T.C.
PAMUKKALE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

YARI LATİSLERDE TÜREVLER

YÜKSEK LİSANS TEZİ

ONUR DEMİRKAYA

DENİZLİ, TEMMUZ - 2019

T.C.
PAMUKKALE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

YARI LATİSLERDE TÜREVLER

YÜKSEK LİSANS TEZİ

ONUR DEMİRKAYA

DENİZLİ, TEMMUZ - 2019

KABUL VE ONAY SAYFASI

ONUR DEMİRKAYA tarafından hazırlanan "**YARI LATİSLERDE TÜREVLER**" adlı tez çalışmasının savunma sınavı 02.07.2019 tarihinde yapılmış olup aşağıda verilen jüri tarafından oy birliği ile Pamukkale Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı Cebir ve Sayılar Teorisi Yüksek Lisans Tezi olarak kabul edilmiştir.

Jüri Üyeleri	İmza
Danışman Dr. Öğretim Üyesi Şahin CERAN	....
Üye Prof. Dr. Yılmaz ÇEVEN	....
Üye Doç. Dr. Mustafa AŞCI	....

Pamukkale Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun 24/07/2019 tarih ve ..30/12.. sayılı kararıyla onaylanmıştır.

....

Prof. Dr. Uğur YÜCEL

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

Bu tezin tasarımı, hazırlanması, yürütülmesi, araştırmalarının yapılması ve bulgularının analizlerinde bilimsel etiğe ve akademik kurallara özenle riayet edildiğini; bu çalışmanın doğrudan birincil ürünü olmayan bulguların, verilerin ve materyallerin bilimsel etiğe uygun olarak kaynak gösterildiğini ve alıntı yapılan çalışmalara atfedildiğine beyan ederim.

Onur DEMİRKAYA

ÖZET

YARI LATİSLERDE TÜREVLER
YÜKSEK LİSANS TEZİ
ONUR DEMİRKAYA
PAMUKKALE ÜNİVERSİTESİ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

(TEZ DANIŞMANI:DR. ÖĞRETİM ÜYESİ ŞAHİN CERAN)

DENİZLİ, TEMMUZ - 2019

Yarı latisler üzerinde türevlerin ele alındığı bu tez üç bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölümde latislerde türevin tarihsel gelişimi ile ilgili tarihçe bölümü verilmiştir.

İkinci bölümde, latisler üzerinde tanımlanmış olan türevle ilgili temel tanımlar verilmiştir.

Üçüncü bölümde, yarı latislerden latislere tanımlı permuting n-türevler detaylı olarak incelendi. Permuting n- türev izoton ve permuting n-türev dağılmalı latis ilişkileri incelendi. Ve bununla ilgili sonuçlar verildi.

ANAHTAR KELİMELER:Latis, Yarı Latis, Türev, İzoton, Permuting türev

ABSTRACT

DERİVATİONS ON SEMİLATTİCES
MSC THESIS
ONUR DEMİRKAYA
PAMUKKALE UNIVERSITY INSTITUTE OF SCIENCE
MATHEMATİCS

(SUPERVISOR:ASSİST. PROF.DR.ŞAHİN CERAN)

DENİZLİ, JUNE 2019

This thesis, which deals with derivations on semi-lattices consist of three chapters.

In the first chapter, on the historical development of the derivation on lattices was given.

In the second chapter, the basic definitions and theorems related to derivation on the lattices were given.

In the third chapter, permuting n-derivations defined from semi-lattices to lattices were discussed in detail. Relationships between permuting n-derivation, isotone derivation and permuting n-derivation distributive lattice were analyzed. And some results were given.

KEYWORDS:Lattice, Semi lattice, Derivation, İsoton, Permuting derivation

.

İÇİNDEKİLER

Sayfa

ÖZET .... **i**
ABSTRACT .... **ii**
İÇİNDEKİLER .... **iii**
SEMBOL LİSTESİ .... **ivv**
ÖNSÖZ .... **v**
1. GİRİŞ **1**
1.1 Tarihçe 1
2. ÖNCEKİ ÇALIŞMALAR **2**
2.1 Latis Tanımı 2
2.2 Latislerde Modülerlik 2
2.3 Dağılmalı Latis 2
2.4 Permuting Dönüşüm 2
2.5 Latislerde Permuting Türevler 2
2.6 Latislerde Permuting n-Türev 3
2.7 Latislerde Permuting n-f Türev 3
2.8 Latislerde Permuting n-(f,g) Türev 3
3. YARI LATİSTEN LATİSE TANIMLI PERMUTİNG TÜREVLER **5**
3.1 Yarı Latisten Latise Tanımlı Permuting n-d Türev 5
3.2 Yarı Latisten Latise Tanımlı Permuting n-f Türev 16
3.3 Yarı Latisten Latise Tanımlı Permuting n-(f,g) Türev 43
4. SONUÇ VE ÖNERİLER **55**
5. KAYNAKLAR **54**
6. ÖZGEÇMİŞ **57**

SEMBOL LİSTESİ

L	**: Latis**
S	**: Yarı Latis**
$\vee$	**: Veya**
$\wedge$	**: Ve**
D	**: Türev**
d	**: İz**
$\boldsymbol{f_u}$	**: Simple f-türev**
F(S,L)	**: Türevlerin Kümesi**
$\mathbf{MD_f(S,L)}$	**: Monoton f-türevlerin Kümesi**
$\mathbf{SD_f(S,L)}$	**: Simple f-türevlerin Kümesi**

ÖNSÖZ

Bu tezi hazırlarken, değerli vakitlerini ve yardımlarını esirgemeyen, her aşamasında bilgi ve tecrübelerine başvurduğum değerli hocam Dr. Öğretim Üyesi Şahin CERAN'a teşekkür ederim. Ayrıca şahsıma maddi ve manevi her türlü desteği veren babam Osman Demirkaya, annem Gülay Demirkaya, kardeşim Furkan Demirkaya ve değerli eşim Ayşe Yadigar DEMİRKAYA'ya teşekkürü bir borç bilirim.

1. GİRİŞ

1.1 Tarihçe

Latis cebiri teorisi; başta kriptanaliz, ekonomi, bilgi edinimi ve erişim kontrolü gibi çeşitli dallarda karışımıza çıkmaktadır. Latis kavramı ilk olarak 1930'lu yıllarda G.Birkhoff tarafından, latislerde türev kavramı ise 1975'te G.Szasz tarafından verildi. Bu çalışmaların ışığında Xin ve arkadaşları, latislerde türev kavramını geliştirdiler ve ilgili sonuçları tartıştılar. Daha sonra bir türevin modüler ve dağılmalı latislerde izoton olduğunu ve bununla ilgili denk koşulları tanıttılar.

Çeven ve Öztürk (2008) f-türevi sonrasında Çeven (2009) simetrik bi-türevi tanıttı. Sonrasında bu türev ile dağılmalı ve modüler latisleri karakterize ettiler.

Özbal ve Fırat (2010) latislerde simetrik bi f- türev kavramını tanıttılar. Bu türev üzerinde modüler ve dağılmalı latisleri karakterize ettiler. Sonrasında permuting tri-türevi tanıttılar ve bu türevi permuting tri-f-türeve uyguladılar.

Aşçı, Ceran ve Keçilioğlu latisler üzerinde permuting tri- (f,g) türevi ve sonrasında Aşçı ve Ceran latislerde genelleştirilmiş (f-g) türev kavramını tanıttılar. Bu türevler ile modüler ve dağılmalı latis kavramını karakterize ettiler.

2. ÖNCEKİ ÇALIŞMALAR

Tanım 2.1: Boştan farklı L kümesi üzerinde ∧ ve ∨ ikili işlemleri tanımlanmış olsun. Eğer (L,∧,∨); $\forall\ \alpha,\beta,\gamma \in L$ için aşağıdaki koşulları sağlarsa bu durumda L'ye latis denir.

(1) $\alpha \wedge \alpha = \alpha$, $\alpha \vee \alpha = \alpha$,

(2) $\alpha \wedge \beta = \beta \wedge \alpha$, $\alpha \vee \beta = \beta \vee \alpha$,

(3) $(\alpha \wedge \beta) \wedge \gamma = \alpha \wedge (\beta \wedge \gamma)$, $(\alpha \vee \beta) \vee \gamma = \alpha \vee (\beta \vee \gamma)$,

(4) $(\alpha \wedge \beta) \vee \alpha = \alpha$, $(\alpha \vee \beta) \wedge \alpha = \alpha$.

Tanım 2.2: Aşağıdaki özellik sağlanırsa L latisine modüler latis denir.

Eğer $\alpha \leq \gamma$ ise $\alpha \vee (\beta \wedge \gamma) = (\alpha \vee \beta) \wedge \gamma$.

Tanım 2.3: L latisi, $\forall\ \alpha, \beta, \gamma \in L$ için aşağıdaki şartlardan birini sağlarsa L' ye dağılmalı latis denir.

$\alpha \wedge (\beta \vee \gamma) = (\alpha \wedge \beta) \vee (\alpha \wedge \gamma)$,

$\alpha \vee (\beta \wedge \gamma) = (\alpha \vee \beta) \wedge (\alpha \vee \gamma)$.

Tanım 2.4: L bir latis olsun. $n \geq 3$ olmak üzere $\{1,2,3,\cdots,n\}$ kümesinin bir permütasyonu $\{\pi(1), \pi(2), \ldots, \pi(n)\}$ olsun. $\forall\ \alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n \in S$ için;

$$D(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n) = D(\alpha_{\pi(1)}, \alpha_{\pi(2)},\ldots,\alpha_{\pi(n)})$$

sağlanıyorsa $D: S \times S \times \ldots \times S \to L$ dönüşümüne permuting dönüşüm denir.

Tanım 2.5: L bir latis ve $D: L \to L$ bir fonksiyon olsun. Eğer $\forall \alpha, \beta \in L$ için aşağıdaki koşul sağlanırsa D ye L üzerinde bir türev denir.

$$D(\alpha \wedge \beta) = (D(\alpha) \wedge \beta) \vee \big(\alpha \wedge D(\beta)\big)$$

Tanım 2.6: L bir latis ve $D: L \times L \times \dots \times L \to L$ bir permuting dönüşüm olsun. Eğer $1 \leq i \leq n$ ve $\forall\, \alpha_1, \alpha_1', \alpha_2, \dots \alpha_i, \alpha_i', \dots, \alpha_n, \alpha_n' \in L$ için aşağıdaki koşul sağlanırsa D'ye L üzerinde permuting n-türev denir. Açıkça, bu türev her bileşen için geçerlidir.

$$D(\alpha_1 \wedge \alpha_1', \alpha_2, \dots, \alpha_i, \dots, \alpha_n) = (D(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_i, \dots, \alpha_n) \wedge \alpha_1') \vee (\alpha_1 \wedge D(\alpha_1', \alpha_2, \dots, \alpha_i, \dots, \alpha_n).$$

$$\dots$$

$$D(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_i \wedge \alpha_i', \dots, \alpha_n) = (D(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_i, \dots, \alpha_n) \wedge \alpha_i') \vee (\alpha_i \wedge D(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_i', \dots, \alpha_n')).$$

$$\dots$$

$$D(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_i, \dots, \alpha_n \wedge \alpha_n') = (D(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_i, \dots, \alpha_n) \wedge \alpha_n') \vee (\alpha_n \wedge D(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_i, \dots, \alpha_n')).$$

Tanım 2.7: L bir latis ve $D: L \times L \times \dots \times L \to L$ bir permuting dönüşüm olsun. Eğer $1 \leq i \leq n$ ve $\forall\, \alpha_1, \alpha_1', \alpha_2, \dots \alpha_i, \alpha_i', \dots, \alpha_n, \alpha_n' \in L$ için aşağıdaki koşulu sağlayacak şekilde $f: L \to L$ fonksiyonu varsa D ye L üzerinde permuting $n - f$-türev denir. Açıkça, bu türev her bileşen için geçerlidir.

$$D(\alpha_1 \wedge \alpha_1', \alpha_2, \dots, \alpha_i, \dots, \alpha_n) = (D(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_i, \dots, \alpha_n) \wedge f(\alpha_1')) \vee (f(\alpha_1) \wedge D(\alpha_1', \alpha_2, \dots, \alpha_i, \dots, \alpha_n)).$$

$$\dots$$

$$D(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_i \wedge \alpha_i', \dots, \alpha_n) = (D(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_i, \dots, \alpha_n) \wedge f(\alpha_i')) \vee (f(\alpha_i) \wedge D(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_i, \dots, \alpha_n')).$$

$$\dots$$

$$D(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_i, \dots, \alpha_n \wedge \alpha_n') = (D(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_i, \dots, \alpha_n) \wedge f(\alpha_n')) \vee (f(\alpha_n) \wedge D(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_i, \dots, \alpha_n')).$$

Tanım 2.8: L bir latis ve $D: L \times L \times \ldots \times L \rightarrow L$ ye permuting dönüşüm olsun. $\forall\, \alpha_1, \alpha_1'$, $\alpha_2, \ldots \alpha_i, \alpha_i', \ldots, \alpha_n, \alpha_n' \in L$ için aşağıdaki koşulu sağlayacak şekilde $f: L \rightarrow L$ ve $g: L \rightarrow L$ fonksiyonları varsa D ye L üzerinde permuting n-(f, g) türev denir. Açıkça, bu türev her bileşen için geçerlidir.

$$D(\alpha_1 \wedge \alpha_1', \alpha_2, \ldots, \alpha_i, \ldots, \alpha_n) = (D(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_i, \ldots, \alpha_n) \wedge f(\alpha_1')) \vee (g(\alpha_1) \wedge D(\alpha_1', \alpha_2, \ldots, \alpha_i, \ldots, \alpha_n)).$$

$$\ldots$$

$$D(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_i \wedge \alpha_i', \ldots, \alpha_n) = (D(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_i, \ldots, \alpha_n) \wedge f(\alpha_i')) \vee (f(\alpha_i) \wedge D(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_i, \ldots, \alpha_n')).$$

$$\ldots$$

$$D(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_i, \ldots, \alpha_n \wedge \alpha_n') = (D(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_i, \ldots, \alpha_n) \wedge f(\alpha_n')) \vee (g(\alpha_n) \wedge D(\alpha_1', \alpha_2, \ldots, \alpha_i, \ldots, \alpha_n)).$$

Tanım 2.9: L latisinin boştan farklı bir alt kümesi I olsun. Aşağıdaki özellikler sağlanırsa I ‘ya L nin bir ideali denir.

$i)$ $\alpha \leq \beta, \beta \in I \Rightarrow \alpha \in I$,

$ii)$ $\alpha, \beta \in I \Rightarrow \alpha \vee \beta \in I$.

Tanım 2.10: L bir latis olsun. $\forall \alpha, \beta \in L$ için $D(\alpha, \beta) = D(\beta, \alpha)$ var ise $D: L \times L \rightarrow L$ dönüşümüne simetrik dönüşüm denir.

Tanım 2.8: $(L, \wedge, \vee)$ ve $(M, \wedge, \vee)$ iki latis olsun. $\forall\, \alpha, \beta \in L$ için;

$$f(\alpha \wedge \beta) = f(\alpha) \wedge f(\beta)$$

$$f(\alpha \vee \beta) = f(\alpha) \vee f(\beta)$$

şartları sağlanıyorsa; $f: L \rightarrow M$ dönüşümüne bir latis homomorfizmi denir.

Tanım 2.9: $(L, \wedge, \vee)$ bir latis olsun. $\alpha, \beta \in L$ olsun. $\alpha \leq \beta$ ile tanımlı olan $\leq$ bağıntısı ikili bağıntıdır ancak ve ancak $\alpha \wedge \beta = \alpha$ ve $\alpha \vee \beta = \beta$.

Tanım 2.10: Boştan farklı bir S kümesi üzerinde $\wedge$ ikili işlemi tanımlansın. Eğer $(S, \wedge)$, $\forall\, \alpha, \beta, \gamma \in S$ için aşağıdaki şartları sağlarsa S'ye $\wedge$ - yarı latis denir.

1 - $\alpha \wedge \alpha = \alpha$

2 - $\alpha \wedge \beta = \beta \wedge \alpha$

3 - $(\alpha \wedge \beta) \wedge = \alpha \wedge (\beta \wedge \gamma)$

Tanım 2.11: Boştan farklı bir S kümesi üzerinde $\vee$ ikili işlemi tanımlansın. Eğer $(S, \vee)$, $\forall\, \alpha, \beta, \gamma \in S$ için aşağıdaki şartları sağlarsa S'ye $\vee$ - yarı latis denir.

1 - $\alpha \vee \alpha = \alpha$

2 - $\alpha \vee \beta = \beta \vee \alpha$

3 - $(\alpha \vee \beta) \vee \gamma = \alpha \vee (\beta \vee \gamma)$

Tanım 2.13: D permuting dönüşüm olduğunda $d(\alpha) = D(\alpha, \alpha, \dots, \alpha)$ ile tanımlı $d: S \rightarrow L$ dönüşümüne D' nin izi denir.

3.BÖLÜM

3.YARI LATİSTEN LATİSE TANIMLI PERMUTİNG TÜREVLER

3.1 Yarı Latisten Latise Tanımlı Permuting n-d Türev

Tanım 3.1.1: $S, \wedge -$yarı latis, L latis ve $D: S \times S \times ... \times S \to L$ permuting dönüşüm olsun. $d: S \to L,\ D'$nin izi olmak üzere aşağıdaki eşitlik sağlanırsa D' ye permuting n-d türev denir. $1 \leq$ i $\leq n$ ve $\forall\ \alpha_1, \alpha_1', \ldots, \alpha_i, \alpha_i', \ldots, \alpha_n, \alpha_n' \in S$ için;

$$D(\alpha_1 \wedge \alpha_1', \alpha_2, \ldots, \alpha_i, \ldots, \alpha_n) = [D(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_i, \ldots, \alpha_n) \wedge d(\alpha_1')] \vee$$
$$[D(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_i, \ldots, \alpha_n) \wedge d(\alpha_1')]$$
$$\cdots$$
$$D(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_i \wedge \alpha_i', \ldots, \alpha_n) = [D(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_i, \ldots, \alpha_n) \wedge d(\alpha_i')] \vee$$
$$[D(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_i', \ldots, \alpha_n) \wedge d(\alpha_1)]$$
$$\cdots$$
$$D(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_i, \ldots, \alpha_n \wedge \alpha_n') = [D(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_i, \ldots, \alpha_n) \wedge d(\alpha_n')] \vee$$
$$[D(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_i', \ldots, \alpha_n) \wedge d(\alpha_n)]$$

Örnek 3.1.1: S yarı latis, L latis ve $D: S \times S \times ... \times S \to L$ permuting dönüşüm olsun. $d: S \to L,\ D'$ nin izi olsun ve $d(\alpha_1 \wedge \alpha_1') = d(\alpha_1) \wedge d(\alpha_1')$ sağlansın. $\forall\ \alpha_1, \alpha_1', \ldots, \alpha_n \in S$ için;

$$D(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) = [\, d(\alpha_1) \wedge d(\alpha_2) \wedge\ \ldots \wedge d(\alpha_n)\,]$$

O halde; D permuting n-türev olur. Gerçekten;

$$D(\alpha_1 \wedge \alpha_1', \alpha_2 \ldots \alpha_n) = [\, d(\alpha_1 \wedge \alpha_1') \wedge d(\alpha_2) \wedge \ldots \wedge d(\alpha_n)\,]$$
$$= [\, d(\alpha_1) \wedge\ d(\alpha_1') \wedge d(\alpha_2) \wedge \ldots \wedge d(\alpha_n)\,]$$

$$= \big([\,d(\alpha_1) \wedge d(\alpha_2) \wedge \ldots \wedge d(\alpha_n)\,] \wedge d(\alpha_1')\big) \vee$$

$$\big([\,d(\alpha_1') \wedge d(\alpha_2) \wedge \ldots \wedge d(\alpha_n)] \wedge d(\alpha_1)\big)$$

$$= \big([\,D(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \wedge d(\alpha_1')\,]\big) \vee \big([\,d(\alpha_1) \wedge D(\alpha_1', \alpha_2, \ldots, \alpha_n)\ ]\big)$$

Örnek 3.1.2: S yarı latis, L latis ve $D: S \times S \times \ldots \times S \to L$ permuting dönüşüm olsun. $a \in L$ olmak üzere $d: S \to L,\ D'$nin izi olsun. $\forall\ \alpha_1, \alpha_1', \ldots, \alpha_n \in S$ için;

$$D(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) = d(\alpha_1) \wedge d(\alpha_2) \wedge \ldots \wedge d(\alpha_n) \wedge a$$

olarak tanımlansın. O halde; D permuting n-türev olur.

Örnek 3.1.3: S yarı latis, L latis ve $D: S \times S \times \ldots \times S \to L$ permuting dönüşüm olsun. $d: S \to L,\ D'$nin izi olsun. $\forall\ \alpha_1, \alpha_1', \ldots, \alpha_n, \alpha_n'$ için;

$$D(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) = d(\alpha_1) \vee d(\alpha_2) \vee \ldots \vee d(\alpha_n)$$

olarak tanımlansın. O halde; D permuting n-türev değildir. Gerçekten;

$D(\alpha_1 \wedge \alpha_1', \alpha_2, \ldots, \alpha_n) = d(\alpha_1 \wedge \alpha_1') \vee d(\alpha_2) \vee \ldots \vee d(\alpha_n)$ olur. Diğer taraftan;

$$\big([\,D\big(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n\big) \wedge d(\alpha_1')\,]\big) \vee \big(\,[\,d(\alpha_1) \wedge D(\alpha_1', \alpha_2, \ldots, \alpha_n)\,]\big)$$

$$= \big([\,d(\alpha_1) \vee d(\alpha_2) \vee \ldots \vee d(\alpha_n)\,] \wedge d(\alpha_1')\big) \vee$$

$\big([\,d(\alpha_1') \vee d(\alpha_2) \vee \ldots \vee d(\alpha_n)\,] \wedge d(\alpha_1)\big)$ olur. Yani;

$$D(\alpha_1 \wedge \alpha_1', \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \neq \big([\,D(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \wedge d(\alpha_1')\,]\big) \vee$$

$$\big(\,[d(\alpha_1) \wedge D(\alpha_1', \alpha_2, \ldots, \alpha_n)]\big)$$

Önerme 3.1.1: S yarı latis, L latis ve $D: S \times S \times \ldots \times S \to L$ permuting n-türev olsun. O halde aşağıdakiler vardır: $\forall\ \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in S$ için,

(i)$D(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \leq d(\alpha_1)$, $D(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \leq d(\alpha_2) \ldots D(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \leq d(\alpha_n)$

(ii) $D(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \leq d(\alpha_1) \wedge d(\alpha_2) \wedge, \ldots, \wedge d(\alpha_n)$

İspat: (i) $\alpha_1 \wedge \alpha_1 = \alpha_1$ olduğunu biliyoruz.

$D(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) = D(\alpha_1 \wedge \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$

$= \big([\, D\big(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\big) \wedge d(\alpha_1)\,]\big) \vee \big(\,[d(\alpha_1) \wedge D(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)]\big)$

$D(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ = [$D(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \wedge d(\alpha_1)$] olur. Buradan;

$D(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \leq d(\alpha_1)$ olur.

Benzer şekilde $D(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \leq d(\alpha_2)$,…, $D(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \leq d(\alpha_n)$ olduğu görülebilir.

(ii) $D(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \leq d(\alpha_1)$

$D(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \leq d(\alpha_2)$

. . .

$D(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \leq d(\alpha_n)$ olduğunu biliyoruz.Bu nedenle;

$D(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \wedge \dots \wedge D(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \leq d(\alpha_1) \wedge d(\alpha_2) \wedge \dots \wedge d(\alpha_n)$ olur.

Sonuç 3.1.1: S yarı latis ve L latis olmak üzere , $0 \in S$ ve $0 \in L$ en küçük eleman olsun. L latis ve $D : S \times S \times .. \times S \to L$ permuting n-türev olmak üzere; $d(0) = 0$ ise $D(0, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$= 0 dır.

İspat: $D(0, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \leq d(0) = 0$ olduğu açıktır.0 en küçük eleman olduğundan;

$0 \leq D(0, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ yazılabilir. $0 \leq D(0, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \leq 0$ olup $D(0, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$=0 olur.

Önerme 3.1.2: S yarı latis, L latis ve $D: S \times S \times \dots \times S \to L$ permuting n-türev olsun. O halde aşağıdakiler vardır: $\forall\ \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in S$ için,

(i) $D(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \wedge D(\alpha_1', \alpha_2, \dots, \alpha_n) \leq D(\alpha_1 \wedge \alpha_1', \alpha_2, \dots, \alpha_n)$

(ii) $D(\alpha_1 \wedge \alpha_1', \alpha_2, \dots, \alpha_n) \leq D(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \vee D(\alpha_1', \alpha_2, \dots, \alpha_n)$

(ii) $D(\alpha_1 \wedge \alpha_1', \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \leq d(\alpha_1) \vee d(\alpha_1')$

İspat: (i) Önerme 3.1.1(i) den;

$D(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \leq d(\alpha_1)$ ve $D(\alpha_1', \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \leq d(\alpha_1')$ yazabiliriz.

$D(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \wedge D(\alpha_1', \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \leq d(\alpha_1) \wedge D(\alpha_1', \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$

$D(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \wedge D(\alpha_1', \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \leq D(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \wedge d(\alpha_1')$

Bu durumda;

$$\begin{aligned} D(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \wedge D(\alpha_1', \alpha_2, \ldots, \alpha_n) &\leq \big([\, D(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \wedge d(\alpha_1') \,]\big) \\ &\quad \vee \big([\, d(\alpha_1) \wedge D(\alpha_1', \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \,]\big) \\ &= D(\alpha_1 \wedge \alpha_1', \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \end{aligned}$$

Böylece; $D(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \wedge D(\alpha_1', \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \leq D(\alpha_1 \wedge \alpha_1', \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ olur.

(ii) $d(\alpha_1) \wedge D(\alpha_1', \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \leq D(\alpha_1', \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ ve

$D(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \wedge d(\alpha_1') \leq D(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ yazabiliriz.

$$\begin{aligned} D(\alpha_1 \wedge \alpha_1', \alpha_2, \ldots, \alpha_n) &= [\, D(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \wedge d(\alpha_1') \,] \vee \\ &\quad [\, d(\alpha_1) \wedge D(\alpha_1', \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \,] \\ &\leq D(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \vee D(\alpha_1', \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \end{aligned}$$ olup;

$D(\alpha_1 \wedge \alpha_1', \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \leq D(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \vee D(\alpha_1', \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ olur.

(iii) $d(\alpha_1) \wedge D(\alpha_1', \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \leq d(\alpha_1)$ ve

$D(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \wedge d(\alpha_1') \leq d(\alpha_1')$ yazabiliriz.

$$\begin{aligned} D(\alpha_1 \wedge \alpha_1', \alpha_2, \ldots, \alpha_n) &= [\, d(\alpha_1) \wedge D(\alpha_1', \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \,] \vee \\ &\quad [\, D(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \wedge d(\alpha_1') \,] \leq d(\alpha_1) \vee d(\alpha_1') \end{aligned}$$ olup;

$D(\alpha_1 \wedge \alpha_1', \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \leq d(\alpha_1) \vee d(\alpha_1')$ olur.

Tanım 3.1.2: S, $\vee -$ yarı latis, L latis ve $D: S \times S \times \ldots \times S \to L$ permuting dönüşüm olsun. Aşağıdaki eşitlik var ise D'ye joinitiv dönüşüm denir. $1 \leq i \leq n$ ve

$\forall\, \alpha_1, \alpha_1', \ldots, \alpha_i, \alpha_i', \ldots, \alpha_n, \alpha_n' \in S$ için;

$$D(\alpha_1 \vee \alpha_1', \alpha_2, \ldots, \alpha_i, \ldots, \alpha_n) = D(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_i, \ldots, \alpha_n) \vee D(\alpha_1', \alpha_2, \ldots, \alpha_i, \ldots, \alpha_n)$$

$$\ldots$$

$$D(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_i \vee \alpha_i', \ldots, \alpha_n) = D(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_i, \ldots, \alpha_n) \vee D(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_i', \ldots, \alpha_n)$$

$$\ldots$$

$$D(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_i, \ldots, \alpha_n \vee \alpha_n') = D(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_i, \ldots, \alpha_n) \vee D(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_i, \ldots, \alpha_n')$$

Önerme 3.1.3: S, $\vee -$ yarı latis, L latis ve d, D joinitiv permuting n-türevin izi olsun. Aşağıdaki eşitlikler vardır: $\forall\ \alpha_1, \alpha_1', \ldots, \alpha_n, \alpha_n' \in S$ için,

(i) $d(\alpha_1 \vee \alpha_1') = d(\alpha_1) \vee \ldots \vee D(\alpha_1, \alpha_1', \ldots, \alpha_1', \alpha_1') \vee \ldots D(\alpha_1, \alpha_1, \ldots, \alpha_1, \alpha_1') \vee\ d(\alpha_1')$

(ii) $d(\alpha_1) \vee d(\alpha_1') \ \leq d(\alpha_1 \vee \alpha_1')$

İspat: (i) $d(\alpha_1 \vee \alpha_1') = D(\alpha_1 \vee \alpha_1', \alpha_1 \vee \alpha_1', \ldots, \alpha_1 \vee \alpha_1')$

$= D(\alpha_1, \alpha_1 \vee \alpha_1', \ldots, \alpha_1 \vee \alpha_1') \vee D(\alpha_1', \alpha_1 \vee \alpha_1', \ldots, \alpha_1 \vee \alpha_1')$

$= [D(\alpha_1, \alpha_1, \ldots, \alpha_1 \vee \alpha_1') \vee D(\alpha_1, \alpha_1', \ldots, \alpha_1 \vee \alpha_1')] \vee$

$[D(\alpha_1', \alpha_1, \ldots, \alpha_1 \vee \alpha_1') \vee D(\alpha_1', \alpha_1', \ldots, \alpha_1 \vee \alpha_1')]$

Böyle devam edilirse;

$d(\alpha_1 \vee \alpha_1') = D(\alpha_1, \alpha_1, \ldots, \alpha_1) \vee D(\alpha_1, \alpha_1', \ldots, \alpha_1')$

$\vee \ldots \vee D(\alpha_1', \alpha_1, \ldots, \alpha_1) \vee D(\alpha_1', \alpha_1', \ldots, \alpha_1')$

$= d(\alpha_1) \vee D(\alpha_1, \alpha_1', \ldots, \alpha_1') \vee \ldots \vee D(\alpha_1', \alpha_1, \ldots, \alpha_1) \vee d(\alpha_1')$ olup

$d(\alpha_1 \vee \alpha_1') = d(\alpha_1) \vee D(\alpha_1, \alpha_1', \ldots, \alpha_1') \vee \ldots \vee D(\alpha_1', \alpha_1, \ldots, \alpha_1) \vee d(\alpha_1')$ olur.

(ii) $D(\alpha_1, \alpha_1', \ldots, \alpha_1') \leq d(\alpha_1)$

$D(\alpha_1', \alpha_1, \ldots, \alpha_1) \leq d(\alpha_1')$ olduğunu biliyoruz.

$d(\alpha_1) \vee d(\alpha_1') \leq d(\alpha_1) \vee D(\alpha_1, \alpha_1', \ldots, \alpha_1') \vee \ldots \vee D(\alpha_1', \alpha_1, \ldots, \alpha_1) \vee d(\alpha_1')$

$= \ d(\alpha_1 \vee \alpha_1')$ olup

$d(\alpha_1) \vee d(\alpha_1') \leq d(\alpha_1 \vee \alpha_1')$ olur.

Teorem 3.1.1: S yarı latis, L latis ve d, D permuting n-türevin izi olsun. L dağılmalı latis olsun. $\forall\ \alpha_1, \alpha_1' \in S$ için;

$$d(\alpha_1 \wedge \alpha_1') = d(\alpha_1) \wedge d(\alpha_1')$$

İspat: $d(\alpha_1 \wedge \alpha_1') = D(\alpha_1 \wedge \alpha_1', \alpha_1 \wedge \alpha_1', \ldots, \alpha_1 \wedge \alpha_1')$

$= [D(\alpha_1, \alpha_1 \wedge \alpha_1', \ldots, \alpha_1 \wedge \alpha_1') \wedge d(\alpha_1')] \vee$

$[D(\alpha_1', \alpha_1 \wedge \alpha_1', \ldots, \alpha_1 \wedge \alpha_1') \wedge d(\alpha_1)]$

Böyle devam edilirse;

$$d(\alpha_1 \wedge \alpha_1') = [\, D(\alpha_1, \alpha_1, \ldots, \alpha_1) \wedge d(\alpha_1')] \vee [d(\alpha_1) \wedge D(\alpha_1, \alpha_1', \ldots, \alpha_1') \wedge d(\alpha_1')]$$

$$\vee \ldots \vee [\, d(\alpha_1') \wedge D(\alpha_1', \alpha_1, \ldots, \alpha_1) \wedge d(\alpha_1)] \vee [d(\alpha_1) \wedge D(\alpha_1', \alpha_1', \ldots, \alpha_1')]$$

Önerme 3.1.1(i) den;

$D(\alpha_1, \alpha_1', \ldots, \alpha_1') \leq d(\alpha_1)$

$D(\alpha_1, \alpha_1', \ldots, \alpha_1') \leq d(\alpha_1')$ olduğunu biliyoruz. Bu durumda;

$D(\alpha_1, \alpha_1', \ldots, \alpha_1') \leq d(\alpha_1) \wedge d(\alpha_1')$ elde edilir.

Böylece; $d(\alpha_1) \wedge D(\alpha_1, \alpha_1', \ldots, \alpha_1') \wedge d(\alpha_1') = D(\alpha_1, \alpha_1', \ldots, \alpha_1')$ yazabiliriz. Benzer şekilde;

$D(\alpha_1', \alpha_1, \ldots, \alpha_1) \leq d(\alpha_1)$

$D(\alpha_1', \alpha_1, \ldots, \alpha_1) \leq d(\alpha_1')$ olduğunu biliyoruz. Her tarafın $\wedge$ si alınırsa;

$D(\alpha_1', \alpha_1, \ldots, \alpha_1) \leq d(\alpha_1) \wedge d(\alpha_1')$ elde edilir.

Böylece; $d(\alpha_1) \wedge D(\alpha_1', \alpha_1, \ldots, \alpha_1) \wedge d(\alpha_1') = D(\alpha_1', \alpha_1, \ldots, \alpha_1)$ yazabiliriz. O halde;

$d(\alpha_1 \wedge \alpha_1') = [d(\alpha_1) \wedge d(\alpha_1')] \vee D(\alpha_1, \alpha_1', \ldots, \alpha_1') \vee \ldots \vee D(\alpha_1', \alpha_1, \ldots, \alpha_1)$ olur.

$D(\alpha_1, \alpha_1', \ldots, \alpha_1') \leq d(\alpha_1) \wedge d(\alpha_1')$

$D(\alpha_1', \alpha_1, \ldots, \alpha_1) \leq d(\alpha_1) \wedge d(\alpha_1')$ eşitsizliklerinde her tarafın $\vee$ sı alınırsa;

$D(\alpha_1, \alpha_1', \ldots, \alpha_1') \vee \ldots \vee D(\alpha_1', \alpha_1, \ldots, \alpha_1)\,) \leq d(\alpha_1) \wedge d(\alpha_1')$ olur.

Sonuç olarak; $d(\alpha_1 \wedge \alpha_1') = d(\alpha_1) \wedge d(\alpha_1')$ elde edilir.

Önerme 3.1.4: S yarı latisinin ve L latisinin en büyük elemanı 1 olsun. D permuting n-türevin izi d olmak üzere $d(1) = 1$ olsun. Aşağıdakiler vardır:

(i) Eğer $d(\alpha_1) \leq D(1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ ise; $D(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) = d(\alpha_1)$.

(ii) Eğer $d(\alpha_1) \geq D(1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ ise; $D(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \geq D(1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$.

İspat: (i) 1, S ‘ nin en büyük elemanı olduğundan, $\alpha_1 = \alpha_1 \wedge 1$ yazabiliriz.

$$D(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) = D(\alpha_1 \wedge 1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$$

$$= [D(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \wedge d(1)] \vee [d(\alpha_1) \wedge D(1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)]$$

1, L’ nin en büyük elemanı olduğundan,

$D(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) = D(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \vee d(\alpha_1)$ olup;

$D(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \geq d(\alpha_1)$ olur. Diğer taraftan;

$D(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \leq d(\alpha_1)$ olduğundan; $D(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) = d(\alpha_1)$ olur.

(ii) 1, S ‘ nin en büyük elemanı olduğundan, $\alpha_1 = \alpha_1 \wedge 1$ yazabiliriz.

$$D(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) = D(\alpha_1 \wedge 1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$$

$$= [D(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \wedge d(1)] \vee [d(\alpha_1) \wedge D(1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$$

1, L’ nin en büyük elemanı olduğundan,

$D(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) = D(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \vee D(1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ olup,

$D(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \geq D(1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ olur.

Önerme 3.1.5: S yarı latis, L latis ve d, D permuting n-türevin izi olsun. Verilen $\alpha_1' \leq \alpha_1$ için d izoton olmak üzere, $D(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) = d(\alpha_1)$ sağlanıyorsa $D(\alpha_1', \alpha_2, \dots, \alpha_n) = d(\alpha_1')$ dir.

İspat: $D(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) = d(\alpha_1)$ olduğundan özel olarak α_1 yerine α_1' alınırsa;

$$D(\alpha_1', \alpha_2, \dots, \alpha_n) = d(\alpha_1') \text{ olur.}$$

Teorem 3.1.2: S, $\wedge$ -yarı latis ve L, latis olsun. $\wedge -$ yarı latisten latise tanımlı $d(\alpha_1 \vee \alpha_1') = d(\alpha_1) \vee d(\alpha_1')$ şartını sağlayan permuting n-türev, joinitiv ise L dağılmalı latistir

İspat: Örnek 3.1.1 den biliyoruz ki;

$D(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) = d(\alpha_1) \wedge d(\alpha_2) \wedge \dots \wedge d(\alpha_n)$ olarak tanımlanırsa,

D permuting n-türev olur.

$D(\alpha_1 \vee \alpha_1', \alpha_2, \dots, \alpha_n) = d(\alpha_1 \vee \alpha_1') \wedge d(\alpha_2) \wedge \dots \wedge d(\alpha_n)$ ve

D, joinitiv olduğundan;

$$D(\alpha_1 \vee \alpha_1', \alpha_2, \dots, \alpha_n) = D(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \vee D(\alpha_1', \alpha_2, \dots, \alpha_n)$$
$$= [d(\alpha_1) \wedge d(\alpha_2) \wedge \dots \wedge d(\alpha_n)] \vee$$
$$[d(\alpha_1') \wedge d(\alpha_2) \wedge \dots \wedge d(\alpha_n)]$$

$$d(\alpha_1 \vee \alpha_1') \wedge d(\alpha_2) \wedge \dots \wedge d(\alpha_n) = [d(\alpha_1) \wedge d(\alpha_2) \wedge \dots \wedge d(\alpha_n)] \vee$$
$$[d(\alpha_1') \wedge d(\alpha_2) \wedge \dots \wedge d(\alpha_n)]$$

$d(\alpha_1 \vee \alpha_1') \wedge d(\alpha_2) \wedge \dots \wedge d(\alpha_n) = [d(\alpha_1) \vee d(\alpha_1')] \wedge d(\alpha_2) \wedge \dots \wedge d(\alpha_n)$

$[d(\alpha_1) \vee d(\alpha_1')] \wedge d(\alpha_2) \wedge \dots \wedge d(\alpha_n)] = [d(\alpha_1) \wedge d(\alpha_2) \wedge \dots \wedge d(\alpha_n)]$

$\vee [d(\alpha_1') \wedge d(\alpha_2) \wedge \dots \wedge d(\alpha_n)]$ olup

L, dağılmalı latis olur.

Sonuç 3.1.2: S, $\vee$ -yarı latis ve L, latis olsun. Eğer, $\vee -$ yarı latisten latise tanımlı her permuting n-türev, joinitiv ve $d(\alpha_1 \vee \alpha_1') = d(\alpha_1) \vee d(\alpha_1')$ ise L latisi modülerdir.

İspat: Teoremden L, dağılmalı latistir. Her dağılmalı latis modüler latis olduğundan ispat açıktır.

Tanım 3.1.3: S yarı latis, L latis olsun. D permuting n-türev olmak üzere ;

(i) $\alpha_1 \leq \alpha_1'$ iken $D(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \leq D(\alpha_1', \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ ise, D'ye izoton türev denir .

(ii) Eğer D, 1-1 ise D'ye monomorfik permuting n-türev denir.

(iii) Eğer D, örten ise D'ye epic permuting n-türev denir.

Önerme 3.1.6: S, $\vee$ -yarı latis ve L, latis olsun. D, $\vee -$ yarı latisten latise tanımlı izoton permuting n-türev olmak üzere ; $D(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) = d(\alpha_1)$, $D(\alpha_1', \alpha_2, \dots, \alpha_n) = d(\alpha_1')$ ve $d(\alpha_1 \vee \alpha_1') = d(\alpha_1) \vee d(\alpha_1')$ verilsin. O halde; $D(\alpha_1 \vee \alpha_1', \alpha_2, \dots, \alpha_n) = d(\alpha_1 \vee \alpha_1')$ dir.

İspat: İspatı açıktır.

Önerme 3.1.7: S, $\vee$ -yarı latis ve L, latis olsun. D, $\vee -$ yarı latisten latise tanımlı permuting n-türev olmak üzere ;

D izotondur.$\Leftrightarrow$ $D(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \vee D(\alpha_1', \alpha_2, \dots, \alpha_n) \leq D(\alpha_1 \vee \alpha_1', \alpha_2, \dots, \alpha_n)$

İspat: $\Rightarrow$) D izoton olsun. $\alpha_1 \leq \alpha_1 \vee \alpha_1'$, $\alpha_1' \leq \alpha_1 \vee \alpha_1'$ olduğundan;

$D(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \leq D(\alpha_1 \vee \alpha_1', \alpha_2, \dots, \alpha_n)$

$D(\alpha_1', \alpha_2, \dots, \alpha_n) \leq D(\alpha_1 \vee \alpha_1', \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ Böylece;

$D(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \vee D(\alpha_1', \alpha_2, \dots, \alpha_n) \leq D(\alpha_1 \vee \alpha_1', \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ olur.

$\Leftarrow$) $D(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \vee D(\alpha_1', \alpha_2, \dots, \alpha_n) \leq D(\alpha_1 \vee \alpha_1', \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ ve

$\alpha_1 \leq \alpha_1'$ olsun. $\alpha_1' = \alpha_1 \vee \alpha_1'$ yazılabilir.

$$\begin{aligned} D(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) &\leq D(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \vee D(\alpha_1', \alpha_2, \dots, \alpha_n) \\ &\leq D(\alpha_1 \vee \alpha_1', \alpha_2, \dots, \alpha_n) \\ &= D(\alpha_1', \alpha_2, \dots, \alpha_n) \text{ olup} \end{aligned}$$

$\alpha_1 \leq \alpha_1'$ iken $D(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \leq D(\alpha_1', \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ olduğundan

D izoton olur.

Önerme 3.1.8: S yarı latis, L latis olsun. D permuting n-türev olmak üzere;

D izotondur.$\Leftrightarrow$ $D(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \wedge D(\alpha_1', \alpha_2, \dots, \alpha_n) = D(\alpha_1 \wedge \alpha_1', \alpha_2, \dots, \alpha_n)$

İspat: $\Rightarrow$) $\alpha_1' \wedge \alpha_1 \leq \alpha_1$ ve $\alpha_1' \wedge \alpha_1 \leq \alpha_1'$ ve D izoton olduğundan;

$$D(\alpha_1 \wedge \alpha_1', \alpha_2, \dots, \alpha_n) \leq D(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$$

$$D(\alpha_1 \wedge \alpha_1', \alpha_2, \dots, \alpha_n) \leq D(\alpha_1', \alpha_2, \dots, \alpha_n)$$

$$D(\alpha_1 \wedge \alpha_1', \alpha_2, \dots, \alpha_n) = D(\alpha_1 \wedge \alpha_1', \alpha_2, \dots, \alpha_n) \wedge D(\alpha_1 \wedge \alpha_1', \alpha_2, \dots, \alpha_n)$$

$$\leq D(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \wedge D(\alpha_1', \alpha_2, \dots, \alpha_n) \Rightarrow \text{(i)}$$

Önerme 3.1.1(i) den $D(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \leq d(\alpha_1)$ ve $D(\alpha_1', \alpha_2, \dots, \alpha_n) \leq d(\alpha_1')$ dir.

$$D(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) = D(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \wedge d(\alpha_1)$$

$$D(\alpha_1', \alpha_2, \dots, \alpha_n) = D(\alpha_1', \alpha_2, \dots, \alpha_n) \wedge d(\alpha_1')$$

Böylece ;

$$D(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \wedge D(\alpha_1', \alpha_2, \dots, \alpha_n) = [D(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \wedge d(\alpha_1)]$$

$$\wedge [\, D(\alpha_1', \alpha_2, \dots, \alpha_n) \wedge d(\alpha_1')]$$

L latis olduğundan; $[D(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \wedge d(\alpha_1)] \wedge [\, D(\alpha_1', \alpha_2, \dots, \alpha_n) \wedge d(\alpha_1')]$

$$= [D(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \wedge d(\alpha_1')] \wedge [\, d(\alpha_1) \wedge D(\alpha_1', \alpha_2, \dots, \alpha_n)]$$

$$\leq [D(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \wedge d(\alpha_1')] \vee [\, d(\alpha_1) \wedge D(\alpha_1', \alpha_2, \dots, \alpha_n)]$$

$$= D(\alpha_1 \wedge \alpha_1', \alpha_2, \dots, \alpha_n)$$

$$D(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \wedge D(\alpha_1', \alpha_2, \dots, \alpha_n) \leq D(\alpha_1 \wedge \alpha_1', \alpha_2, \dots, \alpha_n) \Rightarrow \text{(ii)}$$

(i) ve (ii) den $D(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \wedge D(\alpha_1', \alpha_2, \dots, \alpha_n) = D(\alpha_1 \wedge \alpha_1', \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ olur.

$\Leftarrow$) $D(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \wedge D(\alpha_1', \alpha_2, \dots, \alpha_n) = D(\alpha_1 \wedge \alpha_1', \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ ve

$\alpha_1 \leq \alpha_1'$ olsun. $\alpha_1' \wedge \alpha_1 = \alpha_1$ olduğundan;

$$D(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) = D(\alpha_1 \wedge \alpha_1', \alpha_2, \dots, \alpha_n) = D(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \wedge D(\alpha_1', \alpha_2, \dots, \alpha_n)$$

$D(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \leq D(\alpha_1', \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ olup D, izoton olur.

Önerme 3.1.9: S yarı latisinin ve L latisinin en büyük elemanı 1 olsun. D permuting n-türevin izi d olmak üzere $d(1) = 1$ olsun. Eğer D, izoton ise;

$$D(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) = d(\alpha_1) \wedge D(1, \alpha_2, \dots, \alpha_n).$$

İspat: D izoton permuting n-türev olsun.

$$\alpha_1 \leq 1,\ D(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \leq D(1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$$

$$D(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \leq d(\alpha_1)$$

$$D(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \leq D(1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \wedge d(\alpha_1) \Rightarrow \text{(i)}$$

Ayrıca; $D(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) = D(1 \wedge \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$

$$= [D(1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \wedge d(\alpha_1)] \vee [D(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \wedge d(1)]$$

1 en büyük eleman olduğundan;

$$D(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) = [D(1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \wedge d(\alpha_1)] \vee D(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$$

$$D(1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \wedge d(\alpha_1) \leq D(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \Rightarrow \text{(ii)}$$

(i) ve (ii) den $D(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) = d(\alpha_1) \wedge D(1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$.

3.2 Yarı Latisten Latise Tanımlı Permuting $n - f$ Türev

Tanım 3.2.1: S yarı latis, L latis ve $D: S \ x \ S \ x \dots x \ S \to L$ permuting dönüşüm olsun. $f: S \to L$ tanımlı bir fonksiyon olmak üzere aşağıdaki şartlar sağlanırsa D'ye permuting $n - f$ türev denir. $1 \leq i \leq n$ ve $\forall\ \alpha_1, \alpha_1', \dots, \alpha_i, \alpha_i', \dots, \alpha_n, \alpha_n' \in S$ için;

$$D(\alpha_1 \wedge \alpha_1', \alpha_2, \dots, \alpha_i, \dots, \alpha_n) = [\ D(\alpha_1, \alpha_1, \dots, \alpha_i, \dots, \alpha_n) \wedge f(\alpha_1')\ ] \vee [\ f(\alpha_1) \wedge D(\alpha_1', \alpha_1, \dots, \alpha_i, \dots, \alpha_n)\ ]$$

$$\dots$$

$$D(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_i \wedge \alpha_i', \dots, \alpha_n) = [\ D(\alpha_1, \alpha_1, \dots, \alpha_i, \dots, \alpha_n) \wedge f(\alpha_i')\ ] \vee [\ f(\alpha_n) \wedge D(\alpha_1, \alpha_1, \dots, \alpha_i, \dots, \alpha_i')]$$

$$\dots$$

$D(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_i, \ldots, \alpha_n \wedge \alpha_n') = [\, D(\alpha_1, \alpha_1, \ldots, \alpha_i, \ldots, \alpha_n) \wedge f(\alpha_n')\,] \vee$
$[\, f(\alpha_n) \wedge D(\alpha_1, \alpha_1, \ldots, \alpha_i, \ldots, \alpha_n')]$

Örnek 3.2.1: S yarı latis, L latis ve $D: S \times S \times \ldots \times S \to L$ dönüşümü aşağıdaki gibi $\forall\, \alpha_1, \alpha_1', \ldots, \alpha_n, \alpha_n' \in S$ için; $f: S \to L$ fonksiyonu,

$f(\alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \ldots \wedge \alpha_n) = f(\alpha_1) \wedge f(\alpha_2) \wedge \ldots \wedge f(\alpha_n)$ özelliğini sağlayan fonksiyon ve $D(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) = f(\alpha_1) \wedge f(\alpha_2) \wedge \ldots \wedge f(\alpha_n)$ olarak tanımlansın.

O halde; D permuting $n - f$ türev olur. Gerçekten;

$$\begin{aligned} D(\alpha_1 \wedge \alpha_1', \alpha_2, \ldots, \alpha_n) &= [\, f(\alpha_1 \wedge \alpha_1') \wedge f(\alpha_2) \wedge \ldots \wedge f(\alpha_n)\,] \\ &= [\, f(\alpha_1) \wedge f(\alpha_1') \wedge f(\alpha_2) \wedge \ldots \wedge f(\alpha_n)\,] \\ &= \big([\, f(\alpha_1) \wedge f(\alpha_2) \wedge \ldots \wedge f(\alpha_n)\,] \wedge f(\alpha_1')\big) \vee \\ &\quad \big([\, f(\alpha_1') \wedge f(\alpha_2) \wedge \ldots \wedge f(\alpha_n)] \wedge f(\alpha_1)\big) \\ &= \big([\, D(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \wedge f(\alpha_1')\,]\big) \vee \\ &\quad \big([\, f(\alpha_1) \wedge D(\alpha_1', \alpha_2, \ldots, \alpha_n)\,]\big) \end{aligned}$$

$D(\alpha_1 \wedge \alpha_1', \alpha_2, \ldots, \alpha_n) = [\, D(\alpha_1, \alpha_1, \ldots, \alpha_n) \wedge f(\alpha_1')\,] \vee [\, f(\alpha_1) \wedge D(\alpha_1', \alpha_1, \ldots, \alpha_n)\,]$ olup; D permuting $n - f$ türev olur.

Örnek 3.2.2: S yarı latis, L latis ve $D: S \times S \times \ldots \times S \to L$ dönüşüm olsun.

$a \in L$ olmak üzere; $f: S \to L$ fonksiyonu $\forall\, a, b \in S$ için $f(a \wedge b) = f(a) \wedge f(b)$ özelliğindeli bir fonksiyon olmak üzere; $\forall\, \alpha_1, \alpha_1', \ldots, \alpha_n \in S$ için,

$$D(\alpha_1, \alpha_1, \ldots, \alpha_n) = [\, f(\alpha_1) \wedge f(\alpha_2) \wedge \ldots \wedge f(\alpha_n)\,] \wedge a$$

olarak tanımlansın. O halde; D permuting $n - f$ türev olur.

Örnek 3.2.3: S yarı latis, L latis ve $D: S \times S \times \ldots \times S \to L$ dönüşüm olsun.
$\forall\, \alpha_1, \alpha_1', \ldots, \alpha_n \in S$ için;

$D(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) = f(\alpha_1) \vee f(\alpha_2) \vee \ldots \vee f(\alpha_n)$

olarak tanımlansın. D permuting $n - f$ türev değildir. Gerçekten;

$D(\alpha_1 \wedge \alpha'_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) = f(\alpha_1 \wedge \alpha'_1) \vee f(\alpha_2) \vee \ldots \vee f(\alpha_n)$ olur. Diğer taraftan;

$$\big([\, D\big(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n\big) \wedge f(\alpha'_1)\,]\big) \vee \big(\,[\, f(\alpha_1) \wedge D(\alpha'_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)\,]\big)$$

$$= \big([\, f(\alpha_1) \vee f(\alpha_2) \vee \ldots \vee f(\alpha_n)\,] \wedge f(\alpha'_1)\big) \vee$$

$$\big([\, f(\alpha_1) \vee f(\alpha_2) \vee \ldots \vee f(\alpha_n)\,] \wedge f(\alpha'_1)\big)$$ olur. Yani;

$$D(\alpha_1 \wedge \alpha'_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \neq \big([\, D(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \wedge f(\alpha'_1)\,]\big) \vee$$

$$\big(\,[f(\alpha_1) \wedge D(\alpha'_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)]\big)$$

olduğundan D bir permuting f- türev değildir.

Önerme 3.2.1: S yarı latis, L latis ve d, $D: S \times S \times \ldots \times S \to L$ permuting $n - f$ türevin izi olsun. O halde aşağıdakiler vardır: $\forall\, \alpha, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in S$ için,

i)$D(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \leq f\,(\alpha_1)$, $D(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \leq f(\alpha_2) \ldots D(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \leq f(\alpha_n)$

ii) $D(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \leq f(\alpha_1) \wedge f(\alpha_2) \wedge, \ldots, \wedge f(\alpha_n)$,

iii) $d(\alpha) \leq f(\alpha)$.

İspat: (i) $\alpha_1 \wedge \alpha_1 = \alpha_1$ olduğunu biliyoruz.

$$D(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) = D(\alpha_1 \wedge \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$$

$$= \big([\, D\big(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n\big) \wedge f(\alpha_1)]\big) \vee$$

$$\big(\,[f(\alpha_1) \wedge D(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)]\big)$$

$D(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) = [\, D(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \wedge f(\alpha_1)\,]$ olur buradan;

$D(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \leq f(\alpha_1)$ olur.

Benzer şekilde $D(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \leq f(\alpha_2), \ldots, D(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \leq f(\alpha_n)$ olduğu görülebilir.

(ii) $D(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \leq f(\alpha_1)$

$D(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \leq f(\alpha_2)$

. . .

$D(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \leq f(\alpha_n)$ olduğunu biliyoruz. O halde;

$D(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \wedge \dots \wedge D(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \leq f(\alpha_1) \wedge f(\alpha_2) \wedge, \dots, \wedge f(\alpha_n)$ olur.

(iii) $\alpha = \alpha \wedge \alpha$ olduğunu biliyoruz.

$d(\alpha) = D(\alpha, \alpha, \dots, \alpha) = D(\alpha \wedge \alpha, \alpha, \dots, \alpha)$

$= (D(\alpha, \alpha, \dots, \alpha) \wedge f(\alpha)) \vee (f(\alpha) \wedge D(\alpha, \alpha, \dots, \alpha))$

$= (D(\alpha, \alpha, \dots, \alpha) \wedge f(\alpha)) = d(\alpha) \wedge f(\alpha)$ olup;

$d(\alpha) = d(\alpha) \wedge f(\alpha)$ olur. O halde; $d(\alpha) \leq f(\alpha)$ dir.

Sonuç 3.2.1: S yarı latis ve L latis olsun. $0 \in S$ ve 0, L' nin en küçük elemanı olsun. $D: S \times S \times \dots \times S \to L$ permuting $n - f$ türev olmak üzere; $f(0) = 0$ ise $D(0, \alpha_2, \dots, \alpha_n) = 0$ dır.

İspat: $D(0, \alpha_2, \dots, \alpha_n) = D(0 \wedge 0, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$

$= (D(0, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \wedge f(0)) \vee (f(0) \wedge D(0, \alpha_2, \dots, \alpha_n))$

$= 0 \vee 0 = 0$ olup $D(0, \alpha_2, \dots, \alpha_n)=0$ olur.

Sonuç 3.2.2: S yarı latis, $1 \epsilon S$ en büyük eleman olsun. L latis ve $D: S \times S \times \dots \times S \to L$ permuting $n - f$ türev olmak üzere; $d(1) = 1$ ise $D(1, \alpha_2, \dots \alpha_i, \dots, \alpha_n) \leq f(\alpha_i)$ dir. (i = 2,3,…,n)

İspat: İspatı açıktır.

Önerme 3.2.2: S yarı latis, L latis ve $D: S \times S \times \dots \times S \to L$ permuting n-f türev olsun. O halde aşağıdakiler vardır: $\forall\ \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \epsilon S$ için,

(i) $D(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \wedge D(\alpha_1', \alpha_2, \dots, \alpha_n) \leq D(\alpha_1 \wedge \alpha_1', \alpha_2, \dots, \alpha_n)$

(ii) $D(\alpha_1 \wedge \alpha_1', \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \leq D(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \vee D(\alpha_1', \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$

(iii) $D(\alpha_1 \wedge \alpha_1', \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \leq f(\alpha_1) \vee f(\alpha_1')$

İspat: (i) Önerme 3.2.1(i) den;

$D(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \leq f(\alpha_1)$ ve $D(\alpha_1', \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \leq f(\alpha_1')$ yazabiliriz. Böylece;

$$D(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \wedge D(\alpha_1', \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \leq f(\alpha_1) \wedge D(\alpha_1', \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$$

$$D(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \wedge D(\alpha_1', \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \leq D(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \wedge f(\alpha_1')$$

Bu durumda;

$$\begin{aligned} D(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \wedge D(\alpha_1', \alpha_2, \ldots, \alpha_n) &\leq \big([\, D(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \wedge f(\alpha_1')\,]\big) \vee \\ &\quad \big([\, f(\alpha_1) \wedge D(\alpha_1', \alpha_2, \ldots, \alpha_n)\,]\big) \\ &= D(\alpha_1 \wedge \alpha_1', \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \end{aligned}$$ elde edilir.

Böylece; $D(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \wedge D(\alpha_1', \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \leq D(\alpha_1 \wedge \alpha_1', \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ olur.

(ii) $$f(\alpha_1) \wedge D(\alpha_1', \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \leq D(\alpha_1', \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$$

$$D(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \wedge f(\alpha_1') \leq D(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$$ yazabiliriz.

$$\begin{aligned} D(\alpha_1 \wedge \alpha_1', \alpha_2, \ldots, \alpha_n) &= [\, D(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \wedge f(\alpha_1')\,] \vee \\ &\quad [\, f(\alpha_1) \wedge D(\alpha_1', \alpha_2, \ldots, \alpha_n)\,] \\ &\leq D(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \vee D(\alpha_1', \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \end{aligned}$$ olup;

$D(\alpha_1 \wedge \alpha_1', \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \leq D(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \vee D(\alpha_1', \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ olur.

(iii) $$f(\alpha_1) \wedge D(\alpha_1', \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \leq f(\alpha_1)$$

$$D(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \wedge f(\alpha_1') \leq f(\alpha_1')$$ yazabiliriz.

$$\begin{aligned} D(\alpha_1 \wedge \alpha_1', \alpha_2, \ldots, \alpha_n) &= [\, f(\alpha_1) \wedge D(\alpha_1', \alpha_2, \ldots, \alpha_n)\,] \vee \\ &\quad [\, D(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \wedge f(\alpha_1')\,] \\ &\leq f(\alpha_1) \vee f(\alpha_1') \end{aligned}$$ olup;

$D(\alpha_1 \wedge \alpha_1', \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \leq f(\alpha_1) \vee f(\alpha_1')$ olur.

Önerme 3.2.3: S, $\vee -$ yarı latis, L latis ve d, D joinitiv permuting n-f türevin izi olsun. Aşağıdaki eşitlikler vardır: $\forall\ \alpha_1, \alpha_1', \ldots, \alpha_n \epsilon\ S$ için,

(i) $d(\alpha_1 \vee \alpha_1') = d(\alpha_1) \vee \ldots \vee D(\alpha_1, \alpha_1', \ldots, \alpha_1', \alpha_1')$

$$\vee \ldots \vee D(\alpha_1, \alpha_1, \ldots, \alpha_1, \alpha_1') \ \vee \ d(\alpha_1')$$

(ii) $d(\alpha_1) \vee d(\alpha_1') \ \leq d(\alpha_1 \vee \alpha_1')$

İspat: (i) $d(\alpha_1 \vee \alpha_1') = D(\alpha_1 \vee \alpha_1', \alpha_1 \vee \alpha_1', \ldots, \alpha_1 \vee \alpha_1')$

$$= D(\alpha_1, \alpha_1 \vee \alpha_1', \ldots, \alpha_1 \vee \alpha_1') \vee \ D(\alpha_1', \alpha_1 \vee \alpha_1', \ldots, \alpha_1 \vee \alpha_1')$$

$$= [D(\alpha_1, \alpha_1, \ldots, \alpha_1 \vee \alpha_1') \vee D(\alpha_1, \alpha_1', \ldots, \alpha_1 \vee \alpha_1')] \vee$$

$$[D(\alpha_1', \alpha_1, \ldots, \alpha_1 \vee \alpha_1') \vee D(\alpha_1', \alpha_1', \ldots, \alpha_1 \vee \alpha_1')]$$

Böyle devam edilirse;

$$d(\alpha_1 \vee \alpha_1') = D(\alpha_1, \alpha_1, \ldots, \alpha_1) \vee D(\alpha_1, \alpha_1', \ldots, \alpha_1')$$

$$\vee, \ldots, \vee\ D(\alpha_1', \alpha_1, \ldots, \alpha_1) \vee D(\alpha_1', \alpha_1', \ldots, \alpha_1')$$

$= d(\alpha_1) \vee D(\alpha_1, \alpha_1', \ldots, \alpha_1') \vee, \ldots, \vee\ D(\alpha_1', \alpha_1, \ldots, \alpha_1) \vee d(\alpha_1')$ olup

$d(\alpha_1 \vee \alpha_1') = d(\alpha_1) \vee D(\alpha_1, \alpha_1', \ldots, \alpha_1') \vee, \ldots, \vee\ D(\alpha_1', \alpha_1, \ldots, \alpha_1) \vee d(\alpha_1')$ olur.

(ii) $D(\alpha_1, \alpha_1', \ldots, \alpha_1') \leq d(\alpha_1)$

$D(\alpha_1', \alpha_1, \ldots, \alpha_1) \leq d(\alpha_1')$ olduğunu biliyoruz.

$$d(\alpha_1) \vee d(\alpha_1') \leq d(\alpha_1) \vee D(\alpha_1, \alpha_1', \ldots, \alpha_1') \vee, \ldots, \vee\ D(\alpha_1', \alpha_1, \ldots, \alpha_1) \vee d(\alpha_1')$$

$= \ d(\alpha_1 \vee \alpha_1')$ olup

$d(\alpha_1) \vee d(\alpha_1') \leq d(\alpha_1 \vee \alpha_1')$ olur.

Teorem 3.2.1: S yarı latis, L latis ve d, D permuting $n - f$ türevin izi olsun. $\forall\ \alpha_1, \alpha_1', \alpha_2, \ldots, \alpha_n\ \epsilon\ S$ için;

$f(\alpha_1 \wedge\ \alpha_2 \wedge, \ldots, \ \wedge \alpha_n) = f(\alpha_1) \wedge f(\alpha_2) \wedge \ldots \wedge f(\alpha_n)$ ve L dağılmalı latis olsun. Bu durumda; $d(\alpha_1 \wedge \alpha_1') = (d(\alpha_1') \wedge f(\alpha_1)) \vee D(\alpha_1, \alpha_1', \ldots, \alpha_1')$

$$\vee \ldots \vee\ D(\alpha_1', \alpha_1, \ldots, \alpha_1) \vee (d(\alpha_1) \wedge f(\alpha_1'))$$ dir.

İspat: $d(\alpha_1 \wedge \alpha_1') = D(\alpha_1 \wedge \alpha_1', \alpha_1 \wedge \alpha_1', \ldots, \alpha_1 \wedge \alpha_1')$

$$= [D(\alpha_1, \alpha_1 \wedge \alpha_1', \ldots, \alpha_1 \wedge \alpha_1') \wedge f(\alpha_1')] \vee$$

$$[f(\alpha_1) \wedge D(\alpha_1', \alpha_1 \wedge \alpha_1', \ldots, \alpha_1 \wedge \alpha_1')]$$

$$= [\, D(\alpha_1, \alpha_1, \alpha_1 \wedge \alpha_1', \ldots, \alpha_1 \wedge \alpha_1') \wedge f(\alpha_1') \wedge f(\alpha_1')] \vee$$

$$[\, f(\alpha_1) \wedge D(\alpha_1, \alpha_1, \alpha_1 \wedge \alpha_1', \ldots, \alpha_1 \wedge \alpha_1') \wedge f(\alpha_1')] \vee$$

$$[\, f(\alpha_1') \wedge D(\alpha_1, \alpha_1', \alpha_1 \wedge \alpha_1', \ldots, \alpha_1 \wedge \alpha_1') \wedge f(\alpha_1)] \vee$$

$$[\, f(\alpha_1) \wedge f(\alpha_1) \wedge D(\alpha_1', \alpha_1', \alpha_1 \wedge \alpha_1', \ldots, \alpha_1 \wedge \alpha_1')]$$

Böyle devam edilirse;

$$d(\alpha_1 \wedge \alpha_1') = [\, D(\alpha_1, \alpha_1, \ldots, \alpha_1) \wedge f(\alpha_1')] \vee$$

$$[\, f(\alpha_1) \wedge D(\alpha_1, \alpha_1', \ldots, \alpha_1') \wedge f(\alpha_1')] \vee \ldots \vee$$

$$[\, f(\alpha_1') \wedge\ D(\alpha_1', \alpha_1, \ldots, \alpha_1) \wedge f(\alpha_1)] \vee$$

$$[D(\alpha_1', \alpha_1', \ldots, \alpha_1') \wedge\ f(\alpha_1)] \text{ elde edilir.}$$

Önerme 3.2.1(i) den

$D(\alpha_1, \alpha_1', \ldots, \alpha_1') \leq f(\alpha_1)$

$D(\alpha_1, \alpha_1', \ldots, \alpha_1') \leq f(\alpha_1')$ olduğunu biliyoruz. Buradan;

$D(\alpha_1, \alpha_1', \ldots, \alpha_1') \leq f(\alpha_1) \wedge f(\alpha_1')$ elde edilir.

Böylece; $f(\alpha_1) \wedge D(\alpha_1, \alpha_1', \ldots, \alpha_1') \wedge f(\alpha_1') = D(\alpha_1, \alpha_1', \ldots, \alpha_1')$ yazabiliriz. Benzer şekilde;

$D(\alpha_1', \alpha_1, \ldots, \alpha_1) \leq f(\alpha_1)$

$D(\alpha_1', \alpha_1, \ldots, \alpha_1) \leq f(\alpha_1')$ olduğunu biliyoruz. Buradan;

$D(\alpha_1', \alpha_1, \ldots, \alpha_1) \leq f(\alpha_1) \wedge f(\alpha_1')$ elde edilir.

O halde; $f(\alpha_1) \wedge D(\alpha_1', \alpha_1, \dots, \alpha_1) \wedge f(\alpha_1') = D(\alpha_1', \alpha_1, \dots, \alpha_1)$ yazabiliriz. O halde;

$$d(\alpha_1 \wedge \alpha_1') = [d(\alpha_1') \wedge f(\alpha_1)] \vee D(\alpha_1, \alpha_1', \dots, \alpha_1') \vee \dots \vee$$
$$D(\alpha_1', \alpha_1, \dots, \alpha_1) \vee [d(\alpha_1) \wedge f(\alpha_1')]$$

Sonuç 3.2.3: S yarı latis, L latis ve d, D permuting $n - f$ türevin izi d olmak üzere aşağıdakiler vardır:

(i) $D(\alpha_1, \alpha_1', \dots, \alpha_1') \vee \dots \vee D(\alpha_1', \alpha_1, \dots, \alpha_1) \leq d(\alpha_1 \wedge \alpha_1')$

(ii) $d(\alpha_1') \wedge f(\alpha_1) \leq d(\alpha_1 \wedge \alpha_1')$ ve $d(\alpha_1) \wedge f(\alpha_1') \leq d(\alpha_1 \wedge \alpha_1')$

(iii) $d(\alpha_1) \wedge d(\alpha_1') \leq d(\alpha_1 \wedge \alpha_1')$

İspat: (i) $D(\alpha_1, \alpha_1', \dots, \alpha_1') \leq D(\alpha_1, \alpha_1', \dots, \alpha_1') \vee \dots \vee D(\alpha_1', \alpha_1, \dots, \alpha_1)$

$$\leq [d(\alpha_1') \wedge f(\alpha_1)] \vee D(\alpha_1, \alpha_1', \dots, \alpha_1') \vee \dots \vee$$
$$D(\alpha_1', \alpha_1, \dots, \alpha_1) \vee [d(\alpha_1) \wedge f(\alpha_1')]$$
$$= d(\alpha_1 \wedge \alpha_1')$$

$$D(\alpha_1', \alpha_1, \dots, \alpha_1) \leq D(\alpha_1, \alpha_1', \dots, \alpha_1') \vee \dots \vee D(\alpha_1', \alpha_1, \dots, \alpha_1)$$
$$\leq [d(\alpha_1') \wedge f(\alpha_1)] \vee D(\alpha_1, \alpha_1', \dots, \alpha_1') \vee \dots \vee$$
$$D(\alpha_1', \alpha_1, \dots, \alpha_1) \vee [d(\alpha_1) \wedge f(\alpha_1')]$$
$$= d(\alpha_1 \wedge \alpha_1')$$

O halde; $D(\alpha_1, \alpha_1', \dots, \alpha_1') \vee \dots \vee D(\alpha_1', \alpha_1, \dots, \alpha_1) \leq d(\alpha_1 \wedge \alpha_1')$ dir.

(ii) $d(\alpha_1') \wedge f(\alpha_1) \leq [d(\alpha_1') \wedge f(\alpha_1)] \vee D(\alpha_1, \alpha_1', \dots, \alpha_1') \vee \dots \vee$

$$D(\alpha_1', \alpha_1, \dots, \alpha_1) \vee [d(\alpha_1) \wedge f(\alpha_1')]$$
$$\leq d(\alpha_1 \wedge \alpha_1')$$

$$d(\alpha_1) \wedge f(\alpha_1') \leq [d(\alpha_1') \wedge f(\alpha_1)] \vee D(\alpha_1, \alpha_1', \dots, \alpha_1') \vee \dots \vee$$
$$D(\alpha_1', \alpha_1, \dots, \alpha_1) \vee [d(\alpha_1) \wedge f(\alpha_1')]$$
$$\leq d(\alpha_1 \wedge \alpha_1')$$

Sonuç olarak; $d(\alpha_1') \wedge f(\alpha_1) \leq d(\alpha_1 \wedge \alpha_1')$

$d(\alpha_1) \wedge f(\alpha_1') \leq d(\alpha_1 \wedge \alpha_1')$ olur.

(iii) $d(\alpha_1') \wedge f(\alpha_1) \leq d(\alpha_1 \wedge \alpha_1')$

$d(\alpha_1) \wedge f(\alpha_1') \leq d(\alpha_1 \wedge \alpha_1')$ Böylece,

$(d(\alpha_1') \wedge f(\alpha_1)) \wedge (d(\alpha_1) \wedge f(\alpha_1')) \leq d(\alpha_1 \wedge \alpha_1')$

$(d(\alpha_1) \wedge f(\alpha_1)) \wedge (d(\alpha_1') \wedge f(\alpha_1')) \leq d(\alpha_1 \wedge \alpha_1')$

$d(\alpha_1) \leq f(\alpha_1)$ ve $d(\alpha_1') \leq f(\alpha_1')$ olduğunu biliyoruz. O halde;

$d(\alpha_1) \wedge d(\alpha_1') \leq d(\alpha_1 \wedge \alpha_1')$ olur.

Sonuç 3.2.4: S yarı latis ve $1 \in S$ en büyük eleman olsun. L dağılmalı latis olmak üzere; d, D permuting $n - f$ türevin izi olsun. Aşağıdakiler vardır:

(i) Eğer $f(\alpha) \geq d(1)$ ise $d(\alpha) \geq d(1)$.

(ii) Eğer $f(\alpha) \leq d(1)$ ise $d(\alpha) = f(\alpha)$.

(iii) Eğer $\alpha_1 \leq \alpha_1'$, f artan fonksiyon ve $d(\alpha_1') = f(\alpha_1')$ ise $d(\alpha_1) = f(\alpha_1)$.

İspat: (i) $f(\alpha) \geq d(1)$ olsun.

$d(1) = f(\alpha) \wedge d(1) \leq d(\alpha \wedge 1) = d(\alpha)$

(ii) $f(\alpha) \leq d(1)$ olsun.

$f(\alpha) = f(\alpha) \wedge d(1) \leq d(\alpha \wedge 1) = d(\alpha) \Rightarrow f(\alpha) \leq d(\alpha)$

$d(\alpha) \leq f(\alpha)$ olduğunu biliyoruz.

O halde; $d(\alpha) = f(\alpha)$

(iii) $\alpha_1 \leq \alpha_1'$ ve $d(\alpha_1') = f(\alpha_1')$ olsun.

$d(\alpha_1) = d(\alpha_1 \wedge \alpha_1') = (d(\alpha_1') \wedge f(\alpha_1)) \vee D(\alpha_1, \alpha_1', \dots, \alpha_1')$

$\vee \ldots \vee D(\alpha_1', \alpha_1, \ldots, \alpha_1) \vee (d(\alpha_1) \wedge f(\alpha_1'))$

f artan fonksiyon olduğundan; $d(\alpha_l) \leq f(\alpha_1) \leq f(\alpha_1') = d(\alpha_1')$ olup,

$d(\alpha_1') \wedge f(\alpha_1) = f(\alpha_1)$

$d(\alpha_1) \wedge f(\alpha_1') = d(\alpha_1)$ eşitliklerini yerlerine yazarsak;

$d(\alpha_1 \wedge \alpha_1') = f(\alpha_1) \vee D(\alpha_1, \alpha_1', \dots, \alpha_1') \vee \ldots \vee D(\alpha_1', \alpha_1, \dots, \alpha_1) \vee d(\alpha_1)$

$= f(\alpha_1)$ olur.

Sonuç olarak; $d(\alpha_1) = f(\alpha_1)$.

Sonuç 3.2.5: S yarı latis ve $1 \in S$ en büyük eleman olsun. L latis olmak üzere; d, D permuting $n - f$ türevin izi olsun. $f(1) = 1$ için aşağıdakiler vardır:

(i) Eğer $f(\alpha_1) \leq D(1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ ise $D(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) = f(\alpha_1)$

(ii) Eğer $f(\alpha_1) \geq D(1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ ise $D(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \geq D(1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$

İspat: (i) $\alpha_1 = \alpha_1 \wedge 1$ yazabiliriz.

$D(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) = D(\alpha_1 \wedge 1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$

$= (D(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \wedge f(1)) \vee (f(\alpha_1) \wedge D(1, \alpha_2, \dots, \alpha_n))$

$= D(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \vee f(\alpha_1)$ olur.

O halde; $D(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \geq f(\alpha_1)$. Diğer taraftan;

$f(\alpha_1) \geq D(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ olduğunu biliyoruz.

Sonuç olarak; $D(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) = f(\alpha_1)$

(ii) $\alpha_1 = \alpha_1 \wedge 1$ yazabiliriz.

$D(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) = D(\alpha_1 \wedge 1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$

$= (D(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \wedge f(1)) \vee (f(\alpha_1) \wedge D(1, \alpha_2, \dots, \alpha_n))$

$= D(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \vee D(1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$

$D(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \geq D(1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$

Önerme 3.2.4: S yarı latis ve $1 \in S$ en büyük eleman olsun. L latis olmak üzere; D permuting $n - f$ türev olsun. $f(\alpha_1) \wedge f(\alpha_1') = f(\alpha_1 \wedge \alpha_1')$ için, eğer $D(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) = f(\alpha_1) \wedge D(1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ ise ;

$D(\alpha_1 \wedge \alpha_1', \alpha_2, \dots, \alpha_n) = D(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \wedge D(\alpha_1', \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ dir.

İspat: $D(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) = f(\alpha_1) \wedge D(1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ olduğundan;

$D(\alpha_1 \wedge \alpha_1', \alpha_2, \dots, \alpha_n) = f(\alpha_1 \wedge \alpha_1') \wedge D(1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$

$= f(\alpha_1) \wedge f(\alpha_1') \wedge D(1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$

$= (f(\alpha_1) \wedge D(1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)) \wedge (f(\alpha_1') \wedge D(1, \alpha_2, \dots, \alpha_n))$

$= D(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \wedge D(\alpha_1', \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ olur.

Sonuç olarak; $D(\alpha_1 \wedge \alpha_1', \alpha_2, \dots, \alpha_n) = D(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \wedge D(\alpha_1', \alpha_2, \dots, \alpha_n)$.

Önerme 3.2.5: S yarı latis, L latis ve D permuting $n - f$ türev olsun. Ayrıca f artan fonksiyon olsun. Eğer $\alpha_1' \leq \alpha_1$ ve $D(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) = f(\alpha_1)$ ise ;
$D(\alpha_1', \alpha_2, \dots, \alpha_n) = f(\alpha_1')$ dir.

İspat: $\alpha_1' \leq \alpha_1$ olduğundan; $\alpha_1' = \alpha_1 \wedge \alpha_1'$ yazabiliriz.

$D(\alpha_1', \alpha_2, \dots, \alpha_n) = D(\alpha_1 \wedge \alpha_1', \alpha_2, \dots, \alpha_n)$

$= (D(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \wedge f(\alpha_1')) \vee (f(\alpha_1) \wedge D(\alpha_1', \alpha_2, \dots, \alpha_n))$

$D(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) = f(\alpha_1)$ ve f artan fonksiyonu için,

$f(\alpha_1) \wedge D(\alpha_1', \alpha_2, \dots, \alpha_n) = D(\alpha_1', \alpha_2, \dots, \alpha_n)$

$D(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \wedge f(\alpha_1') = f(\alpha_1')$ olup;

$D(\alpha_1', \alpha_2, \dots, \alpha_n) = f(\alpha_1')$ olur.

Teorem 3.2.2: S yarı latis ve L latis olsun. Eğer D permuting $n - f$ türevi için f fonksiyonu $f(\alpha_1) \vee f(\alpha_1') = f(\alpha_1 \vee \alpha_1')$ eşitliğini sağlıyorsa L latisi dağılmalı latistir.

İspat: Örnek 1 den biliyoruz ki ;

$D(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) = f(\alpha_1) \wedge f(\alpha_2) \wedge \dots \wedge f(\alpha_n)$ tanımlandığında D, permuting $n - f$ türev olur.

$$D(\alpha_1 \vee \alpha'_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) = f(\alpha_1 \vee \alpha'_1) \wedge f(\alpha_2) \wedge \dots \wedge f(\alpha_n)$$

$$= (f(\alpha_1) \vee f(\alpha'_1)) \wedge f(\alpha_2) \wedge \dots \wedge f(\alpha_n)$$

Diğer taraftan D joinitiv olduğundan;

$$D(\alpha_1 \vee \alpha'_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) = D(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \vee D(\alpha'_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$$

$$= (f(\alpha_1) \wedge f(\alpha_2) \wedge, \dots, \wedge f(\alpha_n)) \vee (f(\alpha'_1) \wedge f(\alpha_2) \wedge, \dots, \wedge f(\alpha_n))$$

Buradan; $(f(\alpha_1) \vee f(\alpha'_1)) \wedge f(\alpha_2) \wedge, \dots, \wedge f(\alpha_n) = (f(\alpha_1) \wedge f(\alpha_2) \wedge, \dots, \wedge f(\alpha_n)) \vee$

$$(f(\alpha'_1) \wedge f(\alpha_2) \wedge, \dots, \wedge f(\alpha_n))$$

olup, L latisi dağılmalı latis olur.

Sonuç 3.2.6: S yarı latis ve L latis olsun. Eğer her D, permuting $n - f$ türev joinitiv oluyorsa, L modüler latis olur.

İspat: Her dağılmalı latisin modüler latis olduğunu biliyoruz. O halde bir önceki teoremin ispatından açıktır.

Tanım 3.2.2: S yarı latis, L latis olsun.D, permuting $n - f$ türev olmak üzere;

(i) $\alpha_1 \leq \alpha'_1$ iken $D(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \leq D(\alpha'_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ oluyorsa D'ye izoton permuting $n - f$ türev denir.

(ii) Eğer D, 1:1 ise D'ye monomorfik permuting $n - f$ türev denir.

(iii) Eğer D, örten ise D'ye epik permuting $n - f$ türev denir.

Önerme 3.2.6: S yarı latis, L latis olsun. D izoton permuting $n - f$ türev olmak üzere; $f(\alpha_1) \vee f(\alpha'_1) = f(\alpha_1 \vee \alpha'_1)$ ve $D(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) = f(\alpha_1)$
$D(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \leq D(\alpha_1 \vee \alpha'_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ ve $D(\alpha'_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) = f(\alpha'_1)$ olsun. O halde;

$$D(\alpha_1 \vee \alpha'_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) = f(\alpha_1) \vee f(\alpha'_1).$$

İspat: İspatı açıktır.

Önerme 3.2.7: S yarı latis, L latis olsun. D, permuting $n - f$ türev olmak üzere, aşağıdakiler vardır. $\forall \alpha_1, \alpha_1', \alpha_2, \dots, \alpha_n \in S$ için;

(i) Eğer D izoton dönüşüm ise;

$D(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) = D(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \vee (D(\alpha_1 \vee \alpha_1', \alpha_2, \dots, \alpha_n) \wedge f(\alpha_1))$

(ii) D izotondur. $\Leftrightarrow D(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \vee D(\alpha_1', \alpha_2, \dots, \alpha_n) \leq D(\alpha_1 \vee \alpha_1', \alpha_2, \dots, \alpha_n)$

İspat: (i) $\alpha_1 \leq \alpha_1' \vee \alpha_1$ olduğundan; $\alpha_1 = (\alpha_1' \vee \alpha_1) \wedge \alpha_1$ yazabiliriz.

$$D(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) = D((\alpha_1' \vee \alpha_1) \wedge \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$$

D permuting $n - f$ türev olduğundan;

$$D((\alpha_1' \vee \alpha_1) \wedge \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) = (D(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \wedge f(\alpha_1' \vee \alpha_1)) \vee$$
$$(f(\alpha_1) \wedge D((\alpha_1' \vee \alpha_1), \alpha_2, \dots, \alpha_n))$$

D izoton olduğundan;

$$D(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \leq D((\alpha_1' \vee \alpha_1), \alpha_2, \dots, \alpha_n) \leq f(\alpha_1' \vee \alpha_1)$$

O halde; $D(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) = D(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \vee (D(\alpha_1 \vee \alpha_1', \alpha_2, \dots, \alpha_n) \wedge f(\alpha_1))$ olur.

(ii) D izoton permuting $n - f$ türev olsun.

$D(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \leq D((\alpha_1' \vee \alpha_1), \alpha_2, \dots, \alpha_n)$

$D(\alpha_1', \alpha_2, \dots, \alpha_n) \leq D((\alpha_1' \vee \alpha_1), \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ her iki tarafın $\vee$ sı alınırsa;

$D(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \vee D(\alpha_1', \alpha_2, \dots, \alpha_n) \leq D(\alpha_1' \vee \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$

Tersine; $D(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \vee D(\alpha_1', \alpha_2, \dots, \alpha_n) \leq D(\alpha_1' \vee \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ olsun.

Kabul edelim ki; $\alpha_1 \leq \alpha_1'$ olsun. O halde; $\alpha_1' = \alpha_1 \vee \alpha_1'$ yazabiliriz.

$$D(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \leq D(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \vee D(\alpha_1', \alpha_2, \dots, \alpha_n)$$
$$\leq D(\alpha_1' \vee \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$$
$$= D(\alpha_1', \alpha_2, \dots, \alpha_n) \text{ olup,}$$

$D(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \leq D(\alpha_1', \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ yazılır.

Sonuç olarak D izotondur.

Önerme 3.2.8: S yarı latis, L latis ve D, permuting $n - f$ türev olmak üzere; aşağıdakiler vardır:

(i) D izotondur. ⇔ $D(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \wedge D(\alpha_1', \alpha_2, \dots, \alpha_n) = D(\alpha_1 \wedge \alpha_1', \alpha_2, \dots, \alpha_n)$

(ii) D izoton dönüşüm ve $D(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) = f(\alpha_1)$ olsun. Eğer; f fonksiyonu $f(\alpha_1) \vee f(\alpha_1') = f(\alpha_1 \vee \alpha_1')$ şartını sağlar ise;

$D(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \vee D(\alpha_1', \alpha_2, \dots, \alpha_n) = D(\alpha_1' \vee \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ dir.

İspat: (i) D izoton olsun. $\alpha_1' \wedge \alpha_1 \leq \alpha_1'$ ve $\alpha_1' \wedge \alpha_1 \leq \alpha_1$ olduğundan;

$$D(\alpha_1 \wedge \alpha_1', \alpha_2, \dots, \alpha_n) \leq D(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$$

$$D(\alpha_1 \wedge \alpha_1', \alpha_2, \dots, \alpha_n) \leq D(\alpha_1', \alpha_2, \dots, \alpha_n)$$

$$D(\alpha_1 \wedge \alpha_1', \alpha_2, \dots, \alpha_n) \leq D(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \wedge D(\alpha_1', \alpha_2, \dots, \alpha_n) \Rightarrow \text{ (1)}$$

Önerme 3.2.1 (i) den;

$D(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \leq f(\alpha_1)$ ve $D(\alpha_1', \alpha_2, \dots, \alpha_n) \leq f(\alpha_1')$ yazabiliriz.

$$D(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) = D(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \wedge f(\alpha_1)$$

$$D(\alpha_1', \alpha_2, \dots, \alpha_n) = D(\alpha_1', \alpha_2, \dots, \alpha_n) \wedge f(\alpha_1')$$

Böylelikle; $D(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \wedge D(\alpha_1', \alpha_2, \dots, \alpha_n) = (D(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \wedge f(\alpha_1)) \wedge$ $(D(\alpha_1', \alpha_2, \dots, \alpha_n) \wedge f(\alpha_1'))$

L latis olduğundan;

$$\begin{aligned} D(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \wedge D(\alpha_1', \alpha_2, \dots, \alpha_n) \\ &= (D(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \wedge f(\alpha_1')) \wedge (f(\alpha_1) \wedge D(\alpha_1', \alpha_2, \dots, \alpha_n)) \\ &\leq (D(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \wedge f(\alpha_1')) \vee (f(\alpha_1) \wedge D(\alpha_1', \alpha_2, \dots, \alpha_n)) \\ &= D(\alpha_1' \wedge \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \text{ olup,} \end{aligned}$$

$$D(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \wedge D(\alpha_1', \alpha_2, \dots, \alpha_n) \leq D(\alpha_1' \wedge \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \Rightarrow \text{(2)}$$

Sonuç olarak; (1) ve (2) den;

$$D(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \wedge D(\alpha_1', \alpha_2, \dots, \alpha_n) = D(\alpha_1' \wedge \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \text{ olur.}$$

Tersine; $D(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \wedge D(\alpha_1', \alpha_2, \dots, \alpha_n) = D(\alpha_1' \wedge \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ ve

$\alpha_1 \leq \alpha_1'$ olsun.

$$D(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) = D(\alpha_1' \wedge \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$$

$$= D(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \wedge D(\alpha_1', \alpha_2, \dots, \alpha_n) \text{ olup,}$$

$$D(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \leq D(\alpha_1', \alpha_2, \dots, \alpha_n) \text{ olur.}$$

O halde; D izoton olur.

(ii) D izoton dönüşüm olsun. Önerme 3.2.7 den ve L modüler olduğundan;

$$D(\alpha_1', \alpha_2, \dots, \alpha_n) = D(\alpha_1', \alpha_2, \dots, \alpha_n) \vee (D(\alpha_1 \vee \alpha_1', \alpha_2, \dots, \alpha_n) \wedge f(\alpha_1'))$$

$$= (D(\alpha_1', \alpha_2, \dots, \alpha_n) \vee f(\alpha_1')) \wedge D(\alpha_1 \vee \alpha_1', \alpha_2, \dots, \alpha_n) \text{ ve}$$

$\alpha_1' \leq \alpha_1 \vee \alpha_1'$ ve D izoton $\Rightarrow D(\alpha_1', \alpha_2, \dots, \alpha_n) \leq D(\alpha_1 \vee \alpha_1', \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ olur.

$D(\alpha_1', \alpha_2, \dots, \alpha_n) \leq f(\alpha_1')$ olduğunu kullanırsak;

$$D(\alpha_1', \alpha_2, \dots, \alpha_n) = f(\alpha_1') \wedge D(\alpha_1 \vee \alpha_1', \alpha_2, \dots, \alpha_n) \text{ elde ederiz.}$$

Hipotezden; $D(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) = f(\alpha_1)$ olduğunu biliyoruz.

$$D(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \vee D(\alpha_1', \alpha_2, \dots, \alpha_n) = f(\alpha_1) \vee (f(\alpha_1') \wedge D(\alpha_1 \vee \alpha_1', \alpha_2, \dots, \alpha_n))$$

L modüler olduğundan;

$$D(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \vee D(\alpha_1', \alpha_2, \dots, \alpha_n) = (f(\alpha_1) \vee f(\alpha_1')) \wedge D(\alpha_1 \vee \alpha_1', \alpha_2, \dots, \alpha_n)$$

$$= f(\alpha_1 \vee \alpha_1') \wedge D(\alpha_1 \vee \alpha_1', \alpha_2, \dots, \alpha_n)$$

$$= D(\alpha_1 \vee \alpha_1', \alpha_2, \dots, \alpha_n) \text{ olup,}$$

$$D(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \vee D(\alpha_1', \alpha_2, \dots, \alpha_n) = D(\alpha_1 \vee \alpha_1', \alpha_2, \dots, \alpha_n) \text{ olur.}$$

Önerme 3.2.10: S yarı latis, $1 \in S$ en büyük eleman olsun. L latis olmak üzere, D izoton permuting $n - f$ türev ise; $D(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) = f(\alpha_1) \wedge D(1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ dir.

İspat: D izoton permuting $n - f$ türev olsun.

$$D(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \leq D(1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \wedge f(\alpha_1)$$

Önerme 3.2.7'de ; $\alpha_1' = 1$ olarak düşünülürse,

$D(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) = D(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \vee (D(\alpha_1 \vee 1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \wedge f(\alpha_1))$

$$D(\alpha_1 \vee 1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \wedge f(\alpha_1) \leq D(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$$

Böylelikle; $D(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) = D(\alpha_1 \vee 1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \wedge f(\alpha_1)$

Önerme 3.2.12: S yarı latis, L latis ve D permuting $n - f$ türev olsun. d artan fonksiyon, f azalan fonksiyon ve D izoton olsun. L dağılmalı ise;

$$d^2(\alpha) = d(f(\alpha))$$

İspat: $d(\alpha) \leq f(\alpha)$ olduğunu biliyoruz.

$$\begin{aligned} d^2(\alpha) &= d\big(d(\alpha)\big) = d(f(\alpha) \wedge d(\alpha)) \\ &= D(f(\alpha) \wedge d(\alpha), f(\alpha) \wedge d(\alpha), \dots, f(\alpha) \wedge d(\alpha)) \end{aligned}$$

D permuting $n - f$ türev olduğundan;

$$\begin{aligned} d^2(\alpha) &= (\, D(f(\alpha), f(\alpha) \wedge d(\alpha), \dots, f(\alpha) \wedge d(\alpha)) \wedge f(d(\alpha))\,) \vee \\ &\quad (\, f(f(\alpha)) \wedge D(d(\alpha), f(\alpha) \wedge d(\alpha), \dots, f(\alpha) \wedge d(\alpha))\,) \\ &= (\, D(f(\alpha), f(\alpha), \dots, f(\alpha) \wedge d(\alpha)) \wedge f(d(\alpha)) \wedge f(d(\alpha))\,) \\ &\quad \vee (\, f\big(f(\alpha)\big) \wedge D\big(f(\alpha), d(\alpha), f(\alpha) \wedge d(\alpha), \dots, f(\alpha) \wedge d(\alpha)\big) \wedge f(d(\alpha))\,) \\ &\quad \vee (\, f\big(f(\alpha)\big) \wedge D(d(\alpha), f(\alpha), f(\alpha) \wedge d(\alpha), \dots, f(\alpha) \wedge d(\alpha)) \wedge f(d(\alpha))\,) \\ &\quad \vee (\, f\big(f(\alpha)\big) \wedge D(d(\alpha), f(\alpha), f(\alpha) \wedge d(\alpha), \dots, f(\alpha) \wedge d(\alpha)) \wedge f(d(\alpha))\,) \\ &\quad \vee (\, f\big(f(\alpha)\big) \wedge f\big(f(\alpha)\big) \wedge D(d(\alpha), d(\alpha), f(\alpha) \wedge d(\alpha), \dots, f(\alpha) \wedge d(\alpha))\,) \end{aligned}$$

Böyle devam edilirse;

$d^2(\alpha)$ = ($D(f(\alpha), f(\alpha)$,..., $f(\alpha)) \wedge f(d(\alpha))$)

$\vee$ ($f(f(\alpha)) \wedge D\big(f(\alpha), d(\alpha), d(\alpha), \dots, d(\alpha)\big) \wedge f(d(\alpha))$)

$\vee \dots \vee$ ($f(f(\alpha)) \wedge D(d(\alpha), f(\alpha)$,$f(\alpha)$, ... , $f(\alpha)) \wedge f(d(\alpha))$)

$\vee$ ($f(f(\alpha)) \wedge D(d(\alpha), d(\alpha)$,$d(\alpha), \dots, d(\alpha))$)

Gerekli düzenlemeler yapılırsa;

$d^2(\alpha)$ = ($f(d(\alpha)) \wedge d(f(\alpha))$) $\vee$ ($f(f(\alpha)) \wedge D(f(\alpha), d(\alpha), \dots, d(\alpha)) \wedge f(d(\alpha))$)

$\vee \dots \vee$ ($f(f(\alpha) \wedge D(d(\alpha), f(\alpha)$, ... , $f(\alpha)) \wedge f$ $(d(\alpha))$) $\vee$ ($f(f(\alpha)) \wedge d(d(\alpha))$)

d artan ve f azalan olduğundan;

$$d^2(\alpha) = d(d(\alpha)) \leq d(f(\alpha)) \leq f(f(\alpha)) \leq f(d(\alpha))$$

O halde; $f(d(\alpha)) \wedge d(f(\alpha)) = d(f(\alpha)$ ve $f(f(\alpha)) \wedge d(d(\alpha)) = d(d(\alpha))$

Önerme 3.2.1 (i) den biliyoruz ki;

$$D(f(\alpha), d(\alpha), \dots, d(\alpha)), \dots, D(d(\alpha), f(\alpha), \dots, f(\alpha)) \leq f(f(\alpha))$$

$$D(f(\alpha), d(\alpha), \dots, d(\alpha)), \dots, D(d(\alpha), f(\alpha), \dots, f(\alpha)) \leq f(d(\alpha))$$

$d^2(\alpha) = d(f(\alpha)) \vee D(f(\alpha), d(\alpha), \dots, d(\alpha))$

$\vee \dots \vee D(d(\alpha), f(\alpha), \dots, f(\alpha)) \vee d(d(\alpha))$ olur.

D izoton ve $d(d(\alpha)) \leq d(f(\alpha))$ olduğunu biliyoruz.

$D\big(f(\alpha), d(\alpha), \dots, d(\alpha)\big) \vee \dots \vee D(d(\alpha), f(\alpha), \dots, f(\alpha))$

$\leq$ $D(f(\alpha), f(\alpha)$,..., $f(\alpha)) \vee \dots \vee D(f(\alpha), f(\alpha)$,..., $f(\alpha)) \leq d(f(\alpha))$

Buradan; $d(d(\alpha)) \leq d(f(\alpha))$

Sonuç olarak; $d^2(\alpha) = d(f(\alpha))$.

Önerme 3.2.13: S yarı latis, L latis ve d, D permuting $n - f$ türevin izi olsun. Eğer f, örten azalan fonksiyon olmak üzere, $\forall \alpha \in S$ için;

$$D(d(\alpha), f(\alpha), , , f(\alpha)) \geq d(f(\alpha)) \text{ dir.}$$

Ayrıca; S yarı latis ve $0 \in L$ en küçük eleman ve $D(d(\alpha), f(\alpha), \dots, f(\alpha)) = 0$ ise $d = 0$ dır.

İspat: D permuting $n - f$ türev olduğundan ve Önerme 3.2.1 (i) ve (ii) den ;

$$D(d(\alpha), f(\alpha), \ldots, f(\alpha)) = D(d(\alpha) \wedge f(\alpha), f(\alpha), \ldots, f(\alpha))$$

$$= (D(d(\alpha), f(\alpha), \ldots, f(\alpha)) \wedge f(f(\alpha))) \vee (f(d(\alpha)) \wedge D(f(\alpha), f(\alpha), \ldots, f(\alpha)))$$

f azalan fonksiyon olduğundan;

$d(f(\alpha)) \leq f(f(\alpha)) \leq f(d(\alpha))$ yazabiliriz.

$$D(d(\alpha), f(\alpha), \ldots, f(\alpha)) = D(d(\alpha), f(\alpha), \ldots, f(\alpha)) \vee d(f(\alpha))$$

Sonuç olarak; $D(d(\alpha), f(\alpha), \ldots, f(\alpha)) \geq d(f(\alpha))$

Ayrıca; S yarı latisi için $0 \in S$ en küçük eleman ve $D(d(\alpha), f(\alpha), \ldots, f(\alpha)) = 0$ olsun. $\alpha \in S$ için;

$0 \leq d(f(\alpha)) \leq D(d(\alpha), f(\alpha), \ldots, f(\alpha)) = 0$ olup; $\forall \alpha \in S$ için $d = 0$ elde edilir.

Uyarı: S yarı latis, L latis ve d, D permuting $n - f$ türevin izi olsun. $\forall\, \alpha_1, \alpha_1' \in S$ için;

$$f(\alpha_1 \vee \alpha_1') = f(\alpha_1) \vee f(\alpha_1')$$

$$f(\alpha_1 \wedge \alpha_1') = f(\alpha_1) \wedge f(\alpha_1')$$

şartları sağlansın.

Bir $Fix_d(L) = \{ \alpha \in S \mid d(\alpha) = f(\alpha) \}$ tanımlayalım. Bu kümenin down-closed küme olduğunu görebiliriz:

$$\alpha_1 \leq \alpha_1', \ \alpha_1' \in Fix_d(L)$$

$$\alpha_1 \in Fix_d(L)$$

Aslında, $Fi\alpha_d(L)$ kümesi ideal şartının (i) şartını sağlar. İdeal şartının (ii) şartı için;

D joinitiv dönüşüm ve $\alpha_1, \alpha_1' \in Fi\alpha_d(L)$ olsun. Önerme 3.2.4 den biliyoruz ki;

$$f(\alpha_1 \vee \alpha_1') = f(\alpha_1) \vee f(\alpha_1') = d(\alpha_1) \vee d(\alpha_1') \leq d(\alpha_1 \vee \alpha_1')$$

$$f(\alpha_1 \vee \alpha_1') \leq d(\alpha_1 \vee \alpha_1')$$

$$d(\alpha_1 \vee \alpha_1') \leq f(\alpha_1 \vee \alpha_1')$$

O halde; $f(\alpha_1 \vee \alpha_1') = d(\alpha_1 \vee \alpha_1')$ olup $\alpha_1 \vee \alpha_1' \in Fi\alpha_d(L)$ olur.

Sonuç olarak; $Fi\alpha_d(L)$ ideal şartlarını sağlar.

Sonuç 3.2.7: $F(S,L)$ kümesi, $f: S \rightarrow L$ tanımlı fonksiyonların tümünün kümesi olsun. $\forall \alpha \in S$ için $f_1 \leq f_2 \Leftrightarrow f_1(\alpha) \leq f_2(\alpha)$ tanımlayalım. O halde; $'' \leq ''$ ikili işlemi ile $(F(S,L), \leq)$ bir poset olur.

Ayrıca; $f_1 \wedge f_2$, $f_1 \vee f_2 : S \rightarrow L$ fonksiyonları sırasıyla;

$(f_1 \wedge f_2) (\alpha) = f_1(\alpha) \wedge f_2 (\alpha)$

$(f_1 \vee f_2) (\alpha) = f_1(\alpha) \vee f_2 (\alpha)$ tanımlanır.

Sonuç 3.2.8: $f_1 \wedge f_2$; f_1 ve f_2 fonksiyonlarının e.b.o.b. u ve $f_1 \vee f_2$; f_1 ve f_2 fonksiyonlarının e.k.o.k. u olarak tanımlanır. $(F(S,L), \wedge , \vee)$ latis olur.

Önerme 3.2.14: Eğer $f: S \rightarrow L$, $\wedge$ - homomorfizma ise f fonksiyonu f türevdir.

İspat: $f(\alpha_1 \wedge \alpha_1') = f(\alpha_1) \wedge f(\alpha_1')$

$= (f(\alpha_1) \wedge f(\alpha_1')) \vee (f(\alpha_1')) \wedge f(\alpha_1))$ olup f türev olur.

Sonuç 3.2.9: S yarı latis, L latis ve $d, D : S \; x \; S \; x \cdots x \; S \rightarrow L$ permuting $n - f$ türevin izi olsun. Aşağıdakiler denktir:

(i) d monoton artandır.

(ii) $d(\alpha_1 \wedge \alpha_1') = d(\alpha_1) \wedge d(\alpha_1')$

İspat: (i) $\Rightarrow$ (ii) d monoton artan olsun.

$d(\alpha_1 \wedge \alpha_1') \leq d(\alpha_1)$ ve $d(\alpha_1 \wedge \alpha_1') \leq d(\alpha_1')$ olduğundan;

$d(\alpha_1 \wedge \alpha_1') \leq d(\alpha_1) \wedge d(\alpha_1')$ elde edilir.

Diğer taraftan sonuç 3.2.3 (iii) den ve $d(\alpha_1) \wedge d(\alpha_1') \leq d(\alpha_1 \wedge \alpha_1')$ olduğundan;

$d(\alpha_1 \wedge \alpha_1') = d(\alpha_1) \wedge d(\alpha_1')$ olur.

(ii) $\Rightarrow$ (i) $d(\alpha_1 \wedge \alpha_1') = d(\alpha_1) \wedge d(\alpha_1')$ olsun. $\alpha_1 \leq \alpha_1'$ için;

$$\alpha_1 \wedge \alpha_1' = \alpha_1'$$

$d(\alpha_1) \wedge d(\alpha_1') = d(\alpha_1) \Rightarrow d(\alpha_1) \leq d(\alpha_1')$ olup; d monoton olur.

Sonuç 3.2.10: S yarı latis, L latis ve $d, D : S\ \alpha\ S\ \alpha \cdots \alpha\ S \rightarrow L$ permuting $n - f$ türevin izi olsun. Aşağıdakiler denktir:

(i) d monotondur.

(ii) $f(\alpha_1) \wedge d(\alpha_1') = d(\alpha_1 \wedge \alpha_1')$ ve $d(\alpha_1) \wedge f(\alpha_1') = d(\alpha_1 \wedge \alpha_1')$

İspat: (i) ⇒ (ii) d monoton olsun.

$d(\alpha_1 \wedge \alpha_1') = (d(\alpha_1') \wedge f(\alpha_1)) \vee D(\alpha_1, \alpha_1', \ldots, \alpha_1')$

$\vee \ldots \vee (D(\alpha_1', \alpha_1, \ldots, \alpha_1) \vee (d(\alpha_1) \wedge f(\alpha_1'))$ olduğundan

$f(\alpha_1) \wedge d(\alpha_1') \leq d(\alpha_1 \wedge \alpha_1')$ dir. Ayrıca;

$d(\alpha_1 \wedge \alpha_1') = d(\alpha_1) \wedge d(\alpha_1') \leq f(\alpha_1) \wedge d(\alpha_1')$ olduğundan

$f(\alpha_1) \wedge d(\alpha_1') = d(\alpha_1 \wedge \alpha_1')$ elde edilir.

Benzer olarak; $d(\alpha_1) \wedge f(\alpha_1') = d(\alpha_1 \wedge \alpha_1')$ olduğu görülür.

(ii) ⇒ (i)

$f(\alpha_1) \wedge d(\alpha_1') = d(\alpha_1 \wedge \alpha_1')$ ve $\alpha_1 \leq \alpha_1'$

$d(\alpha_1) = d(\alpha_1 \wedge \alpha_1') = f(\alpha_1) \wedge d(\alpha_1') \leq d(\alpha_1')$ olup

d monoton olur.

Önerme 3.2.15: S yarı latis, L dağılmalı latis ve $d_1, D_1 : S\ x\ S\ x \cdots x\ S \rightarrow L$ permuting $n - f$ türevin izi ve $d_2, D_2 : S\ x\ S\ x \cdots x\ S \rightarrow L$ permuting $n - f$ türevin izi olsun.

Eğer d_1 ve d_2 monoton ise $d_1 \wedge d_2$ monotondur.

İspat: $(d_1 \wedge d_2)(\alpha_1 \wedge \alpha_1') = d_1(\alpha_1 \wedge \alpha_1') \wedge d_2(\alpha_1 \wedge \alpha_1')$

$= (f(\alpha_1) \wedge d_1(\alpha_1')) \wedge (f(\alpha_1) \wedge d_2(\alpha_1'))$

$= f(\alpha_1) \wedge (d_1 \wedge d_2)(\alpha_1')$

Sonuç olarak; $d_1 \wedge d_2$ monoton olur.

Önerme 3.2.16: S yarı latis, L dağılmalı latis ve $d_1, D_1 : S\ x\ S\ x \cdots x\ S \rightarrow L$ permuting $n\ -\ f$ türevin izi ve $d_2, D_2 : S\ \alpha\ S\ \alpha \cdots \alpha\ S \rightarrow L$ permuting $n\ -\ f$ türevin izi olsun.

Eğer d_1 ve d_2 monoton ise $d_1 \vee d_2$ monotondur.

İspat: $(d_1 \vee d_2)\ (\alpha_1 \wedge \alpha_1') = d_1(\alpha_1 \wedge \alpha_1') \vee d_2(\alpha_1 \wedge \alpha_1')$

$= (f(\alpha_1) \wedge d_1(\alpha_1')) \vee (f(\alpha_1) \wedge d_2(\alpha_1'))$

$= f(\alpha_1) \wedge (d_1 \vee d_2)(\ \alpha_1')$

Sonuç olarak; $d_1 \vee d_2$ monoton olur.

Önerme 3.2.17: L latis, S yarı latis ve d, D : $S\ x\ S\ x \cdots x\ S \rightarrow L$ permuting $n\ -\ f$ türevin izi olsun. d monoton ise $d, f -$ türev olur.

İspat: d monoton olsun.

$d(\alpha_1 \wedge \alpha_1') = d(\alpha_1 \wedge \alpha_1')\ \vee\ d(\alpha_1 \wedge \alpha_1')$

$= (d(\alpha_1') \wedge f(\alpha_1)) \vee (d(\alpha_1) \wedge f(\alpha_1'))$

O halde; d, f türev olur.

Teorem 3.2.3: d_1 ve d_2: $S \rightarrow L$ monoton $f -$ türev ve $MD_f(S, L)$; monoton $f -$ türevlerin tümünün kümesi olsun. $MD_f(S, L)$, $F(S, L)$ nin alt yarı latisidir.

İspat: Önermeden biliyoruz ki; d_1 ve d_2 monoton ise $d_1 \wedge d_2$ monotondur. Dolayısıyla; $MD_f(S, L)$, $F(S, L)$ nin alt yarı latisidir.

Teorem 3.2.4: L dağılmalı latis, S yarı latis olsun. O halde; $MD_f(S, L)$, $F(S, L)$ nin alt latisidir.

İspat: Önermeden biliyoruz ki; d_1 ve d_2 monoton ise $d_1 \vee d_2$ monotondur. Dolayısıyla; $MD_f(S,L)$, $F(S,L)$ nin $\vee$ - alt yarı latisidir. Böylece; $MD_f(S,L)$, $F(S,L)$ nin alt yarı latisidir. O halde; $MD_f(S,L)$, $F(S,L)$ nin alt latisi olur.

Tanım 3.2.3: Eğer $\forall \alpha_1, \alpha_1' \in S$ için $f(\alpha_1) \leq f(\alpha_1')$ iken $\alpha_1 \leq \alpha_1'$ ise f fonksiyonuna monoton artan fonksiyon, $f(\alpha_1) \geq f(\alpha_1')$ iken $\alpha_1 \leq \alpha_1'$ ise f fonksiyonuna antitone denir.

Lemma: L latis, S yarı latis ve $f: S \to L$, $\wedge$- homomorfizma olsun. $\forall \alpha \in S$ ve $u \in L$ için $f_u(\alpha) = f(\alpha) \wedge u$ olacak şekilde $f_u : S \to L$ fonksiyonu tanımlayalım. O halde; f_u, $f -$ türevdir.

İspat: $\alpha_1, \alpha_1' \in S$ olsun.

$$\begin{aligned} f_u(\alpha_1 \wedge \alpha_1') &= f(\alpha_1 \wedge \alpha_1') \wedge u = (f(\alpha_1) \wedge f(\alpha_1')) \wedge u \\ &= [(f(\alpha_1) \wedge f(\alpha_1')) \wedge u] \vee [(f(\alpha_1) \wedge f(\alpha_1')) \wedge u] \\ &= [(f(\alpha_1) \wedge u) \wedge f(\alpha_1')] \vee [f(\alpha_1) \wedge (f(\alpha_1') \wedge u)] \\ &= (f_u(\alpha_1) \wedge f(\alpha_1')) \vee (f(\alpha_1) \wedge f_u(\alpha_1')) \end{aligned}$$

Sonuç olarak; f_u, $f -$ türev olur.

Tanım 3.2.4: Eğer; $\forall u \in L$ için $f_u : S \to L$, f türev ise f_u'ya simple f- türev denir.

Önerme 3.2.18: $f: S \to L$, $\wedge$ - homomorfizma olsun. Aşağıdakiler vardır:

(i) $f, MD_f(S,L)$' nin en büyük elemanıdır.

(ii) Her simple f- türev monotondur.

(iii) $1 \in S$, S yarı latisinin en büyük elemanı olsun. O halde; her monoton f - türev simple $f -$ türevdir.

İspat: (i) $f: S \to L$, $\wedge$ - homomorfizma olsun. Böylece; f, monoton f- türevdir. Ayrıca; $d \leq f$ için $\forall\, d \in MD_f(S,L)$ olup $f, MD_f(S,L)$' nin en büyük elemanı olur.

(ii) $\alpha \leq y$ ve f monoton olduğundan $f(\alpha) \leq f(y)$ dir.

$$f_u(\alpha) = f(\alpha) \wedge u \leq f(y) \wedge u = f_u(y) \Rightarrow f_u \text{ monoton olur.}$$

(iii) $d(\alpha) = d(\alpha \wedge 1) = f(\alpha) \wedge d(1) = f_{d(1)}(\alpha) \Rightarrow d$ simple $f -$ türev olur.

Teorem 3.2.5: $f: S \to L$, $\wedge$ - homomorfizma olsun. Simple $f -$ türevlerin kümesi $SD_f(S,L)$ olmak üzere; $SD_f(S,L) \subseteq MD_f(S,L) \subseteq F(S,L)$ dir.

İspat: $SD_f(S,L) \subseteq MD_f(S,L)$ ve $MD_f(S,L) \subseteq F(S,L)$ olduğundan ispat açıktır.

Teorem 3.2.6: $1 \in S$, S yarı latisinin en büyük elemanı ise; $SD_f(S,L) = MD_f(S,L)$ dir.

İspat: Teoremin ispatı Önerme 3.2.18 ve teoremden açıktır.

Önerme 3.2.19: $f: S \to L$, $\wedge$ - homomorfizma olsun. O halde; $SD_f(S,L)$, $F(S,L)$'nin alt yarı latisidir.

İspat: $f_u, f_v \in SD_f(S,L)$ olsun.

$$\begin{aligned}(f_u \wedge f_v)(\alpha) &= f_u(\alpha) \wedge f_v(\alpha)\\ &= (f(\alpha) \wedge u) \wedge (f(\alpha) \wedge v) = f(\alpha) \wedge (u \wedge v)\\ &= f_{u \wedge v}(\alpha)\end{aligned}$$

Böylelikle; $f_{u \wedge v} \in SD_f(S,L) \Rightarrow SD_f(S,L)$, $F(S,L)$'nin alt yarı latisi olur.

Önerme 3.2.20: $f: S \to L$, $\wedge$ - homomorfizma olsun. Eğer L dağılmalı latis ise $SD_f(S,L)$, $F(S,L)$'nin alt latisidir.

İspat: $f_u, f_v \in SD_f(S,L)$ olsun.

$$(f_u \vee f_v)(\alpha) = f_u(\alpha) \vee f_v(\alpha)$$

$$= (f(\alpha) \wedge u) \vee \ (f(\alpha) \wedge v) = f(\alpha) \wedge (u \vee v)$$

$$= f_{u \vee v}(\alpha)$$

Dolayısıyla; $f_{u \vee v} \in SD_f(S,L)$ ve $SD_f(S,L)$, $F(S,L)$'nin $\vee -$ alt yarı latisi olur.

O halde; $SD_f(S,L)$, $F(S,L)$'nin alt latisi olur.

Önerme 3.2.21: $f: S \to L$, $\wedge$ - homomorfizma olsun. $\forall u \in L$ için $\emptyset(u) = f_u$ dönüşümü tanımlayalım. Ve $\forall\ v, w \in L$ için $D(L) = \{u \in L \mid u \wedge (v \vee w) = (u \wedge v) \vee (u \wedge w)\}$ kümesi L'nin alt kümesi olsun. O halde;

L dağılmalıdır. $\Leftrightarrow$ $D(L) = L$'dir.

İspat: $D(L) \subseteq L$ dir. L dağılmalı olduğundan; $L \subseteq\ D(L) \Rightarrow D(L) = L$'dir

Tersine; $D(L) = L$ olsun. $u, v, w \in D(L)$ ve $u \wedge (v \vee w) = (u \wedge v) \vee (u \wedge w)$ olduğundan; $D(L)$ dağılmalıdır. $D(L) = L \Rightarrow\ L$ dağılmalıdır.

Lemma: $f: S \to L$, $\wedge$ - homomorfizma ve $\forall u \in L$ için $\emptyset(u) = f_u$ dönüşümü tanımlayalım. O halde; $\emptyset : L \to F(S,L)$ $\wedge$ - homomorfizmadır.

İspat: $u, v \in\ L$ olsun. $\forall \alpha \in S$ için

$$f_{u \wedge v}\ (\alpha) = f(\alpha) \wedge (u \wedge v)$$

$$= (f(\alpha) \wedge u) \wedge (f(\alpha) \wedge v)$$

$$= f_u(\alpha) \wedge\ f_v(\alpha) = (f_u \wedge f_v)(\alpha)$$

$\emptyset(u \wedge v) = f_{u \wedge v} = f_u \wedge f_v = \emptyset(u) \wedge \emptyset(v)\ \Rightarrow \emptyset$, $\wedge$ - homomorfizma olur.

Sonuç 3.2.10: $f: S \to L$, $\wedge$ - homomorfizma olsun. Aşağıdakiler denktir:

(i) $\emptyset : L \to F(S,L)$ $\vee$-homomorfizmadır.

(ii) $SD_f(S,L)$, $F(S,L)$'nin $\vee -$ alt yarı latisidir.

(iii) $Im\, f \subseteq D(L)$

İspat: (i) ⇒ (ii) $\emptyset : L \to F(S,L)$ ∨-homomorfizma olsun. Dolayısıyla;

$f_u \vee f_v = \emptyset(u) \vee \emptyset(v) = \emptyset(u \vee v) = f_{u \vee v}$ dır. Böylece;

$SD_f(S,L) = Im\, \emptyset$, $F(S,L)$'nin ∨- alt yarı latisi olur.

(ii) ⇒ (iii) $SD_f(S,L)$, $F(S,L)$'nin ∨ alt yarı latisi olsun. $f(\alpha) \in Im\, f$ için

$f(\alpha) \wedge (u \vee v) = f_{u \vee v}(\alpha) = f_u(\alpha) \vee f_v(\alpha) \Rightarrow f(\alpha) \in D(L) \Rightarrow Im\, f \subseteq D(L)$

(iii) ⇒ (i) $Im\, f \subseteq D(L)$ olsun. $f(\alpha) \in D(L)$

$$f_{u \vee v}(\alpha) = f(\alpha) \wedge (u \vee v) = (f(\alpha) \wedge u) \vee (f(\alpha) \wedge v)$$

$$= f_u(\alpha) \vee f_v(\alpha) = (f_u \vee f_v)(\alpha)$$

Böylece; $\emptyset(u \vee v) = f_{u \vee v} = f_u \vee f_v = \emptyset(u) \vee \emptyset(v)$ olup, $\emptyset$ ∨-homomorfizma olur.

Sonuç 3.2.11: $f: S \to L$, örten ∧ - homomorfizma olsun. Aşağıdakiler denktir:

(i) $\emptyset : L \to F(S,L)$ ∨-homomorfizmadır.

(ii) $SD_f(S,L)$, $F(S,L)$'nin $\vee -$ alt yarı latisidir.

(iii) L dağılmalıdır.

İspat: Yukarıdaki sonuç ve teoremden ispat açıktır.

Sonuç 3.2.11: $f: S \to L$, ∧ - homomorfizma olsun. $Im\, f \subseteq D(L)$ ve $f(\alpha_0) = 1$ ise $SD_f(S,L)$, L'ye izomorftur.

İspat: $Im\, f \subseteq D(L)$ ve $f(\alpha_0) = 1$ olsun. Yukarıdaki lemma ve bir önceki sonuçtan $\emptyset : L \to F(S,L)$ latis homomorfizmidir.

$$\emptyset(u) = f_u = f_v = \emptyset(v) \text{ olsun.}$$

$$u = 1 \wedge u = f(\alpha_0) \wedge u = f_u(\alpha_0) = f_v(\alpha_0) = f(\alpha_0) \wedge v = 1 \wedge v = v \Rightarrow u = v$$

Sonuç olarak; $\emptyset$ 1:1 ve $Im\emptyset$ = $SD_f(S, L)$, L'ye izomorftur

Sonuç 3.2.12: $f: S \to L$, $\wedge$ - homomorfizma olsun. L dağılmalı latis ve $1 \in L$ en büyük eleman olmak üzere; eğer $\alpha_0 \in S$ için $f(\alpha_0) = 1$ ise $SD_f(S, L)$, L'ye izomorftur.

İspat: L dağılmalı olduğundan $L = D(L)$ ve $Im\, f \subseteq D(L)$ = L. Yukarıdaki sonuçtan; $SD_f(S, L)$, L'ye izomorftur.

3.3 Yarı Latisten Latise Tanımlı Permuting $n - (f, g)$ Türev

Tanım 3.3.1: S yarı latis, L latis ve $D: S\ x\ S\ x \ldots x\ S \to L$ permuting dönüşüm olsun. $f: S \to L$ ve $g: S \to L$ tanımlı iki fonksiyon olsun. Aşağıdaki şart sağlanırsa D'ye permuting $n - (f, g)$ türev denir. $1 \leq i \leq n$ ve $\forall \alpha_1, \alpha_1', \ldots, \alpha_i, \alpha_i', \ldots, \alpha_n, \alpha_n' \in S$ için;

$$D(\alpha_1 \wedge \alpha_1', \alpha_2, \ldots, \alpha_i, \ldots, \alpha_n) = [\, D(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_i, \ldots, \alpha_n) \wedge f(\alpha_1') \,] \vee [\, g(\alpha_1) \wedge D(\alpha_1', \alpha_1, \ldots, \alpha_i, \ldots, \alpha_n) \,]$$

$$\ldots$$

$$D(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_i \wedge \alpha_i', \ldots, \alpha_n) = [\, D(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_i, \ldots, \alpha_n) \wedge f(\alpha_i') \,] \vee [\, g(\alpha_i) \wedge D(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_i, \ldots, \alpha_n) \,]$$

$$\ldots$$

$$D(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_i, \ldots, \alpha_n \wedge \alpha_n') = [\, D(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_i, \ldots, \alpha_n) \wedge f(\alpha_n') \,] \vee [\, g(\alpha_n) \wedge D(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_i, \ldots, \alpha_n')]$$

Örnek 3.3.1: S yarı latis, L latis ve $D: S \times S \times ... \times S \rightarrow L$ permuting dönüşüm olsun. $\forall\ \alpha_1, \alpha_1', \ldots, \alpha_n, \alpha_n' \epsilon\ S$ için;

$D(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) = f(\alpha_1) \wedge g(\alpha_1) \wedge f(\alpha_2) \wedge g(\alpha_2) \wedge \ldots \wedge f(\alpha_n) \wedge g(\alpha_n)$

$f(\alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge, \ldots, \wedge \alpha_n) = f(\alpha_1) \wedge f(\alpha_2) \wedge \ldots \wedge f(\alpha_n)$

$g(\alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge, \ldots, \wedge \alpha_n) = g(\alpha_1) \wedge g(\alpha_2) \wedge \ldots \wedge g(\alpha_n)$

olarak tanımlansın. $\alpha_1 = \alpha_1 \wedge \alpha_1$ alınırsa D permuting $n - (f, g)$ türev olur. Gerçekten;

$D(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) = D(\alpha_1 \wedge \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) = f(\alpha_1) \wedge g(\alpha_1) \wedge \ldots \wedge f(\alpha_n) \wedge g(\alpha_n)$

$$
\begin{aligned}
D(\alpha_1 \wedge \alpha_1, \alpha_2, .., \alpha_n) &= f(\alpha_1 \wedge \alpha_1) \wedge g(\alpha_1 \wedge \alpha_1) \wedge f(\alpha_2) \wedge g(\alpha_2) \ldots f(\alpha_n) \wedge g(\alpha_n) \\
&= f(\alpha_1) \wedge g(\alpha_1) \wedge f(\alpha_2) \wedge g(\alpha_2) \wedge \ldots \wedge f(\alpha_n) \wedge g(\alpha_n) \\
&= [(f(\alpha_1) \wedge g(\alpha_1) \wedge \ldots \wedge f(\alpha_n) \wedge g(\alpha_n)) \wedge f(\alpha_1)] \\
&\quad \vee [g(\alpha_1) \wedge (f(\alpha_1) \wedge g(\alpha_1) \wedge \ldots \wedge f(\alpha_n) \wedge g(\alpha_n))] \\
&= ([D(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \wedge f(\alpha_1)]) \vee ([g(\alpha_1) \wedge D(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)])
\end{aligned}
$$

$D(\alpha_1 \wedge \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) = [D(\alpha_1, \alpha_1, \ldots, \alpha_n) \wedge f(\alpha_1)] \vee [g(\alpha_1) \wedge D(\alpha_1', \alpha_1, \ldots, \alpha_n)]$ olup; D permuting $n - (f, g)$ türev olur.

Örnek 3.3.2: S yarı latis, L latis ve $D: S \times S \times ... \times S \rightarrow L$ permuting dönüşüm olsun.

$a \in L$ olmak üzere; $\forall\ \alpha_1, \ldots, \alpha_n\ \epsilon\ S$ için;

$D(\alpha_1, \alpha_1, \ldots, \alpha_n) = [f(\alpha_1) \wedge g(\alpha_1) \wedge f(\alpha_2) \wedge g(\alpha_2) \wedge \ldots \wedge f(\alpha_n) \wedge g(\alpha_n)] \wedge a$

$f(\alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge, \ldots, \wedge \alpha_n) = f(\alpha_1) \wedge f(\alpha_2) \wedge \ldots \wedge f(\alpha_n)$

$g(\alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge, \ldots, \wedge \alpha_n) = g(\alpha_1) \wedge g(\alpha_2) \wedge \ldots \wedge g(\alpha_n)$

olarak tanımlansın. $\alpha_1 = \alpha_1 \wedge \alpha_1$ alınırsa D permuting $n - (f, g)$ türev olur. Gerçekten;

$$
\begin{aligned}
D(\alpha_1 \wedge \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) &= [f(\alpha_1 \wedge \alpha_1) \wedge g(\alpha_1 \wedge \alpha_1) \wedge \ldots \wedge f(\alpha_n) \wedge g(\alpha_n)] \wedge a \\
&= [f(\alpha_1) \wedge g(\alpha_1) \wedge \ldots \wedge f(\alpha_n) \wedge g(\alpha_n) \wedge a]
\end{aligned}
$$

$= ([f(\alpha_1) \wedge g(\alpha_1) \wedge \ldots \wedge f(\alpha_n) \wedge g(\alpha_n) \wedge a] \wedge f(\alpha_1))$

$\vee (g(\alpha_1) \wedge [f(\alpha_1) \wedge g(\alpha_1) \wedge \ldots \wedge f(\alpha_n) \wedge g(\alpha_n) \wedge a])$

$= (D(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \wedge f(\alpha_1)) \vee (g(\alpha_1) \wedge D(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n))$

Örnek 3.3.3: S yarı latis, L latis ve $D: S \times S \times \ldots \times S \to L$ permuting dönüşüm olsun. $\forall\, \alpha_1, , \ldots, \alpha_n \in S$ için;

$D(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) = f(\alpha_1) \vee g(\alpha_1) \vee, \ldots, \vee f(\alpha_n) \vee g(\alpha_n)$

$f(\alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge, \ldots, \wedge \alpha_n) = f(\alpha_1) \wedge f(\alpha_2) \wedge, \ldots, \wedge f(\alpha_n)$

$g(\alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge, \ldots, \wedge \alpha_n) = g(\alpha_1) \wedge g(\alpha_2) \wedge, \ldots, \wedge g(\alpha_n)$

olarak tanımlansın. O halde; D permuting $n - (f, g)$ türev değildir. Gösterilebilir.

Önerme 3.3.1: S yarı latis, L latis ve d, $D: S \times S \times \ldots \times S \to L$ permuting $n - (f, g)$ türevin izi olsun. O halde aşağıdakiler vardır: $\forall\, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in S$ için,

(i) $D(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \leq f(\alpha_1) \vee g(\alpha_1), \ldots, D(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \leq f(\alpha_n) \vee g(\alpha_n)$

(ii) $D(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \leq (f(\alpha_1) \vee g(\alpha_1)) \wedge, \ldots, \wedge (f(\alpha_n) \vee g(\alpha_n))$

(iii) $d(\alpha) \leq f(\alpha) \vee g(\alpha)$

İspat: (i) $D(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) = D(\alpha_1 \wedge \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$

$= (D(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \wedge f(\alpha_1)) \vee (g(\alpha_1) \wedge D(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n))$

$\leq f(\alpha_1) \vee g(\alpha_1)$

Benzer şekilde diğerleri de görülebilir.

(ii) $D(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \leq f(\alpha_1) \vee g(\alpha_1)$

...

$D(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \leq f(\alpha_n) \vee g(\alpha_n)$ olduğunu biliyoruz. O halde;

$D(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \wedge \ldots \wedge D(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \leq (f(\alpha_1) \vee g(\alpha_1)) \wedge \ldots \wedge f(\alpha_n) \vee g(\alpha_n)$

(iii) $\alpha = \alpha \wedge \alpha$ olduğunu biliyoruz.

$$d(\alpha) = D(\alpha, \alpha, \dots, \alpha) = D(\alpha \wedge \alpha, \alpha, \dots, \alpha)$$

$$= (D(\alpha, \alpha, \dots, \alpha) \wedge f(\alpha)) \vee (g(\alpha) \wedge D(\alpha, \alpha, \dots, \alpha))$$

$$\Rightarrow \quad d(\alpha) \leq f(\alpha) \vee g(\alpha)$$

Sonuç 3.3.1: S yarı latis ve 0, L latisinin en küçük eleman olsun.
$D: S \times S \times \dots \times S \to L$ permuting $n-(f,g)$ türev olmak üzere; $f(0) = 0$ ve $g(0) = 0$ ise; $D(0, \alpha_2, \dots, \alpha_n) = 0$ dır.

İspat: Önerme 3.3.1(i) den;

$$D(0, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \leq f(0) \vee g(0) \leq 0 \vee 0 = 0$$

0 en küçük eleman olduğundan; $0 \leq D(0, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \leq 0 \Rightarrow D(0, \alpha_2, \dots, \alpha_n) = 0$ olur.

Önerme 3.3.2: S yarı latis, L latis olsun. D permuting $n - (f,g)$ türev, S ve L'nin en büyük elemanı 1 olmak üzere; $f(1) = 1$ ve $g(1) = 1$ olsun. Aşağıdakiler vardır:

(i) Eğer $f(\alpha_1) \leq D(1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ ve $g(\alpha_1) \leq D(1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ ise;

$$D(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) = f(\alpha_1) \vee g(\alpha_1)$$

(ii) Eğer $f(\alpha_1) \geq D(1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ ve $g(\alpha_1) \geq D(1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ ise;

$$D(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \geq D(1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$$

İspat: (i) $1 \in S$ en büyük eleman olsun.

$$D(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) = D(\alpha_1 \wedge 1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$$

$$= (D(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \wedge f(1)) \vee (g(\alpha_1) \wedge D(1, \alpha_2, \dots, \alpha_n))$$

$$= (D(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \wedge 1) \vee (g(\alpha_1) \wedge D(1, \alpha_2, \dots, \alpha_n))$$

$1 \in L$ en büyük eleman ve $D(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) = D(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \vee g(\alpha_1)$

$$\Rightarrow g(\alpha_1) \leq D(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \quad \text{...(1)}$$

Benzer şekilde; $f(\alpha_1) \leq D(1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ olduğu görülür. Buradan;

$D(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) = f(\alpha_1) \vee D(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \Rightarrow f(\alpha_1) \leq D(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ ...(2)

(1) ve (2) den; $f(\alpha_1) \vee g(\alpha_1) \leq D(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$

Diğer taraftan; $D(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \leq f(\alpha_1) \vee g(\alpha_1)$ olduğundan,

$D(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) = f(\alpha_1) \vee g(\alpha_1)$ olur.

(ii) $1 \in S$, en büyük eleman olduğundan;

$$D(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) = D(\alpha_1 \wedge 1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$$

$$= (D(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \wedge f(1)) \vee (g(\alpha_1) \wedge D(1, \alpha_2, \dots, \alpha_n))$$

$$= (D(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \wedge 1) \vee (D(1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)) \text{ olup,}$$

$$D(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \geq D(1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$$

Önerme 3.3.3: S yarı latis, L dağılmalı latis ve D permuting $n-(f,g)$ türev olsun. O halde; $D(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \wedge D(\alpha_1', \alpha_2, \dots, \alpha_n) \leq D(\alpha_1 \wedge \alpha_1', \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ dir.

İspat: Önerme 3.3.1(i) den,

$$D(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \wedge D(\alpha_1', \alpha_2, \dots, \alpha_n) \leq (f(\alpha_1) \vee g(\alpha_1)) \wedge D(\alpha_1', \alpha_2, \dots, \alpha_n)$$

$$D(\alpha_1 \wedge \alpha_1', \alpha_2, \dots, \alpha_n) = (D(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \wedge f(\alpha_1')) \vee (g(\alpha_1) \wedge D(\alpha_1', \alpha_2, \dots, \alpha_n))$$

$$D(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \wedge f(\alpha_1') \leq D(\alpha_1 \wedge \alpha_1', \alpha_2, \dots, \alpha_n)$$

$$g(\alpha_1) \wedge D(\alpha_1', \alpha_2, \dots, \alpha_n) \leq D(\alpha_1 \wedge \alpha_1', \alpha_2, \dots, \alpha_n)$$

$$D(\alpha_1 \wedge \alpha_1', \alpha_2, \dots, \alpha_n) = D(\alpha_1' \wedge \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$$

$$= (D(\alpha_1', \alpha_2, \dots, \alpha_n) \wedge f(\alpha_1)) \vee (g(\alpha_1') \wedge D(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n))$$

$$D(\alpha_1', \alpha_2, \dots, \alpha_n) \wedge f(\alpha_1) \leq D(\alpha_1' \wedge \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$$

$$g(\alpha_1') \wedge D(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \leq D(\alpha_1' \wedge \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$$

L dağılmalı olduğundan;

$$(D(\alpha_1', \alpha_2, \dots, \alpha_n) \wedge f(\alpha_1)) \vee (g(\alpha_1) \wedge D(\alpha_1', \alpha_2, \dots, \alpha_n))$$

$$= (f(\alpha_1) \vee g(\alpha_1)) \wedge D(\alpha_1', \alpha_2, \dots, \alpha_n)$$

$$\leq D(\alpha_1 \wedge \alpha_1', \alpha_2, \dots, \alpha_n)$$

Sonuç olarak; $D(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \wedge D(\alpha_1', \alpha_2, \dots, \alpha_n) \leq D(\alpha_1 \wedge \alpha_1', \alpha_2, \dots, \alpha_n)$

Önerme 3.3.4: S yarı latis, L latis ve D permuting $n - (f, g)$ türev olsun. O halde aşağıdakiler vardır:

(i) $D(\alpha_1 \wedge \alpha_1', \alpha_2, \dots, \alpha_n) \leq D(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \vee D(\alpha_1', \alpha_2, \dots, \alpha_n)$

(ii) $D(\alpha_1 \wedge \alpha_1', \alpha_2, \dots, \alpha_n) \leq g(\alpha_1) \vee f(\alpha_1')$

İspat: (i) Türev tanımından;

$D(\alpha_1 \wedge \alpha_1', \alpha_2, \dots, \alpha_n) = (g(\alpha_1) \wedge D(\alpha_1', \alpha_2, \dots, \alpha_n)) \vee (D(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \wedge f(\alpha_1'))$

$$g(\alpha_1) \wedge D(\alpha_1', \alpha_2, \dots, \alpha_n) \leq D(\alpha_1', \alpha_2, \dots, \alpha_n)$$

$$D(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \wedge f(\alpha_1') \leq D(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$$

Sonuç olarak; $D(\alpha_1 \wedge \alpha_1', \alpha_2, \dots, \alpha_n) \leq D(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \vee D(\alpha_1', \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ olur.

(ii) Bir önceki ispat yardımıyla;

$D(\alpha_1 \wedge \alpha_1', \alpha_2, \dots, \alpha_n) = (g(\alpha_1) \wedge D(\alpha_1', \alpha_2, \dots, \alpha_n)) \vee (D(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \wedge f(\alpha_1'))$

$g(\alpha_1) \wedge D(\alpha_1', \alpha_2, \dots, \alpha_n) \leq g(\alpha_1)$ ve $D(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \wedge f(\alpha_1') \leq f(\alpha_1')$

Sonuç olarak; $D(\alpha_1 \wedge \alpha_1', \alpha_2, \dots, \alpha_n) \leq g(\alpha_1) \vee f(\alpha_1')$

Önerme 3.3.5: S; $\vee -$ yarı latis, L latis ve D; $\vee -$ yarı latisten latise tanımlı joinitiv permuting $n - (f, g)$ türev olsun. Aşağıdakiler vardır. $\forall \alpha_1, \alpha_1' \in S$ için;

(i) $d(\alpha_1 \vee \alpha_1') = d(\alpha_1) \vee D(\alpha_1, \alpha_1', \dots, \alpha_1') \vee \dots \vee D(\alpha_1', \alpha_1 \dots, \alpha_1) \vee d(\alpha_1')$

(ii) $d(\alpha_1) \vee d(\alpha_1') \leq d(\alpha_1 \vee \alpha_1')$

İspat: (i) $d(\alpha_1 \vee \alpha_1') = D(\alpha_1 \vee \alpha_1', \alpha_1 \vee \alpha_1', \dots, \alpha_1 \vee \alpha_1')$

$$= D(\alpha_1, \alpha_1 \vee \alpha_1', \dots, \alpha_1 \vee \alpha_1') \vee D(\alpha_1', \alpha_1 \vee \alpha_1', \dots, \alpha_1 \vee \alpha_1')$$

$$= D(\alpha_1, \alpha_1, \alpha_1 \vee \alpha_1', \dots, \alpha_1 \vee \alpha_1') \vee D(\alpha_1, \alpha_1', \alpha_1 \vee \alpha_1', \dots, \alpha_1 \vee \alpha_1')$$

$$\vee D(\alpha_1', \alpha_1, \alpha_1 \vee \alpha_1', \dots, \alpha_1 \vee \alpha_1') \vee D(\alpha_1', \alpha_1', \alpha_1 \vee \alpha_1', \dots, \alpha_1 \vee \alpha_1')$$

Böyle devam edilirse;

$d(\alpha_1 \vee \alpha_1') = D(\alpha_1, \alpha_1, \dots, \alpha_1) \vee D(\alpha_1, \alpha_1', \dots, \alpha_1')$

$\vee \dots \vee D(\alpha_1', \alpha_1, \dots, \alpha_1) \vee D(\alpha_1', \alpha_1', \dots, \alpha_1')$

$= d(\alpha_1) \vee D(\alpha_1, \alpha_1', \dots, \alpha_1') \vee \dots \vee D(\alpha_1', \alpha_1, \dots, \alpha_1) \vee d(\alpha_1')$

(ii) $d(\alpha_1) \vee d(\alpha_1') \leq d(\alpha_1) \vee D(\alpha_1, \alpha_1', \dots, \alpha_1') \vee \dots \vee D(\alpha_1', \alpha_1, \dots, \alpha_1) \vee d(\alpha_1')$

$= d(\alpha_1 \vee \alpha_1')$ olup,

$d(\alpha_1) \vee d(\alpha_1') \leq d(\alpha_1 \vee \alpha_1')$ olur.

Teorem 3.3.1: S yarı latis, L latis ve d, D permuting $n - (f, g)$ türevin izi olsun. L dağılmalı ve $\forall \alpha_1, \alpha_1' \in S$ için;

$$d(\alpha_1 \wedge \alpha_1') = (d(\alpha_1) \wedge (f(\alpha_1') \vee g(\alpha_1'))) \vee D(\alpha_1, \alpha_1', \dots, \alpha_1')$$

$$\vee \dots \vee D(\alpha_1', \alpha_1, \dots, \alpha_1) \vee (d(\alpha_1') \wedge (f(\alpha_1) \vee g(\alpha_1)))$$

İspat: $d(\alpha_1 \wedge \alpha_1') = d(\alpha_1 \wedge \alpha_1') \vee d(\alpha_1' \wedge \alpha_1)$

$= (D(\alpha_1, \alpha_1 \wedge \alpha_1', \dots, \alpha_1 \wedge \alpha_1') \wedge (f(\alpha_1') \vee g(\alpha_1')))$

$\vee (g(\alpha_1) \vee f(\alpha_1)) \wedge D(\alpha_1', \alpha_1 \wedge \alpha_1', \dots, \alpha_1 \wedge \alpha_1')))$

Böyle devam edilirse;

$d(\alpha_1 \wedge \alpha_1') = (D(\alpha_1, \alpha_1, \dots, \alpha_1) \wedge (f(\alpha_1') \vee g(\alpha_1')))$

$\vee ((f(\alpha_1) \vee g(\alpha_1)) \wedge D(\alpha_1, \alpha_1', \dots, \alpha_1') \wedge (f(\alpha_1') \vee g(\alpha_1')))$

$\vee \dots \vee ((f(\alpha_1') \vee g(\alpha_1')) \wedge D(\alpha_1', \alpha_1, \dots, \alpha_1) \wedge (f(\alpha_1) \vee g(\alpha_1)))$

$\vee (((f(\alpha_1) \vee g(\alpha_1)) \wedge D(\alpha_1', \alpha_1', \dots, \alpha_1'))$

Önerme 3.3.1(i) den; $D(\alpha_1, \alpha_1', \dots, \alpha_1') \leq f(\alpha_1) \vee g(\alpha_1)$

$D(\alpha_1, \alpha_1', \dots, \alpha_1') \leq f(\alpha_1') \vee g(\alpha_1')$

$D(\alpha_1, \alpha_1', \dots, \alpha_1') \wedge D(\alpha_1, \alpha_1', \dots, \alpha_1') \leq (f(\alpha_1) \vee g(\alpha_1)) \wedge (f(\alpha_1') \vee g(\alpha_1'))$

Buradan; $(f(\alpha_1) \vee g(\alpha_1)) \wedge D(\alpha_1, \alpha_1', \dots, \alpha_1') \wedge (f(\alpha_1') \vee g(\alpha_1')) = D(\alpha_1, \alpha_1', \dots, \alpha_1')$

Benzer şekilde;

$D(\alpha_1', \alpha_1, \dots, \alpha_1) \leq f(\alpha_1) \vee g(\alpha_1)$

$$D(\alpha_1', \alpha_1, \dots, \alpha_1) \leq f(\alpha_1') \vee g(\alpha_1')$$

$D(\alpha_1', \alpha_1, \dots, \alpha_1) \wedge D(\alpha_1', \alpha_1, \dots, \alpha_1) \leq (f(\alpha_1) \vee g(\alpha_1)) \wedge (f(\alpha_1') \vee g(\alpha_1'))$

Buradan; $(f(\alpha_1) \vee g(\alpha_1)) \wedge D(\alpha_1', \alpha_1, \dots, \alpha_1) \wedge (f(\alpha_1') \vee g(\alpha_1')) = D(\alpha_1', \alpha_1, \dots, \alpha_1)$

Sonuç olarak; $d(\alpha_1 \wedge \alpha_1') = (d(\alpha_1) \wedge (f(\alpha_1') \vee g(\alpha_1'))) \vee D(\alpha_1, \alpha_1', \dots, \alpha_1')$

$\vee \ldots \vee D(\alpha_1', \alpha_1, \dots, \alpha_1) \vee (d(\alpha_1') \wedge (f(\alpha_1) \vee g(\alpha_1)))$ olur.

Sonuç 3.3.2: S yarı latis, L latis ve d, D permuting $n - (f, g)$ türevin izi olsun. O halde; aşağıdakiler vardır:

(i) $D(\alpha_1, \alpha_1', \dots, \alpha_1') \vee \ldots \vee D(\alpha_1', \alpha_1, \dots, \alpha_1) \leq d(\alpha_1 \wedge \alpha_1')$

(ii) $d(\alpha_1') \wedge (f(\alpha_1) \vee g(\alpha_1)) \leq d(\alpha_1 \wedge \alpha_1')\ ve\ d(\alpha_1) \wedge (f(\alpha_1') \vee g(\alpha_1')) \leq d(\alpha_1 \wedge \alpha_1')$

İspat: (i) Teorem 3.3.1'den ispatı açıktır.

(ii) Teorem 3.3.1'den ispatı açıktır.

Sonuç 3.3.3: S yarı latis, $1 \in S$ en büyük eleman ve d, D permuting $n - (f, g)$ türevin izi olsun. O halde aşağıdakiler vardır:

(i) $d(1) \wedge (f(\alpha_1) \vee g(\alpha_1)) \leq d(\alpha_1)$

(ii) $D(\alpha_1, 1, 1, \dots, 1) \vee \ldots \vee D(1, \alpha_1, \alpha_1, \dots, \alpha_1) \leq d(\alpha_1)$

İspat: (i) Sonuç 3.3.2 (ii) den α_1' yerine $\alpha_1' = 1$ yazılırsa;

$d(1) \wedge (f(\alpha_1) \vee g(\alpha_1)) \leq d(\alpha_1 \wedge 1) = d(\alpha_1)$ (1 en büyük eleman)

(ii) Sonuç 3.3.2 (i) den; α_1' yerine $\alpha_1' = 1$ yazılırsa;

$D(\alpha_1, 1, 1, \dots, 1) \vee \ldots D(1, \alpha_1, \alpha_1, \dots, \alpha_1) \leq d(\alpha_1 \wedge 1) = d(\alpha_1)$

Sonuç 3.3.4: S yarı latis ve L latis olmak üzere, $1 \in S$ en büyük eleman olsun. d, D permuting $n - (f, g)$ türevin izi ise aşağıdakiler vardır:

(i) Eğer $f(\alpha) \vee g(\alpha) \geq d(1)$ ise, $d(\alpha) \geq d(1)$

(ii) Eğer $f(\alpha) \vee g(\alpha) \leq d(1)$ ise, $d(\alpha) = f(\alpha) \vee g(\alpha)$

İspat: (i) $f(\alpha) \vee g(\alpha) \geq d(1)$ olsun.

$$d(1) = d(1) \wedge (f(\alpha) \vee g(\alpha)) \leq d(\alpha \wedge 1)$$

(ii) $f(\alpha) \vee g(\alpha) \leq d(1)$ olsun.

$f(\alpha) \vee g(\alpha) = (f(\alpha) \vee g(\alpha)) \wedge d(1) \leq d(\alpha \wedge 1) = d(\alpha) \Rightarrow d(\alpha) \geq f(\alpha) \vee g(\alpha)$

Önerme 3.3.1 (iii) den; $d(\alpha) \leq f(\alpha) \vee g(\alpha)$ olduğundan $d(\alpha) = f(\alpha) \vee g(\alpha)$ olur.

Sonuç 3.3.5: S, $\vee$ - yarı latis, L dağılmalı latis ve D permuting n - (f, g) türev olsun. Örnek 3.3.1 den f ve g ;

$f(\alpha_1 \vee \alpha_1') = f(\alpha_1) \vee f(\alpha_1')$ ve $g(\alpha_1 \vee \alpha_1') = g(\alpha_1) \vee g(\alpha_1')$ olarak tanımlansın.

O halde; $D(\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_n) \vee D(\alpha_1', \alpha_2 \ldots \alpha_n) \leq D(\alpha_1 \vee \alpha_1', \alpha_2 \ldots \alpha_n)$

İspat: Teorem 3.3.2 den;

$$\begin{aligned} D(\alpha_1 \vee \alpha_1', \alpha_2 \ldots \alpha_n) = {} & D(\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_n) \vee D(\alpha_1', \alpha_2 \ldots \alpha_n) \\ & \vee (\, f(\alpha_1) \wedge g(\alpha_1') \wedge \ldots \wedge f(\alpha_n) \wedge g(\alpha_n)\,) \\ & \vee (\, f(\alpha_1') \wedge g(\alpha_1) \wedge \ldots \wedge f(\alpha_n) \wedge g(\alpha_n)\,) \end{aligned}$$

O halde;
$$\begin{aligned} D(\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_n) \vee D(\alpha_1', \alpha_2 \ldots \alpha_n) \leq {} & D(\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_n) \vee D(\alpha_1', \alpha_2 \ldots \alpha_n) \\ & \vee (\, f(\alpha_1) \wedge g(\alpha_1') \wedge \ldots \wedge f(\alpha_n) \wedge g(\alpha_n)\,) \\ & \vee (\, f(\alpha_1') \wedge g(\alpha_1) \wedge \ldots \wedge f(\alpha_n) \wedge g(\alpha_n)\,) \end{aligned}$$

Dolayısıyla; $D(\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_n) \vee D(\alpha_1', \alpha_2 \ldots \alpha_n) \leq D(\alpha_1 \vee \alpha_1', \alpha_2 \ldots \alpha_n)$

Tanım 3.3.2: S yarı latis, L latis ve D permuting n - (f, g) türev olsun.

(i) Eğer $\alpha_1 \leq \alpha_1'$ iken $D(\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_n) \leq D(\alpha_1', \alpha_2 \ldots \alpha_n)$ ise $D : S\ x\ S\ x \ldots x\ S \to L$ dönüşümüne izoton permuting n - (f, g) türev denir.

(ii) Eğer D 1:1 dönüşüm ise D'ye monomorfik permuting n - (f, g) türev denir.

(iii) Eğer D örten dönüşüm ise D'ye epik permuting n - (f, g) türev denir.

Önerme 3.3.6: $S \vee -$ yarı latis, L latis ve d, D permuting n - (f, g) türevin izi olsun. O halde aşağıdakiler denktir:

(i) D izoton dönüşümdür.

(ii) $d(\alpha) \vee d(\beta) \leq d(\alpha \vee \beta)$

İspat: (i) ⇒ (ii) D izoton dönüşüm olsun. d, D permuting n - (f, g) türevin izi olduğundan; $d(\alpha) \leq d(\alpha \vee \beta)$

$d(\beta) \leq d(\alpha \vee \beta)$ yazabiliriz.

O halde; $d(\alpha) \vee d(\beta) \leq d(\alpha \vee \beta)$ olur.

(ii) ⇒ (i) $d(\alpha) \vee d(\beta) \leq d(\alpha \vee \beta)$ ve $\alpha \leq \beta$ olsun.

$d(\alpha) \leq d(\alpha) \vee d(\beta) \leq d(\alpha \vee \beta) = d(\beta)$ olup; D izoton olur.

Teorem 3.3.3: S yarı latis ve L latis olmak üzere; $1 \in S$ ve $1 \in L$ en büyük eleman ve D izoton permuting n - (f, g) türev olsun. $f(1) = 1$ ve $g(1) = 1$ ve $f(\alpha_1) \geq g(\alpha_1)$ veya $f(\alpha_1) \leq g(\alpha_1)$ olsun. $\forall \alpha_1, \ldots, \alpha_n \in L$ için;

$$D(\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_n) = (f(\alpha_1) \vee g(\alpha_1)) \wedge D(1, \alpha_2 \ldots \alpha_n) \text{ dir.}$$

İspat: D izoton permuting n - (f, g) türev olduğundan;
$\forall \alpha_1, \ldots, \alpha_n \in L$ için $D(\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_n) \leq D(1, \alpha_2 \ldots \alpha_n)$ yazabiliriz. $f(\alpha_1) \geq g(\alpha_1)$ olsun. $D(\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_n) \leq f(\alpha_1) \vee g(\alpha_1) = f(\alpha_1)$ dir.

$$\begin{aligned}
D(\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_n) &= D(1 \wedge \alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_n) \\
&= (D(1, \alpha_2 \ldots \alpha_n) \wedge f(\alpha_1)) \vee (g(1) \wedge D(\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_n)) \\
&= (D(1, \alpha_2 \ldots \alpha_n) \wedge f(\alpha_1)) \vee (g(1) \wedge D(\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_n)) \\
&= (D(1, \alpha_2 \ldots \alpha_n) \wedge f(\alpha_1)) \vee (1 \wedge D(\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_n)) \\
&= (D(1, \alpha_2 \ldots \alpha_n) \wedge f(\alpha_1)) \vee D(\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_n)
\end{aligned}$$

$= D(1, \alpha_2 \dots \alpha_n) \wedge f(\alpha_1)$

$f(\alpha_1) \vee g(\alpha_1) = f(\alpha_1)$ olduğundan;

$D(\alpha_1, \alpha_2 \dots \alpha_n) = (f(\alpha_1) \vee g(\alpha_1)) \wedge D(1, \alpha_2 \dots \alpha_n)$ olur.

Aynı düşünce ile . $f(\alpha_1) \leq g(\alpha_1)$ için $D(\alpha_1, \alpha_2 \dots \alpha_n) \leq f(\alpha_1) \vee g(\alpha_1) = g(\alpha_1)$

$D(\alpha_1, \alpha_2 \dots \alpha_n) = (f(\alpha_1) \vee g(\alpha_1)) \wedge D(1, \alpha_2 \dots \alpha_n)$

$D(\alpha_1, \alpha_2 \dots \alpha_n) \leq f(\alpha_1) \wedge D(1, \alpha_2 \dots \alpha_n)$ dir.

$D(\alpha_1, \alpha_2 \dots \alpha_n) = D(1 \wedge \alpha_1, \alpha_2 \dots \alpha_n)$

$= (D(1, \alpha_2 \dots \alpha_n) \wedge g(\alpha_1)) \vee (f(1) \wedge D(\alpha_1, \alpha_2 \dots \alpha_n))$

$= (D(1, \alpha_2 \dots \alpha_n) \wedge g(\alpha_1)) \vee (f(1) \wedge D(\alpha_1, \alpha_2 \dots \alpha_n))$

$= (D(1, \alpha_2 \dots \alpha_n) \wedge g(\alpha_1)) \vee (1 \wedge D(\alpha_1, \alpha_2 \dots \alpha_n))$

$= (D(1, \alpha_2 \dots \alpha_n) \wedge g(\alpha_1)) \vee D(\alpha_1, \alpha_2 \dots \alpha_n) = D(1, \alpha_2 \dots \alpha_n) \wedge g(\alpha_1)$

$f(\alpha_1) \vee g(\alpha_1) = g(\alpha_1)$ olduğundan;

Sonuç olarak, $D(\alpha_1, \alpha_2 \dots \alpha_n) = (f(\alpha_1) \vee g(\alpha_1)) \wedge D(1, \alpha_2 \dots \alpha_n)$ olur.

Önerme 3.3.7: S yarı latis, L latis ve d, D permuting n - (f, g) türevin izi olsun. $\alpha \leq \beta$ ve $\beta \in F$ olsun.f ve g artan fonksiyon ve d azalan olsun. Bu durumda; $\alpha \in F$ olur.

İspat: Önerme 1(i) den; $d(\alpha) \leq f(\alpha) \vee g(\alpha)$ olduğunu biliyoruz.
$\alpha \leq \beta$ ve $\beta \in F$ olsun. f ve g artan fonksiyon ve d azalan olduğundan;

$f(\alpha) \vee g(\alpha) \leq f(\beta) \vee g(\beta) = d(\beta) \leq d(\alpha) \Rightarrow f(\alpha) \vee g(\alpha) \leq d(\alpha)$ olur.

Sonuç olarak; $f(\alpha) \vee g(\alpha) = d(\alpha)$ olup, $\alpha \in F$ olur.

Önerme 3.3.8: S, $\vee -$ yarı latis ve L latis olsun. d, D permuting n - (f, g) türevin izi olmak üzere; $\alpha, \beta \in F$ olsun. Eğer f ve g azalan fonksiyon ve d izoton ise; $\alpha \vee \beta \in F$ dir.

İspat: f ve g azalan fonksiyon olduğundan; $f(\alpha \vee \beta) \leq f(\alpha)$

$$g(\alpha \vee \beta) \leq g(\beta)$$

Dolayısıyla; $f(\alpha \vee \beta) \leq f(\alpha) \vee g(\alpha)$

$g(\alpha \vee \beta) \leq f(\beta) \vee g(\beta)$ olur.

$$f(\alpha \vee \beta) \vee g(\alpha \vee \beta) \leq (f(\alpha) \vee g(\alpha)) \vee (f(\beta) \vee g(\beta))$$

$$= d(\alpha) \vee d(\beta)$$

d izoton olduğundan; $d(\alpha) \vee d(\beta) \leq d(\alpha \vee \beta)$

$f(\alpha \vee \beta) \vee g(\alpha \vee \beta) \leq d(\alpha \vee \beta)$ elde edilir.

$d(\alpha \vee \beta) \leq f(\alpha \vee \beta) \vee g(\alpha \vee \beta)$ olduğundan,

$d(\alpha \vee \beta) = f(\alpha \vee \beta) \vee g(\alpha \vee \beta)$ olup, $\alpha \vee \beta \in F$ olur.

4. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu tezde latislerde türev ve latis cebiri çalışmalarından yararlanarak yapılan çalışmaları yarı latis üzerinde verdik. Bu çalışmaların bir genellemesi olarak yarı latis üzerinde permuting n-türevlerin tanımlarını verdik. İlgili tanımların örneklerini inceleyerek tanımda verilen bağıntıyı sağladığını gösterdik. Yarı latisler üzerinde izoton,joinitiv, modüler ve dağılmalı yarı latis gibi kavramları vererek, yarı latislerde permuting n-türevin bu kavramlar üzerinde daha farklı nasıl ifade edilebileceğini anlattık. Sonrasında joinitiv ve dağılmalı yarı latis ilişkisini bir teorem olarak ifade ettik.

Öneri olarak yarı latisler üzerinde yapılan bu çalışmalar diğer cebir yapıları ve yeniden tanımlanabilecek farklı yapılar üzerinde belirli şartlar altında uygulanabilir.

5. KAYNAKLAR

Alshehri, N.O., Generalized derivations of Lattices Int.J. Contemp. *Math. Sci*., Vol 5, no. 13, 629-640, (2010).

Ascı, M., Ceran. S., Generalized (f, g) - derivations of lattices, *Math. Sci. and App*. E- Notes Vol. 1, No.2 pp 56-62, (2013).

Ascı, M., Kecilioglu, O., Ceran, S., Permuting tri - (f, g)- derivations on lattices, Annals of Fuzzy Mathematics and Informatics 1, No.2, 189-196, (2011).

Ascı, M., Ceran, S., ‘’Symmetric bi- (σ, T) - derivations of Prime Near Rings’’, Algebras, Groups, Geometry, 24, no.3, 291-302, (2007).

Balbes, R. and Dwinger, P. ‘*’Distributive Lattices’’*, University of Missouri Press, Columbia, Mo., (1974).

Bell, A. J., The co-infrmation lattice, 4th Int. Symposium on Independent Componentv-Analysis and Blind Signal Seperation (ICA2003) Nara, Japan, 921-926, (2003).

Birkhoof G., ‘*’Lattice Theory’’*, American Mathematical Society, New York, (1940).

Carpineto, C. and Roman, G., Information retrieval through hybrid navigation of lattice representations, International Journal of Human- Computers Studies 45, 553-578, (1996)

Chaudry, M. A., Ulah, Z., On generalized (α, β) - derivations on lattices, Quaestiones Mathematicae, 34, 417-424, (2011).

Çeven, Y. Symmetric bi derivations of Lattices, Quaestiones Mathematicae, 32 1-5, (2009).

Çeven Y. Öztürk, M.A. Some properties of symmetric bi- (σ, T)- derivations in near-rings. Commun. Korean Math. Soc. 22, no. 4, 487-491, (2007).

Davey, B. A.; Priestley, H. A. Introduction to lattices and order. Second edition. Cambridge University Press, New York, αii+298 pp. ISBN: 0-521-78451-4, (2002)

Degang, C., Wenαiu Z., Yeung, D. and Tsang, E.C.C. Rough approimations on a complete completely distributive lattice with applications to generalized rough sets, Inform. Sci.176 , no.13, 1829-1848, (2006)

Durfee, G. Cryptanalysis of RSA using algebraic and lattice methods, A dissertation submitted to the department of computer sciences and the commite on graduate studies of Stanford University ,1-114, (2002).

Grabisch M. and Honda A., Entropy of capacities on lattices and set systems, Inform. Sci. 176, no. 23, 3472-3489, (2006)

Ferrari, L. ‘’On Derivations of lattice’’. Pure Math. Appl. 12, no.4, 365-382, (2001).

Jun, Y. B., and Xin, A. L. On derivations of BCI-algebras, Inform. Sci. 159, no.3-4, 167-176, (2004).

Khan, A.R., Chaudhry, M.A. ‘’Permuting f - derivations on lattices’’, Int. J. of Algebra, Vol.5, no: 10, 471-481, (2011).

Ozbal, S. A, Firat, A. Symmetric f bi derivations of Lattices. Ars Combin.97 (in press) (2010).

Oztürk, M.A ; Yazarlı, H, ‘’Permuting tri- derivations in lattices’. Quaest. Math. 32, no. 3, 415-425, (2009)

Ozturk, M. A., ‘’Permuting Tri derivations is Prime and Semi-prime Rings’’, *East Asian Math. J*. 15(2) , 177-190, (1999).

Pehlivan U.’’ Latislerde Türevler Yüksek Lisans Tezi’’ Pamukkale Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı, Denizli, (2015).

Sandhu, R.S. Role hierarchies andconstraints for lattice-based access controls, Proceedings of the 4th Europan Symposium on Research in Computer Security, Rome, Italy, 65-79, (1996).

Szâsz, G. ‘’Derivations of lattice’’. Acta Sci. Math. (Szeged) 37, 149-154, (1975).

Yon Y.H., Kım K.H., ‘’On f - derivations from semi-lattices to lattice’’, Comm.Korean Math. Soc. 29 , No.1, pp. 27-36, (2014)

Zhan, J., and Liu, Y. L. ‘’On f- derivations of BCI- algebras’’, *Int. J. Math. Sci*. no. 11, 1675-1684, (2005).

6. ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı	: ONUR DEMİRKAYA
Doğum Yeri ve Tarihi	: 02/03/1994 DENİZLİ
Lisans Üniversite	: GAZİ ÜNİVERSİTESİ
Elektronik posta	: onr.dmrky7@gmail.com
İletişim Adresi	: Karaman Mah. 1488 Sk. No: 11 DENİZLİ