

**T.C.
PAMUKKALE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI
UYGULAMALI MATEMATİK**

**UYUMLU KESİRLİ DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN
ÖTELENMİŞ LEGENDRE POLİNOMLARIYLA
SAYISAL ÇÖZÜMÜ**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

FERDİ MUTLU

DENİZLİ, TEMMUZ, 2019

**T.C.
PAMUKKALE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI
UYGULAMALI MATEMATİK**



**UYUMLU KESİRLİ DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN
ÖTELENMİŞ LEGENDRE POLİNOMLARIYLA
SAYISAL ÇÖZÜMÜ**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

FERDİ MUTLU

DENİZLİ, TEMMUZ, 2019

KABUL VE ONAY SAYFASI

Ferdi MUTLU tarafından hazırlanan “UYUMLU KESİRLİ DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN ÖTELENMİŞ LEGENDRE POLİNOMLARIYLA SAYISAL ÇÖZÜMÜ” adlı tez çalışmasının savunma sınavı 19.07.2019 tarihinde yapılmış olup aşağıda verilen jüri tarafından oy birliği ile Pamukkale Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı’nda Yüksek Lisans Tezi olarak kabul edilmiştir.

Jüri Üyeleri

İmza

Danışman

Doç. Dr. Handan ÇERDİK YASLAN

Üye

Prof. Dr. İbrahim ÇELİK

Üye

Dr. Öğr. Üyesi Neşe İŞLER ACAR

Pamukkale Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu’nun 08/08/2019 tarih ve 32/13 sayılı kararıyla onaylanmıştır.



Prof. Dr. Uğur YÜCEL

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü ✓

Bu tez çalışması BAP tarafından 2018FEBE015 nolu proje ile desteklenmiştir.

Bu tezin tasarımı, hazırlanması, yürütülmesi, araştırmalarının yapılması ve bulgularının analizlerinde bilimsel etiğe ve akademik kurallara özenle riayet edildiğini; bu çalışmanın doğrudan birincil ürünü olmayan bulguların, verilerin ve materyallerin bilimsel etiğe uygun olarak kaynak gösterildiğini ve alıntı yapılan çalışmalara atfedildiğini beyan ederim.

FERDİ MUTLU



ÖZET

**UYUMLU KESİRLİ DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN ÖTELENMİŞ
LEGENDRE POLİNOMLARIYLA SAYISAL ÇÖZÜMÜ
YÜKSEK LİSANS TEZİ
FERDİ MUTLU
PAMUKKALE ÜNİVERSİTESİ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI
UYGULAMALI MATEMATİK
TEZ DANIŞMANI: DOÇ. DR. HANDAN ÇERDİK YASLAN
DENİZLİ, TEMMUZ 2019**

Bu tez çalışması dört ana bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde kesirli türevin ortaya çıkışı ve gelişimi konusuna değinilmiş, literatürde kesirli türevli diferansiyel denklemlere uygulanan yöntemler hakkında bilgi verilmiştir. İkinci bölümde Legendre polinomları tanıtılmış, Legendre polinomları ile ilgili temel bilgiler verilmiştir. Üçüncü bölümde uyumlu kesirli türev ve özelliklerine yer verilmiş ve ötelenmiş Legendre polinomları yardımıyla bir fonksiyonun uyumlu kesirli türevi hesaplanmıştır. Dördüncü bölümde ise, uyumlu kesirli lineer ve lineer olmayan diferansiyel denklemlerin ötelenmiş Legendre polinomları yardımıyla çözülebilmesi için sıralama yöntemi sunulmuş ve bu yöntem çeşitli denklemlere uygulanmıştır.

ANAHTAR KELİMELEER: Uyumlu kesirli türev, Ötelenmiş Legendre polinomları, Sıralama yöntemi, Lineer kesirli diferansiyel denklemler, Lineer olmayan kesirli diferansiyel denklemler

ABSTRACT

**NUMERICAL SOLUTION OF THE CONFORMABLE DIFFERENTIAL
EQUATIONS VIA SHIFTED LEGENDRE POLYNOMIALS
MASTER'S THESIS
FERDİ MUTLU
PAMUKKALE UNIVERSITY INSTITUTE OF SCIENCE
MATHEMATICS
APPLIED MATHEMATICS
SUPERVISOR: ASSOC. PROF. DR. HANDAN ÇERDİK YASLAN
DENİZLİ, JULY 2019**

This thesis consists of four main chapters. In the first chapter emergence and development of the fractional derivative and information about the methods which have been applied to the fractional differential equations in the literature are given. In the second chapter, Legendre polynomials are introduced and the fundamental informations about Legendre polynomials are given. In the third chapter, conformable fractional derivative and its properties are given. Conformable fractional derivative of a function is computed via shifted Legendre polynomials. In the fourth chapter, collocation method is presented to solve conformable fractional linear and nonlinear differential equations via shifted Legendre polynomials and the method are applied to the various equations.

KEYWORDS: Conformable fractional derivative, shifted Legendre polynomials, Collocation method, Fractional linear differential equations, Fractional nonlinear differential equations.

İÇİNDEKİLER

	<u>Sayfa</u>
ÖZET	i
ABSTRACT	ii
İÇİNDEKİLER	iii
ŞEKİL LİSTESİ	iv
TABLO LİSTESİ	v
ÖNSÖZ	vi
1. GİRİŞ	1
2. LEGENDRE POLİNOMLARI VE ÖZELLİKLERİ	4
2.1 Legendre Polinomları ve Üretici Fonksiyonu	4
2.2 Legendre Polinomlarının Rekürans (Yineleme) Bağlıntıları ve Diferansiyel Denklemleri	5
2.3 Legendre Polinomlarının Ortogonalitesi	7
2.4 Ötelenmiş Legendre Polinomları	7
3. UYUMLU KESİRLİ TÜREV VE ÖZELLİKLERİ	10
3.1 Uyumlu Kesirli Türevin Tanımı	10
3.2 Uyumlu Kesirli Türevin Özellikleri	11
3.3 Bir Fonksiyonun uyumlu Kesirli Türevinin Ötelenmiş Legendre Polinomları ile Hesabı	14
4. UYUMLU KESİRLİ DİFERANSİYEL DENKLEMLER İÇİN ÇÖZÜM YÖNTEMİ	17
4.1 Lineer Kesirli Diferansiyel Denklemler için Çözüm Yöntemi	17
4.2 Lineer Olmayan Kesirli Diferansiyel Denklemler için Çözüm Yöntemi	18
4.3 Uygulamalar	19
5. SONUÇ VE ÖNERİLER	28
6. KAYNAKLAR	30
7. ÖZGEÇMİŞ	34

ŞEKİL LİSTESİ

Sayfa

Şekil 4.1: Örnek 6.a'da $\alpha = 0,2; 0,5; \alpha = 0,8; \alpha = 1$ değerleri için yaklaşık çözümlerin durumu	24
Şekil 4.2: Örnek 7'de $\alpha = 1$ için yaklaşık çözümün mutlak hatası	27

TABLO LİSTESİ

Sayfa

Tablo 4.1: Örnek 6.a'da $N = 5$ ve $\alpha = 0,2; 0,5; 0,8; 1,0$ değerleri için hesaplanan mutlak hatalar	24
Tablo 4.2: Örnek 6.b'de $\alpha = 0,5$ ve $\alpha = 0,9$ için elde edilen $y_{20}(x)$ değerleri	25
Tablo 4.3: Örnek 6.b'de elde edilen $y_{20}(x)$ değerlerinin karşılaştırılması	25
Tablo 4.4: Örnek 7'de $\alpha = 0,5; 0,75; 0,9; 1,0$ değerleri için sayısal sonuçlar	26
Tablo 4.5: Örnek 8'de $N = 6; 10; 15$ için hesaplanan mutlak hatalar	27

ÖNSÖZ

Tez çalışmamın planlama, araştırma ve kaleme alıp düzenleme safhalarında ilgi, bilgi, donanım ve tecrübesinden faydalandığım, akademik anlamda etiğe olan profesyonel bakış açısının yanında sergilediği olumlu tutum ve davranışlarıyla kendisini örnek aldığım, lisansüstü eğitim sürecimin her anında hoşgörü, sabır ve desteğini esirgemeyen saygıdeğer hocam Doç. Dr. Handan ÇERDİK YASLAN'a teşekkürlerimi bir borç bilirim.

Lisans eğitimimin başlangıcından bu yana görüş, tavsiye ve deneyimlerini sıkılmadan benimle paylaşan kıymetli arkadaşım Öğr. Gör. Esra BOZTEPE'ye teşekkürlerimi sunarım.

Eğitim hayatım boyunca her zaman yanımda olan ve her alanda arkamda olduklarını bildiğim aileme minnet borçluyum.

Ferdi MUTLU

1. GİRİŞ

Temelleri Leibniz'in 17. yüzyıldaki notlarına dayanan ve çalışmalarında $\frac{1}{2}$ mertebeden türeve değinmesi ile ortaya çıkmış olan kesirli (tam sayı olmayan) mertebeden türev kavramı, iki yüz yıllık bir zaman dilimi boyunca birçok bilim adamının araştırma konusu olmuştur. Leibniz'in öncülüğünde hayat bulan keyfi mertebeden türev ve integral teorisi Liouville, Grünwald, Letnikov ve Riemann gibi bilim adamlarının araştırmaları sayesinde 19. yy sonlarında hemen hemen son şeklini almıştır. Bu araştırmaların sonuçları salt matematik bilimine ait problemlerin çözümünü kolaylaştırmış olmakla kalmamış, Podlubny (1999)'nin kitabında da görülebileceği üzere çeşitli matematiksel yöntemlerle birlikte kullanılarak mühendislik, fizik, kimya ve biyoloji alanlarındaki uygulamalarda analitik ve yaklaşık çözümlerin elde edilmesini, bu çözümlerin daha anlamlı bir şekilde yorumlanmasını sağlamıştır.

Kesirli mertebeden diferansiyel denklemlerin çözümlerinde çoğunlukla Caputo türevi tercih edilmiştir. Saadatmandi ve Dehghan (2010), Rehman ve Khan (2011), Yang (2013), Khalil ve diğ. (2015), Mohammadi ve Mohyud-Din (2016), Mohammadi ve Cattani (2018) Caputo kesirli türevli diferansiyel denklemleri, Legendre Pseudo-Spektral yöntem, operasyonel matris yöntemi, Legendre dalgacık yöntemi, Legendre dalgacık-Tau yöntemi gibi yöntemler kullanarak Legendre polinomları yardımıyla çözmüşlerdir. Li (2010), Doha ve diğ. (2011^{ab}), Khader (2016), Parand ve Delkhosh (2017), Yaslan (2017a) Caputo kesirli türevli diferansiyel denklemlerin çözümünde Chebyshev Spektral yöntem, operasyonel matris yöntemi, Chebyshev dalgacık yöntemi gibi yöntemleri ile birlikte Chebyshev polinomlarından faydalanmışlardır. Ayrıca Doha ve diğ. (2012), Khader (2013), Abd-Elhameed ve Youssri (2016), Alshbool ve diğ. (2017), Isah ve Phang (2019) Caputo kesirli türevli diferansiyel denklemleri Bernstein, Laguerre, Lucas, Jacobi ve Genocchi polinomları yardımıyla çözmüşlerdir.

Yakın zaman içerisinde Khalil ve diğ. (2014) Grünwald-Letnikov, Reimann-Liouville ve Caputo kesirli türevlerinin formüllerine kıyasla daha basit ve anlaşılır olan uyumlu kesirli türev adıyla yeni bir kesirli türev tanımını yaparak bu türevin

temel özelliklerini ortaya koymuşlardır. Abdeljawad (2015) uyumlu kesirli türevin tanımı ile belli bazı özelliklerini, analiz ve fonksiyonlar teorisinde oldukça önemli olan teoremler yardımıyla vermiştir. Uyumlu kesirli türevin literatüre girmesi sayesinde, yukarıda sayılan kesirli türevler için sağlanamayan ya da belli koşullar altında sağlanan çarpım ve zincir kuralı kolaylıkla sağlanmıştır. Atangana ve diğ. (2015) uyumlu kesirli türevin özelliklerini daha detaylı olarak ele almışlardır. Thomas ve Bamforth (1999), Khitab ve diğ. (2005) uyumlu kesirli türevin, sağlamlaştırılmış betonarme yapılarda klorid iyonlarının taşınması olayının modellenmesinde kullanıldığını saptamışlardır. Zhao ve diğ. (2018) Uyumlu kesirli Maxwell denklemleri, ortamın elektromanyetik alanlarını tanımlamak için kullanmıştır. Uyumlu kesirli türevin, geçirgen ortamda Swartzendruber modelini tanımlamak için kullanıldığını Yang ve diğ. (2018) ortaya koymuştur. Ayrıca Anderson ve Ulness (2015) uyumlu kesirli türevin kuantum mekaniğinde de uygulamalara sahip olduğunu göstermişlerdir.

Uyumlu kesirli türevin literatüre girmesiyle birlikte uyumlu kesir içeren adi diferansiyel denklem, kısmi diferansiyel denklem ve integral denklemlerin çözümleri üzerine çalışmalar yapılmaya başlanmıştır. Ünal ve Gökdoğan (2017) uyumlu kesirli diferansiyel dönüşüm yöntemini uyumlu kesirli diferansiyel denklemlere uygulamıştır. Acan ve diğ. (2017) uyumlu kesirli varyasyonel dönüşüm yöntemini çoklu mertebeli uyumlu kesirli diferansiyel denklemler için kullanmıştır. Hesameddini ve Asadollahifar (2015) sinc kolakasyon yöntemini uyumlu kesirli lineer ve lineer olmayan diferansiyel denklemlere uygulamışlardır. Sabit katsayılı lineer olmayan uyumlu kesirli kısmi diferansiyel denklemlerin çözümleri, genel olarak seyahat eden dalga çözümleri formunda bulunmuştur (Yaslan 2017b, Hosseini ve diğ. 2017a, Hosseini ve diğ. 2017b, Dascioglu ve diğ. 2017, Neamaty ve diğ. 2016). Yaslan (2017b) kesirli kompleks dönüşüm ve tanh yöntemini kullanarak uzay-zaman kesirli Kawahara denkleminin uyumlu kesirli türev anlamında analitik çözümlerini elde etmiştir. Hosseini ve diğ. (2017a) fizik alanındaki bazı olayları açıklamak amacıyla, kuadratik ve kübik nonlineerliğe sahip zaman-kesirli Klein-Gordon denklemlerini uyumlu kesirli türev olarak ele almış ve modifiye Kudryashov yöntemi ile çözmüştür. Hosseini ve diğ. (2017b), uyumlu zaman kesirli Boussinesq denklemini üstel fonksiyon metodunu kullanarak çözmüştür. Dascioglu ve diğ. (2017) Jacobi eliptik fonksiyon metodunu uyumlu uzay kesirli KdV denklemine

uygulamışlardır. Neamaty ve diğ. (2016) G'/G açılım metodunu uyumlu zaman kesirli CDG denklemine uygulamışlardır. Değişken katsayılı uyumlu kesirli kısmi diferansiyel denklemler için de kuvvet serisi ve sıralama yöntemleri kullanılmıştır. Şenol ve diğ. (2018) uyumlu zaman kesirli Burger denklemine rezidual kuvvet serisi metodunu uygulamışlardır. Çenesiz ve Kurt (2015a) iki ve üç boyutlu zaman kesirli dalga denkleminin çözümü için değişkenlerine ayırma yöntemini kullanmıştır. Yaslan (2019) uyumlu uzay-zaman kesirli dalga denkleminin sayısal çözümlerini, ikinci tip ötelenmiş Chebyshev polinomlarını ve sonlu farklar yöntemini kullanarak elde etmiştir. Çenesiz ve Kurt (2015b) uyumlu uzay-zaman kesirli ısı denklemini Fourier transformu yardımıyla çözmüştür. Bayram ve diğ. (2017) uyumlu kesirli integral denklemlere sinc kolakasyon metodunu uygulamışlardır.

Bu tez çalışmasındaki amacımız, Legendre polinomları yardımıyla uyumlu kesirli lineer ve lineer olmayan diferansiyel denklemlerin çözümlerini bulmaktır. Ötelenmiş Legendre polinomlarının köklerinin sıralama noktaları olarak alınmasıyla ötelenmiş Legendre katsayılarından oluşan cebirsel sistem elde edilir. Bu cebirsel denklemler sistemin çözülmesiyle de ötelenmiş Legendre katsayıları bulunarak seri formdaki yaklaşık çözüme ulaşılır.

2. LEGENDRE POLİNOMLARI VE ÖZELLİKLERİ

Ortogonal polinomların türevlenebilme, integrallenebilme ve süreklilik gibi önemli özelliklere sahip olması nedeniyle, araştırmacılar, diferansiyel ve integral denklem gibi denklemlerin çözümlerini bu polinomlar cinsinden arama yoluna gitmişlerdir. Legendre polinomları da ortogonal polinomlar ailesi içerisinde önemli bir yere sahiptir. Bu bölümde, Legendre polinomları ve bu polinomların önemli özellikleri verilmiştir.

2.1 Legendre Polinomları ve Üretici Fonksiyonu

Matematik bilimine ve kendisinden sonra gelen Matematikçilere olan katkılarından dolayı Fransız Matematikçi Adrien-Marie Legendre'in ismiyle anılan Legendre polinomları, x 'in keyfi reel veya kompleks değerleri için (Lebedev 1965)

$$L_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n, n = 0, 1, 2, \dots \quad (2.1)$$

Rodrigues formülü ile tanımlanır. $n = 0, 1, 2, 3, 4, 5$ değerleri için Legendre polinomları aşağıdaki şekildedir:

$$L_0(x) = 1,$$

$$L_1(x) = x,$$

$$L_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1),$$

$$L_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x),$$

$$L_4(x) = \frac{1}{8}(35x^4 - 30x^2 + 3),$$

$$L_5(x) = \frac{1}{8}(63x^5 - 70x^3 + 15x).$$

$(x^2 - 1)^n = \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{n!}{k!(n-k)!} x^{2n-2k}$ binom açılımı ve (2.1) yardımıyla, $[n]$, n 'den küçük en büyük tamsayıyı belirtmek üzere, n -inci mertebeden Legendre polinomunun genel gösterimi

$$L_n(x) = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} (-1)^k \frac{(2n-2k)!}{2^n k!(n-k)!(n-2k)!} x^{n-2k} \quad (2.2)$$

şeklinde ifade edilir.

Legendre polinomlarının üretici fonksiyonu

$$w(x, t) = (1 - 2xt + t^2)^{-1/2} \quad (2.3)$$

şeklinde olup üretici fonksiyon yardımıyla Legendre polinomlarının özellikleri elde edilir. Diğer yandan,

$$w(x, t) = (1 - 2xt + t^2)^{-1/2} = \sum_{n=0}^{\infty} L_n(x) t^n \quad (2.4)$$

seri açılımı da mevcuttur.

Ayrıca Legendre polinomları için aşağıdaki eşitlikler sağlanır:

$$L_n(1) = 1, L_n(-1) = (-1)^n, L_{2n}(0) = (-1)^n \frac{1.3 \dots (2n-1)}{2.4 \dots 2n}, L_{2n+1}(0) = 0.$$

2.2 Legendre Polinomlarının Rekürans (Yineleme) Bağlıları ve Diferansiyel Denklemleri

Legendre polinomlarının rekürans bağlantılarını elde edebilmek için (2.4) seri açılımı önce (Lebedev 1965)

$$(1 - 2xt + t^2) \frac{\partial w}{\partial t} + (t - x)w = 0 \quad (2.5)$$

şeklinde yazılır. Kuvvet serileri terim terim diferansiyellenebilir olduğundan,

$$(1 - 2xt + t^2) \sum_{n=0}^{\infty} n L_n(x) t^{n-1} + (t - x) \sum_{n=0}^{\infty} L_n(x) t^n = 0 \quad (2.6)$$

denkleminde ulaşılır. t^n katsayıları sıfıra eşitlenerek,

$$(n + 1)L_{n+1}(x) - (2n + 1)xL_n(x) + nL_{n-1}(x) = 0 \quad (2.7)$$

ardışık indisli üç Legendre polinomu arasındaki ilişkiyi veren rekürans bağıntısı elde edilir. Bu bağıntı sayesinde $L_0(x) = 1, L_1(x) = x$ eşitliklerinden başlanarak Legendre polinomları adım adım hesaplanır.

Benzer olarak (2.4) seri açılımı,

$$(1 - 2xt + t^2) \frac{\partial w}{\partial x} - tw = 0 \quad (2.8)$$

biçiminde yazılarak

$$(1 - 2xt + t^2) \sum_{n=0}^{\infty} L'_n(x) t^n - \sum_{n=0}^{\infty} L_n(x) t^{n+1} = 0 \quad (2.9)$$

denklemini bulunur. Böylece

$$L'_{n+1}(x) - 2xL'_n(x) + L'_{n-1}(x) - L_n(x) = 0, n = 1, 2, \dots, \quad (2.10)$$

denklemini elde edilir.

(2.7) rekürans bağıntısının diferansiyellenmesiyle önce $L'_{n-1}(x)$ yok edilir. Ardından elde edilen denklemde ve (2.10) denkleminde $L'_{n+1}(x)$ 'in yok edilmesiyle

$$L'_{n+1}(x) - xL'_n(x) = (n+1)L_n(x), n = 0, 1, 2, \dots \quad (2.11)$$

$$xL'_n(x) - L'_{n-1}(x) = nL_n(x), n = 1, 2, \dots \quad (2.12)$$

rekürans bağıntıları elde edilmiş olur.

(2.11) ile (2.12) denklemlerinin taraf tarafa toplanmasıyla

$$L'_{n+1}(x) - L'_{n-1}(x) = (2n+1)L_n(x), n = 1, 2, \dots \quad (2.13)$$

denklemine ulaşılır.

Son olarak (2.11) denkleminde n yerine $n-1$ yazılıp bulunan denklemde ve (2.12) denkleminde $L'_{n-1}(x)$ yok edilirse,

$$(1 - x^2)L'_n(x) = nL_{n-1}(x) - nxL_n(x), n = 1, 2, \dots \quad (2.14)$$

bağıntısı elde edilir.

Elde edilen son bağıntı, bir Legendre polinomunun türevinin Legendre polinomları ile ifade edilebildiğinin göstergesidir. (2.14) denklemini x 'e göre diferansiyellenerek $L'_{n-1}(x)$ 'i yok etmek için (2.12) bağıntısı kullanılırsa

$$[(1 - x^2)L'_n(x)]' + n(n+1)L_n(x) = 0, n = 0, 1, 2, \dots \quad (2.15)$$

denklemine ulaşılır ki bu da $u = L_n(x)$ Legendre polinomunun

$$[(1 - x^2)u']' + n(n+1)u = 0 \quad (2.16)$$

ikinci mertebeden lineer diferansiyel denkleminin özel bir integrali olduğunu göstermektedir.

(2.16) denkleminin matematiksel fizikte sıklıkla rastlanmaktadır ve denklem, Legendre polinomlarının teorisinde önemli bir role sahiptir. (2.16) denkleminde değişkenler değiştirilerek, integralleri Legendre polinomları ile ifade edilebilen birçok denklem kolaylıkla elde edilebilmektedir. Örneğin,

$$\frac{1}{\sin\theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin\theta \frac{du}{d\theta} \right) + n(n+1)u = 0$$

denkleminin $u = L_n(\cos\theta)$ fonksiyonu tarafından ve

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} + \left[\left(n + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4\sin^2\theta} \right] u = 0$$

denkleminin $u = \sqrt{\sin\theta} L_n(\cos\theta)$ fonksiyonu tarafından sağlanmaktadır.

2.3 Legendre Polinomlarının Ortogonalliği

Legendre polinomlarının en önemli özelliklerinden biri, $[-1,1]$ aralığında $\rho(x) = 1$ ağırlık fonksiyonuna göre ortogonal olmalarıdır. Yani,

$$\delta_{nm} = \begin{cases} 1, & n = m \\ 0, & n \neq m \end{cases}$$

olarak tanımlı Kronecker delta fonksiyonu yardımıyla,

$$\int_{-1}^1 L_m(x) L_n(x) dx = \frac{2}{2n+1} \delta_{nm} \quad (2.17)$$

şeklinde yazılabiliyor olmalarıdır (Lebedev 1965).

2.4 Ötelenmiş Legendre Polinomları

Çözümleri $[-1,1]$ aralığında olan $L_n(x)$ Legendre polinomlarına $x \rightarrow 2x - 1$ dönüşümü uygulanarak $[0,1]$ aralığında çözümlere sahip olan $P_n(x) = L_n(2x - 1)$ ötelenmiş Legendre polinomları elde edilir. Dolayısıyla Legendre polinomları için verilen ilk rekürans bağıntısı ötelenmiş Legendre polinomları için

$$(n+1)P_{n+1}(x) - (2n+1)(2x-1)P_n(x) + nP_{n-1}(x) = 0 \quad (2.18)$$

ya da

$$P_{n+1}(x) = \frac{(2n+1)(2x-1)}{n+1} P_n(x) - \frac{n}{n+1} P_{n-1}(x), \quad n = 1, 2, \dots \quad (2.19)$$

olarak bulunur. Ötelenmiş Legendre polinomları

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^n (-1)^{n+k} \frac{(n+k)! x^k}{(n-k)!(k!)^2}, k = 0,1,2,3, \dots \quad (2.20)$$

genel gösterimine sahiptir.

$P_n(1) = 1$ ve $P_n(0) = (-1)^n$ olup $n = 0,1,2,3$ değerleri için bazı ötelenmiş Legendre polinomları aşağıdaki şekildedir:

$$P_0(x) = 1,$$

$$P_1(x) = 2x - 1,$$

$$P_2(x) = 6x^2 - 6x + 1,$$

$$P_3(x) = 20x^3 - 30x^2 + 12x - 1.$$

Legendre polinomlarında $[-1,1]$ aralığında var olan ortogonallik özelliği ötelenmiş Legendre polinomları için $[0,1]$ aralığında mevcut olup

$$\int_0^1 P_m(x)P_n(x) dx = \frac{1}{2n+1} \delta_{nm} \quad (2.21)$$

bağıntısı ile verilir.

Teorem 2.4.1: $(-1,1)$ aralığında tanımlı gerçel $f(x)$ fonksiyonu, $(-1,1)$ aralığında parçalı düzgün ve karesi integrallenebilir bir fonksiyon olsun. Bu takdirde

$$b_n = (n + 1/2) \int_{-1}^1 f(x)L_n(x)dx$$

katsayıları ile verilen

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n L_n(x)$$

serisi, $f(x)$ fonksiyonunun her süreklilik noktasında $f(x)$ fonksiyonuna yakınsar (Lebedev 1965).

$f(x)$ fonksiyonu, $(0,1)$ aralığında parçalı düzgün ve karesi integrallenebilir bir fonksiyon olsun. $f(x)$ fonksiyonunun ötelenmiş Legendre polinomları ile verilen kesilmiş serisi

$$f_N(x) = \sum_{n=0}^N b_n P_n(x) \quad (2.22)$$

ise, serinin katsayıları

ile hesaplanır.

$$b_n = (2n + 1) \int_0^1 f(x)P_n(x)dx$$

3. UYUMLU KESİRLİ TÜREV VE ÖZELLİKLERİ

Kesirli türev, fen ve mühendislik dallarında birçok olayın modellenmesinde kullanılmış ve bu türevin tam sayı mertebeli türeve göre fiziksel olayların modellenmesinde daha başarılı olduğu bilimciler tarafından kabul görmüştür. Kesirli türevin geçmişine bakıldığında Riemann-Lioville, Grünwald-Letnikov, Caputo gibi birçok kesirli türev çeşitlerinin olduğu görülür. 2014'te Khalil ve arkadaşları uyumlu kesirli türev diye isimlendirilen yeni bir kesirli türev çeşidini tanıtmışlardır. Bu türevin diğer kesirli türev çeşitlerine göre avantajı, daha basit formülle verilmiş olması ve türev özelliklerinin tam sayı mertebeli türev özelliklerine benzer olmasıdır. Bu bölümde, tezimde önemli bir yere sahip olan uyumlu kesirli türevin tanımı ve bazı özellikleri verilmiştir. Ayrıca kesilmiş ötelenmiş Legendre polinomları cinsinden seri açılımına sahip bir fonksiyonun, uyumlu kesirli türevi de hesaplanmıştır.

3.1 Uyumlu Kesirli Türevin Tanımı

Tanım 3.1.1: $f: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ve $x > 0$ olacak biçimde, x değişkenine bağlı bir f fonksiyonunun $0 < \alpha \leq 1$ için α -mertebeden uyumlu kesirli türevi,

$$T^\alpha f(x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{f(x + \varepsilon x^{1-\alpha}) - f(x)}{\varepsilon} \quad (3.1)$$

şeklinde tanımlıdır (Khalil ve diğ. 2014).

f fonksiyonunun α -mertebeden uyumlu kesirli türevleri mevcut ise, f fonksiyonu α -diferansiyellenebilirdir.

Teorem 3.1.1: $f: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu $0 < \alpha \leq 1$ için $x_0 > 0$ noktasında α -mertebeden diferansiyellenebilir ise, f fonksiyonu x_0 noktasında süreklidir (Khalil ve diğ. 2014).

İspat:

$$f(x_0 + \varepsilon x_0^{1-\alpha}) - f(x_0) = \frac{f(x_0 + \varepsilon x_0^{1-\alpha}) - f(x_0)}{\varepsilon} \cdot \varepsilon$$

olduğundan eşitliğin her iki tarafının limiti alınarak

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} [f(x_0 + \varepsilon x_0^{1-\alpha}) - f(x_0)] = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \varepsilon x_0^{1-\alpha}) - f(x_0)}{\varepsilon} \cdot \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon$$

yazılır. $h = \varepsilon x_0^{1-\alpha}$ olarak alınırsa,

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} [f(x_0 + h) - f(x_0)] = T^\alpha f(x_0) \cdot 0$$

olup

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} f(x_0 + h) = f(x_0)$$

bulunur. Dolayısıyla f fonksiyonu x_0 noktasında süreklidir.

3.2 Uyumlu Kesirli Türevin Özellikleri

Teorem 3.2.1: $\alpha \in (0,1]$, f ve g de bir $x > 0$ noktasında α -mertebeden diferansiyellenebilir fonksiyonlar olsun. Bu taktirde aşağıdaki eşitlikler gerçeklenir (Khalil ve diğ. 2014).

$$(1) \forall a, b \in \mathbb{R} \text{ için, } T^\alpha (af(x) + bg(x)) = aT^\alpha f(x) + bT^\alpha g(x),$$

$$(2) \forall p \in \mathbb{R} \text{ için, } T^\alpha (x^p) = px^{p-\alpha},$$

$$(3) \forall f(x) = \lambda \text{ sabit fonksiyon olmak üzere, } T^\alpha (\lambda) = 0,$$

$$(4) T^\alpha (fg)(x) = f(x)T^\alpha g(x) + g(x)T^\alpha f(x),$$

$$(5) g(x) \neq 0 \text{ olmak üzere, } T^\alpha (f/g)(x) = \frac{f(x)T^\alpha g(x) - g(x)T^\alpha f(x)}{g^2(x)},$$

$$(6) T^\alpha f(x) = x^{1-\alpha} f'(x).$$

Problemlerde çok sık karşılaşılan bazı fonksiyonların uyumlu kesirli türevleri aşağıdaki şekildedir:

$$T^\alpha (x^p) = px^{p-\alpha}, \forall p \in \mathbb{R},$$

$$T^\alpha (1) = 0,$$

$$T^\alpha (e^{cx}) = cx^{1-\alpha} e^{cx}, c \in \mathbb{R},$$

$$T^\alpha (\sin bx) = bx^{1-\alpha} \cos bx, b \in \mathbb{R},$$

$$T^\alpha (\cos bx) = -bx^{1-\alpha} \sin bx, b \in \mathbb{R},$$

$$T^\alpha \left(\frac{1}{\alpha} x^\alpha \right) = 1,$$

$$T^\alpha \left(e^{\frac{1}{\alpha} x^\alpha} \right) = e^{\frac{1}{\alpha} x^\alpha},$$

$$T^\alpha \left(\sin \frac{1}{\alpha} x^\alpha \right) = \cos \frac{1}{\alpha} x^\alpha,$$

$$T^\alpha \left(\cos \frac{1}{\alpha} x^\alpha \right) = -\sin \frac{1}{\alpha} x^\alpha.$$

Tanım 3.2.1: $f: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ve $x > 0$ olacak biçimde, x değişkenine bağlı bir f fonksiyonu $n \in \mathbb{Z}, n < \alpha \leq n + 1$ için n -mertebeden diferansiyellenebilir olsun. Bu taktirde f fonksiyonunun α -mertebeden uyumlu kesirli türevi,

$$T^\alpha f(x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{f^{(n)}(x + \varepsilon x^n) - f^{(n)}(x)}{\varepsilon} \quad (3.2)$$

şeklinde tanımlıdır (Khalil ve diğ. 2014).

Ayrıca $n \in \mathbb{Z}, n < \alpha \leq n + 1, \beta = \alpha - n$ koşulları altında f fonksiyonunun α -mertebeden kesirli türevi $f^{(n)}(x)$ var olmak üzere,

$$T^\alpha f(x) = T^\beta \left(f^{(n)}(x) \right) \quad (3.3)$$

şeklinde ifade edilebilmektedir (Abdeljawad 2015).

Teorem 3.2.2: $f, g: [a, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonları, $0 < \alpha \leq 1$ için soldan α -mertebeden diferansiyellenebilir fonksiyonlar olsun. $h(x) = f(g(x))$ şeklinde olduğu kabul edilsin. Bu taktirde, $h(x)$ α -mertebeden diferansiyellenebilir ve $x \neq a$ ve $g(x) \neq 0$ koşullarını sağlayan tüm x değerleri için (Abdeljawad 2015)

$$(T_a^\alpha h)(x) = (T_a^\alpha f)(g(x)) \cdot (T_a^\alpha g)(x) \cdot g^{\alpha-1}(x)$$

olup $x = a$ için,

$$(T_a^\alpha h)(a) = \lim_{x \rightarrow a^+} (T_a^\alpha f)(g(x)) \cdot (T_a^\alpha g)(x) \cdot g^{\alpha-1}(x)$$

şeklindedir.

İspat: $u = x + \varepsilon(x - a)^{1-\alpha}$ alınıp g fonksiyonunun sürekliliğinden

$$(T_a^\alpha h)(x) = \lim_{u \rightarrow x} \frac{f(g(u)) - f(g(x))}{(u-x)} x^{1-\alpha}$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{u \rightarrow x} \frac{f(g(u)) - f(g(x))}{(g(u) - g(x))} \lim_{u \rightarrow x} \frac{(g(u) - g(x))}{(u - x)} x^{1-\alpha} \\
&= \lim_{g(u) \rightarrow g(x)} \frac{f(g(u)) - f(g(x))}{(g(u) - g(x))} g^{1-\alpha}(x) (T_a^\alpha g)(x) g^{\alpha-1}(x) \\
&= (T_a^\alpha f)(g(x)) \cdot (T_a^\alpha g)(x) \cdot g^{\alpha-1}(x)
\end{aligned}$$

elde edilir.

Teorem 3.2.3: $f: [a, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, (a, ∞) aralığında ikinci dereceden diferansiyellenebilir bir fonksiyon ve $0 < \alpha, \beta \leq 1$, $1 < \alpha + \beta \leq 2$ olsun. Bu taktirde

$$(T_a^\alpha (T_a^\beta f))(x) = (T_a^{\alpha+\beta} f)(x) + (1 - \beta)(x - a)^{-\beta} (T_a^\alpha f)(x)$$

şeklindedir (Abdeljawad 2015).

İspat: Kesirli çarpım kuralı ve f fonksiyonunun ikinci dereceden diferansiyellenebilir olmasından

$$\begin{aligned}
(T_a^\alpha (T_a^\beta f))(x) &= x^{1-\alpha} \frac{d}{dt} [x^{1-\beta} (x - a)^{-\beta} f'(x)] \\
&= x^{1-\alpha} [x^{1-\beta} f''(x) + (1 - \beta)(x - a)^{-\beta} f'(x)] \\
&= (T_a^{\alpha+\beta} f)(x) + (1 - \beta)(x - a)^{-\beta} (T_a^\alpha f)(x)
\end{aligned}$$

elde edilir.

Teorem 3.2.4: $a > 0$ ve $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu aşağıdaki koşulları sağlasın:

- (1) $f, [a, b]$ üzerinde süreklidir.
- (2) $f, (a, b)$ aralığına ait bazı α değerleri için α -mertebeden diferansiyellenebilirdir.
- (3) $f(a) = f(b)$.

Bu taktirde, öyle bir $c \in (a, b)$ vardır ki $T^\alpha f(c) = 0$ olur (Abdeljawad 2015).

İspat: $f, [a, b]$ üzerinde sürekli ve $f(a) = f(b)$ olduğundan, yerel ekstremum noktası olan bir $c \in (a, b)$ vardır. c noktasının bir yerel minimum noktası olduğu kabul edilsin. Bu taktirde,

$$T^\alpha f(c) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{f(c+\varepsilon c^{1-\alpha})-f(c)}{\varepsilon} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^-} \frac{f(c+\varepsilon c^{1-\alpha})-f(c)}{\varepsilon}$$

yazılabilir. Ancak birinci ve ikinci limit ifadeleri sırasıyla, negatif ve pozitif olmadıklarından, $T^\alpha f(c) = 0$ 'dır.

Teorem 3.2.5: $a > 0$ ve $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu aşağıdaki koşulları sağlasın:

(1) $f, [a, b]$ üzerinde süreklidir.

(2) $f, (a, b)$ aralığına ait bazı α değerleri için α -mertebeden diferansiyellenebilir.

Bu taktirde, öyle bir $c \in (a, b)$ vardır ki $T^\alpha f(c) = \frac{f(b)-f(a)}{\frac{1}{a}b^\alpha - \frac{1}{a}a^\alpha}$ olur

(Abdeljawad 2015).

İspat: $g(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{\frac{1}{a}b^\alpha - \frac{1}{a}a^\alpha} (\frac{1}{a}x^\alpha - \frac{1}{a}a^\alpha)$ fonksiyonu göz önüne alınsın. Böylece, g fonksiyonu Teorem 3.2.3'ün şartlarını sağlar ve $T^\alpha g(c) = 0$ olacak biçimde $c \in (a, b)$ vardır. $T^\alpha (\frac{1}{a}x^\alpha) = 1$ özelliğinden dolayı,

$$T^\alpha f(c) = \frac{f(b)-f(a)}{\frac{1}{a}b^\alpha - \frac{1}{a}a^\alpha}$$

olur.

3.3 Bir Fonksiyonun Uyumlu Kesirli Türevinin Ötelenmiş Legendre Polinomları ile Hesabı

Bu bölümde, ötelenmiş Legendre polinomları cinsinden seri açılımına sahip bir fonksiyonun, uyumlu kesirli türevi için yeni bir formül elde edilmiştir.

Teorem 3.3.1: $f(x)$ fonksiyonunun ötelenmiş Legendre polinomlarına göre kesilmiş seri açılımı (2.22) ile verilsin. Bu taktirde $[\alpha]$, α 'ya eşit ya da α 'dan büyük en küçük tamsayı ve

$$M_{n,k}^{(\alpha)} = (-1)^{n+k} \frac{\Gamma(n+k+1)}{\Gamma(n-k+1)\Gamma(k+1)\Gamma(k-m+1)}$$

olmak üzere

$$T^\alpha(f_N(x)) = \sum_{n=[\alpha]}^N \sum_{k=[\alpha]}^n b_n M_{n,k}^{(\alpha)} x^{k-\alpha} \quad , m \in Z, m-1 < \alpha \leq m \quad (3.4)$$

elde edilir. Burada Γ , Euler gamma fonksiyonu olarak tanımlanır (Podlubny 1999).

İspat: Uyumlu kesirli türevin lineerlik özelliğinden ve $f_N(x)$ fonksiyonunun (2.22) ile verilen tanımından $\alpha > 0$ için,

$$T^\alpha(f_N(x)) = \sum_{n=0}^N b_n T^\alpha(P_n(x)) \quad (3.5)$$

elde edilir. Ayrıca, Teorem 3.2.1 (1), (6) ve (3.3) denkleminde

$$T^\alpha(P_n(x)) = 0, n = 0, 1, \dots, [\alpha] - 1, m \in Z, m-1 < \alpha \leq m \quad (3.6)$$

ve böylece (2.20) denkleminde $m-1 < \alpha \leq m$ için,

$$T^\alpha(P_n(x)) = \sum_{k=[\alpha]}^n (-1)^{n+k} \frac{\Gamma(n+k+1)}{\Gamma(n-k+1)\Gamma(k+1)\Gamma(k-m+1)} \quad (3.7)$$

elde edilir. (3.5), (3.6) ve (3.7) denklemleri kullanılarak $m-1 < \alpha \leq m$ için

$$T^\alpha(f_N(x)) = \sum_{n=[\alpha]}^N \sum_{k=[\alpha]}^n b_n (-1)^{n+k} \frac{\Gamma(n+k+1)}{\Gamma(n-k+1)\Gamma(k+1)\Gamma(k-m+1)} x^{k-\alpha}$$

denkleminde ulaşılır.

Teorem 3.3.2: $T^\alpha(f_N(x))$ ve $T^\alpha(f(x))$ türevlerinin yaklaşık hesabındaki hata

$$\theta_{n,j,k} = \sum_{l=0}^j \frac{(-1)^{n+k+j+l} \Gamma(n+k+1) \Gamma(j+l+1) (2j+1)}{\Gamma(n-k+1) \Gamma(k-m+1) \Gamma(j-l+1) \Gamma(k+1) \Gamma^2(l+1) (k+l-\alpha+1)}$$

olmak üzere

$$|T^\alpha(f(x)) - T^\alpha(f_N(x))| \leq \sum_{n=N+1}^{\infty} \sum_{j=0}^N \sum_{k=[\alpha]}^n |\theta_{n,j,k}| |b_n|, x \in [0,1]$$

eşitsizliği ile sınırlıdır.

İspat:

$$a_{k,j} = \sum_{l=0}^j (-1)^{j+l} \frac{\Gamma(j+l+1)}{\Gamma(j-l+1) \Gamma^2(l+1) (k+l-\alpha+1)} (2j+1) \quad (3.8)$$

olmak üzere $x^{k-\alpha}$ fonksiyonu, $N+1$ terimli Legendre polinomu ile yaklaşık olarak

$$x^{k-\alpha} \cong \sum_{j=0}^N a_{k,j} P_j(x) \quad (3.9)$$

ile ifade edilir (Khalil ve diğ. 2015). (3.8) ve (3.9) denklemleri (3.4) denkleminde yerine yazılırsa $m - 1 < \alpha \leq m$ için,

$$T^\alpha(f_N(x)) = \sum_{n=[\alpha]}^N \sum_{j=0}^N \sum_{k=[\alpha]}^n b_n \theta_{n,j,k} P_j(x)$$

bulunur ve böylece

$$|T^\alpha(f(x)) - T^\alpha(f_N(x))| \leq \sum_{n=N+1}^{\infty} \sum_{j=0}^N \sum_{k=[\alpha]}^n |\theta_{n,j,k}| |b_n| |P_j(x)|$$

yazılabilir.

$x \in [0,1]$ için, $|P_j(x)| \leq 1$ olduğundan ispat tamamlanmış olur.

4. UYUMLU KESİRLİ DİFERANSİYEL DENKLEMLER İÇİN ÇÖZÜM YÖNTEMİ

Bu bölümde, değişken katsayılı, kesirli mertebeli lineer ve lineer olmayan diferansiyel denklemlerin çözümü için ötelenmiş Legendre polinomlarından yararlanılan bir sıralama yöntemi geliştirilmiştir. Bölüm 4.1 ve Bölüm 4.2’de sırasıyla kesirli mertebeli lineer ve lineer olmayan diferansiyel denklemler için çözüm yöntemi anlatılmıştır. Bölüm 4.3’te ise yöntemin, kesirli mertebeli lineer ve lineer olmayan diferansiyel denklemlere uygulamalarına yer verilmiştir.

4.1 Lineer Kesirli Diferansiyel Denklemler için Çözüm Yöntemi

$0 < \alpha_1 < \dots < \alpha_{r-1} < \alpha, m - 1 < \alpha \leq m, A_k(x), k = 1, 2, \dots, r,$ ve $f(x)$ bilinen sürekli fonksiyonlar ve $n = 0, 1, \dots, [\alpha] - 1$ için d_i sabitleri verilmiş olsun.

$$y^{(n)}(0) = d_n, n = 0, 1, \dots, [\alpha] - 1 \quad (4.1)$$

başlangıç koşulları ile birlikte

$$T^\alpha y(x) + \sum_{k=1}^{r-1} A_k(x) T^{\alpha_k} y(x) + A_r(x) y(x) = f(x), x \in [0,1] \quad (4.2)$$

lineer kesirli diferansiyel denklemini ele alalım. (4.2) denklemi ile verilen kesirli lineer diferansiyel denklemin çözümünün

$$y_N(x) = \sum_{n=0}^N b_n P_n(x) \quad (4.3)$$

olarak yazılabildiği kabul edilsin.

(4.3) denklemi (4.2) denkleminde yerine yazılıp Teorem 3.3.1 kullanılırsa

$$\sum_{n=[\alpha]}^N \sum_{k=[\alpha]}^n b_n M_{n,k}^{(\alpha)} x^{k-\alpha} + A_1(x) \sum_{n=[\alpha_1]}^N \sum_{k=[\alpha_1]}^n b_n M_{n,k}^{(\alpha_1)} x^{k-\alpha_1} + \dots + A_{r-1}(x) \sum_{n=[\alpha_{r-1}]}^N \sum_{k=[\alpha_{r-1}]}^n b_n M_{n,k}^{(\alpha_{r-1})} x^{k-\alpha_{r-1}} + A_r(x) \sum_{n=0}^N b_n P_n(x) = f(x) \quad (4.4)$$

elde edilir.

(4.4) denkleminde $p = 1, 2, \dots, N + 1 - [\alpha]$ için $N + 1 - [\alpha]$ tane x_p sıralama noktaları yazılarak

$$\begin{aligned} & \sum_{n=[\alpha]}^N \sum_{k=[\alpha]}^n b_n M_{n,k}^{(\alpha)} x_p^{k-\alpha} + A_1(x_p) \sum_{n=[\alpha_1]}^N \sum_{k=[\alpha_1]}^n b_n M_{n,k}^{(\alpha_1)} x_p^{k-\alpha_1} + \dots \\ & + A_{r-1}(x) \sum_{n=[\alpha_{r-1}]}^N \sum_{k=[\alpha_{r-1}]}^n b_n M_{n,k}^{(\alpha_{r-1})} x_p^{k-\alpha_{r-1}} + A_r(x_p) \sum_{n=0}^N b_n P_n(x_p) = f(x_p) \end{aligned} \quad (4.5)$$

bulunur.

Uygun sıralama noktaları için $P_{N+1-[\alpha]}(x)$ ötelenmiş Legendre polinomunun kökleri kullanılmaktadır. Ayrıca (4.3) denklemi, (4.1) ile verilen başlangıç koşulunda yerine yazılırsa $[\alpha]$ tane denklem elde edilir. Böylece $n = 0, 1, \dots, N$ olacak biçimde bilinmeyen b_n katsayıları için $N + 1$ denklem ve $N + 1$ bilinmeyenden oluşan bir lineer sistem elde edilir. Sonuç olarak, bu lineer sistem çözüldüğünde bilinmeyen b_n katsayıları bulunup (4.3) denkleminde yerine yazıldığında (4.1)-(4.2) başlangıç değer probleminin çözümü, kesilmiş ötelenmiş Legendre polinomlarının seri açılımı olarak yazılmış olur.

4.2 Lineer Olmayan Kesirli Diferansiyel Denklemler için Çözüm

Yöntemi

$0 < \alpha_1 < \dots < \alpha_{r-1} < \alpha, m - 1 < \alpha \leq m$ ve F lineer olmayan bir operatör olmak üzere,

$$T^\alpha y(x) = F(x, y(x), T^{\alpha_1} y(x), \dots, T^{\alpha_{r-1}} y(x)), x \in [0,1] \quad (4.6)$$

$$y^{(n)}(0) = d_n, n = 0, 1, \dots, [\alpha] - 1 \quad (4.7)$$

lineer olmayan kesirli diferansiyel denklemi göz önünde bulundurulsun. (4.6) lineer olmayan kesirli diferansiyel denkleminin çözümünün

$$y_N(x) = \sum_{n=0}^N b_n P_n(x) \quad (4.8)$$

biçiminde yazılabildiği kabul edilsin.

(4.8) denklemi (4.6) denkleminde yerine yazılıp Teorem 3.3.1 kullanılırsa

$$\begin{aligned} & \sum_{n=[\alpha]}^N \sum_{k=[\alpha]}^n b_n M_{n,k}^{(\alpha)} x^{k-\alpha} = \\ & F\left(x, \sum_{n=0}^N b_n P_n(x), \sum_{n=[\alpha_1]}^N \sum_{k=[\alpha_1]}^n b_n M_{n,k}^{(\alpha_1)} x^{k-\alpha_1}, \dots, \sum_{n=[\alpha_{r-1}]}^N \sum_{k=[\alpha_{r-1}]}^n b_n M_{n,k}^{(\alpha_{r-1})} x^{k-\alpha_{r-1}}\right) \end{aligned} \quad (4.9)$$

elde edilir.

(4.9) denkleminde $p = 1, 2, \dots, N + 1 - [\alpha]$ için $N + 1 - [\alpha]$ tane x_p sıralama noktaları yazılırsa

$$\sum_{n=[\alpha]}^N \sum_{k=[\alpha]}^n b_n M_{n,k}^{(\alpha)} x_p^{k-\alpha} = F \left(x_p, \sum_{n=0}^N b_n P_n(x_p), \sum_{n=[\alpha_1]}^N \sum_{k=[\alpha_1]}^n b_n M_{n,k}^{(\alpha_1)} x_p^{k-\alpha_1}, \dots, \sum_{n=[\alpha_{r-1}]}^N \sum_{k=[\alpha_{r-1}]}^n b_n M_{n,k}^{(\alpha_{r-1})} x_p^{k-\alpha_{r-1}} \right) \quad (4.10)$$

elde edilir.

Uygun sıralama noktaları için $P_{N+1-[\alpha]}(x)$ ötelenmiş Legendre polinomunun kökleri kullanılmaktadır. Ayrıca (4.8) denklemi, (4.7) başlangıç koşulunda yerine yazılırsa $[\alpha]$ tane denklem elde edilir. Böylece $n = 0, 1, \dots, N$ olmak üzere bilinmeyen b_n katsayıları için $N + 1$ denklem ve $N + 1$ bilinmeyenden oluşan lineer olmayan bir sistem elde edilir. Elde edilen lineer olmayan cebirsel sistem, Newton iterasyon yöntemi ile çözülerek, bilinmeyen b_n katsayıları bulunur. Sonuç olarak, (4.6)-(4.7) ile verilen başlangıç değer probleminin çözümü, kesilmiş ötelenmiş Legendre polinomlarının seri açılımı olarak yazılmış olur.

4.3 Uygulamalar

Örnek 1. Tam çözümü $y_e(x) = x + 1$ olan

$$T^2 y + T^{3/2} y + y = x + 1, y(0) = 1, y'(0) = 1 \quad (4.11)$$

lineer kesirli diferansiyel denklemini verilen başlangıç koşulları ile birlikte ele alalım.

Bölüm 4.1'de açıklanmış olan çözüm yöntemi kullanılırsa $N = 2$ ve $[\alpha] = 2$ için, (4.11) denkleminin yaklaşık çözümü,

$$y_2(x) = \sum_{n=0}^2 b_n P_n(x) \quad (4.12)$$

şeklindedir.

Diğer yandan Teorem 3.3.1'den dolayı,

$$T^2 y_2(x) = \sum_{n=2}^2 \sum_{k=2}^n b_n M_{n,k}^{(\alpha)} x^{k-2}$$

$$T^{3/2} y_2(x) = \sum_{n=2}^2 \sum_{k=2}^n b_n M_{n,k}^{(\alpha)} x^{k-3/2}$$

uyumlu kesirli mertebeden türevleri yazmak mümkündür.

Verilen başlangıç koşulları (4.12) denkleminde yerine yazılırsa

$$b_0 - b_1 + b_2 = 1, 2b_1 - 6b_2 = 1 \quad (4.13)$$

elde edilir.

$$N + 1 - [\alpha] = 2 + 1 - 2 = 1$$

olduğundan, $P_1(x) = 2x - 1$ ötelenmiş Legendre polinomunun kökü olan $x_1 = 0,5$ tek sıralama noktası olarak alınabilir. (4.5) denklemi

$$b_0 + 19,9853b_2 = \frac{3}{2} \quad (4.14)$$

olarak yazılır.

(4.13)-(4.14) ile verilen lineer sistemin çözülmesiyle bilinmeyen katsayılar,

$$b_0 = \frac{3}{2}, b_1 = \frac{1}{2}, b_2 = 0$$

şeklinde elde edilir.

Bulunan katsayılar (4.12) denkleminde yerine yazılırsa problemin tam çözümü olan $y_e(x) = x + 1$ elde edilmiş olur.

Örnek 2. Tam çözümü $y_e(x) = x^2$ olan

$$T^{3/2}y + 2Ty + 3\sqrt{x}T^{1/2}y + (1 - x)y = 2\sqrt{x} + 4x + 7x^2 - x^3, 0 < x \leq 1 \quad (4.15)$$

lineer kesirli diferansiyel denklemini $y(0) = 0, y'(0) = 0$ başlangıç koşulları altında göz önünde bulunduralım.

(4.15) denkleminin $N = 2$ için yaklaşık çözümü,

$$y_2(x) = \sum_{n=0}^2 b_n P_n(x) \quad (4.16)$$

şeklindedir.

Verilen başlangıç koşulları (4.16) denkleminde yerine yazılırsa

$$b_0 - b_1 + b_2 = 0, 2b_1 - 6b_2 = 0 \quad (4.17)$$

elde edilir.

$P_1(x) = 2x - 1$ ötelenmiş Legendre polinomunun kökü olan $x_1 = 0,5$ sıralama noktası için (4.5) denklemi,

$$\frac{1}{2}b_0 + 7b_1 + 8,2353b_2 = 5,0392 \quad (4.18)$$

olarak yazılır.

(4.17)-(4.18) ile verilen lineer sistemin çözülmesiyle bilinmeyen katsayılar,

$$b_0 = \frac{1}{3}, b_1 = \frac{1}{2}, b_2 = \frac{1}{6}$$

şeklinde elde edilir.

Böylece problemin tam çözümü olan $y_e(x) = x^2$ elde edilmiş olur.

Örnek 3. Tam çözümü $y_e(x) = x^2 - x$ olan

$$T^\alpha y + x^2 y = 2x^{2-\alpha} - x^{1-\alpha} + x^4 - x^3, \alpha \in (0,1) \quad (4.19)$$

lineer kesirli diferansiyel denklemini $y(0) = 0$ başlangıç koşulu altında inceleyelim.

(4.19) denkleminin $N = 2$ için yaklaşık çözümü,

$$y_2(x) = \sum_{n=0}^2 b_n P_n(x) \quad (4.20)$$

şeklindedir.

Verilen başlangıç koşulu (4.20) denkleminde yerine yazılırsa

$$b_0 - b_1 + b_2 = 0 \quad (4.21)$$

elde edilir.

$$N + 1 - [\alpha] = 2 + 1 - 1 = 2$$

olduğundan $P_2(x) = 6x^2 - 6x + 1$ ötelenmiş Legendre polinomunun kökleri olan

$$x_1 = \frac{\sqrt{3}}{6} + \frac{1}{2} \text{ ve } x_2 = -\frac{\sqrt{3}}{6} + \frac{1}{2}$$

iki adet sıralama noktaları için (4.5) denklemi

$$0,6220b_0 + 2,0132b_1 + 2,8649b_2 = 0,3738 \quad (4.22)$$

$$0,0447b_0 + 0,5510b_1 - 0,9990b_2 = -0,1739$$

lineer sistemi şeklinde yazılır.

(4.21)-(4.22) sisteminin çözülmesiyle bilinmeyen katsayılar,

$$b_0 = -\frac{1}{6}, b_1 = 0, b_2 = \frac{1}{6}$$

olarak elde edilir ve lineer kesirli diferansiyel denkleminin $y_e(x) = x^2 - x$ tam çözümüne ulaşılır.

Örnek 4. Tam çözümü $y_e(x) = x^{3/2}e^{-x}$ olan

$$T^{1/2}y + \sqrt{x}y = xe^{-x} \quad (4.23)$$

$y(0) = 0$ başlangıç koşulu ile verilen lineer kesirli diferansiyel denklemini ele alalım.

(4.23) denkleminin $N = 5$ için yaklaşık çözümü,

$$y_5(x) = \sum_{n=0}^5 b_n P_n(x) \quad (4.24)$$

şeklindedir.

Verilen başlangıç koşulu (4.24) denkleminde yerine yazılırsa

$$b_0 - b_1 + b_2 - b_3 + b_4 - b_5 = 0 \quad (4.25)$$

elde edilir.

$P_5(x)$ ötelenmiş Legendre polinomunun kökleri alınarak elde edilen sıralama noktaları için (4.5) denklemi,

$$\begin{aligned} 0,7071b_0 + 1,4142b_1 - 0,3536b_2 - 2,1213b_3 + 0,2652b_4 + 2,6517b_5 &= 0,4549 \\ 0,9763b_0 + 2,8372b_1 + 6,0224b_2 + 9,5854b_3 + 12,3959b_4 + 13,4145b_5 &= 0,5512 \\ 0,2166b_0 + 0,2369b_1 - 1,0191b_2 + 1,9095b_3 - 2,6436b_4 + 2,9761b_5 &= 0,0671 \\ 0,8771b_0 + 2,2264b_1 + 2,7765b_2 + 0,8173b_3 - 2,5935b_4 - 4,2553b_5 &= 0,5347 \\ 0,4804b_0 + 0,7021b_1 - 1,5833b_2 + 0,8486b_3 + 1,0895b_4 - 2,3307b_5 &= 0,2748 \end{aligned} \quad (4.26)$$

lineer sistemi olarak yazılır.

(4.25)-(4.26) ile verilen sistemin çözülmesi sonucu katsayılar,

$$b_0 = 0,2012, b_1 = 0,1988, b_2 = -0,0236, b_3 = -0,0126, b_4 = 0,0066, b_5 = -0,0020$$

bulunur ve $y_e(x) = x^{3/2}e^{-x}$ çözümü elde edilir.

Örnek 5. Tam çözümü $y_e(x) = x^3$ olan

$$T^4y + T^{7/2}y + y^3 = x^9, 0 < x \leq 1, y(0) = y'(0) = y''(0) = 0, y'''(0) = 6 \quad (4.27)$$

lineer olmayan başlangıç değer problemini göz önünde bulunduralım.

(4.27) başlangıç değer probleminin $N = 4$ için yaklaşık çözümü,

$$y_4(x) = \sum_{n=0}^4 b_n P_n(x) \quad (4.28)$$

şeklindedir.

(4.9) denklemi $x_1 = 0,5$ sıralama noktası için kullanılır ve verilen başlangıç koşulları (4.28) denkleminde yerine yazılırsa,

$$(1680 + 840\sqrt{2})b_4 + (b_0 - \frac{b_2}{2} + \frac{3}{8}b_4)^3 = \frac{1}{512}$$

$$b_0 - b_1 + b_2 - b_3 + b_4 = 0$$

$$2b_1 - 6b_2 + 12b_3 - 20b_4 = 0 \quad (4.29)$$

$$12b_2 - 60b_3 + 180b_4 = 0$$

$$120b_3 - 840b_4 = 0$$

lineer olmayan denklem sistemi elde edilir.

Elde edilen lineer olmayan denklem sistemi Newton iterasyon yöntemi ile çözülürse, katsayılar

$$b_0 = \frac{1}{4}, b_1 = \frac{9}{20}, b_2 = \frac{1}{4}, b_3 = \frac{1}{20}, b_4 = 0$$

olarak bulunur.

Böylece problemin tam çözümü $y_e(x) = x^3$ elde edilmiş olur.

Örnek 6. Başlangıç koşulu $y(0) = 0$ olan

$$T^\alpha y + y^2 = f(x), 0 < \alpha \leq 1, 0 < x \leq 1 \quad (4.30)$$

kesirli diferansiyel denklemini göz önünde bulunduralım.

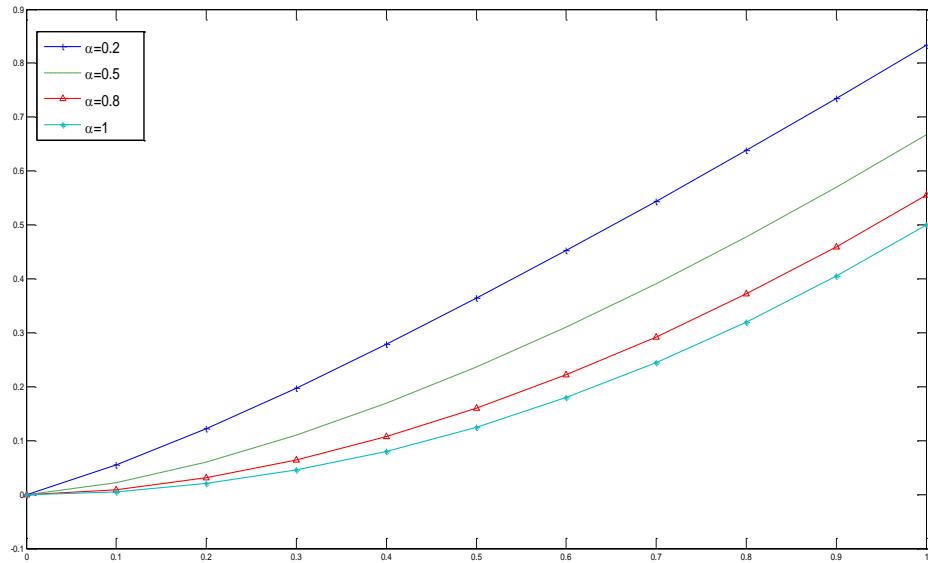
a) $f(x) = x + \frac{x^{2\alpha+2}}{(\alpha+1)^2}$ için, (4.30) başlangıç değer probleminin tam çözümü $y_e(x) = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$ şeklindedir.

$N = 5$ ve $\alpha = 0,2; 0,5; 0,8; 1$ değerleri için yaklaşık çözüm hesaplanmış ve bu α değerlerine karşılık gelen yaklaşık çözümler Şekil 4.1’de; mutlak hatalar ise Tablo 4.1’de gösterilmiştir. Mutlak hata, gerçek çözümlerle yaklaşık çözüm arasındaki farkın mutlak değeri olarak alınmıştır.

Tablo 4.1, α değerleri 1’e yaklaştıkça mutlak hatanın azaldığını ortaya koymaktadır.

Tablo 4.1: Örnek 6.a’da $N = 5$ ve $\alpha = 0,2; 0,5; 0,8; 1,0$ değerleri için hesaplanan mutlak hatalar

x	$\alpha = 0,2$	$\alpha = 0,5$	$\alpha = 0,8$	$\alpha = 1,0$
0,0	0	$3 \cdot 10^{-17}$	$3 \cdot 10^{-17}$	$3 \cdot 10^{-17}$
0,1	$1 \cdot 10^{-3}$	$9 \cdot 10^{-4}$	10^{-4}	$8 \cdot 10^{-18}$
0,2	$8 \cdot 10^{-4}$	$3 \cdot 10^{-4}$	$2 \cdot 10^{-5}$	$6 \cdot 10^{-18}$
0,3	$8 \cdot 10^{-4}$	$3 \cdot 10^{-4}$	$4 \cdot 10^{-5}$	0
0,4	$1 \cdot 10^{-3}$	$6 \cdot 10^{-4}$	$1 \cdot 10^{-4}$	$2 \cdot 10^{-17}$
0,5	$1 \cdot 10^{-3}$	$7 \cdot 10^{-4}$	$1 \cdot 10^{-4}$	$1 \cdot 10^{-17}$
0,6	$8 \cdot 10^{-4}$	$5 \cdot 10^{-4}$	$1 \cdot 10^{-4}$	$2 \cdot 10^{-17}$
0,7	$5 \cdot 10^{-4}$	$3 \cdot 10^{-4}$	$6 \cdot 10^{-5}$	$2 \cdot 10^{-17}$
0,8	$4 \cdot 10^{-4}$	$2 \cdot 10^{-4}$	$5 \cdot 10^{-5}$	$5 \cdot 10^{-17}$
0,9	$5 \cdot 10^{-4}$	$4 \cdot 10^{-4}$	$9 \cdot 10^{-5}$	0
1,0	$4 \cdot 10^{-4}$	$3 \cdot 10^{-4}$	$7 \cdot 10^{-5}$	0



Şekil 4.1: Örnek 6.a’da $\alpha = 0,2; 0,5; \alpha = 0,8; \alpha = 1$ değerleri için yaklaşık çözümlerin durumu

b) $f(x) = 1$ için, (4.30) başlangıç değer problemi Unal ve Gokdogan (2017) tarafından da gösterildiği üzere, $y_e(x) = \frac{\exp(\frac{2}{\alpha}x^\alpha) - 1}{\exp(\frac{2}{\alpha}x^\alpha) + 1}$ tam çözümüne sahiptir.

$N = 20$ alınıp $\alpha = 0,5; 0,9; 1$ değerleri için Bölüm 4.2 ile verilen çözüm yöntemine dayalı sayısal çözümler Tablo 4.2'de gösterilmiştir.

Tablo 4.2, sunulan yöntemin 1'e yaklaşan α değerleri için daha iyi sonuçlar verdiğini göstermektedir.

Tablo 4.3'te, Odibat ve Momani (2008) ile Parand ve Delkhosh (2017)'un sırasıyla Operasyonel Matris ve Modifiye Homotopi Pertürbasyon yöntemleri ile elde ettikleri çözümler ile Bölüm 4.2'de sunulan yöntem yardımıyla elde edilen çözümlerin karşılaştırması verilmiştir. Tablodan, sunulan yöntemin tam çözüm ile uyumlu olduğu görülmektedir.

Tablo 4.2: Örnek 6.b'de $\alpha = 0,5$ ve $\alpha = 0,9$ için elde edilen $y_{20}(x)$ değerleri

x	$y_e(x)$ ($\alpha = 0,5$)	Sunulan Yöntem ($\alpha = 0,5$)	$y_e(x)$ ($\alpha = 0,9$)	Sunulan Yöntem ($\alpha = 0,9$)
0,0	0	0	3.10^{-17}	1.10^{-17}
0,2	0,7136	0,6925	0,2553	0,2550
0,4	0,8524	0,8401	0,4519	0,4516
0,6	0,9137	0,9066	0,6054	0,6052
0,8	0,9456	0,9409	0,7206	0,7205
1,0	0,9640	0,9609	0,8045	0,8043

Tablo 4.3: Örnek 6.b'de $\alpha = 1$ için elde edilen $y_{20}(x)$ değerlerinin karşılaştırılması

x	Odibat ve Momani (2008)	Parand ve Delkhosh (2017)	Sunulan Yöntem	Tam Çözüm
0,0	0	0	1.10^{-17}	0
0,2	0,197375	0,1973753204	0,1973753202249040	0,1973753202249040
0,4	0,379944	0,3799489620	0,3799489622552247	0,3799489622552250
0,6	0,536857	0,5370495668	0,5370495669980352	0,5370495669980353
0,8	0,661706	0,6640367705	0,6640367702678487	0,6640367702678490
1,0	0,746032	0,7615941559	0,7615941559557650	0,7615941559557649

Örnek 7. $\alpha = 1$ için $y_e(x) = 1 + \sqrt{2}\tanh(\sqrt{2}t + \frac{1}{2}\log(\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}))$ tam çözümüne sahip olan

$$T^\alpha y + y^2 - 2y = 1, y(0) = 0, 0 < \alpha \leq 1, 0 < x \leq 1 \quad (4.31)$$

başlangıç değer problemini ele alalım.

$N = 20$ ve $\alpha = 1$ için, elde edilen yaklaşık çözüme karşılık gelen mutlak hata Şekil 4.2’de gösterilmiştir.

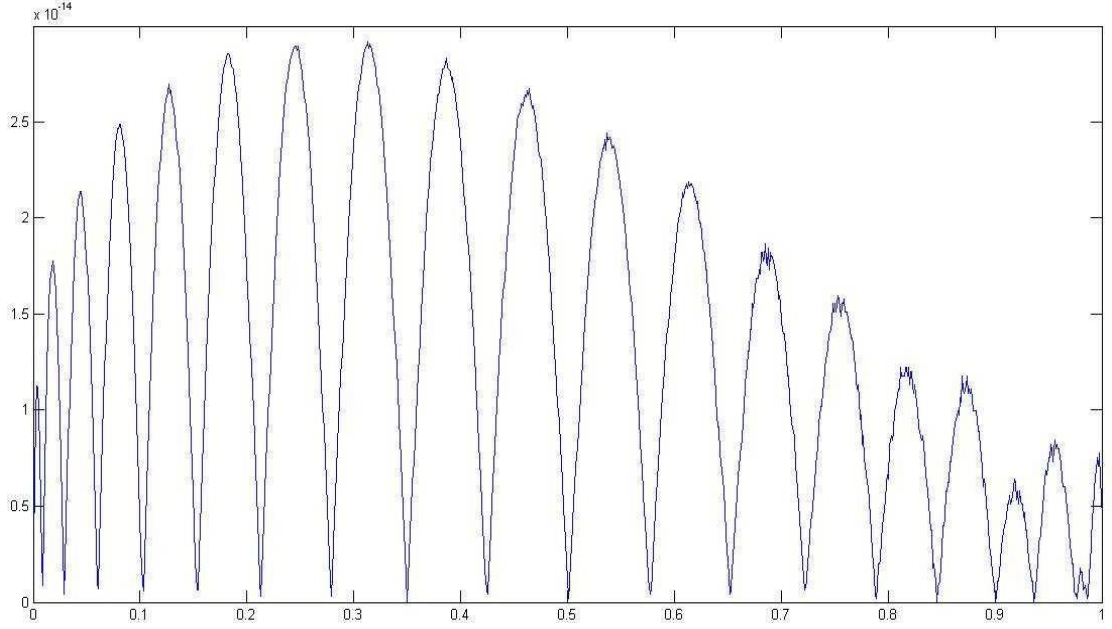
Bota ve Caruntu (2017), $\alpha = 1$ durumu için mutlak hatanın maksimum değerini 10^{-7} bulmuştur. Buna karşılık Bölüm 4.2 ile verilen çözüm yöntemi kullanıldığında bu değer $3 \cdot 10^{-14}$ olarak hesaplanmıştır.

Tablo 4.4’te, $\alpha = 0,5; 0,75; 0,9; 1$ değerleri için hesaplanan yaklaşık çözümler sunulmuş ve Li (2010)’nin vermiş olduğu sayısal çözümlerle karşılaştırması yapılmıştır.

Tablo 4.4, sunulan yöntem ile elde ettiğimiz çözümün tam çözüm ile tutarlı olduğunu göstermektedir.

Tablo 4.4: Örnek 7’de $\alpha = 0,5; 0,75; 0,9; 1,0$ değerleri için sayısal sonuçlar

x	$\alpha = 0,5$	$\alpha = 0,75$	$\alpha = 0,9$	$\alpha = 1,0$	Li (2010) ($\alpha = 1$)	$y_e(x)$ ($\alpha = 1$)
0,0	0	0	0	0	0	
0,2	1,44299	0,56064	0,33244	0,241977	0,241995	0,241977
0,4	1,97548	1,08917	0,73040	0,567812	0,567829	0,567812
0,6	2,19978	1,53763	1,55470	0,953566	0,953576	0,953566
0,8	2,30094	1,86343	1,54168	1,346364	1,346365	0,346364
1,0	2,35079	2,07727	1,84522	1,689498	1,689494	1,689498



Şekil 4.2: Örnek 7’de $\alpha = 1$ için yaklaşık çözümün mutlak hatası

Örnek 8. Tam çözümü $y_e(x) = \cos x$ olan ve $y(0) = 0, y'(0) = 0$ başlangıç koşulları altında verilen

$$T^{3/2}y + y^2 + \sqrt{xy} = \cos^2 x \quad (4.32)$$

kesirli diferansiyel denkleminin $N = 6; 10; 15$ için hesaplanan yaklaşık çözümüne karşılık gelen mutlak hatalar Tablo 4.5’te sunulmuştur. N değerleri arttıkça mutlak hatanın azaldığı görülmüştür.

Tablo 4.5: Örnek 8’de $N = 6; 10; 15$ için hesaplanan mutlak hatalar

x	$N = 6$	$N = 10$	$N = 15$
0,0	0	2.10^{-16}	1.10^{-16}
0,1	1.10^{-8}	9.10^{-13}	1.10^{-16}
0,2	1.10^{-9}	2.10^{-12}	1.10^{-16}
0,3	3.10^{-8}	3.10^{-12}	1.10^{-16}
0,4	3.10^{-8}	3.10^{-12}	1.10^{-16}
0,5	2.10^{-9}	4.10^{-12}	0
0,6	4.10^{-8}	5.10^{-12}	0
0,7	3.10^{-8}	5.10^{-12}	2.10^{-16}
0,8	7.10^{-9}	5.10^{-12}	2.10^{-16}
0,9	2.10^{-8}	5.10^{-12}	1.10^{-16}
1,0	1.10^{-9}	5.10^{-12}	2.10^{-16}

5. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu tez çalışmasında, $[0,1]$ aralığında tanımlanmış olan lineer ve lineer olmayan, uyumlu kesirli türev içeren diferansiyel denklemlerin başlangıç koşulları ile birlikte ötelenmiş Legendre polinomları yardımıyla yaklaşık çözümleri elde edilmiştir.

İkinci bölümde ortogonal polinomlar ailesinden olan Legendre polinomlarının tanımı, üretici fonksiyonu, rekürans bağıntıları, diferansiyel denklemi ve ortogonallığı ile ilgili temel bilgiler verilmiştir.

Üçüncü bölümde uyumlu kesirli türevin tanımına, özelliklerine ve bazı teoremlere yer verilmiştir. Uyumlu kesirli türev diğer kesirli türev türlerine kıyasla daha basit ve anlaşılır olması nedeniyle avantaj sağlamaktadır. Uyumlu kesirli türevin özellikleri tam sayı mertebeli türevin özelliklerine benzerlik göstermekte, çarpım ve zincir kuralları herhangi bir koşula gerek kalmadan sağlanabilmektedir. Bu bölümde ayrıca, bir fonksiyonun uyumlu kesirli türevinin ötelenmiş Legendre polinomları yardımıyla hesabı üzerinde durulmuştur.

Dördüncü bölümde kesirli mertebeli lineer ve lineer olmayan diferansiyel denklemlerin çözümü için ötelenmiş Legendre polinomlarından yararlanılan bir sıralama yöntemi sunulmuş ve sunulan yöntem çeşitli denklemlere uygulanarak denklemlerin tam çözümlerinin elde edilebildiği görülmüştür. Bu yöntemle elde edilen sonuçların diğer yöntemlerle kıyaslandığında, sunulan yöntemle elde edilen sonuçların doğruluğunun daha yüksek olduğu gözlemlenmiştir. Yöntemde, çözüm kesilmiş Legendre serisi ile ifade edilir. Serinin katsayıları hesaplandıktan sonra $y(x)$ çözümü x' in keyfi değerleri için kolayca bulunabilir. Problem sonlu $[a, b]$ aralığında tanımlandığında $x = (b - a)t + a$ lineer dönüşümü ile $[0,1]$ aralığına dönüştürülebilir. Böylece herhangi bir aralıkta tanımlı olan problem bu yöntemle çözülebilir.

N kesme sınırı, problemlerin çözümünde yeterince büyük seçilmelidir. N 'nin yeterince küçük alındığı durumda çözüm istenilen doğrulukta olmayabilir. Yöntemin

avantajlarından biri de eğer tam çözüm varsa ve bu N veya daha düşük dereceli bir polinomsa kurulan yöntem ile problemin tam çözümünün bulunabilir olmasıdır.

Yöntem lineer olan ve lineer olmayan kesirli türevli kısmi diferansiyel denklemlere, diferansiyel denklem sistemlerine hatta integro diferansiyel denklemlere de uygulanabilir.

6. KAYNAKLAR

Abdeljawad, T., “On conformable fractional calculus”, *J. Comput. Apply. Math.*, 279, 57-66, (2015).

Abd-Elhameed, W. M. ve Youssri, Y. H., “Spectral solutions for fractional differential equations via a Novel Lucas operational matrix of fractional derivatives”, *Rom. Jour. Phys.*, 61, 795-813, (2016).

Acan, O., Firat, O., Keskin, Y. ve Oturanc, G., “Conformable variational iteration method”, *NTMSCI*, 5, 172-178, (2017).

Alshbool, M. H. T., Bataineh, A. S., Hashim, I. ve Isik, O. R., “Solutions of fractional-order differential equations based on the operational matrices of new fractional Bernstein functions”, *JKSUS*, 29, 1-18, (2017).

Anderson, D. R. ve Ulness, D. J., “Properties of the Katugampola fractional derivative with potential application in quantum mechanics”, *J. Math. Phys.*, 56, doi:10.1063/1.4922018, (2015).

Atangana, A., Baleanu, D. ve Alsaedi, A., “New properties of conformable derivative”, *Open Math.*, 13, 889-898, (2015).

Bota, C. ve Caruntu B., “Analytical approximate solutions for quadratic Riccati differential equation of fractional order using Polinomial Least Squares method”, *Chaos Soliton Fract.*, 102, 339-345, (2017).

Cenesiz, Y. ve Kurt, A., “The new solution of time fractional wave equation with conformable fractional derivative definition”, *J. New Theory*, 7, 79-85, (2015^a).

Cenesiz, Y. ve Kurt, A., “The solutions of time and space conformable fractional heat equations with conformable Fourier transform”, *Acta Univ. Sapientiae, Mathematica*, 7 (2), 130-140, (2015^b).

Dascioglu, A., Culha, S. ve Bayram, D. V., “New analytical solutions of the space fractional KdV equation in terms of Jacobi elliptic functions”, *NTMSCI*, 5 (4), 232-241, (2017).

Doha, E. H., Bhrawy, A. H. ve Ezz-Eldien, S. S., “Chebyshev spectral method based on operational matrix for initial and boundary value problems of fractional order”, *Comput. Math. Appl.*, 62, 2364-2373, (2011^a).

Doha, E. H., Bhrawy, A. H. ve Ezz-Eldien, S. S., “Efficient Chebyshev spectral methods for solving multi-term fractional orders differential equations”, *Appl. Math. Model.*, 35, 5662-5672, (2011^b).

Doha, E. H., Doha, E. H., Bhrawy, A. H. ve Ezz-Eldien, S. S., “A new Jacobi operational matrix: An application for solving fractional differential equations”, *Appl. Math. Model.*, 36, 4931-4943, (2012).

Hesameddini, E. ve Asadollahifar, E., “Numerical solution of multi order fractional differential equations via the sinc collocation method”, *IJNAO*, 5, 37-48, (2015).

Hosseini, K., Mayeli, P. ve Ansari, R., “Modified Kudryashov method for solving the conformable time-fractional Klein-Gordon equations with quadratic and cubic nonlinearities”, *Optik*, 130, 737-742, (2017^a).

Hosseini, K., Bekir, A. ve Ansari, R., “Exact solutions of nonlinear conformable time-fractional Boussinesq equations using the $\exp(\Phi(\varepsilon))$ -expansion method”, *Optical and Quantum Electronics*, 49, 131, (2017^b).

Isah, A. ve Phang, C., “New operational matrix of derivative for solving non-linear fractional differential equations via Genocchi polynomials”, *JKSUS*, (2019).

Khader., M. M., “Numerical treatment for solving fractional logistic differential equation”, *Differ. Equ. Dyn. Syst.*, 24, 99-107, (2016).

Khader., M. M., “The use of generalized Laguerre polynomials in spectral methods for solving fractional delay differential equations”, *J. Comput. Nonlinear Dynam.*, 8, 1-5, (2013).

Khalil, R., Horani, M. A., Yousef, A. ve Sababheh, M., “A new definition of fractional derivative”, *J. Comput. Apply. Math.*, 264, 65-70, (2014).

Khalil, H., Khan, R. A., Al-Smadi, M. H., Freihat A. A. ve Shawagfeh, N., “New operational matrix for shifted Legendre polynomials and fractional differential equations with variable coefficients”, *Punjab Univ. J. Math.*, 47, 1-23, (2015).

Khitab., A., Lorente, S. ve Ollivier, J. P., “Predictive model for chloride penetration through concrete”, *Mag. Concr. Res.*, 57 (9), 511-520, (2005).

Lebedev, N. N., “*Special Functions and Their Applications*”, (Çev: R. A. Silverman), Englewood Cliffs, N.J.: Prentice-Hall, Inc., (1965).

Li, Y., “Solving a nonlinear fractional differential equation using Chebyshev wavelets”, *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simulat.*, 15, 2284-2292, (2010).

Mohammadi, F. ve Mohyud-Din, S. T., “A fractional-order Legendre collocation method for solving the Bagley-Torvik equations”, *Adv. Differ. Equ.*, 269, 2-14, (2016).

Mohammadi, F. ve Cattani, C., “A generalized fractional-order Legendre wavelet Tau method for solving differential equations”, *J. Comput. Appl. Math.*, 339, 306-316, (2018).

Neamaty, A., Agheli, B. ve Darzi, R., “Exact travelling wave solutions for some nonlinear time fractional fifth-order Caudrey-Dodd-Gibbon equation by (G'/G)-expansion method”, *SeMA Journal*, 73 (2), 121-129, (2016).

Odibat, Z.ve Momani, S., “Modified homotopy perturbation method: application to quadratic Riccati differential equation of fractional order”, *Chaos Soliton Fract.*, 36, 167-174, (2008).

Parand, M. ve Delkhosh, M., “Operational matrices to solve nonlinear Riccati differential equations of arbitrary order”, *S. Pb. Phys. Math. J.*, 3, 242-254, (2017).

Podlubny, I., *Fractional Differential Equations*, Volume 198, USA, UK: Academic Press, (1999).

Rehman, M. ve Khan R. A., “The Legendre wavelet method for solving fractional differential equations”, *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simulat.*, 16, 4163-4173, (2011).

Saadatmandi, A. ve Dehghan M., “A new operational matrix for solving fractional-order differential equations”, *Comput. Math. Appl.*, 59, 1326-1336, (2010).

Senol, M., Alquran, M. ve Kasmaei, H. D., “On the comparison of perturbation-iteration algorithm and residual power series method to solve fractional Zakharov-Kuznetsov equation”, *Results in Physics*, 9, 321-327, (2018).

Thomas, B. D. ve Bamforth, P. B., “Modelling chloride diffusion in concrete: Effect of fly ash and slag”, *Cem. Concr. Res.*, 29 (4), 487-495, (1999).

Unal, E. ve Gokdogan A., “Solution of conformable fractional ordinary differential equations via differential transform method”, *Optik*, 128, 264-273, (2017).

Yang, Y., “Solving a nonlinear multi-order fractional differential equation using Legendre pseudo-spectral method”, *AM*, 4, 113-118, (2013).

Yang, S., Wang, L. ve Zhang, S., “Conformable derivative: Application ton on-Darcian flow in low-permeability porous media”, *Appl. Math. Lett.*, 79, 105-110, (2018).

Yaslan, H. C., “Numerical solution of fractional Riccati differential equation via shifted Chebyshev polynomials of the third kind”, *J. Eng. Technol. Appl. Sci.*, 28, 1-11, (2017a).

Yaslan, H. C., “New analytic solutions of the conformable space-time fractional Kawahara equation”, *Optik*, 140, 123-126, (2017b).

Yaslan, H. C., “Numerical solution of the conformable space-time fractional wave equation”, *Chinese Journal of Physics*, 56 (6), 2916-2925, (2018).

Zhao, D., Pan, X. ve Luo, M., “A new framework for multivariate general conformable fractional calculus and potential applications”, *Physica A*, 510, 271-280, (2018).

7. ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı : Ferdi MUTLU
Doğum Yeri ve Tarihi : SOFYA/25.07.1985
Lisans Üniversite : Gazi Üniversitesi
Elektronik Posta : mutluferdi85@hotmail.com

Yayın Listesi :

- Yaslan, H. Ç. ve Mutlu, F., “Numerical solution of the conformable differential equations via shifted Legendre polynomials”, International Journal of Computer Mathematics, DOI:10.1080/00207160.2019.1605059, (2019).