

**T.C.
PAMUKKALE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI**

**BURGERS DENKLEMİNİN CHEBYSHEV POLİNOMLARI
İLE ÇÖZÜMÜ**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MURAT KUZÖREN

DENİZLİ, HAZİRAN - 2019

**T.C.
PAMUKKALE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI**



**BURGERS DENKLEMİNİN CHEBYSHEV POLİNOMLARI
İLE ÇÖZÜMÜ**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MURAT KUZÖREN

DENİZLİ, HAZİRAN - 2019

DENİZLİ, HAZİRAN - 2019

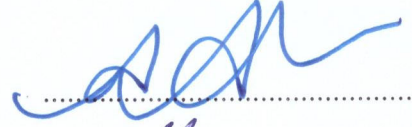
KABUL VE ONAY SAYFASI

MURAT KUZÖREN tarafından hazırlanan “**BURGERS DENKLEMİNİN CHEBYSHEV POLİNOMLARI İLE ÇÖZÜMÜ**” adlı tez çalışmasının savunma sınavı 28.06.2019 tarihinde yapılmış olup aşağıda verilen jüri tarafından oy birliği / oy çokluğu ile Pamukkale Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı Yüksek Lisans Tezi olarak kabul edilmiştir.

Jüri Üyeleri

İmza

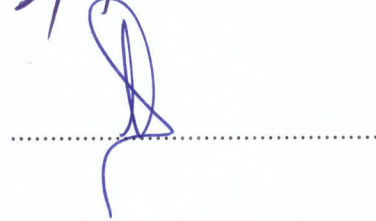
Danışman
Prof. Dr. Ayşegül DAŞCIOĞLU
Pamukkale Üniversitesi



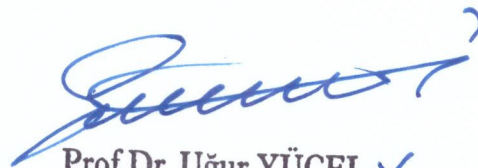
Üye
Prof. Dr. İbrahim ÇELİK
Pamukkale Üniversitesi



Üye
Dr. Öğretim Üyesi Neşe İşler ACAR
Mehmet Akif Ersoy Üniversitesi



Pamukkale Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun
31.07.2019 tarih ve 31/20.... sayılı kararıyla onaylanmıştır.



Prof. Dr. Uğur YÜCEL ✓.
Enstitü Müdürü

Bu tezin tasarımı, hazırlanması, yürütülmesi, araştırmalarının yapılması ve bulgularının analizlerinde bilimsel etiğe ve akademik kurallara özenle riayet edildiğini; bu çalışmanın doğrudan birincil ürünü olmayan bulguların, verilerin ve materyallerin bilimsel etiğe uygun olarak kaynak gösterildiğini ve alıntı yapılan çalışmalara atfedildiğine beyan ederim.



MURAT KUZÖREN

ÖZET

BURGERS DENKLEMİNİN CHEYSHEV POLİNOMLARI İLE ÇÖZÜMÜ
YÜKSEK LİSANS TEZİ
MURAT KUZÖREN
PAMUKKALE ÜNİVERSİTESİ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

(TEZ DANIŞMANI: PROF. DR. AYŞEGÜL DAŞCIOĞLU)

DENİZLİ, HAZİRAN - 2019

Bu çalışma üç ana bölüm şeklinde düzenlenmiştir. Birinci bölümde Burgers denklemi, denklemin analitik ve sayısal çözümleri üzerine literatür bilgileri verilmiştir. İkinci bölümde denklemin analitik çözümleri, son bölümde ise Burgers denklemi için Chebyshev polinomlarına dayalı bir sıralama yöntemi sunulmuş ve bu yöntemin uygulanabilirliğini ve verimliliğini göstermek için çeşitli örnekler ele alınmıştır.

ANAHTAR KELİMELEER: Burgers denklemi, Chebyshev polinomları

ABSTRACT

SOLUTION OF BURGERS EQUATION IN TERMS CHEBYSHEV POLYNOMIALS

MSC THESIS

MURAT KUZÖREN

**PAMUKKALE UNIVERSITY INSTITUTE OF SCIENCE
MATHEMATICS**

(SUPERVISOR:PROF. DR. AYŞEGÜL DAŞCIOĞLU)

DENİZLİ, JUNE 2019

This study is organized as three main chapters. In the first chapter, literatures on the Burgers equation and their analytical and numerical solutions are given. In the second chapter, the analytical solutions of the Burgers equation are given and in the last chapter, a collocation method based on the Chebyshev polynomials is presented for the Burgers equations and some examples are discussed to demonstrate the accuracy, applicability and the efficiency of this method.

KEYWORDS: Burgers equation, Chebyshev polynomials

İÇİNDEKİLER

Sayfa

ÖZET.....	i
ABSTRACT	ii
İÇİNDEKİLER	iii
ŞEKİL LİSTESİ	iv
TABLO LİSTESİ	v
SEMBOL LİSTESİ	vi
ÖNSÖZ.....	vii
1. GİRİŞ.....	1
2. BURGERS DENKLEMİ VE ANALİTİK ÇÖZÜMLERİ.....	7
2.1 Burgers Denklemine Modellemesi.....	7
2.2 Burgers Denklemine Gezen Dalga Çözümü	12
2.3 Burgers Denklemine Hopf-Cole Dönüşümü ile Çözümü	16
2.4 Burgers Denklemine Diğer Bazı Analitik Çözümleri	19
3. BURGERS DENKLEMİNİN CHEBYSHEV SPEKTRAL SIRALAMA YÖNTEMİ İLE ÇÖZÜMÜ	31
3.1 Chebyshev Polinomları ve Özellikleri	34
3.1.1 Birinci Tip Chebyshev Polinomları	37
3.1.2 İkinci Tip Chebyshev Polinomları	38
3.1.3 Üçüncü ve Dördüncü Chebyshev Polinomları.....	40
3.1.4 Genel $[a, b]$ Aralığı İçin Chebyshev Polinomları	40
3.1.5 Shifted (Ötelenmiş) Chebyshev Polinomları	41
3.1.6 Chebyshev Polinomlarının Ekstremum ve Sıralama Noktaları ...	42
3.1.7 Chebyshev Polinomlarının Ortogonalitesi	44
3.1.8 Chebyshev Serileri	44
3.2 Çözüm Yöntemi	46
3.2.1 Khater ve Diğ. 'nin Yöntemi	46
3.2.2 Thirumalai ve Seshadri Yöntemi	50
3.2.3 Sayısal Sonuçlar.....	51
4. SONUÇ VE ÖNERİLER	69
5. KAYNAKLAR.....	71
6. ÖZGEÇMİŞ	85

ŞEKİL LİSTESİ

Sayfa

Şekil 2.1: Kesintisiz akım.....	8
Şekil 2.2: Şok dalga profili.....	15
Şekil 2.3: Çözüm 3 (Kararlı şok).....	20
Şekil 2.4: Çözüm 10(+).....	21
Şekil 2.5: Çözüm 10(-).....	21
Şekil 2.6: Çözüm 12(-).....	22
Şekil 2.7: Çözüm 15.....	23
Şekil 2.8: Çözüm 16(+).....	24
Şekil 2.9: Çözüm 16(-).....	24
Şekil 2.10: Çözüm 21, (apsis: $x - \pi$).....	24
Şekil 2.11: Çözüm 28, $R = 3.6$, $\alpha = 0.40$ için.....	26
Şekil 2.12: Çözüm 28, $R = 64$, $\alpha = 3.0 \times 10^{-4}$ için.....	26
Şekil 2.13: Çözüm 28, $t = 1$ için.....	27
Şekil 2.14: Çözüm 29(+).....	27
Şekil 2.15: Çözüm 32(-).....	27
Şekil 2.16: Çözüm 35.....	29
Şekil 2.17: Çözüm 40, $R = 1$ için.....	30
Şekil 2.18: Çözüm 40, $R = 100$ için.....	30
Şekil 3.1: Birinci tip Chebyshev polinomları.....	38
Şekil 3.2: Problem 1, $c = 0.01$ için spektral çözüm.....	54
Şekil 3.3: Problem 1, sayısal sonuçların tam çözümle karşılaştırılması.....	54
Şekil 3.4: Problem 1, farklı dalga hızlarında çözümün davranışı.....	55
Şekil 3.5: Problem 2, $\nu = 0.01$ için spektral çözüm.....	56
Şekil 3.6: Problem 2, $\nu = 0.01$ için spektral çözüm.....	58
Şekil 3.7: Problem 2, $\nu = 0.003$ için spektral çözüm.....	58
Şekil 3.8: Problem 2, farklı ν ve t değerleri için spektral çözüm.....	58
Şekil 3.9: Problem 3, $\nu = 1$ için spektral çözüm.....	61
Şekil 3.10: Problem 3, $\nu = 0.1$ için spektral çözüm.....	61
Şekil 3.11: Problem 3, $\nu = 0.01$ için spektral çözüm.....	61
Şekil 3.12: Problem 3, $\nu = 0.004$ için spektral çözüm.....	62
Şekil 3.13: Problem 3, $t = 0.1$ için spektral çözüm.....	62
Şekil 3.14: Problem 4, maksimum mutlak hata.....	64
Şekil 3.15: Problem 5, $\nu = 0.005$ için şok dalgası.....	65
Şekil 3.16: Problem 5, farklı ν ve t kombinasyonları için şok dalgası.....	65
Şekil 3.17: Problem 6, $\nu = 1$ için spektral çözüm.....	66
Şekil 3.18: Problem 6, $\nu = 0.005$ için spektral çözüm.....	67
Şekil 3.19: Problem 7, $\nu = 0.005$ için spektral çözüm.....	68
Şekil 3.20: Problem 7, farklı ν ve t kombinasyonları için spektral çözüm.....	68

TABLO LİSTESİ

Sayfa

Tablo 2.1: $\partial u \partial t = 0$ durumunda çözümler (Birinci Grup)	19
Tablo 2.2: Birinci gruptakilere bağlı olan çözümler	20
Tablo 2.3: θ 'daki anlık noktasal kaynakların ayrık dağılımları (İkinci Grup)	22
Tablo 2.4: Benzerlik Çözümleri (Üçüncü Grup).....	25
Tablo 2.5: Üçüncü gruba bağlı olan çözümler.	25
Tablo 2.6: Aperiodik başlangıç koşullarının doğrudan atanması.....	28
Tablo 2.7: Periyodik başlangıç koşullarının doğrudan atanması.	29
Tablo 3.1: Problem 1, Khater ve diğ. (2008)	53
Tablo 3.2: Problem 1, Thirumalai ve Seshadri (2018).....	53
Tablo 3.3: Problem 2, $\nu = 0.1$ için sayısal sonuçların karşılaştırılması	56
Tablo 3.4: Problem 2, $\nu = 1$ için sayısal sonuçların karşılaştırılması	57
Tablo 3.5: Problem 2, $\nu = 0.1, 0.005$ için sayısal sonuçların karşılaştırılması	57
Tablo 3.6: Problem 3, $\nu = 1$ için sayısal sonuçların karşılaştırması	60
Tablo 3.7: Problem 3, $\nu = 0.1, 0.005$ için sayısal sonuçların karşılaştırması	60
Tablo 3.8: Problem 4, farklı ν ve t değerleri için mutlak hata.....	63
Tablo 3.9: Problem 4, maksimum mutlak hata	63
Tablo 3.10: Problem 6, $\nu = 0.1$ için spektral çözüm	66
Tablo 3.11: Problem 7, $\nu = 0.1$ için spektral çözüm	67

SEMBOL LİSTESİ

ν	:	Kinematik viskozite katsayısı
$T_n(x)$:	Birinci Tip Chebyshev Polinomu
$U_n(x)$:	İkinci Tip Chebyshev Polinomu
$V_n(x)$:	Üçüncü Tip Chebyshev Polinomu
$W_n(x)$:	Dördüncü Tip Chebyshev Polinomu
$T_n^*(x)$:	Birinci Tip Ötelenmiş Chebyshev Polinomu
\bar{u}_i	:	Tam Çözüm
u_i	:	Yaklaşık Çözüm

ÖNSÖZ

Yüksek sabrını ve desteğini esirgemeyen değerli hocam Prof. Dr. Ayşegül DAŞCIOĞLU'na, yardımları için Öğr. Gör. Cüneyt MANAVOĞLU, Ali DÖNMEZ, Çağrı KABAĞOĞLU ve Dursun ÇAKIL'a ile kıymetli aileme teşekkür ederim.

1. GİRİŞ

$\nu > 0$ bir parametre olmak üzere

$$u_t + uu_x = \nu u_{xx} \quad (1.1)$$

şeklinde ifade edilen doğrusal olmayan kısmi türevli denklem, literatüre denge durumu iki çözümü ile birlikte Bateman (1915) tarafından kazandırılmıştır. Bateman, çalışmasında viskoz sıvıların hareketini bu denklemle analiz etmeyi önerir. Denklemdaki; x uzay koordinatını, t zaman değişkenini, ν matematiksel modeli ele alınacak akışkanın akmaya karşı gösterdiği iç direnç olarak tanımlanabilecek kinematik viskoziteyi, u fonksiyonu ise akışkanın hızını temsil etmektedir. Denklem şöhretini sonraki yıllarda kazanır. Akışkanlar mekaniğinin bazı temel konularını analiz edebilmek için Navier-Stokes denklemlerine benzeyen fakat daha sade bir denklem arayışında olan Burgers (1939), birkaç alternatif denklem arasından söz konusu denklemi mercek altına alır ve kapsamlı çalışmalarının sonunda denklemi türbülanslı akışa model olarak sunar. Denklem, onun türbülans teorisine yaptığı katkılar ve denklem üzerindeki yoğun çalışmaları sebebiyle artık Burgers denklemi olarak anılmaya başlar (Burgers 1940, 1948, 1950^{a,b}, 1954, 1955, 1964, 1965, 1974).

Burgers denklemi, doğrusal olmayan bir boyutlu akışın tüm davranışlarını en iyi temsil eden matematik formudur (Cebeci ve diğ. 2005). Dolayısıyla matematiksel açıdan zengin özelliklere haizdir. Bunlardan en önemlisi doğrusal olmayan konveksiyon (uu_x) ile doğrusal difüzyon (νu_{xx}) arasındaki çekişmenin en basit matematiksel formülasyonu olmasıdır (Benton ve Platzman 1972). Doğrusal olmayan terimin dikleştirici etkisi ve difüzyon teriminin yayılma eğilimi ile zaman evrimi arasındaki denge, Burgers denkleminin özüdür ve bu husus Lighthill (1956) tarafından açıkça ortaya konulmuştur. Denklem, viskozite katsayısının yeterince küçük seçilmesi durumunda, parabolik yapısını kaybederek hiperbolik özellikler göstermeye başlamakta ve akışkanda şok dalga hareketleri ile dalga cephesinde dik yönelmeler oluşmaktadır.

Denklemin zengin yapısı diğer araştırmacıların da kısa sürede dikkatini çeker ve Lighthill (1956) tarafından aerodinamik, doğrusal olmayan akustik, su taşkınları ve trafik akışında; Mendousse (1953), Keck ve Beyer (1960), Soluyan ve Khokhlov (1961) tarafından termoviskoz sıvıların sonlu genlikli enine dalgalarında; Blackstock (1964, 1966) tarafından akustikte; Lick (1970) tarafından buzul bozulmalarında model denklem olarak başarılı bir şekilde kullanılır. Denklemin, şok dalga teorisi, ısı transferi ve stokastik süreçler ile ilişkisi Cole (1951); izotropik katılardaki elastik dalgalarla ilişkisi Pospelov (1966), sonlu genlikli enine hidromagnetik dalgalarla ilişkisi Goldberg (1962), sayılar teorisi ile ilişkisi Van der Pol (1951); enerji spektrumunun çeşitli yönleri Reid (1956), Ogura (1957) ve Tatsumi (1969) tarafından verilmiştir. Bazı araştırmacılar yeni türbülans teorilerini Burgers denkleminde test ederken, Saffman (1968) Burgers modelinden elde edilen sonuçlarla Kolmogorov yasasının temelini sorgulamıştır. Lagerstrom ve diğ. (1949), Lighthill (1956) ve Hayes (1958) Navier-Stokes denklemlerine benzerliğini özellikle vurgularken Hayes (1958) ile Su ve Gardner (1969) denklemin çeşitli yönlerini değişik kısıtlamalar altında incelemiştir. Bunlara ek olarak, Cooper (1964), Hargrove (1960), Kruskal ve Zabusky (1964), Platzman (1964), Moeers (1968) ve daha birçok araştırmacı tarafından farklı alanlarda tekrar tekrar gündeme getirilmiştir.

Öte yandan Burgers denklemini başlangıç ve sınır şartlarının değişik seçimleriyle analitik olarak çözülebilen az sayıdaki doğrusal olmayan kısmi türevli diferansiyel denklemden biridir. Zaman içerisinde birçok araştırmacı denkleme farklı çözüm yolları önermiştir. Bu çözümlerden belki de en ilginç Fay (1931) tarafından geliştirilmiş özel çözümdür (bkz. Tablo 2.3, çözüm 10). Bu çözüm, Fubini-Ghiron'un (1935) çalışması ile akustik literatürde "Fubini çözümü" olarak da bilinmektedir ve Cole (1951) tarafından başlangıç şartı eklenerek geliştirilip tam çözüm elde edilmiştir.

Diğer yandan Hopf (1950) ve Cole (1951), birbirlerinden bağımsız yaptıkları çalışmalarında,

$$u = -2v \frac{\theta_x}{\theta}$$

dönüşümünü kullanarak Burgers denklemini ısı denklemine dönüştürmüş, keyfi bir başlangıç şartı için tam ve açık olarak çözmüştür. Bu dönüşüme bu iki isme atfen Hopf-Cole dönüşümü adı verilir. Bu dönüşüm Burgers'in (1950),

$$u = t^{-1/2}S(z), \quad z = (4vt)^{-1/2}x$$

şeklindeki benzerlik dönüşümlerini kullanarak yaptığı çözümlerde de görülmektedir. Ayrıca Hopf-Cole dönüşümünün hidrodinamik uygulamaları Chu (1965), Shvets ve Meleshko (1965) ve Ames (1965) tarafından tartışılmıştır. Denklemin benzerlik dönüşümü altında hiçbir yardımcı şart kullanmaksızın Riccati denklemine dönüştüğü Rodin (1974) tarafından gösterilirken, Walsh (1969), Crighton ve Scott (1979) Parker (1980), Larson (1978) ve Lardner (1986) gibi birçok araştırmacı da Burgers denklemini için başlangıç-sınır değer problemlerini çalışarak çözümlerinin fiziksel önemini irdelemiştir.

Denklemin analitik çözümü için yapılan en kapsamlı çalışmalardan biri ise Benton ve Platzman (1972) tarafından yapılmıştır. Benton ve Platzman (1972), Burgers denkleminin sonlu tanım kümesi için kaynaklarda dağınık bulunan farklı çözümlerini bir tablo altında toplamış, sonsuz tanım kümesinde tanımladıkları iki farklı başlangıç-sınır değer probleminin çözümünü de tablolarına dahil etmiştir. Aynı zamanda Penel ve Skyrme (1962), Case ve Chiu (1969), Murray (1970^{a,b}), Murray (1973), ve Crighton (1979^{a,b}) tarafından Burgers denkleminin birçok genelleştirilmesi yapılmış; Kriess ve Lorenz (1989), Burgers denklemini ile ortak olan sınır değer problemlerinin çözümlerinin varlık ve tekliğini incelemiştir.

Burgers denkleminin analitik çözümü için en azından bir kısmından yukarıda bahsettiğimiz gibi yoğun çalışmalar yapılmış ancak bulunan analitik çözümlerin $Re = 1/\nu$ şeklindeki tanımlanan büyük Reynolds sayıları için yetersiz kaldığı görülmüştür. Reynolds sayısının çok büyük seçilmesi durumunda özellikle sonsuz seri içeren analitik çözümlerin oldukça yavaş yakınsadıkları ya da yakınsama için çok fazla terime ihtiyaç duydukları bir gerçektir. Diğer yandan Reynolds sayısının gerçekçi olmayacak şekilde küçük seçilmesi durumunda ise elde edilen sonuçlar fiziksel olmayan sonuçlar ortaya koyacaktır. Bu durum, Burgers denkleminin sayısal metotlarla fiziksel gerçeklere uyumlu viskozite değerleri için çözülmesi ihtiyacını

doğurmuştur. Denklem bu sebeple ve ayrıca mevcut sayısal yöntemlerin kararlılık analizini yapmak isteyen araştırmacıların da yoğun ilgisine mazhar olmuştur.

Konuyla ilgili ilk çalışmaları yapan araştırmacılarından, Rubin ve Graves (1975) yarı doğrusallaştırma ve spline fonksiyon tekniğini kullanmış, Varoğlu ve Finn (1980) uzay-zaman değişimini sonlu elemanlarla sağlayarak ağırlıklı kalan formülasyonu ile birleştirdikleri yöntemleri ile denklemi sayısal olarak çözmüş ancak küçük viskozite katsayıları için karşılaştırmalı örnek verememiştir. Sounders ve diğ. (1984) varyasyonel-ardışık yaklaşımı ile elde ettikleri sonuçların yeterli olduğunu verdikleri örneklerle göstermiş, Ames ve Nucci (1986) grup metodu yaklaşımı ile denklemi ele almıştır.

Diferansiyel denklemlerin sayısal çözümlerinde sıkça kullanılan sonlu elemanlar yöntemiyle Burgers denkleminin çözüm arayan araştırmacılarından, Caldwell ve diğ. (1981) her adımda önceki adımlardan elde edilen verileri kullanan sonlu eleman yöntemi ile elde ettikleri sonuçların küçük viskozite değerleri için yetersiz olduğunu ifade ederken, Doğan (2004) kullandığı Galerkin sonlu eleman yönteminin daha önceki yöntemlerin çoğundan daha iyi sonuç verdiğini göstermiştir. Nguyen ve Reynen (1982), Cecchi ve diğ. (1996) ve Öziş ve diğ.'de (2003) Burgers denklemi için sonlu elemanlar yöntemlerini çalışmış diğer araştırmacılarıdır.

Günümüze kadar pek çok araştırmacı da Burgers denkleminin sayısal çözümünü için sonlu farklar yöntemini tercih etmiştir. Evans ve Abdullah (1984) grup açık, Kutluay ve Esen (2004) doğrusallaştırılmış kapalı, Kadalbajoo ve diğ. (2005) bir parametreye bağlı olarak düzgün yakınsayan, Hassanien ve diğ. (2005) dördüncü mertebeden, Gülsu ve Öziş (2005) klasik açık, Liao (2008) örtük dördüncü dereceden kompakt, Sarı ve Gürarlan (2009) altıncı mertebeden kompakt, Zhang ve Wang (2012) kestirici-düzeltici kompakt, İnan ve Bahadır (2014) Crank-Nicolson üstel sonlu fark yaklaşımları ile bu araştırmacılarından birkaçıdır. Galerkin metodu ile sonlu fark metodunu birleştiren yarı-kapalı zamanı ayrıştırma yöntemleri ile Lin ve Zhou (2001), Galerkin metoduna dayanan sonlu farklar yöntemleri ile Dehghan ve diğ.'de (2013) bu isimlere eklenebilir.

Genelleştirilmiş sınır elemanları yöntemi ile Kakuda ve Tosaka (1990), doğrusallaştırılmış Burgers denklemi için sınır eleman yöntemi ile Bahadır ve

Sağlam (2005) ise tercihini sınır elemanları yöntemi yönünde kullanan araştırmacılarıdır.

Diferansiyel kuadratür yöntemler de araştırmacılar tarafından yoğun ilgi görmüş, Korkmaz ve Dağ (2011) sinc, Korkmaz ve diğ. (2011) kuartik B-spline, Korkmaz ve Dağ (2013) kübik B-spline, Jiwari ve diğ. (2013) ağırlıklı ortalama, Mittal ve diğ. (2013) ağırlıklı ortalama diferansiyel kuadratür yöntemi ile Burgers denkleminin çözüm aramıştır. Korkmaz ve Dağ (2011) ile Mittal ve Jiwari (2012) yaptıkları çalışmalarda polinom bazlı diferansiyel kuadratür yöntemini benimserken, yöntemin uygulaması diğer yöntemlerden daha pratik olsa da elde edilen sonuçlardaki hassasiyetinin literatürdeki diğer sonuçlara nazaran daha kötü olduğu görülmüştür. Öte yandan, Tamsir ve diğ. (2016) üstel modifiye edilmiş kübik B-spline diferansiyel kuadratür yöntemi ile elde ettikleri sonuçların iyi bir hassasiyet derecesine sahip olduğunu göstermiştir.

Ağırlıklı kalan prensibine dayanan yöntemlerde literatürde göze çarpmaktadır. Christie ve diğ. (1981) kuadratik fonksiyonlar ile Petrov-Galerkin, Herbst ve diğ. (1982) doğrusal ve kübik fonksiyonlar ile Petrov-Galerkin, Ali ve diğ. (1990) kuadratik B-spline fonksiyonlar ile Galerkin, Doğan (1997) kuadratik B-spline fonksiyonlar ile Petrov-Galerkin, Aksan ve Özdeş (2004) trigonometrik fonksiyonlar ile Galerkin, Aksan (2005) doğrusal B-spline fonksiyonlar ile Galerkin, Dağ ve diğ. (2005) kuadratik ve kübik B-spline fonksiyonlar ile Galerkin, Öziş ve diğ. (2005) kuadratik B-spline fonksiyonlar ile Galerkin, Ay ve diğ. (2015) trigonometrik ikinci dereceden B-spline fonksiyonlar ile Galerkin kullanarak bu grupta yer almıştır. Kutluay ve diğ. (1999, 2004) önce açık ve tam açık sonlu fark yöntemi ile $\nu = 0.01$ 'e göre çözdükleri Burgers denklemini daha sonra yaptıkları çalışmada kuadratik B-Spline fonksiyonlar ile $\nu = 0.001$ değeri için çözmüş ancak elde edilen sonuçların hassasiyeti yeterli seviyede olmamıştır. Yakın dönemde ise, Zhu ve Wang (2009) ile Jiang ve Wang (2010) kübik B-spline quasi interpolasyon yöntemi ile bu alana katkı sağlamıştır.

Burgers denkleminin sayısal çözümü için sıralama tabanlı yöntemlerde sıkça başvurulan yöntemlerin başında gelmektedir. Rubin ve Khosla (1976) kübik spline fonksiyonlar ile, Ramadan ve diğ. (2005) septik B-spline fonksiyonlar ile, Saka ve Dağ (2007) kuartik B-spline fonksiyonlar ile, Khater ve Diğ. (2008) Chebyshev

polinomları ile, Irk (2009) sextic B-spline fonksiyonlar ile, Khalifa ve diğ. (2011) Chebyshev ve Legendre polinomları ile, Mittal ve Jain (2012) modifiye kübik B-spline fonksiyonlar ile, Doha ve diğ. (2014) Jacobi polinomları ile; Thirumalai ve Seshadri (2018) Chebyshev, Legendre ve Jacobi polinomları ile sıralama yöntemini kullanan bilim insanlarıdır. Ayrıca, Dağ ve diğ. (2011) B-spline fonksiyonlar kullanarak Taylor-Galerkin ve Taylor-sıralama isimli yöntemleriyle, Ashpazzadeh ve diğ. (2017) karışık sonlu fark ve sıralama ismini verdikleri yöntemleriyle, Darvishi ve Javidi (2005) ön koşullu sıralama yöntemleriyle unutulmaması gereken isimlerdir.

Bunlara ek olarak, Öziş ve Özdeş (1996) direkt varyasyonel, Hon ve Mao (1998) multi kuadrik, Abd-el-Malek ve El-Mansi (2000) grup teoretik, Abdou ve Soliman (2005) varyasyonel iterasyon, Öziş ve Aslan (2005) asimptotik açılım yöntemini tercih etmiş, Xie ve diğ. (2008) türetilmiş kernel fonksiyonları, Liu ve diğ. (2009) Lie simetri analizi, Asaithambi (2010) otomatik diferansiyel yöntemi ile çözüm aramıştır.

Yakın dönemde Burgers denkleminin sayısal çözümü için, Altıparmak (2011) Padé yaklaşımını, Bulut ve diğ. (2013) değiştirilmiş deneme denklemi yöntemini, Grafke ve diğ. (2013) instanton filtreleme tekniğini; Jiwari (2012, 2015) uniform Haar Dalgacı, quasi doğrusallaştırma ve kapalı euler yöntemini kullanan hibrit bir yöntemi önermiştir. Nascimento ve diğ. (2014) karşılaştırmalı çözümlere yer verdikleri çalışmalarında Fourier pseudospektral ve daldırılmış sınır elemanı yöntemlerini birleştirerek kullandıkları metotla elde edilen sonuçların yeterli hassasiyette olduğunu göstermiştir.

2. BURGERS DENKLEMİ VE ANALİTİK ÇÖZÜMLERİ

2.1 Burgers Denklemine Modellemesi

Burgers denkleminin türbülans akışa model denklem olarak ortaya çıkmasının yanında farklı ve sürpriz fiziksel durumların matematiksel temsili olarak kullanıldığından daha önce bahsetmiştik. Bu durumlardan biri de trafik akımıdır.

Trafik akımı üzerinde ilk çalışmalar Greenshield (1935) tarafından yapılmıştır. Yirminci yüzyılın ortalarında, II. Dünya Savaşı, giderek artan araç sayısı, yeni otoyollar, yolların verimli kullanılması ihtiyacı, dönemin bilim adamlarını bu konu üzerinde çalışmaya sevk etmiştir (Memiş 2008). Bu bilim adamlarından ikisi akışkanlar dinamiği alanında çalışan Lighthill ve Whitham'dır (1955^{a,b}). Lighthill ve Whitham hem otoyollar hem de nehirler için kullanabilecek kinematik dalgalar üzerine çalışmalar yapmış, Richards (1956) onların çalışmalarından hareketle otoyollar üzerindeki şok dalga oluşumları üzerine eğilmiştir. Bu kısımdaki çalışmalarımızı, bu üç isme ithafen 'LWR Model' olarak adlandırılan modelden faydalanarak şekillendireceğiz.

Trafik akımı teorisinde temelde kabul gören iki ana kuram vardır. Bunlardan birincisi, kesintili akımdır. Kesintili trafik akımında, sürücü hareketleri diğer bir ifadeyle sürücü hızı; trafik sinyalizasyonu, dur işaretleri, yol kenarına park etmiş araçlar, karşıdan karşıya geçen yayalar, yol yapım çalışmaları vb. dış etkenler sebebiyle kesintiye uğrayabilmektedir. Bu sebeple, kesintili akıma sahip bir yolda hareket eden bir sürücü hızını hem çevresinde bulunan diğer araçlara hem de saydığımız dış etkenlere göre ayarlamak zorundadır. Şehir içi trafiği bu türden akıma verilebilecek en güzel örnektir. Akım teorisinin ikinci ana kuramı ise kesintisiz akımdır. Kesintisiz trafik akımında ise, sürücü hareketlerinin sadece diğer sürücülerle olan etkileşime maruz kaldığı, başkaca herhangi bir dış etkenin bulunmadığı varsayılır. Çevre yolları ve şehirlerarası yollar bu kapsamda örnek olarak verilebilir. Bu türden kesintisiz akıma sahip bir yolda olduğumuzu düşünelim ve yolumuza devam edelim.

Formel olarak akışkanlar mekaniğindeki benzeyen, sürekli bir yaklaşım arıyoruz. Akışkanlar mekaniğinde, her bir akışkan taneciğinin hareketini analiz etmek oldukça zordur. Bu sebeple, herhangi bir noktada, o noktayı çevreleyen küçük fakat sınırları belirli ve etkisi bu noktada olan ortalama bir hacim alırız. Benzer şekilde trafik modellemesinde de yolun küçük ama sınırları belirli bir uzunluğunu alıp bu bölgedeki fiziksel davranışları analiz etmek makul ve yeterlidir. Tabii ki burada küçüklük, akışkan mekaniğindeki kadar farklı olsa da temel düşüncemiz aynıdır.



Şekil 2.1: Kesintisiz akım

Öncelikle bazı temel kavramları tanımlayalım.

Yoğunluk: Birim uzunluğundaki bir yolda, belirli bir zamanda bulunan araç sayısına sözü edilen bölge için “araç yoğunluğu (ρ)” diyelim aşağıdaki fonksiyonu tanımlayalım:

$$\rho = \rho(x, t) \quad (\text{yoğunluk} = \text{araçsayısı/yol})$$

Hız: Bir hareketlinin birim zamanda aldığı yol uzunluğuna “hareketlinin hızı (v)” diyerek hız fonksiyonunu şu şekilde tanımlayalım:

$$v = v(x, t) \quad (\text{hız} = \text{yol/zaman})$$

Üzerinde çalıştığımız yolun kesintisiz akıma sahip olduğunu dolayısıyla sürücü hareketlerinin sadece çevresindeki araçlar ile etkileşime bağlı olduğunu kabul etmiştik. Buradan hareketle, hareketlinin hızı ile hareketlinin bulunduğu bölgedeki araç sayısı yani araç yoğunluğu arasında bir bağıntı olduğunu kabul edebiliriz. O

halde hız fonksiyonu yoğunluk cinsinden aşağıdaki şekilde yazılabilir (Greenshields 1935).

$$v = v(\rho) = v_f \left(1 - \frac{\rho}{\rho_{max}}\right) \quad (2.1)$$

Burada v_f araçların serbest hızını, ρ_{max} ise en yüksek yoğunluğu temsil etmektedir. (2.1) denkleminde göz atarsak, yoğunluğun sifıra yakınsadığı durumlarda araç hızlarının da serbest hıza yakınsayacağı, yoğunluğun artması durumunda ise araç hızlarının düşeceği ve trafik yoğunluğu gözleneceği sonucunu çıkarmak mümkündür. (2.1) Bağıntısına, Greenshield Bağıntısı adı verilmektedir.

Akı: Yol üzerinde belirli bir noktadan geçen araç sayısına “akı (q)” diyerek konum ve zamana bağlı bir fonksiyonla aşağıdaki şekilde ifade edelim.

$$q = q(x, t) \quad (\text{akı} = \text{araç sayısı/zaman})$$

Şimdi araç akımını modellemek için gerekli parametrelere sahibiz. Bu parametreler arasındaki ilişki bizi model bir diferansiyel denkleme götürecektir. Bunun için ilk olarak x_1 ve x_2 yol üzerinde belirli iki nokta olmak üzere yoğunluk tanımını kullanarak $[x_1, x_2]$ üzerinde,

$$\text{araç sayısı} = \text{yoğunluk} \times \text{yol}$$

diyelim. Ardından, $[x_1, x_2]$ yolunun bir parçalanmasını alıp, parçalanmanın her bir aralığı için son eşitliği yeniden düzenleyelim.

$$\text{araç sayısı} = \sum \rho(x_k, t) \Delta x_k$$

Son eşitlikte, aralıkların yeteri kadar küçük seçilmesi ile sağdaki Reimann toplamının integral işlemi ile yer değiştireceği açıktır. O halde,

$$\text{araç sayısı} = \int_{x_1}^{x_2} \rho(x, t) dx$$

olur. Aralıktan çıkan veya aralığa yeni giren araçların olmasıyla, araç sayısı zamanla değişim göstereceği de aşikârdır. Buna göre araç sayısının zamana bağlı değişimi

$$\text{araç sayısındaki değişim} = \frac{\partial}{\partial t} \int_{x_1}^{x_2} \rho(x, t) dx$$

ile verilebilir.

Diğer yandan yine aralıkta araç sayısının değişimini x_1 ve x_2 noktaları arasındaki akı farkından da hesaplanabilir. Çünkü aralığa giren araç sayısı ile aralıktan çıkan araç sayısı arasındaki fark basit bir hesaplamayla bize araç sayısındaki değişimi verecektir. Son eşitliğin de kullanımıyla,

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{x_1}^{x_2} \rho(x, t) dx = q(x_1, t) - q(x_2, t)$$

elde edilir. Bu araç sayısındaki korunumun integral formudur. Sona doğru yaklaştığımızı görmekteyiz fakat analiz etmesi bu denkleme göre daha kolay olan bir denklem işimizi daha da kolaylaştıracaktır. Bunun için son eşitliğin sol tarafında türev işlemi integralin içine alınır, sağ tarafta ise integrale geçilirse,

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial \rho(x, t)}{\partial t} dx = - \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial q(x, t)}{\partial x} dx$$

buradan,

$$\int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\partial \rho(x, t)}{\partial t} + \frac{\partial q(x, t)}{\partial x} \right) dx = 0$$

ve son olarak,

$$\frac{\partial \rho(x, t)}{\partial t} + \frac{\partial q(x, t)}{\partial x} = 0$$

şeklinde araç korunumu için daha alışılmış bir form elde ederiz. Buna trafik akışı için kinematik dalga denklemi adı verilir.

Esasında, her ne zaman bir yoğunluk (ρ) ve bu yoğunluğun bir fonksiyonu olan akı varsa (q), o zaman kütlelenin korunumu

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial q(\rho)}{\partial x} = 0 \quad (2.2)$$

ile verilir (Pala 2006).

Öte yandan trafik teorisinde neredeyse temel oluşturan, araç akısı ile yoğunluk arasındaki ilişkiye göz atalım. Buna göre, birim uzunluğa sahip yoldaki araç akısı, bu yolda ölçülen ortalama hız ile yoğunluğun çarpımına eşittir.

$$q(x, t) = v(\rho)\rho(x, t)$$

Bu eşitliği birimlerden de takip etmemiz mümkündür. Ancak, ilk bakışta oldukça makul gibi görünse de araçların yavaşlaması veya hızlanmasıyla yoğunluk değişecek, yoğunluk değişiminden dolayı da akıda da değişim gözleneceğinden elimizdeki eşitlik yetersiz kalacaktır. Bu sebeple akı denkleminizi yoğunluktaki değişime bağlı olarak

$$q(x, t) = v(\rho)\rho(x, t) - \nu \rho_x(x, t) \quad (2.3)$$

şeklinde revize etmemiz gerekir. Akıdaki bu değişime I. Fick Kanunu adı verilir. Buradaki ν katsayısı, kinematik viskozite katsayısı olarak bilinir. Viskozite katsayısı, deneysel olarak hesaplanabilen boyutsuz Reynolds sayısından $\nu = 1/R_e$ eşitliği ile elde edilir. Reynolds sayısı ise,

$$R_e = \frac{\rho v_f d}{\mu}$$

ile verilir. Burada, ρ yine yoğunluğu, v_f serbest hızı, d fiziksel olayın meydana geldiği geometrik şeklin uzunluğunu, μ 'de akışkanın viskozluğunu göstermektedir. Bu sabitlerin tümünü birden elimizdeki probleme uyarlamak pekâlâ mümkündür. Biz burada $\nu \ll 1$ durumunu göz önüne alacağız. Bu yüzden gradyent etkisi, sadece $\rho_{xx} \ll 1$ durumunda diğer bir değişle bir şok dalgası başladığında önem kazanır.

(2.3) eşitliğini (2.1) ile verilen Greenshield Bağıntısı ile birlikte düşünüp, (2.2) ile verilen korunum denkleminde yerine yazarsak,

$$\rho_t + v_f \left(1 - \frac{2\rho}{\rho_{max}}\right) \rho_x - \nu \rho_{xx} = 0$$

elde edilir. Bu denklemden,

$$u = v_f \left(1 - \frac{2\rho}{\rho_{max}} \right)$$

dönüşümü yapıp,

$$u_t = -\frac{2v_f}{\rho_m} \rho_t, \quad u_x = -\frac{2v_f}{\rho_m} \rho_x \quad \text{ve} \quad u_{xx} = -\frac{2v_f}{\rho_m} \rho_{xx}$$

eşitlikleri de yerlerine yazılırsa,

$$u_t + uu_x = vu_{xx}$$

şeklinde (1.1) ile verilen Burgers Denklemi elde edilir.

2.2 Burgers Denklemine Gezen Dalga Çözümü

Burgers denklemi akışkanlar dinamiğinde difüzyif dalgalar için iyi bir model ortaya koymakta olup, denklemdeki uu_x terimi doğrusal olmayan konveksiyonu, vu_{xx} terimi ise difüzyonu temsil etmektedir. Denklem yarı parabolik yapısı, gezen dalga türünden çözümlerin varlığını sağlamaktadır. Bu sayede, denklemdeki konvektif ve difüzyif terimler arasındaki çekişmeyi iyi bir şekilde gözlemleyebiliriz.

c bir sabit ve f bir fonksiyon olmak üzere Burgers denkleminin

$$u(x, t) = f(z), \quad z = x - ct \tag{2.4}$$

formunda hareketli dalga çözümünü arıyoruz. Burada c dalga hızını, $u(x, t)$ çözüm fonksiyonu ise dalganın formunu göstermektedir. (2.4) fonksiyonunu Burgers denkleminde yerine yazarsak,

$$f'(z) = df/dz$$

olmak üzere,

$$-cf' + ff' - vf'' = 0$$

adi diferansiyel denklemi elde edilir. Bu diferansiyel denklem $ff' = \frac{1}{2}(f^2)'$ olduğu göz önüne alınıp integre edilirse, C bir integral sabiti olmak üzere,

$$-cf + \frac{1}{2}f^2 - \nu f' = -\frac{C}{2}$$

denklemini elde edilir. Bu denklem ise normal formda aşağıdaki gibi,

$$f' = \frac{1}{2\nu}(f^2 - 2cf + C) \quad (2.5)$$

yazılabilir. (2.5) denkleminin çözülmesi için bazı sınır koşullarının bulunması gerekir. Bu sebeple $z_1 \neq z_2$ olmak üzere,

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(z) = z_1$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(z) = z_2$$

sınır koşullarını $z_1 > z_2$ olacak şekilde kabul edip (2.5) denkleminde yerine yazarsak,

$$z_1^2 - 2cz_1 + C = 0$$

$$z_2^2 - 2cz_2 + C = 0$$

cebirsel denklem sistemi elde edilir. Bu sistemin çözülmesiyle c ve C değerleri,

$$c = (z_1 + z_2)/2, \quad C = z_1 z_2$$

olarak bulunur. Bu durumda,

$$c^2 > C, \quad z_1 = c + \sqrt{c^2 - C}, \quad z_2 = c - \sqrt{c^2 - C}$$

olmak üzere (2.5) denklemini,

$$f' = \frac{1}{2\nu}(f - z_1)(f - z_2) \quad (2.6)$$

biçiminde yazılabilir. (2.6) denklemini otonom olup;

$$f = z_1 \text{ ve } f = z_2 \text{ için } f' = 0$$

$$z_1 < f < z_2 \text{ için } f' < 0$$

$$f > z_1 \text{ ve } f > z_2 \text{ için } f' > 0$$

sonuçlarını çıkarabiliriz.

Diğer yandan (2.6) denklemini $f = z_1$ ve $f = z_2$ kritik noktalarına sahiptir. Türev testi için,

$$F(f) = \frac{1}{2\nu} (f - z_1)(f - z_2)$$

kabul edilip türevi alınırsa,

$$F'(f) = \frac{1}{2\nu} (2f - (z_1 + z_2))$$

elde edilir. Buradan; $F'(z_1) < 0$ olduğundan $f = z_1$ noktası kararsız kritik nokta,

$F'(z_2) > 0$ olduğundan $f = z_2$ noktası kararlı kritik nokta olur. Ayrıca (2.6) denklemini değişkenlerine ayrılabilir bir denklem olup,

$$\frac{1}{2\nu} dz = \frac{1}{(z_1 - z_2)} \left(\frac{1}{f - z_1} - \frac{1}{f - z_2} \right) df$$

şeklinde yazılabilir. Şimdide, $z_2 < f < z_1$ olduğunu göz önüne alınıp, son denklem integre edilecek olursa, $c = (z_1 + z_2)/2$ olmak üzere,

$$u(x, t) = f(z) = z_2 + \frac{z_1 - z_2}{1 + \exp\left(\frac{z_1 - z_2}{2\nu}(x - ct)\right)} \quad (2.7)$$

elde edilir. (2.7) ile verilen u fonksiyonu Burgers denkleminin şok çözümüdür. Ayrıca,

$$\frac{1}{1 + e^x} = \frac{1}{2} \left(1 - \tanh\left(\frac{x}{2}\right) \right)$$

özdeşliğinden faydalanarak (2.7) u fonksiyonunu,

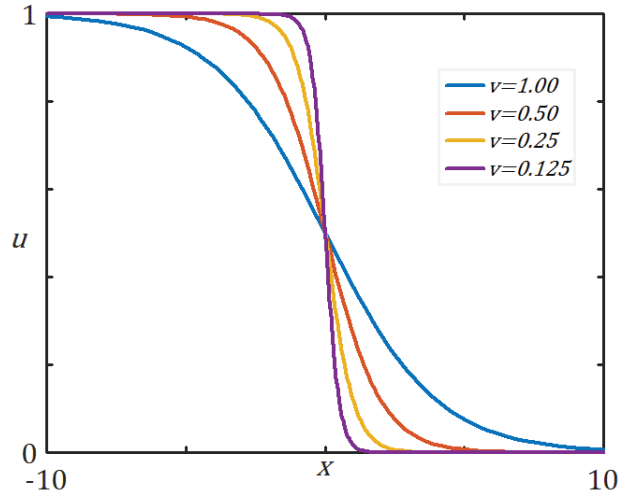
$$u(x, t) = f(z) = \frac{1}{2}(z_1 + z_2) - \frac{1}{2}(z_1 - z_2) \tanh\left(\frac{z_1 - z_2}{4\nu}(x - ct)\right) \quad (2.8)$$

biçiminde düzenleyebiliriz. Özel bir durum için, (2.8) eşitliğinde $z_2 = 0$ alınmasıyla, $c = z_1/2$ olmak üzere,

$$u(x, t) = \frac{z_1}{2} \left(1 - \tanh\left(\frac{z_1}{4\nu}\left(x - \frac{z_1}{4}t\right)\right) \right)$$

elde edilir ki, bu da Taylor şok profili olarak adlandırılmaktadır. Burada; u hızı, c ise genliği temsil etmektedir.

Öte yandan $(z_1 - z_2)/2\nu > 0$ olduğundan (2.7) den z 'nin büyük pozitif değerleri için, $f(z) \sim z_1$ ve z 'nin büyük negatif değerleri için $f(z) \sim z_2$, $f(0) = (z_1 + z_2)/2$ ve her z için $f'(z) < 0$ olduğunu söyleyebiliriz. Yani, $z_1 > z_2$ olduğu durumda, dalga profili $u(x, t) = f(z)$ sabit z_1 değerinden, sabit z_2 değerine monoton azalır. Difüzyon katsayısı ν 'nin dalga formunun biçimine önemli bir etkisi vardır. Denklemdaki difüzyon teriminin varlığı dalga profilinin aşamalı olarak biçim değiştirip kopmasını önlemektedir. Difüzyon teriminin yokluğu ise dalga formunun kırılarak şok dalgası oluşturmasına sebep olur. ν 'nin küçük değerleri, yani difüzyon etkisinin zayıf olması ise, $f(z)$ 'deki eğikliğin dik (keskin) olmasına yol açar. Diğer yandan ν 'nin büyük olması, difüzyon etkisinin daha fazla olmasını ve bu da dalganın dar bir eğikliğe sahip olmasını gerektirecektir. Konveksiyon ve difüzyon (2.7) de tam olarak dengelenmiş durumdadır. Sonuç olarak f , (2.8) ile verilen fonksiyon ve $c = f(0) = (z_1 + z_2)/2$ olmak üzere, $u(x, t, \nu) = f(x, ct)$ alınırsa, $\nu \rightarrow 0$ için $u(x, t, \nu)$ fonksiyonu şok çözüme yaklaşacaktır. Şekil 2.2'de $z_1 = 1, z_2 = 0, t = 0, \nu = 1$ ve $\nu = 0.5, \nu = 0.25, \nu = 0.125$ değerleri için (2.7) ile verilen şok dalga profilinin gözlenmesi yer almaktadır. (Aslan 2007).



Şekil 2.2: Şok dalga profili

2.3 Burgers Denklemine Hopf-Cole Dönüşümü ile Çözümü

Burgers denklemine analitik çözüm bulmak için kullanılan yöntemlerden bir diğeri de Hopf (1950) ve Cole (1951) tarafından hemen hemen yakın tarihlerde fakat birbirlerinden bağımsız olarak geliştirilen Hopf-Cole yöntemidir. Yöntem elimizdeki mevcut doğrusal olmayan problemin, analitik çözümü bilinen doğrusal difüzyon denklemine indirgenmesi esasına dayanır. Şöyle ki;

θ fonksiyonu,

$$\theta_t = v\theta_{xx}, \quad -\infty < x < \infty, \quad t > 0 \quad (2.9)$$

$$\theta(x, 0) = \theta_0(x)$$

şeklinde verilen doğrusal difüzyon denkleminin herhangi bir çözümü olmak üzere

$$u(x, t) = -2v \frac{\theta_x}{\theta} \quad (2.10)$$

Hopf-Cole dönüşümü ile hesaplanan u fonksiyonu da

$$u_t + uu_x = v u_{xx}, \quad -\infty < x < \infty, \quad t > 0 \quad (1.1)$$

$$u(x, 0) = u_0(x)$$

Burgers denkleminin çözümüdür.

Bu önermenin doğruluğunu aşağıdaki şekilde basitçe kontrol etmek mümkündür. $\varphi = \varphi(x, t)$ kendisi ve her mertebeden kısmi türevleri sürekli bir fonksiyon olmak üzere (1.1) ile verilen Burgers denkleminde

$$u = \varphi_x, \quad \varphi = \varphi(x, t) \quad (2.11)$$

dönüşümü uygulanırsa

$$\varphi_{xt} + \varphi_x \varphi_{xx} = v \varphi_{xxx} \quad (2.12)$$

denklemi elde edilir. φ sürekli bir fonksiyon olduğundan $\varphi_{xt} = \varphi_{tx}$ dır. Bu eşitlik göz önüne alınarak (2.12) denkleminin her iki yanını x 'e göre integrallenirse,

$$\varphi_t + \frac{1}{2}(\varphi_x)^2 = v \varphi_{xx} \quad (2.13)$$

elde edilir. $\varphi(x, t) = F(\theta(x, t))$ olarak alınıp (2.13) de yerine yazılırsa,

$$F'(\theta)\theta_t + \frac{1}{2}[F'(\theta)\theta_x]^2 = v[F''(\theta)\theta_x^2 + F'(\theta)\theta_{xx}] \quad (2.14)$$

elde edilir. Burada, θ fonksiyonunun (2.9) ısı denkleminin herhangi bir çözümü olduğu kabul edilirse (2.14) denklemi

$$[F'(\theta)]^2 = 2vF''(\theta)$$

şeklinde sadeleştirilebilir. Bu denklemin çözümü için denkleme,

$$\frac{1}{P(\theta)} = F'(\theta)$$

dönüşümü uygulanırsa,

$$\frac{1}{[P(\theta)]^2} = -2v \frac{P'(\theta)}{[P(\theta)]^2}$$

şeklinde bir diferansiyel denklem elde edilir. Bu denklemin çözümüyle de,

$$P(\theta) = -\frac{1}{2v}(\theta - c_1)$$

elde edilir. Bu denklemde özel olarak $c_1 = 0$ alınıp tekrar $1/P(\theta) = F'(\theta)$ eşitliği kullanılırsa,

$$F'(\theta) = -2v \frac{1}{\theta}$$

sonuç olarak da,

$$\varphi(x, t) = F(\theta) = -2v \ln(\theta) + c_2$$

ve burada (2.11) dönüşümünün tekrar kullanımıyla da,

$$u(x, t) = \varphi_x(x, t) = -2v \frac{\theta_x}{\theta}$$

elde edilir. Sonuç olarak, (2.9) ısı denkleminin herhangi bir çözümü (2.10) dönüşümünde yerine yazıldığında (1.1) Burgers denkleminin bir çözümünü verecektir.

Diğer yandan $\theta(x, 0) = \theta_0(x)$ başlangıç koşulunu bulmak için (2.10) Hopf-Cole dönüşümünde $x = \xi$ dönüşümü yapıp her iki tarafın 0 'dan x 'e kadar integrali alınırsa, $C = \theta(0, t)$ olmak üzere,

$$\theta(x, t) = C(t) \exp\left(-\frac{1}{2v} \int_b^x u(\xi, t) d\xi\right) \quad (2.15)$$

bulunur. Burada $u(x, 0) = u_0(x)$ olduğu dikkate alınırsa θ_0 başlangıç koşulu,

$$\theta(x, 0) = \theta_0(x) = C_0 \exp\left(-\frac{1}{2v} \int_0^x u_0(\xi) d\xi\right) \quad (2.16)$$

şeklinde elde edilmiş olur. Böylece (2.9) difüzyon denkleminin (2.16) başlangıç koşulu altındaki standart çözümü:

$$\theta(x, t) = \frac{1}{2(\pi vt)^{1/2}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left[-\frac{(x-\xi)^2}{4vt}\right] \theta_0(\xi) d\xi \quad (2.17)$$

olur. Özetle söyleyecek olursak, (2.16) başlangıç koşulundan (2.9) ısı denkleminin (2.17) çözümü, bu çözümün (2.10) Hopf-Cole dönüşümünde yerine konulmasıyla da (1.1) Burgers denkleminin çözümü u_0 başlangıç koşulu cinsinden aşağıdaki formda elde edilir.

$$u(x, t) = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left[-\frac{(x-\xi)^2}{4vt}\right] \exp\left[-\frac{1}{2v} \int_0^x u_0(\eta) d\eta\right] u_0(\xi) d\xi}{\int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left[-\frac{(x-\xi)^2}{4vt}\right] \exp\left[-\frac{1}{2v} \int_0^x u_0(\eta) d\eta\right] d\xi} \quad (2.18)$$

(2.17) çözümünün tekliği $-\infty < x < \infty$ aralığında u_0 başlangıç koşulu altında tartışılabilir. (1.1) Burgers denkleminin herhangi bir $u(x, t)$ çözümü, (2.15) eşitliğinden dolayı (2.9) ısı denklemini sağlayacak şekilde bir $\theta(x, t)$ fonksiyonu tanımlar. Kabul edelim ki, (1.1) denkleminin $u(x, t)$ ve $v(x, t)$ gibi iki çözümü olsun. Başlangıç şartından dolayı $u(x, 0) = v(x, 0)$ 'dır. $\theta(x, 0)$ başlangıç koşulu (2.16) eşitliği sebebiyle C_0 sabitine bağlı olarak bulunur. $\theta(x, 0)$ yalnızca $u(x, 0) = v(x, 0)$ 'a bağlı olduğundan her bir durumda C_0 sabitine kadar aynıdır. Aynı şekilde sınır değerleri her iki çözüm içinde aynı olduğundan (2.9) ısı denkleminin çözümü aynıdır. Fakat $u(x, t)$ ve $v(x, t)$ çözümleri (2.10) kullanılarak elde edildiğinden $u(x, t) = v(x, t)$ olur ki buda, çözüm tek demektir (Hopf 1950, Cole 1951).

2.4 Burgers Denklemine Diğ er Bazı Analitik Ç özümleri

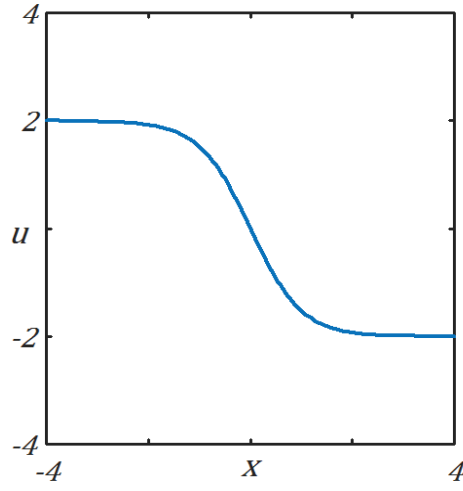
Benton ve Platzman (1972) tarafından hazırlanan ař ağıdaki tablonun amacı, Burgers denkleminin benzer ç özümlerinin sistematik bir biçimde düzenlenmiş bir listesini sunmaktır. (1.1) Burgers denklemi ile (2.9) difüzyon denklemi arasındaki benzerlik, (2.10) Hopf-Cole dönüşümü sayesinde (2.9) denkleminde başlayarak (1.1) Burgers denkleminin tam ç özümlerini bulmayı kolaylaştırır. Her ne kadar keyfi başlangıç koşulları için (2.9) denkleminin genel ç özümleri bilinse ve (2.10) dönüşümünün uygulaması kolay olsa da bütün özel ç özümler fiziksel açıdan ilginç değildir. Bu nedenle, sadece ilginç olanlara dikkat çekilmiştir. Kaynaklarda dağınık halde bulunan çeşitli sonuçlar Benton ve Platzman (1972) tarafından derlenmiş, o gün için iki yeni ç özümler de adı geçen yazarlar tarafından tabloya dâhil edilmiştir. Her bir ç özümler grubu için açıklayıcı bilgiler tabloların akabinde verilmiştir. Şekillerin birçoğunun sözlü açıklamaları kullanışsız ve büyük ölçüde lüzumsuzdur, bu nedenle bundan kaçınarak grafiklerin kendi adlarına konuşmalarına izin verilmiştir. Grafiklerin çizimi Matlab 2015 vasıtasıyla gerçekleştirilmiştir.

Tablo 2.1: $\partial u/\partial t = 0$ durumunda ç özümler (Birinci Grup)

	$\theta(x, t)$	$u(x, t) = -2 \partial \ln \theta / \partial x$
1	e^{t+x}	-2
2	e^{t-x}	2
3	$e^t \cosh x$	-2 tanh x
4	$e^t \sinh x$	-2 coth x
5	$e^{-t} \cos x$	2 tan x
6	$e^{-t} \sin x$	-2 cot x
7	x	-2/x

Tablo 2.1'deki 1. ve 2. ç özümler ile, 5. ve 6. ç özümler izomorftur. $\partial u/\partial t = 0$ ise, $\partial^2 \ln \theta / \partial t \partial x = 0$ olur ki bu yüzden $\theta = A(t).B(x)$ 'dir. Difüzyon denkleminin bu şekildeki ç özümleri yukarıda verilenlerdir. Aşıkâr olan 1 ve 2'den başka 3, 4, 5 veya 6 ve 7 olarak adlandırılan dört ve sadece dört farklı (izomorfik olmayan) kararlı ç özümler vardır. Bunlardan sadece 3 numaralı ç özümlerde tekillik yoktur. (Kararlı

çözümler denktir, çünkü her biri bir ölçek dönüşümü ve orijinin ötelemesi ile 3 numaralı çözümden elde edilebilir: $2 \operatorname{atanh}[a(x - x_0)]$ ifadesinde; $a = 1, x_0 = i\pi/2$ alınırsa 4. çözüm, $a = i, x_0 = 0$ alınırsa 5. çözüm, $a \rightarrow 0, ax_0 \rightarrow i\pi/2$ için ise 7. çözüm elde edilir). 1 ve 2 numaralı çözümler aşikâr olmalarına rağmen bu çözümler 3. çözümde (kararlı şok) olduğu gibi enerjinin düzgün yayılım bölgelerine karşılık gelir, bu 3 numaralı çözüm Şekil 2.3'de verilmiştir.



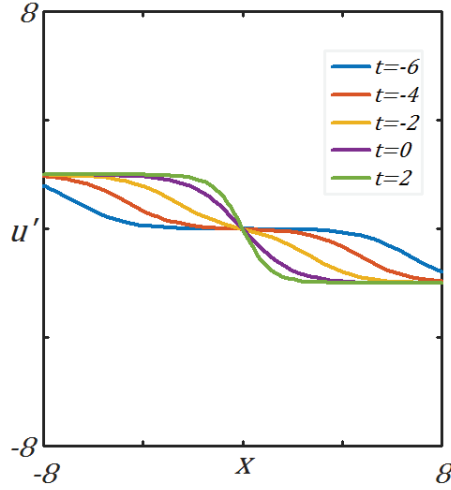
Şekil 2.3: Çözüm 3 (Kararlı şok)

Tablo 2.2: Birinci gruptakilere bağlı olan çözümler

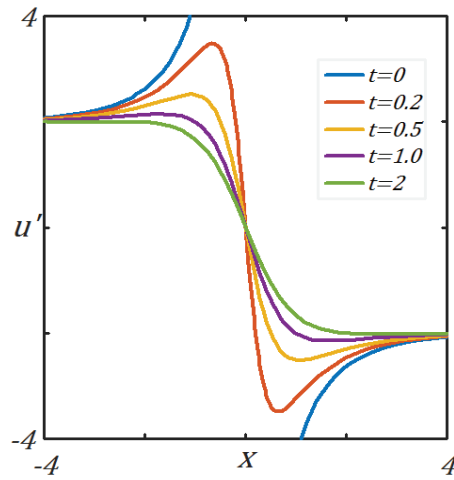
	$\theta'(x, t) = \alpha + \theta(x, t)$	$u'(x, t) = -2 \frac{\partial \ln \theta'}{\partial x}$
8 (\pm)	$\pm 1 + e^{t+x}$	$-\frac{2}{1 \pm e^{-t-x}}$
9 (\pm)	$\pm 1 + e^{t-x}$	$\frac{2}{1 \pm e^{-t+x}}$
10 (\pm)	$\pm 1 + e^t \cosh x$	$-\frac{2 \sinh x}{\cosh x \pm e^{-t}}$
11 (\pm)	$\pm 1 + e^t \sinh x$	$-\frac{2 \cosh x}{\sinh x \pm e^{-t}}$
12 (\pm)	$\pm 1 + e^{-t} \cos x$	$\frac{2 \sin x}{\cos x \pm e^t}$
13 (\pm)	$\pm 1 + e^{-t} \sin x$	$-\frac{2 \cos x}{\sin x \pm e^t}$
14 (\pm)	$\alpha + x$	$-\frac{2}{\alpha + x}$

Tablo 2.2’de yer alan 8(+) ve 3 numaralı çözümler, 8(-) ve 4 numaralı çözümler, 9(±) ve 8(±) numaralı çözümler, 11(-) ve 11(+) numaralı çözümler, 12(-) ve 12(+) numaralı çözümler, 13(±) ve 12(±) numaralı çözümler, 14 ve 7 numaralı çözümler izomorfturlar. Ayrıca 8(-), 9(-), 11(±) ve 14(±) numaralı çözümler ise kalıcı tekilliklere sahiptir. İzomorfizmalar nedeniyle bu gruptaki çözümlerden sadece dördü farklı olup birinci gruptakilerden ismen 10(±), 11(+) veya 11(-) ve 12(+) veya 12(-) olarak ayrılır.

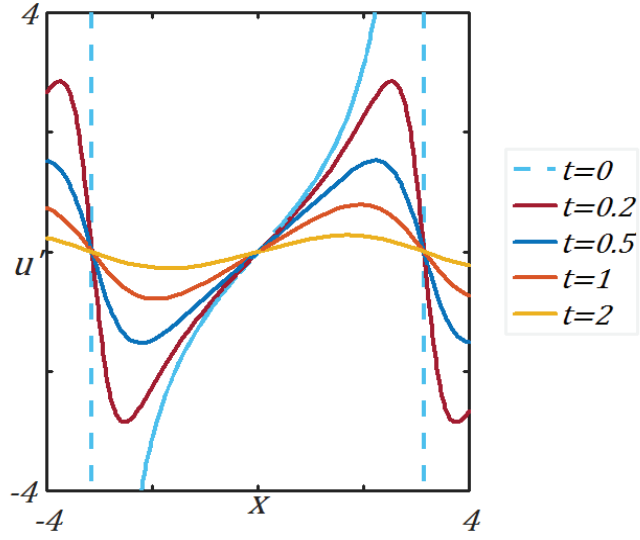
10(+) numaralı çözüm iki eşit şokun birleşmesidir. Birleşen şokların bükülme noktaları $t = -\ln 2$ ’de kaybolur. $t = \infty$ ’da konfigürasyon, 3 numaralı kararlı şoktur (Şekil 2.4). Ayrıca, 10(-) ve 12(-) numaralı çözümler $t \leq 0$ için tekildir (Şekil 2.5 ve Şekil 2.6).



Şekil 2.4: Çözüm 10(+)



Şekil 2.5: Çözüm 10(-)



Şekil 2.6: Çözüm 12(-)

Tablo 2.3: θ 'daki anlık noktasal kaynakların ayrık dağılımları (İkinci Grup)

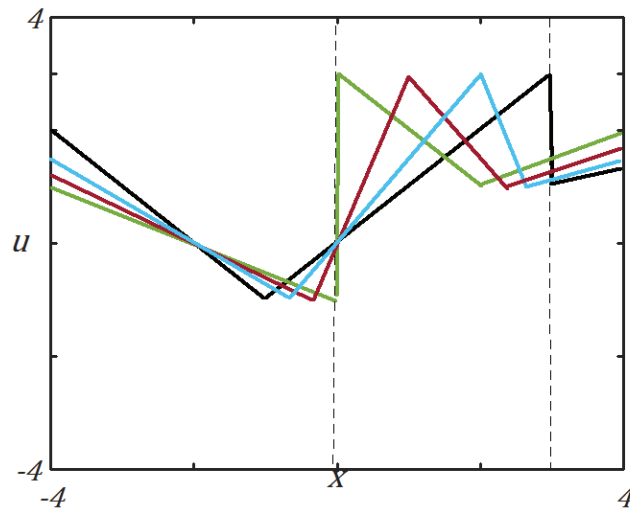
	$\theta(x, t)$	$u(x, t) = -2 \frac{\partial \ln \theta}{\partial x}$
15	$(4\pi t)^{-1/2} e^{-x^2/4t} \equiv \phi(x, t)$	x/t
16(\pm)	$\pm 1 + t^{-1/2} e^{-x^2/4t}$	$\frac{x/t}{1 \pm t^{1/2} e^{x^2/4t}}$
17	$\phi(x + 2, t) + \phi(x - 2, t) \equiv (\pi t)^{-1/2} e^{-\frac{x^2+4}{4t}} \cosh\left(\frac{x}{t}\right)$	$\frac{x}{t} - \frac{2}{t} \tanh\left(\frac{x}{t}\right)$
18	$\phi(x - 2, t) - \phi(x + 2, t) \equiv (\pi t)^{-1/2} e^{-\frac{x^2+4}{4t}} \sinh\left(\frac{x}{t}\right)$	$\frac{x}{t} + \frac{2}{t} \coth\left(\frac{x}{t}\right)$
19	$\phi(x - 2i, t) + \phi(x + 2i, t) \equiv (\pi t)^{-1/2} e^{-\frac{x^2+4}{4t}} \cos\left(\frac{x}{t}\right)$	$\frac{x}{t} + \frac{2}{t} \tan\left(\frac{x}{t}\right)$
20	$\phi(x - 2i, t) - \phi(x + 2i, t) \equiv i(\pi t)^{-1/2} e^{-\frac{x^2-4}{4t}} \sin\left(\frac{x}{t}\right)$	$\frac{x}{t} - \frac{2}{t} \cot\left(\frac{x}{t}\right)$
21	$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \phi(x + 2n\pi, t) \equiv \psi(x, t)$	$-2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sin nx}{\sinh nt}$
22	$\sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n \phi(x + 2n\pi, t)$	$\tan \frac{1}{2} - 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n e^{-nt} \frac{\sin nx}{\sinh nt}$

Tablo 2.3’de yer alan 19 ve 20 numaralı çözümler izormorftur. 17, 18, 19, 20 ve 22 numaralı çözümler ise kalıcı tekilliğe sahiptirler. 15 numaralı çözüm tam olarak viskoz olmayan $u_t + uu_x = 0$ denklemini sağlar ve dağılım katmanları arasındaki bölgeler de büyük Reynolds sayısı için Burgers denklemini çözümlerine yaklaştıran “testere-dişi” limitini verir. Bu çözüme ait testere dişini oluşturmak için Şekil 2.7’de $t = 0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 0$ için $(x + 2)/(t - 2)$, x/t , $(x - 3)/(t - 1)$, ve $x/(t + 2)$ parçaları birleştirilmiştir. 16(+) numaralı çözüm ise eşit sıkıştırma ve genişleme sinyallerinin bir tek çiftinin bozunmasıdır (Şekil 2.8). 16(-) numaralı çözüm $t \leq 1$ için singülerdir (Şekil 2.9). 21 numaralı çözüm ilk başta sonsuz yoğunlukta olan testere-dişi konfigürasyonundaki uzaysal bir periyodik dalganın bozunmasıdır. Uzaysal periyodik $\psi(x, t)$ fonksiyonu, θ içinde sonsuz bir kaynak sırasını temsil eder ve ϑ_3 , Whittaker ve Watson (1937) notasyonunda bir teta fonksiyonu olmak üzere aşağıdaki eşitlik verilir,

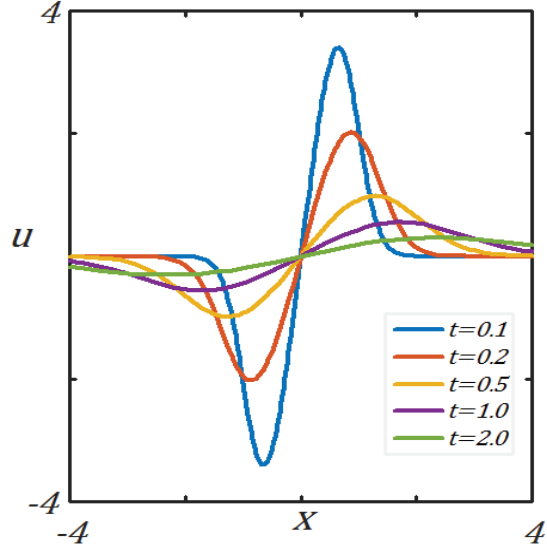
$$(2\pi)^{-1} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \exp[-n^2 t] \cos(nx) = (2\pi)^{-1} \vartheta_3\left(\frac{1}{2}x, e^{-t}\right).$$

u fonksiyonu için verilen ifade, ϑ_3 fonksiyonlarının logaritmik türevi için standart formüllerden gelir. Bu, Fourier katsayıları açıkça t ’nin fonksiyonları olarak ifade edilebilen Burgers denkleminin tek bilinen uzaysal olarak periyodik çözümüdür (Şekil 2.10). 22 numaralı çözümde θ için Fourier serileri aşağıdaki gibidir,

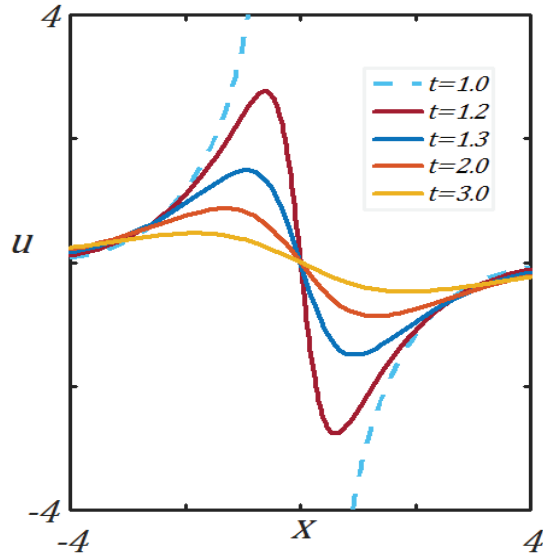
$$(2\pi)^{-1} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \exp\left[-\left(n + \frac{1}{2}\right)^2 t\right] \cos\left(n + \frac{1}{2}\right)x = (2\pi)^{-1} \vartheta_2\left(\frac{1}{2}x, e^{-t}\right).$$



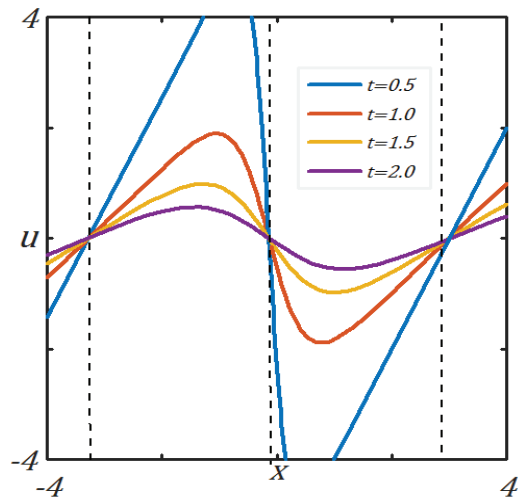
Şekil 2.7: Çözüm 15



Şekil 2.8: Çözüm 16(+)



Şekil 2.9: Çözüm 16(-)



Şekil 2.10: Çözüm 21, (apsis: $x - \pi$)

Tablo 2.4: Benzerlik Çözümleri (Üçüncü Grup).

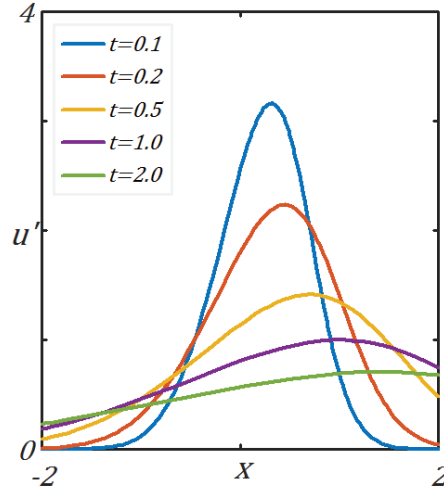
	$\theta(x, t)$	$u(x, t) = -2 \partial \ln \theta / \partial x$
23	$2 \int_x^\infty \phi(\xi, t) d\xi = \operatorname{erfc}(z)$	$\frac{2}{\sqrt{\pi t}} \frac{e^{-z^2}}{\operatorname{erfc}z}$
24	$2 \left(\int_x^\infty d\xi \right)^2 \phi(\xi, t) = 2\sqrt{t} \int_z^\infty \operatorname{erfc}\zeta d\zeta$	$\frac{1}{\sqrt{t}} \frac{\operatorname{erfc}z}{i \operatorname{erfc}z}$
25	$2 \left(\int_x^\infty d\xi \right)^{n+1} \phi(\xi, t) = (4t)^{n/2} i^n \operatorname{erfc}z$	$\frac{1}{\sqrt{t}} \frac{i^{n-1} \operatorname{erfc}z}{i^n \operatorname{erfc}z}$ $n = 0, 1, \dots$
26	$\sqrt{\pi} \left(-\frac{\partial}{\partial x} \right)^{n-1} \phi(x, t) = (4t)^{-\frac{n}{2}} e^{-z^2} H_{n-1}(z)$	$\frac{1}{\sqrt{t}} \frac{H_n(z)}{H_{n-1}(z)}$ $n = 1, 2, \dots$
27	$\frac{1}{2} t^{-1} z e^{-z^2}$	$\frac{1}{\sqrt{t}} \left(2z - \frac{1}{z} \right) = \frac{x}{t} - \frac{2}{x}$

Tablo 2.4'de bulunan ϕ fonksiyonu, 15 numaralı çözümde tanımlanmıştır ve $z \equiv x/2\sqrt{t}$ 'dir. $\operatorname{erfc}(z)$ ve n . mertebeden integral, $i^{n-1} \operatorname{erfc}(z)$ standart hata fonksiyonu ve $H_n(z)$ Hermite polinomudur. Bu gruptaki tüm çözümler kalıcı tekildir. 25 numaralı çözümde $n = 0$ için 23 numaralı çözüme; $n = 1$ için 24 numaralı çözüme bakınız. 26 numaralı çözümde $n = 1$ için 15 numaralı çözüme; $n = 2$ için 27 numaralı çözüme bakınız. 27 numaralı çözüm 15 ve 7 çözümlerinin süperpozisyonudur.

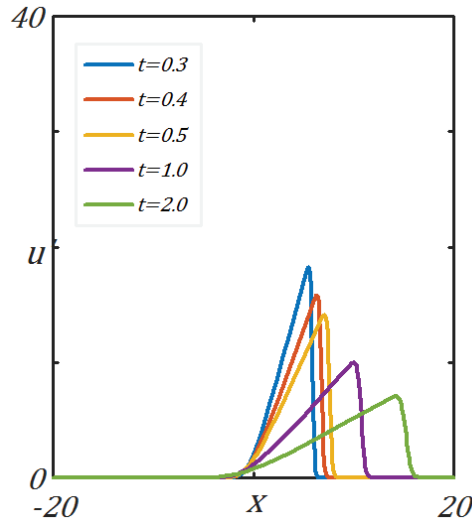
Tablo 2.5: Üçüncü gruba bağlı olan çözümler.

	$\theta'(x, t) = \alpha + \theta(x, t)$	$u'(x, t) = -2 \partial \ln \theta' / \partial x$
28	$\alpha + \operatorname{erfc}z$	$\frac{2}{\sqrt{\pi t}} \frac{e^{-z^2}}{\alpha + \operatorname{erfc}z}$
29(\pm)	$\pm 1 + \sqrt{t} i \operatorname{erfc}z$	$\frac{\operatorname{erfc}z}{\pm 1 + \sqrt{t} i \operatorname{erfc}z}$
30(\pm)	$\pm 1 + t^{n/2} i^n \operatorname{erfc}z$ $n = 1, 2, \dots$	$\frac{t^{(n-1)/2} i^{n-1} \operatorname{erfc}z}{\pm 1 + t^{n/2} i^n \operatorname{erfc}z}$
31(\pm)	$\pm 1 + t^{-\frac{n}{2}} e^{-z^2} H_{n-1}(z)$ $n = 1, 2$	$\frac{1}{\sqrt{t}} \frac{H_n(z)}{H_{n-1}(z) \pm t^{\frac{n}{2}} e^{z^2}}$
32(\pm)	$\pm 1 + t^{-1} e^{-z^2} 2z$	$\frac{1}{\sqrt{t}} \frac{4z^2 - 2}{2z \pm t e^{z^2}}$

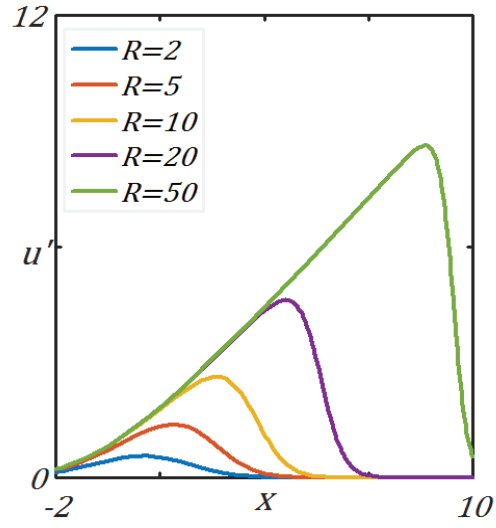
Tablo 2.5’de n ’in çift olması durumunda 31(-) ve 31(+); 32(-) ve 32(+)
 numaralı çözümler izomorftur. 29(-) çözümü ise kalıcı tekildir. 28 haricinde, $|\alpha| = 1$
 olarak alırız çünkü sıfırdan farklı ve aynı işaretli iki farklı α değeri izomorfik
 çözümlere tekabül eder. 28 numaralı çözüm bu gruptaki tek benzerlik çözümüdür ve
 $R = \int_{-\infty}^{\infty} u' dx = 2 \ln(1 + 2\alpha^{-1})$ başlangıç titreşimi zamandan bağımsız Reynolds
 sayısı gibi düşünülebilir. Şekil 2.11, Şekil 2.12 ve Şekil 2.13’de farklı t ve R
 değerleri için çözümün grafiği verilmiştir. 29 (+) numaralı çözüm keskin bir
 sıkıştırma cephesinin bozunmasıdır (Şekil 2.14). Başlangıçta $x < 0$ için $u' =$
 $2/(1 - x)$ ve $x > 0$ için $u' = 0$ ’dır. 32(-) numaralı çözüm $t \leq (2/e)^{1/2} \approx 0.86$
 için tekildir (Şekil 2.15).



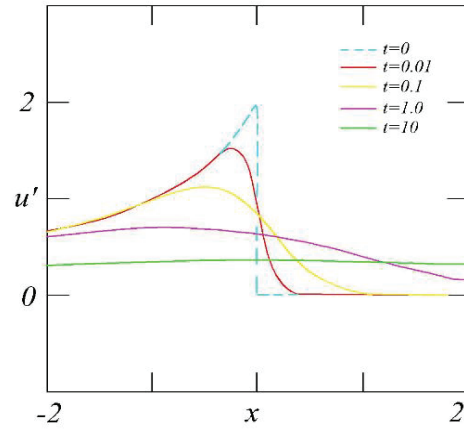
Şekil 2.11: Çözüm 28, $R = 3.6$, $\alpha = 0.40$ için



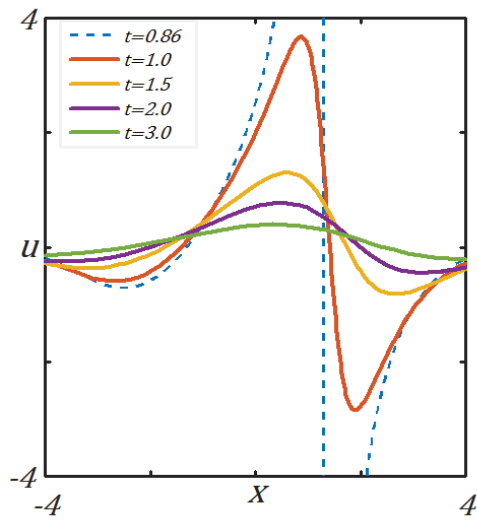
Şekil 2.12: Çözüm 28, $R = 64$, $\alpha = 3.0 \times 10^{-4}$ için



Şekil 2.13: Çözüm 28, $t = 1$ için



Şekil 2.14: Çözüm 29(+)

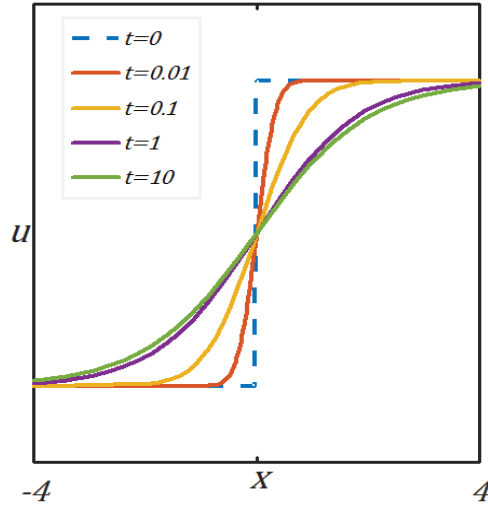


Şekil 2.15: Çözüm 32(-)

Tablo 2.6: Aperiodik başlangıç koşullarının doğrudan atanması.

	$\theta(x, t)$	$u(x, t) = -2\partial \ln \theta / \partial x$
33	$\int_{-\infty}^{\infty} \theta(\xi, 0) \phi(x - \xi, t) d\xi = \int_{-\infty}^{\infty} a_n e^{inx - n^2 t} dn$ $a_n = \frac{1}{2\pi} \theta(\xi, 0) e^{-in\xi} d\xi$	$\frac{\int_{-\infty}^{\infty} \theta(\xi, 0) \frac{\partial}{\partial \xi} \phi(x - \xi, t) d\xi}{\frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \theta(\xi, 0) \phi(x - \xi, t) d\xi} = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} n a_n e^{inx - n^2 t} dn}{\frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} a_n e^{inx - n^2 t} dn}$
34	$F(x, t) + F(-x, t)$ $F(x, t) \equiv \frac{1}{2} e^{t-x} \operatorname{erfc} \frac{x-2t}{2\sqrt{t}}$ $\theta(x, 0) = e^{ x }$	$2 \frac{F(x, t) - F(-x, t)}{F(x, t) + F(-x, t)}$ $u(x, 0) = -2 \operatorname{sgn} x$
35	$G(x, t) + G(-x, t)$ $G(x, t) \equiv \frac{1}{2} e^{t-x} \operatorname{erfc} \frac{2t-x}{2\sqrt{t}}$ $\theta(x, 0) = e^{- x }$	$2 \frac{G(x, t) - G(-x, t)}{G(x, t) + G(-x, t)}$ $U(x, 0) = 2 \operatorname{sgn} x$
36	$I^- + I + I^+$ $I^\pm \equiv \frac{1}{2} e^{\pm R/4} \operatorname{erfc} \frac{\frac{1}{2} \pm x}{2\sqrt{t}}$ $I \equiv \frac{1}{2} e^{-\frac{R}{2}(x-\frac{Rt}{2})} \left(\operatorname{erfc} \frac{x-\frac{1}{2}-Rt}{2\sqrt{t}} - \operatorname{erfc} \frac{x+\frac{1}{2}-Rt}{2\sqrt{t}} \right)$ $\theta(x, 0) = \begin{cases} e^{-Rx/2}, & x \leq \frac{1}{2} \\ e^{\pm R/4}, & x \geq \frac{1}{2} \end{cases}$	$\frac{R \cdot I}{I^- + I + I^+}$ $u(x, 0) = \begin{cases} R, & x < \frac{1}{2} \\ 0, & x > \frac{1}{2} \end{cases}$
37	$x + i2\sqrt{t} \operatorname{erfc} z$ $\theta(x, 0) = x$	$-\frac{2 \operatorname{erf} z}{x + 2\sqrt{t} \operatorname{erfc} z}$ $u(x, 0) = -2/x$
38	$1 + x + i2\sqrt{t} \operatorname{erfc} z$ $\theta(x, 0) = 1 + x $	$-\frac{2 \operatorname{erf} z}{1 + x + 2\sqrt{t} \operatorname{erfc} z}$ $u(x, 0) = -\frac{2 \operatorname{sgn} x}{1 + x }$

Tablo 2.6’da 33 numaralı çözüm sonsuz aralıkta keyfi başlangıç koşulları için $\theta(x, t)$ ’nin Fourier integral açılımıdır. ϕ fonksiyonunun tanımı için 15 numaralı çözüme bakınız. 34 numaralı çözüm bir başlangıç sıkıştırma adımıdır ve Şekil 2.3 ile verilen 3 numaralı çözümdeki kararlı şok üstüne yayılır. 35 numaralı çözüm Şekil 2.16 ile verilmiştir. 36 numaralı çözüm ise küçük R değerleri için Şekil 2.11’de olduğu gibi simetrisini korur. Büyük R değerleri için ise Şekil 2.12’de olduğu gibi konvektif olarak biçimsizdir. 37 numaralı çözüm u için 7 numaralı kararlı çözüme eş başlangıç koşuluna sahiptir. Enerji kaynaklarının olmaması durumunda bozunmaya tekabül eder, oysaki 7 numaralı çözüm sonsuz bir kaynak ile devam ettirilmelidir.

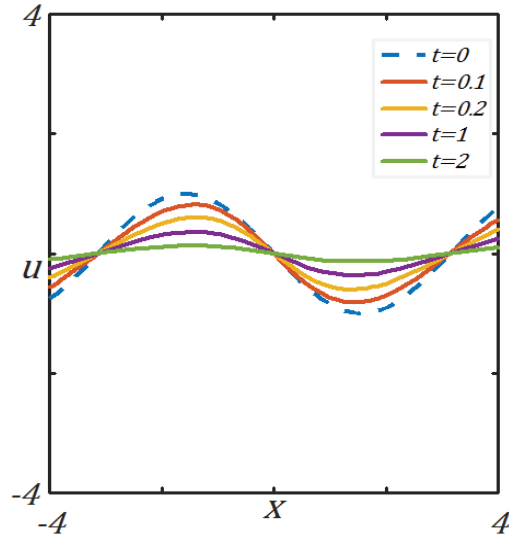


Şekil 2.16: Çözüm 35

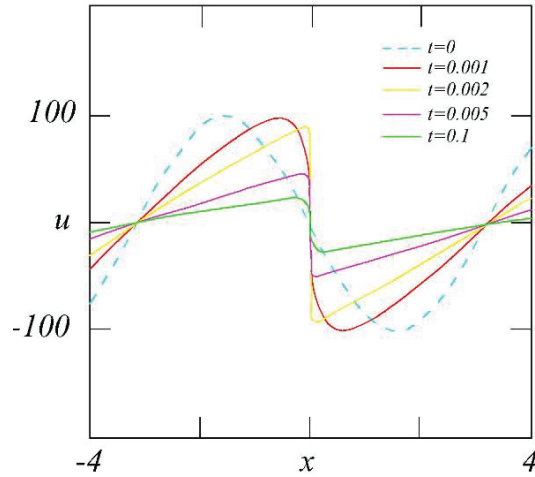
Tablo 2.7: Periyodik başlangıç koşullarının doğrudan atanması.

	$\theta(x, t)$	$u(x, t) = -2\partial \ln \theta / \partial x$
39	$\int_{-\pi}^{\pi} \theta(\xi, 0) \psi(x - \xi, t) d\xi = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{inx - n^2 t}$ $a_n \equiv \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \theta(\xi, 0) e^{-in\xi} d\xi$	$\frac{\int_{-\pi}^{\pi} \theta(\xi, 0) \frac{\partial}{\partial \xi} \psi(x - \xi, t) d\xi}{\frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \theta(\xi, 0) \psi(x - \xi, t) d\xi} = \frac{\sum_{n=-\infty}^{\infty} n a_n e^{inx - n^2 t}}{\frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{inx - n^2 t}}$
40	$a_0 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-n^2 t} \cos nx$ $a_n \equiv (-1)^n I_n(R/2)$ $\theta(x, 0) = e^{-\frac{1}{2} R \cos x}$	$\frac{4 \sum_{n=1}^{\infty} n a_n e^{-n^2 t} \sin nx}{a_0 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-n^2 t} \cos nx}$ $u(x, 0) = -R \sin x$

Tablo 2.7'deki 39 numaralı çözümde $-\pi < x < \pi$ aralığında keyfi periyodik başlangıç koşulları için θ fonksiyonunun Fourier seri açılımı verilmiştir. ψ fonksiyonunun tanımı için ise 21 numaralı çözüme bakınız. ψ için Fourier serileri kullanılarak elde edilen 40 numaralı çözümde, başlangıçtaki basit harmonik dalga bozunmaya zorlanır. I_n eksponensiyel büyüyen ikinci tür Bessel fonksiyonudur. Reynolds sayısı R , dalganın başlangıç yoğunluğunu ifade eder. Eğer R küçükse difüzyon hakimdir ve dalga formu küçük harmonik bozulmalarla küçülür (Şekil 2.17). Büyük R sayısı için ise konvektif bozulma başlangıçta baskındır ve tipik bir testere dişi dalgası oluşturur (Şekil 2.18).



Şekil 2.17: Çözüm 40, $R = 1$ için



Şekil 2.18: Çözüm 40, $R = 100$ için

3. BURGERS DENKLEMİNİN CHEBYSHEV SPEKTRAL SIRALAMA YÖNTEMİ İLE ÇÖZÜMÜ

İnsanoğlu, tarihi boyunca, doğada gelişen olayları anlama ve bundan azami ölçüde yararlanma çabası içinde olmuş; doğrudan baş edemeyeceği bu problemleri, daha anlaşılır kılmak adına, fen bilimleri kanunlarını kullanarak matematik diliyle modelleme ihtiyacı duymuştur. Karşılaşılan bu problemleri temsil eden matematik modellerin pek çoğu adi ya da kısmi diferansiyel denklem, integral denklem, integro-diferansiyel denklem veya bunların kombinasyonlarından oluşan denklemler şeklindedir. Ancak bu denklemlerin analitik çözümlerini bulmak çoğu zaman mümkün olmadığı gibi, bazen zor olmakta, bazen de analitik çözüm bulunabilse bile bulunan çözüm fonksiyonunun karmaşıklığından ötürü işlenmesi pratik olmamaktadır. Bu nedenle, kimi durumlarda mecburen kimi durumlarda ise tercihen denklemin analitik çözümü yerine yaklaşık çözümü aranmış, bu amaçla birçok yöntem geliştirilmiştir.

Sonlu farklar, sonlu elemanlar, spektral yöntemler ve bunlardan türetilen diğer yöntemler bu amaçla geliştirilmiş yöntemlerdir. Bu tez çalışmasında Burgers denkleminin sayısal çözümünde kullanılan Chebyshev spektral sıralama yönteminin çerçevesi ve etkinliği hakkında fikir sahibi olmak adına spektral yöntemler ve onunda bir üyesi olduğu ağırlıklı kalan yöntemler ailesini tanımak faydalı olacaktır (Finlayson 1972).

L doğrusal veya doğrusal olmayan diferansiyel operatör, f bağımsız değişkenlerin fonksiyonu olmak üzere, D bölgesinde tanımlı

$$Lu = f$$

operatör denklemini göz önüne alalım. Denklemin, sınır koşullarını da sağlayan yaklaşık çözümü u^N olsun. Spektral yöntemlerin temelindeki ana fikir, ϕ doğrusal bağımsız deneme (baz) fonksiyonları olmak üzere, çözüm fonksiyonuna

$$u \approx u^N = \sum_{n=0}^N a_n(t) \phi_n(x)$$

şeklinde verilen kesilmiş seri formunda yaklaşmaktır. Burada belirlenmesi gereken a_n katsayılarına spektral katsayılar adı verilir ve ϕ deneme fonksiyonları, çözüm bölgesinin tamamı üzerinde tanımlı ve izole noktalar dışında sıfır olmayan, istenildiği kadar yüksek dereceli polinom veya trigonometrik polinom şeklindeki küresel fonksiyonlardır. Bu sebeple spektral yöntemlere küresel (global) tipte yaklaşım da denir. Bu nokta, spektral yöntemlerin sonlu farklar ve sonlu elemanlar gibi lokal karakterli yöntemlere göre avantajlarından biridir. Örneğin; sonlu farklar yöntemi herhangi bir noktadaki türevi hesaplarırken sadece ilgili noktanın komşuluğundaki bilgileri kullanır, spektral yöntemler ise tüm tanım kümesindeki bilgileri. Benzer şekilde sonlu elemanlar yöntemi tanım kümesinin alt bölgelerinde düşük dereceli düzgün fonksiyonları baz alırken, spektral yöntemler tanım kümesinin tamamında tanımlı sonsuz diferansiyellenebilir fonksiyonları baz alır (Trefethen 2000). Aradaki bu fark ile varılan yaklaşım, üstel yakınsama hızı elde etmemizi sağlar. Buna spektral yakınsaklık denir. Ancak bu noktada yöntemin verimliliği baz fonksiyonların doğru seçilmesine bağlıdır. Seçtiğimiz baz fonksiyonlar kümesinin hesaplanması kolay olmalı, hızlı bir şekilde yakınsamalı ve kesik N büyük değerler aldığında çözüm yüksek doğrulukta olmalıdır. O halde bu noktada sorulması gereken esas soru şudur: Baz fonksiyonlarını nasıl seçmeliyiz? Cevap, Boyd'un (2000) "problemin geometrisi bazı belirler" ilkesinde saklıdır. Örneğin, periyodik olan aralıklarda tanımlı problemler için kullanılması uygun olan baz fonksiyonu, sinüs ve kosinüs serileri ya da genel olarak bunların ikisini birden içeren Fourier serileridir. Sonlu aralıklar için uygun olan baz fonksiyonu, Chebyshev ya da Legendre polinomlarıdır. Eğer problemin tanım bölgesi bir küre belirtiyorsa, çözümün baz fonksiyonu olarak küresel harmonikler kullanılması uygun olacaktır (Yüksel 2011, Koç 2014). Seçilen baz fonksiyonu, Chebyshev spektral, Fourier spektral yöntem şeklinde yöntem ismini verir. Bu çalışmada, sonlu aralıkta tanımlı Burgers denkleminin çözümü için baz fonksiyonu olarak Chebyshev polinomları kullanılacaktır. Diğer yandan, Jacobi ve Legendre polinomları da sonlu aralıkta tanımlı Burgers denkleminin doğasına pekâlâ uygun seçimler olacaktır.

Diğer yandan H_n Hilbert uzayının bir alt uzayı olmak üzere $u^N \in H_n$ yaklaşımı yukarıda verilen operatör denkleminde yerine yazılırsa, elde edilen

$$R = L(u^N) - f = L\left(\sum_{n=0}^N a_n(t)\phi_n(x)\right) - f$$

ifadesine kalan (artık, rezidü) fonksiyonu adı verilir. u^N yaklaşık çözüm olduğundan, kalanın sifıra eşit olmak zorunluluğu yoktur. Finlayson (1972), kalanı en aza indirgeme yöntemlerinin çoğunun ağırlıklı kalan yöntemler çerçevesinde toplanabileceğini belirtir (Boyd 2000). Bu prensibe dayanan yöntemlerde, W_j ($j = 0, 1, \dots, N$) doğrusal bağımsız test (ağırlık) fonksiyonları olmak üzere,

$$\langle W_j, R \rangle = 0, \quad (j = 0, 1, \dots, N)$$

ile verilen Hilbert uzayındaki iç çarpımlar sifıra eşitlenerek R kalan fonksiyonu sıfırlanmaya zorlanır (Davies, 2011).

Ağırlık fonksiyonlarının farklı seçimleri; sıralama yöntemi, Galerkin yöntemi gibi farklı çözüm tekniklerini tanımlar. Diğer bazı yöntemler ise Tau yöntemi, Momentler yöntemidir.

Örneğin, Galerkin yönteminde, ağırlık fonksiyonları sınır koşullarını da sağlayacak şekilde $W_j = \phi_j$ ($j = 0, 1, \dots, N$) olarak yani deneme fonksiyonu ile eşit seçilir.

Sıralama (seçilmiş noktalar, kolokasyon) yönteminde ise ağırlık fonksiyonu, çözüm bölgesinden alınacak x_j ($j = 0, 1, \dots, N$) sıralama noktaları kullanılarak, δ Dirac delta fonksiyonlar ailesinden seçilir. Yani $W_j = \delta(x - x_j)$ olur. Seçilen ağırlık fonksiyonu iç çarpım ifadesinde yerine yazılırsa,

$$\langle W_j, R \rangle = \langle \delta_j, R \rangle = 0, \quad (j = 0, 1, \dots, N)$$

$$R(x_j, t) = 0, \quad (j = 0, 1, \dots, N)$$

elde edilir. Bu ise, Rezidü fonksiyonunun sıralama noktalarında sifıra eşit olması, diğer bir ifadeyle yaklaşımın sıralama noktalarında diferansiyel denklemini tam olarak sağlaması anlamına gelir. Bu sistemin çözülmesiyle elde edilen a_n katsayıları bizi, u^N yaklaşık çözümüne götürür. Burada ağırlıklı kalan yöntem ile yapılan ayrıklaştırmanın sadece uzay boyutunda yapıldığı gözden kaçırılmamalıdır (Shen ve diğ. 2011). Tarif edilen yöntem zamana bağlı türev içeren bir kısmi türevli denkleme

uygulandığında; $R(x_j, t) = 0$ sistemi, a_n katsayılarında zamana bağlı türev içeren bir denklem sistemi halini alır. Bu sistem ise bilinen yöntemlerle çözülür. Deneme fonksiyonunun birinci tip Chebyshev polinomları seçilmesi durumunda yöntem, Chebyshev sıralama yöntemi olarak adlandırılır (Gottlieb ve Orszag, 1977).

Boyd (2000) spektral yöntemleri, interpolate edilen ve edilmeyen olmak üzere iki ana sınıfta toplamıştır. Bu sınıflandırmaya göre Galerkin ve Tau yöntemleri interpolate edilmeyen spektral yöntemler iken sıralama yöntemi interpolate edilen türden yöntemdir. Galerkin ve Tau yöntemlerinin tarihi daha eski dönemlere dayandığından spektral yöntem kavramı öncelikle bu iki yöntem için kullanılmıştır. Günümüzde ise sıralama yönteminin geliştirilmesiyle spektral yöntem kavramının kapsamı sıralama yöntemini de kapsayacak şekilde genişlemiştir (Koç 2014). Bu tez kapsamında, Chebyshev polinomlarını deneme fonksiyonu olarak kullanan sıralama tabanlı spektral yöntem ile çözüm arayacağımızdan, spektral yöntem denilince bu yönteme atıf yaptığımız anlaşılmalıdır.

Literatürde sıralama yöntemine ilişkin ilk izler, Slater (1934), Kantorovich (1934) ve Barta'nın (1937) çalışmalarında görülmektedir. Frazer (1937) farklı deneme fonksiyonları ve keyfi sıralama noktaları ile çözüm ararken, Lanczos (1938) Chebyshev polinomlarını baz aldığı araştırmasında sıralama noktaları olarak Chebyshev polinomlarının köklerini kullanmıştır. Diğer mihenk taşı çalışmalara örnek olarak Lanczos (1957) Kreiss ve Olinger (1972), Gottlieb ve Orszag'ın (1977) çalışmaları verilebilir. Konu ile ilgili ayrıntılı bilgi için Fornberg (1998), Boyd (2000), Trefethen (2000) ile Canuto ve diğ.'nin (2006) eserlerine bakılabilir. Sonraki bölümde, deneme fonksiyonu olarak seçtiğimiz Chebyshev polinomlarını tanıyacağız.

3.1 Chebyshev Polinomları ve Özellikleri

Rus matematikçi Chebyshev (1854) tarafından tanımlanan Chebyshev polinomları, diğer küresel fonksiyonlarda olduğu gibi Sturm-Liouville sınır değer probleminin özel bir durumu olan ve kendi adıyla bilinen

$$(1 - x^2)T_n'' - xT_n' + n^2T_n = 0$$

formundaki adi diferansiyel denklemin çözüm fonksiyonudur. Trigonometrik fonksiyonlar ile polinomları basit bir şekilde birbirine bağlayan sade yapıları, ortogonal olmaları, rekürsif ilişkilerden elde edilebilmeleri, sayısal diferansiyelleme ve sayısal integralin çok hızlı gerçekleşmesi ve bilgisayar programlamalarına yatkın olmaları sebebiyle yaklaşım polinomu olarak kullanılmaya oldukça uygundur.

Polinom interpolasyonlarında maksimum hatayı nasıl minimize ederiz sorusunun cevabı hiç kuşkusuz Chebyshev yöntemidir. Çünkü, Chebyshev yöntemi, yaklaşım yapılan aralıkta hatayı mümkün olduğunca küçük tutacak noktalar seçerek bunlara karşılık gelen interpolasyonları arar. Yaklaşım polinomunun verilen aralıktaki maksimum hatası aynı dereceden diğer yaklaşım polinomlarına göre daha küçüktür. Chebyshev yaklaşımı olarak adlandırılan bu interpolasyonları bulmanın en verimli yolu Chebyshev polinomlarını kullanmaktır. Verilen aralık $[-1,1]$ aralığına uyarlanarak, fonksiyon

$$u(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n T_n(x)$$

şeklinde seriye açılır. Fonksiyonu sonsuz diferansiyellenebilir yapan Chebyshev açılımları sayesinde düzgün (smooth) fonksiyonlar iyi bir şekilde temsil edilebilir. a_n katsayıları, n sonsuza giderken hızlıca sifira yakınsarlar.

Temelde birkaç tip Chebyshev polinomu vardır. Bunlar sırasıyla birinci, ikinci, üçüncü ve dördüncü tip Chebyshev polinomları olmak üzere $T_n(x)$, $U_n(x)$, $V_n(x)$ ve $W_n(x)$ ile gösterilir. Bu polinomların her birinin tanım kümeleri $[-1,1]$ aralığıdır. Kendi aralarındaki hiyerarşide $T_n(x)$ 'in önemli bir yer tuttuğu söyleyebiliriz. Diğer polinomlar önemsiz sayılabilecek komplikasyonlar içerebilir. Ancak, Chebyshev polinomlarının dört çeşidinin de kendilerine özgü rolleri vardır. Örneğin $V_n(x)$ ve $W_n(x) + 1$ veya -1 uç noktalarındaki tekil noktaların elde edilmesi durumunda yararlı olabilirken $U_n(x)$ sayısal integrasyonda yararlıdır (Mason ve Handscomb 2003) Bunlara ek olarak $T_n^*(x)$, $U_n^*(x)$, $V_n^*(x)$, $W_n^*(x)$ ile gösterilen shifted Chebyshev polinomları vardır ki, bunların tanım kümeleri $[0,1]$ aralığıdır. Ayrıca, herhangi bir sonlu aralık bir doğrusal dönüşüm vasıtasıyla başka bir sonlu aralığa dönüştürülebileceğinden, herhangi bir $[a, b]$ aralığında tanımlı polinomda Chebyshev polinomları cinsinden yazılabilir.

Chebyshev polinomlarını sayısal analiz ile ilk buluşturan, polinom yaklaşımı yöntemiyle Lanczos (1938) olmuştur. Yirminci yüzyılın ortalarına gelindiğinde, hesaplamalarda bilgisayarlarında yoğun şekilde kullanılmaya başlamasıyla birlikte Chebyshev polinom ve serilerini kullanan çözüm yöntemlerinde de artış gözlenmiştir. Clenshaw (1957) Lanczos'un metodundan hareketle Chebyshev polinom ve serilerini kullanarak, Lanczos (1957) ise "seçilmiş noktalar" adını verdiği bir yöntemle, adi diferansiyel denklem çözümleri üzerine çalışmıştır. Clenshaw'ın yöntemi daha sonra Sezer (1989) tarafından sınır koşullu problemler için geliştirilmiştir. Clenshaw ve Curtis (1960) ise sayısal integrasyonda Chebyshev polinomlarının nasıl kullanılabileceğini göstermiştir.

Chebyshev yöntemlerinin kısmi diferansiyel denklem çözümlerinde yer bulması ise altmışlı yıllardadır. Elliot (1961) doğrusal sınır koşulları altında ısı denkleminin çözümünü Chebyshev serileri cinsinden vermiştir. Kısmi diferansiyel denklemlerin çözümleri için; Cooley ve Tukey (1965) FFT (Fast Fourier Transform) metodunu, Finlayson ve Scriven (1966) ağırlıklı kalanlar metodunu geliştirmiştir. El-Gendi (1969) doğrusal adi diferansiyel, integral ve integro diferansiyel denklemlerin Chebyshev polinomlarıyla matris çözümleri için yeni metodlar geliştirmiştir. Kreiss ve Olinger (1972), Gottlieb ve Orszag (1977) spektral ve pseudo-spektral metotlarla günümüze ışık tutan çalışmalar yapmıştır. Trefethen (2000), Fornberg (1996) Chebyshev polinomlarına dayalı spektral metotlar üzerine çalışmıştır. Diğer yandan, Sezer ve Kaynak (1996) doğrusal diferansiyel denklemler için Chebyshev matris yöntemini ortaya koymuşlar, Akyüz ve Sezer (1999) doğrusal integro-diferansiyel denklemler için, Daşcıoğlu (2000) doğrusal integro-diferansiyel denklem sistemleri için, Akyüz ve Sezer (2003) yüksek mertebeden değişken katsayılı diferansiyel denklem sistemleri için, Akyüz-Daşcıoğlu ve Sezer (2005) yüksek mertebeden doğrusal Fredholm-Volterra integro-diferansiyel denklemleri için, Akyüz-Daşcıoğlu (2008) karışık koşullar altında yüksek mertebeden kısmi diferansiyel denklemler için, Sezer ve diğ. (2011) yüksek mertebeden doğrusal diferansiyel denklemler için yeni yaklaşımlar ortaya koymuştur.

Piessens (2000) integral denklemler için, Elbarbary ve El Kady (2003) sınır değer problemleri için, Khalifa ve diğ. (2003) ikinci ve dördüncü mertebeli eliptik denklemler için, Muite (2010) dördüncü mertebeli yarı doğrusal başlangıç sınır değer

problemleri için Chebyshev polinomlarını kullanmıştır. Dehghan ve Shokri (2008) farklı doğrusal kısmi diferansiyel denklemlerin sayısal çözümleri için Chebyshev-Tau gibi yeni Chebyshev polinom yaklaşımları uygulamaktadır. Ramos ve Rubio (2009), Runge-Kutta ile Chebyshev geri rekürsif diferansiyellenmesi arasındaki ilişkiyi, Skogestad ve Kalisch (2009), Korteweg-de Vries sınır değer probleminin çözümünde sonlu fark ve Chebyshev yönteminin karşılaştırmasını çalışmıştır. Chebyshev polinomları hakkında geniş bilgi Fox ve Parker (1968), Mason ve Handscomb (2003) ve Boyd'un (2000) eserlerinde bulunabilir.

Devam eden bölümde, Chebyshev polinomlarının tanımları ve çözüm yöntemine temel teşkil edecek bazı özellikleri üzerinde duracağız.

3.1.1 Birinci Tip Chebyshev Polinomları

Birinci tip $T_n(x)$ Chebyshev polinomu x 'e göre n . dereceden bir polinomdur ve

$$T_n(x) = \cos n\theta, \quad x = \cos\theta, \quad -1 \leq x \leq 1 \quad (3.1)$$

bağıntısı ile tanımlanır. Burada x 'ler $[-1,1]$ aralığında değer alırken, θ da $[0, \pi]$ aralığında değer alır.

Diğer yandan De Moivre Teoremi kullanılarak yazılabilen,

$$\cos 0\theta = 1,$$

$$\cos 1\theta = \cos \theta,$$

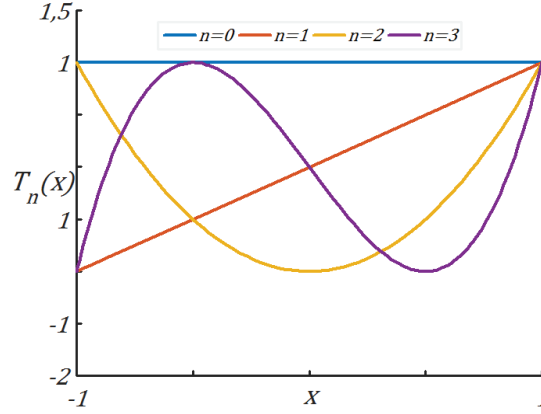
$$\cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1,$$

$$\cos 3\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta,$$

özdeşliklerinde (3.1) ile verilen Chebyshev polinomu tanımı dikkate alınırsa, ilk dört birinci tip Chebyshev polinomu,

$$T_0(x) = 1, T_1(x) = x, T_2(x) = 2x^2 - 1, T_3(x) = 4x^3 - 3x,$$

olarak elde edilebilir.



Şekil 3.1: Birinci tip Chebyshev polinomları

Ayrıca,

$$\cos n\theta + \cos(n-2)\theta = 2 \cos n\theta \cos(n-1)\theta$$

trigonometrik özdeşliği ve Chebyshev polinomu tanımı ile $T_0(x) = 1$, $T_1(x) = x$ başlangıç koşulları birlikte kullanılırsa,

$$T_n(x) = 2xT_{n-1}(x) - T_{n-2}(x), \quad n = 2, 3, \dots$$

şeklindeki temel rekürans bağıntısı elde edilir (Mason ve Handscomb 2003).

3.1.2 İkinci Tip Chebyshev Polinomları

İkinci tip $U_n(x)$ Chebyshev polinomu x 'e göre n . dereceden bir polinomdur ve

$$U_n(x) = \sin(n+1)\theta / \sin\theta, \quad x = \cos\theta, \quad -1 \leq x \leq 1 \quad (3.2)$$

bağıntısı ile tanımlanır. Burada da birinci tip polinomda olduğu gibi x 'ler $[-1,1]$ aralığında değer alırken, θ da $[0, \pi]$ aralığında değer alır.

Diğer yandan,

$$\sin 1\theta = \sin \theta,$$

$$\sin 2\theta = 2\sin \theta \cos \theta,$$

$$\sin 3\theta = \sin \theta (4\cos^2 \theta - 1),$$

$$\sin 4\theta = \sin \theta (8\cos^3 \theta - 4\cos \theta),$$

özdeşliklerinde (3.1) ve (3.2) ile verilen birinci ve ikinci tip Chebyshev polinomu tanımları dikkate alınır, ilk dört birinci tip Chebyshev polinomu,

$$U_0(x) = 1, U_1(x) = 2x, U_2(x) = 4x^2 - 1, U_3(x) = 8x^3 - 4x,$$

olarak elde edilebilir.

Ayrıca

$$\sin(n+1)\theta + \sin(n-1)\theta = 2\cos\theta \sin n\theta$$

trigonometrik özdeşliği ve ikinci tip Chebyshev polinomu tanımı kullanılarak

$$U_n(x) = 2xU_{n-1}(x) - U_{n-2}(x), \quad n = 2, 3, \dots$$

şeklindeki temel rekürans bağıntısı elde edilir.

Öte yandan,

$$\sin(n+1)\theta - \sin(n-1)\theta = 2\sin\theta \cos n\theta$$

trigonometrik özdeşliği ile birinci ve ikinci tip Chebyshev polinomu tanımı kullanılırsa da,

$$U_n(x) - U_{n-2}(x) = 2T_n(x), \quad n = 2, 3, \dots$$

şeklinde birinci ve ikinci tip Chebyshev polinomları arasında bir rekürans bağıntısı olduğu da görülür (Mason ve Handscomb 2003).

3.1.3 Üçüncü ve Dördüncü Chebyshev Polinomları

Üçüncü ve dördüncü tip $V_n(x)$ ve $W_n(x)$ Chebyshev polinomları x 'e göre n . dereceden bir polinomdur ve,

$$V_n(x) = \cos\left(n + \frac{1}{2}\right)\theta / \cos\frac{1}{2}\theta, \quad x = \cos\theta, \quad -1 \leq x \leq 1$$

$$W_n(x) = \sin\left(n + \frac{1}{2}\right)\theta / \sin\frac{1}{2}\theta, \quad x = \cos\theta, \quad -1 \leq x \leq 1$$

bağıntıları ile tanımlanır.

İlk dört üçüncü ve dördüncü tip Chebyshev polinomu,

$$V_0(x) = 1, V_1(x) = 2x - 1, V_2(x) = 4x^2 - 2x - 1,$$

$$V_3(x) = 8x^3 - 4x^2 - 4x + 1, \dots$$

$$W_0(x) = 1, W_1(x) = 2x + 1, W_2(x) = 4x^2 + 2x - 1,$$

$$W_3(x) = 8x^3 + 4x^2 - 4x + 1, \dots$$

olarak verilir.

Ayrıca $V_0(x) = 1, V_1(x) = 2x - 1$ ve $W_0(x) = 1, W_1(x) = 2x + 1$ başlangıç koşulları ile birlikte,

$$V_n(x) = 2xV_{n-1}(x) - V_{n-2}(x), \quad n = 2, 3, \dots$$

$$W_n(x) = 2xW_{n-1}(x) - W_{n-2}(x), \quad n = 2, 3, \dots$$

şeklindeki temel rekürans bağıntıları vardır (Mason ve Handscomb 2003).

3.1.4 Genel $[a, b]$ Aralığı İçin Chebyshev Polinomları

Chebyshev polinomlarının tanım kümesinin $[-1, 1]$ aralığı oluğunu daha önce söylemiştik. $[-1, 1]$ yerine $[a, b]$ aralığında işlem yapmamız gerektiğinde ise,

$$s = \frac{2x - (b + a)}{b - a} \quad (3.3)$$

doğrusal dönüşümü kullanılarak $[-1,1]$ aralığındaki s değişkeni, $[a, b]$ aralığındaki x değişkenine dönüştürülür. Böylece, $-1 \leq s \leq 1$ aralığında tanımlanan birinci tip $T_n(s)$ Chebyshev polinomu kullanılarak, $a \leq x \leq b$ aralığında tanımlanan aşağıdaki Chebyshev polinomu elde edilebilir.

$$T_n^+(x) = T_n(s) = T_n\left(\frac{2x - (a + b)}{b - a}\right)$$

Benzer dönüşümler ikinci, üçüncü ve dördüncü tip Chebyshev polinomları içinde tanımlanabilir.

Diğer yandan, özel olarak $[a, b] = [0,1]$ alınmasıyla (3.3) dönüşümü $s = 2x - 1$ formunu alır. Bu özel durumda Chebyshev polinomları shifted (ötelenmiş) Chebyshev polinomları olarak isimlendirilir ve aşağıda tanımlandığı gibidirler (Mason ve Handscomb 2003).

3.1.5 Shifted (Ötelenmiş) Chebyshev Polinomları

$[0,1]$ aralığında işlem yapmanın $[-1,1]$ aralığında işlem yapmaktan daha uygun olması durumunda,

$$s = 2x - 1 \text{ yada } x = \frac{1}{2}(1 + s)$$

doğrusal dönüşümü kullanılarak $[-1,1]$ aralığındaki s değişkeni, $[0,1]$ aralığındaki x değişkenine dönüştürülür. Böylece, $-1 \leq s \leq 1$ aralığında tanımlanan birinci tip $T_n(s)$ Chebyshev polinomu, $0 \leq x \leq 1$ aralığında tanımlanan $T_n^*(x)$ Shifted Chebyshev polinomuna dönüşmüş olur.

$$T_n^*(x) = T_n(s) = T_n(2x - 1)$$

Birinci tip shifted Chebyshev polinomlarından ilk dördü,

$$T_0^*(x) = 1, T_1^*(x) = 2x - 1, T_2^*(x) = 8x^2 - 8x + 1,$$

$$T_3^*(x) = 32x^3 - 48x^2 + 18x - 1$$

şeklinde verilir.

$T_n^*(x)$ için rekürans bağıntısı da $T_0^*(x) = 1$, $T_1^*(x) = 2x - 1$ başlangıç koşulları ile birlikte,

$$T_n^*(x) = 2(2x - 2)T_{n-1}^*(x) - T_{n-2}^*(x)$$

biçimindedir. $U_n^*(x)$, $V_n^*(x)$, $W_n^*(x)$ ile gösterilen ikinci, üçüncü ve dördüncü tip shifted Chebyshev polinomlarında benzer şekilde, $U_n^*(x) = U_n(2x - 1)$, $V_n^*(x) = V_n(2x - 1)$, $W_n^*(x) = W_n(2x - 1)$ şeklinde tanımlanabilir (Mason ve Handscomb 2003).

3.1.6 Chebyshev Polinomlarının Ekstremum ve Sıralama Noktaları

Derecesi $n > 0$ olan her dört tip Chebyshev polinomunun da $[-1,1]$ aralığında, n tane sıfır, $n + 1$ tane de lokal ekstremum noktası vardır. Şimdi bunları inceleyelim.

Birinci tip Chebyshev polinomu $T_n(x)$ 'e dikkat edelim. (3.1) ile verilen tanımları gereği $T_n(x)$ 'in $[-1,1]$ aralığındaki x sıfırları, $\cos n\theta$ 'nın $[0, \pi]$ aralığında θ sıfırlarına karşılık gelmelidir. Bu sebeple, önce,

$$n\theta = \left(k - \frac{1}{2}\right)\pi, \quad k = 1, 2, \dots, n$$

olmalıdır ve buradan hareketle $T_n(x)$ 'in sıfırları,

$$x_k = \cos \frac{\left(k - \frac{1}{2}\right)\pi}{n}, \quad k = 1, 2, \dots, n$$

olarak elde edilir.

Diğer yandan,

$$\frac{d}{dx}T_n(x) = \frac{d}{dx}\cos(n\theta) = \frac{n\sin(n\theta)}{\sin\theta}$$

olduğundan, $\sin(n\theta)$ 'nın sıfırları $T_n(x)$ 'in ekstremum noktaları olarak karşımıza çıkar. Bu sebeple θ ,

$$n\theta = k\pi, \quad k = 1, 2, \dots, n$$

olacak şekilde seçilirse, $T_n(x)$ 'in $[-1, 1]$ aralığında ki $x = \pm 1$ 'i içeren ekstremum noktaları:

$$x_k = \cos \frac{k\pi}{n}, \quad k = 0, 1, \dots, n$$

olur. Her bir $T_n(x)$ fonksiyonu bu $n + 1$ noktada eşit maksimum veya minimum değere sahiptir ve x_0 ve x_n uç noktalarında ± 1 uç değerlerini alır.

$$x_k = \cos \frac{k\pi}{n}, \quad k = 0, 1, \dots, n$$

ile verilen x_k ekstremum noktalarını Chebyshev sıralama noktaları olarak seçmek uygundur.

Ekstremum noktalarını $x_0 = -1$ ve $x_n = +1$ olacak şekilde,

$$x_k = \cos \frac{(n-k)\pi}{n}, \quad k = 0, 1, \dots, n$$

olarak da alabiliriz.

Ayrıca, problemin genel $[a, b]$ aralığında tanımlanması durumunda (3.3) ile verilen doğrusal dönüşüm kullanılarak sıralama noktaları,

$$\frac{1}{2} \left\{ (b+a) + (b-a) \cos \frac{(n-k)\pi}{n} \right\}, \quad k = 0, 1, \dots, n$$

veya diğer bir ifadeyle,

$$\frac{1}{2} \left\{ (b+a) - (b-a) \cos \frac{k\pi}{n} \right\}, \quad k = 0, 1, \dots, n \quad (3.4)$$

olarak verilebilir (Mason ve Handscomb 2003).

3.1.7 Chebyshev Polinomlarının Ortogonalliği

Birinci tip Chebyshev polinomları $[-1, 1]$ aralığında

$$\int_{-1}^1 T_i(x) T_j(x) \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ \pi, & i = j = 0 \\ \frac{\pi}{2}, & i = j \neq 0 \end{cases}$$

olduğundan $1/\sqrt{1-x^2}$ ağırlık fonksiyonuna göre ortogondirler.

Benzer şekilde ikinci, üçüncü ve dördüncü tip Chebyshev polinomları da sırasıyla $\sqrt{1-x^2}$, $\sqrt{1+x}/\sqrt{1-x}$ ve $\sqrt{1-x}/\sqrt{1+x}$ ağırlık fonksiyonlarına göre ortogondirler (Mason ve Handscomb 2003).

3.1.8 Chebyshev Serileri

Bir $u(x)$ fonksiyonu $-1 \leq x \leq 1$ aralığında sürekli ve sınırlı salınımlı ise aralık boyunca düzgün yakınsayan ve

$$u(x) = \frac{1}{2} a_0 + a_1 T_1(x) + a_2 T_2(x) + \dots = \sum_{j=0}^{\infty} 'a_j T_j(x) \quad (3.5)$$

şeklinde verilen düzgün yakınsak bir seri açılımı vardır. Bu seri tek değişkenli Chebyshev serisi, a_j katsayıları da Chebyshev katsayıları olarak adlandırılır. Bu katsayılar

$$a_j = \frac{2}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{u(x) T_j(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

veya

$$a_j = \frac{2}{\pi} \int_{-1}^{\pi} u(\cos\theta) \cos n\theta d\theta, \quad j = 0, 1, 2, \dots$$

formülleri yardımıyla hesaplanabilir (Mason 1967).

(3.5) Chebyshev seri açılımı $u(\cos\theta)$ fonksiyonunun Fourier cosinüs serisidir. Dolayısıyla yakınsama koşulları, Fourier serisinin yakınsaklık koşullarından türetilebilir. Diğer yandan Chebyshev seri açılımı, genel Fourier serisinden farklı olarak periyodik olma özelliğine sahiptir. Bu sebeple, periyodik olmayan fonksiyonların benzer açılımlarına göre daha hızlı yakınsarlar. Ayrıca, periyodik olmayan fonksiyonların süreksizlikleri, Fourier serisinin Chebyshev formu ile ortadan kaldırılabilir (Clenshaw 1962, Akyüz-Daşcıoğlu 2000)

Her sonlu aralık bir doğrusal dönüşüm vasıtasıyla başka bir sonlu aralığa dönüşebileceğinden $u(x)$ fonksiyonu $-1 \leq x \leq 1$ veya $a \leq x \leq b$ aralığında sürekli ve sınırlı salınımlı olması durumunda da

$$u(x) = \sum_{j=0}^{\infty} 'a_j^* T_j^*(x) \quad (3.6)$$

şeklinde düzgün yakınsak bir seriye açılabilir.

$u(x)$ için faydalı bir polinom yaklaşımı sonsuz Chebyshev serisi kesilerek bulunabilir. Kesilmiş

$$u(x) = \sum_{j=0}^N ''a_j T_j(x)$$

serisi için a_j Chebyshev katsayılarını hesaplamakta kullanılan formül Clenshaw ve Curtis (1960) tarafından toplamın ortogonallik özelliği kullanılarak

$$a_j = \frac{2}{N} \sum_{n=0}^N ''T_j(x_n) u(x_n), \quad x_n = \cos \frac{\pi n}{N}$$

şeklinde verilmiştir. Buradaki \sum'' sembolü toplamdaki ilk ve son terimlerin yarısının alınacağı anlamına gelmektedir.

3.2 Çözüm Yöntemi

Çalışmamızın bu kısmında, Khater ve diğ. (2008) ile Thirumalai ve Seshadri (2018) tarafından Burgers denkleminin sayısal çözümü için Chebyshev spektral sıralama yöntemi üzerine çalışan iki farklı makale incelenecektir.

Literatürde Burgers denklemi için birçok çözüm prosedürü mevcut olmasına rağmen, bunları çoğu tarafından çok küçük bir viskozite katsayıları için şok dalgalarının gözlenmesinde yetersiz kaldıkları görülmüştür. Her iki çalışmada, Chebyshev spektral sıralama yöntemi ile en az sayıda sıralama noktası kullanarak küçük viskozite katsayıları için daha doğru ve hesaplama açısından verimli sonuçlar üretmek ve dahası şok oluşumlarını yakalamak amaçlanmıştır.

Öncelikle, her iki çalışmada önerilen çözüm yöntemleri tanıtılacak, sonrasında ise yöntemler test problemlerinden elde edilen sonuçlar, literatürdeki mevcut analitik ve sayısal sonuçlar ile karşılaştırılarak, yöntemin verimliliği ve çözümlerin davranışı grafik çizimlerinde desteğiyle analiz edilmeye çalışılacaktır.

3.2.1 Khater ve Diğ.'nin Yöntemi

Bu bölümde Burgers denkleminin sayısal çözümü için Khater ve diğ. (2008) tarafından önerilen Chebyshev spektral sıralama çözüm yöntemi incelenecektir.

$D = \{x : a < x < b\}$ çözüm bölgesi; δD bölgenin sınırı; α ile $\nu > 0$ keyfi sabitler olmak üzere

$$u_t + \alpha u u_x = \nu u_{xx}, \quad (x, t) \in D \times [0, T] \quad (3.7)$$

$$u(x, 0) = f(x), \quad x \in D \quad (3.8)$$

$$u(x, t) = g(t), \quad (x, t) \in \delta D \times [0, T] \quad (3.9)$$

problemini ele alalım.

Problemin yaklaşık çözümü, birinci türden ve j . mertebeden Chebyshev polinomu

$$T_j^+(x_n) = T_j(2x_n - (b+a)/(b-a))$$

ve sıralama noktaları

$$x_n = \frac{1}{2} \left((a+b) - (b-a) \cos\left(\frac{\pi n}{N}\right) \right), \quad n = 0, 1, \dots, N \quad (3.10)$$

olmak üzere

$$u(x, t) = \sum_{j=0}^N a_j T_j^+(x) \quad (3.11)$$

kesilmiş Chebyshev serisi formundadır. Buradaki a_j katsayıları,

$$\sum_{n=0}^N T_i^+(x_n) T_j^+(x_n) = \beta_i \delta_{ij}, \quad \beta_i = \begin{cases} N/2, & i \neq 0, N, \\ N, & i = 0, N. \end{cases}$$

ayrık ortogonallik bağıntısı kullanarak (3.11)'den aşağıdaki gibi,

$$a_j = \frac{2}{N} \sum_{n=0}^N T_j^+(x_n) u(x_n, t) \quad (3.12)$$

şeklinde bulunur.

$u_x(x, t)$ ve $u_{xx}(x, t)$ türevleri ise, (3.10) sıralama noktalarında, (3.11) seri açılımı ve (3.12) Chebyshev katsayıları kullanılarak hesaplanabilir. $u_x(x, t)$ seri açılımı,

$$u_x(x_i, t) = \sum_{j=0}^N a_j T_j^{+'}(x_i) = \sum_{n=0}^N \left(\frac{2}{N} \sum_{j=0}^N T_j^{+'}(x_i) T_j^+(x_n) \right) u(x_n, t)$$

$$u_x(x_i, t) = \sum_{n=0}^N [A_x]_{in} u(x_n, t) \quad (3.13)$$

formundadır. Burada $[A_x]_{in}$ matrisinin elemanları,

$$[A_x]_{in} = \frac{2c_n}{N} \sum_{j=0}^N T_j^{+'}(x_i) T_j^+(x_n), \quad i, n = 0, 1, \dots, N$$

$$c_0 = c_N = 1/2 \text{ ve } c_n = 1, \quad n = 1, 2, \dots, N - 1$$

ile tanımlanır. $T_j^{+'}(x_i)$ türev teriminin elemanları da aşağıdaki şekilde hesaplanabilir.

$$T_j^{+'}(x_n) = 2j\lambda \sum_{n=0, n+j \text{ tek}}^N c_n T_n^+(x_i)$$

$$\lambda = 2/(b - a), c_0 = c_n = 1/2 \text{ ve } c_n = 1, \quad n = 1, 2, \dots, N - 1$$

Benzer şekilde $u_{xx}(x, t)$ ikinci türev yaklaşımı,

$$u_{xx}(x, t) = \sum_{n=0}^N [A_x]_{in} u_x(x_n, t) = \sum_{j=0}^N \left(\sum_{n=0}^N [A_x]_{in} [A_x]_{nj} \right) u(x_j, t)$$

$$u_{xx}(x, t) = \sum_{j=0}^N [B_x]_{ij} u(x_j, t) \quad (3.14)$$

şeklindedir. Burada $B_x = A_x^2$ 'dir ve B_x 'in elemanları,

$$[B_x]_{ij} = \sum_{n=0}^N [A_x]_{in} [A_x]_{nj}, \quad i, j = 0, 1, \dots, N$$

ile tanımlanır.

x_n noktasında $u(x, t)$ ve $u_t(x, t)$ değerlerini sırasıyla $u_n(t)$ ve $\dot{u}_n(t)$ ile gösterirsek, (3.9) sınır koşullarını kullanarak aşağıdaki ifadeleri yazabiliriz.

$$d_i(t) = [A_x]_{i0} u_0(t) + [A_x]_{iN} u_N(t)$$

$$\bar{d}_i(t) = [B_x]_{i0} u_0(t) + [B_x]_{iN} u_N(t)$$

olmak üzere (3.13) ve (3.14) ifadelerini aşağıdaki şekilde revize edebiliriz.

$$u_x(x_i, t) = d_i(t) + \sum_{n=1}^{N-1} [A_x]_{in} u_n(t) \quad (3.15)$$

$$u_{xx}(x_i, t) = \bar{d}_i(t) + \sum_{n=1}^{N-1} [B_x]_{in} u_n(t) \quad (3.16)$$

(3.15) ve (3.16) ile verilen türev ifadelerini ((3.7) ile verilen Burgers denkleminde yerine yazarsak (3.8) başlangıç koşulu ile birlikte,

$$\begin{aligned} \dot{u}_t(t) + \alpha u_i(t) \sum_{n=1}^{N-1} [A_x]_{in} u_n(t) - v \sum_{n=1}^{N-1} [B_x]_{in} u_n(t) + \alpha u_i(t) d_i(t) \\ - v \bar{d}_i(t) = 0 \end{aligned} \quad (3.17)$$

$$u_i(0) = f(x_i)$$

elde edilir. (3.17) sistemi

$$u(t) = [u_1(t), u_2(t), \dots, u_{N-1}(t)]^T$$

$$\dot{u}(t) = [\dot{u}_1(t), \dot{u}_2(t), \dots, \dot{u}_{N-1}(t)]^T$$

$$u_0 = [u_1(0), u_2(0), \dots, u_{N-1}(0)]^T$$

$$F(t, u(t)) = [F_1(t, u(t)), F_2(t, u(t)), \dots, F_{N-1}(t, u(t))]^T$$

ve

$$F_i(t, u(t)) = -\alpha u_i(t) \sum_{n=1}^{N-1} [A_x]_{in} u_n(t) + v \sum_{n=1}^{N-1} [B_x]_{in} u_n(t) - \alpha u_i(t) d_i(t) + v \bar{d}_i(t)$$

olmak üzere aşağıdaki (3.19) formunda yazılabilir.

$$\dot{u}(t) = F(t, u(t)) \quad (3.8)$$

$$u(0) = u_0$$

Burada (3.18) ile zamana bağlı türev içeren adi diferansiyel denklem sistemi elde edilir. Bu nedenle, çözüm zaman değişkeni içinde aranır. Böyle bir denklem sistemi için, açık bir yöntem olup oldukça yüksek doğrulukta sonuçlar veren dördüncü mertebeden Runge-Kutta metodunu kullanabiliriz.

$$u^{(1)} = u(t_n) + \frac{1}{2} F(t_n, u(t_n))$$

$$u^{(2)} = u(t_n) + \frac{1}{2}F(t_{n+\Delta t/2}, u^{(1)})$$

$$u^{(3)} = u(t_n) + F(t_{n+\Delta t/2}, u^{(2)})$$

$$u(t_{n+1}) = u(t_n) + \frac{\Delta t}{6} [F(t_n, u(t_n)) + 2F(t_{n+\Delta t/2}, u^{(1)}) + 2F(t_{n+\Delta t/2}, u^{(2)}) + F(t_{n+\Delta t}, u^{(3)})]$$

3.2.2 Thirumalai ve Seshadri Yöntemi

Thirumalai ve Seshadri (2018) tarafından önerilen yöntem ise şu şekildedir:

$T_n^+(x) = T_n((2x - (b - a)/(b + a))$ ötelenmiş Chebyshev polinomu olmak üzere, (3.7) ile verilen Burgers denkleminin spektral çözümü şu şekilde yazılabilir:

$$u(x, t) \approx u^N(x, t) = \sum_{n=0}^N a_n(t) T_n^+(x) \quad (3.19)$$

Mevcut yöntemin özü, rezidü fonksiyonunu elde etmemiz ve onu belirli sıralama noktalarında sıfıra gitmeye zorlamamızdır. Bunun için, (3.19) ile verilen spektral çözümün (3.7) ile verilen Burgers denkleminde yerine yazılmasıyla,

$$R(x, t) = u_t^N + \alpha u^N u_x^N - \nu u_{xx}^N$$

elde edilir. Buradanda, (3.10) ile tanımlanan sıralama noktaları için rezidü fonksiyonu aşağıdaki sisteme ulaşılır.

$$R(x_i, t) = u_t^N(x_i, t) + \alpha u^N(x_i, t) u_x^N(x_i, t) - \nu u_{xx}^N(x_i, t) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, N - 1$$

Bu sistemde,

$$D = \begin{bmatrix} T_0^+(x_0) & T_1^+(x_0) & \dots & T_n^+(x_0) \\ T_0^+(x_1) & T_1^+(x_1) & \dots & T_n^+(x_1) \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ T_0^+(x_n) & T_1^+(x_n) & \dots & T_n^+(x_n) \end{bmatrix}, \quad D' = \begin{bmatrix} T_0^{+'}(x_0) & T_1^{+'}(x_0) & \dots & T_n^{+'}(x_0) \\ T_0^{+'}(x_1) & T_1^{+'}(x_1) & \dots & T_n^{+'}(x_1) \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ T_0^{+'}(x_n) & T_1^{+'}(x_n) & \dots & T_n^{+'}(x_n) \end{bmatrix}$$

$$D'' = \begin{bmatrix} T_0^{+''}(x_0) & T_1^{+''}(x_0) & \dots & T_n^{+''}(x_0) \\ T_0^{+''}(x_1) & T_1^{+''}(x_1) & \dots & T_n^{+''}(x_1) \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ T_0^{+''}(x_n) & T_1^{+''}(x_n) & \dots & T_n^{+''}(x_n) \end{bmatrix},$$

$(DA)_i$, DA vektörünün i . bileşeni olmak üzere,

$$T = \begin{bmatrix} (DA)_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & (DA)_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & & (DA)_n \end{bmatrix}, \quad A' = \begin{bmatrix} a'_o(t) \\ a'_1(t) \\ \vdots \\ a'_n(t) \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} a_o(t) \\ a_1(t) \\ \vdots \\ a_n(t) \end{bmatrix}$$

olduğu göz önüne alınırsa,

$$DA' = (-TD' + D'')A \quad (3.20)$$

şeklinde birinci dereceden doğrusal olmayan adi diferansiyel denklem sistemine ulaşılır. Ancak burada, söz konusu makalede (3.20) denkleminin

$$DA' = (-\alpha TD' + \nu D'')A$$

şeklinde yazılması gerektiğini düşünüyoruz.

Başlangıç koşulları ise; $A_0, t = 0$ ve $u_0 = (u(x_1, t_0), u(x_2, t_0), \dots, u(x_n, t_0))$

'da A vektörü olmak üzere,

$$DA_0 = u_0$$

şeklinde. (3.20) sistemi söz konusu başlangıç koşulu altında bir önceki bölümdekine benzer şekilde, dördüncü dereceden Runge-Kutta yöntemi ile çözülebilir.

Bu noktada, spektral sıralama yönteminin kararlılığı ve yakınsamasının daha önce çeşitli yazarlar tarafından çalışıldığı belirtilmelidir. Kararlılık analizinin detayları burada tartışılmamıştır. Bu çalışmanın odağı, daha önceki çalışmalara nazaran daha az sıralama noktası ve hesaplama çabası ile birçok başlangıç ve sınır koşulu altında Burgers denklemini incelemektir.

3.2.3 Sayısal Sonuçlar

Bu bölümde, sunulan iki Chebyshev spektral sıralama (CSSY) yöntemini de farklı test problemlerine uygulayacağız. Yöntemin verimliliğini, problemin tam

çözümleri ile yaklaşık çözümleri karşılaştırarak bulmak için, n_{ip} iç nokta sayısı, \bar{u}_i ve u_i , u çözümünün i noktasındaki tam ve sayısal değerleri olmak üzere

$$\|E\|_{\infty} = \max_{0 < i < n_{ip}} |u_i - \bar{u}_i|$$

$$\|E\| = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n_{ip}} (u_i - \bar{u}_i)^2}{\sum_{i=1}^{n_{ip}} (\bar{u}_i)^2}}$$

sırasıyla maksimum mutlak hata ve bağıl hata normları hesaplanacak, elde edilen sonuçları literatürdeki mevcut sonuçlarla karşılaştırılacaktır. Kesin sonuçların mümkün olmadığı noktalarda hata, ardışık iki değer farkına dayanarak hesaplanmıştır.

İlk iki problemin sayısal sonuçları her iki yöntemle de ayrı ayrı hesaplanmış, diğer problemlerde sadece Thirumalai ve Seshadri (2018)'in yöntemi uygulanmıştır.

Thirumalai ve Seshadri (2018) tarafından önerilen yöntemde, birinci problem hariç diğer tüm problemlerde sınır koşullarını yerine getirmek için kabul edilen spektral çözüm,

$$u^N(x, t) = x(1-x) \sum_{n=0}^{N-2} a_n(t) T_n^+(x)$$

formundadır. Birinci problem için önerilen spektral çözüm ise,

$$u^N(x, t) = \sum_{n=0}^N a_n(t) T_n^+(x)$$

şeklini alır.

Problem 1

$$u_t + \alpha u u_x = \nu u_{xx}, \quad (x, t) \in D \times [0, T]$$

şeklinde verilen bir boyutlu Burgers denklemini, α ile $\nu > 0$ keyfi sabitler olmak üzere $D = \{x : a < x < b\}$ bölgesinde ele alalım. Problemin gezinen dalga formundaki çözümü,

$$u(x, t) = c/\alpha + (2\nu/\alpha)\tanh(x - ct)$$

şeklindedir. Her iki yöntem ile de başlangıç ve sınır koşulları tam çözümden alınarak elde edilen sayısal sonuçlar aşağıdaki gibidir.

Tablo 3.1 Khater ve diğ. (2008) tarafından, $N = 10$, $c = 0.1$, $\Delta t = 0.01$, $a = 0$ ve $b = 1$ olmak üzere çeşitli ν ve α değerleri için elde edilen hata normlarını göstermektedir.

Tablo 3.1: Problem 1, Khater ve diğ. (2008)

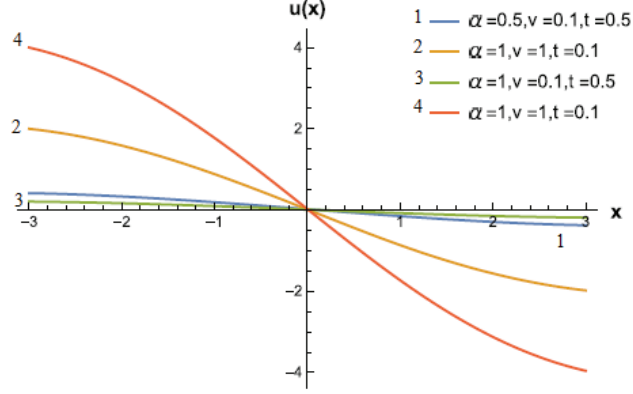
α	t	$\ E\ _{\infty}$			$\ E\ $		
		$\nu=0.01$	$\nu=0.001$	$\nu=0.0001$	$\nu=0.01$	$\nu=0.001$	$\nu=0.0001$
1	0.1	3.06, -5	3.06, -7	2.24, -8	2.08, -4	2.37, -6	1.31, -7
	0.2	6.11, -5	6.18, -7	5.22, -8	4.07, -4	4.69, -6	3.60, -7
	0.25	7.62, -5	7.82, -7	8.94, -8	5.04, -4	5.85, -6	4.31, -7
0.1	0.1	3.06, -4	3.10, -6	7.15, -7	2.08, -4	2.32, -6	3.68, -7
	0.2	6.11, -4	6.32, -6	1.31, -6	4.06, -4	4.70, -6	6.99, -7
	0.25	7.62, -4	7.99, -6	1.67, -6	5.04, -4	5.88, -6	8.88, -7

Tablo 3.2, Thirumalai ve Seshadri (2018) tarafından spektral sıralama metodunu kullanarak, $t = 0.1, 0.2, 0.25$ anlarında çeşitli α ve ν viskozite değerleri ve $c = 0.1$ için hesaplanan $\|E\|_{\infty}$ hatasını vermektedir.

Tablo 3.2: Problem 1, Thirumalai ve Seshadri (2018)

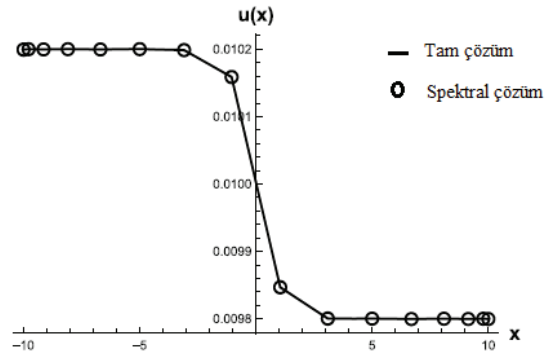
α	t	$\nu = 0.1$	$\nu = 0.01$	$\nu = 0.001$
1	0.1	1.494, -9	1.369, -11	6.501, -13
	0.2	6.490, -9	4.528, -11	2.128, -12
	0.25	1.116, -8	7.084, -11	3.320, -12
0.1	0.1	1.494, -8	1.369, -10	3.480, -12
	0.2	6.490, -8	4.528, -10	2.128, -11
	0.25	1.116, -7	7.084, -10	3.320, -11

Şekil 3.2, Thirumalai ve Seshadri (2018) tarafından $c = 0.01$ dalga hızı ile dört farklı α , ν t ve kombinasyonları için $[-3,3]$ aralığında elde edilen spektral çözümleri göstermektedir.



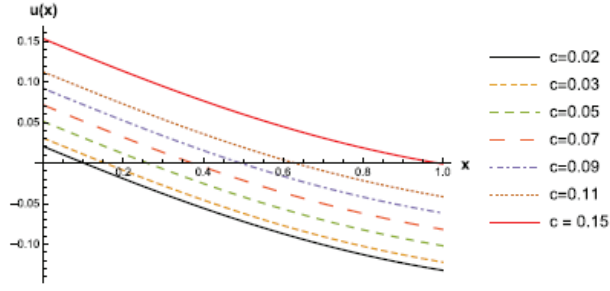
Şekil 3.2: Problem 1, $c = 0.01$ için spektral çözüm

Tam çözüm ile $\nu = 0.0001$, $c = 0.01$, $\alpha = 1$ ve $t = 3$ değerleri için Thirumalai ve Seshadri (2018) tarafından bulunan spektral çözümlerin $[-10, 10]$ aralığındaki karşılaştırılması Şekil 3.3'de yer almaktadır. Sayısal sonuçların, tam çözüm ile uyum içinde olduğu gözlenmektedir.



Şekil 3.3: Problem 1, sayısal sonuçların tam çözümle karşılaştırılması

Şekil 3.4 ise $[0, 1]$ domeninde $\alpha = 1$, $t = 0.1$ ve $\nu = 0.1$ için farklı c değerleri için gezinen dalga çözümünün davranışı yer almaktadır.



Şekil 3.4: Problem 1, farklı dalga hızlarında çözümün davranışı

Problem 2

$$u_t + \alpha u u_x = \nu u_{xx}, \quad 0 \leq x \leq 1, \quad t > 0$$

$$u(x, 0) = 4x(1 - x), \quad 0 \leq x \leq 1$$

$$u(0, t) = u(1, t) = 0, \quad t > 0$$

problemini ele alalım. Problemin Hopf-Cole dönüşümü ile elde edilen analitik çözümü,

$$a_0 = \int_0^1 \exp[-x^2(3\nu)^{-1}(3 - 2x)] dx,$$

$$a_n = 2 \int_0^1 \exp[-x^2(3\nu)^{-1}(3 - 2x)] \cos(n\pi x) dx, \quad n = 1, 2, \dots$$

olmak üzere

$$u(x, t) = 2\pi\nu \frac{\sum_{n=1}^{\infty} a_n \exp(-n^2\pi^2\nu t) n \sin(n\pi x)}{a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \exp(-n^2\pi^2\nu t) \cos(n\pi x)}$$

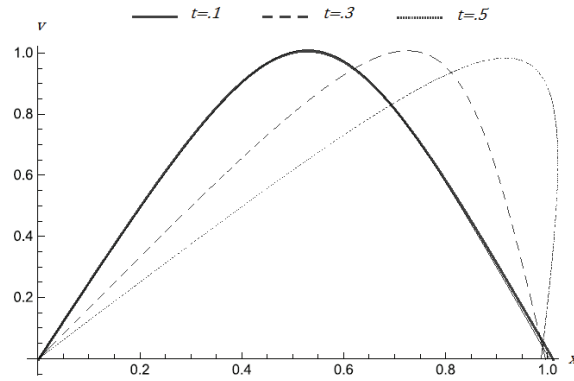
şeklindedir. Tablo 3.3’de, Khater ve diğ. (2008)’nin yöntemi ile $N = 15$ olmak üzere $\nu = 0.1$ için $\Delta t = 0.001$ ve $\nu = 1.0$ için $\Delta t = 0.0001$ için elde edilen sonuçlar, Galerkin ikinci dereceden B-spline sonlu elemanlar yöntemiyle $N = 80$ olmak üzere $\nu = 1.0$, $\nu = 0.1$ ve $\Delta t = 0.00001$ için elde edilen sonuçlar ve analitik çözüm ile karşılaştırılmıştır. Spektral yöntem ile elde edilen sonuçların analitik çözümden

edilen sonuçlar ile çok iyi bir uyum içinde olduğu görülmektedir. Yöntem, Galerkin ikinci dereceli B-spline sonlu elemanlar metoduna göre daha kısa bir sürede görece daha iyi sonuçlar üretmiştir.

Tablo 3.3: Problem 2, $\nu = 0.1$ için sayısal sonuçların karşılaştırılması

x	$\nu = 0.1$				$\nu = 1.0$			
	t	Öziş ve diğ. (2005)	CSSY	Analitik Çözüm	t	Öziş ve diğ. (2005)	CSSY	Analitik Çözüm
0.25	0.40	0.31760	0.31752	0.31752	0.10	0.26149	0.26148	0.26148
	0.60	0.26148	0.24614	0.24614	0.15	0.16149	0.16148	0.16148
	0.80	0.19959	0.19956	0.19956	0.20	0.09948	0.09947	0.09947
	1.00	0.16562	0.16560	0.16560	0.25	0.06109	0.06108	0.06108
	3.00	0.02776	0.02776	0.02775				
0.75	0.40	0.64558	0.64561	0.64562	0.10	0.28159	0.28157	0.28157
	0.60	0.50269	0.50268	0.50268	0.15	0.16976	0.16974	0.16974
	0.80	0.38536	0.38534	0.38534	0.20	0.10267	0.10266	0.10266
	1.00	0.29589	0.29586	0.29586	0.25	0.06230	0.06229	0.06229
	3.00	0.03044	0.03044	0.03044				

Şekil 3.5’de $N = 15$, $\nu = 0.01$ ve $\Delta t = 0.001$ olmak üzere $t = 0.1$, $t = 0.3$ ve $t = 0.5$ anlarındaki sayısal sonuçların grafiği gösterilmiştir.



Şekil 3.5: Problem 2, $\nu = 0.01$ için spektral çözüm

Aynı problemi, Thirumalai ve Seshadri (2018) yöntemi ile ele aldığımızda ise, $N = 10$ için elde edilen sonuçlar 10^{-3} mertebeden doğruluk göstermiştir. $N = 15$ 'e yükseltildiğinde ise spektral çözüm şu ana kadar yapılan çeşitli literatür çalışmalarına kıyasla daha hassas sonuçlar elde etmiştir. $\nu = 1$ ve $N = 15$ için elde

edilen sonuçlar, diğer mevcut sonuçlar ve tam çözümler ile birlikte Tablo 3.4’de verilmiştir.

Tablo 3.4: Problem 2, $\nu = 1$ için sayısal sonuçların karşılaştırılması

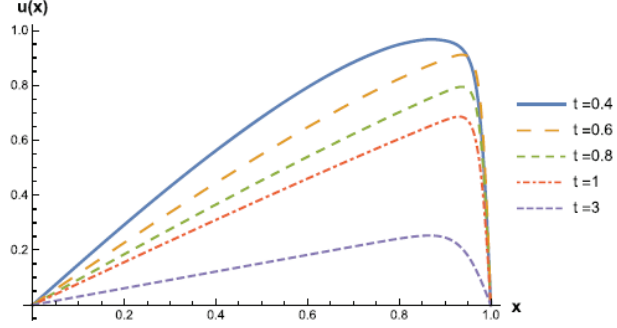
x	t	Asaithambi (2010) $N = 40$ $\delta T = 10^{-5}$	Kutluay (1999) $N = 80$ $\delta T = 10^{-4}$	CSSY $N = 15,$ $\delta T = 10^{-4}$	Analitik Çözüm
0.25	0.01	0.66008	0.66007	0.66007	0.66006
	0.05	0.42631	0.42629	0.42629	0.42629
	0.1	0.26151	0.26149	0.26148	0.26148
	0.15	0.16158	0.16148	0.16148	0.16148
	0.25	0.06111	0.06109	0.06109	0.06109
0.50	0.01	0.91973	0.91972	0.91972	0.91972
	0.05	0.62812	0.62809	0.62808	0.62808
	0.1	0.38347	0.38343	0.38342	0.38342
	0.15	0.23410	0.23406	0.23406	0.23406
	0.25	0.08726	0.08724	0.08723	0.08723
0.75	0.01	0.68367	0.68364	0.68364	0.68364
	0.05	0.62812	0.62809	0.62808	0.62808
	0.1	0.38347	0.38343	0.38342	0.38342
	0.15	0.23410	0.23406	0.23406	0.23406
	0.25	0.08726	0.08724	0.08723	0.08723

Tablo 3.3 ve 3.4 spektral çözümün kesin çözümlerle daha iyi bir uyum içinde olduğunu göstermektedir. Tablo 3.5, farklı zaman ve noktalarda $\nu = 0.1$ ve $\nu = 0.005$ değerleri için elde edilen spektral çözümler, Jiwari (2015) tarafından bulunan sayısal sonuçlar ve tam çözüm ile karşılaştırma imkânı vermektedir.

Tablo 3.5: Problem 2, $\nu = 0.1, 0.005$ için sayısal sonuçların karşılaştırılması

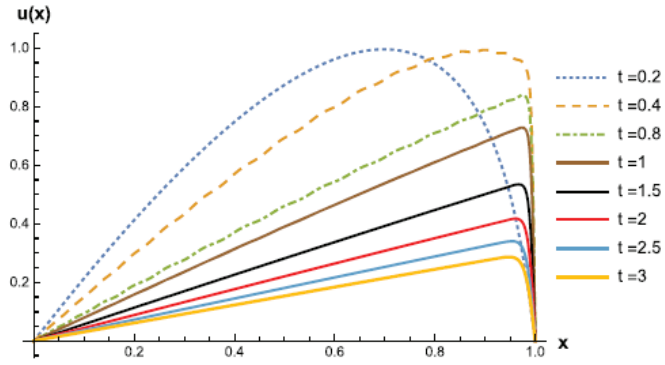
x	t	$\nu = 0.01$			$\nu = 0.005$		
		Jiwari (2015)	CSSY	Analitik Çözüm	Jiwari (2015)	CSSY	Analitik Çözüm
0.8	0.4	0.59125	0.59136	0.59135	0.95917	0.95906	0.95849
	0.6	0.45732	0.45739	0.45739	0.83035	0.83027	0.83015
	0.8	0.34555	0.34559	0.34559	0.70656	0.70646	0.70612
	1.0	0.26151	0.26154	0.26153	0.60826	0.60820	0.60826
	0.6	0.45732	0.45739	0.45739	0.83035	0.83027	0.83015
0.9	0.4	0.36528	0.36546	0.36546	0.98311	0.98263	0.98234
	0.6	0.27811	0.27823	0.27823	0.90421	0.90385	0.90398
	0.8	0.20449	0.20456	0.20455	0.78246	0.78209	0.78348
	1.0	0.15094	0.15097	0.15097	0.67810	0.67785	0.67615
	3.0	0.01352	0.01353	0.01352	0.24334	0.27292	0.27291

Şekil 3.6 ve Şekil 3.7, $\nu = 0.01$ ve $\nu = 0.003$ değerlerinde farklı zamanlarda ki spektral çözüm sonuçlarını göstermektedir.

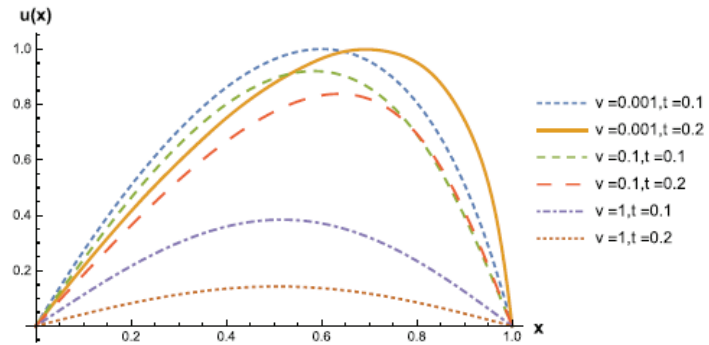


Şekil 3.6: Problem 2, $\nu = 0.01$ için spektral çözüm

Şekil 3.7 farklı zaman seviyesi ve kinematik viskozite kombinasyonları için yayılma cephesini göstermektedir.



Şekil 3.7: Problem 2, $\nu = 0.003$ için spektral çözüm



Şekil 3.8: Problem 2, farklı ν ve t değerleri için spektral çözüm

Şekil 3.6, 3.7 ve 3.8, yayılma cephesinin küçük viskozite değerleri için yayılarak dikleştiğini göstermektedir.

Problem 3

$\alpha = 1$ Olmak üzere (3.7) Burgers denklemi, sinüsoidal başlangıç ve homojen sınır koşulları altında,

$$u_t + uu_x = \nu u_{xx}$$

$$u(x, 0) = \sin(\pi x)$$

$$u(0, t) = u(1, t) = 0$$

ile verilsin. Problemin tam çözümü,

$$a_0 = \int_0^1 e^{\frac{-(1-\cos(\pi x))}{2\pi\nu}} dx, \quad a_n = 2 \int_0^1 e^{\frac{-(1-\cos(\pi x))}{2\pi\nu}} dx,$$

olmak üzere,

$$u(x, t) = 2\pi\nu \frac{\sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\nu\pi^2 n^2 t} n \sin(\pi n x)}{a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\nu\pi^2 n^2 t} \cos(\pi n x)}$$

Literatürde $\sin(\pi x)$ başlangıç koşulu birçok araştırmacı tarafından değerlendirilmiştir. Bunun yanında, spektral yöntem ile en az sıralama noktası için zarif ve etkili bir çözüm sunulmuştur. Probleme ilişkin farklı ν viskozite katsayıları ve zaman adımlarındaki, tam çözümler ve literatürde bulunan bazı sayısal sonuçlar ile Thirumalai ve Seshadri (2018) yöntemi ile elde edilen sayısal sonuçlar ile Tablo 3.6 ve Tablo 3.7’de karşılaştırılmıştır. Tablo 3.6’da spektral çözümden elde edilen sonuçlar, Bahadır (1999) ve Bahadır ve Sağlam (2005) tarafından elde edilen sonuçlara göre daha yüksek doğruluk gösteren Dehghan (2013) ve Ashpazzadeh (2017) tarafından elde edilen sonuçlar ile karşılaştırılmıştır.

Tablo 3.6: Problem 3, $\nu = 1$ için sayısal sonuçların karşılaştırması

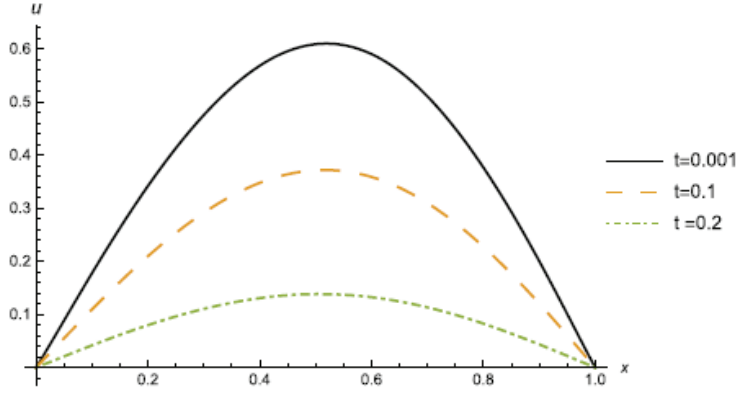
t	x	Dehghan (2013)	Ashpazzadeh (2017)	CSSY	Analitik Çözüm
0.05	0.1	0.17788	0.17795	0.17803	0.17803
	0.3	0.47555	0.47570	0.47587	0.47587
	0.5	0.60969	0.60902	0.60907	0.60907
	0.7	0.51105	0.51123	0.51113	0.51113
	0.9	0.19990	0.19997	0.19989	0.19989
0.1	0.1	0.10946	0.10952	0.10954	0.10954
	0.3	0.29167	0.29185	0.29190	0.29190
	0.5	0.37169	0.37153	0.37158	0.37158
	0.7	0.30966	0.30987	0.30991	0.30991
	0.9	0.12059	0.12067	0.12069	0.12069
0.2	0.1	0.04187	0.04193	0.04193	0.04193
	0.3	0.11046	0.11061	0.11062	0.11062
	0.5	0.13828	0.13844	0.13847	0.13847
	0.7	0.11328	0.11343	0.11347	0.11347
	0.9	0.04361	0.04367	0.04369	0.04369

Tablo 3.7’de Problem 3 için $\nu = 0.1$ ve $\nu = 0.005$ değerlerinde az sayıda sıralama noktası kullanarak elde edilen sonuçların tam çözümlerle uyum içinde olduğu gözlenmektedir.

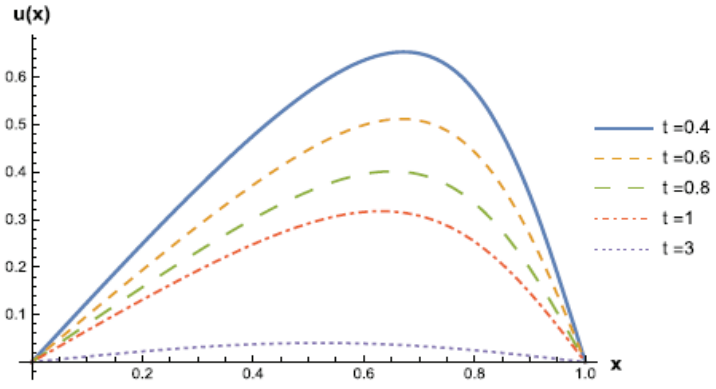
Tablo 3.7: Problem 3, $\nu = 0.1, 0.005$ için sayısal sonuçların karşılaştırması

x	t	$\nu = 0.1$			$\nu = 0.005$		
		Jiwari (2015)	CSSY	Analitik Çözüm	Jiwari (2015)	CSSY	Analitik Çözüm
0.80	0.4	0.57115	0.57127	0.57126	0.95294	0.95285	0.95230
	0.6	0.44193	0.44226	0.44226	0.81583	0.81572	0.81411
	0.8	0.33464	0.33468	0.33468	0.69093	0.69082	0.69095
	1.0	0.25369	0.25372	0.25371	0.59406	0.59403	0.59409
	3.0	0.02492	0.02492	0.02491	0.24051	0.24050	0.24050
0.90	0.4	0.35077	0.35095	0.35095	0.97884	0.97832	0.97814
	0.6	0.26769	0.26780	0.26780	0.89406	0.89369	0.89395
	0.8	0.19733	0.19739	0.19739	0.76854	0.76816	0.76814
	1.0	0.14603	0.14607	0.14606	0.66435	0.66411	0.66405
	3.0	0.01323	0.01323	0.01323	0.26945	0.26901	0.26901

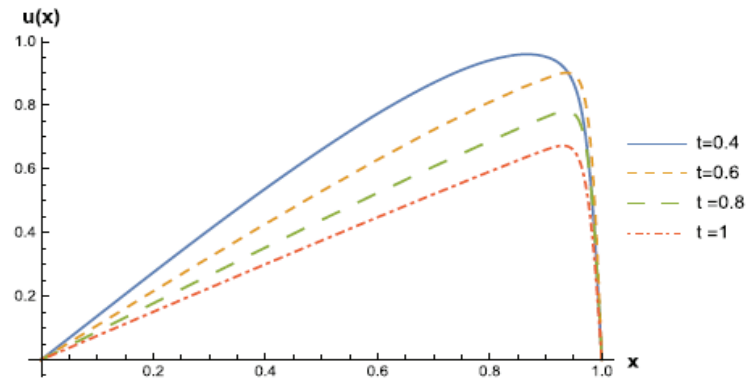
Hem Tablo 3.6 hem de Tablo 3.7 spektral yöntemin, literatürdeki diğer yöntemlere göre daha başarılı olduğunu ortaya koymaktadır. Şekil 3.9, 3.10, 3.11, 3.12 sırasıyla farklı t zaman adımları ve ν kinematik viskozite değerleri için sinüzoidal bozulmayı göstermektedir.



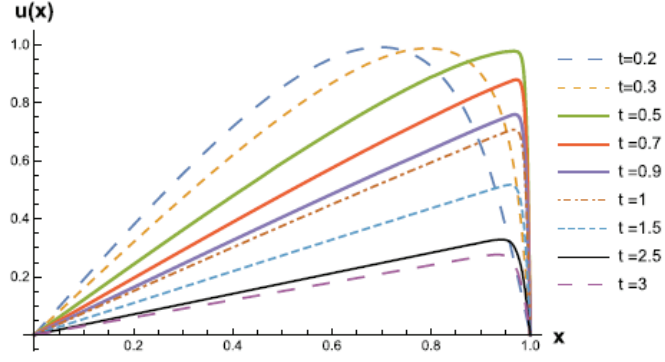
Şekil 3.9: Problem 3, $\nu = 1$ için spektral çözüm



Şekil 3.10: Problem 3, $\nu = 0.1$ için spektral çözüm

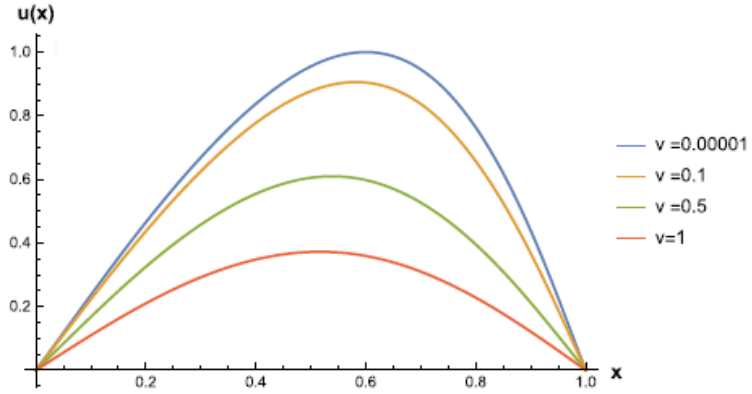


Şekil 3.11: Problem 3, $\nu = 0.01$ için spektral çözüm



Şekil 3.12: Problem 3, $\nu = 0.004$ için spektral çözüm

Şekil 3.13, spektral çözümün fiziksel davranışını $t = 0.01$ adımında kinematik viskozite ν 'nin farklı değerlerinde göstermektedir.



Şekil 3.13: Problem 3, $t = 0.1$ için spektral çözüm

Şekil 3.9, 3.10, 3.11, 3.12 ve 3.13, sinüzoidal bozulmanın artan zaman seviyesindeki küçük kinematik viskozite değerleri için giderek daha da dikleştiğini göstermektedir.

Problem 4

$$u_t + uu_x = \nu u_{xx}, \quad 0 \leq x \leq 1$$

$$u(x, 0) = 2\pi\nu \frac{\sin(\pi x)}{a_0 + \cos(\pi x)}$$

$$u(0, t) = u(1, t) = 0$$

problemini ele alalım. Problemin kompakt-kapalı formdaki çözümü,

$$u(x, t) = 2\pi\nu \frac{e^{-\nu\pi^2 t} \sin(\pi x)}{a_0 + e^{-\nu\pi^2 t} \cos(\pi x)}, \quad a_0 > 1$$

şeklindedir. Çeşitli a_0 , t ve ν parametrelerinin kombinasyonları için Problem 4'den spektral yöntem ile elde edilen $\|E\|_\infty$ maksimum mutlak hata normları Tablo 3.8 ve 3.9'da gösterilmiştir.

Tablo 3.8, spektral yöntem ile $a_0 = 2$ için elde edilen $\|E\|_\infty$ normları ile Jiwari (2015) tarafından bulunan $\|E\|_\infty$ hata normlarını karşılaştırma imkânı vermektedir. Jiwari (2015) tarafından $N = 32$ için elde edilen doğruluk seviyesi, spektral yöntem ile $N < 15$ için elde edilebilmiştir.

Tablo 3.8: Problem 4, farklı ν ve t değerleri için mutlak hata

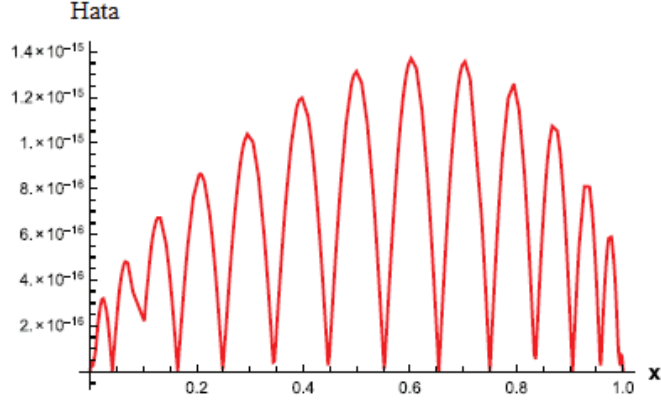
t	ν	Jiwari (2015)	CSSY $N = 15$
0.1	1.0	7.357, -4	1.591, -8
	0.1	3.558, -6	4.747, -8
	1, -4	1.104, -10	7.606, -12
	1, -5	3.045, -12	7.941, -14
0.5	1.0	5.639, -5	2.701, -10
	0.1	7.345, -6	6.046, -9
	1, -4	1.408, -10	3.164, -11
	1, -5	8.745, -12	3.895, -13

Tablo 3.9, $a_0 = 100$, $\nu = 0.005$ ve $t = 1$ için parametreleri için Problem 4'ten elde edilen $\|E\|_\infty$ hata normlarını gösterir ve ayrıca bu sonuçlar, Guo (2016) ve Pandit (2017) tarafından elde edilen sonuçlarla karşılaştırılır.

Tablo 3.9: Problem 4, maksimum mutlak hata

N	Pandit (2017)	Guo (2016)	CSSY
8	2.402, -9	–	1.734, -10
10	–	2.010, -9	3.510, -12
16	2.164, -9	–	6.729, -18
20	–	7.071, -11	1.897, -19

Şekil 3.14'de $\nu = 0.001$, $a_0 = 50$ ve $t = 1$ için L_∞ sonsuz normunun grafiği yer almaktadır.



Şekil 3.14: Problem 4, maksimum mutlak hata

Problem 5

$$u_t + uu_x = \nu u_{xx}, \quad 0 \leq x \leq 1.2$$

denkleminin,

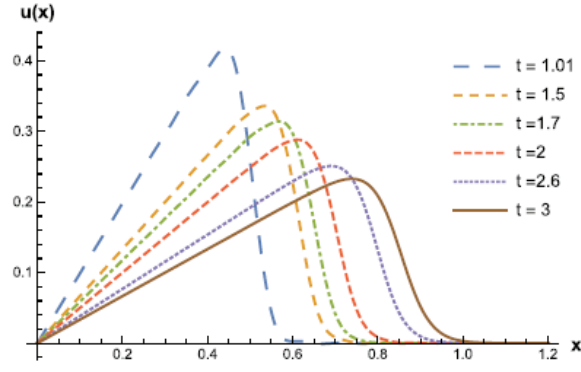
$$u(x, 1) = \frac{x}{1 + \exp\left(\frac{x^2}{4\nu}\right) \sqrt{\frac{1}{t_0}}}$$

$$u(0, t) = u(1.2, t) = 0$$

başlangıç ve sınır koşulları koşulları altında, $t_0 = \exp\left(\frac{1}{8\nu}\right)$ olmak üzere sok dalgaları formunda verilen analitik çözümü,

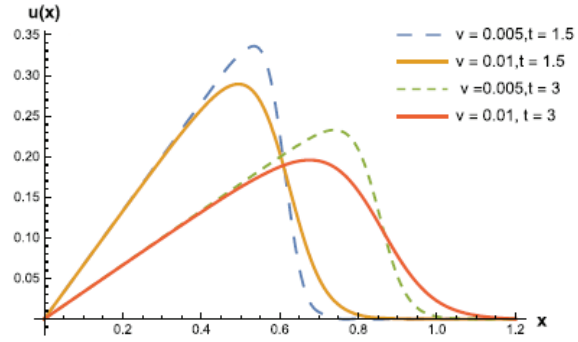
$$u(x, t) = \frac{\frac{x}{t}}{1 + \sqrt{\frac{t}{t_0}} \exp\left(\frac{x^2}{4\nu t}\right)}$$

şeklindedir. Problem, bir kutudaki türbülansın azalması olayını modellemektedir. Başlangıç şartı, analitik çözüm için oldukça kullanışlıdır. Kinematik viskozite katsayısının $\nu = 0.005$ değeri için şok dalgalarının yayılması Şekil 3.15’de gösterilmektedir. Şekil 3.15 ve 3.16’da görüldüğü gibi, dalgalar zamanla sağa yöne doğru yayılmakta ancak kinematik viskozite değeri ν azaldıkça giderek daha keskin hale gelmektedir.



Şekil 3.15: Problem 5, $\nu = 0.005$ için şok dalgası

Farklı zaman adımlarında kinematik viskozitenin $\nu = 0.005$ ve $\nu = 0.01$ değerleri için şok dalgalarının yayılması ise Şekil 3.16'da gösterilmiştir.



Şekil 3.16: Problem 5, farklı ν ve t kombinasyonları için şok dalgası

Şekil 3.15 ve 3.16'da görüldüğü gibi, dalgalar zamanla sağa yöne doğru yayılmakta ancak kinematik viskozite değeri ν azaldıkça giderek daha keskin hale gelmektedir.

Problem 6

$$u_t + uu_x = \nu u_{xx}, \quad 0 \leq x \leq 1$$

denklemini, homojen sınır koşulları,

$$u(0, t) = u(1, t) = 0$$

ve

$$u(x,0) = \sin(\pi x) \cos(\pi x)$$

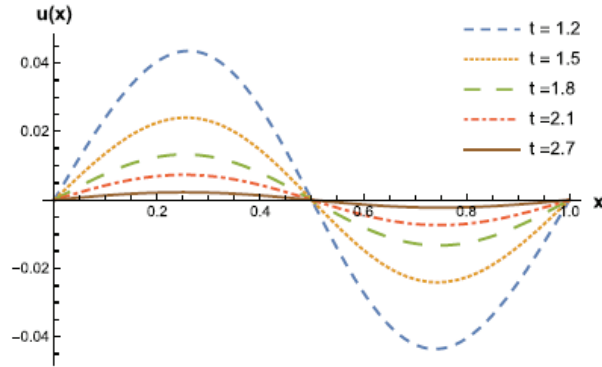
başlangıç koşulu ile alalım.

Söz konusu problemin üstünde literatürde ilk olarak Thirumalai ve Seshadri (2018) tarafından çalışmıştır. Kinematik viskozitenin $\nu = 0.1$ değeri için farklı zaman adımları ve noktadaki spektral çözümler Tablo 3.10’da görülmektedir.

Tablo 3.10: Problem 6, $\nu = 0.1$ için spektral çözüm

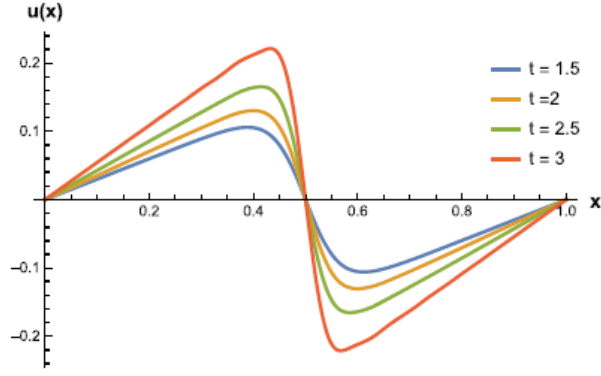
x	t	CSS
0.2	0.1	0.3031880
	0.3	0.1381240
	0.5	0.0637368
	0.7	0.0291927
	1.0	0.0089791
0.6	0.1	-0.2222040
	0.3	-0.0967058
	0.5	-0.041838
	0.7	-0.0185466
	1.0	-0.0055958

Şekil 3.17 ve 3.18, $\nu = 1$ ve $\nu = 0.005$ için farklı zaman adımlarında spektral çözümlerin davranışını göstermektedir.



Şekil 3.17: Problem 6, $\nu = 1$ için spektral çözüm

Yayıma cephesinin kinematik viskozite ν azaldıkça ve zaman adımı ilerledikçe sönümlendiği, iki şekilde de görülmektedir. Ayrıca, Şekil 3.17 ve 3.18 karşılaştırıldığında, küçük viskozite değerleri için dalga yapılarının dikleştiği söylenebilir.



Şekil 3.18: Problem 6, $\nu = 0.005$ için spektral çözüm

Problem 7

$$u_t + uu_x = \nu u_{xx}, \quad 0 \leq x \leq 1$$

denklemini,

$$u(0, t) = u(1, t) = 0$$

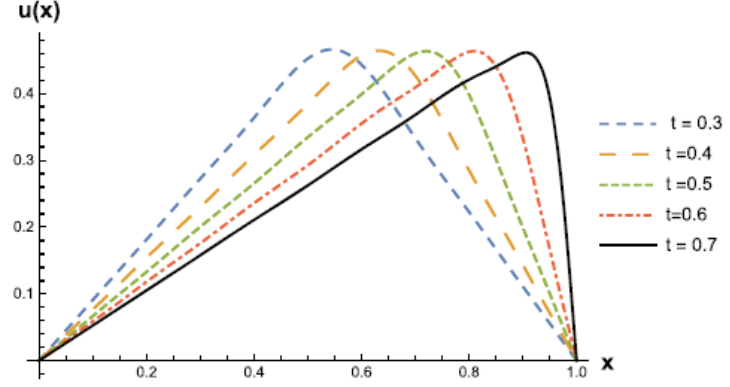
$$u(x, 0) = \begin{cases} x, & x < 0.5 \\ 1 - x, & x \geq 0.5 \end{cases}$$

Buda, literatürde ilk olarak Thirumalai ve Seshadri (2018) tarafından çalışılan bir problemdir. $\nu = 0.1$ parametresi ile farklı x ve t adımları için spektral çözümler Tablo 3.11'de gösterilmiştir.

Tablo 3.11: Problem 7, $\nu = 0.1$ için spektral çözüm

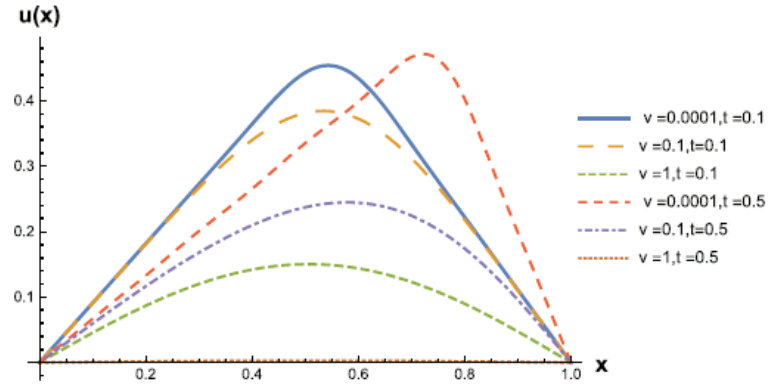
x	t	CSS
0.25	0.001	0.24970
	0.01	0.24736
	0.1	0.22497
	1.0	0.08890
0.50	0.001	0.46520
	0.01	0.45323
	0.1	0.38120
	1.0	0.14311
0.75	0.001	0.25019
	0.01	0.25227
	0.1	0.26786
	1.0	0.11779

Şekil 3.19, farklı zaman adımlarında $\nu = 0.005$ için spektral çözüm davranışını göstermektedir. Sabit ve büyük ν viskozite katsayısının sebebi olduğu difüzyon etkisiyle dalganın yayılımı grafikte görülmektedir.



Şekil 3.19: Problem 7, $\nu = 0.005$ için spektral çözüm

Problem 7 için farklı ν kinematik viskozite değerleri ve t zaman adımlarının kombinasyonları, Şekil 3.20'de verilmiştir.



Şekil 3.20: Problem 7, farklı ν ve t kombinasyonları için spektral çözüm

Aynı zaman adımlarında küçük viskozite değerleri için dalga boylarının yükseldiği ve cephelerinin dikleştiği Şekil 3.20'de açıkça görülmektedir.

4. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu çalışmada, Khater ve diğ. (2008) ile Thirumalai ve Seshadri (2018) tarafından iki farklı çalışmada sunulan, bir boyutlu Burgers denkleminin Chebyshev spektral sıralama yöntemi ile sayısal çözümünü incelemektedir.

Her iki yöntemde, öncelikle doğrusal olmayan bir kısmi türevli diferansiyel denklem olan Burgers denkleminin konumsal türevli adi diferansiyel denklem sistemine indirgenmesi, sonrasında ise elde edilen sistemin tür problemlerde oldukça iyi sonuçlar veren dördüncü mertebeden Runge-Kutta yöntemi ile çözülmesi esasına dayanmaktadır.

Yöntemler yedi farklı test problemine uygulanmış, elde edilen sayısal sonuçlar, literatürdeki mevcut tam ve sayısal çözümler ile karşılaştırılmıştır. Bunun neticesinde;

Chebyshev spektral sıralama yönteminin, literatürdeki diğer mevcut birçok yöntemle kıyasla hesaplamada daha az sıralama noktasında ve daha kısa bir sürede daha iyi hassasiyet sağladığı; yöntemin, literatürdeki mevcut sayısal yöntemlerin çoğu tarafından yakalanamayan daha küçük kinematik viskozite değerleri için çözüm davranışını ölçmede başarılı olduğu; sonuçların, salt sayısal değerleri için değil; akışkanlar mekaniği, plazma fiziği, alan teorisi, katı hal fiziği ve mühendislik bilimindeki fiziksel değeri için de faydalı olduğu; dahası, yöntemin geniş bir doğrusal olmayan kısmi türevli diferansiyel denklem sınıfı için de geçerli olduğu, sonuçlarını çıkarmak mümkündür.

Bununla birlikte, diğer metotlarda olduğu gibi, yöntemin Runge-Kutta yönteminde bazı parametre değerlerinin birleşimi için kararsızlığa bağlı olarak zorluğa neden olabilecek birleştirilmiş doğrusal olmayan birinci dereceden denklem sistemi üretmesi anlamında bazı dezavantajları vardır. Ayrıca, N 'nin çok büyük değerleri için, mevcut yöntemin yakınsaması daha uzun zaman alır.

Burgers denklemi için önerilen sayısal yöntemlerin doğruluk ölçüsü gerçekçi fiziksel sonuçlar vermesine bağlıdır ve büyük Reynolds sayıları için veya başlangıç

koşullarının düzgün olmaması ya da ayırık konumlarda geçerli olması durumlarında çözüm günümüzde hala önemini korumaktadır.

5. KAYNAKLAR

Aksan, E. N., Özdeş, A., “A numerical solution of Burgers’ equation”, *Appl. Math. Comput.*, 156, (2), 395-402, (2004).

Abd-el-Malek, M. B., El-Mansi, S. M. A., “Group theoretic methods applied to Burgers’ equation”, *J. Comp. Appl. Math.*, 115, (1-2), 1-12, (2000).

Abdou, M. A., Soliman, A. A., “Variational iteration method for solving Burgers’ and coupled Burgers’ equation”, *J. Comput. Appl. Math.*, 181, (2), 245-251, (2005).

Akyüz, A., Sezer, M., “A Chebyshev Collocation Method for the Solution of Linear Integro-Differential Equations”, *Intern. J. Computer Math.*, 72, (4), 491-507, (1999).

Akyüz, A., Sezer, M., “Chebyshev polynomial solutions of systems of highorder linear differential equations with variable coefficients”, *Appl. Math. Comput.*, 144, (2-3), 237-247, (2003).

Akyüz-Daşcıoğlu, A., “Chebyshev Polynomial Approximation for High-Order Partial Differential Equations with Complicated Conditions”, *Num. Meth. for Part.Diff. Equ.*, 25, (3), 610-621, (2008).

Akyüz-Daşcıoğlu, A., “Doğrusal İntegrodiferansiyel Denklem Sistemlerinin Chebyshev Sıralama Yöntemi ile Yaklaşık Çözümleri”, Doktora Tezi, *Dokuz Eylül Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı*, İzmir, (2000).

Ali, A. H. A., Gardner, L. R. T., Gardner, G. A., “A Galerkin approach to the solution of Burgers’ equation”, UCNW maths PRE-print, 90, 4, (1990).

Altıparmak K., “Numerical solution of Burgers’ equation with factorized diagonal Pade approximation”, *Int. J. Numer.*, 21, (3), 310-319, (2011).

Ames, W. F., *Nonlinear partial differential equations in engineering*, New York: Academic Press, (1965).

Ames, W.F., Nucci, M.C., “Analysis of fluid equations by group methods”, *Journal of Engineering Maths.*, 20, (2), 181-187, (1986).

Asaithambi, A., “Numerical solution of the Burgers’ equation by automatic differentiation”, *Appl. Math. Comput.*, 216, (9), 2700-2708, (2010).

Ashpazzadeh, E., Han, B., Lakestani, M., “Biorthogonal multiwavelets on the interval for numerical solutions of Burgers’ equation”, *J. Comput. Appl. Math.* 317, 510–534, (2017).

Aslan, İ., “Lineer Olmayan Kısmi Diferansiyel Denklemlerin Benzerlik Çözümleri Üzerine”, Doktora Tezi, *Ege Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı*, İzmir, 62-66, (2007).

Ay, B., Dağ, İ., Görgülü, M.Z., “Trigonometric quadratic B-spline subdomain Galerkin algorithm for the Burgers’ equation”, *Open Physics*, 13, (1), 400–406, (2015).

Bahadır, A. R., Sağlam, M., “A mixed finite difference and boundary element approach to one-dimensional Burgers’ equation”, *Appl. Math. Comput.*, 160, (3), 663-673, (2005).

Barta, J., “Über die Näherungsweise Lösung einiger Zweidimensionaler Elastizitätsaufgaben”, *Z. Angew. Math. Mech.*, 17, 184-185, (1937).

Bateman, H., "Some recent researches on the motion of fluids", *Mon. Weather Rev.*, 43, 163-170, (1915).

Benton, E. R., Platzman, G. W., “A table of solutions of the one dimensional Burgers’ equations”, *Quart. Appl. Math.*, 30, 195-212, (1972).

Blackstock, D. T., “Connection between the Fay and Fubini solutions for plane sound waves of finite amplitude”, *J. Acoust. Soc. Am.*, 39, (6), 1019-1026, (1966).

Blackstock, D. T., “Thermoviscous attenuation of plane, periodic, finite-amplitude sound waves”, *J. Acoust. Soc. Amer.*, 36, (3), 534-542, (1964).

Boyd J. P., *Chebyshev and Fourier Spectral Methods*, New York: Dover Publications, (2000).

Bulut, H., Başkonuş, H. M., Pandır, Y., “The modified trial equation method for fractional wave equation and time fractional generalized Burgers equation”, *Abstract Appl. Anal.*, 8, (2013).

Burgers, J. M, “A mathematical model illustrating the theory of turbulence”, (eds: Mises R. V., Karman. T. V.), *Adv. Appl. Mech.* New York: Academic Press, 1, 171-199, (1948).

Burgers, J. M, “A Model for one-dimensional compressible turbulence with two sets of characteristics”, *Proc. R. Neth. Acad. Arts Sci.*, 58, 1-18, (1955).

Burgers, J. M, “Application of a model system to illustrate some points of the statistical theory of free turbulence”, *Proc. R. Neth. Acad. Arts Sci.*, 43, (1), 2-12, (1940).

Burgers, J. M, “Correlation problems in a one-dimensional model of turbulence”, *Proc. R. Neth. Acad. Arts Sci.*, 53, (2,3,4,6), (1950).

Burgers, J. M, “Functions and integrals connected with solution of the diffusion or heat flow Equation”, *Tech. Note BN-398, The Institute for Fluid Dynamics and Applied Mathematics, University of Maryland*, 96, (1965).

Burgers, J. M, “Statistical problems connected with the solution of a nonlinear partial differential equation”, (ed: Ames, W. F), *Nonlinear problems of engineering*, New York: Academic Press, 123-137, (1964).

Burgers, J. M, “Statistical problems connected with the solution of a simple non-linear partial differential equation”, *Proc. R. Neth. Acad. Arts Sci.*, 57, 45-72, 159-169, 403-43, (1954).

Burgers, J. M, “The formation of vortex sheets in a simplified type of turbulent motion”, *Proc. R. Neth. Acad. Arts Sci.*, 53, (2), 122-133, (1950).

Burgers, J. M, *The Nonlinear Diffusion Equation*, Boston: Reidel Publishing Company, 88, (1974).

Burgers, J. M., “Mathematical examples illustrating relations occurring in the theory of turbulent fluid motion”, *Proc. R. Neth. Acad. Arts Sci.*, 17, (2), 1-53, (1939).

Caldwell, J., Wanless, P., Cook, A. E., “A finite element approach to Burgers equation”, *Appl. Math. Modelling*, 5, 189-193, (1981).

Canuto C., Hussaini M. Y., Quarteroni A., Zang T. A., *Spectral Methods: Fundamentals in Single Domain*, Berlin: Springer, (2006).

Case, K. M., Chiu, C. S., “Burgers turbulence models”, *Phys.Fluids*, 12, 1799-1808, (1969).

Cebeci, T., Rshao J., Kafyeke, J.F., Laurendeau, E., *Computational Fluid Dynamics for Engineers*, Germany: Horizons Publishing, 97, (2005).

Cecchi, M. M., Nociforo, R., Grego, P.P., “Space-time finite elements numerical solution of Burgers’ problems”, *Le Matematiche LI*, 1, 43–57, (1996).

Chebyshev, P. L., “Theorie des Mécanismes Connus Sous le Nom de Parallelogrammes”, *Memories Presentes Academie Imperiale des Science de St-Petersbourg*, 7, 539-568, (1854).

Christie, I., Griffiths, D. F., Mitchell, A. R., Sanz-Serna, J. M., “Product approximation for non-linear problems in the FEM”, *J. Num. Anal.*, 1, 253-266, (1981).

Chu, C. W., “A class of reducible systems of quasi-linear partial differential equations”, *Quart. Appl. Math.*, 23, 257-278, (1965).

Clenshaw, C. W., “The numerical solution of linear differential equations in Chebyshev series”, *Proc. Camb. Phil. Soc.*, 53, 134-149, (1957).

Clenshaw, C. W., “Chebyshev Series for Mathematical Functions”, *National Physical Laboratory (Mathematical Tables)*, 5, 1-15, (1962).

Clenshaw, C. W., Curtis, A. R., “A Method for Numerical Integration on an Automatic Computer”, *Numerische Math.*, 2, 197-205, (1960).

Cole, J. D., “On a quasi-linear parabolic equations occuring in aerodynamics”, *Quart. Appl. Math.*, 9, 225-236, (1951).

Cooley, J. W., Tukey, J. W., “An algorithm for the machine calculation of complex Fourier series”, *Math. Comput.*, 19, 297-301, (1965).

Cooper, D. H., “Integrated treatment of tracing and tracking error”, *J. Audio Eng. Soc.*, 12, 2-7 (1964).

Crighton, D. G. and Scott, J.F., “Asymptotic solution of modelequations in nonlinear acoustics”, *Phil. Tarns. Roy. Soc. London*, 292, (1389), 101-13, (1979).

Crighton, D. G., “Model equations of nonlinear acoustics”, *Ann. Rev.Fluid Mech.*, 11, 11-23, (1979).

Dağ, İ., Canıvar, A. and Şahin, A., “Taylor-Galerkin and Taylor-Collocation methods for the numerical solutions of Burgers’ equation using B-spline”, *Communications in Nonlinear Sci. Numer. Simulation*, 16, 2696-2708, (2011).

Dağ, İ., Saka, B., Boz, A. “B-spline Galerkin methods for numerical solution of Burgers equation”, *Appl. Math. Comput.*, 166, 506-522, (2005).

Darvishi, M. T., Javidi, M., “A numerical solution of Burgers’ equation by pseudospectral method and Darvishi’s preconditioning”, 173, (1), 421-424, (2005).

Davies A. J., *The Finite Element Method: An Introduction with Partial Differential Equations*, New York: Oxford University Press, (2011).

Dehghan, M., Saray, B.N., Lakestani, M. “Mixed finite difference and Galerkin methods for solving Burgers’ equations using interpolating scaling functions”, *Math. Methods Appl. Sci.*, 37, 894–912, (2013).

Dehghan, M., Shokri, A., “A numerical method for solving the hyperbolic telegraph equation”, *Numer. Methods Partial Differential Eq.*, 24, 1080–1093, (2008).

Dogan, A., Galerkin, “Finite element approach to Burgers equation”, *Appl. Math. Comput.*, 157, 331–346, (2004).

Doğan, A., “Petrov-Galerkin Finite Element Methods”, Doktora Tezi, *University of Wales School of Mathematics*, Gwynedd, (1997).

Doha, E. H., Bhrawy, A. H., Abdelkawy M. A., Hafez, R. M., “A Jacobi collocation approximation for nonlinear coupled viscous Burgers’ equation”, *Cent. Eur. J. Phys.*, 12, 111-122, (2014).

Elbarbary, E., Kady, M., “Chebyshev Finite Difference Approximation for The Boundary Value Problems”, *Applied Mathematics and Comp.*, 139, 82-3), 513-523, (2003).

El-gendi, S.E., “Chebyshev Solution of Differential, Integral and Integro-differential Equations”, *The Computer Journal*, 12, 282-287, (1969).

Elliot, D., “A Method for the Numerical Integration of the One Dimensional Heat Equation Using Chebyshev Series”, *Proc. Camb. Phil. Soc.*, 57, 823-832, (1961).

Evans, D. J., Abdullah, A. R., “The group explicit method for the solution of Burgers’ equation”, *Computing*, 32, 239-253, (1984).

Fay, R. D., “Plane sound waves of finite amplitude”, *J. Acoust. Soc. Amer.*, 3, 222-241, (1931).

Finlayson, B. A., *The Method of Weighted Residuals and Variational Principles*, New York: Academic Press, (1972).

Finlayson, B. A. and Scriven, L. E., “The Method of Weighted Residuals -A Review”, *Appl. Mech. Rev.*, 19, 735-748, (1966).

Fornberg, B., *A Practical Guide to Pseudospectral Methods*, Cambridge: Cambridge University Press, (1998).

Fox, L., Parker, I. B., *Chebyshev Polynomials in Numerical Analysis*, London: Oxford Uni. Press, 205, (1968).

Frazer, R. A., Jones, W. P., Skan, S. W., “Approximations to Functions and to the Solutions of Differential Equations”, *Reprinted in Great Britain Air Ministry Aero. Res. Comm. Tech. Rep.*, 1, 517-549, (1937).

Fubini-Ghiron, E., “Anomalie nella propagazione di onde acustiche di grande ampiezza”, *Alta Frequenza*, 4, 530-581, (1935).

Goldberg, Z. A., “Finite-amplitude waves in magnetohydrodynamics”, *Soviet Physics JETP*, 15, 179-181, (1962).

Gottlieb, D., Orszag, A. S., *Numerical Analysis of Spectral Methods, Theory and Applications*, Bristol: SIAM, 72, (1977).

Grafke, T., Grauer, R., Schafer, T., “Instanton filtering for the stochastic Burgers’ equation”, *J. Phys. A: Mathematical and Theoretical*, 46, (2013).

Greenshields, B.D. “A Study of Traffic Capacity”, *Highway Research Board*, 14, 448-477, (1935).

Guo, Y., Shi, Y., Li, Y., “A fifth-order finite volume weighted compact scheme for solving one-dimensional Burgers’ equation”, *Appl. Math. Comput.*, 181, 172–185, (2016).

Gülsu, M., Öziş, T., “Numerical solution of Burgers’ equation with restrictive Taylor approximation”, *App. Math. Comp.*, 171, (2), 1192-1200, (2005).

Hargrove, L. E., “Fourier series for the finite amplitude sound waveform in a dissipationless medium”, *J. Acoust. Soc. Amer.*, 32, 511-512, (1960).

Hassanien, I. A., Salama, A. A., Hosham, H. A., “Fourth-order finite difference method for solving Burgers’ equation”, *App. Math. and Comp.*, 170, (2), 781-800, (2005).

Hayes, W. D., *The basic theory of gasdynamic discontinuities, Chapter D in Fundamentals of gas Dynamics*, Emmmons, H. W (ed.), Princeton: Princeton Univ. Press, 416-481, (1958).

Herbst, B. M., Schoombie, S. W., Mitchell, A. R., “A moving Petrov-Galerkin method for transport equations”, *Int. J. Num. Meth. Eng.*, 18, 1321-1336, (1982).

Hon, Y. C., Mao, X. Z., “An efficient numerical scheme for Burgers’ equation”, *Appl. Math. Comput.*, 95, 37-50, (1998).

Hopf, E., “The partial differential equation $u_t + uu_x = \nu u_{xx}$ ”, *Comm. Pure Appl. Math.*, 9, 201-230, (1950).

Irk, D., “Sextic B-spline collocation method for the modified Burgers’ equation”, *Kybernetes*, 38, 1599-1620, (2009).

Inan, B. and Bahadır, A. R., “A numerical solution of the Burgers’ equation using a Crank-Nicolson exponential finite difference method”, *J. Math. Comput. Sci.*, 4, 849-860, (2014).

Jiang, Z., Wang, R., “An improved numerical solution of Burgers’ equation by cubic B-spline Quasi-interpolation”, *J. Inf. Comput. Sci.*, 7, (5), 1013–1021, (2010).

Jiwari, R., Mittal, R. C., Sharma, K.K., “A numerical scheme based on weighted average differential quadrature method for the numerical solution of Burgers’ equation”, *Appl. Math. Comp.*, 219, 6680-6691, (2013).

Jiwari, R. “A Haar wavelet quasilinearization approach for numerical simulation of Burgers’ equation”, *Comput. Phys. Commun.*, 183, 2413–2423, (2012).

Jiwari, R. “A hybrid numerical scheme for the numerical solution of the Burgers’ equation”, *Comput. Phys. Commun.*, 188, 59–67, (2015).

Kadalbajoo, M. K., Sharma, K. K., Awasthi, A., “A parameter-uniform implicit difference scheme for solving time-dependent Burgers’ equation”, *Appl. Math. Comput.*, 170, (2), 1365-1393, (2005).

Kakuda, K., Tosaka, N., “The generalized boundary element approach to Burgers’ equation”, *Int. J. Num. Methods Eng.*, 29, 245-261, (1990).

Kantorovich L. V., “On a new method of approximate solution of partial differential equation”, *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 2, 532-536, (1934).

Keck, W., Beyer, R. T., “Frequency spectrum of finite amplitude ultrasonic waves in liquids”, *Phya. Fluids*, 3, 346-352, (1960).

Khalifa, A. K., Noor, K. I., Noor, M. A., “Some numerical methods for solving Burgers’ equation”, *Int. J. Phys. Sci.*, 6, (7), 1702– 1710, (2011).

Khalifa, Elbarbary, E., Elzarek, “Chebyshev Expansion Method for Solving Second and Fourth-Order Elliptic Equations”, *App. Math. Comp.*, 135, 307-318, (2003).

Khater, A.H., Temsah, R.S., Hassan, M.M. “A Chebyshev spectral collocation method for solving Burgers’ type equations”, *J. Comput. Appl. Math.*, 222, (2), 333–350, (2008).

Koç, A. B., “Sıralama Tabanlı Spektral Metotlar ile Lineer Kısmi Diferansiyel Denklemlerin Reel Düzlemde Çözülmesi”, Doktora Tezi, *Selçuk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı*, Konya, (2014).

Korkmaz, A., Aksoy, A. M., Dağ, İ., “Quartic B-spline differential quadrature method”, *Int. J. Nonlinear Sci.*, 11, (4), 403–411, (2011).

Korkmaz, A., Dağ, İ., “Cubic B-spline differential quadrature methods and stability for Burgers’ equation”, *Eng. Comput. Int. J. Comput. Aided Eng. Software*, 30, (3), 320–344, (2013).

Korkmaz, A., Dağ, İ., “Polynomial based differential quadrature method for numerical solution of nonlinear Burgers’ equation”, *J. Franklin Inst.*, 348, 2863-2875, (2011).

Korkmaz, A., Dağ, İ., “Shock wave simulations using sinc differential quadrature methods”, *Eng. Comput. Int. J. Comput. Aided Eng.*, 28, 654-674, (2011).

Kreis H. O., Oliger J., “Comparison of accurate methods for the integration of hyperbolic equations”, *Tellus*, 24, 199–215, (1972).

Kriess, H. O., Lorenz, J., *Initial-Boundary Value Problems and The Navier-Stokes Equations*, New York: Academic Press, 270, (1989).

Kruskal M. D., Zabusky, N. J., “Stroboscopic-perturbation procedure for treating a class of nonlinear wave equations”, *J. Math. Phys.*, 5, 231-244, (1964).

Kutluay, S., Bahadır, A. R., Özdeş, A., “Numerical solution of one dimensional Burgers’ equation: explicit and exact-explicit finite difference methods”, *J. Comput. Appl. Math.*, 103, 251–261, (1999).

Kutluay, S., Esen, A., “A linearized numerical scheme for Burgers-like equations”, *Appl. Math. Comp.*, 156, 295-305, (2004).

Kutluay, S., Esen, A., Dağ, I., “Numerical solutions of the Burgers’ equation by the least-squares quadratic B-spline finite element method”, *J. Comput. Appl. Math.*, 167, 21-33, (2004).

Lagerstrom, P. A., Cole J. D., Trilling, L., “Problems in the theory of viscous compressible fluids”, *Calif. Inst. Tech.*, 232, (1949).

Lanczos C., *Applied Analysis*, London: Pittman, (1957).

Lanczos, C. “Trigonometric Interpolation of Empirical and Analytical Functions”, *J. Math. Phys.*, 17, 123-199, (1938).

Lardner, R.W., “Third order solutions of Burgers equation”, *Quart. Appl. Math.*, 44, 293-302, (1986).

Larson, D. A., “Transient bounds and time asymptotic behaviour of solutions”, *SIAM J. Appl. Math.*, 34, 93-103, (1978).

Liao, W., “An implicit fourth-order compact finite difference scheme for one-dimensional Burgers’ equation”, *Appl. Math. Comput.*, 206, 755–764, (2008).

Lick, W., “The propagation of disturbances on glaciers”, *J. Geophys. Res.*, 75, 2189-2197, (1970).

Lighthill M. J., Whitham, G. B., “On kinematic waves. II. A theory of traffic flow on long crowded roads”, *Proceedings of the Royal Society of London*.

Series A, Mathematical and Physical Sciences (1934-1990), 229, (1178), 317–345, (1955).

Lighthill M. J., Whitham, G. B., “On kinematic waves. I. Flood movement in long rivers”, *Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Mathematical and Physical Sciences (1934-1990)*, 229, (1178), 281–316, (1955).

Lighthill, M. J., “Viscosity effects in sound waves of finite amplitude”, (eds: Batchelor, G.K, Davies, R. M.), *Surveys in mechanics*, Cambridge: Cambridge Univ. Press, 250-351, (1956).

Lin, E. B., Zhou, X., “Connection coefficient on an interval and wavelet solution of Burgers’ equation”, *J. Comp. Appl. Math.*, 135, 63-78, (2001).

Liu, H., Li, J., Zhang, Q., “Lie symmetry analysis and explicit solutions for general Burgers’ equation”, *J. Comp. Appl. Math.*, 228, 1-9, (2009).

Mason, J.C., “Chebyshev Polynomial Approximations for the I-membrane eigenvalue problem”, *SIAM J. Appl. Math.*, 15, (1), 172-186, (1967).

Mason, J.C., Handscomb, D.C., *Chebyshev Polynomials*, Washington: Chapman and Hall/Crc, 341, (2003).

Memiş, K., “Trafik Akışkanlığının Doğrusal Sınıflayıcılar Vasıtasıyla Belirlenmesi”, Yüksek Lisans Tezi, *Ege Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, İnşaat Mühendisliği Anabilim Dalı*, İzmir, 4-20, (2008).

Mendousse, J. S., “Nonlinear dissipative distortion of progressive sound waves at moderate amplitude”, *J. Acoust. Soc. Amer.*, 25, 51-54, (1953).

Mittal, R. C., Jain, R. K., “Numerical solutions of nonlinear Burgers’ equation with modified cubic B-splines collocation method”, *Appl. Math. Comp.*, 218, 7839- 7855, (2012).

Mittal, R. C., Jiwari, R., Sharma, K. K., “A numerical scheme based on differential quadrature method to solve time dependent Burgers’ equation”, *Engineering Computations*, 30, 117-131, (2013).

Mooers, C. N. K., “Gerstner wave's Fourier decomposition and related identities”, *J. Geophys. Res.*, 73,5843-5847, (1968).

Muite, B.K., *A Numerical Comparison of Chebyshev Methods for Solving Fourth Order Semilinear Initial Boundary Value Problems*, United Kingdom: University of Oxford, (2010).

Murray, J. D., “On Burgers model equation for turbulence”, *J. Fluid Mech.*, 59, 263-279, (1973).

Murray, J. D., “On the Gunn-effect and other physical examples of perturbed conservation equations”, *J. Fluid Mech.*, 44, 315-346, (1970).

Murray, J. D., “Perturbation effects on the decay of discontinuous solutions of nonlinear first order wave equations”, *SIAM J. Appl. Math.*, 19, 273-298, (1970).

Nascimento, A. A., Silveria-Neto F. P. M. A., Padilla, E. L. M., “A comparison of Fourier pseudospectral method and finite volume method used to solve the Burgers equation”, *J Braz. Soc. Mech. Sci. Eng.*, 36, (4), 737-742, (2014).

Nguyen, H., Reynen, J., “A space-time finite element approach to Burgers’ equation”, (eds: Taylor, C., Hinton, E., Owen, D.R.J., Onate, E.), *Numerical methods for nonlinear problems*, Swansea: Pneridge Press, 2, 718-728, (1982).

Ogura, Y., “Note on the energy transfer in Burgers' model of turbulence”, *Journal of the Meteorological Society of Japan*, 35, 92-94, (1957).

Öziş, T., Esen, A., Kutluay, S., “Numerical solution of Burgers’ equation by quadratic B-spline finite elements”, *Appl. Math. Comput.*, 165, 237-249, (2005).

Öziş, T., Aslan, Y., “The semi-approximate approach for solving Burgers’ equation with high Reynolds number”, *Appl. Math. Comput.*, 163, 131-145, (2005).

Öziş, T., Özdeş, A., “A direct variational method to Burgers’ equation”, *J. Comput. Appl. Math.*, 71, 163-175, (1996).

Pala, Y., *Modern Uygulamalı Diferansiyel Denklemler*, Bursa: Nobel Yayın Dağıtım, 505, (2006).

Pandit, S., Kumar, M., Mohapatra, R.N., Alshomrani, A.S., “Shockwaves analysis of planar and non planar nonlinear Burgers’ equation using Scale -2 Haar wavelets”, *Int. J. Numer. Methods Heat Fluid Flow.*, 27, 1, (2017).

- Parker, D. F., "The decay of saw-tooth solutions to the Burgers equation", *Proc. Roy. Soc. London*, 369, (1738), 409-424, (1980).
- Penel, J. K., Skyrme, T. H. R., "A model of unified field equation", *Nucl. Phys.*, 31, 550-555, (1962).
- Piessens, R., "Computing integral transforms and solving integral equations using Chebyshev Polynomial Approximations", *J. Comput. Appl. Math.*, 121, 113-124, (2000).
- Platzman, G. W., "An exact integral of complete spectral equations for unsteady one-dimensional flow", *Tellus*, 16, 422-431, (1964).
- Pospelov, L. A., "Propagation of finite-amplitude elastic waves", *Soviet Physics Acoust.*, 11, 302-304, (1966).
- Ramadan, M. A., El-Danaf, T. S., Abd Alaal, F. E. I., "Numerical solution of Burgers equation using septic B-splines", *Chaos, Solitons and Fractals.*, 26, 795-804, (2005).
- Ramos, H., Rubio, R. G., "Analysis of a Chebyshev-based backward Differentiation Formulae Andrelation with Runge–Kutta Collocation Methods", *Int. Journal. Comp. Math. Spain*, 200, 1-22, (2009).
- Reid, W. H., "On the transfer of energy in Burgers' model of turbulence", *Appl. Sci. Res.* 6, (2-3), 85-91 (1956).
- Richards., P. I., "Shock waves on the highway", *Operations Research*, 4, (1), 42–51, (1956).
- Rodin, E.Y.A., "Riccati solution for Burgers equation", *Quart. Appl.Math.*, 27, 541-545, (1974).
- Rubin, S. G., Graves, R.A., *Cubic spline approximation for problems in fluid mechanics*, Washington: Nasa, TR R-436, (1975).
- Rubin, S. G., Khosla, P.K., "Higher-order numerical solutions using cubic splines", *AIAA Journal*, 14, 851-858, (1976).
- Saffman, P. G., "Lectures on homogeneous turbulence, in Topics in nonlinear physics, Zabusky, N.J., (ed), NEW York: Springer-Verlag, 485-614, (1968).

Saka, B., Dag, İ., “Quartic B-spline collocation method to the numerical solutions of the Burgers’ equation”, *Chaos Solitons Fractals.*, 32, 1125–1137, (2007).

Sarı, M. and Gürarşlan, G., “A sixth-order compact finite difference scheme to the numerical solutions of Burgers’ equation”, *Appl. Math. Comp.*, 208, 475-483, (2009).

Sezer M., Gülsu M., Tanay, B., “Rational Chebyshev collocation method for solving higher-order linear differential equations”, *Numer. Meth. Partial Differential Equations*, 27, (5), 1130-1142, (2011).

Sezer, M., “A Chebyshev Polynomial Approximation for Dirichlet Problem”, *Journal of Faculty of Science Ege University Series*, A12, (2), 69-77, (1989).

Sezer, M., Kaynak, M., “Chebyshev Polynomial Solutions of Linear Differential Equations”, *Int. J. Math. Educ. Sci. Tech.*, 27, (4): 607-618, (1996).

Shen, J., tang, T., Wang, L. L, *Spectral Methods algorithms, Analysis and Applications*, Berlin: Springer, 470, (2011).

Shvets M. E., Meleshko, V. P., “Numerical algorithm of a solution of the system of equations of hydrodynamics of the atmosphere”, *Izv. Acad. Sci. USSR Atmospher. Ocean. Phys.*, 1, 519-520, (1965).

Skogestad, J. O., Kalisch, H., “A Boundary Value Problem for the KdV Equation: Comparison of Finite-Difference and Chebyshev Methods”, *Math. Comp. in Simulat.*, 80, 151-163, (2009).

Slater, J. C., “Electronic Energy Bands in Metals”, *Phys. Rev.*, 45, 784-801, (1934).

Soluyan S. I., Khokhlov, R. V., “Decay of finite-amplitude acoustic waves in a dissipative medium”, *Russian Vestnik Moskov. Univ. Ser. III Fiz. Astronom.*, 3, 52-61, (1961).

Sounders, R., Caldwell, J., Wanless, P., “A variationaliterative scheme applied to Burgers equation”, *IMA J. Of Num. Anly.*, 4, 4349-362, (1984).

Su C. H., Gardner, C. S., “Korteweg-de Fries equation and generalizations III: Derivation of the Korteweg-de Vries equation and Burgers equation”, *J. Math. Phys.* 10, 536-539, (1969).

Tamsir, M., Srivastava, V.K., Jiwari, R. “An algorithm based on exponential modified cubic B-spline differential quadrature method for nonlinear Burgers equation”, *Appl.Math. Comput.*, 290, 111–124, (2016).

Tatsumi, T., “Nonlinear wave expansion for turbulence in the Burgers model of a fluid”, *Phys. Fluids.*, II, 12, (12), 258-264, (1969).

Thirumalai, S., Seshadri, R., “Spectral Analysis on Burgers’ Equation and Its Solutions Using Three Different Basis Functions”, *Int. J. Appl. Comput. Math.*, 4, 93, (2018).

Trefethen, L.N., *Spectral Methods in Matlab*, Philadelphia: SIAM, (2000).

Van Der Pol, B., “On a non-linear partial differential equation satisfied by the logarithm of the Jacobean theta-functions, with arithmetical applications”, *Proc. Acad. Sci. Amsterdam*, A13, 261-284, (1951).

Varoğlu, E., Finn, W. D. L., “Space-time finite elements incorporating characteristics for Burgers’ equations”, *Int. J. Num. Meth. Eng.*, 16, 171-184, (1980).

Walsh, R. A., “Initial value problems associated with Burgers’ equation”, *J. Math. Anal. Appl.*, 26, 235-247, (1969).

Xie, S., Heo, S., Kim, S., Woo, G., Yi, S., "Numerical solution of one-dimensional Burgers’ equation using reproducing kernel function”, *J. Comput. Appl. Math.*, 214, 417–434, (2008).

Yüksel, G., "İkinci Mertebe Lineer Kısmi Diferansiyel Denklemlerin Chebyshev Polinom Çözümü", Doktora Tezi, *Sıtkı Koçman Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı*, Muğla, (2011).

Zhang, P. G., Wang, J. P., “A predictor-corrector compact finite difference scheme for Burgers’ equation”, *Appl. Math. Comp.*, 219, 892-898, (2012).

Zhu, Chun-G., Wang, Ren-H., “Numerical solution of Burgers’ equation by cubic B-spline quasi interpolation”, *Appl. Math. Comp.*, 208, 260-272, (2009).

6. ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı : Murat KUZÖREN

Doğum Yeri ve Tarihi : Karabük 13/05/1979

Lisans Üniversite : Pamukkale Üniversitesi

Elektronik posta : muratkuzoren@gmail.com

İletişim Adresi : Cumhuriyet Mahallesi, 56 C., No2/5 Karabük