkındalığının yaratılması ve bu işlemin algoritmasının modeller yardımıyla bulunan sonuçlar yardımıyla keşfedilmesi.

İNCELEME ÇALIŞMASI

Görev	Başlangıç miktarı	Başlangıç miktarının kesirsel kısmını gösterme	Çözüm
6 arkadaş orgirami etkinliği düzenleyecek. Her biri bir kağıdın $\frac{2}{3}$'sini kullaıyorsa toplamda ne kadar kağıt gerekir?			.
4 kekin $\frac{1}{3}$'i ne kadar kek yapar?			
24 arabanın $\frac{3}{4}$'ü gri renkliyse kaç araba gri renklidir?			

Görev	Başlangıç miktarı	Başlangıç miktarının kesirsel kısmını gösterme	Çözüm
Bir pizzanın $\frac{3}{4}$'ünün $\frac{1}{3}$'ini bulunuz.			Bir pizzanın $\frac{3}{4}$'ünün $\frac{1}{3}$'i bu iki sayının çarpılmasıyla bulunur. $\frac{3}{4} X \frac{1}{3} = \frac{\cancel{3}}{4} X \frac{1}{\cancel{3}} = \frac{1}{4}$ Sonuç: bir bütünün $\frac{1}{4}$'idir.
Bir ekmeğin $\frac{9}{10}$'unun $\frac{2}{3}$'sini bulunuz.			
Bir çubuğun $\frac{2}{3}$'sinin $\frac{3}{4}$'ünü bulunuz.			

Tablolarda kullanılan işlem ve sonucu kısmına bakarak kesirlerle çarpma işleminin nasıl yapılıyor olabileceği hakkında fikrinizi yazınız:

2. Algoritmanın keşfedilmesi ve kullanılması

- Kesirlerle çarpma işlemi henüz algoritma öğrenilmeden önce modeller yardımıyla sonuç bulunacak şekilde yapılır. Ve problem durumlarında çarpma işleminin kullanılacağı fark edildikten sonra tablonun kullanılan işlem kısmına sorunun çözümünde kullanılacak işlem yazılır. Bu işlemin sonucu olarak modeller yardımıyla buldukları sonuçlar yazdırılır. Ve tüm bu işlemlerin ortak noktası yanı nasıl yapıldığı hakkında tahminler yürütmeleri istenir. Üstteki sayıyla yani pay ile payın çarpıldığı payda ile de paydanın çarpıldığını fark etmeleri beklenen sonuçtur.
- İncelemeler bittiğinde algoritma bilim adamlarının ulaştıkları sonuç olarak yazılacaktır.

Ders Sırası:

1. Algoritma yardımıyla işlem alıştırmalarını çözme ve modelleme.
   - Algoritmanın doğruluğunu kontrol etmek amaçlı bir soru sorularak bu soruyu algoritma yardımıyla çözmeleri ve algoritmanın doğru olup olmadığını model yardımıyla kontrol etmeleri istenerek ders bitirilir.

ÖLÇME VE DEĞERLENDİRME

Gözlem:

- Bir doğal sayı ile bir kesrin çarpma işlemini yapıp, anlamlandırabiliyorlar mı?
- İki kesrin çarpma işlemini yapıp, anlamlandırabiliyorlar mı?

Soru: Bir tarlanın $\frac{4}{5}$'ünün $2\frac{1}{2}$'sini keşfettiğiniz algoritma yardımıyla hesaplayıp sonucun doğru olup olmadığını model yardımıyla kontrol ediniz.

D) İpek'in Kesirlerle Bölme Ders Planı

Planı hazırlayan	
Sınıf:	6.sınıf
Süre:	40 dk
Öğrenme Alanı:	Sayılar ve işlemler
Alt Öğrenme Alanı:	Kesirlerle İşlemler
Beceriler:	6.1.4.7. İki kesrin bölme işlemini yapar ve anlamlandırır.
Kazanımlar:	6.1.4.7. İki kesrin bölme işlemini yapar ve anlamlandırır.
Gerekli Ön Bilgiler:	• Bölme işleminin anlamını kavrar. • Bir kesri modelleyebilir.
Araç ve Gereçler:	• Çalışma kâğıtları, kesir modelleri
Öğretim Yöntem ve Teknikleri:	Buluş yoluyla öğretim-Tümevarım.

ÖĞRETME VE ÖĞRENME SÜRECİ

Ders Öncesi:

3. Bölme işleminin anlamları hatırlanır. Öğrencilere "6/2"gibi bir bölme işleminin ne anlama geldiği sorularak derse başlanır ve öğrencilerin cevapları yardımıyla ulaşılan sonuçlar listelenir.
    - Bölmenin tekrarlı çıkarma yani gruplama işlemi olduğunun hatırlanması.

Ders Sırası:

1. Derse ilk çalışma kâğıdı dağıtılarak başlanır. Bu çalışma kâğıdında kurabiyelerden kaç porsiyon çıkacağını hesaplayarak öğrencilerden modeller yardımıyla problemler çözdürülür.
2. Bu problemin hangi işlem yardımıyla çözülebileceği ve nedeni öğrencilere sorulur. Yapılan işlemin bölme olduğu fark edilir.

3. Yapılan işlemin bölme olduğu fark edildikten sonra kutucuklara hangi bölme işleminin bu problemi çözeceğini yazmaları istenir. Ve işlem yapmadan buldukları sonuçlar bu işlemin de sonucu olarak yazdırılır. Ve öğrencilerden bu bölme işleminin nasıl yapılmış olabileceğini ve nedenini keşfetmeleri istenir. Ulaştıkları sonucu çalışma kâğıdının sonuç kısmına yazmaları istenir. Algoritmayı bu şekilde fark etmeleri beklenir.

İNCELEME ÇALIŞMASI 1

Tabloyu doldurunuz ve tablonun son durumunu inceleyerek yaptığınız işlemlerin kısaca nasıl yapılabileceğine dair çıkardığınız sonucu aşağıdaki sonuç kısmına yazınız.

<table>
<tr><td rowspan="3">Porsiyonu $\frac{1}{2}$ kurabiye
İse;</td><td>2 kurabiye kaç pors.</td><td>3 kurabiye kaç pors.</td><td>4 Kurabiye kaç pors.</td><td>5 Kurabiye kaç pors.</td></tr>
<tr><td>Model ile gösteriniz:</td><td>Model ile gösteriniz:</td><td>Model ile gösteriniz:</td><td>Model ile gösteriniz:</td></tr>
<tr><td>Bu durumda yapılması gereken işlemi yazınız:</td><td>Bu durumda yapılması gereken işlemi yazınız:</td><td>Bu durumda yapılması gereken işlemi yazınız:</td><td>Bu durumda yapılması gereken işlemi yazınız:</td></tr>
<tr><td rowspan="3">Porsiyonu $\frac{3}{4}$ kurabiye
İse;</td><td>3 Kurabiye kaç pors.</td><td>6 Kurabiye kaç pors.</td><td colspan="2" rowspan="3">SONUÇ:</td></tr>
<tr><td>Model ile gösteriniz:</td><td>Model ile gösteriniz:</td></tr>
<tr><td>Bu durumda yapılması gereken işlemi yazınız:</td><td>Bu durumda yapılması gereken işlemi yazınız:</td></tr>
</table>

4. İnceleme çalışması 1'in ilk satırı bölme işlemi yapılırken ikinci sayının paydasıyla ilk sayının çarpılacağı sonucu çıkacaktır. İkinci satırda ise ilk satırdaki çıkarımlarına ek olarak payda ile çarpıldıktan sonra paya bölünür çıkarımı yapılacaktır. Bölme işlemi bir örüntüymüş gibi kuralı adım adım öğrencilere keşfettirilir.

5. Hemen ardından iki kesir için olan bölme işlemlerinin sonuçlarına modeler yardımıyla ulaşıldıktan sonra işlemleri inceleyen öğrencilerin iki kesrin bölünmesi ile ilgili algoritmaya İnceleme çalışması 2 ile ulaşmaları beklenir.

İNCELEME ÇALIŞMASI 2

<table>
<tr><td rowspan="6">Porsiyonu $\frac{1}{4}$ kurabiye
İse;</td><td>$\frac{1}{2}$ Kurabiye kaç pors.</td><td>$\frac{3}{2}$ Kurabiye kaç pors.</td><td rowspan="6">SONUÇ:</td></tr>
<tr><td>Model ile gösteriniz:</td><td>Model ile gösteriniz:</td></tr>
<tr><td>Bu durumda yapılması gereken işlemi yazınız:</td><td>Bu durumda yapılması gereken işlemi yazınız:</td></tr>
<tr><td>$\frac{5}{2}$ Kurabiye kaç pors.</td><td>$\frac{7}{2}$ Kurabiye kaç pors.</td></tr>
<tr><td>Model ile gösteriniz:</td><td>Model ile gösteriniz:</td></tr>
<tr><td>Bu durumda yapılması gereken işlemi yazınız:</td><td>Bu durumda yapılması gereken işlemi yazınız:</td></tr>
</table>

Ders Sonrası:

1. Ulaşılan sonuçlar öğrenciler yardımıyla listelenir

ÖLÇME VE DEĞERLENDİRME

Gözlem:

- Bir doğal sayı ile bir kesrin çarpma işlemini yapıp, anlamlandırabiliyorlar mı?
- İki kesrin çarpma işlemini yapıp, anlamlandırabiliyorlar mı?

Soru: Porsiyonu 1/8 kurabiye olan kurabiyelerden 5/4 tane kurabiyeniz varsa kaç porsiyon elde edebilirsiniz? Işlemi algoritma yardımıyla ve model ile nasıl yapılır gösteriniz.

E) Cemil'in Kesirlerle Çarpma Ders Planı

Ad Soyad:	
Sınıf-Tarih:	6. Sınıf
Süre:	40 dakika
Öğrenme Alanı:	Matematik
Alt Öğrenme Alanı:	Kesirlerle Çarpma İşlemi
Beceriler:	İletişim, İlişkilendirme, Akıl Yürütme
Kazanım:	6.1.4.4. İki kesrin çarpma işlemini yapar ve anlamlandırır.
Gerekli Ön Bilgi:	Doğal sayılarda çarpma işlemi, Kesir kavramı
Araç ve Gereçler:	Renkli Asetat Kalemler
Öğretim Yöntem ve Teknikleri:	Soru sorma teknikleri ve problem çözme yöntemleri

ÖĞRETME VE ÖĞRENME SÜRECİ

Ders Öncesi

1."10 defa 20 sayısının toplamının sonucu kaçtır?" sorusuna nasıl bir çözüm getirebiliriz diye soru yönelterek derse başlanır. 10 tane 20'yi tek tek toplama fikrini ortaya atarlarsa daha kısa bir yolu olmalı diyerek uyarıda bulunulur.

2. 10x20 işlemini yapmaları sağlanır ve öğrencilere çarpma işlemi sizin için ne ifade ediyor diye sorulur. "tekrarlı toplama" ifadesini söylemeleri beklenir.

3. Bir önceki kazanım olan "6.1.4.3. Bir doğal sayı ile bir kesrin çarpma işlemini yapar ve anlamlandırır." kazanımı hakkında bir örnek verilerek konu hatırlatması sağlanır. (6/A sınıfı gezi kulübü üyesi 6 öğrenci akşam yemeğinde buluşuyorlar. Kişi başı bir ekmeğin $\frac{2}{3}$'ü tüketildiğine göre toplam kaç ekmek tüketilmiştir?)

4.Örnek şekil çizilerek kavratılır ve yanıt bulunur.

Ders Sırası

1. Bu dersteki kazanımımız hakkında önceden sırası planlanmış olan örnekler üzerinden modellemeler kullanılarak ders anlatımına devam edilir. Sırayla; basit kesirler içeren ve pizza şekli çizilerek yapılacak olan bir örnek, basit kesirler içeren ve alan, küme modeliyle çözülecek bir örnek, bileşik kesir içeren ve alan, küme ve sayı doğrusu modeliyle çözülecek örneklere yer verilir.

2. Basit kesir içeren ve pizza şekli ile alan modellemesi yapılarak çözülecek örnek; Zahide'nin evinde bir pizzanın $\frac{3}{4}$'ü kalmıştır. Bu kalan pizzanın $\frac{1}{3}$'ini erkek kardeşine vermiştir. Erkek kardeşi bir pizzanın ne kadarını almış olur?

3. Basit kesir içeren ve alan, küme modelleriyle çözülecek örnek; Elindeki şekerin $\frac{2}{5}$'sinin $\frac{2}{3}$'sini arkadaşı Ethem'e veren İbrahim'in elinde baştaki şeker miktarının kaçta kaçı kalmıştır? (Bu soruda öğrencilerin soru okumadaki dikkatleri de test edilir. 2 kesri çarparlarsa kaçta kaçını verdiğini bulurlar. Oysaki soruda kaçta kaçı kalmıştır diyor. 1'de çıkarmaları gerekmektedir.)

4.Bileşik kesir içeren ve alan, küme, sayı doğrusu modeliyle çözülecek örnek; $2\frac{1}{2} \times \frac{3}{5}$=?

5. Her örnekte öğrenciler tahtaya kaldırılır ve onların eşliğinde örnekler çözülür.

6.Her örneğin sonunda çarpma işlemi yapılarak sağlama yapılması istenir.

Ders Sonrası

1. Kalan zaman zarfında aşağıdaki örnekler sırayla çözülür.

a) $\frac{2}{3} \times \frac{3}{4}$ **b)** $\frac{3}{5} \times \frac{1}{3}$ **c)** $1\frac{2}{3} \times \frac{1}{5}$ **d)** $2\frac{1}{6} \times \frac{3}{13}$

2. Öğrencilere bu ders saatinde neler öğrendikleri sorulur, konu toparlanır ve üzerinde tartışılır.

F) Cemil'in Kesirlerle Bölme Ders Planı

Ad Soyad:	
Sınıf-Tarih:	6.Sınıf
Süre:	40 dakika
Öğrenme Alanı:	Matematik
Alt Öğrenme Alanı:	Kesirlerle Bölme İşlemi
Beceriler:	İletişim, İlişkilendirme, Akıl Yürütme
Kazanım:	6.1.4.7. İki kesrin bölme işlemini yapar ve anlamlandırır.
Gerekli Ön Bilgi:	Doğal sayılarda bölme işlemi, Kesir kavramı
Araç ve Gereçler:	Renkli Asetat Kalemler
Öğretim Yöntem ve Teknikleri:	Soru sorma teknikleri ve problem çözme yöntemleri

ÖĞRETME VE ÖĞRENME SÜRECİ

Ders Öncesi

1. Öğrencilere bölme işlemi denilince akıllarına neler geldiği sorulur. Bölme işleminde birinci sayının içinde ikinci sayıdan kaç tane olduğunu bulmaya çalıştığımız kavratıllır.

2. Bir önceki kazanımımız olan "6.1.4.6. Bir doğal sayıyı bir kesre ve bir kesri bir doğal sayıya böler, bu işlemi anlamlandırır." kazanımı hakkında 2 örnek çözülerek konu hatırlatması sağlanır. Örneklerin ilkinde doğal sayı kesre bölünür diğerinde kesir doğal sayıya bölünür.

a) 6 adet çikolata herkes $\frac{1}{2}$ çikolata yiyecek şekilde dağıtılıyor. Kaç kişi çikolata yemiştir?

b) $\frac{1}{2}$ litre sütü ikiz bebeklerine eşit miktarda içiren Ayşe anne, bir bebeğine kaç litre süt içirmiş olur?

3. Örnekler şekil çizilerek kavratılır ve yanıtlar bulunur.

Ders Sırası

1. Bu dersteki kazanımımız hakkında önceden sırası planlanmış olan örnekler üzerinden modellemeler kullanılarak ders anlatımına devam edilir. Sırayla; basit kesir içeren ve alan modeliyle kavratılmak istenen bir örnek, bileşik kesir içeren ve alan modeliyle kavratılmak istenen bir örnek verilir.

2. Örnekler;

a) Bir porsiyon $\frac{1}{2}$ kurabiyedir. $\frac{5}{8}$ kurabiyeden kaç tane porsiyon çıkar?

b) Fatma'nın $2\frac{1}{4}$ litre sıvı deterjanı vardır. Her makineye $\frac{3}{4}$ litre deterjan koyduğuna göre kaç makine doldurulabilir?

3. Örnekler tahtada öğrencilerle birlikte alan modeli kullanarak çözülür.

4. Her örneğin model çözümü sonucu " ortak payda algoritması veya ters çevir çarp algoritması" ile işlem sağlaması yapılır.

Ders Sonrası

1. Kalan zaman zarfında aşağıdaki örnekler sırayla çözülür.

a) $\frac{1}{4} \div \frac{3}{4}$ **b)** $\frac{5}{6} \div \frac{1}{3}$ **c)** $1\frac{2}{3} \div \frac{1}{2}$ **d)** $2\frac{3}{5} \div \frac{2}{3}$

2. Öğrencilere bu ders saatinde neler öğrendikleri sorulur, konu toparlanır ve üzerinde tartışılır.

G) Hale'nin Kesirlerle Çarpma Ders Planı

Ad soyad:	
Tarih:	
Sınıf:	6. sınıf
Süre:	40 dakika
Öğrenme Alanı:	Sayılar ve İşlemler
Alt Öğrenme Alanı:	Kesirlerle İşlemler
Beceriler:	Akıl yürütme, ilişkilendirme, matematiksel düşünme becerileri, problem çözme, iletişim
Kazanım (6.1.4.4)	İki kesrin çarpma işlemini yapar ve anlamlandırır.
Gerekli Ön Bilgiler:	Pay ve payda kavramlarını bilir. Bir bütünün belirtilen kesir kadarını bulur. Dikdörtgenin alan formülünü bilir. Bir doğal sayının belirtilen kesir kadarını bulur ve doğal sayının kesir kadarının çarpma işlemi ifade ettiğini bilir. Kesri sadeleştirebilir.
Araç ve Gereçler:	Kâğıt, makas, boyakalemi
Öğretim Yöntem ve Teknikleri:	İşbirliğine dayalı öğrenme ve tartışma tekniği Buluş (keşfetme) yoluyla öğrenme stratejisi

ÖĞRETME VE ÖĞRENME SÜRECİ

Ders Öncesi

1. Geçen ders öğrenilen bir doğal sayının kesri kadarını bulma konusu öğrencilere hatırlatılır.

- Candan, sınıfta paylaşmak üzere 25 gofret getiriyor. Gofretlerin $\frac{3}{5}$'ü bitter çikolatalıdır. Kaç tane bitter çikolatalı gofret vardır?
- Çözüm küme modeli kullanılarak yapılır.

2. Bir doğal sayının kesri kadarını bulabiliyoruz peki bir kesrin kesri kadarını bulabilir miyiz? diye sınıfa sorulur. Konuya odaklanmaları sağlanır.

3. Sonra kesrin kesrini bulmayla ilgili bir soru sorulur.

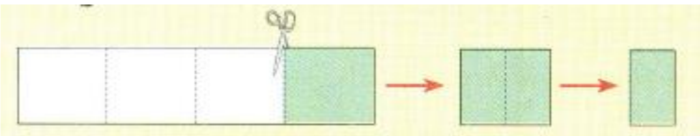
- Bir tarlanın $\frac{1}{4}$'i bizim ve bizim olan kısmın $\frac{1}{2}$'ine çilek ektik. Çilek ekili kısım tüm tarlanın kaçta kaçıdır?

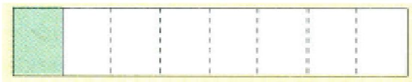
4. Öğrencilerin kesrin kesri kavramını anlayabilmesi için kesrin kesri etkinliği ile çözüm yapılır.

5. Her gruba 2 kâğıt, makas, boyakalemi dağıtılır.

6. Kesrin kesri etkinliği için;

- Kâğıdın birini dörde katlayıp aşağıdaki gibi bir parçasını boyayalım.
- Boyadığımız parçayı kesip ortadan ikiye katlayalım. Kat izinden keselim.
- Kestiğimiz parçanın bütün şeridin kaçta kaçı olduğunu tahmin ediniz.





- İkinci kâğıdı sekize katlayalım.
- Elde ettiğimiz parçayı ikinci şeridin üzerine koyarak bütünün kaçta kaçını olduğunu bulalım.

Ders Sırası

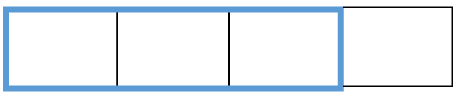
1. İki kesrin çarpımı günlük hayattan problemlerle öğretilir. İki kesrin çarpım kuralı verilmez. Model kullanılarak çözülen problemlerle kuralı öğrencinin bulması sağlanır.

2. Problem 1

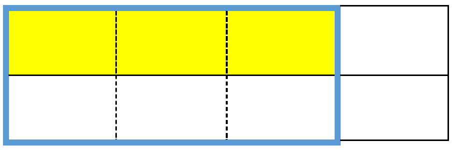
- Yulaflı muzlu bir kek tarifinde bir bardağın $\frac{3}{4}$'ü kadar yulaf eklemek gerekir. Peki kek $\frac{1}{2}$ büyüklükte yapılacak olsa ne kadar yulaf eklemek gerekir?
- Bir tarifin $\frac{1}{2}$'ini yani yarısını yapmak istediğimizde tarifteki tüm malzemelerin yarısını kullanırız. Buradan yola çıkarak yarım kek yapmak için $\frac{3}{4}$'ün $\frac{1}{2}$'i kadar yulaf eklememiz gerekir.
- $\frac{3}{4}$'ün $\frac{1}{2}$'i $\frac{1}{2} \times \frac{3}{4}$ işleminin sonucunu verir. Bu işlem alan modeli kullanılarak yapılır.

- Şekil 1 de mavi çerçeve bütünün $\frac{3}{4}$'ünü ifade eder. Şekil 2 de sarı alan $\frac{3}{4}$'ün $\frac{1}{2}$'ini gösterir.
- Taralı alanın bütüne oranını bulurken dikdörtgenin alanından faydalanılır.

  (Taralı alan: 3x1=3   ve Bütün: 2x4=8)
- $\frac{3}{4}$'ün $\frac{1}{2}$'i başlangıçtaki bütünün $\frac{3}{8}$'ü kadar olduğu için $\frac{3}{4} \times \frac{1}{2} = \frac{3}{8}$'dir.



Şekil 1: $\frac{3}{4}$

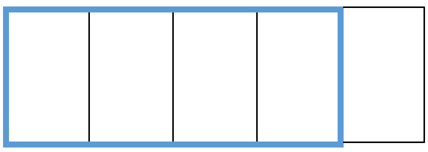


Şekil 2: $\frac{3}{4} \times \frac{1}{2} = \frac{3}{8}$

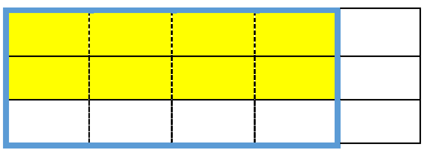
3. Problem 2

- Tinkerbell peri tozunun $\frac{4}{5}$'ünün $\frac{2}{3}$'sini kullanırsa ne kadar peri tozu kullanmış olur?
- $\frac{4}{5}$'ün $\frac{2}{3}$'si $\frac{4}{5} \times \frac{2}{3}$ işleminin sonucunu verir. Bu işlem alan modeli kullanılarak yapılır.
- Şekil 1 de mavi çerçeve bütünün $\frac{4}{5}$'ünü ifade eder. Şekil 2 de sarı alan $\frac{4}{5}$'ün $\frac{2}{3}$'sini ifade eder.
- Taralı alanın bütüne oranını bulurken dikdörtgenin alanından faydalanılır.

  (Taralı alan: 2x4=8   ve Bütün: 3x5=15)
- $\frac{4}{5}$'ün $\frac{2}{3}$'si başlangıçtaki bütünün $\frac{8}{15}$'i kadar olduğu için $\frac{4}{5} \times \frac{2}{3} = \frac{8}{15}$'dir.



Şekil 1: $\frac{4}{5}$



Şekil 2: $\frac{4}{5} \times \frac{2}{3} = \frac{8}{15}$

4. İki problemde elde edilen sonuca bakarak sınıfa iki kesrin çarpımında belli bir kural olup olmadığı sorulur.

5. Kuralın hemen bulunmaması durumunda ipucu verilir.

- İkinci problemde pay daki 3 hangi sayıların çarpımı olarak verilmiş? (Cevap:1 ile 3)
- Paydadaki 8 hangi sayıların çarpımı olarak verilmiş? (Cevap:2 ile 4 ün)

6. Birkaç alıştırma daha yapılarak konu pekiştirilir.

Ders Sonrası

Öğrencilerden $\frac{1}{5} \times \frac{2}{3}$ işleminin önce bununla ilgili bir problem kurmaları daha sonra bu işlemi alan modeliyle göstermeleri ve sonucunu bulmaları istenir.

Daha sonra öğrencilerin sonuçları dinlenir.

H) Hale'nin Kesirlerle Bölme Ders Planı

Ad soyad:	
Tarih:	03.06.2016
Sınıf:	6D
Süre:	40 dakika
Öğrenme Alanı:	Sayılar ve İşlemler
Alt Öğrenme Alanı:	Kesirlerle İşlemler
Beceriler:	Akıl yürütme, ilişkilendirme, matematiksel düşünme becerileri, problem çözme, iletişim
Kazanım:	6.1.4.7. İki kesrin bölme işlemimi yapar ve anlamlandırır.
Gerekli Ön Bilgiler:	Pay ve payda kavramlarını bilir. Bir bütünün belirtilen kesir kadarını bulur.
Araç ve Gereçler:	Kâğıt, makas, boyakalemi
Öğretim Yöntem ve Teknikleri:	İşbirliğine dayalı öğrenme ve tartışma tekniği Buluş (keşfetme) yoluyla öğrenme stratejisi

ÖĞRETME VE ÖĞRENME SÜRECİ

Ders Öncesi

Öğrencilere bölmenin anlamını anlayabilmeleri için basit bir soru ile giriş yapılır.

1. 10 elmam var bunu 6 kişiye nasıl paylaştırabilirim?

   Öğrenciler ile modellenerek yapılır. İlk önce 6 kişinin 1 er elma alacağını söylerler. Daha sonra kalan 4 elmanın bu 6 kişiye nasıl paylaştırılacağı sorulur. 4 elmanın her birini 6 ya bölerek 24 dilim olduğu ve her birine 4 er dilim düştüğünü söylerler. Yani 1 kişi $1\frac{4}{6}$ elma aldığını söylerler. Bunu öğrencilere modelle yapmasaydık bunu hangi işlemle yapardık diye sorduğumuzda öğrencilerin 10/6 olduğunu söylerler. Böylece bölmenin anlamı anlaşılır.

2. Ayşe üç tane evinin temizliğini $1\frac{1}{4}$ saatte bitiriyor. Bir evin temizliğini kaç saatte bitirir?

- Çözüm dairesel kesir modeli kullanılarak yapılır.

Ders sırası:

Bölme işleminin anlaşılmasını inşa etmek için bildikleri doğal sayılarla ilgili kavramları kullanarak aşağıdaki sorular sırayla örgenciler ile modelleyerek çözülür.

- Bir porsiyon $\frac{1}{2}$kurabiyedir. 2 kurabiyeden kaç tane porsiyon çıkartabilirim?
- Porsiyonu $\frac{1}{2}$ kurabiye ise 4 kurabiyeden kaç porsiyon çıkar?
- Bir porsiyon $\frac{1}{2}$ kurabiyedir. $\frac{3}{4}$ kurabiyeden kaç tane porsiyon çıkartabilirim?
- Bir porsiyon $\frac{1}{2}$ kurabiye ise $\frac{3}{8}$kurabiyeden kaç porsiyon çıkar?

Bu şekilde modelleyerek işlemin sonucunu bulduktan sonra soruları birde işlemini yazarlar.

$2:\frac{1}{2}=4$ $4:\frac{1}{2}=8$ $\frac{3}{4}:\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$ $\frac{3}{8}:\frac{1}{2}=\frac{3}{4}$

- Öğrencilerden bu işlemleri incelemeleri istenir. İşlemlerin sonuçları nasıl bulunmuş bir örüntü var mı şeklinde sorulur.
- Öğrencilerden cevaplar alınır.
- Öğrenciler birinci kesri ikinci kesrin paydası ile çarpıp payına böldük şeklinde söylerler.

Ders sonrası:

Porsiyonu $\frac{1}{2}$ olan kurabiye ise $\frac{5}{8}$kurabiyelerden kaç tane porsiyon çıkartabilirim? sorusu model ve işlem ile yapılır.

EK-4: ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler	
Adı	Nur Banu
Soyadı	Duran
Doğum Yeri ve Tarihi	Kaş 30/08/1991
Uyruğu	T.C.
İletişim Adresi ve E-Mail Adresi	Pamukkale Üniversitesi Eğitim Fakültesi Matematik Eğitimi Anabilim Dalı nduran@pau.edu.tr
Eğitim	
İlköğretim	Fethiye Merkez Atatürk İlköğretim Okulu
Ortaöğretim	Aydın Ortaklar Anadolu Öğretmen Lisesi
Yükseköğretim (Lisans)	Sakarya Üniversitesi İlköğretim Matematik Öğretmenliği
Yükseköğretim (Yüksek Lisans)	Pamukkale Üniversitesi, Matematik Eğitimi
Yabancı Dil	
İngilizce- YDS- Eylül 2013	92,25
Mesleki Deneyim	
Yıllar	Mesleki Deneyim
2014- halen	Pamukkale Üniversitesi, Eğitim Fakültesi, Matematik ve Fen Bilimleri Eğitimi Bölümü, Matematik Eğitimi Anabilim Dalı, Araştırma Görevlisi