T.C.
PAMUKKALE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

KONVOLUSYON OPERATÖRLERİ İÇİN KOROVKİN TİPLİ YAKLAŞIM

YÜKSEK LİSANS TEZİ

BİLAL KİRAS

DENİZLİ, ARALIK - 2017

T.C.
PAMUKKALE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

KONVOLUSYON OPERATÖRLERİ İÇİN KOROVKİN TİPLİ YAKLAŞIM

YÜKSEK LİSANS TEZİ

BİLAL KİRAS

DENİZLİ, ARALIK - 2017

KABUL VE ONAY SAYFASI

Bilal KİRAS tarafından hazırlanan "KONVOLUSYON OPERATÖRLERİ İÇİN KOROVKİN TİPLİ YAKLAŞIM" adlı tez çalışmasının savunma sınavı 29.12.2017 tarihinde yapılmış olup aşağıda verilen jüri tarafından oy birliği / ~~oy çokluğu~~ ile Pamukkale Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı Yüksek Lisans Tezi olarak kabul edilmiştir.

Jüri Üyeleri	İmza
Danışman Doç. Dr. Özlem GİRGİN ATLIHAN	....
Üye Prof. Dr. Mehmet Ali SARIGÖL Pamukkale Üniversitesi	....
Üye Doç. Dr. İnci EGE Adnan Menderes Üniversitesi	....

Pamukkale Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun 03/01/2018.. tarih ve ..01/12.... sayılı kararıyla onaylanmıştır.

....

Prof. Dr. Uğur YÜCEL

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

Bu tezin tasarımı, hazırlanması, yürütülmesi, araştırmalarının yapılması ve bulgularının analizlerinde bilimsel etiğe ve akademik kurallara özenle riayet edildiğini; bu çalışmanın doğrudan birincil ürünü olmayan bulguların, verilerin ve materyallerin bilimsel etiğe uygun olarak kaynak gösterildiğini ve alıntı yapılan çalışmalara atfedildiğine beyan ederim.

İmza :

Öğrenci Adı Soyadı : BİLAL KİRAS

ÖZET

KONVOLUSYON OPERATÖRLERİ İÇİN
KOROVKİN TİPLİ YAKLAŞIM
YÜKSEK LİSANS TEZİ
BİLAL KİRAS
PAMUKKALE ÜNİVERSİTESİ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

(TEZ DANIŞMANI:DOÇ. DR. ÖZLEM GİRGİN ATLIHAN)

DENİZLİ, ARALIK - 2017

Bu tez dört bölümden oluşmaktadır. İlk bölüm giriş kısmına ayrılmıştır. İkinci bölümde, temel tanım ve kavramlar tanıtılıp bunlara ilişkin bilinen bazı sonuçlar hatırlatılmıştır. Üçüncü bölümde, Abel metodu yardımıyla tek değişkenli konvolusyon operatörleri için Korovkin tipli yaklaşım teoremleri ve ispatları incelenmiştir. Dördüncü bölümde, çift değişkenli konvolusyon operatörleri için Korovkin tipli yaklaşım teoremleri ve ispatları incelenmiştir. Ayrıca, bu bölümün son kısmında, kuvvet serisi metodu kullanılarak çift değişkenli konvolusyon operatörleri için Korovkin tipli yaklaşım teoremleri ve ispatları incelenmiştir.

ANAHTAR KELİMELER: Korovkin Teoremi, Pozitif Lineer Operatörler, Abel Yakınsaklık, Kuvvet Serileri Metodu

ABSTRACT

KOROVKIN TYPE APPROXIMATION FOR CONVOLUTION OPERATORS

MSC THESIS
BİLAL KİRAS
PAMUKKALE UNIVERSITY INSTITUTE OF SCIENCE
MATHEMATİCS

(SUPERVISOR:DOÇ. DR. ÖZLEM GİRGİN ATLIHAN)

DENİZLİ, DECEMBER 2017

This thesis consists of four chapters. The first chapter has been devoted to introduction. In the second chapter, the basic definitions and consepts have been recalled. The third chapter, Korovkin type approximation theorems and proofs have been examined for univariate convolution operators via Abel method. In the fourth chapter, Korovkin type approximation theorems and proofs have been examined for bivariate convolution operators. Also, in the final section of this capter, the Korovkin thpe approximation theorems and proofs are given for the bivariate convolution operators using the power series method.

KEYWORDS: Korovkin Theorem, Positive Linear Operators, Abel Convergence, Power Series Method

SEMBOL LİSTESİ

$Ax = ((Ax)_n)$	: x dizisinin A matrisi altındaki dönüşüm dizisi
$\mathbb{R}$	: reel sayılar kümesi
$\mathbb{N}$	: doğal sayılar kümesi
χ_E	: E kümesinin karakteristik fonksiyonu
$\omega(f;\delta)$	: f fonksiyonunun süreklilik modülü
$C[a,b]$	: $[a,b]$ aralığındaki sürekli fonksiyonların uzayı
$B[a,b]$	: $[a,b]$ aralığındaki sınırlı fonksiyonların uzayı
$\omega(f;\delta_1,\delta_2)$	: çift değişkenli f fonksiyonunun süreklilik modülü
$C[K]$	: $K = [a,b] \times [c,d]$ bölgesindeki reel değerli ve sürekli fonksiyonların uzayı
$B[K]$	: $K = [a,b] \times [c,d]$ bölgesindeki reel değerli ve sınırlı fonksiyonların uzayı

İÇİNDEKİLER

Sayfa

ÖNSÖZ

Bu tez çalışmamda beni yönlendiren ve bana yardımcı olan çok değerli hocam Doç. Dr. Özlem GİRGİN ATLIHAN 'a ve desteklerini benden hiç esirgemeyen aileme teşekkür ederim.

Bilal KİRAS

1. GİRİŞ

Klasik Yaklaşım Teorisi, 1885 yılında Alman Matematikçi Karl Weierstrass 'ın sonlu aralıkta sürekli olan her fonksiyona bu aralıkta yakınsayan bir polinomun olacağını ispat etmesiyle başlamıştır. Birçok matematikçi bunun ispatını farklı şekilde ele almıştır. Örneğin Bernstein 1912 yılında Bernstein polinomlarının $C[0,1]$ uzayındaki fonksiyonlara düzgün yakınsadığını ispatlamıştır. Daha sonraları pozitif lineer operatör dizilerinin yaklaşım özellikleri üzerine çalışılmıştır. Dolayısıyla $(L_n)_{n\in N}$ dizisinin sürekli bir fonksiyona düzgün yakınsak olması için gerekli şartlar nelerdir sorusu akla gelmektedir. Bu sorunun cevabını üç matematikçi Popoviciu (1951), Bohman (1952) ve Korovkin (1953) birbirinden bağımsız olarak bulmuşlardır. Bu sonuçlar birçok matematikçinin bu yaklaşımları farklı uzaylara genişletmesine kaynak sağlamıştır. Böylelikle Yaklaşım Teorisi'nin özel bir dalı olan Korovkin Tipi Yaklaşım Teorisi ortaya çıkmıştır.

Kompakt bir aralıkta sürekli fonksiyonların yaklaşımı hakkındaki klasik Korovkin teoremi, bir pozitif lineer operatör dizisinin birim operatöre yakınsayıp yakınsamayacağına ilişkin şartları belirler. Süreksizlik noktalarında ise, bu operatörlerin genellikle fonksiyonun sağ ve sol limitlerinin aritmetik ortalamasına yakınsadığı görülür. Fakat süreksizlik noktalarında yakınsak olmayan Hermit-Fejer yaklaşım operatörleri gibi operatörler de vardır (Bojanic ve Cheng, 1983). Böyle durumlarda yakınsaklık kaybını gidermek için Cesaro metodunun sürekli periyodik fonksiyonlarının Fourier serisini yakınsak yapmada etkili olduğunu göstermiştir.

Klasik Korovkin teoremindeki pozitif lineer operatör dizisinin yakınsamaması durumunda ilk yöntem olarak hemen hemen yakınsaklık metodunun kullanımı düşünülmüştür. Bununla ilgili çalışmalar King ve Swetits (1970), Mohapatra (1977) tarafından yapılmıştır. İkinci yöntem olarak ise istatiksel yakınsaklık metodu düşünülmüş ve bu metot yardımıyla Klasik Korovkin teoremi geliştirilmiştir (Gadjiev ve Orhan 2002, Erkuş ve Duman 2005, 2006). Matris toplanabilme metodlarının Korovkin tipli yaklaşım teorisinde kullanımı Swetits (1979) tarafından yapılmıştır.

Bu çalışmaları takiben Abel toplanabilme metodu kullanılarak Korovkin tipli yaklaşım teoremleri geliştirilmiştir (Ünver 2013, Atlıhan ve Ünver 2015).

Son yıllarda da Taş ve Atlıhan tarafından Kuvvet Serisi metodu kullanılarak geliştirilen Korovkin tipli yaklaşım teoremleri incelenmiştir.

Bu tezde öncelikle klasik Korovkin teoremleri ve ispatları incelenmiştir (Korovkin 1953, Korovkin 1960). Daha sonra Abel yakınsaklık kullanılarak geliştirilen konvolusyon tipli operatörler için Korovkin tipli teoremler ve ispatları incelenmiştir (Atlıhan ve Ünver 2015). Daha sonra çift değişkenli konvolusyon operatörleri için Korovkin tipli yaklaşım teoremleri ve ispatları incelenmiştir (Taşdelen, Olgun ve Tunca 2007). Son olarak çift değişkenli konvolusyon operatörleri için kuvvet serisi metodu kullanılarak Korovkin tipli yaklaşım teoremleri incelenmiştir.

2. TEMEL TANIM VE KAVRAMLAR

Bu bölümde ihtiyaç duyacağımız temel tanım ve kavramları vereceğiz.

2.1 Lineer Pozitif Operatörler

Tanım 2.1.1 X boştan farklı bir küme, F reel veya kompleks sayıların bir cismi olsun.

$+ : X \times X \to X$

$. : F \times X \to X$

fonksiyonları aşağıdaki özellikleri sağlıyorsa, X kümesine F cismi üzerinde bir lineer uzay (vektör uzayı) denir.

$\forall x, y \in X$ ve $\forall a, b \in F$ için

$L_1)$ $x + y = y + x$,

$L_2)$ $(x + y) + z = x + (y + z)$,

$L_3)$ $x + \vartheta = \vartheta + x$ olacak şekilde $\vartheta \in X$ vardır,

$L_4)$ $\forall x \in X$ için $x + (-x) = (-x) + x = \vartheta$ olacak şekilde bir $-x \in X$ vardır,

$L_5)$ $1_x . x = x$, olacak şekilde $1_x \in x$ vardır,

$L_6)$ $a(x + y) = ax + ay$,

$L_7)$ $(a + b)x = ax + bx$,

$L_8)$ $a(bx) = (ab)x$.

Tanım 2.1.2 Lineer uzaylar üzerinde tanımlı dönüşümlere "operatör" denir.

Tanım 2.1.3 X ve Y aynı cisim üzerinde iki lineer uzay olmak üzere $L: X \to Y$ operatörü verilmiş olsun. Eğer her $x, y, z \in X$ ve her $a, b \in F$ için,

$$L(ax + by) = a.L(x) + b.L(y)$$

şartı sağlanıyorsa L 'ye "lineer operatör" denir (Maddox, 1978).

Tanım 2.1.4 X ve Y reel değerli fonksiyonların uzayı olmak üzere $L: X \to Y$ lineer operatör olsun. L operatörünün x noktasındaki değeri $L(f;x) = g(x)$ şeklinde gösterilsin. X tanım uzayından alınan her $f \geq 0$ fonksiyonu için $L(f) \geq 0$ ise L operatörüne "pozitif operatör" adı verilir (Boss, 2000).

Tanım 2.1.3 ve Tanım 2.1.4 'ü sağlayan L operatörüne "pozitif lineer operatör" denir.

Teorem 2.1.5 X, Y vektör uzayları, $L: X \to Y$ pozitif lineer operatör olsun. Bu takdirde,

a) L operatörü monoton artandır.
b) $|L(f)| \leq L(|f|)$

koşulları sağlanır (Altomare ve Campiti, 1994).

İspat:

a) $f < g$ olsun. L pozitif operatör olduğundan $g - f > 0$ elde edilir. Burada eşitsizliğin her iki yanına L operatörü uygulanırsa $L(g - f) > 0$ olur. L lineer operatör olduğundan $L(g) - L(f) > 0$ yazılabilir ve $L(g) > L(f)$ elde edilir. Böylece L operatörü monoton artandır.

b) $-L(|f|) \leq L(f) \leq L(|f|)$ olduğu gösterilirse istenilen elde edilir. $-|f| \leq f \leq |f|$ eşitsizliğini ele alalım. Eşitsizliğin her tarafına L operatörü uygulanırsa, $L(-|f|) \leq L(f) \leq L(|f|)$ ifadesi elde edilir. Böylece L 'nin lineer olması nedeniyle ispat tamamlanır.

Tanım 2.1.6 X kompleks veya reel vektör uzayı olmak üzere $\|.\|: X \to R$ fonksiyonu aşağıdaki özellikleri sağlıyorsa bu fonksiyona X üzerinde bir norm ve $(X, \|.\|)$ ikilisine de " normlu uzay " denir. $\forall x, y \in X$ ve $\forall \alpha \in F$ olsun.

$N_1)$ $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$,

$N_2)$ $\|\alpha x\| = |\alpha|. \|x\|$,

$N_3)$ $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

gerçeklenir.

Tanım 2.1.7 X ve Y normlu uzaylar ve $T: X \to Y$ bir lineer operatör olsun. Eğer her $x \in X$ için

$$\|T(x)\| \leq M \|x\|$$

eşitsizliğini sağlayacak şekilde bir $M > 0$ sayısı bulunabiliyorsa T 'ye "sınırlıdır" denir ve T nin normu

$$\|T\|_{X \to Y} = sup\left\{\frac{\|Tx\|}{\|x\|} : x \neq 0, x \in X\right\}$$

ile tanımlanır.

Burada her $x \in X$ $(x \neq 0)$ için $\frac{\|Tx\|}{\|x\|} \leq M$ olduğundan sınırlı lineer dönüşümün normu mevcuttur ve her $x \in X$ için $\|Tx\| \leq \|T\| \|x\|$ olur. Aynı zamanda bu norm

1) $\|T\| = sup\{\|Tx\|: \|x\| < 1\}$
2) $\|T\| = sup\{\|Tx\|: \|x\| = 1\}$
3) $\|T\| = inf\{M \geq 0: \|Tx\| \leq M \|x\|\}$

normlarına denktir.

Teorem 2.1.8 X ve Y vektör uzayları ve $L: X \to Y$ lineer operatör olsun. Bu durumda

$$\|L\|_{X\to Y} = \sup_{\|f\|_x=1} \|L(f)\|_Y$$

eşitliği sağlanır.

Teorem 2.1.9 X ve Y normlu uzaylar ve $T: X \to Y$ bir lineer dönüşüm olsun. Bu takdirde T dönüşümünün sürekli olması için gerek ve yeter şart T 'nin sınırlı olmasıdır (Kreyszig 1978).

2.2 Temel Toplanabilme Kavramları

Bu kısımda tezde ihtiyaç duyacağımız matris toplanabilme metodlarından ve buna ilişkin bazı sonuçlardan söz edeceğiz. Öncelikle klasik matris toplanabilme metodunu hatırlatacağız daha sonra da Abel toplanabilme ve Kuvvet Serisi metodu kavramlarını vereceğiz.

Tanım 2.2.1 $A = (a_{nk}), k, n = 1,2,3, ...$ sonsuz bir matris ve reel ya da kompleks terimli bir $x = (x_k)$ dizisi verilsin. x dizisinin $A-$dönüşüm dizisi $Ax = ((Ax)_n)$ ile gösterilir ve

$$(Ax)_n = \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}x_k$$

şeklinde tanımlanır (burada her bir n için seri yakınsak kabul edilmektedir).

Eğer,

$$\lim_{n\to\infty} (Ax)_n = L$$

koşulu gerçekleniyor ise x dizisi L değerine " $A-$toplanabilirdir " denir. Eğer her yakınsak (x_n) dizisi için,

$$\lim_{n\to\infty} x_n = L$$

olduğunda

$$\lim_{n\to\infty}(Ax)_n = L$$

koşulu sağlanırsa A, " regüler matris " adını alır (Hardy 1949, Wilansky 1984, Boos 2000).

Bir $A = (a_{nk})$ matrisinin regüler olması aşağıdaki Silverman-Toeplitz Teoremi ile karakterize edilir.

Teorem 2.2.2 (Silverman-Toeplitz Teoremi) Bir $A = (a_{nk})$ matrisinin regüler olması için gerek ve yeter koşul

$i)$ $\sup_n \sum_{k=1}^{\infty} |a_{nk}| < \infty$

$ii)$ Her k için,

$$a_k := \lim_{n\to\infty} a_{nk} = 0$$

$iii)$ $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} = 1$

koşullarının sağlamasıdır (Hardy 1949, Wilansky 1984, Boos 2000).

Tanım 2.2.3 Her $\alpha \in (0,1)$ için,

$$\sum_{n=0}^{\infty} x_n \alpha^n$$

serisi yakınsak olsun. Eğer,

$$\lim_{\alpha\to 1^-}(1-\alpha)\sum_{n=0}^{\infty} x_n \alpha^n = L$$

koşulu gerçekleniyorsa $x = (x_n)$ dizisi L değerine Abel yakınsaktır veya Abel toplanabilirdir denir (Powel ve Shah, 1972).

Tanım 2.2.4 (p_n) , $p_0 > 0$ ve $p_n \geq 0$, $(n \in N)$ koşullarını sağlayan reel terimli bir dizi olsun. Ayrıca

$$p(t) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n t^n$$

şeklinde tanımlı kuvvet serisi, R yakınsaklık yarıçapına sahip olsun $(0 < R \leq \infty)$. Eğer,

$$\lim_{t \to R^-} \frac{1}{p(t)} \sum_{n=0}^{\infty} x_n p_n t^n = L$$

koşulu gerçekleniyorsa $x = (x_n)$ dizisi L değerine kuvvet serisi metodu anlamında yakınsaktır denir (Kratz ve Stadtmüller, 1989).

2.3 Süreklilik Modülü

Bu kısımda yakınsaklık oranı olarak adlandırılan hesaplamayı yaparken kullanılan süreklilik modülü kavramı ve özellikleri verilecektir.

Tanım 2.3.1 $C[a,b]$ uzayı, $[a,b]$ aralığında tanımlı reel değerli sürekli fonksiyonların uzayı olmak üzere, $f \in C[a,b]$ olsun. f fonksiyonunun süreklilik modülü $\omega(f;\delta)$ ile gösterilmek üzere,

$$\omega(f;\delta) = \sup_{|t-x| \leq \delta} |f(t) - f(x)|$$

şeklinde tanımlıdır. Burada δ pozitif bir sabittir.

Süreklilik modülü aşağıdaki özellikleri gerçekler (Altomore ve Campiti, 1914).

Özellikler :

$i)$ $\omega(f;\delta) \geq 0$

$ii)$ $\delta_1 \leq \delta_2 \Rightarrow \omega(f;\delta_1) \leq \omega(f;\delta_2)$

$iii)\ \omega(f+g;\delta) \leq \omega(f;\delta) + \omega(g;\delta)$

$iv)\ \omega(f;m\delta) \leq m\omega(f;\delta)$

$v)$ $[\![\lambda]\!]$, λ `nın tam değerini göstermek üzere bir $\lambda > 0$ sayısı için,

$$\omega(f;\lambda\delta) \leq (1+[\![\lambda]\!])\omega(f;\delta) \leq (1+\lambda)\omega(f;\delta)$$

$vi)\ \omega(f;|t-x|) \geq |f(t)-f(x)|$

$vii)\ |f(t)-f(x)| \leq \left(\frac{|t-x|}{\delta}+1\right)\omega(f;\delta)$

2.4 Korovkin Teoremleri

Teorem 2.4.1 L_n , $C[a,b]$ uzayından $C[a,b]$ uzayına tanımlı ve $\forall n \in N$ için $\{L_n\}$ pozitif lineer operatör dizisi olsun. Eğer,

$$\lim_n \|L_n(f_0) - f_0\| = 0 \quad , \quad (f_0(y) = 1)$$

$$\lim_n \|L_n(\varphi)\| = 0 \quad , \quad (\varphi_x(y) = (y-x)^2, \forall x \in [a,b])$$

koşulları sağlanıyor ise $\forall f \in C[a,b]$ için

$$\lim_n \|L_n(f) - f\| = 0$$

sağlanır.

İspat: $x \in [a,b]$ ve $f \in C[a,b]$ olsun. $f \in C[a,b]$ olduğundan $\forall \varepsilon > 0$ için bir $\delta > 0$ sayısı vardır ki $|y-x| < \delta$ olacak şekilde $\forall y$ için

$$|f(y) - f(x)| < \varepsilon$$

kalır. $I_\delta = [x-\delta, x+\delta] \cap [a,b]$ olacak şekilde tanımlansın. Ayrıca,

$$\|f\| = \max_{x\in[a,b]} |f(x)| = M$$

olsun. Bu durumda,

$$|f(y)-f(x)| = |f(y)-f(x)|.\ \chi_{I_\delta}(y) + |f(y)-f(x)|.\chi_{[a,b]/I_\delta}(y)$$

$$\leq \varepsilon + \tfrac{2M}{\delta^2}(y-x)^2$$

elde edilir. $\{L_n\}$ pozitif lineer operatör dizisi olduğundan ve son eşitsizlikten

$$|L_n(f;x)-f(x)| \leq |L_n(f(y)-f(x)+f(x);x)-f(x)|$$

$$= |L_n(f(y)-f(x);x)+L_n(f(x);x)-f(x)|$$

$$\leq L_n(|f(y)-f(x)|;x) + |f(x)|.\,|L_n(1;x)-1|$$

$$= L_n(|f(y)-f(x)|;x) + |f(x)|.\,|L_n(f_0;x)-f_0(x)|$$

$$\leq \varepsilon.L_n(f_0;x) + \frac{2M}{\delta^2}L_n(\varphi;x) + M.\,|L_n(f_0;x)-f_0(x)|$$

$$\leq \varepsilon.L_n(f_0;x) + \varepsilon - \varepsilon + \frac{2M}{\delta^2}L_n(\varphi;x) + M.\,|L_n(f_0;x)-f_0(x)|$$

$$\leq \varepsilon + (\varepsilon+M).\,|L_n(f_0;x)-f_0(x)| + \frac{2M}{\delta^2}L_n(\varphi;x) \quad , \quad \alpha = \max\left\{\varepsilon+M, \frac{2M}{\delta^2}\right\}$$

$$\leq \varepsilon + \alpha.\{|L_n(f_0;x)-f_0(x)| + L_n(\varphi;x)\}$$

eşitsizliği elde edilir. Eşitsizliğin her iki tarafının $x \in [a,b]$ için maksimumu alınırsa

$$\|L_n(f)-f\| \leq \varepsilon + \alpha.\{\|L_n(f_0)-f_0\| + \|L_n(\varphi)\|\}$$

elde edilir. Hipotez nedeniyle ve ε keyfi olduğundan yeterince küçük seçilirse

$$\lim_n \|L_n(f)-f\| = 0$$

eşitliği sağlanır.■

Şimdi Abel yakınsaklık metodu kullanılarak geliştirilen Korovkin teoremini ve ispatını inceleyelim (Ünver 2013).

$L_n: C[a,b] \to B[a,b]$ ve her $\alpha \in (0,1)$ için

$$\sum_{n=0}^{\infty} \|L_n(f_0)\| \alpha^n < \infty \qquad (2.1)$$

koşulunu sağlayan bir pozitif lineer operatör dizisi olsun. Her $\alpha \in (0,1)$ ve $f \in C[a,b]$ için

$$V_\alpha(f;x) = (1-\alpha) \sum_{n=0}^{\infty} L_n(f;x) \alpha^n$$

ile tanımlı V_α operatörünü ele alalım. O halde,

$$\sup_{x \in [a,b]} |V_\alpha(f;x)| = \sup_{x \in [a,b]} \left| (1-\alpha) \sum_{n=0}^{\infty} L_n(f;x) \alpha^n \right|$$

$$\leq \sup_{x \in [a,b]} (1-\alpha) \sum_{n=0}^{\infty} |L_n(f;x) \alpha^n|$$

$$\leq \sup_{x \in [a,b]} (1-\alpha) \sum_{n=0}^{\infty} L_n(|f|;x) \alpha^n$$

$$\leq \sup_{x \in [a,b]} (1-\alpha) \sum_{n=0}^{\infty} L_n(\|f\|;x) \alpha^n$$

$$\leq \sup_{x \in [a,b]} (1-\alpha) \|f\| \sum_{n=0}^{\infty} L_n(f_0;x) \alpha^n$$

elde edilir. Şimdi (2.1) ifadesi gözönüne alınırsa V_α operatörü her $\alpha \in (0,1)$ ve $f \in C[a,b]$ için anlamlı olup $B[a,b]$ uzayına aittir. Dolayısıyla

$$\|V_\alpha\|_{C[a,b] \to B[a,b]} = \|V_\alpha(1)\|_{B[a,b]} = \sup_{x \in [a,b]} \left| (1-\alpha) \sum_{n=0}^{\infty} L_n(1;x) \alpha^n \right|$$

şeklinde yazılabilir.

Teorem 2.4.2 $L_n: C[a,b] \to B[a,b]$ ve (2.1) koşulunu sağlayan pozitif lineer operatör dizisi olsun. Eğer,

$$\lim_{\alpha \to 1^-} \|V_\alpha(f_0) - f_0\| = 0 \quad , \qquad (f_0(y) = 1)$$

$$\lim_{\alpha \to 1^-} \|V_\alpha(\varphi_x)\| = 0 \quad , \qquad (\varphi_x(y) = (y-x)^2, \forall x \in [a,b])$$

koşulları sağlanıyor ise $\forall f \in C[a,b]$ için

$$\lim_{\alpha \to 1^-} \|V_\alpha(f) - f\| = 0$$

sağlanır.

İspat: $x \in [a,b]$ ve $f \in C[a,b]$ olsun. $f \in C[a,b]$ olduğundan $\forall \varepsilon > 0$ için bir $\delta > 0$ sayısı vardır ki $|y - x| < \delta$ olacak şekilde $\forall y$ için

$$|f(y) - f(x)| < \varepsilon$$

kalır. $I_\delta = [x-\delta, x+\delta] \cap [a,b]$ olacak şekilde tanımlansın. Ayrıca,

$$\|f\| = \max_{x \in [a,b]} |f(x)| = M$$

olsun. Bu durumda,

$$|f(y) - f(x)| = |f(y) - f(x)|.\, \chi_{I_\delta}(y) + |f(y) - f(x)|.\, \chi_{[a,b]/I_\delta}(y)$$

$$\leq \varepsilon + \frac{2M}{\delta^2}(y-x)^2$$

elde edilir. V_α pozitif lineer operatör dizisi olduğundan ve son eşitsizlikten

$$|V_\alpha(f;x) - f(x)| \leq |V_\alpha(f(y) - f(x) + f(x); x) - f(x)|$$

$$= |V_\alpha(f(y) - f(x); x) + V_\alpha(f(x); x) - f(x)|$$

$$\leq V_\alpha(|f(y) - f(x)|; x) + |f(x)|.\, |V_\alpha(1; x) - 1|$$

$$= V_\alpha(|f(y) - f(x)|; x) + |f(x)|.\, |V_\alpha(f_0; x) - f_0(x)|$$

$$\leq \varepsilon . V_\alpha(f_0;x) + \frac{2M}{\delta^2} V_\alpha(\varphi;x) + M.\left|V_\alpha(f_0;x) - f_0(x)\right|$$

$$\leq \varepsilon . V_\alpha(f_0;x) + \varepsilon - \varepsilon + \frac{2M}{\delta^2} V_\alpha(\varphi;x) + M.\left|V_\alpha(f_0;x) - f_0(x)\right|$$

$$\leq \varepsilon + (\varepsilon + M).\left|V_\alpha(f_0;x) - f_0(x)\right| + \frac{2M}{\delta^2} V_\alpha(\varphi;x)$$

$$\leq \varepsilon + M_1.\{\left|V_\alpha(f_0;x) - f_0(x)\right| + V_\alpha(\varphi;x)\}$$

eşitsizliği elde edilir. Son eşitsizlikte $M_1 = \max\left\{\varepsilon + M, \frac{2M}{\delta^2}\right\}$ olarak seçilmiştir. Eşitsizliğin her iki tarafının $x \in [a,b]$ için maksimumu alınırsa

$$\|V_\alpha(f) - f\| \leq \varepsilon + M_1.\{\|V_\alpha(f_0) - f_0\| + \|V_\alpha(\varphi)\|\}$$

elde edilir. Hipotez nedeniyle ve ε keyfi olduğundan yeterince küçük seçilirse

$$\lim_{\alpha \to 1^-} \|V_\alpha(f) - f\| = 0$$

eşitliği sağlanır.■

3. TEK DEĞİŞKENLİ KONVOLUSYON OPERATÖRLERİ İÇİN KOROVKİN TİPLİ YAKLAŞIM

3.1 Tek Değişkenli Konvolusyon Operatörleri İçin Klasik Yaklaşım

Bu bölümde Konvolusyon operatörleri için Korovkin tipli yaklaşım teoremleri incelenmiştir. $f \in C[a,b]$ için

$$L_n(f;x) = \int_a^b f(y) K_n(y-x) dy \tag{3.1}$$

şeklinde tanımlı $\{L_n\}$ konvolusyon tipli operatör dizisini ele alalım. Burada $0 < \delta \leq b - a$ olmak üzere,

$$\|f\|_\delta = \sup_{x \in [a+\delta, b-\delta]} |f(x)| \quad , \quad f \in C[a,b]$$

şeklinde tanımlıdır.

Lemma 3.1.1 $0 < \delta \leq b - a$ olsun. Eğer,

$$\lim_n \int_{-\delta}^{\delta} K_n(y)\, dy = 1 \tag{3.2}$$

$$\lim_n \left(\sup_{|y| \geq \delta} K_n(y) \right) = 0 \tag{3.3}$$

eşitlikleri sağlanır ise (3.1) ile verilen $\{L_n\}$ operatör dizisi için

$$\lim_n \|L_n(f_0) - f_0\|_\delta = 0$$

eşitliği sağlanır.

İspat : $0 \leq \delta \leq b-a$ ve $x \in [a+\delta, b-\delta]$ alalım.

$$a+\delta \leq x \leq b-\delta \;\Rightarrow\; x \leq b \Rightarrow -(b-a) \leq a-x$$

$$x \geq a+\delta \;\Rightarrow\; x-a \geq \delta \;\Rightarrow\; a-x \leq -\delta$$

$$a+\delta \leq x \leq b-\delta \;\Rightarrow\; x \geq a \;\Rightarrow\; b-x \leq b-a$$

$$x \leq b-\delta \;\Rightarrow\; x-b \leq -\delta \;\Rightarrow\; b-x \geq \delta$$

Bu eşitsizliklerden,

$$-(b-a) \leq a-x \leq -\delta \tag{3.4}$$

$$\delta \leq b-x \leq b-a \tag{3.5}$$

eşitsizlikleri elde edilir. Buradan

$$L_n(f_0;x) = \int_a^b K_n(y-x)dy = \int_{a-x}^{b-x} K_n(y)dy \tag{3.6}$$

(3.4) ve (3.5) eşitsizlikleri ile (3.6) eşitliği göz önüne alınırsa,

$$\int_{-\delta}^{\delta} K_n(y)\,dy \leq \int_{a-x}^{b-x} K_n(y)dy = L_n(f_0;x) \leq \int_{-(b-a)}^{b-a} K_n(y)dy$$

$$\int_{-\delta}^{\delta} K_n(y)\,dy - 1 \leq L_n(f_0;x) - 1 \leq \int_{-(b-a)}^{b-a} K_n(y)dy - 1$$

bulunur. Norma geçilirse,

$$\|L_n(f_0;x) - 1\| \leq max\left\{\left|\int_{-\delta}^{\delta} K_n(y)\,dy - 1\right|, \left|\int_{-(b-a)}^{b-a} K_n(y)dy - 1\right|\right\} =: u_n$$

yazabiliriz. $0 < \delta \leq b-a$ eşitsizliği ve (3.2) eşitliği göz önüne alınırsa

$$\lim_n u_n = 0$$

elde edilir ve ispat tamamlanır.■

Lemma 3.1.2 $0 < \delta \leq b - a$ olsun. Eğer

$$\lim_n \int_{-\delta}^{\delta} K_n(y)\, dy = 1 \tag{3.2}$$

$$\lim_n \left(\sup_{|y| \geq \delta} K_n(y) \right) = 0 \tag{3.3}$$

eşitlikleri sağlanır ise (3.1) eşitliği ile tanımlı$\{L_n\}$ operatör dizisi için

$$\lim_n \|L_n(\varphi)\|_\delta = 0 \quad , \quad \varphi_x(y) = (y - x)^2$$

elde edilir.

İspat : $0 \leq \delta \leq b - a$ ve $x \in [a + \delta, b - \delta]$ olsun.

$\varphi_x(y) = y^2 - 2xy + x^2$ olduğundan $\forall x \in [a + \delta, b - \delta]$ için $\varphi_x \in C[a, b]$ dir.

$$L_n(\varphi_x; x) = \int_a^b (y - x)^2 K_n(y - x) dy = \int_{a-x}^{b-x} y^2 K_n(y) dy$$

$$\leq \int_{-(b-a)}^{b-a} y^2 K_n(y) dy \tag{3.7}$$

$f_2(y) = y^2$ fonksiyonu $y = 0$ noktasında sürekli olduğundan $\forall \varepsilon > 0$ için bir $\mu > 0$ vardır ki $|y| \leq \mu$ olacak şekilde $\forall y$ için $y^2 < \varepsilon$ eşitsizliği sağlanır. Burada iki durum mevcuttur:

1. Durum: $\mu \geq b - a$ olsun. (3.7) eşitsizliğinden

$$0 \leq L_n(\varphi; x) \leq \varepsilon^2 \int_{-(b-a)}^{b-a} K_n(y) dy$$

olur ve bu eşitsizlikten dolayı

$$\lim_n \|L_n(\varphi)\|_\delta = 0$$

elde edilir.

2. Durum: $\mu < b - a$ olsun. (3.7) eşitsizliğinden

$$L_n(\varphi; x) \leq \int_{-(b-a)}^{-\mu} y^2 K_n(y)dy + \int_{-\mu}^{\mu} y^2 K_n(y)dy + \int_{\mu}^{(b-a)} y^2 K_n(y)dy$$

eşitsizliği elde edilir.

$$a_n := 2 \sup_{|y|\geq\mu} K_n(y) \quad ve \quad b_n := \int_{|y|\leq\mu} K_n(y)dy$$

olacak şekilde tanımlansın. Ayrıca,

$$\|L_n(\varphi)\|_\delta \leq a_n \int_{\mu}^{(b-a)} y^2 dy + \varepsilon^2 b_n$$

$$= a_n \frac{(b-a)^3 - \mu^3}{3} + \varepsilon^2 b_n$$

elde edilir. Burada dikkat edilirse hipotez nedeniyle (3.2) ve (3.3) eşitliklerinden

$$\lim_n a_n = 0 \qquad ve \qquad \lim_n b_n = 1$$

eşitlikleri sağlanır. Ayrıca,

$$M = max\left\{\frac{(b-a)^3 - \mu^3}{3}, \varepsilon^2\right\}$$

şeklinde olmak üzere

$$\|L_n(\varphi)\|_\delta \leq a_n \frac{(b-a)^3 - \mu^3}{3} + \varepsilon^2 b_n + \varepsilon^2 - \varepsilon^2$$

$$\leq Ma_n + Mb_n + \varepsilon^2 - \varepsilon^2$$

$$= \varepsilon^2 + M\big(a_n + (b_n - 1)\big)$$

$$\leq \varepsilon^2 + M(a_n + |b_n - 1|)$$

elde edilir. Bu ise ispatı tamamlar.■

Teorem 3.1.3 (3.1) ifadesi ile tanımlanan L_n operatörü için (3.2) ve (3.3) eşitlikleri sağlanırsa $\forall f \in C[a,b]$ için,

$$\lim_n \|L_n(f) - f\| = 0$$

elde edilir.

İspat : Lemma 3.1.1 , Lemma 3.1.2 ve Teorem 2.4.1 nedeniyle ispat açıktır.■

Şimdi Teorem 3.1.3 'ün koşullarının gerçeklendiği bir örnek verelim.

Örnek 3.1.4 $L_n: C[a,b] \rightarrow B[a,b]$ ve $\forall n \in N$ için

$$L_n(f;x) = \frac{n}{\sqrt{\pi}} \int_a^b f(y) e^{-n^2(y-x)^2} dy$$

şeklinde tanımlı olsun. Eğer $K_n(y) = \frac{n}{\sqrt{\pi}} e^{-n^2 y^2}$ seçilirse, $\{L_n\}$ konvolusyon tipi operatörler dizisi için,

$$\int_{-\delta}^{\delta} K_n(y)\, dy = \frac{n}{\sqrt{\pi}} \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-n^2 y^2} dy - \int_{|y| \geq \delta} e^{-u^2}\, du \right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-u^2} du - \int_{\left|\frac{u}{n}\right| \geq \delta} e^{-u^2}\, du \right)$$

$$= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left(\int_0^{\infty} e^{-y^2} dy - \int_{n\delta}^{\infty} e^{-y^2}\, dy \right) \qquad (3.8)$$

eşitliği sağlanır. Ayrıca,

$$\int_{0}^{\infty} e^{-y^2} dy = \frac{\sqrt{\pi}}{2} < \infty$$

olduğundan

$$\lim_{n} \int_{n\delta}^{\infty} e^{-y^2}\, dy = 0$$

eşitliği elde edilir. O halde (3.8) eşitliğinde her iki tarafın limiti alınırsa

$$\lim_{n} \int_{-\delta}^{\delta} K_n(y)\, dy = \lim_{n} \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{\sqrt{\pi}}{2} - 0 \right) = 1$$

elde edilir. Yani (3.2) şartı sağlanır. Diğer taraftan

$$\sup_{|y| \geq \delta} K_n(y) = \frac{n}{\sqrt{\pi}} \sup_{|y| \geq \delta} e^{-n^2 y^2} \leq \frac{n}{e^{n^2 \delta^2}}$$

eşitsizliğinin her iki tarafının limiti alınırsa

$$\lim_{n} \left(\sup_{|y| \geq \delta} K_n(y) \right) \leq \lim_{n} \frac{n}{e^{n^2 \delta^2}} = 0$$

olduğundan

$$\lim_{n} \left(\sup_{|y| \geq \delta} K_n(y) \right) = 0$$

elde edilir. Bu durumda da (3.3) şartı sağlanır. O halde Teorem 3.1.3 ’den

$$\lim_{n} \| L_n(f) - f \|_{\delta} = 0$$

eşitliği gerçeklenir.

3.2 Tek Değişkenli Konvolusyon Operatörleri İçin Abel Metodu İle Yaklaşım

Bu bölümde, 2013 yılında Ünver ve Atlıhan tarafından Abel yakınsaklık metodu kullanarak geliştirilen Korovkin tipli yaklaşım teoremleri ve bu teoremlerin ispatı incelenmiştir.

$L_n: C[a,b] \to B[a,b]$ ve her $\alpha \in (0,1)$ için,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \|L_n(f_0)\| \alpha^n < \infty \tag{3.9}$$

koşulunu sağlayan pozitif lineer operatörlerin bir dizisi olsun. Her $\alpha \in (0,1)$ ve $f \in C[a,b]$ için,

$$V_\alpha\big((f(t);x)\big) = (1-\alpha) \sum_{n=0}^{\infty} L_n(f(t);x)\alpha^n$$

ile tanımlı V_α operatörünü ele alalım. O halde,

$$\|V_\alpha(f)\|_{B[a,b]} = \sup_{x\in[a,b]} \big|V_\alpha\big((f(t);x)\big)\big| = \sup_{x\in[a,b]} \left|(1-\alpha)\sum_{n=0}^{\infty} L_n(f(t);x)\alpha^n\right|$$

$$\leq \sup_{x\in[a,b]} (1-\alpha)\sum_{n=0}^{\infty} L_n(|f(t)|;x)\alpha^n$$

$$\leq \sup_{x\in[a,b]} (1-\alpha)\sum_{n=0}^{\infty} L_n(\|f\|;x)\alpha^n$$

$$\leq \|f\|(1-\alpha)\sum_{n=0}^{\infty} \|L_n(f_0)\|\alpha^n$$

sağlanır. Şimdi (3.9) göz önüne alınırsa V_α operatörü her $\alpha \in (0,1)$ ve $f \in C[a,b]$ için anlamlı olup $B[a,b]$ uzayına aittir. Dolayısıyla

$$\|V_\alpha\|_{C[a,b]\to B[a,b]} = \|V_\alpha(1)\|_{B[a,b]} = \sup_{x\in[a,b]} \left|(1-\alpha)\sum_{n=0}^{\infty} L_n(f_0(t);x)\alpha^n\right|$$

şeklinde yazılabilir. Ayrıca

$$\|V_\alpha(.)\|_{C[a,b]\to B[a,b]} \leq \sum_{n=0}^{\infty} \|L_n(f_0)\|\alpha^n$$

elde edilir.

Lemma 3.2.1 $0 < \delta < \frac{b-a}{2}$ olsun. Bu durumda

$$\gamma_n = \int_{-\delta}^{\delta} K_n(t)dt$$

$$\beta_n = \sup_{|t|\geq\delta} K_n(t)$$

şeklinde tanımlı olmak üzere

$$\lim_{\alpha\to 1^-}(1-\alpha)\sum_{n=0}^{\infty}\gamma_n.\alpha^n = 1$$

$$\lim_{\alpha\to 1^-}(1-\alpha)\sum_{n=0}^{\infty}\beta_n.\alpha^n = 0$$

şartları sağlanıyorsa

$$\lim_{\alpha\to 1^-}\|V_\alpha(f_0) - f_0\|_\delta = 0 \quad , \quad (\, f_0(t) = 1\,)$$

gerçeklenir.

İspat : $x \in [a+\delta, b-\delta]$ olsun. Bu durumda

$$-(b-a) \leq a - x \leq -\delta \tag{3.10}$$

$$\delta \leq b - x \leq (b-a) \tag{3.11}$$

eşitsizlikleri elde edilir. $\forall n \in N$ için,

$$L_n(f_0(t);x) = \int_{a-x}^{b-x} K_n(t)dt \tag{3.12}$$

olur. (3.10) ve (3.11) eşitsizlikleri ve (3.12) eşitliğinden;

$$\int_{-\delta}^{\delta} K_n(t)dt \le L_n(f_0(t);x) \le \int_{-(b-a)}^{b-a} K_n(t)dt$$

elde edilir. $\forall\alpha \in (0,1)$ ve $t \in [a,b]$ için,

$$(1-\alpha)\sum_{n=0}^{\infty} \gamma_n.\alpha^n - 1 \le (1-\alpha)\sum_{n=0}^{\infty} L_n(f_0(t);x).\alpha^n - 1$$

$$\le (1-\alpha)\sum_{n=0}^{\infty}\left(\int_{-(b-a)}^{b-a} K_n(t)dt\right).\alpha^n - 1 \tag{3.13}$$

eşitsizliği sağlanır. Şimdi (3.10) ve (3.13) eşitsizliklerinden,

$$\left\|V_\alpha(f_0) - f_0\right\|_\delta \le \mu_\alpha$$

eşitsizliği yazılabilir. Burada

$$\mu_\alpha = max\left\{\left|(1-\alpha)\sum_{n=0}^{\infty}\left(\int_{-\delta}^{\delta} K_n(t)dt\right).\alpha^n - 1\right|, \left|(1-\alpha)\sum_{n=0}^{\infty}\left(\int_{-(b-a)}^{b-a} K_n(t)dt\right).\alpha^n - 1\right|\right\}$$

ile tanımlanmıştır. O halde

$$\left|(1-\alpha)\sum_{n=0}^{\infty}\left(\int_{-(b-a)}^{b-a} K_n(t)dt\right).\alpha^n - 1\right|$$

$$\le 2(b-a-\delta).(1-\alpha)\sum_{n=0}^{\infty} \beta_n.\alpha^n$$

elde edilir. Bu durumda

$$\lim_{\alpha\to 1^-} \|V_\alpha(f_0) - f_0\|_\delta = 0$$

olur ve ispat tamamlanır.■

Lemma 3.2.2 $0 < \delta < \frac{b-a}{2}$ olsun. Bu durumda

$$\gamma_n = \int_{-\delta}^{\delta} K_n(t)dt$$

$$\beta_n = \sup_{|t|\geq\delta} K_n(t)$$

şeklinde tanımlı olmak üzere

$$\lim_{\alpha\to 1^-} (1-\alpha) \sum_{n=0}^{\infty} \gamma_n . \alpha^n = 1$$

$$\lim_{\alpha\to 1^-} (1-\alpha) \sum_{n=0}^{\infty} \beta_n . \alpha^n = 0$$

şartları sağlanıyor ise

$$\lim_{\alpha\to 1^-} \|V_\alpha(\varphi_x)\|_\delta = 0 \quad , \quad \varphi_x(t) = (t-x)^2$$

gerçeklenir.

İspat : $x \in [a+\delta, b-\delta]$ olsun. (3.10) ve (3.11) eşitsizliklerinden;

$$L_n(\varphi_x(t);x) = \int_{a-x}^{b-x} t^2 K_n(t)dt \leq \int_{-(b-a)}^{b-a} t^2 K_n(t)dt \tag{3.14}$$

elde edilir. $g(t) = t^2$, $t = 0$ da sürekli ve $\forall\varepsilon > 0$ için bir $\mu > 0$ vardır ki $|t| < \mu$ olduğundan $|t^2| < \varepsilon$ kalır.

1. **Durum:** Kabul edelim ki $\mu \geq b-a$ olsun. (3.14) eşitsizliğinden,

$$0 \leq L_n(\varphi_x(t);x) \leq \varepsilon^2 \int_{-(b-a)}^{b-a} K_n(t)dt$$

olur ve istenilen görülür.

2. Durum: Kabul edelim ki $\mu < b - a$ olsun. (3.14) eşitsizliğinden,

$$L_n(\varphi_x(t);x) \leq \int_{-(b-a)}^{b-a} t^2 K_n(t)dt = \int_{|t|\leq\mu} t^2 K_n(t)dt + \int_{b-a\geq|t|\geq\mu} t^2 K_n(t)dt$$

ifadesine dikkat edilirse,

$$\begin{aligned}
(1-\alpha)\sum_{n=0}^{\infty} L_n(\varphi_x(t);x)\alpha^n &\leq (1-\alpha)\sum_{n=0}^{\infty}\left(\int_{|t|\leq\mu} t^2 K_n(t)dt\right)\alpha^n \\
&\quad +(1-\alpha)\sum_{n=0}^{\infty}\left(\int_{b-a\geq|t|\geq\mu} t^2 K_n(t)dt\right)\alpha^n \\
&\leq \varepsilon^2(1-\alpha)\sum_{n=0}^{\infty}\tau_n\alpha^n + 2\left(\int_{\mu}^{b-a} t^2 K_n(t)dt\right)\alpha^n \\
&\leq \varepsilon^2(1-\alpha)\sum_{n=0}^{\infty}\tau_n\alpha^n \\
&\quad +\frac{2}{3}((b-a)^3-\mu^3).(1-\alpha)\sum_{n=0}^{\infty}\omega_n\alpha^n \qquad (3.15)
\end{aligned}$$

elde edilir. Burada

$$\tau_n = \int_{|t|\leq\mu} K_n(t)dt \quad , \quad \omega_n = \int_{|t|\geq\mu} K_n(t)dt \qquad (\forall n \in N)$$

şeklinde tanımlanmıştır. (3.15) eşitsizliğinden

$$\|V_\alpha(\varphi_x)\|_\delta \leq \varepsilon^2 + M\left((1-\alpha)\sum_{n=0}^{\infty}\omega_n\alpha^n + \left|(1-\alpha)\sum_{n=0}^{\infty}\tau_n\alpha^n - 1\right|\right)$$

yazılabilir. Burada $M := max\left\{\varepsilon^2, \frac{2}{3}((b-a)^3 - \mu^3)\right\}$ şeklinde tanımlanmıştır. Hipotezler nedeniyle ispat tamamlanmış olur.■

Teorem 3.2.3 $0 < \delta < \frac{b-a}{2}$ olsun. Bu durumda

$$\gamma_n = \int_{-\delta}^{\delta} K_n(t)dt$$

$$\beta_n = \sup_{|t|\geq\delta} K_n(t)$$

şeklinde tanımlı olmak üzere

$$\lim_{\alpha\to 1^-}(1-\alpha)\sum_{n=0}^{\infty}\gamma_n.\alpha^n = 1$$

$$\lim_{\alpha\to 1^-}(1-\alpha)\sum_{n=0}^{\infty}\beta_n.\alpha^n = 0$$

şartları sağlanıyor ise $\forall f \in C[a,b]$ için

$$\lim_{\alpha\to 1^-}\|V_\alpha(f) - f\|_\delta = 0$$

gerçeklenir.

Bu teoremin ispatı, Lemma 3.2.1 ve Lemma 3.2.2 kullanılarak elde edilir.

Şimdi Teorem 3.2.3 ’ün koşullarının gerçeklendiği bir örnek verelim.

Örnek 3.2.4 $(b_n) = (-1)^n$ dizisini ele alalım. Bu dizi klasik yakınsak bir dizi değildir fakat sıfıra Abel yakınsayan bir dizidir. Ayrıca,

$$L_n(f;x)=\frac{n(1+b_n)}{\pi}\left(\int_a^b \frac{f(t)}{1+n^2(t-x)^2}dt\right)$$

şeklinde tanımlı $\{L_n\}$ pozitif lineer operatör dizisini alalım. Burada,

$$K_n(t)=\frac{n}{1+n^2(t-x)^2}$$

şeklinde tanımlanmıştır. Ayrıca,

$$\int_{-\delta}^{\delta} K_n(t)dt=\frac{n(1+b_n)}{\pi}\left(\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dt}{1+n^2t^2}-\int_{|t|\geq\delta}\frac{dt}{1+n^2t^2}\right)$$

$$=\frac{2(1+b_n)}{\pi}\left(\int_0^{\infty}\frac{dt}{1+t^2}-\int_{n\delta}^{\infty}\frac{dt}{1+t^2}\right)$$

eşitliği elde edilir. Diğer taraftan,

$$\int_0^{\infty}\frac{dt}{1+t^2}=\frac{\pi}{2}<\infty \quad , \quad \lim_n \int_{n\delta}^{\infty}\frac{dt}{1+t^2}=0$$

yazılabilir. Bu durumda

$$\lim_{\alpha\to 1^-}(1-\alpha)\sum_{n=0}^{\infty}\alpha^n=1$$

eşitliğinden

$$\lim_{\alpha\to 1^-}(1-\alpha)\sum_{n=0}^{\infty}\left(\int_{-\delta}^{\delta}K_n(t)dt\right)\alpha^n=1$$

elde edilir. Öte yandan

$$\sup_{|t|\geq\delta}K_n(t)=\frac{n(1+b_n)}{\pi}\sup_{|t|\geq\delta}\frac{1}{1+n^2t^2}=\frac{n(1+b_n)}{\pi(1+n^2\delta^2)}$$

şeklinde yazılabilir. Bu ifadeye $n\to\infty$ için limit uygulanırsa,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n(1+b_n)}{\pi(1+n^2\delta^2)} = 0$$

elde edilir. (3.14) ve (3.15) eşitliklerinden,

$$\lim_{\alpha\to 1^-} (1-\alpha) \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sup_{|t|\geq\delta} K_n(t) \right) \alpha^n = 0$$

elde edilir. Böylece Teorem 3.2.3 'ün koşulları gerçeklenmiş olur. Yani $\forall f \in C[a,b]$ için

$$\lim_{\alpha\to 1^-} \|V_\alpha(f) - f\|_\delta = 0$$

gerçeklenir.

Şimdi elde edilen bu yaklaşımın, süreklilik modülü yardımıyla verilen oranın hesabını inceleyelim.

Teorem 3.2.5 $0 < \delta < \frac{b-a}{2}$ olmak üzere

$$\lim_{\alpha\to 1^-} \|V_\alpha(f_0) - f_0\| = 0$$

$$\lim_{\alpha\to 1^-} \omega(f, \mu_\alpha) = 0$$

şartları sağlanıyorsa $\forall f \in C[a,b]$ için,

$$\lim_{\alpha\to 1^-} \|V_\alpha(f) - f\|_\delta = 0$$

elde edilir. Burada $\mu_\alpha \coloneqq \sqrt{\left\|V_\alpha(\varphi_x)\right\|_\delta}$ şeklindedir.

İspat : $\forall t \in [a,b]$ için,

$$|f(t) - f(x)| \leq \sup_{|t-x|\leq\delta} |f(t) - f(x)| \leq \omega(f, |t-x|) \tag{3.16}$$

yazabiliriz. (3.16) eşitsizliğinden ve V_α nın pozitif lineer operatör olmasından,

$$|V_\alpha(f;x) - f(x)| = \left|V_\alpha\big(f(t) - f(x)\big) + f(x).V_\alpha\big(f_0(t) - f_0(x)\big)\right|$$

$$\leq |V_\alpha(|f(t)-f(x)|)| + |f|.\left|V_\alpha\big(f_0(t)-f_0(x)\big)\right|$$

$$\leq \left|V_\alpha\left(\omega\left(f,\delta\frac{|t-x|}{\delta}\right)\right)\right| + |f|.\,|V_\alpha(f_0)-f_0|$$

$$\leq \left|V_\alpha\left(\left(1+\left[\!\left[\frac{|t-x|}{\delta}\right]\!\right]\right)\omega(f,\delta)\right)\right| + |f|.\,|V_\alpha(f_0)-f_0|$$

$$\leq \omega(f,\delta).\left\|V_\alpha\left(1+\frac{(t-x)^2}{\delta^2}\right)\right\|_\delta + \|f\|_\delta.\,\|V_\alpha(f_0)-f_0\|$$

$$\leq \omega(f,\delta).\,\|V_\alpha(f_0)\|_\delta + \frac{\omega(f,\delta)}{\delta^2}\|V_\alpha((t-x)^2)\|_\delta + \|f\|_\delta.\,\|V_\alpha(f_0)-f_0\|_\delta$$

$$\leq 2.\,\omega(f,\mu_\alpha) + \|f\|_\delta.\,\|V_\alpha(f_0)-f_0\|_\delta$$

elde edilir. Özel olarak $M = max\{2,\|f\|_\delta\}$ seçilirse;

$$\|V_\alpha(f;x)-f(x)\|_\delta \leq M\{\omega(f,\mu_\alpha)+\|V_\alpha(f_0)-f_0\|_\delta\}$$

olur ve hipotez nedeniyle ispat tamamlanır.■

4. ÇİFT DEĞİŞKENLİ KONVOLUSYON OPERATÖRLERİNDE KOROVKİN TİPLİ YAKLAŞIM

4.1 Çift Değişkenli Konvolusyon Operatörleri İçin Klasik Yaklaşım

Bu bölümde 2017 yılında Yurdakadim, Taş ve Atlıhan tarafından verilen çalışmalar incelenmiştir.

$K = [a,b] \times [c,d]$ olsun. $C[K]$, K bölgesinde tanımlı reel değerli sürekli fonksiyonların uzayını göstersin.

$L_n: C[K] \to C[K]$ pozitif lineer operatör olmak üzere $\forall x \in [a,b]$ ve $\forall y \in [c,d]$ için,

$$L_n(f;x,y) = \int_c^d \int_a^b f(u,v) K_n(u-x, v-y) dudv \qquad \big(n \in N, f \in C(K)\big)$$

şeklinde tanımlanan konvolusyon tipli operatörü ele alalım. Burada,

1) K_n , $[a-b, b-a] \times [c-d, d-c]$ bölgesi üzerinde sürekli,
2) $K_n(t,z) \geq 0$, $\forall n \in N$, $t \in [a-b, b-a]$ ve $z \in [c-d, d-c]$

şeklindedir. $0 < \delta < \left\{\frac{b-a}{2}, \frac{d-c}{2}\right\}$ olmak üzere

$$\|f\|_\delta = \sup_{\substack{a+\delta \leq x \leq b-\delta \\ c+\delta \leq y \leq d-\delta}} |f(x,y)| \quad , \quad f \in C[K]$$

şeklinde tanımlanır.

Teorem 4.1.1 $\forall n \in N$ için, $L_n: C[K] \to C[K]$ tanımlı pozitif lineer operatör olsun. Eğer,

$$\lim_n \|L_n(f_0) - f_0\|_\delta = 0$$

$$\lim_n \|L_n(\varphi)\|_\delta = 0$$

$$(\varphi(u,v) = (u-x)^2 + (v-y)^2, \forall x \in [a,b] \; ve \; \forall y \in [c,d])$$

şartları sağlanıyorsa, $\forall f \in C[K]$ için

$$\lim_n \|L_n(f) - f\|_\delta = 0$$

eşitliği elde edilir.

Lemma 4.1.2 $0 < \delta < \left\{\frac{b-a}{2}, \frac{d-c}{2}\right\}$ şeklinde tanımlansın. Bu durumda,

$$\lim_n \int_{-\delta}^{\delta} \int_{-\delta}^{\delta} K_n(u,v)dudv = 1$$

$$\lim_n \left\{ \sup_{(u,v)\in K_\delta} K_n(u,v) \right\} = 0$$

eşitlikleri sağlanıyorsa

$$\lim_n \|L_n(f_0) - f_0\|_\delta = 0$$

elde edilir. Burada $K_\delta = \{(u,v): |u| \geq \delta \; veya \; |v| \geq \delta\}$ şeklinde tanımlanmıştır.

İspat : $0 < \delta < \left\{\frac{b-a}{2}, \frac{d-c}{2}\right\}$, $x \in [a+\delta, b-\delta]$ ve $y \in [c+\delta, d-\delta]$ olsun. Bu durumda,

$$-(b-a) \leq a-x \leq -\delta \quad , \quad \delta \leq b-x \leq b-a \tag{4.1}$$

$$-(d-c) \leq c-y \leq -\delta \quad , \quad \delta \leq d-y \leq d-c \tag{4.2}$$

eşitsizlikleri elde edlilir. Ayrıca,

$$L_n(1;x,y) = \int_c^d \int_a^b K_n(u-x, v-y)dudv$$

$$= \int_{c-y}^{d-y} \int_{a-x}^{b-x} K_n(u,v)dudv \tag{4.3}$$

şeklinde ifade edilir. Bu durumda (4.1) , (4.2) ve (4.3) ifadeleri kullanılarak

$$\int_{-\delta}^{\delta} \int_{-\delta}^{\delta} K_n(u,v)dudv \leq L_n(1;x,y) \leq \int_{-(d-c)}^{d-c} \int_{-(b-a)}^{b-a} K_n(u,v)dudv$$

eşitsizliği elde edilir. Bu eşitsizlikte,

$$u_n = max\left\{\left|\int_{-\delta}^{\delta} \int_{-\delta}^{\delta} K_n(u,v)dudv - 1\right|, \left|\int_{-(d-c)}^{d-c} \int_{-(b-a)}^{b-a} K_n(u,v)dudv - 1\right|\right\}$$

olacak şekilde seçilirse

$$\lim_n \|L_n(f_0) - f_0\|_\delta \leq u_n$$

elde edilir. Böylece

$$u_n = \left|\int_{-\delta}^{\delta} \int_{-\delta}^{\delta} K_n(u,v)dudv - 1\right|$$

ise hipotezden ispat açıktır. Diğer taraftan

$$u_n = \left|\int_{-(d-c)}^{d-c} \int_{-(b-a)}^{b-a} K_n(u,v)dudv - 1\right|$$

ise bu durumda

$$\int_{-(d-c)}^{d-c} \int_{-(b-a)}^{b-a} K_n(u,v)dudv = \int_{-\delta}^{\delta} \int_{-\delta}^{\delta} K_n(u,v)dudv$$

eşitliğinin doğruluğu gösterilirse ispat gerçeklenir. $0 < \delta < \left\{\frac{b-a}{2}, \frac{d-c}{2}\right\}$ olduğundan

$$a-b<-\frac{b-a}{2}<-\delta<0<\delta<\frac{b-a}{2}<b-a$$

$$c-d<-\frac{d-c}{2}<-\delta<0<\delta<\frac{d-c}{2}<d-c$$

eşitsizlikleri elde edilir. Buradan

$$\int_{-(d-c)}^{d-c}\int_{-(b-a)}^{b-a}K_n(u,v)dudv=\int_{-\delta}^{\delta}\int_{-\delta}^{\delta}K_n(u,v)dudv+\iint_{B_\delta}K_n(u,v)dudv$$

elde edilir. Burada $B_\delta=\{(u,v):|u|\geq\delta\ veya\ |v|\geq\delta\}$ şeklinde tanımlı olup hipotezden

$$\iint_{B_\delta}K_n(u,v)dudv=0$$

elde edilir ve ispat tamamlanır.■

Lemma 4.1.3 $0<\delta<\left\{\frac{b-a}{2},\frac{d-c}{2}\right\}$ olmak üzere

$$\lim_n\int_{-\delta}^{\delta}\int_{-\delta}^{\delta}K_n(u,v)dudv=1$$

$$\lim_n\left\{\sup_{(u,v)\in K_\delta}K_n(u,v)\right\}=0$$

eşitlikleri sağlanıyorsa

$$\lim_n\|L_n(\varphi)\|_\delta=0$$

elde edilir.

İspat : $0<\delta<\left\{\frac{b-a}{2},\frac{d-c}{2}\right\}$, $x\in[a+\delta,b-\delta]$ ve $y\in[c+\delta,d-\delta]$ olsun.

$\varphi(u,v)=(u-x)^2+(v-y)^2\in C[K]$ olup,

$$L_n(\varphi;x,y)=\int_c^d\int_a^b[(u-x)^2+(v-y)^2]K_n(u-x,v-y)dudv$$

$$=\int_{c-y}^{d-y}\int_{a-x}^{b-x}(u^2+v^2)K_n(u,v)dudv$$

$$\leq\int_{-(d-c)}^{(d-c)}\int_{-(b-a)}^{(b-a)}(u^2+v^2)K_n(u,v)dudv$$

φ fonksiyonu, (0,0) noktasında sürekli olduğundan $\forall\varepsilon>0$ için bir $\mu>0$ vardır ki $|u|\leq\mu$ ve $|v|\leq\mu$ koşulunu sağlayan (u,v) için $|u^2+v^2|<\varepsilon$ kalır.

1. Durum $\mu\geq b-a$ ve $\mu\geq d-c$ ise;

$$0\leq L_n(\varphi;x)\leq\int_{-(d-c)}^{(d-c)}\int_{-(b-a)}^{(b-a)}\varepsilon.K_n(u,v)dudv$$

elde edilir. Buradan,

$$I=\int_{-(d-c)}^{(d-c)}\int_{-(b-a)}^{(b-a)}K_n(u,v)dudv=\int_{-\delta}^{\delta}\int_{-\delta}^{\delta}K_n(u,v)dudv+\iint_{K_\delta}K_n(u,v)dudv$$

$$\leq 1+\sup_{(u,v)\in K_\delta}K_n(u,v).\iint_{K_\delta}dudv$$

bulunur. Dolayısıyla

$$\lim_n\|L_n(\varphi)\|_\delta=0$$

olur.

2. Durum $\mu<b-a$ ve $\mu\geq d-c$ ise;

$$L_n(\varphi;x) \le \int_{-(d-c)}^{(d-c)} \int_{-(b-a)}^{(b-a)} (u^2+v^2)K_n(u,v)dudv$$

$$= \int_{-\delta}^{\delta}\int_{-\delta}^{\delta}(u^2+v^2)K_n(u,v)dudv + \iint_{K_\delta}(u^2+v^2)K_n(u,v)dudv$$

$$\le \varepsilon \int_{-\delta}^{\delta}\int_{-\delta}^{\delta} K_n(u,v)dudv + \sup_{(u,v)\in K_\delta} K_n(u,v)\,.\iint_{K_\delta}(u^2+v^2)dudv$$

elde edilir. Dolayısıyla

$$\lim_n \|L_n(\varphi)\|_\delta = 0$$

olur.

3. Durum $\mu \ge b-a$ ve $\mu < d-c$ ise;

$$L_n(\varphi;x) \le \int_{-(d-c)}^{(d-c)} \int_{-(b-a)}^{(b-a)} (u^2+v^2)K_n(u,v)dudv$$

$$= \int_{-\delta}^{\delta}\int_{-\delta}^{\delta}(u^2+v^2)K_n(u,v)dudv + \iint_{K_\delta}(u^2+v^2)K_n(u,v)dudv$$

$$\le \varepsilon \int_{-\delta}^{\delta}\int_{-\delta}^{\delta} K_n(u,v)dudv + \sup_{(u,v)\in K_\delta} K_n(u,v)\,.\iint_{K_\delta}(u^2+v^2)dudv$$

elde edilir. Dolayısıyla

$$\lim_n \|L_n(\varphi)\|_\delta = 0$$

olur.

4. Durum $\mu \le b-a$ ve $\mu \le d-c$ ise;

i) $\delta < \mu < b-a \;\; ve \;\; \delta < \mu < d-c$ olursa,

$$L_n(\varphi;x) \leq \int_{-(d-c)}^{(d-c)} \int_{-(b-a)}^{(b-a)} (u^2+v^2)K_n(u,v)dudv$$

$$= \int_{-\delta}^{\delta} \int_{-\delta}^{\delta} (u^2+v^2)K_n(u,v)dudv + \iint_{K_\delta} (u^2+v^2)K_n(u,v)dudv$$

$$\leq \varepsilon \int_{-\delta}^{\delta} \int_{-\delta}^{\delta} K_n(u,v)dudv + \sup_{(u,v)\in K_\delta} K_n(u,v) \,.\, \iint_{K_\delta} (u^2+v^2)dudv$$

elde edilir. Dolayısıyla

$$\lim_{n} \|L_n(\varphi)\|_\delta = 0$$

olur.

ii) $\mu < \delta < b-a \;\; ve \;\; \mu < \delta < d-c$ olursa,

$$L_n(\varphi;x) \leq \int_{-(d-c)}^{(d-c)} \int_{-(b-a)}^{(b-a)} (u^2+v^2)K_n(u,v)dudv$$

$$= \int_{-\mu}^{\mu} \int_{-\mu}^{\mu} (u^2+v^2)K_n(u,v)dudv + \iint_{K_\mu} (u^2+v^2)K_n(u,v)dudv$$

elde edilir. Burada δ yerine μ yazabileceğimizden, hipotez nedeniyle

$$\lim_{n} \|L_n(\varphi)\|_\delta = 0$$

olur ve ispat tamamlanır.■

Teorem 4.1.4 $0 < \delta < \left\{\frac{b-a}{2}, \frac{d-c}{2}\right\}$ olmak üzere

$$\lim_{n} \int_{-\delta}^{\delta} \int_{-\delta}^{\delta} K_n(u,v)dudv = 1$$

$$\lim_{n} \left\{ \sup_{(u,v)\in K_\delta} K_n(u,v) \right\} = 0$$

eşitlikleri sağlanıyorsa $\forall f \in C[K]$ için

$$\lim_{n} \|L_n(f) - f\|_\delta = 0$$

elde edilir.

Bu teoremin ispatı, Lemma 4.1.2 ve Lemma 4.1.3 kullanılarak sağlanır.■

Şimdi, çok değişkenli fonksiyonlar için süreklilik modülünün tanımını verelim.

Tanım 4.1.5 $f \in C[K]$ olsun. f fonksiyonunun süreklilik modülü $\omega(f,\delta)$ ile gösterilmek üzere,

$$\omega(f,\delta) = \sup_{\sqrt{(u-x)^2+(v-y)^2}\leq\delta} |f(u,v) - f(x,y)|$$

şeklinde tanımlıdır. Ayrıca,

$$\omega^{(1)}(f,\delta) := \sup_{\substack{|x_1-x_2|\leq\delta \\ c\leq y\leq d}} |f(x_1,y) - f(x_2,y)|$$

$$\omega^{(2)}(f,\delta) := \sup_{\substack{|y_1-y_2|\leq\delta \\ a\leq y\leq b}} |f(x,y_1) - f(x,y_2)|$$

şeklinde tanımlı olup,

$$\lim_{\delta\to 0} \omega(f,\delta) = 0$$

ve her $\delta > 0$ için,

$$\omega(f,\beta\delta) \leq ([\![\beta]\!] + 1).\omega(f,\delta)$$

yazılabilir.

Şimdi, Teorem 4.1.4 ’de elde edilen yaklaşım oranını inceleyelim.

Teorem 4.1.6 $0 < \delta < \left\{\frac{b-a}{2}, \frac{d-c}{2}\right\}$ olmak üzere

$$\lim_n \left\| L_n(f_0) - f_0 \right\|_\delta = 0$$

$$\lim_n \omega(f, \alpha_n) = 0$$

koşulları sağlansın. Bu durumda $\forall f \in C[K]$ için,

$$\lim_n \| L_n f - f \|_\delta = 0$$

olur. Burada $\alpha_n := \sqrt{\| L_n((u-x)^2 + (v-y)^2) \|_\delta}$ şeklindedir.

İspat : $f \in C[K]$ olmak üzere L_n lineer ve pozitif bir operatör olduğundan,

$$|L_n(f;x,y) - f(x,y)| = |L_n(f(u,v) - f(x,y) + f(x,y);x,y) - f(x,y)|$$

$$\leq L_n(|f(u,v) - f(x,y)|;x,y) + |f(x,y)|.\left|L_n(f_0;x,y) - f_0\right|$$

$$\leq L_n\left(\omega\left(f, \alpha\frac{\sqrt{(u-x)^2 + (v-y)^2}}{\alpha}\right);x,y\right) + |f(x,y)|.\left|L_n(f_0) - f_0\right|$$

$$\leq \omega(f,\alpha) L_n\left(1 + \left[\!\left[\frac{\sqrt{(u-x)^2 + (v-y)^2}}{\alpha}\right]\!\right];x,y\right) + |f(x,y)|.\left|L_n(f_0) - f_0\right|$$

$$\leq \omega(f,\alpha)\left\{L_n((f_0);x,y) + \frac{1}{\alpha^2} L_n((u-x)^2 + (v-y)^2;x,y)\right\} + |f(x,y)|.|L_n(f_0) - f_0|$$

$$\| L_n f - f \|_\delta \leq \omega(f,\alpha)\left\{\left\| L_n(f_0) \right\|_\delta + \frac{1}{\alpha^2} \| L_n((u-x)^2 + (v-y)^2) \|_\delta\right\}$$
$$+ M_1.\left\| L_n(f_0) - f_0 \right\|_\delta$$

olur. $\alpha := \alpha_n = \sqrt{\| L_n((u-x)^2 + (v-y)^2) \|_\delta}$ olarak seçilirse

$$\|L_nf-f\|_\delta \le \omega(f,\alpha_n)\left\{\left\|L_n(f_0)\right\|_\delta+1\right\}+M_1.\left\|L_n(f_0)-f_0\right\|_\delta$$

$$\le 2\omega(f,\alpha_n)+\omega(f,\alpha_n)\left\|L_n(f_0)-f_0\right\|_\delta+M_1.\left\|L_n(f_0)-f_0\right\|_\delta$$

eşitsizliği elde edilir. $M=maks\{2,M_1\}$ alalım. Bu durumda

$$\|L_nf-f\|_\delta \le M\left\{\omega(f,\alpha_n)+\omega(f,\alpha_n)\left\|L_n(f_0)-f_0\right\|_\delta+\left\|L_n(f_0)-f_0\right\|_\delta\right\}$$

olur ve hipotezden ispat tamamlanır.■

Teorem 4.1.7 $0<\delta<\left\{\frac{b-a}{2},\frac{d-c}{2}\right\}$ olmak üzere

$$\lim_n\left\|L_n(f_0)-f_0\right\|_\delta=0$$

$$\lim_n\omega^{(1)}(f,\alpha_n)=0$$

$$\lim_n\omega^{(2)}(f,\beta_n)=0$$

koşulları sağlanıyor ise $\forall f\in C[K]$ için,

$$\lim_n\|L_nf-f\|_\delta=0$$

olur. Burada $\alpha_n:=\sqrt{\|L_n(|v-y|^2;x,y)\|_\delta}$ ve $\beta_n:=\sqrt{\|L_n(|u-x|^2;x,y)\|_\delta}$ şeklinde tanımlanmıştır.

İspat : $f\in C[K]$ olmak üzere L_n lineer ve pozitif bir operatör olduğundan,

$$|L_n(f;x,y)-f(x,y)|\le L_n(|f(u,v)-f(u,y)|;x,y)+L_n(|f(u,y)-f(x,y)|;x,y)$$

$$+|f(x,y)|.\,|L_nf_0-f_0|$$

$$\le L_n\left(\omega^{(2)}\left(f;\alpha\frac{|v-y|}{\alpha};x,y\right)\right)+L_n\left(\omega^{(1)}\left(f;\beta\frac{|u-x|}{\beta};x,y\right)\right)$$

$$+|f(x,y)|.\left|L_n(f_0)-f_0\right|$$

$$\leq \omega^{(2)}(f,\alpha)L_n\left(1+\left[\!\left[\frac{|v-y|}{\alpha}\right]\!\right];x,y\right)+\omega^{(1)}(f,\beta)L_n\left(1+\left[\!\left[\frac{|u-x|}{\beta}\right]\!\right];x,y\right)$$

$$+|f(x,y)|.|L_nf_0-f_0|$$

$$\leq \omega^{(2)}(f,\alpha)L_n\left(1+\frac{|v-y|^2}{\alpha^2};x,y\right)+\omega^{(1)}(f,\beta)L_n\left(1+\frac{|u-x|^2}{\beta^2};x,y\right)$$

$$+|f(x,y)|.\left|L_n(f_0)-f_0\right|$$

$$\leq \omega^{(2)}(f,\alpha)\left\{L_n(f_0;x,y)+\frac{1}{\alpha^2}L_n(|v-y|^2;x,y)\right\}$$

$$+\omega^{(1)}(f,\beta)\left\{L_n(f_0;x,y)+\frac{1}{\beta^2}L_n(|u-x|^2;x,y)\right\}$$

$$+|f(x,y)|.\left|L_n(f_0)-f_0\right|$$

$$\|L_nf-f\|_\delta \leq \omega^{(2)}(f,\alpha)\left\{\left\|L_n(f_0)\right\|_\delta+\frac{1}{\alpha^2}\|L_n(|v-y|^2;x,y)\|_\delta\right\}$$

$$+\omega^{(1)}(f,\beta)\left\{\left\|L_n(f_0)\right\|_\delta+\frac{1}{\beta^2}\|L_n(|u-x|^2;x,y)\|_\delta\right\}$$

$$+M_1.\left\|L_n(f_0)-f_0\right\|_\delta$$

eşitsizliği elde edilir. $M_1=\|f\|_\delta$ alınırsa

$$\|L_nf-f\|_\delta \leq \omega^{(2)}(f,\alpha_n)\left\{\left\|L_n(f_0)\right\|_\delta+1\right\}+\omega^{(1)}(f,\beta_n)\left\{\left\|L_n(f_0)\right\|_\delta+1\right\}$$

$$+M_1.\left\|L_n(f_0)-f_0\right\|_\delta$$

$$\leq \omega^{(2)}(f,\alpha_n)\left\{\left\|L_n(f_0)-f_0\right\|_\delta+2\right\}+\omega^{(1)}(f,\beta_n)\left\{\left\|L_n(f_0)-f_0\right\|_\delta+2\right\}$$

$$+M_1.\left\|L_n(f_0)-f_0\right\|_\delta$$

olur ve ispat tamamlanır.■

4.2 Çift Değişkenli Konvolusyon Operatörleri İçin Kuvvet Serisi Metodu İle Yaklaşım

Bu bölümde, Bölüm 4.1 'de verilen yaklaşım sonuçlarını kuvvet serisi metodunu kullanarak geliştireceğiz.

$L_n: C[K] \to B[K]$ ve her $t \in (0, R),\ 0 < R \leq \infty$ için,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \|L_n(f_0)\| p_n t^n < \infty \tag{4.4}$$

koşulunu sağlayan pozitif lineer operatörlerin bir dizisi olsun. Her $n \in N, t \in (0, R)$, $0 < R < \infty$ ve $f \in C[K]$ için,

$$V_t(f; x, y) = \frac{1}{p(t)} \sum_{n=0}^{\infty} L_n(f; x, y) p_n t^n$$

ile tanımlı V_t operatörünü ele alalım. O halde

$$\|V_t(f)\|_{B[K]} = \sup_{(x,y)\in K} |V_t(f; x, y)| = \sup_{(x,y)\in K} \left| \frac{1}{p(t)} \sum_{n=0}^{\infty} L_n(f; x, y) p_n t^n \right|$$

$$\leq \sup_{(x,y)\in K} \frac{1}{p(t)} \sum_{n=0}^{\infty} |L_n(f; x, y) p_n t^n|$$

$$\leq \sup_{(x,y)\in K} \frac{1}{p(t)} \sum_{n=0}^{\infty} L_n(|f|; x, y) p_n t^n$$

$$\leq \sup_{(x,y)\in K} \frac{1}{p(t)} \sum_{n=0}^{\infty} L_n(\|f\|; x, y) p_n t^n$$

$$\leq \sup_{(x,y)\in K} \frac{1}{p(t)} \|f\| \sum_{n=0}^{\infty} L_n(f_0; x, y) p_n t^n$$

elde edilir. Şimdi (4.4) koşulu göz önüne alınırsa V_t operatörü her $n \in N,\ t \in (0, R)$ ve $f \in C[K]$ için anlamlı olup $B[K]$ uzayına aittir. Dolayısıyla

$$\|V_t\|_{C[K]\to B[K]} = \|V_t(f_0)\|_{B[K]} = \sup_{(x,y)\in K} \left| \frac{1}{p(t)} \sum_{n=0}^{\infty} L_n(f_0; x, y) p_n t^n \right|$$

şeklinde yazılabilir. Ayrıca

$$\|V_t(.)\|_{C[K]\to B[K]} \leq \sum_{n=0}^{\infty} \|L_n(f_0)\|_{\delta} p_n t^n$$

elde edilir.

Lemma 4.2.1 $0 < \delta < \left\{\frac{b-a}{2}, \frac{d-c}{2}\right\}$ olmak üzere

$$\lim_{t\to R^-} \frac{1}{p(t)} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\int_{-\delta}^{\delta} \int_{-\delta}^{\delta} K_n(u,v) dudv \right) p_n t^n = 1$$

$$\lim_{t\to R^-} \frac{1}{p(t)} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sup_{(u,v)\in K_\delta} K_n(u,v) \right) p_n t^n = 0$$

şartları sağlanıyorsa

$$\lim_{t\to R^-} \|V_t(f_0) - f_0\|_{\delta} = 0$$

eşitliği elde edilir.

İspat: $0 < \delta < \left\{\frac{b-a}{2}, \frac{d-c}{2}\right\}$, $x \in [a+\delta, b-\delta]$ ve $y \in [c+\delta, d-\delta]$ olsun. Bu durumda,

$$-(b-a) \leq a - x \leq -\delta \qquad \delta \leq b - x \leq b - a$$

$$-(d-c) \leq c - y \leq -\delta \qquad \delta \leq d - y \leq d - c$$

eşitsizlikleri elde edilir. Bu eşitsizlikleri ve

$$V_t\{(f_0; x, y)\} = \frac{1}{p(t)} \sum_{n=0}^{\infty} L_n(f_0; x, y) p_n t^n$$

ifadesi göz önüne alınırsa aşağıdaki durum elde edilir.

$$\int_{-\delta}^{\delta}\int_{-\delta}^{\delta} K_n(u,v)dudv \leq L_n(f_0;x,y) \leq \int_{-(d-c)}^{d-c}\int_{-(b-a)}^{b-a} K_n(u,v)dudv$$

bulunur. Buradan

$$\frac{1}{p(t)}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\int_{-\delta}^{\delta}\int_{-\delta}^{\delta} K_n(u,v)dudv\right)p_n t^n \leq V_t\{(f_0;x,y)\}$$

$$\leq \frac{1}{p(t)}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\int_{-(d-c)}^{d-c}\int_{-(b-a)}^{b-a} K_n(u,v)dudv\right)p_n t^n$$

elde edilir.

$$u_n = max\left\{\left|\frac{1}{p(t)}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\int_{-\delta}^{\delta}\int_{-\delta}^{\delta} K_n(u,v)dudv\right)p_n t^n - 1\right|,\right.$$
$$\left.\left|\frac{1}{p(t)}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\int_{-(d-c)}^{d-c}\int_{-(b-a)}^{b-a} K_n(u,v)dudv\right)p_n t^n - 1\right|\right\}$$

şeklinde tanımlansın. Bu durumda $\|V_t(f_0) - f_0\|_\delta \leq u_n$ elde edilir. Böylece

$$u_n = \left|\frac{1}{p(t)}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\int_{-\delta}^{\delta}\int_{-\delta}^{\delta} K_n(u,v)dudv\right)p_n t^n - 1\right|$$

olacak şekilde seçilirse ispat tamamlanır. Diğer taraftan

$$u_n = \left|\frac{1}{p(t)}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\int_{-(d-c)}^{d-c}\int_{-(b-a)}^{b-a} K_n(u,v)dudv\right)p_n t^n - 1\right|$$

ise bu durumda

$$\frac{1}{p(t)}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\int_{-(d-c)}^{d-c}\int_{-(b-a)}^{b-a}K_n(u,v)dudv\right)p_n t^n$$

$$=\frac{1}{p(t)}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\int_{-\delta}^{\delta}\int_{-\delta}^{\delta}K_n(u,v)dudv\right)p_n t^n \tag{4.5}$$

eşitliğinin doğruluğunun gösterilmesi halinde ispat tamamlanır. Hipotezde verilen $0<\delta<\left\{\frac{b-a}{2},\frac{d-c}{2}\right\}$ eşitsizliğinden,

$$a-b<-\frac{b-a}{2}<-\delta<0<\delta<\frac{b-a}{2}<b-a$$

$$c-d<-\frac{d-c}{2}<-\delta<0<\delta<\frac{d-c}{2}<d-c$$

eşitsizlikleri elde edilir. Bu eşitsizlikler kullanılarak

$$\frac{1}{p(t)}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\int_{-(d-c)}^{d-c}\int_{-(b-a)}^{b-a}K_n(u,v)dudv\right)p_n t^n=\frac{1}{p(t)}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\int_{-\delta}^{\delta}\int_{-\delta}^{\delta}K_n(u,v)dudv\right)p_n t^n$$

$$+\frac{1}{p(t)}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\iint_{K_\delta}K_n(u,v)dudv\right)p_n t^n$$

eşitliği elde edilir. Böylece hipotezde verilen,

$$\lim_{t\to R^-}\frac{1}{p(t)}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sup_{(u,v)\in K_\delta}K_n(u,v)\right)p_n t^n=0$$

ifadesinden (4.5) eşitliği sağlanır.■

Lemma 4.2.2 $0<\delta<\left\{\frac{b-a}{2},\frac{d-c}{2}\right\}$ olmak üzere

$$\lim_{t\to R^-}\frac{1}{p(t)}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\int_{-\delta}^{\delta}\int_{-\delta}^{\delta}K_n(u,v)dudv\right)p_n t^n=1$$

$$\lim_{t\to R^-}\frac{1}{p(t)}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sup_{(u,v)\in K_\delta} K_n(u,v)\right)p_n t^n = 0$$

şartları sağlanıyorsa

$$\lim_{t\to R^-}\|V_t(\varphi)\|_\delta = 0$$

eşitliği gerçeklenir.

İspat: : $0<\delta<\left\{\frac{b-a}{2},\frac{d-c}{2}\right\}$, $x\in[a+\delta,b-\delta]$ ve $y\in[c+\delta,d-\delta]$ olsun.

$\varphi(u,v)\in C[K]$ olduğundan $V_t(\varphi;x,y)$ hesaplanabilir.

$$V_t(\varphi;x,y)=\int_c^d\int_a^b[(u-x)^2+(v-y)^2]K_n(u-x,v-y)dudv$$

$$=\int_{c-y}^{d-y}\int_{a-x}^{b-x}(u^2+v^2)K_n(u,v)dudv$$

$$\leq\int_{-(d-c)}^{(d-c)}\int_{-(b-a)}^{(b-a)}(u^2+v^2)K_n(u,v)dudv$$

(u^2+v^2) , (0,0) noktasında sürekli olduğundan $\forall\varepsilon>0$ için bir $\mu>0$ vardır ki $|u|\leq\mu$ ve $|v|\leq\mu$ koşulunu sağlayan (u,v) için $|u^2+v^2|<\varepsilon$ kalır.

1. Durum $\mu\geq b-a$ ve $\mu\geq d-c$ ise;

$$0\leq V_t(\varphi;x,y)\leq\int_{-(d-c)}^{(d-c)}\int_{-(b-a)}^{(b-a)}\varepsilon.K_n(u,v)dudv$$

bulunur. Buradan

$$I=\int_{-(d-c)}^{(d-c)}\int_{-(b-a)}^{(b-a)}K_n(u,v)dudv=\int_{-\delta}^{\delta}\int_{-\delta}^{\delta}K_n(u,v)dudv+\iint_{K_\delta}K_n(u,v)dudv$$

$$\leq 1 + \sup_{(u,v)\in K_\delta} K_n(u,v) \, . \iint_{K_\delta} dudv$$

elde edilir. Dolayısıyla

$$\lim_{t\to R^-} \|V_t(\varphi)\|_\delta = 0$$

olur.

2. Durum $\mu < b - a$ ve $\mu \geq d - c$ ise;

$$V_t(\varphi; x, y) \leq \int_{-(d-c)}^{(d-c)} \int_{-(b-a)}^{(b-a)} (u^2 + v^2) K_n(u,v) dudv$$

$$= \int_{-\delta}^{\delta} \int_{-\delta}^{\delta} (u^2 + v^2) K_n(u,v) dudv + \iint_{K_\delta} (u^2 + v^2) K_n(u,v) dudv$$

elde edilir. Buradan

$$\frac{1}{p(t)} \sum_{n=0}^{\infty} V_t(\varphi; x, y) p_n t^n \leq \frac{1}{p(t)} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\int_{-\delta}^{\delta} \int_{-\delta}^{\delta} (u^2 + v^2) K_n(u,v) dudv \right) p_n t^n$$

$$+ \frac{1}{p(t)} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\iint_{K_\delta} (u^2 + v^2) K_n(u,v) dudv \right) p_n t^n$$

$$\leq \varepsilon \frac{1}{p(t)} \sum_{n=0}^{\infty} \phi_n . p_n t^n + \frac{1}{p(t)} \sum_{n=0}^{\infty} \xi_n . A . p_n t^n$$

$$\leq \varepsilon \frac{1}{p(t)} \sum_{n=0}^{\infty} \phi_n . p_n t^n + A \frac{1}{p(t)} \sum_{n=0}^{\infty} \xi_n . p_n t^n \qquad (4.6)$$

eşitsizliği bulunur. Bu eşitsizlikte,

$$\phi_n := \int_{-\delta}^{\delta}\int_{-\delta}^{\delta} K_n(u,v)dudv \ , \xi_n := \sup_{(u,v)\in K_\delta} K_n(u,v) \ \ ve \ \ A := \iint_{K_\delta} (u^2+v^2)dudv$$

olacak şekilde tanımlanmıştır. (4.6) ifadesi ele alınırsa,

$$\|V_t(\varphi)\|_\delta \le \varepsilon + M\left(\frac{1}{p(t)}\sum_{n=0}^{\infty} \xi_n . p_n t^n + \left|\frac{1}{p(t)}\sum_{n=0}^{\infty} \phi_n . p_n t^n - 1\right|\right) \tag{4.7}$$

ifadesi yazılabilir. Bu eşitsizlikte $M := max\{\varepsilon, A\}$ olarak tanımlanmıştır. (4.7) ifadesinde eşitsizliğin her iki tarafına $t \to R^-$ için limit uygulanırsa

$$\lim_{t\to R^-} \|V_t(\varphi)\|_\delta = 0$$

gerçeklenir.

3. Durum $\mu \ge b-a$ ve $\mu < d-c$ ise;

$$V_t(\varphi;x,y) \le \int_{-(d-c)}^{(d-c)}\int_{-(b-a)}^{(b-a)} (u^2+v^2)K_n(u,v)dudv$$

$$= \int_{-\delta}^{\delta}\int_{-\delta}^{\delta} (u^2+v^2)K_n(u,v)dudv + \iint_{K_\delta} (u^2+v^2)K_n(u,v)dudv$$

$$\le \varepsilon \int_{-\delta}^{\delta}\int_{-\delta}^{\delta} K_n(u,v)dudv + \sup_{(u,v)\in K_\delta} K_n(u,v) \, . \iint_{K_\delta} (u^2+v^2)dudv$$

$$\le \varepsilon . \phi_n + \xi_n . B$$

elde edilir. Buradan

$$\frac{1}{p(t)}\sum_{n=0}^{\infty} V_t(\varphi;x,y)p_n t^n \le \varepsilon \frac{1}{p(t)}\sum_{n=0}^{\infty} \phi_n . p_n t^n + \ B\frac{1}{p(t)}\sum_{n=0}^{\infty} \xi_n . p_n t^n \tag{4.8}$$

bulunur. Bu eşitsizlikte,

$$\phi_n := \int_{-\delta}^{\delta}\int_{-\delta}^{\delta} K_n(u,v)dudv \ , \xi_n := \sup_{(u,v)\in K_\delta} K_n(u,v) \ \ ve \ \ B := \iint_{K_\delta} (u^2+v^2)dudv$$

olacak şekilde tanımlanmıştır. (4.8) ifadesi ele alınırsa,

$$\|V_t(\varphi)\|_\delta \leq \varepsilon + M\left(\frac{1}{p(t)}\sum_{n=0}^{\infty}\xi_n.p_n t^n + \left|\frac{1}{p(t)}\sum_{n=0}^{\infty}\phi_n.p_n t^n - 1\right|\right) \tag{4.9}$$

ifadesi yazılabilir. Bu eşitsizlikte $M := max\{\varepsilon, B\}$ olarak tanımlanmıştır. (4.9) ifadesinde eşitsizliğin her iki tarafına $t \to R^-$ için limit uygulanırsa

$$\lim_{t\to R^-}\|V_t(\varphi)\|_\delta = 0$$

gerçeklenir.

4. Durum $\mu \leq b-a$ ve $\mu \leq d-c$ ise;

i) $\delta \leq \mu \leq b-a \ ve \ \delta \leq \mu \leq d-c$ olsun. Bu durumda,

$$V_t(\varphi;x,y) \leq \int_{-(d-c)}^{(d-c)}\int_{-(b-a)}^{(b-a)} (u^2+v^2)K_n(u,v)dudv$$

$$= \int_{-\delta}^{\delta}\int_{-\delta}^{\delta}(u^2+v^2)K_n(u,v)dudv + \iint_{[\mu,-\mu]/[\delta,-\delta]} (u^2+v^2)K_n(u,v)dudv$$

$$\leq \varepsilon \int_{-\delta}^{\delta}\int_{-\delta}^{\delta} K_n(u,v)dudv + \sup_{(u,v)\in K_\delta} K_n(u,v) \, . \iint_{[\mu,-\mu]/[\delta,-\delta]} (u^2+v^2)dudv$$

elde edilir. Dolayısıyla

$$\lim_{t\to R^-}\|V_t(\varphi)\|_\delta = 0$$

olur.

ii) $\mu \leq \delta \leq b-a \ ve \ \mu \leq \delta \leq d-c$ olsun. Bu durumda,

$$V_t(\varphi;x,y) \leq \int_{-(d-c)}^{(d-c)} \int_{-(b-a)}^{(b-a)} (u^2+v^2)K_n(u,v)dudv$$

$$= \int_{-\mu}^{\mu} \int_{-\mu}^{\mu} (u^2+v^2)K_n(u,v)dudv + \iint_{[\delta,-\delta]/[\mu,-\mu]} (u^2+v^2)K_n(u,v)dudv$$

δ yerine μ yazabileceğimizden, hipotezden

$$\lim_{t\to R^-} \|V_t(\varphi)\|_\delta = 0$$

olur ve ispat tamamlanır.■

Teorem 4.2.3 $0 < \delta < min\left\{\frac{b-a}{2}, \frac{d-c}{2}\right\}$ olmak üzere

$$\lim_{t\to R^-} \frac{1}{p(t)} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\int_{-\delta}^{\delta} \int_{-\delta}^{\delta} K_n(u,v)dudv \right) p_n t^n = 1$$

$$\lim_{t\to R^-} \frac{1}{p(t)} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sup_{(u,v)\in K_\delta} K_n(u,v) \right) p_n t^n = 0$$

şartları sağlanıyor ise $\forall f \in C[K]$ için

$$\lim_{t\to R^-} \|V_t(f) - f\|_\delta = 0$$

eşitliği gerçeklenir.

İspat: Lemma 4.2.1 ve Lemma 4.2.2 den faydalanılarak ispat elde edilir.■

Teorem 4.2.3 ’ün koşullarını gerçekleyen bir örnek verelim.

Örnek 4.2.4 $L_n: C[K] \to C[K]$ olmak üzere

$$L_n(f;x,y) = \frac{n^2}{\pi} \int_c^d \int_a^b f(u,v) e^{-n^2[(u-x)^2+(v-y)^2]} dudv$$

olsun. $(b_n) = ((-1)^n)$ dizisi alalım. Dikkat edilirse (b_n) dizisi klasik olarak yakınsak değil ancak sıfıra Abel yakınsaktır.

$f \in C[K]$ için $p_n = 1$, $R = 1$ ve $p(t) = \frac{1}{1-t}$, $t \in (-1,1)$ alınırsa o zaman kuvvet serisi metoduyla yakınsaklık, Abel yakınsaklığa denktir.

$$T_n(f; x, y) = (1 + (b_n))L_n(f; x, y)$$

operatörünü ele alalım.

$$K_n(u, v) = \frac{n^2}{\pi} e^{-n^2(u^2+v^2)}$$

olmak üzere

$$\lim_{t \to R^-} \frac{1}{p(t)} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\int_{-\delta}^{\delta} \int_{-\delta}^{\delta} K_n(u, v) dudv \right) p_n t^n = 1$$

$$\lim_{t \to R^-} \frac{1}{p(t)} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sup_{(u,v) \in K_\delta} K_n(u, v) \right) p_n t^n = 0$$

hipotezleri gerçeklenir. Böylece $\{T_n\}$ operatör dizisi için Teorem 4.2.3 gerçeklenir. Ancak $\{T_n\}$ için, Teorem 4.1.4 gerçeklenmez.

Teorem 4.2.5 $0 < \delta < \left\{\frac{b-a}{2}, \frac{d-c}{2}\right\}$ olmak üzere

$\lim_{t \to R^-} \|V_t(f_0) - f_0\|_\delta = 0$ ve $\lim_{t \to R^-} \omega(f, \alpha_n) = 0$ sağlansın. Bu durumda $\forall f \in C[K]$ için,

$$\lim_{t \to R^-} \|V_t(f) - f\|_\delta = 0$$

olur. Burada $\alpha_n := \sqrt{\|V_t((u-x)^2 + (v-y)^2)\|_\delta}$ dir.

İspat : V_t operatörünün pozitif ve lineer olmasından

$$|V_t(f; x, y) - f(x, y)| = |V_t(f(u, v) - f(x, y) + f(x, y); x, y) - f(x, y)|$$

$$= \left|V_t(f(u,v) - f(x,y); x,y) + f(x,y)\big(V_t(f_0; x,y) - f_0\big)\right|$$

$$\leq V_t(|f(u,v) - f(x,y)|; x,y) + |f(x,y)|.\left|V_t(f_0; x,y) - f_0\right|$$

$$\leq V_t\left(\omega\left(f, \alpha\frac{\sqrt{(u-x)^2 + (v-y)^2}}{\alpha}\right); x,y\right) + |f(x,y)|.\left|V_t(f_0) - f_0\right|$$

$$\leq \omega(f,\alpha)V_t\left(1 + \left[\!\!\left[\frac{\sqrt{(u-x)^2 + (v-y)^2}}{\alpha}\right]\!\!\right]; x,y\right) + |f(x,y)|.\left|V_t(f_0) - f_0\right|$$

$$\leq \omega(f,\alpha)\left\{V_t(f_0; x,y) + \tfrac{1}{\alpha^2}V_t((u-x)^2 + (v-y)^2; x,y)\right\} + |f(x,y)|.|V_t(f_0) - f_0|$$

elde edilir. Bu son eşitsizliğin her iki yanının δ normu alınırsa,

$$\|V_t f - f\|_\delta \leq \omega(f,\alpha)\left\{\|V_t(f_0)\|_\delta + \frac{1}{\alpha^2}\|V_t((u-x)^2 + (v-y)^2)\|_\delta\right\}$$
$$+ M_1.\|V_t(f_0) - f_0\|_\delta$$

olur. $\alpha \coloneqq \alpha_n = \sqrt{\|V_t((u-x)^2 + (v-y)^2)\|_\delta}$ özel olarak seçilirse

$$\|V_t f - f\|_\delta \leq \omega(f,\alpha_n)\left\{\left\|V_t(f_0)\right\|_\delta + 1\right\} + M_1.\left\|V_t(f_0) - f_0\right\|_\delta$$

$$\leq 2\omega(f,\alpha_n) + \omega(f,\alpha_n)\left\|V_t(f_0) - f_0\right\|_\delta + M_1.\left\|V_t(f_0) - f_0\right\|_\delta$$

eşitsizliği elde edilir. Burada $M_1 \coloneqq \|f\|_\delta$ olarak tanımlanmıştır. $M = max\{2, M_1\}$ alalım. Bu durumda

$$\|V_t(f) - f\|_\delta \leq M\{\omega(f,\alpha_n) + \omega(f,\alpha_n)\|V_t(f_0) - f_0\|_\delta + \|V_t(f_0) - f_0\|_\delta\}$$

olur ve hipotezden ispat tamamlanır.■

KAYNAKLAR

Altomare, F. and Campiti, M., *Korovkin Type Approximation Theory and Its Applications*, Vol.17, Berlin- New York: de Gruyter Series Studies in Mathematics, Walter de Gruyter, (1994).

Anastassiou, G. A. and Gal, S. G., *Approximation Theory : "Moduli of Continuity and Global Smoothness Preservation"*, Boston: Birkhauser, (2000).

Atlıhan, Ö.G. and Ünver, M., "Abel transforms of convolution operators", *Georgian Math. J.*, 22(3), 323-329, (2015).

Bohman, H., "On approximation of continuous and analytic functions", *Ark. Mat*., 2, 43-56, (1952).

Bojanic, R. and Cheng, F, "Estimates for the rate of approximation of functions of bounded varition by Hermite-Fejer polynomials", *Proc. of the Conference of Canadian Math. Soc.*, 3, 5-17, (1983).

Bojanic, R. and Khan, M. K., "Summability of Hermite-Fejer interpolation for functions of bounded variation", *J. Nat. Sci. Math.*, 32, 5-10, (1992).

Boos, J., *Classical and Modern Methods in Summability*, Mathematical Monograps, London: Oxford, Oxford Science Publ., (2000).

Duman, O., A-statistical convergence of sequences of convolution operators, *Tawainese J. Math*, 12(2008), 523-536.

Erkuş, E. and Duman, O., "A- Statistical extension of the Korovkin type approximation theorem", *Proc. Indian Acad. Sci*. ,115,499-508, (2005).

Erkuş, E. and Duman, O., "A Korovkin Type Approximation Theorem in Statistical Sense", *Studia Scientiarum Mathematicarum Hungarica* 43,3, 285-294, (2006).

Freedman, A. R., Sember, J.J. and Raphel, M., "Some Cesaro-type summability spaces", *Proc. London. Math. Lett*. ,18,1339-1344, (1978).

Gadjiev, A. D. and Orhan, C., "Some approximation theorems via statistical convergence", *Rocky Mountain J. Math.*, 32 (1), 129-137, (2002)

Hacıyev, A. ve Hacısalihoğlu, H. H., *Lineer Pozitif Operatör Dizilerinin Yakınsaklığı*, Ankara: Ankara Üniversitesi Yayınları, (1995).

Hardy, G. H., *Divergent series*, Clarendon Press, Oxford, (1949).

Karakuş, S. and Demirci, K., "Summation process of Korovkin type approximation theorem", *Miskolc Math. Notes*, 12, 75-85, (2011).

King, J. P. and Swetits, "Positive linear operators and summability", *J. Austral. Math. Soc.*, 11, 281-290 (1970).

Korovkin, P. P., "On convergence of linear positive operators in the space of continuous functions", *Doklady Akad. Nauk SSSR*., 90, 961-964, (1953).

Korovkin, P. P., *Linear Operators and Approximation Theory*, Delhi, (1960).

Kratz, W. and Stadtmüller, U., "Tauberian theorems for J_p -summability", *J. Math. Anal. APPL.* ,139, 362-371, (1989).

Kreyszig, E., *Introductry functional analysis with applications*, Wiley, New York, (1978)

Lorentz , G. G., *Approximation of Function*, Holt, Rinehart and Winston, New York, (1966).

Lorentz, G. G., "A contribution to the theory of divergent sequences", *Acta Math.*,80, 167-190, (1948).

Lorentz, G. G., *Bernstein polynomials*, Chelse Publ. Company, New York, (1968).

Mohapatra, R. N., "Quantitative results on almost convergence of a sequence of positive linear operators", *J. Approx. Theory.,* 20, 239-250, (1977).

Nishishiraho, T., "Quantitative theorems on linear approximation processes of convolution operators in Banach spaces", *Tohoku Math. J.*, 33, 109-126, (1981).

Nishishiraho, T., "Convergence of positive linear approximation process", *Tohoku Math. J.* ,33, 109-126, (1983).

Powel, R. E. and Shah, S. M., *Summability Theory and Applications*, Van Nostrend Reinhold, London, (1972).

Royden, H. L., *Real Analysis*, 349p., New York, (1968).

Rudin, W., *Principles of Mathematical Analysis*, McGraw-Hill Book Company. New York, USA (1953).

Swetits, J. J., "On summability and positive linear operators", *J. Approx. Theory*, 25, 186-188, (1979).

Taş, E. and Atlıhan, Ö.G., "Korovkin type approximation theorems via power series method", *Sâu Paulo J. Math. Sci*, Doi: 10.1007/S40863-017-0081-9.

Taşdelen, F., Olgun, A. and Tunca, G. B., "Approximation of functions of two variables by certain linear positive operators", *Proc. Indian Acad. Sci. (Math. Sci.)* 117(2007), 387-399.

Ünver, M., "Abel transforms of positive linear operators", *ICNAAM 2013 AIP Conference Proceedings*, 1558 , 1148-1151, (2013).

Ünver, M. and Atlıhan, Ö. G., "Abel transforms of convolution operators", *Georgian Math. J.,* (2015).

Wilansky, A., *Summability through functional analysis*, North-Holland, Amsterdam, (1984).

Yurdakadim, T., Taş, E. and Atlıhan, Ö. G., "Summation Process of Convolution Operators for Multivariables", *Sarajevo Journal of Math* (to accepted).

Zygmund, A., *Trigonometric Series*, Cambridge University Press, (1979).

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı	:	Bilal KİRAS
Doğum Yeri ve Tarihi	:	Siirt, 01.05.1992
Lisans Üniversite	:	Pamukkale Üniversitesi
Elektronik Posta	:	bilalkiras@gmail.com
İletişim Adresi	:	Sağlık Mahallesi Edirne Caddesi 2. Aralık Sokak No: 6/1 Daire: 4 Ergene/TEKİRDAĞ