T.C.
PAMUKKALE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI
UYGULAMALI MATEMATİK

LİNEER OLMAYAN UYUMLU KESİRLİ KISMİ DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN ÇÖZÜM YÖNTEMLERİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

AYŞE GİRGİN

DENİZLİ, TEMMUZ, 2019

T.C.
PAMUKKALE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI
UYGULAMALI MATEMATİK

LİNEER OLMAYAN UYUMLU KESİRLİ KISMİ DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN ÇÖZÜM YÖNTEMLERİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

AYŞE GİRGİN

DENİZLİ, TEMMUZ, 2019

KABUL VE ONAY SAYFASI

Ayşe **GİRGİN** tarafından hazırlanan "**LİNEER OLMAYAN UYUMLU KESİRLİ KISMİ DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN ÇÖZÜM YÖNTEMLERİ**" adlı tez çalışmasının savunma sınavı 19.07.2019 tarihinde yapılmış olup aşağıda verilen jüri tarafından oy birliği ile Pamukkale Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı'nda Yüksek Lisans Tezi olarak kabul edilmiştir.

Jüri Üyeleri — İmza

Danışman
Doç. Dr. Handan ÇERDİK YASLAN ....

Üye
Prof. Dr. İbrahim ÇELİK ....

Üye
Dr. Öğr. Üyesi Neşe İŞLER ACAR ....

Pamukkale Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun 08/08/2019 tarih ve 32/14 sayılı kararıyla onaylanmıştır.

....

Prof. Dr. Uğur YÜCEL

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

Bu tezin tasarımı, hazırlanması, yürütülmesi, araştırmalarının yapılması ve bulgularının analizlerinde bilimsel etiğe ve akademik kurallara özenle riayet edildiğini; bu çalışmanın doğrudan birincil ürünü olmayan bulguların, verilerin ve materyallerin bilimsel etiğe uygun olarak kaynak gösterildiğini ve alıntı yapılan çalışmalara atfedildiğini beyan ederim.

AYŞE GİRGİN

A. Gir

ÖZET

LİNEER OLMAYAN UYUMLU KESİRLİ KISMİ DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN ÇÖZÜM YÖNTEMLERİ
YÜKSEK LİSANS TEZİ
AYŞE GİRGİN
PAMUKKALE ÜNİVERSİTESİ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI
UYGULAMALI MATEMATİK
TEZ DANIŞMANI: DOÇ. DR. HANDAN ÇERDİK YASLAN
DENİZLİ, TEMMUZ 2019

Bu tez çalışması üç ana bölümden oluşmuştur. Birinci bölümde kesirli türevin tarihi, kesirli türev çeşitleri ve literatürdeki kesirli diferansiyel denklemlere uygulanan çözüm yöntemleri hakkında bilgi verilmiştir. İkinci kısımda, uyumlu kesirli türevin tanımı verilmiştir ve bazı temel özelliklerine değinilmiştir. Ana bölüm olan üçüncü bölümde ise uyumlu kesirli lineer olmayan kısmi diferansiyel denklemlerin çözümü için (G’/G)-açılım metodu, (G’/G^2)-açılım metodu, Kudryashov metodu, (b+Q^2)-Tanjant Fonksiyonu metodu, (b+Q^2)-değiştirilmiş Tanjant Fonksiyonu metodu, Üstel-Fonksiyon metodu, Basitleştirilmiş tan(F/2) Açılım metodu (SITEM) ve Auxiliary metodu verilmiş ve bu metotlar fizik ve mühendislikte önemli bir yere sahip olan bazı denklemlere uygulanmıştır.

ANAHTAR KELİMELER: Uyumlu kesirli türev, Lineer olmayan uyumlu kesirli kısmi diferansiyel denklemler, Seyahat eden dalga çözümleri.

ABSTRACT

SOLUTİON METHODS OF THE NONLİNEAR CONFORMABLE FRACTİONAL PARTİAL DİFFERANTİAL EQUATİONS
MASTER'S THESIS
AYŞE GİRGİN
PAMUKKALE UNIVERSITY INSTITUTE OF SCIENCE
MATHEMATICS
APPLIED MATHEMATICS
SUPERVISOR: ASSOC. PROF. DR. HANDAN ÇERDİK YASLAN
DENİZLİ, JULY 2019

This thesis consists of three main chapter. In the first chapter, the history of fractional derivative, types of fractional derivative and solution methods applied to fractional differential equations are given. In the second chapter, the definition of conformable fractional derivative is given and its some basic properties are mentioned. In the third chapter, which is the main chapter, for the solution of conformable nonlinear partial differential equations (G'/G)-expansion method, (G'/G^2)-expansion method, Kudryashov method, (b+Q^2)-Tanh Function method, (b+Q^2)-modified Tanh Function method, Exp-Function method, Simplified tan(F/2) Expansion method (SITEM) and Auxiliary method are given and these methods are applied to some equations which have an important place in physics and engineering.

KEYWORDS: Conformable fractional derivative, Nonlinear conformable fractional partial differantial equations, Travelling wave solutions.

İÇİNDEKİLER

Sayfa

ŞEKİL LİSTESİ

<u>Sayfa</u>

ÖNSÖZ

Bu tez çalışmasının gerçekleştirilmesinde kıymetli bilgi, birikim ve tecrübelerini benimle paylaşan, bana her zaman yol gösterici olan, eğitimim boyunca insani ve ahlaki değerleri ile de örnek edindiğim ve tecrübelerinden yararlanırken hiçbir zaman hoşgörü, sabır ve desteklerini esirgemeyen çok değerli hocam sayın Doç. Dr. Handan ÇERDİK YASLAN'a sonsuz saygı ve teşekkürlerimi sunarım.

Çalışmalarım boyunca maddi manevi destekleriyle beni hiçbir zaman yalnız bırakmayan aileme de teşekkür ederim.

Ayşe GİRGİN

1. GİRİŞ

Kesirli türev Calculus kadar eskiye dayanmaktadır. L'Hospital 1695'de $n=\frac{1}{2}$ için $\frac{d^n f}{dx^n}$ 'in anlamını sorgulamıştır ardından Leibniz $d^{\frac{1}{2}}x$ nin anlamını araştırmıştır. İlk kez S. F. Lacroix 1819 da "Traitédu Calcul Differential et dalcul Integral." kitabında keyfi mertebe türevden bahsetmiştir. Böylece $y=x^a$, $a\in\mathbb{R}^+$ için $\frac{d^{\frac{1}{2}}y}{dx^{\frac{1}{2}}}=\frac{\Gamma(a+1)}{\Gamma\left(a+\frac{1}{2}\right)}x^{a-\frac{1}{2}}$ olduğunu göstermiştir. Kesirli mertebe türev ve integral teorileri Leibniz'in çalışmasının ardından Liouville, Grünwald, Letnikov ve Riemann gibi bilim adamlarının araştırmalarıyla 19.yy sonlarında son halini almıştır. Bu araştırmaların sonuçları sadece matematiğe ait problemlerin çözümününde kullanılmakla kalmamış, mühendislik, fizik, kimya, biyoloji, viskoelastisite, kontrol teorisi, sinyal işleme, sistem tanımlama ve elektrokimya gibi alanlardaki uygulamalarda elde edilen çözümlerin daha anlamlı bir şekilde yorumlanmasını sağlamıştır. Özellikle lineer viskoelastisite, kalıtsal olayları modelleme kabiliyeti kesinlikle kesirli analizin en kapsamlı uygulama alanlarıdır. Literatürde Grünwald–Letnikov Türevi, Sonin–LetnikovTürevi, Liouville Türevi, Caputo Türevi, Hadamard Türevi, Marchaud Türevi, Riesz Türevi, Riesz–Miller Türevi, Miller–Ross Türevi, Weyl Türevi ve Erdélyi–Kober Türevi gibi birçok keyfi mertebeden türev tanımlamaları vardır. Çoğu kesirli mertebe türev için integral formu kullanmıştır. Bunlardan en popüler ikisi:

i. Riemann Liouville Türevi ($\alpha\in[n-1,n)$ için f 'in α -inci türevi)

$$\mathrm{D}_a^{\alpha}(f)(t)=\frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}t^n}\int_a^t\frac{f(x)}{(t-x)^{\alpha-n+1}}\mathrm{d}x \quad . \tag{1.1}$$

ii. Caputo Türevi ($\alpha\in[n-1,n)$ için f 'in α -inci türevi)

$$\mathrm{D}_a^{\alpha}(f)(t)=\frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\int_a^t \frac{f^{(n)}(x)}{(t-x)^{\alpha-n+1}}\,\mathrm{d}x \ . \tag{1.2}$$

Yukarıda verilen (i) ve (ii)'yi içeren tüm tanımlar kesirli türevin lineer olması özelliğini sağlar. Bununla birlikte Riemann Liouville Türevi ve Caputo türevi'nin bazı kusurları vardır:

- Riemann Liouville Türevi $\mathrm{D}_a^{\alpha}(1)=0$ 'ı sağlamaz. ($\alpha \notin \mathbb{N}$)(Caputo Türevi için $\mathrm{D}_a^{\alpha}(1)=0$ dir.)
- Riemann Liouville Türevi ve Caputo türevi iki fonksiyonun çarpımının türevinin bilinen formülünü sağlamaz: $\mathrm{D}_a^{\alpha}(fg)\neq f\mathrm{D}_a^{\alpha}(g)+g\mathrm{D}_a^{\alpha}(f)$.
- Riemann Liouville Türevi ve Caputo türevi iki fonksiyonun bölümünün türevinin bilinen formülünü sağlamaz: $\mathrm{D}_a^{\alpha}(f/g)\neq \dfrac{g\mathrm{D}_a^{\alpha}(f)-f\mathrm{D}_a^{\alpha}(g)}{g^2}$.
- Yukarıdaki kesirli türevler genellikle $\mathrm{D}^{\alpha}\mathrm{D}\beta(f)=\mathrm{D}^{\alpha+\beta}(f)$ 'i sağlamaz.
- Caputo tanımı f fonksiyonunun diferansiyellenebilir olduğunu varsayar.

Yakın zamanda Khalil ve diğ. (2014) kesirli türev için yeni ve basit bir tanım olan uyumlu kesirli türev olarak adlandırılan bir tanım getirmişlerdir. Yeni tanım olağan türevin doğal bir uzantısı gibi gözükmektedir ve $\alpha=1$ olduğunda da klasik türevin tanımıyla çakışmaktadır. Khalil ve diğ. (2014) 'nin kesirli türevlere olan ilgisi, Profesör S. Momani'nin aşağıdaki diferansiyel denklemin nasıl çözüleceğini gösterdiğinde başlamıştır:

$$y^{\left(\frac{1}{2}\right)}+y=x^{\frac{1}{2}}+\frac{2}{\Gamma(2.5)}x^{\frac{3}{2}};\ y(0)=0\,.$$

Burada $y^{\left(\frac{1}{2}\right)}$, y 'nin $\frac{1}{2}$ 'inci mertebeden kesirli türevidir. Bu diferansiyel denklem için bilinen çözümün elde edilmesi kolay değildir, bu nedenle bu yeni kesirli türev tanımı bazı hesaplamaları kolaylaştıracaktır.

Kesirli mertebe türevle ilgili yapılan çalışmalarda genellikle Caputo ve Riemann Liouville kesirli türevi kullanılmıştır. Riemann Liouville türevi kullanılarak yapılan çalışmalar aşağıda verilmiştir: Bekir ve Guner (2014), uzay-zaman kesirli Burgers, KdV-Burgers ve Birleşmiş Burgers Denklemlerinin tam çözümlerini elde etmek için $\left(G'/G\right)$- açılım yöntemini uygulamıştır. Abdel-Salam ve Gumma (2015), uzay-zaman kesirli Değiştirilmiş Korteweg-de Vries, Değiştirilmiş Düzenli Uzun Dalga ve Klein-Gordon Denklemi'nin çözümü için Riccati açılım yöntemini uygulamıştır. Ghany ve diğ. (2015), Stokastik Kesirli Hirota-Satsuma'ya bağlı KdV denklemleri için seyahat eden dalga çözümlerini, Değiştirilmiş Kesirli Alt Denklem Yöntemini kullanılarak elde etmiştir. Zayed ve diğ. (2016), uzay-zaman kesirli genelleştirilmiş lineer olmayan Hirota Satsuma ile birleşmiş Korteweg–de Vries(KDV), Whitham–Broer–Kaup, Burgersi ve Mkdv Denkleminin çözümlerini, Tanh Yöntemini kullanılarak elde etmişlerdir. Guner ve Atik (2016), zaman kesirli lineer olmayan değiştirilmiş Kawahara Denklemi ve Adveksiyon-Difuzyon-Reaksiyon Denklemi'ne $E\mathrm{xp}$ -fonksiyon Yöntemini uygulayarak Soliton çözümlerini incelemiştir. Choi ve diğ. (2016), Yırtıcı-av ilişkileri ve reaksiyon-difüzyon istilası gibi tanımlamaların matematiksel bir modeli olan Lotka-Volterra Sisteminin çözümlerini bulmak için Q -Fonksiyon Yöntemini uygulamıştır. Guner ve Bekir (2016), kesirli mertebeden Biyolojik Popülasyon Modeli ve uzay zaman kesirli değiştirilmiş Eşit Genişlik Denkleminin çözümü için Ansatz Yöntemini kullanmıştır. Yaslan (2017), uzay-zaman kesirli Cahn-Hilliard Denklemi'nin yeni analitik çözümlerini Tanh Yöntemi kullanarak elde etmiştir. Feng (2017), (2+1)-boyutlu uzay-zaman kesirli Nizhnik-Novikov-Veselov Sistemi ve uzay-zaman kesirli KP-BBM denkleminin seyahat eden dalga çözümlerini bulmak için Geliştirilmiş Kesirli $\left(D^{\alpha}G/G\right)$ Yöntemini kullanmıştır. Guner ve Atik (2017), lineer olmayan kesirli DR eşitliğinin ve Riemann-Liouville türeviyle değiştirilmiş kesirli Yaklaşık Uzun Su Dalgası Denkleminin çözümlerini bulmak için $\left(G'/G\right)$ - açılım yöntemini kullanmıştır. Guner ve Bekir (2017), lineer olmayan uzay-zaman kesirli Telgraf ve KPP Denklemi'nin tam çözümlerini bulmak için Üstel fonksiyon yöntemini kullanmıştır. Din ve diğ. (2017), uzay-zaman kesirli Calogero-Degasperis(CD) ve Olası Kadomtsev-Petviashvili(PKP) Denklemlerinin çözümü için kesirli alt denklem yöntemini kullanmışlardır. Choi ve Kim (2017), uzay-zaman kesirli Fokas, Kaup-

Kupershmidt ve (2+1)-Boyutlu Kırılma Soliton Denklemlerinin çözümlerini bulmak için kesirli alt denklem yönemini uygulamışlardır.

Literatürde Caputo kesirli türeviyle ilgili yapılan çalışmalar da oldukça fazladır. Jiang ve Ding (2013), dalga şekli gevşeme yönteminin Caputo kesirli türevli analizini yapmıştır. Allahviranloo ve diğ (2015) de Tau-Collocation yöntemiyle Caputo kesirli diferansiyel denklemlerin sayısal çözümlerini incelemişlerdir. Tamsir ve Srivastava (2016), zaman kesirli Klein Gordon denkleminin tam çözümünü bulmak için kesirli indirgenmiş diferansiyel dönüşüm yöntemini (FRDTM) kullanmışlardır. Ali A. ve diğ. (2018), kesirli mertebeden lineer olmayan iç içe geçmiş Whitham-Broer-Kaup Denklem Sisteminin (WBK) sayısal çözümlerini Adomian Ayrıştırma Yöntemiyle birleştirilmiş Laplace Dönüşümü yardımıyla bulmuştur. Ray ve Gupta (2017), yedinci mertebe KdV denleminin çözümlerini bulmak için Legendre dalgacık yöntemi kullanmışlardır. Zhang ve diğ. (2018), zaman kesirli Boussinesq denkleminin çözümü için spektral yöntem kullanmışlardır. Zhou ve diğ. (2019), lineer olmayan yoğun kesirli diferansiyel denklemlerin (SFDEs) çözümünü bulmuştur. Xu ve diğ. (2019) 'nin Caputo kesirli türevli stohastik diferansiyel denklemler üzerine çalışmaları mevcuttur.

Khalil ve diğ. (2014) 'nin uyumlu kesirli türevi tanımlamasının ardından uyumlu kesirli türevi içeren denklemlerin çözümü üzerine de birçok çalışmalar yapılmıştır. Eslami (2016), kesirli lineer olmayan birleşik Schrodinger Denklemine Kudryashov Yöntemi uygulayarak seyahat eden dalga çözümlerini incelemiştir. Khater ve diğ. (2017), Bogoyavlenskii denklem sistemi, birleştirilmiş Boiti-Leon-Pempinelli denklem sistemi ve zaman-kesirli Cahn-Allen denklemi için eliptik ve solitary dalga çözümlerini Khater methotuyla elde etmişlerdir. Yaslan (2017), uzay-zaman kesirli Kawahara Denklemi'nin yeni analitik çözümlerini Tanh Yöntemini kullanarak elde etmiştir. Çenesiz ve diğ. (2017), uyumlu kesirli KdV-Zakharov-Kuznetsov (mKdV-zk) Denkleminin Maccari Sistemi ile tam hareketli dalga ve Soliton çözümlerini elde etmek için fonksiyonel Değişken Metodunu (FVM) kullanmıştır. Hosseini ve diğ. (2017), zaman kesirli Cahn-Allen ve Cahn-Hilliard Denklemleri'nin çözümlerini bulmak için değiştirilmiş Kudryashov Yöntemini kullanmışlardır. Chen ve Jiang (2018), bazı uyumlu zaman kesirli kısmi diferansiyel denklemlerin çözümünü bulmak için Basit denklem yöntemini kullanmışlardır. Korkmaz ve Hepson (2017), Kudryashov metodu yardımıyla uyumlu zaman kesirli Jimbo-Miwa ve Zakharov-Kuznetsov denklemlerinin seyahat eden dalga çözümlerini incelemişlerdir. Hosseini ve diğ. (2017), Üstel fonksiyon metodunu kullanarak uyumlu kesirli Benjamin–Bona–Mahony ve Cahn Hillard denklemlerini çözmüşlerdir. Bayram ve diğ. (2017) , uyumlu kesirli integral denklemlere sinckolakasyon metodunu uygulamışlardır. Akbulut ve Kaplan (2018), uyumlu zaman kesirli Zoomeron denkleminin ve üçüncü mertebe KdV denkleminin çözümü için Yardımcı metodunu kullanmışlardır. Yaslan (2018), uzay-zaman kesirli Broer-Kaup ve yaklaşık uzun su dalgası denklemlerinin yeni analitik çözümleri için $E\operatorname{xp}\left(-\phi(\xi)\right)$ açılım yöntemini kullanmıştır. Rezazadeh ve diğ. (2018), genişletilmiş cebirsel yöntemi kullanarak Schrödinger-Hirota denkleminin optik soliton çözümlerini elde etmiştir. Korpinar ve diğ. (2019), Boussinesq-like denkleminin çözümleri için genişletilmiş direkt cebirsel yöntemi ni kullanmışlardır. Kurt (2019), Jacobi eliptik fonksiyon açılımı yöntemiyle değiştirilmiş Camasa-Holm denkleminin seyahat eden dalga çözümlerini elde etmiştir. Osman ve diğ. (2018), uyumlu zaman kesirli Schrödinger denklemlerinin optikal solitary periyodik eliptik çözümlerini elde etmiştir. Islam (2018), uyumlu kesirli Foam-Drainage denklemi ve simetrik düzenli uzun dalga denkleminin seyahat eden dalga çözümlerini bulmak için $\left(G'/G\right)$ - açılım yöntemini kullanmıştır. Abdulkarem ve diğ. (2018), $\left(G'/G\right)$ - açılım yöntemi ile Sawada-Kotera-Ito denkleminin kapalı form çözümlerini elde etmişlerdir. Kumar ve Kaplan (2018a), uyumlu zaman kesirli Zoomeron denkleminin yeni analitik çözümleri için $E\operatorname{xp}\left(-\phi(\xi)\right)$ açılım yöntemini kullanmıştır. Inc ve diğ. (2018), Schrödinger denkleminin karanlık tekil optik çözümleri için genelleştirilmiş tanjant fonksiyonu yöntemini kullanmıştır. Kumar ve diğ. (2018b), değiştirilmiş Kudryashov yöntemini kullanarak kesirli genelleştirilmiş reaksiyon kaldırma denklemlerinin, kesirli biyolojik popülasyon modelinin ve kesirli difüzyon-reaksiyon denkleminin tam çözümlerini elde etmiştir. Korkmaz ve diğ. (2018), Sine-Gordon açılım yöntemiyle uyumlu zaman kesirli RLW denklemlerinin tam çözümlerini elde etmiştir. Shallal ve diğ. (2018), uyumlu kesirli Klein-Gordon ve Boussinesq denklemlerinin analitik çözümleri için değiştirilmiş tanjant yöntemini uygulamışlardır. Foroutan ve diğ. (2018), uyumlu kesirli Biswas–Milovic denkleminin soliton ve diğer çözümlerini bulmak için değiştirilmiş Sine-Gordon açılım yöntemini kullanmışlardır. Thabet ve

Kendre (2018), lineer Navier – Stokes denklemi ve lineer olmayan gaz dinamik denklemlerinin analitik çözümlerini bulmak için uyumlu kesirli kısmi diferansiyel dönüşüm yöntemini kullanmışlardır.

Bu tez çalışmasındaki amaç fizik ve matematikte önemli bir yeri olan bazı lineer olmayan uyumlu uzay-zaman kesirli kısmi diferansiyel denklemler için seyahat eden dalga çözümleri bulmaktır. Bunun için literatürdeki bazı yöntemler kullanılmıştır. Uzay ve zamana bağlı lineer olmayan kısmi diferansiyel denklemlere belirli dönüşümler yapılarak bu denklemler adi diferansiyel denklemlere dönüştürülmektedir. Bulunan denklemin belirli formda çözümü aranmak suretiyle cebirsel denklem sistemleri elde edilir. Cebirsel denklem sistemlerinin çözümü sonucunda lineer olmayan uyumlu uzay-zaman kesirli kısmi diferansiyel denklemlerinin seyahat eden dalga çözümleri elde edilir.

2. UYUMLU KESİRLİ TÜREV

2.1 Uyumlu Kesirli Türev Tanımı ve Özellikleri

Tanım 2.1.1. $f:[0,\infty)\to\mathbb{R}$ olsun. f nin α mertebeden uyumlu kesirli türevi

$$\mathrm{T}_\alpha(f)(t)=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{f(t+\varepsilon t^{1-\alpha})-f(t)}{\varepsilon},\ \forall t>0,\ \alpha\in(0,1) \tag{2.1}$$

ile tanımlıdır. Bu limit mevcutsa f fonksiyonuna α mertebeden diferansiyellenebilirdir denir (Khalil ve diğ. 2014).

Teorem 2.1.1. $f:[0,\infty)\to\mathbb{R}$, $t_0>0, \alpha\in(0,1]$ de α diferansiyellenebilir ise f, t_0 noktasında süreklidir (Khalil ve diğ. 2014).

İspat:

$$f(t_0+\varepsilon t_0^{1-\alpha})-f(t_0)=\frac{f(t_0+\varepsilon t_0^{1-\alpha})-f(t_0)}{\varepsilon}\varepsilon$$

olduğundan,

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\left[f(t_0+\varepsilon t_0^{1-\alpha})-f(t_0)\right]=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{f(t_0+\varepsilon t_0^{1-\alpha})-f(t_0)}{\varepsilon}.\lim_{\varepsilon\to 0}\varepsilon$$

bulunur.

$h=\varepsilon t_0^{1-\alpha}$ alınırsa $\lim_{h\to 0} f(t_0+h)-f(t_0)=f^{(\alpha)}(t_0).0$

Yani, $\lim_{h\to 0} f(t_0+h)=f(t_0)$

Bu nedenle f, t_0 noktasında süreklidir.

Teorem 2.1.2. $\alpha\in(0,1]$ ve f,g; $t>0$ noktasında α-diferansiyellenebilir olsun.

Bu taktirde,(Khalil ve diğ. 2014)

1. $T_\alpha(af+bg)=aT_\alpha(f)+bT_\alpha(g)$, $(\forall a,b\in\mathbb{R})$
2. $T_\alpha(t^p)=pt^{p-\alpha}$, $(\forall p\in\mathbb{R})$
3. $T_\alpha(\lambda)=0$, (her sabit $f(t)=\lambda$ fonksiyonu için) (2.2)

4. $T_\alpha(f.g) = g.T_\alpha(f) + f.T_\alpha(g),$

5. $T_\alpha(\frac{f}{g}) = \frac{g.T_\alpha(f) - f.T_\alpha(g)}{g^2},$

6. f diferansiyellenebilir ise $T_\alpha(f)(t) = t^{1-\alpha}.\frac{df(t)}{dt}.$

İspat:

1. $$T_\alpha(af+bg) = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{(af+bg)(t+\varepsilon t^{1-\alpha}) - (af+bg)(t)}{\varepsilon}$$

$$= \frac{\left[(af)(t+\varepsilon t^{1-\alpha}) - (af)(t)\right] + \left[(bg)(t+\varepsilon t^{1-\alpha}) - (bg)(t)\right]}{\varepsilon}$$

$$= a\frac{\left[(f)(t+\varepsilon t^{1-\alpha}) - (f)(t)\right]}{\varepsilon} + b\frac{\left[(g)(t+\varepsilon t^{1-\alpha}) - (g)(t)\right]}{\varepsilon}$$

$$= aT_\alpha(f) + bT_\alpha(g)$$

2. $T_\alpha(t^p) =$

$$\mathrm{T}_\alpha(t^p) = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{(t+\varepsilon t^{1-\alpha})^p - t^p}{\varepsilon} = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{p(t+\varepsilon t^{1-\alpha})^{(p-1)}.t^{(1-\alpha)}}{1} = p.t^{p-1}.t^{1-\alpha} = p.t^{p-\alpha}$$

3. $$T_\alpha(\lambda) = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\lambda-\lambda}{\varepsilon} = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{0}{1} = 0$$

4. $$T_\alpha(fg)(t) = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{f(t+\varepsilon t^{1-\alpha})g(t+\varepsilon t^{1-\alpha}) - f(t)g(t)}{\varepsilon}$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{f(t+\varepsilon t^{1-\alpha})g(t+\varepsilon t^{1-\alpha}) - f(t)g(t+\varepsilon t^{1-\alpha}) + f(t)g(t+\varepsilon t^{1-\alpha}) - f(t)g(t)}{\varepsilon}$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0}\left(\frac{f(t+\varepsilon t^{1-\alpha}) - f(t)}{\varepsilon}.g(t+\varepsilon t^{1-\alpha})\right) + f(t)\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\frac{g(t+\varepsilon t^{1-\alpha}) - g(t)}{\varepsilon}\right)$$

$$= T_\alpha(f)(t)\lim_{\varepsilon\to 0} g(t+\varepsilon t^{1-\alpha}) + f(t)T_\alpha(g)(t)$$

$$= T_\alpha(f)(t)g(t) + f(t)T_\alpha(g)(t).$$

5. $$T_\alpha(f/g) = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\dfrac{f(t+\varepsilon t^{1-\alpha})}{g(t+\varepsilon t^{1-\alpha})} - \dfrac{f(t)}{g(t)}}{\varepsilon}$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{g(t)f(t+\varepsilon t^{1-\alpha}) - f(t)g(t+\varepsilon t^{1-\alpha})}{g(t)g(t+\varepsilon t^{1-\alpha})\varepsilon}.$$

g fonksiyonu t de sürekli olduğundan $\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{g(t+\varepsilon t^{1-\alpha})} = \frac{1}{g(t)}$ dir. Böylece limitin özelliklerinden

$$= \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{g(t)f(t+\varepsilon t^{1-\alpha}) - g(t)f(t) + g(t)f(t) - f(t)g(t+\varepsilon t^{1-\alpha})}{g(t)g(t+\varepsilon t^{1-\alpha})\varepsilon}$$

$$= \frac{g(t)}{g(t)} \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{g(t+\varepsilon t^{1-\alpha})} \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{f(t+\varepsilon t^{1-\alpha}) - f(t)}{\varepsilon}$$
$$- \frac{f(t)}{g(t)} \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{g(t+\varepsilon t^{1-\alpha})} \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{g(t+\varepsilon t^{1-\alpha}) - g(t)}{\varepsilon}$$

$$= \frac{g(t)T_\alpha(f)(t) - f(t)T_\alpha(g)(t)}{g^2}.$$

6. $h = \varepsilon t^{1-\alpha}$ alalım. O halde $\varepsilon = t^{\alpha-1}h$ olur. Böylece

$$T_\alpha(f)(t) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{f(t+\varepsilon t^{1-\alpha}) - f(t)}{\varepsilon}$$
$$= \lim_{h \to 0} \frac{f(t+h) - f(t)}{ht^{\alpha-1}}$$
$$= t^{1-\alpha} \lim_{h \to 0} \frac{f(t+h) - f(t)}{h}$$
$$= t^{1-\alpha} \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{dt}}(t).$$

Belirli fonksiyonların uyumlu kesirli türevleri $(0 < \alpha \le 1)$ aşağıda verilmiştir. (Khalil ve diğ. 2014)

- $T_\alpha(t^p) = pt^{p-\alpha}, \qquad (\forall p \in \mathbb{R})$
- $T_\alpha(1) = 0,$
- $T_\alpha(e^{cx}) = cx^{1-\alpha}e^{cx}, \qquad (c \in \mathbb{R})$ (2.3)
- $T_\alpha(\sin bx) = bx^{1-\alpha} \cos bx, \qquad (b \in \mathbb{R})$
- $T_\alpha(\cos bx) = -bx^{1-\alpha} \sin bx, \qquad (b \in \mathbb{R})$
- $T_\alpha(\frac{t^\alpha}{\alpha}) = 1.$

Tanım 2.1.2. $\alpha \in (n, n+1]$ ve f , $t > 0$ da n - diferansiyellenebilir olsun. Bu taktirde f nin α mertebeli uyumlu kesirli türevi aşağıdaki gibi tanımlanır. (Khalil ve diğ. 2014).

$$T_\alpha(f)(t) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{f^{(\lceil \alpha \rceil - 1)}(t + \varepsilon t^{(\lceil \alpha \rceil - \alpha)}) - f^{(\lceil \alpha \rceil - 1)}(t)}{\varepsilon}. \tag{2.4}$$

Burada $\lceil \alpha \rceil$, α ya eşit veya büyük en küçük tam sayıdır.

Teorem 2.1.3. $a > 0$ ve $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ fonksiyonu verilsin. Aşağıdakiler sağlansın;

i. f ,$\left[a,b\right]$ de süreklidir.

ii. $\alpha \in \left(0,1\right)$ için f , α diferansiyellenebilir.

iii. $f(a) = f(b)$.

Bu takdirde $c \in \left(a,b\right)$ vardır öyle ki $f^{(\alpha)}(c) = 0$ (Khalil ve diğ. 2014).

İspat: f , $\left[a,b\right]$ de sürekli olduğundan ve $f(a) = f(b)$ olduğundan, $c \in \left(a,b\right)$ vardır öyle ki bu nokta lokal ekstremum noktasıdır. Varsayalım ki c lokal minimum noktası olsun. Bu taktirde;

$$f^{(\alpha)}(c) = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \frac{f(c+\varepsilon c^{1-\alpha}) - f(c)}{\varepsilon} = \lim_{\varepsilon \to 0^-} \frac{f(c+\varepsilon c^{1-\alpha}) - f(c)}{\varepsilon} \quad .$$

Burada ilk limit negatif değildir, ikinci limit de pozitif değildir. Bu nedenle $f^{(\alpha)}(c) = 0$ dır.

Teorem 2.1.4. $a > 0$ ve $f : \left[a,b\right] \to \mathbb{R}$ fonksiyonu için aşağıdakiler sağlansın

i. f ,$\left[a,b\right]$ de süreklidir.

ii. $\alpha \in \left(0,1\right)$ için f , α diferansiyellenebilir.

Bu takdirde $c \in \left(a,b\right)$ vardır öyle ki $f^{(\alpha)}(c) = \dfrac{f(b) - f(a)}{\frac{1}{\alpha} b^{\alpha} - \frac{1}{\alpha} a^{\alpha}}$ dır (Khalil ve diğ. 2014).

İspat: Aşağıdaki $g(x)$ fonksiyonunu düşünelim.

$$g(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{\frac{1}{\alpha} b^{\alpha} - \frac{1}{\alpha} a^{\alpha}} \left(\frac{1}{\alpha} x^{\alpha} - \frac{1}{\alpha} a^{\alpha} \right).$$

g fonksiyonu Rolle Teoremi'nin koşullarını yerine getirir.($g(a) = g(b) = 0$). Bu nedenle $c \in \left(a,b\right)$ vardır öyle ki $g^{(\alpha)}(c) = 0$ dır. $T_{\alpha}(\frac{1}{\alpha} t^{\alpha}) = 1$ kullanılarak istenen elde edilir.

Tanım 2.1.3. $f : \left[a,\infty\right) \to \mathbb{R}$ ve $0 < \alpha \leq 1$ olsun. f nin α mertebeden sol uyumlu kesirli türevi (Abdeljawad 2015)

$$\mathrm{T}_{\alpha}^{a}(f)(t) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{f(t+\varepsilon(t-a)^{1-\alpha}) - f(t)}{\varepsilon} \tag{2.5}$$

ile tanımlıdır.

Benzer şekilde $f:(-\infty,b]\to\mathbb{R}$ ve $0<\alpha\leq 1$ olsun. f nin α mertebeden sağ uyumlu kesirli türevi

$$^{b}\mathrm{T}_{\alpha}(f)(t)=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{f(t+\varepsilon(b-t)^{1-\alpha})-f(t)}{\varepsilon} \tag{2.6}$$

ile tanımlıdır.

Tanım 2.1.4. $n-1<\alpha<n$, $f:[a,\infty)\to\mathbb{R}$ ve $f^{(n)}(t)$ var ve sürekli olsun. Bu takdirde, f nin α mertebeden a dan başlayan sol uyumlu kesirli türevi (Abdeljawad 2015)

$$\left(\boldsymbol{T}_{\alpha}^{a}f\right)(t)=(T_{\alpha+1-n}^{a}f^{(n-1)})(t)=(t-a)^{n-\alpha}f^{(n)}(t) \tag{2.7}$$

ile tanımlıdır.

Benzer şekilde sağ durum için de $n-1<\alpha<n$, $f:(-\infty,b]\to\mathbb{R}$ ve $f^{(n)}(t)$ var ve sürekli olsun. Bu takdirde f nin α mertebeden sağ uyumlu kesirli türevi

$$\left({}^{b}\boldsymbol{T}_{\alpha}f\right)(t)=({}^{b}T_{\alpha+1-n}f^{(n-1)})(t)=(b-t)^{n-\alpha}f^{(n)}(t) \tag{2.8}$$

ile tanımlıdır.

Teorem 2.1.5. Varsayalım ki $f,g:(a,\infty)\to\mathbb{R}$ fonksiyonları sol α diferansiyellenebilir $(0<\alpha\leq 1)$ ve $h(t)=f(g(t))$ alalım. Bu takdirde $h(t)$ sol α diferansiyellenebilirdir ve $\forall t$ için

$$t\neq a \text{ ve } g(t)\neq 0 \text{ ise } (T_{\alpha}^{a}h)(t)=(T_{\alpha}^{a}f)(g(t)).(T_{\alpha}^{a}g)(t).g(t)^{\alpha-1}, \tag{2.9}$$

$t=a$ ise $(T_{\alpha}^{a}h)(a)=\lim_{t\to a^{+}}(T_{\alpha}^{a}f)(g(t)).(T_{\alpha}^{a}g)(t).g(t)^{\alpha-1}$ dir (Abdeljawad 2015).

İspat: $u=t+\varepsilon(t-a)^{1-\alpha}$ alalım. g nin sürekliliğini kullanarak,

$$\begin{aligned}(T_{\alpha}^{a}h)(t)&=\lim_{u\to t}\frac{f\left(g(u)\right)-f(g(t))}{\left(u-t\right)}t^{1-\alpha}\\&=\lim_{u\to t}\frac{f\left(g(u)\right)-f(g(t))}{\left(g(u)-g(t)\right)}.\lim_{u\to t}\frac{\left(g(u)-g(t)\right)}{(u-t)}t^{1-\alpha}\\&=\lim_{g(u)\to g(t)}\frac{f\left(g(u)\right)-f(g(t))}{\left(g(u)-g(t)\right)}.g(t)^{1-\alpha}.T_{\alpha}^{a}g(t).g(t)^{\alpha-1}\\&=\left(T_{\alpha}^{a}f\right)(g(t)).T_{\alpha}^{a}g(t).g(t)^{\alpha-1}.\end{aligned}$$

Tanım 2.1.5 $0<\alpha<1$ ve $n\in\{1,2,3,...\}$ olsun. Bu takdirde α mertebeden n-kez sol ardışık uyumlu kesirli türevi

$$^{(n)}T_{\alpha}^{a} f(t)=\underbrace{T_{\alpha}^{a}T_{\alpha}^{a}T_{\alpha}^{a}.....T_{\alpha}^{a}}_{\text{n-defa}} f(t) \tag{2.10}$$

dir (Abdeljawad 2015).

Benzer şekilde α mertebeden n-kez sağ ardışık uyumlu kesirli türev

$$^{b}T_{\alpha}^{(n)} f(t)=\underbrace{{}^{b}T_{\alpha}\,{}^{b}T_{\alpha}\,{}^{b}T_{\alpha}.....{}^{b}T_{\alpha}}_{\text{n-defa}} f(t) \tag{2.11}$$

ile tanımlıdır (Abdeljawad 2015).

Lemma 2.1.1. $f:[a,\infty)\to\infty$ fonksiyonu (a,∞) da iki kez diferansiyellenebilir, $0<\alpha,\beta\leq 1,\ 1<\alpha+\beta\leq 2$ olsun. Bu takdirde

$$\left(T_{\alpha}^{a}T_{\beta}^{a} f\right)(t)=\boldsymbol{T}_{\alpha+\beta}^{a} f(t)+(1-\beta)(t-\alpha)^{-\beta}T_{\alpha}^{a} f(t)$$

dir (Abdeljawad 2015).

İspat:

$$\left(T_{\alpha}^{a}T_{\beta}^{b} f\right)(t)=\left(t-a\right)^{1-\alpha}\frac{d}{dt}\left[(t-a)^{1-\beta} f(t)'\right]$$

$$=\left(t-a\right)^{1-\alpha}\left[(t-a)^{1-\beta} f''(t)+(1-\beta)(t-a)^{-\beta} f'(t)\right]$$

$$=\boldsymbol{T}_{\alpha+\beta}^{a} f(t)+(1-\beta)(t-\alpha)^{-\beta}T_{\alpha}^{a} f(t).$$

$\alpha,\beta\to 1$ ise $T_{\alpha}^{a}T_{\beta}^{a} f(t)=T_{2} f(t)=f''(t).$

3. LİNEER OLMAYAN UYUMLU KESİRLİ KISMİ DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN ÇÖZÜM YÖNTEMLERİ

Bu bölümde, aşağıdaki formda verilen lineer olmayan uyumlu kesirli kısmi diferansiyel denklemi

$$P(u, T_t^{\alpha}u, T_x^{\beta}u, T_t^{\alpha}T_t^{\alpha}u, T_t^{\alpha}T_x^{\beta}u, T_x^{\beta}T_x^{\beta}u, ...) = 0,\ 0 < \alpha, \beta < 1, \tag{3.1.1}$$

için çözüm yöntemleri verilecektir. Burada P , u 'nun polinomudur, $u(x,y)$ bilinmeyen fonksiyondur ve T_x^{α} , T_t^{α} türevleri $u(x,y)$ fonksiyonunun α mertebeli x 'e ve t 'ye göre uyumlu kesirli türevleridir. (3.1.1) denkleminin seyahat eden dalga çözümlerini elde etmek için $\frac{G'}{G}$ -açılım metodu, $\frac{G'}{G^2}$ - açılım metodu, Kudryashov metodu, $(b+Q^2)$ -tanjant fonksiyonu metodu, $(b+Q^2)$ değiştirilmiş tanjant fonksiyonu metodu, üstel-fonksiyon metodu, basitleştirilmiş $\tan\left(\frac{F}{2}\right)$ -açılım metodu, Auxiliary metodu ve bu metodların fen ve mühendislik alanlarında önemli bir yeri olan bazı lineer olmayan uyumlu kesirli kısmi diferansiyel denklemlere uygulamaları verilmiştir.

3.1 $\frac{G'}{G}$ -Açılım Metodu

3.1.1 Yöntem

(3.1.1) ile verilen lineer olmayan uyumlu kesirli kısmi diferansiyel denklemini ele alalım.

k ve m sıfırdan farklı sabitler olmak üzere

$$u(x,t)=U(\xi),\quad \xi=k\frac{t^{\alpha}}{\alpha}+m\frac{x^{\beta}}{\beta} \tag{3.1.2}$$

(3.1.2) dönüşümü (3.1.1) denklemine uygulanırsa ve Teorem 2.1.5 ' de verilen zincir kuralı kullanılırsa

$$\phi(U,U',U'',U''',...)=0 \tag{3.1.3}$$

şeklinde adi diferansiyel denklem elde edilir. Burada $U^{(n)}$, U nun n-inci mertebeden ξ e bağlı türevidir.

Varsayalım ki (3.1.3) denkleminin çözümü

$$U(\xi)=\sum_{k=0}^{N}a_k\left(\frac{G'}{G}\right)^k \tag{3.1.4}$$

formunda $\frac{G'}{G}$ 'nin polinom açılımı şeklinde olsun.

(3.1.4) denkleminde verilen $G=G(\xi)$ fonksiyonu aşağıdaki ikinci mertebe lineer diferansiyel denklemi sağladığını kabul edelim.

$$G''+\lambda G'+\mu G=0. \tag{3.1.5}$$

Burada $G'=\frac{dG(\xi)}{d\xi}$, $G''=\frac{d^2G(\xi)}{d\xi^2}$ ve $a_0,...,a_N$, λ ve μ ler sabitlerdir.

(3.1.5) lineer diferansiyel denklemi aşağıdaki çözümlere sahiptir (Guner ve diğ. 2017):

$$\lambda^2-4\mu>0 \text{ ise } \frac{G'}{G}=-\frac{\lambda}{2}+\frac{\sqrt{\lambda^2-4\mu}}{2}\left(\frac{C_1 sinh(\frac{\sqrt{\lambda^2-4\mu}\xi}{2})+C_2 cosh(\frac{\sqrt{\lambda^2-4\mu}\xi}{2})}{C_1 cosh(\frac{\sqrt{\lambda^2-4\mu}\xi}{2})+C_2 sinh(\frac{\sqrt{\lambda^2-4\mu}\xi}{2})}\right),$$

$$\lambda^2-4\mu<0 \text{ ise } \frac{G'}{G}=-\frac{\lambda}{2}+\frac{\sqrt{4\mu-\lambda^2}}{2}\left(\frac{-C_1 sinh(\frac{\sqrt{4\mu-\lambda^2}\xi}{2})+C_2 cosh(\frac{\sqrt{4\mu-\lambda^2}\xi}{2})}{C_1 cosh(\frac{\sqrt{4\mu-\lambda^2}\xi}{2})+C_2 sinh(\frac{\sqrt{4\mu-\lambda^2}\xi}{2})}\right),$$

$$\lambda^2-4\mu=0 \text{ ise } \frac{G'}{G}=-\frac{\lambda}{2}+\frac{C_2}{C_1+C_2\xi}. \qquad (C_1 \text{ ve } C_2 \text{ keyfi sabitlerdir}) \qquad (3.1.6)$$

(3.1.4) açılımı (3.1.3) de yerine yazılıp (3.1.3) denklemindeki en yüksek mertebeli lineer terim ve en yüksek dereceli lineer olmayan terim arasında dengeleme işlemi yapılmak suretiyle N değeri hesaplanır. Bulunan N değeri için (3.1.4) denklemi (3.1.3) denkleminde yerine yazılarak elde edilen denklemde $\left(\frac{G'}{G}\right)$ ile aynı dereceye sahip terimlerin katsayılarının sıfıra eşitlenmesiyle $a_0,...,a_N$, λ ve μ bilinmeyenli cebirsel denklem sistemi elde edilir. Elde edilen cebirsel denklem sistemin çözülmesiyle bilinmeyen sabitler bulunur. Daha sonra bulunan sabitler (3.1.4) denkleminde yerine konulursa ve (3.1.2) dönüşümü uygulanırsa (3.1.1) uyumlu kesirli diferansiyel denkleminin seyahat eden dalga çözümleri elde edilir.

3.1.2 Uygulamalar

3.1.2.1 Yoğunluğa Bağlı Kuadratik Lineer Olmayan Uyumlu Kesirli Diferansiyel Denklem

Aşağıdaki yoğunluğa bağlı kuadratik lineer olmayan uyumlu kesirli diferansiyel denklemi ele alalım (Guner ve diğ. 2017):

$$T_t^{\alpha}u+luT_x^{\beta}u-DT_x^{\beta}T_x^{\beta}u-au+bu^2=0. \qquad (3.1.7)$$

Burada $t>0$, $0<\alpha,\beta\leq 1$ ve l , a , b ve D sabitlerdir. Genellikle biyolojik popülasyon modellemelerinde kullanılır.

(3.1.2) değişken dönüşümü (3.1.7) denklemine uygulanırsa

$$kU'+mlUU'-Dm^2U''-aU+bU^2=0 \tag{3.1.8}$$

elde ederiz. (3.1.8) deki en yüksek mertebeli lineer terim "U''" ile en yüksek dereceli lineer olmayan terim "UU'" nün kullanılmasıyla yapılan dengeleme işleminden

$$N+2=N+N+1,$$
$$N=1,$$

bulunur. Farz edelim ki (3.1.8) in çözümü aşağıdaki şekilde olsun:

$$U(\xi)=a_0+a_1\left(\frac{G'}{G}\right),\ a_0,a_1\neq 0 \tag{3.1.9}$$

(3.1.5) ve (3.1.10) denklemlerinin kullanılmasıyla

$$U'(\xi)=-a_1\left(\frac{G'}{G}\right)^2-a_1\lambda\left(\frac{G'}{G}\right)-a_1\mu, \tag{3.1.10}$$

$$U''(\xi)=2a_1\left(\frac{G'}{G}\right)^3+3a_1\lambda\left(\frac{G'}{G}\right)^2+(2a_1\mu+a_1\lambda^2)\left(\frac{G'}{G}\right)+a_1\lambda\mu\ , \tag{3.1.11}$$

$$U^2(\xi)=a_1^2\left(\frac{G'}{G}\right)^2+2a_0a_1\left(\frac{G'}{G}\right)+a_0^2 \tag{3.1.12}$$

elde edilir. (3.1.9)-(3.1.12) denklemleri (3.1.8) de yerine yazılmasıyla ve $\left(\frac{G'}{G}\right)^k$ $(k=0,1)$ nin aynı dereceye sahip terimlerinin katsayılarının sıfıra eşitlenmesiyle aşağıda verilen cebirsel denklem sistemi bulunur:

$$-la_1^2m-2Da_1m^2=0,$$

$$-l\lambda a_1^2m+ba_1^2-3D\lambda a_1m^2-a_0la_1m-ka_1=0,$$

$$2a_0a_1b-aa_1-a_1k\lambda-2Da_1m^2\mu-a_1^2lm\mu-Da_1\lambda^2m^2-a_0a_1l\lambda m=0,$$

$$ba_0^2 - a_1 l \mu a_0 m - a a_0 - D a_1 \lambda \mu m^2 - a_1 k \mu = 0.$$

Elde edilen denklem sisteminin çözümü

$$a_0 = \frac{a}{2b} \pm \frac{a\lambda}{2b\sqrt{\left(\lambda^2 - 4\mu\right)}},\ a_1 = \frac{a}{b\sqrt{\left(\lambda^2 - 4\mu\right)}},$$

$$m = \pm \frac{al}{2Db\sqrt{\left(\lambda^2 - 4\mu\right)}},\ k = \mp \frac{l^2 a^2 + 4ab^2 D}{4Db^2\sqrt{\left(\lambda^2 - 4\mu\right)}}. \tag{3.1.13}$$

şeklindedir. (3.1.13) 'de bulunan sabitler (3.1.9) da yerine yazılırsa

$$U(\xi) = \frac{a}{2b} \pm \frac{a\lambda}{2b\sqrt{\left(\lambda^2 - 4\mu\right)}} + \frac{a}{b\sqrt{\left(\lambda^2 - 4\mu\right)}}\left(\frac{G'}{G}\right). \tag{3.1.14}$$

bulunur. (3.1.6) denkleminin (3.1.14) de yerine yazılıp (3.1.2) dönüşümünün kullanılmasıyla (3.1.7) denkleminin aşağıdaki şekilde verilen seyahat eden dalga çözümleri elde edilir.

$$\lambda^2 - 4\mu > 0 \text{ ise } U_{1,1}(\xi) = \frac{a}{2b} \pm \frac{a}{2b}\left(\frac{C_1 sinh(\frac{\sqrt{\lambda^2 - 4\mu}\xi}{2}) + C_2 cosh(\frac{\sqrt{\lambda^2 - 4\mu}\xi}{2})}{C_1 cosh(\frac{\sqrt{\lambda^2 - 4\mu}\xi}{2}) + C_2 sinh(\frac{\sqrt{\lambda^2 - 4\mu}\xi}{2})}\right),$$

$$\xi = \pm \frac{a}{2Db\sqrt{\left(\lambda^2 - 4\mu\right)}}\left(\frac{l^2 a^2 + 4b^2 D}{2b}\frac{t^\alpha}{\alpha} + l\frac{x^\beta}{\beta}\right) \text{ dir,}$$

$$\lambda^2 - 4\mu < 0 \text{ ise } U_{1,2}(\xi) = \frac{a}{2b} \pm \frac{a}{2b} i\left(\frac{-C_1 sinh(\frac{\sqrt{4\mu - \lambda^2}\xi}{2}) + C_2 cosh(\frac{\sqrt{4\mu - \lambda^2}\xi}{2})}{C_1 cosh(\frac{\sqrt{4\mu - \lambda^2}\xi}{2}) + C_2 sinh(\frac{\sqrt{4\mu - \lambda^2}\xi}{2})}\right),$$

$$\xi = \pm \frac{a}{2Db\sqrt{\left(\lambda^2 - 4\mu\right)}}\left(\frac{l^2 a^2 + 4b^2 D}{2b}\frac{t^\alpha}{\alpha} + l\frac{x^\beta}{\beta}\right) \text{ ve } i^2 = -1 \text{ dir.}$$

3.1.2.2 Uyumlu Kesirli Türevli Jimbo-Miwa Denklemi

Aşağıdaki uyumlu kesirli türevli Jimbo-Miwa diferansiyel denklemini ele alalım (Jimbo ve Miwa, 1983):

$$T_x^{\beta}T_x^{\beta}T_x^{\beta}T_y^{\gamma}u+3T_x^{\beta}T_y^{\gamma}uT_x^{\beta}u+3T_y^{\gamma}uT_x^{\beta}T_x^{\beta}u+2T_y^{\gamma}T_t^{\alpha}u-3T_x^{\beta}T_z^{\theta}=0, \qquad (3.1.15)$$

burada $t>0$, $0<\alpha\leq 1,\ 0<\beta\leq 1,\ 0<\gamma\leq 1,\ 0<\theta\leq 1$ dir. Bu denklem fizikteki bazı ilginç (3 + 1) boyutlu dalgaları tanımlamak için kullanılır.

k,m,n,p sabitler olmak üzere

$$u(x,y,z,t)=U(\xi),\quad \xi=k\frac{t^{\alpha}}{\alpha}+m\frac{x^{\beta}}{\beta}+n\frac{y^{\gamma}}{\gamma}+p\frac{z^{\theta}}{\theta}. \qquad (3.1.16)$$

(3.1.17) değişken dönüşümü (3.1.16) denklemine uygulanırsa

$$m^3nU^{(4)}+6m^2nU'U''+(2kn-3mp)U''=0 \qquad (3.1.17)$$

elde edilir.

(3.1.18) denklemi integrasyon sabiti sıfır alınarak integrallenirse

$$m^3nU'''+3m^2n(U')^2+(2kn-3mp)U'=0 \qquad (3.1.18)$$

bulunur. (3.1.18)'deki U''' ve $\left(U'\right)^2$ terimlerinin kullanılmasıyla yapılan dengeleme işleminden

$$N+3=2N+2,$$
$$N=1,$$

bulunur. Farz edelim ki (3.1.18) in çözümü aşağıdaki şekilde olsun:

$$U(\xi)=a_0+a_1\left(\frac{G'}{G}\right),\ a_0,a_1\neq 0 \qquad (3.1.19)$$

(3.1.5) ve (3.1.19) denklemlerinin kullanılmasıyla

$$U'(\xi)=-a_1\left(\frac{G'}{G}\right)^2-a_1\lambda\left(\frac{G'}{G}\right)-a_1\mu\,, \tag{3.1.20}$$

$$U'''(\xi)=-2a_1\left(\left(\frac{G'}{G}\right)^2+\lambda\left(\frac{G'}{G}\right)+\mu\right)+a_1\left(\lambda+2\left(\frac{G'}{G}\right)\right)^2.\left(\left(\frac{G'}{G}\right)^2+\lambda\left(\frac{G'}{G}\right)+\mu\right)$$

$$, \tag{3.1.21}$$

$$\left(U'\right)^2(\xi)=a_1^2\left(\left(\frac{G'}{G}\right)^2+\lambda\left(\frac{G'}{G}\right)+\mu\right)^2, \tag{3.1.22}$$

elde edilir. (3.1.19)-(3.1.22) denklemleri (3.1.18) da yerine yazılmasıyla ve $\left(\frac{G'}{G}\right)^k$ $\left(k=0,1\right)$ nin aynı dereceye sahip terimlerinin katsayılarının sıfıra eşitlenmesiyle aşağıda verilen cebirsel denklem sistemi bulunur:

$$3na_1^2m^2-6na_1m^3=0,$$

$$6\lambda na_1^2m^2-12\lambda na_1m^3=0,$$

$$3a_1mp-2a_1kn-m^3n(a_1\lambda^2+2a_1\mu)+3a_1^2m^2n(\lambda^2+2\mu)-6a_1m^3\mu n-6a_1\lambda^2m^3n=0,$$

$$3a_1\lambda mp-2a_1k\lambda n-\lambda m^3n(a_1\lambda^2+2a_1\mu)+6a_1^2\lambda m^2\mu n-6a_1\lambda m^3\mu n=0,$$

$$3a_1m\mu p-2a_1k\mu n-m^3\mu n(a_1\lambda^2+2a_1\mu)+3a_1^2m^2\mu^2n=0.$$

Elde edilen denklem sisteminin çözümü

$$a_1=2m,\quad k=-\frac{\lambda^2m^3n-4m^3\mu n-3mp}{2n}: \tag{3.1.23}$$

şeklindedir. (3.1.23)'de bulunan sabitler (3.1.19)'da yerine yazılırsa

$$U=a_0+2m\left(\frac{G'}{G}\right), \tag{3.1.24}$$

bulunur. (3.1.6) denklemi (3.1.24)'de yerine yazılıp, (3.1.16) dönüşümünün uygulanmasıyla (3.1.15) denkleminin aşağıdaki şekilde verilen seyahat eden dalga çözümleri elde edilir.

$\lambda^2 - 4\mu > 0$ için

$$u_{1,3}(x,y,z,t) = a_0 + 2m\left(-\frac{\lambda}{2} + \frac{\sqrt{\lambda^2 - 4\mu}}{2} \left(\frac{C_1 sinh(\frac{\sqrt{\lambda^2 - 4\mu}\xi}{2}) + C_2 cosh(\frac{\sqrt{\lambda^2 - 4\mu}\xi}{2})}{C_1 cosh(\frac{\sqrt{\lambda^2 - 4\mu}\xi}{2}) + C_2 sinh(\frac{\sqrt{\lambda^2 - 4\mu}\xi}{2})} \right) \right),$$

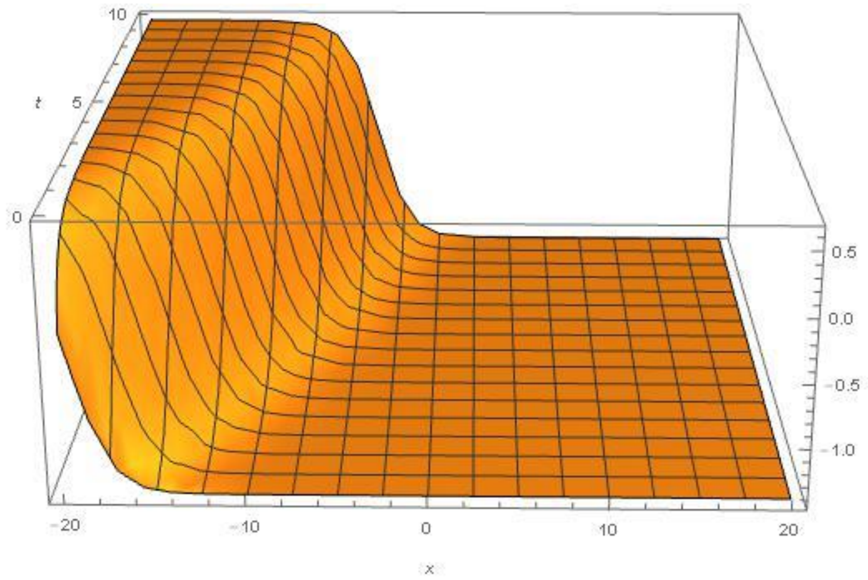
$\lambda^2 - 4\mu < 0$ için

$$u_{1,4}(x,y,z,t) = a_0 + 2m(-\frac{\lambda}{2} + \frac{\sqrt{4\mu - \lambda^2}}{2}$$

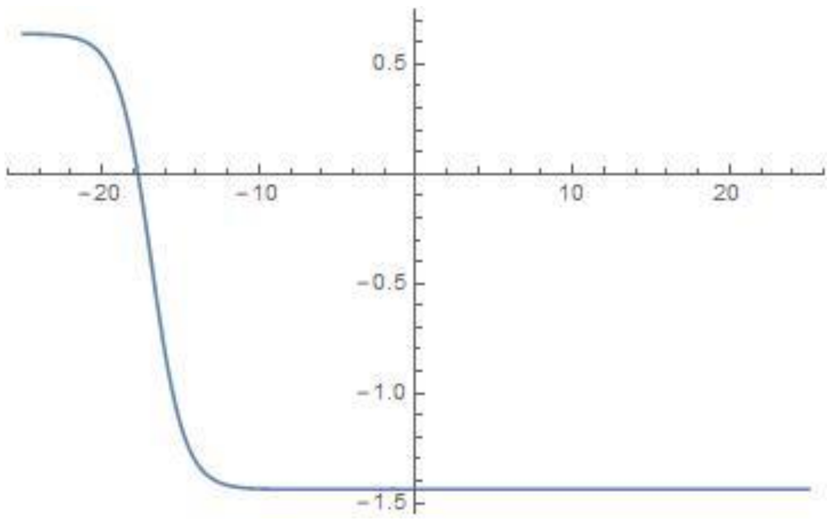
$$. \left(\frac{-C_1 sinh(\frac{\sqrt{4\mu-\lambda^2}\xi}{2}) + C_2 cosh(\frac{\sqrt{4\mu-\lambda^2}\xi}{2})}{C_1 cosh(\frac{\sqrt{4\mu-\lambda^2}\xi}{2}) + C_2 sinh(\frac{\sqrt{4\mu-\lambda^2}\xi}{2})} \right)),$$

$\lambda^2 - 4\mu = 0$ için $$u_{1,5}(x,y,z,t) = a_0 + 2\,m\left(-\frac{\lambda}{2} + \frac{C_2}{C_1 + C_2\xi} \right).$$

Burada $\xi = (-\frac{\lambda^2 m^3 n - 4m^3 \mu n - 3mp}{2n}\frac{t^\alpha}{\alpha} + m\frac{x^\beta}{\beta} + n\frac{y^\gamma}{\gamma} + p\frac{z^\theta}{\theta})$ dir.



Şekil 3.1: $u_{1,3}(x,1,1,t)$ çözümünün üç boyutlu grafiği.



Şekil 3.2: $u_{1,3}(x,1,1,1)$ çözümünün iki boyutlu grafiği.

3.1.2.3 Uyumlu Kesirli Burger-Like Denklemi

Aşağıdaki uyumlu kesirli Burger-Like diferansiyel denklemini ele alalım (Inan ve diğerleri, 2017):

$$T_t^{\alpha} u + T_x^{\beta} u + u T_x^{\beta} u + \frac{1}{2} T_x^{\beta} T_x^{\beta} u = 0 \ , \tag{3.1.25}$$

Burada $t > 0$, $0 < \alpha \leq 1, 0 < \beta \leq 1$ dir. Burger denklemi akışkanlar mekaniğinin matematiksel modellemesi, doğrusal olmayan akustik gaz dinamiği, trafik akışı, şok dalgalarının teorisi, türbülans problemleri için kullanılır.

(3.1.2) değişken dönüşümü (3.1.25) denklemine uygulanırsa

$$(k+m)U' + mUU' + \frac{m^2}{2} U'' = 0. \tag{3.1.26}$$

bulunur.(3.1.26) denklemi integrasyon sabitini sıfır alarak integrallenirse

$$(k+m)U + \frac{m}{2} U^2 + \frac{m^2}{2} U' = 0. \tag{3.1.27}$$

elde edilir. (3.1.27) deki U' ve U^2 terimlerinin kullanılmasıyla yapılan dengeleme işleminden

$$N + 1 = 2N,$$
$$N = 1,$$

bulunur. Farz edelim ki (3.1.28) in çözümü aşağıdaki şekilde olsun:

$$U(\xi) = a_0 + a_1 \left(\frac{G'}{G} \right) \ , \ a_0, a_1 \neq 0. \tag{3.1.28}$$

(3.1.5) ve (3.1.28) denklemlerinin kullanılmasıyla

$$U'(\xi) = -a_1 \left(\frac{G'}{G} \right)^2 - a_1 \lambda \left(\frac{G'}{G} \right) - a_1 \mu \ , \tag{3.1.29}$$

$$U^2(\xi) = a_1^2 \left(\frac{G'}{G} \right)^2 + 2a_0 a_1 \left(\frac{G'}{G} \right) + a_0^2. \tag{3.1.30}$$

bulunur. (3.1.28)-(3.1.30) denklemleri (3.1.27) de yerine yazılmasıyla ve $\left(\frac{G'}{G}\right)^k$ $(k=0,1)$ nin aynı dereceye sahip terimlerinin katsayılarının sıfıra eşitlenmesiyle aşağıda verilen cebirsel denklem sistemi elde edilir:

$$(ma_1^2)/2-(m^2a_1)/2=0,$$

$$a_1(k+m)+a_0a_1m-(a_1\lambda m^2)/2=0,$$

$$(ma_0^2)/2+(k+m)a_0-(a_1m^2\mu)/2=0.$$

Elde edilen denklem sisteminin çözümleri

1. Durum:

$$a_0=\frac{m}{2}\left(\lambda+\sqrt{\lambda^2-4\mu}\right),\ a_1=m,\ k=\frac{m}{2}\left(-2-m\sqrt{\lambda^2-4\mu}\right): \tag{3.1.31}$$

şeklindedir. (3.1.31) 'de bulunan sabitler (3.1.27) de yerine yazılırsa

$$U=\frac{m}{2}\left(\lambda+\sqrt{\lambda^2-4\mu}\right)+m\left(\frac{G'}{G}\right)\ . \tag{3.1.32}$$

bulunur. (3.1.6) denkleminin (3.1.32) de yerine yazılıp (3.1.2) dönüşümünün kullanılmasıyla (3.1.25) denkleminin aşağıdaki şekilde verilen seyahat eden dalga çözümleri elde edilir.

$\lambda^2-4\mu>0$ için

$$u_{1,6}(x,t)=\frac{m}{2}\left(\lambda+\sqrt{\lambda^2-4\mu}\right)$$
$$+m\left(-\frac{\lambda}{2}+\frac{\sqrt{\lambda^2-4\mu}}{2}\left(\frac{C_1 sinh(\frac{\sqrt{\lambda^2-4\mu}\xi}{2})+C_2 cosh(\frac{\sqrt{\lambda^2-4\mu}\xi}{2})}{C_1 cosh(\frac{\sqrt{\lambda^2-4\mu}\xi}{2})+C_2 sinh(\frac{\sqrt{\lambda^2-4\mu}\xi}{2})}\right)\right),$$

$\lambda^2-4\mu<0$ için

$$u_{1,7}(x,t)=\frac{m}{2}\left(\lambda+\sqrt{\lambda^2-4\mu}\right)$$

$$+m\left(-\frac{\lambda}{2}+\frac{\sqrt{4\mu-\lambda^2}}{2}\left(\frac{-C_1 sinh(\frac{\sqrt{4\mu-\lambda^2}\xi}{2})+C_2 cosh(\frac{\sqrt{4\mu-\lambda^2}\xi}{2})}{C_1 cosh(\frac{\sqrt{4\mu-\lambda^2}\xi}{2})+C_2 sinh(\frac{\sqrt{4\mu-\lambda^2}\xi}{2})}\right)\right),$$

$\lambda^2-4\mu=0$ için

$u_{1,8}(x,t)=\frac{m}{2}\left(\lambda+\sqrt{\lambda^2-4\mu}\right)+m\left(-\frac{\lambda}{2}+\frac{C_2}{C_1+C_2\xi}\right)$ bulunur.

Burada $\xi=\frac{m}{2}\left(-2-m\sqrt{\lambda^2-4\mu}\right)\frac{t^\alpha}{\alpha}+m\frac{x^\beta}{\beta}$ dir.

2. Durum:

$$a_0=\frac{m}{2}\left(\lambda-\sqrt{\lambda^2-4\mu}\right),\ a_1=m,\ k=\frac{m}{2}(-2+m\sqrt{\lambda^2-4\mu}): \tag{3.1.33}$$

şeklindedir. Burada λ ve μ keyfi sabitlerdir. (3.1.33) 'de bulunan sabitler (3.1.27) de yerine yazılırsa

$$U=\frac{m}{2}\left(\lambda-\sqrt{\lambda^2-4\mu}\right)+m\left(\frac{G'}{G}\right) \tag{3.1.34}$$

bulunur. (3.1.6) denkleminin (3.1.34) de yerine yazılıp (3.1.2) dönüşümünün kullanılmasıyla (3.1.25) denkleminin aşağıdaki şekilde verilen seyahat eden dalga çözümleri elde edilir.

$\lambda^2-4\mu>0$ için

$$u_{1,9}(x,t)=\frac{m}{2}\left(\lambda-\sqrt{\lambda^2-4\mu}\right)$$

$$+m\left(-\frac{\lambda}{2}+\frac{\sqrt{\lambda^2-4\mu}}{2}\left(\frac{C_1 sinh(\frac{\sqrt{\lambda^2-4\mu}\xi}{2})+C_2 cosh(\frac{\sqrt{\lambda^2-4\mu}\xi}{2})}{C_1 cosh(\frac{\sqrt{\lambda^2-4\mu}\xi}{2})+C_2 sinh(\frac{\sqrt{\lambda^2-4\mu}\xi}{2})}\right)\right),$$

$\lambda^2-4\mu<0$ için

$$u_{1,10}(x,t)=\frac{m}{2}\left(\lambda-\sqrt{\lambda^2-4\mu}\right)$$

$$+m\left(-\frac{\lambda}{2}+\frac{\sqrt{4\mu-\lambda^2}}{2}\left(\frac{-C_1 sinh(\frac{\sqrt{4\mu-\lambda^2}\xi}{2})+C_2 cosh(\frac{\sqrt{4\mu-\lambda^2}\xi}{2})}{C_1 cosh(\frac{\sqrt{4\mu-\lambda^2}\xi}{2})+C_2 sinh(\frac{\sqrt{4\mu-\lambda^2}\xi}{2})}\right)\right)$$

$\lambda^2-4\mu=0$ için

$u_{1,11}(x,t)=\frac{m}{2}\left(\lambda+\sqrt{\lambda^2-4\mu}\right)+m\left(-\frac{\lambda}{2}+\frac{C_2}{C_1+C_2\xi}\right)$ bulunur.

Burada $\xi=\frac{m}{2}\left(-2+m\sqrt{\lambda^2-4\mu}\right)\frac{t^\alpha}{\alpha}+m\frac{x^\beta}{\beta}$ dir.

3.1.2.4 Uyumlu Kesirli (2+1)-Boyutlu AKNS (Ablowitz-Kaup-Newell-Segur) Denklemi

Aşağıdaki uyumlu kesirli AKNS diferansiyel denklemini ele alalım (Inan ve diğerleri 2017):

$$4T_x^\beta T_t^\alpha u+T_x^\beta T_x^\beta T_x^\beta T_y^\theta u+8T_y^\theta T_x^\beta u T_x^\beta u+4T_y^\theta u T_x^\beta T_x^\beta u+aT_x^\beta T_x^\beta u=0, \qquad (3.1.35)$$

Burada $t>0$, $0<\alpha\leq 1, 0<\beta\leq 1$ ve a sabittir. Bu denklem, sistemin dağıtıcı etkisini gösterir. $y=x$ ve $a=0$ alınırsa potansiyel KdV denklemine indirgenebilir.

$$u(x,y,z,t)=U(\xi), \quad \xi = k\frac{t^{\alpha}}{\alpha}+m\frac{x^{\beta}}{\beta}+n\frac{y^{\theta}}{\theta} \tag{3.1.36}$$

(3.1.36) değişken dönüşümü (3.1.35) denklemine uygulanır ve elde edilen denklem integrasyon sabitini sıfır alarak integrallenirse

$$(4km-am^2)U'+6m^2n(U')^2+m^3nU'''=0. \tag{3.1.37}$$

bulunur. (3.1.37) deki U''' ve $(U')^2$ terimlerinin kullanılmasıyla yapılan dengeleme işleminden

$$N+3=2N+2,$$
$$N=1,$$

bulunur. Farz edelim ki (3.1.37) denkleminin çözümü aşağıdaki şekilde olsun:

$$U(\xi)=a_0+a_1\left(\frac{G'}{G}\right), \; a_0,a_1\neq 0. \tag{3.1.38}$$

(3.1.5) ve (3.1.38) denklemlerinin kullanılmasıyla

$$U'(\xi)=-a_1\left(\frac{G'}{G}\right)^2-a_1\lambda\left(\frac{G'}{G}\right)-a_1\mu, \tag{3.1.39}$$

$$U'''(\xi)=-2a_1\left(\left(\frac{G'}{G}\right)^2+\lambda\left(\frac{G'}{G}\right)+\mu\right)+a_1\left(\lambda+2\left(\frac{G'}{G}\right)\right)^2.\left(\left(\frac{G'}{G}\right)^2+\lambda\left(\frac{G'}{G}\right)+\mu\right), \tag{3.1.40}$$

$$(U')^2(\xi)=a_1^2\left(\left(\frac{G'}{G}\right)^2+\lambda\left(\frac{G'}{G}\right)+\mu\right)^2. \tag{3.1.41}$$

(3.1.38)-(3.1.41) denklemleri (3.1.37) de yerine yazılmasıyla ve $\left(\frac{G'}{G}\right)^k$ $(k=0,1)$ nin aynı dereceye sahip terimlerinin katsayılarının sıfıra eşitlenmesiyle aşağıda verilen cebirsel denklem sistemi elde edilir:

$$6na_1^2m^2 - 6na_1m^3 = 0,$$

$$12\lambda na_1^2m^2 - 12\lambda na_1m^3 = 0,$$

$$6a_1^2m^2n(\lambda^2 + 2\mu) - m^3n(a_1\lambda^2 + 2a_1\mu) - a_1(-m^2 + 4km) - 6a_1m^3\mu n - 6a_1\lambda^2m^3n = 0,$$

$$12a_1^2\lambda m^2\mu n - \lambda m^3n(a_1\lambda^2 + 2a_1\mu) - a_1\lambda(-m^2 + 4km) - 6a_1\lambda m^3\mu n = 0,$$

$$6a_1^2m^2\mu^2n - m^3\mu n(a_1\lambda^2 + 2a_1\mu) - a_1\mu(-m^2 + 4km) = 0.$$

Elde edilen denklem sisteminin çözümleri

$$a_1 = m, \qquad k = \frac{m - \lambda^2m^2n + 4m^2\mu n}{4} : \tag{3.1.42}$$

şeklindedir. (3.1.42) 'de bulunan sabitler (3.1.38) de yerine yazılırsa

$$U = a_0 + m\Big(\frac{G'}{G}\Big) \tag{3.1.43}$$

bulunur. (3.1.6) denkleminin (3.1.43) de yerine yazılıp (3.1.36) dönüşümünün kullanılmasıyla (3.1.35) denkleminin aşağıdaki şekilde verilen seyahat eden dalga çözümleri elde edilir.

$\lambda^2 - 4\mu > 0$ için

$$u_{1,12}(x,y,t) = a_0 + m\Big(-\frac{\lambda}{2} + \frac{\sqrt{\lambda^2 - 4\mu}}{2}\Big(\frac{C_1 sinh(\frac{\sqrt{\lambda^2 - 4\mu}\xi}{2}) + C_2 cosh(\frac{\sqrt{\lambda^2 - 4\mu}\xi}{2})}{C_1 cosh(\frac{\sqrt{\lambda^2 - 4\mu}\xi}{2}) + C_2 sinh(\frac{\sqrt{\lambda^2 - 4\mu}\xi}{2})}\Big)\Big),$$

$\lambda^2 - 4\mu < 0$ için

$$u_{1,13}(x,y,t) = a_0 + m\Big(-\frac{\lambda}{2} + \frac{\sqrt{4\mu - \lambda^2}}{2}\Big(\frac{-C_1 sinh(\frac{\sqrt{4\mu - \lambda^2}\xi}{2}) + C_2 cosh(\frac{\sqrt{4\mu - \lambda^2}\xi}{2})}{C_1 cosh(\frac{\sqrt{4\mu - \lambda^2}\xi}{2}) + C_2 sinh(\frac{\sqrt{4\mu - \lambda^2}\xi}{2})}\Big)\Big),$$

$\lambda^2 - 4\mu = 0$ için

$u_{1,14}(x,y,t) = a_0 + m\left(-\frac{\lambda}{2} + \frac{C_2}{C_1 + C_2\xi}\right)$ bulunur.

Burada $\xi = \left(\frac{m - \lambda^2 m^2 n + 4m^2 \mu n}{4}\frac{t^\alpha}{\alpha} + m\frac{x^\beta}{\beta} + n\frac{y^\theta}{\theta}\right)$ dir.

3.2 $\frac{G'}{G^2}$ -Açılım Metodu

3.2.1 Yöntem

(3.1.1) ile verilen lineer olmayan uyumlu kesirli kısmi diferansiyel denklemini ele alalım. (3.1.2) dönüşümü, (3.1.1) denklemine uygulanırsa ve Teorem 2.1.5 ' de verilen zincir kuralı kullanılırsa (3.1.3) denklemi elde edilir

Varsayalım ki (3.1.3) denkleminin çözümü

$$U(\xi) = a_0 + \sum_{i=1}^{N} a_i \left(\frac{G(\xi)'}{G(\xi)^2}\right)^i + \sum_{i=1}^{N} b_i \left(\frac{G(\xi)'}{G(\xi)^2}\right)^{-i}, \tag{3.2.1}$$

formunda $\left(\frac{G'}{G^2}\right)$'nin seri açılımı şeklinde olsun.

(3.2.1) denkleminde verilen $G = G(\xi)$ fonksiyonu aşağıdaki ikinci mertebe diferansiyel denklemi sağladığını kabul edelim.

$$\left(\frac{G'}{G^2}\right)' = \mu + \lambda\left(\frac{G'}{G^2}\right)^2. \tag{3.2.2}$$

Burada $G' = \frac{dG(\xi)}{d\xi}$, $G'' = \frac{d^2G(\xi)}{d\xi^2}$ ve $a_0, ..., a_N, b_0, ..., b_N$, λ ve μ ler sabitlerdir.

(3.2.2) diferansiyel denklemi aşağıdaki gibi farklı çözümlere sahiptir(Tauseef ve diğerleri, 2017):

$$\mu\lambda > 0 \text{ için } \frac{G'}{G^2} = \sqrt{\frac{\mu}{\lambda}} \left(\frac{C\cos\sqrt{\mu\lambda}\xi + D\sin\sqrt{\mu\lambda}\xi}{D\cos\sqrt{\mu\lambda}\xi - C\sin\sqrt{\mu\lambda}\xi} \right),$$

$$\mu\lambda < 0 \text{ için } \frac{G'}{G^2} = -\sqrt{\frac{|\mu\lambda|}{\lambda}} \frac{C\sinh(2\sqrt{|\mu\lambda|}\xi) + C\cosh(2\sqrt{|\mu\lambda|}\xi) + D}{C\sinh(2\sqrt{|\mu\lambda|}\xi) + C\cosh(2\sqrt{|\mu\lambda|}\xi) - D},$$

$$\mu = 0, \lambda \neq 0 \text{ için } \frac{G'}{G^2} = -\frac{C}{\lambda(C\xi + D)}. \tag{3.2.3}$$

(3.2.1) açılımı (3.1.3) de yerine yazılır. (3.1.3) denklemindeki en yüksek mertebeli lineer terim ve en yüksek dereceli lineer olmayan terim arasında dengeleme işlemi yapılmak suretiyle N değeri hesaplanır. Bulunan N değeri için (3.2.1) denklemi (3.1.3) denkleminde yerine yazılarak elde edilen denklemde $\left(\frac{G'}{G^2}\right)$ ile aynı dereceye sahip terimlerin katsayılarının sıfıra eşitlenmesiyle $a_0,...,a_N$, λ ve μ bilinmeyenli cebirsel denklem sistemi elde edilir. Elde edilen cebirsel denklem sisteminin çözülmesiyle bilinmeyen sabitler bulunur. Daha sonra bulunan sabitler (3.2.1) denkleminde yerine konulursa ve (3.1.2) dönüşümü kullanılırsa (3.1.1) uyumlu kesirli diferansiyel denkleminin seyahat eden dalga çözümlerini elde edilir.

3.2.2 Uygulamalar

3.2.2.1 Uyumlu Kesirli KDV(Korteweg-de Vries) denklemi

Aşağıdaki uyumlu kesirli KdV diferansiyel denklemini ele alalım(Odibat, 2017):

$$T_t^{\alpha} u + auT_x^{\beta} u + bT_x^{\beta} T_x^{\beta} T_x^{\beta} u = 0. \tag{3.2.4}$$

Burada $t > 0$, $0 < \alpha, \beta \leq 1,$ a ve b sabitlerdir. Korteweg-De Vries denklemi, sığ su yüzeylerindeki dalgaların matematiksel bir modelidir. Boussinesq tarafından ilk kez 1877'de tanıtılmış ve 1895'te Diederik Korteweg ve Gustav de Vries tarafından yeniden keşfedilmiştir.

(3.1.2) değişken dönüşümü (3.2.4) denklemine uygulanırsa

$$kU' + amUU'bm^3U''' = 0, \tag{3.2.5}$$

elde edilir. (3.2.5) denklemi integrasyon sabitini sıfır alarak integrallenirse

$$kU + am\frac{U^2}{2} + bm^3U'' = 0 \tag{3.2.6}$$

bulunur. (3.2.6) deki U'' ve U^2 terimlerinin kullanılmasıyla yapılan dengeleme işleminden

$$N + 2 = 2N,$$
$$N = 2,$$

bulunur. Farz edelim ki (3.2.6) in çözümü aşağıdaki şekilde olsun:

$$U(\xi) = a_0 + a_1\left(\frac{G'}{G^2}\right) + a_2\left(\frac{G'}{G^2}\right)^2 + b_1\left(\frac{G'}{G^2}\right)^{-1} + b_2\left(\frac{G'}{G^2}\right)^{-2}. \tag{3.2.7}$$

Burada $a_0 \neq 0$ ve a_1, a_2, b_1, b_2'ler hepsi birden sıfır olmayan sabitlerdir.

(3.2.2) ve (3.2.7) denklemlerinin kullanılmasıyla aşağıdaki denklemler bulunur:

$$U''(\xi) = (\lambda\left(\frac{G'}{G^2}\right)^2 + \mu)^2(2a_2 + (2b_1)/\left(\frac{G'}{G^2}\right)^3$$
$$+(6b_2)/\left(\frac{G'}{G^2}\right)^4) + 2\lambda\left(\frac{G'}{G^2}\right)(\lambda\left(\frac{G'}{G^2}\right)^2 + \mu)(a_1 + 2a_2\left(\frac{G'}{G^2}\right) - b_1/\left(\frac{G'}{G^2}\right)^2 - (2b_2)/\left(\frac{G'}{G^2}\right)^3), \tag{3.2.8}$$

$$U^2(\xi) = A_1^2\left(\frac{G'}{G}\right)^2 + 2A_0A_1\left(\frac{G'}{G}\right) + A_0^2. \tag{3.2.9}$$

(3.2.7)-(3.2.9) denklemleri (3.2.6) da yerine yazılmasıyla ve $\left(\frac{G'}{G^2}\right)^k$ $(k=0,1)$ nin aynı dereceye sahip terimlerinin katsayılarının sıfıra eşitlenmesiyle aşağıda verilen cebirsel denklem sistemi elde edilir:

$$aa_2^2m+12ba_2\lambda^2m^3=0,$$

$$4a_1b\lambda^2m^3+2aa_1a_2m=0,$$

$$aa_1^2m+16a_2b\lambda\mu m^3+2aa_0a_2m+2a_2k=0,$$

$$2a_1k+2aa_0a_1m+2aa_2b_1m+4a_1b\lambda m^3\mu=0,$$

$$2a_0k+aa_0^2m+4bb_2\lambda^2m^3+4a_2bm^3\mu^2+2aa_1b_1m+2aa_2b_2m=0,$$

$$ab_1^2m+16bb_2\lambda\mu m^3+2aa_0b_2m+2b_2k=0,$$

$$4bb_1m^3\mu^2+2ab_1b_2m=0,$$

$$ab_2^2m+12bb_2m^3\mu^2=0.$$

Elde edilen denklem sisteminin çözümü

1. Durum**:**

$$\begin{aligned} &a_0=\frac{-24b\lambda m^2\mu}{a},\quad a_1=0,\quad a_2=\frac{-12b\lambda^2m^2}{a},\\ &b_1=0,\quad b_2=\frac{-12b\mu^2m^2}{a},\quad k=16b\lambda m^3\mu: \end{aligned} \tag{3.2.10}$$

şeklindedir. (3.2.10) 'de bulunan sabitler (3.2.1) de yerine yazılırsa

$$U(\xi)=\frac{-24b\lambda m^2\mu}{a}-\frac{12b\lambda^2m^2}{a}\left(\frac{G'}{G^2}\right)^2-\frac{12b\mu^2m^2}{a}\left(\frac{G'}{G^2}\right)^{-2} \tag{3.2.11}$$

bulunur. (3.2.3) denkleminin (3.2.11) de yerine yazılıp (3.1.2) dönüşümünün kullanılmasıyla (3.2.4) denkleminin aşağıdaki şekilde verilen seyahat eden dalga çözümleri elde edilir.

$\lambda\mu > 0$ için

$$u_{2,1}(x,t) = \frac{-24b\lambda m^2\mu}{a} + \frac{-12b\lambda^2 m^2}{a}$$

$$\cdot\left(\sqrt{\frac{\mu}{\lambda}}\left(\frac{C\cos\sqrt{\mu\lambda}(16b\lambda m^3\mu\frac{t^\alpha}{\alpha}+m\frac{x^\beta}{\beta})+D\sin\sqrt{\mu\lambda}(16b\lambda m^3\mu\frac{t^\alpha}{\alpha}+m\frac{x^\beta}{\beta})}{D\cos\sqrt{\mu\lambda}(16b\lambda m^3\mu\frac{t^\alpha}{\alpha}+m\frac{x^\beta}{\beta})-C\sin\sqrt{\mu\lambda}(16b\lambda m^3\mu\frac{t^\alpha}{\alpha}+m\frac{x^\beta}{\beta})}\right)\right)^2$$

$$+\frac{-12b\mu^2 m^2}{a}$$

$$\cdot\left(\sqrt{\frac{\mu}{\lambda}}\left(\frac{C\cos\sqrt{\mu\lambda}(16b\lambda m^3\mu\frac{t^\alpha}{\alpha}+m\frac{x^\beta}{\beta})+D\sin\sqrt{\mu\lambda}(16b\lambda m^3\mu\frac{t^\alpha}{\alpha}+m\frac{x^\beta}{\beta})}{D\cos\sqrt{\mu\lambda}(16b\lambda m^3\mu\frac{t^\alpha}{\alpha}+m\frac{x^\beta}{\beta})-C\sin\sqrt{\mu\lambda}(16b\lambda m^3\mu\frac{t^\alpha}{\alpha}+m\frac{x^\beta}{\beta})}\right)\right)^{-2},$$

$\lambda\mu < 0$ için

$$u_{2,2}(x,t) = \frac{-24b\lambda m^2\mu}{a} + \frac{-12b\lambda^2 m^2}{a}$$

$$\cdot\left(-\sqrt{\frac{|\mu\lambda|}{\lambda}}\frac{C\sinh(2\sqrt{|\mu\lambda|}(16b\lambda m^3\mu\frac{t^\alpha}{\alpha}+m\frac{x^\beta}{\beta}))+C\cosh(2\sqrt{|\mu\lambda|}(16b\lambda m^3\mu\frac{t^\alpha}{\alpha}+m\frac{x^\beta}{\beta}))+D}{C\sinh(2\sqrt{|\mu\lambda|}(16b\lambda m^3\mu\frac{t^\alpha}{\alpha}+m\frac{x^\beta}{\beta}))+C\cosh(2\sqrt{|\mu\lambda|}(16b\lambda m^3\mu\frac{t^\alpha}{\alpha}+m\frac{x^\beta}{\beta}))-D}\right)^2$$

$$+\frac{-12b\mu^2 m^2}{a}$$

$$\cdot\left(-\sqrt{\frac{|\mu\lambda|}{\lambda}}\frac{C\sinh(2\sqrt{|\mu\lambda|}(16b\lambda m^3\mu\frac{t^\alpha}{\alpha}+m\frac{x^\beta}{\beta}))+C\cosh(2\sqrt{|\mu\lambda|}(16b\lambda m^3\mu\frac{t^\alpha}{\alpha}+m\frac{x^\beta}{\beta}))+D}{C\sinh(2\sqrt{|\mu\lambda|}(16b\lambda m^3\mu\frac{t^\alpha}{\alpha}+m\frac{x^\beta}{\beta}))+C\cosh(2\sqrt{|\mu\lambda|}(16b\lambda m^3\mu\frac{t^\alpha}{\alpha}+m\frac{x^\beta}{\beta}))-D}\right)^{-2},$$

$\mu = 0, \lambda \neq 0$ için

$$u_{2,3}(x,t) = \frac{-12bm^2}{a}\left(\frac{C}{\left(C(16b\lambda m^3\mu\frac{t^\alpha}{\alpha} + m\frac{x^\beta}{\beta}) + D\right)}\right)^2$$

bulunur.

2. Durum:

$$\begin{aligned} &a_0 = \frac{8b\lambda m^2\mu}{a}, \quad a_1 = 0, \quad a_2 = \frac{-12b\lambda^2 m^2}{a}, \\ &b_1 = 0, \quad b_2 = \frac{-12b\mu^2 m^2}{a}, \quad k = -16b\lambda m^3\mu : \end{aligned} \tag{3.2.12}$$

şeklindedir. (3.2.12) da bulunan sabitler (3.2.1) de yerine yazılırsa

$$U(\xi) = \frac{8b\lambda m^2\mu}{a} - \frac{12b\lambda^2 m^2}{a}\left(\frac{G'}{G^2}\right)^2 - \frac{12b\mu^2 m^2}{a}\left(\frac{G'}{G^2}\right)^{-2} \tag{3.2.13}$$

bulunur. (3.2.3) denkleminin (3.2.13) de yerine yazılıp (3.1.2) dönüşümünün kullanılmasıyla (3.2.4) denkleminin aşağıdaki şekilde verilen seyahat eden dalga çözümleri elde edilir.

$\lambda\mu > 0$ için

$$u_{2,4}(x,t) = \frac{-24b\lambda m^2\mu}{a} + \frac{-12b\lambda^2 m^2}{a}$$

$$\cdot\left(\sqrt{\frac{\mu}{\lambda}}\left(\frac{C\cos\sqrt{\mu\lambda}(16b\lambda m^3\mu\frac{t^\alpha}{\alpha} + m\frac{x^\beta}{\beta}) + D\sin\sqrt{\mu\lambda}(16b\lambda m^3\mu\frac{t^\alpha}{\alpha} + m\frac{x^\beta}{\beta})}{D\cos\sqrt{\mu\lambda}(16b\lambda m^3\mu\frac{t^\alpha}{\alpha} + m\frac{x^\beta}{\beta}) - C\sin\sqrt{\mu\lambda}(16b\lambda m^3\mu\frac{t^\alpha}{\alpha} + m\frac{x^\beta}{\beta})}\right)\right)^2$$

$$+\frac{-12b\mu^2 m^2}{a}$$

$$\cdot\left(\sqrt{\frac{\mu}{\lambda}}\left(\frac{C\cos\sqrt{\mu\lambda}(16b\lambda m^3\mu\frac{t^\alpha}{\alpha}+m\frac{x^\beta}{\beta})+D\sin\sqrt{\mu\lambda}(16b\lambda m^3\mu\frac{t^\alpha}{\alpha}+m\frac{x^\beta}{\beta})}{D\cos\sqrt{\mu\lambda}(16b\lambda m^3\mu\frac{t^\alpha}{\alpha}+m\frac{x^\beta}{\beta})-C\sin\sqrt{\mu\lambda}(16b\lambda m^3\mu\frac{t^\alpha}{\alpha}+m\frac{x^\beta}{\beta})}\right)\right)^{-2},$$

$\lambda\mu<0$ için

$$u_{2,5}(x,t)=\frac{-24b\lambda m^2\mu}{a}+\frac{-12b\lambda^2m^2}{a}$$

$$\cdot\left(-\sqrt{\frac{|\mu\lambda|}{\lambda}}\frac{C\sinh(2\sqrt{|\mu\lambda|}(16b\lambda m^3\mu\frac{t^\alpha}{\alpha}+m\frac{x^\beta}{\beta}))+C\cosh(2\sqrt{|\mu\lambda|}(16b\lambda m^3\mu\frac{t^\alpha}{\alpha}+m\frac{x^\beta}{\beta}))+D}{C\sinh(2\sqrt{|\mu\lambda|}(16b\lambda m^3\mu\frac{t^\alpha}{\alpha}+m\frac{x^\beta}{\beta}))+C\cosh(2\sqrt{|\mu\lambda|}(16b\lambda m^3\mu\frac{t^\alpha}{\alpha}+m\frac{x^\beta}{\beta}))-D}\right)^2$$

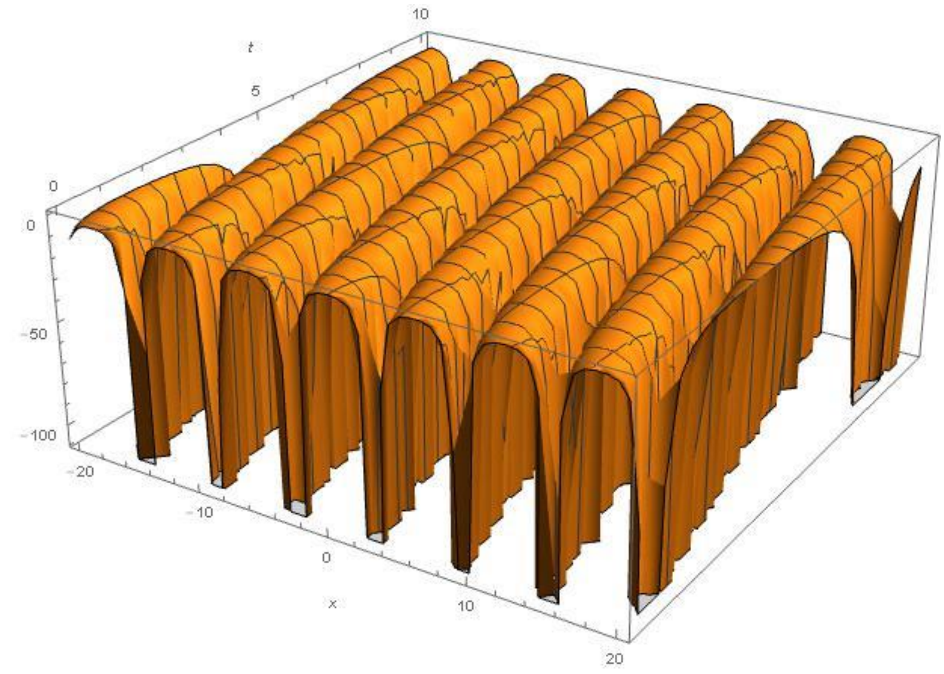
$$+\frac{-12b\mu^2m^2}{a}$$

$$\cdot\left(-\sqrt{\frac{|\mu\lambda|}{\lambda}}\frac{C\sinh(2\sqrt{|\mu\lambda|}(16b\lambda m^3\mu\frac{t^\alpha}{\alpha}+m\frac{x^\beta}{\beta}))+C\cosh(2\sqrt{|\mu\lambda|}(16b\lambda m^3\mu\frac{t^\alpha}{\alpha}+m\frac{x^\beta}{\beta}))+D}{C\sinh(2\sqrt{|\mu\lambda|}(16b\lambda m^3\mu\frac{t^\alpha}{\alpha}+m\frac{x^\beta}{\beta}))+C\cosh(2\sqrt{|\mu\lambda|}(16b\lambda m^3\mu\frac{t^\alpha}{\alpha}+m\frac{x^\beta}{\beta}))-D}\right)^{-2},$$

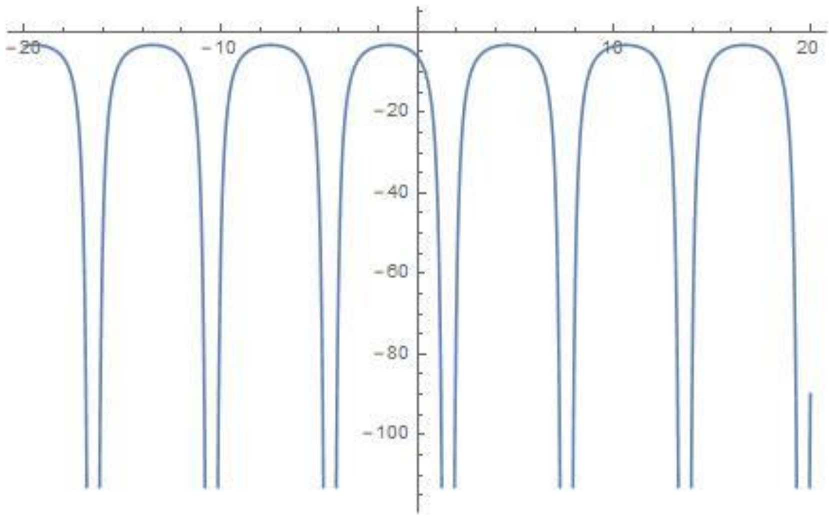
$\mu=0,\lambda\neq0$ için

$$u_{2,6}(x,t)=\frac{-12bm^2}{a}\left(\frac{C}{(C\left(16b\lambda m^3\mu\frac{t^\alpha}{\alpha}+m\frac{x^\beta}{\beta}\right)+D)}\right)^2$$

bulunur.



Şekil 3.3: $u_{2,1}(x,t)$ çözümünün üç boyutlu grafiği.



Şekil 3.4: $u_{2,1}(x,1)$ çözümünün iki boyutlu grafiği.

3.2.2.2 Uyumlu Kesirli CDG(Caudrey-Dodd-Gibbon) Denklemi

Lineer olmayan evrim denklemleri (NLEE) de lineer olmayan fiziksel olayların çalışılmasında önemli rol oynar. Yüksek boyutlu NLEE'ler, optik fiber iletişiminde, uzay ve laboratuvar plazmalarında, süper iletkenlerde ve Bose Einstein kondensatlarında (1+1)-boyutlulardan daha gerçekçidir. Caudrey-Dodd-Gibbon denklemi lineer olmayan evrim denklemlerinden biridir.

Aşağıdaki uyumlu kesirli CDG diferansiyel denklemini ele alalım (Neamaty ve diğ. 2016):

$$T_t^{\alpha}u+30uT_x^{\beta}T_x^{\beta}T_x^{\beta}u+30T_x^{\beta}uT_x^{\beta}T_x^{\beta}u+180u^2T_x^{\beta}u+T_x^{\beta}T_x^{\beta}T_x^{\beta}T_x^{\beta}T_x^{\beta}u=0. \qquad (3.2.14)$$

Burada $t>0$, $0<\alpha,\beta\leq 1$dir.

(3.1.2) değişken dönüşümü (3.2.14) denklemine uygulanırsa

$$kU'+30m^3UU'''+30m^3U'U''+180mU^2U'+m^5U^{(5)}=0. \qquad (3.2.15)$$

elde edilir.(3.2.15) denklemi integrasyon sabitini sıfır alarak integrallenirse

$$kU+30m^3UU''+180m\frac{U^3}{3}+m^5U^{(4)}=0 \qquad (3.2.16)$$

bulunur. (3.2.16) deki $U^{(4)}$ ve UU'' terimlerinin kullanılmasıyla yapılan dengeleme işleminden

$$N+4=2N+2,$$
$$N=2,$$

bulunur. Farz edelim ki (3.2.20) in çözümü aşağıdaki şekilde olsun:

$$U(\xi)=a_0+a_1\left(\frac{G'}{G^2}\right)+a_2\left(\frac{G'}{G^2}\right)^2+b_1\left(\frac{G'}{G^2}\right)^{-1}+b_2\left(\frac{G'}{G^2}\right)^{-2}. \qquad (3.2.17)$$

Burada $a_0\neq 0$ ve a_1,a_2,b_1,b_2'ler hepsi birden sıfır olmayan sabitlerdir.

(3.2.2) ve (3.2.18) denklemlerinin kullanılmasıyla UU'' , U^3 , $U^{(4)}$ değerleri hesaplanır. Bulunan bu değerlerin (3.2.17) de yerine yazılmasıyla ve $\left(\frac{G'}{G^2}\right)^k$ $(k=0,1)$ nin aynı dereceye sahip terimlerinin katsayılarının sıfıra eşitlenmesiyle aşağıda verilen cebirsel denklem sistemi elde edilir:

$$60a_2^3m+180a_2^2\lambda^2m^3+120a_2\lambda^4m^5=0,$$

$$180a_1a_2^2m+240a_1a_2\lambda^2m^3+24a_1\lambda^4m^5=0,$$

$$180a_1^2a_2m+60a_1^2\lambda^2m^3+240\mu a_2^2\lambda m^3+180a_0a_2^2m+240\mu a_2\lambda^3m^5+180a_0a_2\lambda^2m^3=0,$$

$$60a_1^3m+300\mu a_1a_2\lambda m^3+360a_0a_1a_2m+40\mu a_1\lambda^3m^5+60a_0a_1\lambda^2m^3+180b_1a2^2m$$
$$+180b_1a_2\lambda^2m^3=0,$$

$$180a_0^2a_2m+180a_0a_1^2m+240a_0a_2\lambda m^3\mu+60a_1^2\lambda m^3\mu+360b_1a_1a_2m+60b_1a_1\lambda^2m^3$$
$$+60a_2^2m^3\mu^2+180b_2a_2^2m+136a_2\lambda^2m^5\mu^2+240b_2a_2\lambda^2m^3+ka_2=0,$$

$$180a_0^2a_1m+60a_0a_1\lambda m^3\mu+360a_2b_1a_0m+180b_1a_1^2m+16a_1\lambda^2m^5\mu^2+120b_2a_1\lambda^2m^3$$
$$+60a_2a_1m^3\mu^2+360a_2b_2a_1m+ka_1+300a_2b_1\lambda m^3\mu=0,$$

$$60a_0^3m+360a_0a_1b_1m+60b_2a_0\lambda^2m^3+60a_2a_0m^3\mu^2+360a_2b_2a_0m+ka_0+180b_2a_1^2m$$
$$+120a_1b_1\lambda m^3\mu+180a_2b_1^2m+16b_2\lambda^3m^5\mu+16a_2\lambda m^5\mu^3+480a_2b_2\lambda m^3\mu=0,$$

$$180a_0^2b_1m+60a_0b_1\lambda m^3\mu+360a_1b_2a_0m+180a_1b_1^2m+16b_1\lambda^2m^5\mu^2+60b_2b_1\lambda^2m^3$$
$$+120a_2b_1m^3\mu^2+360a_2b_2b_1m+kb_1+300a_1b_2\lambda m^3\mu=0,$$

$$180a_0^2b_2m+180a_0b_1^2m+240a_0b_2\lambda m^3\mu+60b_1^2\lambda m^3\mu+360a_1b_1b_2m+60a_1b_1m^3\mu^2$$
$$+60b_2^2\lambda^2m^3+180a_2b_2^2m+136b_2\lambda^2m^5\mu^2+240a_2b_2m^3\mu^2+kb_2=0,$$

$$60b_1^3m+300\lambda b_1b_2m^3\mu+360a_0b_1b_2m+40\lambda b_1m^5\mu^3+60a_0b_1m^3\mu^2+180a_1b_2^2m$$
$$+180a_1b_2m^3\mu^2=0,$$

$$180b_1^2b_2m+60b_1^2m^3\mu^2+240\lambda b_2^2m^3\mu+180a_0b_2^2m+240\lambda b_2m^5\mu^3+180a_0b_2m^3\mu^2=0,$$

$$180b_1b_2^2m+240b_1b_2m^3\mu^2+24b_1m^5\mu^4=0,$$

$$60b_2^3m+180b_2^2m^3\mu^2+120b_2m^5\mu^4=0.$$

Elde edilen denklem sisteminin çözümleri aşağıda verilmiştir.

1. Durum:

$$a_0 = 2\sqrt{\frac{7}{15}}\lambda m^2\mu, \quad a_1 = 0, a_2 = -\lambda^2 m^2, \ \ b_1 = 0, \ b_2 = -m^2\mu^2, \qquad (3.2.18)$$
$$k = -32(11\lambda^2 m^5\mu^2 + \sqrt{105}\lambda^2 m^5\mu^2):$$

şeklindedir. (3.2.18) 'de bulunan sabitler (3.2.17) de yerine yazılırsa

$$U(\xi) = 2\sqrt{\frac{7}{15}}\lambda m^2\mu - \lambda^2 m^2\Big(\frac{G'}{G^2}\Big)^2 - m^2\mu^2 b_2\Big(\frac{G'}{G^2}\Big)^{-2}. \qquad (3.2.19)$$

bulunur. (3.2.3) denkleminin (3.2.19) de yerine yazılıp (3.1.2) dönüşümünün kullanılmasıyla (3.2.14) denkleminin aşağıdaki şekilde verilen seyahat eden dalga çözümleri elde edilir.

$\lambda\mu > 0$ için

$$u_{2,7}(x,t) = 2\sqrt{\frac{7}{15}}\lambda m^2\mu - \lambda^2 m^2$$

$$\cdot\left(\sqrt{\frac{\mu}{\lambda}}\Big(\frac{C\cos\sqrt{\mu\lambda}(-32(11\lambda^2m^5\mu^2+\sqrt{105}\lambda^2m^5\mu^2)\frac{t^\alpha}{\alpha}+m\frac{x^\beta}{\beta})+D\sin\sqrt{\mu\lambda}(-32(11\lambda^2m^5\mu^2+\sqrt{105}\lambda^2m^5\mu^2)\frac{t^\alpha}{\alpha}+m\frac{x^\beta}{\beta})}{D\cos\sqrt{\mu\lambda}(-32(11\lambda^2m^5\mu^2+\sqrt{105}\lambda^2m^5\mu^2)\frac{t^\alpha}{\alpha}+m\frac{x^\beta}{\beta})-C\sin\sqrt{\mu\lambda}(-32(11\lambda^2m^5\mu^2+\sqrt{105}\lambda^2m^5\mu^2)\frac{t^\alpha}{\alpha}+m\frac{x^\beta}{\beta})}\Big)\right)^2$$

$$-m^2\mu^2$$

$$\cdot\left(\sqrt{\frac{\mu}{\lambda}}\Big(\frac{C\cos\sqrt{\mu\lambda}(-32(11\lambda^2m^5\mu^2+\sqrt{105}\lambda^2m^5\mu^2)\frac{t^\alpha}{\alpha}+m\frac{x^\beta}{\beta})+D\sin\sqrt{\mu\lambda}(-32(11\lambda^2m^5\mu^2+\sqrt{105}\lambda^2m^5\mu^2)\frac{t^\alpha}{\alpha}+m\frac{x^\beta}{\beta})}{D\cos\sqrt{\mu\lambda}(-32(11\lambda^2m^5\mu^2+\sqrt{105}\lambda^2m^5\mu^2)\frac{t^\alpha}{\alpha}+m\frac{x^\beta}{\beta})-C\sin\sqrt{\mu\lambda}(-32(11\lambda^2m^5\mu^2+\sqrt{105}\lambda^2m^5\mu^2)\frac{t^\alpha}{\alpha}+m\frac{x^\beta}{\beta})}\Big)\right)^{-2},$$

$\lambda\mu < 0$ için

$$u_{2,8}(x,t) = 2\sqrt{\frac{7}{15}}\lambda m^2\mu + -\lambda^2 m^2.$$

$$\left(-\sqrt{\frac{|\mu\lambda|}{\lambda}}\,\frac{C\sinh(2\sqrt{|\mu\lambda|}(-32(11\lambda^2m^5\mu^2+\sqrt{105}\lambda^2m^5\mu^2)\frac{t^\alpha}{\alpha}+m\frac{x^\beta}{\beta}))+C\cosh(2\sqrt{|\mu\lambda|}(-32(11\lambda^2m^5\mu^2+\sqrt{105}\lambda^2m^5\mu^2)\frac{t^\alpha}{\alpha}+m\frac{x^\beta}{\beta}))+D}{C\sinh(2\sqrt{|\mu\lambda|}(-32(11\lambda^2m^5\mu^2+\sqrt{105}\lambda^2m^5\mu^2)\frac{t^\alpha}{\alpha}+m\frac{x^\beta}{\beta}))+C\cosh(2\sqrt{|\mu\lambda|}(-32(11\lambda^2m^5\mu^2+\sqrt{105}\lambda^2m^5\mu^2)\frac{t^\alpha}{\alpha}+m\frac{x^\beta}{\beta}))-D}\right)^2$$

$$-m^2\mu^2.$$

$$\left(-\sqrt{\frac{|\mu\lambda|}{\lambda}}\frac{C\sinh(2\sqrt{|\mu\lambda|}(-32(11\lambda^2m^5\mu^2+\sqrt{105}\lambda^2m^5\mu^2)\frac{t^\alpha}{\alpha}+m\frac{x^\beta}{\beta}))+C\cosh(2\sqrt{|\mu\lambda|}(-32(11\lambda^2m^5\mu^2+\sqrt{105}\lambda^2m^5\mu^2)\frac{t^\alpha}{\alpha}+m\frac{x^\beta}{\beta}))+D}{C\sinh(2\sqrt{|\mu\lambda|}(-32(11\lambda^2m^5\mu^2+\sqrt{105}\lambda^2m^5\mu^2)\frac{t^\alpha}{\alpha}+m\frac{x^\beta}{\beta}))+C\cosh(2\sqrt{|\mu\lambda|}(-32(11\lambda^2m^5\mu^2+\sqrt{105}\lambda^2m^5\mu^2)\frac{t^\alpha}{\alpha}+m\frac{x^\beta}{\beta}))-D}\right)^{-2},$$

$\mu=0, \lambda\neq 0$ için

$$u_{2,9}(x,t)=-m^2.$$

$$\left(\frac{C}{(C(-32(11\lambda^2m^5\mu^2+\sqrt{105}\lambda^2m^5\mu^2)\frac{t^\alpha}{\alpha}+m\frac{x^\beta}{\beta})+D)}\right)^2$$

bulunur.

2. Durum:

$$\begin{aligned}&a_0=-2\lambda m^2\mu,\quad a_1=0,\quad a_2=-\lambda^2m^2,\quad b_1=0,\quad b_2=-m^2\mu^2,\\&k=-256\lambda^2m^5\mu^2:\end{aligned}\tag{3.2.20}$$

şeklindedir. (3.2.20) 'de bulunan sabitler (3.2.17) de yerine yazılırsa

$$U(\xi)=-2\lambda m^2\mu-\lambda^2m^2\left(\frac{G'}{G^2}\right)^2-m^2\mu^2\left(\frac{G'}{G^2}\right)^{-2}\tag{3.2.21}$$

bulunur. (3.2.3) denkleminin (3.2.21) de yerine yazılıp (3.1.2) dönüşümünün kullanılmasıyla (3.2.14) denkleminin aşağıdaki şekilde verilen seyahat eden dalga çözümleri elde edilir.

$\lambda\mu>0$ için

$$\begin{aligned}U_{2,10}(\xi)=&-2\lambda m^2\mu-\lambda^2m^2\left(\sqrt{\frac{\mu}{\lambda}}\left(\frac{C\cos\sqrt{\mu\lambda}\xi+D\sin\sqrt{\mu\lambda}\xi}{D\cos\sqrt{\mu\lambda}\xi-C\sin\sqrt{\mu\lambda}\xi}\right)\right)^2\\&-m^2\mu^2\left(\sqrt{\frac{\mu}{\lambda}}\left(\frac{C\cos\sqrt{\mu\lambda}\xi+D\sin\sqrt{\mu\lambda}\xi}{D\cos\sqrt{\mu\lambda}\xi-C\sin\sqrt{\mu\lambda}\xi}\right)\right)^{-2},\end{aligned}$$

$\lambda\mu < 0$ için

$$U_{2,11}(\xi) = -2\lambda m^2\mu - \lambda^2 m^2 \Big(-\sqrt{\frac{|\mu\lambda|}{\lambda}}\frac{C\sinh(2\sqrt{|\mu\lambda|}\xi) + C\cosh(2\sqrt{|\mu\lambda|}\xi) + D}{C\sinh(2\sqrt{|\mu\lambda|}\xi) + C\cosh(2\sqrt{|\mu\lambda|}\xi) - D}\Big)^2$$
$$- m^2\mu^2 \Big(-\sqrt{\frac{|\mu\lambda|}{\lambda}}\frac{C\sinh(2\sqrt{|\mu\lambda|}\xi) + C\cosh(2\sqrt{|\mu\lambda|}\xi) + D}{C\sinh(2\sqrt{|\mu\lambda|}\xi) + C\cosh(2\sqrt{|\mu\lambda|}\xi) - D}\Big)^{-2},$$

$\mu = 0, \lambda \neq 0$ için

$$U_{2,12}(\xi) = -m^2\left(\frac{C}{(C\left(-256\lambda^2 m^5\mu^2\frac{t^\alpha}{\alpha} + m\frac{x^\beta}{\beta}\right) + D)}\right)^2$$

bulunur.

Burada $\xi = (-256\lambda^2 m^5 \mu^2 \frac{t^\alpha}{\alpha} + m\frac{x^\beta}{\beta})$ dir.

3.2.2.3 Uyumlu Kesirli (2+1) Boyutlu CBS(Calogero-Bogoyavlenskii-Schiff) Denklemi

Aşağıdaki uyumlu kesirli (2+1) boyutlu CBS diferansiyel denklemini ele alalım: (Moatimid ve diğerleri 2013)

$$T_x^\beta T_t^\alpha u + T_x^\beta T_x^\beta T_x^\beta T_y^\theta u + 4T_x^\beta u T_x^\beta T_y^\theta u + 2T_x^\beta T_x^\beta u T_y^\theta y = 0, \tag{3.2.22}$$

Burada $t > 0$, $0 < \alpha, \beta, \theta \le 1$ dir. Lineer olmayan evrim denklemleri (NLEE), optik lifler, katı hal fiziği, akışkanlar mekaniği, plazma fiziği, ısı akışı ve dalga yayılma olayları, kuantum mekaniği, sığ su dalgalarının yayılması vb. gibi çeşitli bilimsel ve mühendislik alanlarında önemli bir rol oynamaktadır. CBS denklemi de bu denklemlere bir örnektir.

(3.1.38) değişken dönüşümü (3.2.22) denklemine uygulanırsa

$$kmU'' + m^3 nU^{(4)} + 4m^2 nU'U'' + 2m^2 nU''U' = 0. \qquad (3.2.23)$$

elde edilir.(3.2.23) denklemi integrasyon sabitini sıfır alarak integrallenirse

$$kmU' + m^3 nU''' + 3m^2 n(U')^2 = 0 \qquad (3.2.24)$$

bulunur. (3.2.24) deki U''' ve $(U')^2$ terimlerinin kullanılmasıyla yapılan dengeleme işleminden

$$N + 3 = 2N + 2,$$
$$N = 1,$$

bulunur. Farz edelim ki (3.2.24) in çözümü aşağıdaki şekilde olsun:

$$U(\xi) = a_0 + a_1\left(\frac{G'}{G^2}\right) + b_1\left(\frac{G'}{G^2}\right)^{-1}. \qquad (3.2.25)$$

Burada $a_0 \neq 0$ ve a_1, b_1'ler hepsi birden sıfır olmayan sabitlerdir. (3.2.2) ve (3.2.25) denklemlerinin kullanılmasıyla U''', $(U')^2, U'$ değerleri hesaplanır. Bulunan bu değerlerin (3.2.24) de yerine yazılmasıyla ve $\left(\frac{G'}{G^2}\right)^k$ $(k = 0,1)$ nin aynı dereceye sahip terimlerinin katsayılarının sıfıra eşitlenmesiyle aşağıda verilen cebirsel denklem sistemi elde edilir:

$$3na_1^2\lambda^2 m^2 + 6na_1\lambda^3 m^3 = 0,$$

$$6\mu na_1^2\lambda m^2 + 8\mu na_1\lambda^2 m^3 - 6b_1 na_1\lambda^2 m^2 + ka_1\lambda m = 0,$$

$$3na_1^2 m^2\mu^2 - 12na_1 b_1\lambda m^2\mu + 2na_1\lambda m^3\mu^2 + ka_1 m\mu + 3nb_1^2\lambda^2 m^2 - 2nb_1\lambda^2 m^3\mu - kb_1\lambda m = 0,$$

$$6\lambda nb_1^2 m^2\mu - 8\lambda nb_1 m^3\mu^2 - 6a_1 nb_1 m^2\mu^2 - kb_1 m\mu = 0,$$

$$3nb_1^2 m^2\mu^2 - 6nb_1 m^3\mu^3 = 0.$$

Elde edilen denklem sisteminin çözümü

$$a_1=-2\lambda m,\qquad b_1=2m\mu,\qquad k=16\lambda m^2\mu n: \tag{3.2.26}$$

şeklindedir. (3.2.26) 'da bulunan sabitler (3.2.25) de yerine yazılırsa

$$U(\xi)=a_0-2\lambda m\Big(\frac{G'}{G^2}\Big)+2m\mu\Big(\frac{G'}{G^2}\Big)^{-1} \tag{3.2.27}$$

bulunur. (3.2.3) denkleminin (3.2.27)'de yerine yazılıp (3.1.38) dönüşümünün kullanılmasıyla (3.2.22) denkleminin aşağıdaki şekilde verilen seyahat eden dalga çözümleri elde edilir.

$\lambda\mu>0$ için

$$U_{2,13}(\xi)=a_0-2\lambda m\left(\sqrt{\frac{\mu}{\lambda}}\Big(\frac{C\cos\sqrt{\mu\lambda}\xi+D\sin\sqrt{\mu\lambda}\xi}{D\cos\sqrt{\mu\lambda}\xi-C\sin\sqrt{\mu\lambda}\xi}\Big)\right)$$
$$+2m\mu\left(\sqrt{\frac{\mu}{\lambda}}\Big(\frac{C\cos\sqrt{\mu\lambda}\xi+D\sin\sqrt{\mu\lambda}\xi}{D\cos\sqrt{\mu\lambda}\xi-C\sin\sqrt{\mu\lambda}\xi}\Big)\right)^{-1},$$

$\lambda\mu<0$ için

$$U_{2,14}(\xi)=a_0-2\lambda m\Big(-\sqrt{\frac{|\mu\lambda|}{\lambda}}\,\frac{C\sinh(2\sqrt{|\mu\lambda|}\xi)+C\cosh(2\sqrt{|\mu\lambda|}\xi)+D}{C\sinh(2\sqrt{|\mu\lambda|}\xi)+C\cosh(2\sqrt{|\mu\lambda|}\xi)-D}\Big)$$
$$+2m\mu\Big(-\sqrt{\frac{|\mu\lambda|}{\lambda}}\,\frac{C\sinh(2\sqrt{|\mu\lambda|}\xi)+C\cosh(2\sqrt{|\mu\lambda|}\xi)+D}{C\sinh(2\sqrt{|\mu\lambda|}\xi)+C\cosh(2\sqrt{|\mu\lambda|}\xi)-D}\Big)^{-1},$$

$\mu=0,\lambda\neq 0$ için

$$U_{2,15}(\xi)=a_0+2\Big(\frac{C}{(C(16\lambda m^2\mu n\frac{t^\alpha}{\alpha}+m\frac{x^\beta}{\beta}+n\frac{y^\theta}{\theta})+D)}\Big)$$

bulunur.

Burada $\xi=(16\lambda m^2\mu n\frac{t^\alpha}{\alpha}+m\frac{x^\beta}{\beta}+n\frac{y^\theta}{\theta})$ dir.

3.2.2.4 Uyumlu Kesirli (2+1)- Boyutlu AKNS(Ablowitz-Kaup-Newell-Segur) Denklemi

Aşağıdaki uyumlu kesirli AKNS diferansiyel denklemini ele alalım: (Inan ve diğ. 2017)

$$4T_x^{\beta}T_t^{\alpha}u+T_x^{\beta}T_x^{\beta}T_x^{\beta}T_y^{\theta}u+8T_x^{\beta}T_y^{\theta}uT_x^{\beta}u+4T_y^{\theta}uT_x^{\beta}T_x^{\beta}u-aT_x^{\beta}T_x^{\beta}u=0, \qquad (3.2.28)$$

Burada $t>0$, $0<\alpha,\beta\leq 1$ dir. Belirli bir düzensiz ortamdaki soliter dalgalarını tanımlayan izospektral olmayan NLEE'ler genellikle zamana bağlı spektrum probleminin sonucudur. 1974'te Ablowitz, Kaup, Newell ve Segursıfır eğrilik denkleminden izospektral bir NLEE hiyerarşisini AKNS denklemiyle bulmuştur.

(3.1.38) değişken dönüşümü (3.2.28) denklemine uygulanırsa

$$4kmU''+m^3nU^{(4)}+8m^2nU''U'+4m^2nU'U''-am^2U''=0. \qquad (3.2.29)$$

elde edilir.(3.2.29) denklemi integrasyon sabitini sıfır alarak integrallenirse

$$(4k-am)U'+m^2nU'''+6mn(U')^2=0. \qquad (3.2.30)$$

bulunur. (3.2.30) deki U''' ve $(U')^2$ terimlerinin kullanılmasıyla yapılan dengeleme işleminden

$$N+3=2N+2,$$
$$N=1,$$

bulunur. Farz edelim ki (3.2.30) in çözümü aşağıdaki şekilde olsun:

$$U(\xi)=a_0+a_1\left(\frac{G'}{G^2}\right)+b_1\left(\frac{G'}{G^2}\right)^{-1}. \qquad (3.2.31)$$

Burada $a_0\neq 0$ ve a_1,b_1'ler hepsi birden sıfır olmayan sabitlerdir.

(3.2.2) ve (3.2.31) denklemlerinin kullanılmasıyla U', U''' ve $(U')^2$ değerleri hesaplanır. Bulunan bu değerlerin (3.2.30)'da yerine yazılmasıyla ve $\left(\frac{G'}{G^2}\right)^k$ $(k=0,1)$ nin aynı dereceye sahip terimlerinin katsayılarının sıfıra eşitlenmesiyle aşağıda verilen cebirsel denklem sistemi elde edilir:

$$6na_1^2\lambda^2 m+6na_1\lambda^3 m^2=0,$$

$$12\mu na_1^2\lambda m+8\mu na_1\lambda^2 m^2-12b_1na_1\lambda^2 m-aa_1\lambda m+4ka_1\lambda=0,$$

$$6na_1^2 m\mu^2-24na_1b_1\lambda m\mu+2na_1\lambda m^2\mu^2-aa_1 m\mu+4ka_1\mu+6nb_1^2\lambda^2 m-2nb_1\lambda^2 m^2\mu$$
$$+ab_1\lambda m-4kb_1\lambda=0,$$

$$12\lambda nb_1^2 m\mu-8\lambda nb_1 m^2\mu^2-12a_1nb_1m\mu^2+ab_1m\mu-4kb_1\mu=0,$$

$$6nb_1^2 m\mu^2-6nb_1m^2\mu^3=0.$$

Elde edilen denklem sisteminin çözümü

$$a_1=-\lambda m,\ \ b_1=2m\mu,\quad k=\frac{m(a+16\lambda m\mu n)}{4}: \tag{3.2.32}$$

şeklindedir. (3.2.32) 'de bulunan sabitler (3.2.31)'de yerine yazılırsa

$$U(\xi)=a_0-\lambda m\left(\frac{G'}{G^2}\right)+2m\mu\left(\frac{G'}{G^2}\right)^{-1} \tag{3.2.33}$$

bulunur. (3.2.3) denkleminin (3.2.33)'de yerine yazılıp (3.1.38) dönüşümünün kullanılmasıyla (3.2.28) denkleminin aşağıdaki şekilde verilen seyahat eden dalga çözümleri elde edilir.

$\lambda\mu>0$ için

$$U_{2,16}(\xi)=a_0-\lambda m\Big(\sqrt{\frac{\mu}{\lambda}}(\frac{C\cos\sqrt{\mu\lambda}\xi+D\sin\sqrt{\mu\lambda}\xi}{D\cos\sqrt{\mu\lambda}\xi-C\sin\sqrt{\mu\lambda}\xi})\Big)$$
$$+2m\mu\Big(\sqrt{\frac{\mu}{\lambda}}(\frac{C\cos\sqrt{\mu\lambda}\xi+D\sin\sqrt{\mu\lambda}\xi}{D\cos\sqrt{\mu\lambda}\xi-C\sin\sqrt{\mu\lambda}\xi})\Big)^{-1},$$

$\lambda\mu<0$ için

$$U_{2,17}(\xi)=a_0-\lambda m\Big(-\sqrt{\frac{|\mu\lambda|}{\lambda}}\frac{C\sinh(2\sqrt{|\mu\lambda|}\xi)+C\cosh(2\sqrt{|\mu\lambda|}\xi)+D}{C\sinh(2\sqrt{|\mu\lambda|}\xi)+C\cosh(2\sqrt{|\mu\lambda|}\xi)-D}\Big)$$
$$+2m\mu\Big(-\sqrt{\frac{|\mu\lambda|}{\lambda}}\frac{C\sinh(2\sqrt{|\mu\lambda|}\xi)+C\cosh(2\sqrt{|\mu\lambda|}\xi)+D}{C\sinh(2\sqrt{|\mu\lambda|}\xi)+C\cosh(2\sqrt{|\mu\lambda|}\xi)-D}\Big)^{-1},$$

$\mu=0,\lambda\neq 0$ için

$$u_{2,18}(x,t)=a_0+m\Big(\frac{C}{(C(\frac{m(\alpha+16\lambda m\mu n)}{4}\frac{t^\alpha}{\alpha}+m\frac{x^\beta}{\beta}+n\frac{y^\theta}{\theta})+D)}\Big)$$

bulunur.

Burada $\xi=(\frac{m(\alpha+16\lambda m\mu n)}{4}\frac{t^\alpha}{\alpha}+m\frac{x^\beta}{\beta}+n\frac{y^\theta}{\theta})$ dir.

3.2.2.5 Uyumlu Kesirli ZKBBM(ZakharovKuznetsov Benjamin BonaMahony) Denklemi

Aşağıdaki uyumlu kesirli ZKBBM diferansiyel denklemini ele alalım (Tauseef ve Din, 2017):

$$T_t^\alpha u+T_x^\beta u-2auT_x^\beta u-bT_t^\alpha(T_x^\beta T_x^\beta u)=0. \quad (3.2.34)$$

Burada $t>0$, $0<\alpha,\beta\leq 1$, a,b sabittir. Bu denklem uzun dalga rejiminde yerçekimi su dalgalarının bir modellenmesi olarak ortaya çıkar.

(3.1.2) değişken dönüşümü (3.2.34) denklemine uygulanırsa

$$(k+m)U'-2amUU'-bm^2kU''' = 0. \quad (3.2.35)$$

elde edilir.(3.2.35) denklemi integrasyon sabitini sıfır alarak integrallenirse

$$(k+m)U-amU^2-bm^2kU''=0. \quad (3.2.36)$$

bulunur. (3.2.36) deki U'' ve U^2 terimlerinin kullanılmasıyla yapılan dengeleme işleminden

$$N+2=2N,$$
$$N=2.$$

bulunur. Farz edelim ki (3.2.37) in çözümü aşağıdaki şekilde olsun:

$$U(\xi)=a_0+a_1\left(\frac{G'}{G^2}\right)+a_2\left(\frac{G'}{G^2}\right)^2+b_1\left(\frac{G'}{G^2}\right)^{-1}+b_2\left(\frac{G'}{G^2}\right)^{-2}. \quad (3.2.37)$$

Burada $a_0 \neq 0$ ve a_1, a_2, b_1, b_2'ler hepsi birden sıfır olmayan sabitlerdir.

(3.2.2) ve (3.2.37) denklemlerinin kullanılmasıyla U^2, U'' değerleri hesaplanır. Bulunan bu değerlerin (3.2.37) de yerine yazılmasıyla ve $\left(\frac{G'}{G^2}\right)^k$ $(k=0,1)$ nin aynı dereceye sahip terimlerinin katsayılarının sıfıra eşitlenmesiyle aşağıda verilen cebirsel denklem sistemi elde edilir:

$$-aa_2^2m-6bka_2\lambda^2m^2=0,$$

$$-2a_1bk\lambda^2m^2-2aa_1a_2m=0,$$

$$a_2k+a_2m-aa_1^2m-2aa0a_2m-8a_2bk\lambda m^2\mu=0,$$

$$a_1k+a_1m-2aa0a_1m-2aa_2b_1m-2a_1bk\lambda m^2\mu=0,$$

$$a0k+a0m-aa0^2m-2aa_1b_1m-2aa_2b_2m-2bb_2k\lambda^2m^2-2a_2bkm^2\mu^2=0,$$

$$b_1k + b_1m - 2aa0b_1m - 2aa_1b_2m - 2bb_1k\lambda m^2\mu = 0,$$

$$b_2k + b_2m - ab_1^2m - 2aa0b_2m - 8bb_2k\lambda m^2\mu = 0,$$

$$-2bb_1km^2\mu^2 - 2ab_1b_2m = 0,$$

$$-ab_2^2m - 6bkb_2m^2\mu^2 = 0.$$

Elde edilen denklem sisteminin çözümleri

1. Durum:

$$a_0 = -\frac{2b\lambda m^2\mu}{a\left(-1+4b\lambda m^2\mu\right)}, \quad a_1 = 0, \quad a_2 = -\frac{6b\lambda^2 m^2}{a\left(-1+4b\lambda m^2\mu\right)},$$
$$b_1 = 0, \quad b_2 = 0, \quad k = \frac{m}{-1+4b\lambda m^2\mu}: \tag{3.2.38}$$

şeklindedir. (3.2.38) 'de bulunan sabitler (3.2.37) de yerine yazılırsa

$$U(\xi) = -\frac{2b\lambda m^2\mu}{a\left(-1+4b\lambda m^2\mu\right)} - \frac{6b\lambda^2 m^2}{a\left(-1+4b\lambda m^2\mu\right)}^2. \tag{3.2.39}$$

bulunur. (3.2.3) denkleminin (3.2.39)'da yerine yazılıp (3.1.2) dönüşümünün kullanılmasıyla (3.2.34) denkleminin aşağıdaki şekilde verilen seyahat eden dalga çözümleri elde edilir.

$\lambda\mu > 0$ için

$$u_{2,19}(x,t) = -\frac{2b\lambda m^2\mu}{a\left(-1+4b\lambda m^2\mu\right)}$$
$$-\frac{6bm^2\mu^2}{a\left(-1+4b\lambda m^2\mu\right)}.$$
$$\left(\frac{C\cos\sqrt{\mu\lambda}\left(\frac{m}{-1+4b\lambda m^2\mu}\frac{t^\alpha}{\alpha}+m\frac{x^\beta}{\beta}\right)+D\sin\sqrt{\mu\lambda}\left(\frac{m}{-1+4b\lambda m^2\mu}\frac{t^\alpha}{\alpha}+m\frac{x^\beta}{\beta}\right)}{D\cos\sqrt{\mu\lambda}\left(\frac{m}{-1+4b\lambda m^2\mu}\frac{t^\alpha}{\alpha}+m\frac{x^\beta}{\beta}\right)-C\sin\sqrt{\mu\lambda}\left(\frac{m}{-1+4b\lambda m^2\mu}\frac{t^\alpha}{\alpha}+m\frac{x^\beta}{\beta}\right)}\right)^2,$$

$\lambda\mu < 0$ için

$$u_{2,20}(x,t) = -\frac{2b\lambda m^2\mu}{a\left(-1+4b\lambda m^2\mu\right)}$$

$$-\frac{6bm^2\mu^2\lambda^2}{a\left(-1+4b\lambda m^2\mu\right)}.$$

$$\left(\frac{C\sinh(2\sqrt{|\mu\lambda|}\left(\frac{m}{-1+4b\lambda m^2\mu}\frac{t^\alpha}{\alpha}+m\frac{x^\beta}{\beta}\right))+C\cosh(2\sqrt{|\mu\lambda|}\left(\frac{m}{-1+4b\lambda m^2\mu}\frac{t^\alpha}{\alpha}+m\frac{x^\beta}{\beta}\right))+D}{C\sinh(2\sqrt{|\mu\lambda|}\left(\frac{m}{-1+4b\lambda m^2\mu}\frac{t^\alpha}{\alpha}+m\frac{x^\beta}{\beta}\right))+C\cosh(2\sqrt{|\mu\lambda|}\left(\frac{m}{-1+4b\lambda m^2\mu}\frac{t^\alpha}{\alpha}+m\frac{x^\beta}{\beta}\right))-D}\right)^2,$$

$\mu = 0, \lambda \neq 0$ için

$$u_{2,21}(x,t) = -\frac{6bm^2}{-a}\left(\frac{C}{(C\left(\frac{m}{-1+4b\lambda m^2\mu}\frac{t^\alpha}{\alpha}+m\frac{x^\beta}{\beta}\right)+D)}\right)^2$$

bulunur.

2. Durum:

$$\begin{aligned} &a_0 = \frac{4b\lambda m^2\mu}{a\left(-1+16b\lambda m^2\mu\right)}, \quad a_1 = 0, \quad a_2 = -\frac{6b\lambda^2 m^2}{a\left(-1+16b\lambda m^2\mu\right)}, \\ &b_1 = 0, \quad b_2 = -\frac{6bm^2\mu^2}{a\left(-1+16b\lambda m^2\mu\right)}, \quad k = \frac{m}{-1+16b\lambda m^2\mu} \end{aligned} \tag{3.2.40}$$

şeklindedir. (3.2.40) 'da bulunan sabitler (3.2.37)'de yerine yazılırsa

$$U(\xi)=\frac{4b\lambda m^2\mu}{a\left(-1+16b\lambda m^2\mu\right)}-\frac{6b\lambda^2m^2}{a\left(-1+16b\lambda m^2\mu\right)}\left(\frac{G'}{G^2}\right)^2-\frac{6bm^2\mu^2}{a\left(-1+16b\lambda m^2\mu\right)}\left(\frac{G'}{G^2}\right)^{-2}$$

(3.2.41)

bulunur. (3.2.3) denkleminin (3.2.41)'de yerine yazılıp (3.1.2) dönüşümünün kullanılmasıyla (3.2.34) denkleminin aşağıdaki şekilde verilen seyahat eden dalga çözümleri elde edilir.

$\lambda\mu>0$ için

$$u_{2,22}(x,t)=\frac{4b\lambda m^2\mu}{a\left(-1+16b\lambda m^2\mu\right)}-\frac{6bm^2\mu^2}{a\left(-1+16b\lambda m^2\mu\right)}.$$

$$\left(\frac{C\cos\sqrt{\mu\lambda}\left(\frac{m}{-1+16b\lambda m^2\mu}\frac{t^\alpha}{\alpha}+m\frac{x^\beta}{\beta}\right)+D\sin\sqrt{\mu\lambda}\left(\frac{m}{-1+16b\lambda m^2\mu}\frac{t^\alpha}{\alpha}+m\frac{x^\beta}{\beta}\right)}{D\cos\sqrt{\mu\lambda}\left(\frac{m}{-1+16b\lambda m^2\mu}\frac{t^\alpha}{\alpha}+m\frac{x^\beta}{\beta}\right)-C\sin\sqrt{\mu\lambda}\left(\frac{m}{-1+16b\lambda m^2\mu}\frac{t^\alpha}{\alpha}+m\frac{x^\beta}{\beta}\right)}\right)^2$$

$$-\frac{6bm^2\lambda^2}{a\left(-1+16b\lambda m^2\mu\right)}.$$

$$\left(\frac{D\cos\sqrt{\mu\lambda}\left(\frac{m}{-1+16b\lambda m^2\mu}\frac{t^\alpha}{\alpha}+m\frac{x^\beta}{\beta}\right)-C\sin\sqrt{\mu\lambda}\left(\frac{m}{-1+16b\lambda m^2\mu}\frac{t^\alpha}{\alpha}+m\frac{x^\beta}{\beta}\right)}{C\cos\sqrt{\mu\lambda}\left(\frac{m}{-1+16b\lambda m^2\mu}\frac{t^\alpha}{\alpha}+m\frac{x^\beta}{\beta}\right)+D\sin\sqrt{\mu\lambda}\left(\frac{m}{-1+16b\lambda m^2\mu}\frac{t^\alpha}{\alpha}+m\frac{x^\beta}{\beta}\right)}\right)^2,$$

$\lambda\mu<0$ için

$$u_{2,23}(x,t)=\frac{4b\lambda m^2\mu}{a\left(-1+16b\lambda m^2\mu\right)}-\frac{6b\lambda^2 m^2\mu^2}{a\left(-1+16b\lambda m^2\mu\right)}.$$

$$\left(\frac{C\sinh(2\sqrt{|\mu\lambda|}\left(\frac{m}{-1+16b\lambda m^2\mu}\frac{t^\alpha}{\alpha}+m\frac{x^\beta}{\beta}\right))+C\cosh(2\sqrt{|\mu\lambda|}\left(\frac{m}{-1+16b\lambda m^2\mu}\frac{t^\alpha}{\alpha}+m\frac{x^\beta}{\beta}\right))+D}{C\sinh(2\sqrt{|\mu\lambda|}\left(\frac{m}{-1+16b\lambda m^2\mu}\frac{t^\alpha}{\alpha}+m\frac{x^\beta}{\beta}\right))+C\cosh(2\sqrt{|\mu\lambda|}\left(\frac{m}{-1+16b\lambda m^2\mu}\frac{t^\alpha}{\alpha}+m\frac{x^\beta}{\beta}\right))-D}\right)^2$$

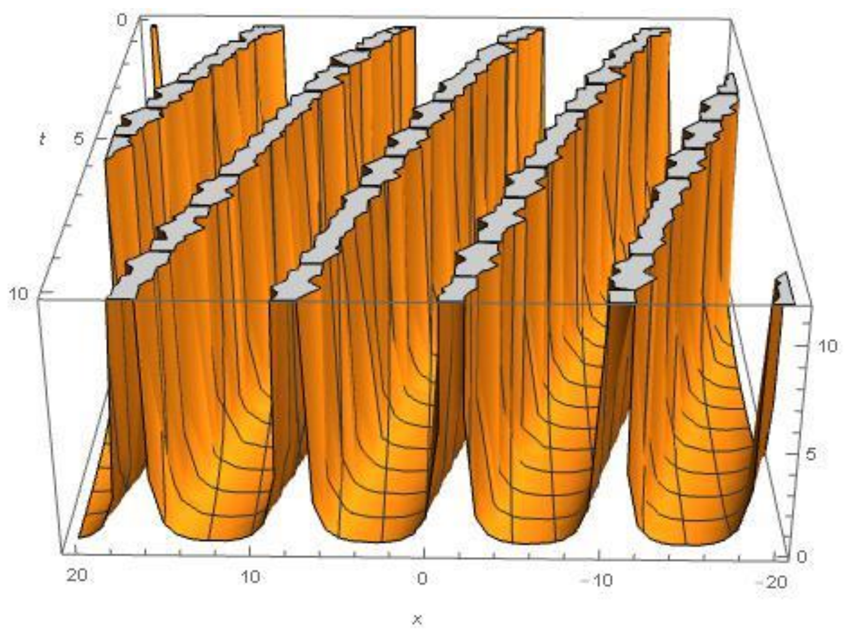
$$-\frac{6bm^2}{a\left(-1+16b\lambda m^2\mu\right)}.$$

$$\left(\frac{C\sinh(2\sqrt{|\mu\lambda|}\left(\frac{m}{-1+16b\lambda m^2\mu}\frac{t^\alpha}{\alpha}+m\frac{x^\beta}{\beta}\right))+C\cosh(2\sqrt{|\mu\lambda|}\left(\frac{m}{-1+16b\lambda m^2\mu}\frac{t^\alpha}{\alpha}+m\frac{x^\beta}{\beta}\right))+D}{C\sinh(2\sqrt{|\mu\lambda|}\left(\frac{m}{-1+16b\lambda m^2\mu}\frac{t^\alpha}{\alpha}+m\frac{x^\beta}{\beta}\right))+C\cosh(2\sqrt{|\mu\lambda|}\left(\frac{m}{-1+16b\lambda m^2\mu}\frac{t^\alpha}{\alpha}+m\frac{x^\beta}{\beta}\right))-D}\right)^{-2},$$

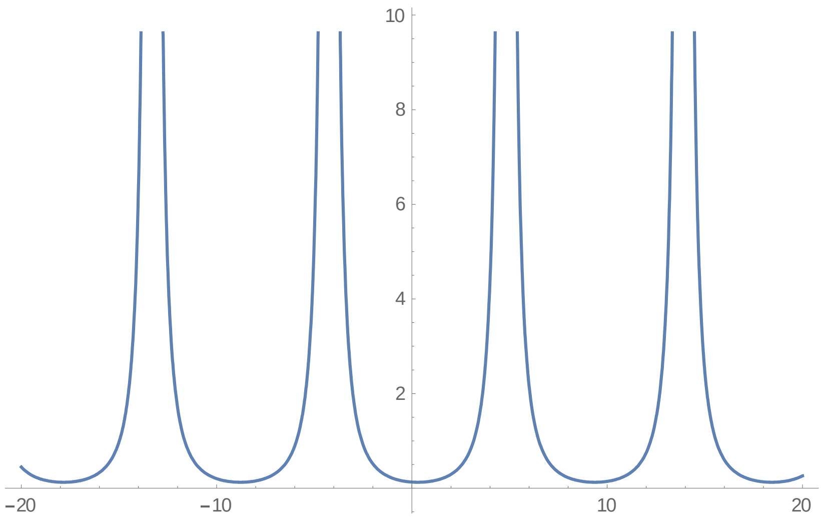
$\mu=0,\lambda\neq 0$ için

$$u_{2,24}(x,t)=-\frac{6bm^2}{-a}\left(\frac{C}{(C\left(\frac{m}{-1+16b\lambda m^2\mu}\frac{t^\alpha}{\alpha}+m\frac{x^\beta}{\beta}\right)+D)}\right)^2$$

bulunur.



Şekil 3.5: $u_{2,19}(x,t)$ çözümünün üç boyutlu grafiği.



Şekil 3.6: $u_{2,19}(x,1)$ çözümünün iki boyutlu grafiği.

3.3 Kudryashov Metodu

3.3.1 Yöntem

(3.1.1) ile verilen lineer olmayan uyumlu kesirli kısmi diferansiyel denklemini ele alalım. (3.1.2) dönüşümü, (3.1.1) denklemine uygulanırsa ve Teorem (2.1.5) ' de verilen zincir kuralı kullanılırsa (3.1.3) denklemi elde edilir. Varsayalım ki (3.1.3) denkleminin çözümü

$$U(\xi)=\sum_{i=0}^{N} a_i Q^i(\xi) \tag{3.3.1}$$

formunda $Q(\xi)$ 'nin polinom açılımı şeklinde olsun.

(3.3.1) denkleminde verilen $Q(\xi)$ fonksiyonu (Korkmaz, 2016)

$$Q(\xi)=\frac{1}{1+da^{\xi}} \tag{3.3.2}$$

olup

$$Q'=(Q^2-Q)\ln a \tag{3.3.3}$$

diferansiyel denklemini sağladığını kabul edelim. Burada $Q' = \frac{dQ(\xi)}{d\xi}$ ve $a_0,...,a_N$, a ve d ler sabitlerdir.

(3.3.1) açılımı (3.1.3) de yerine yazılır. (3.1.3) denklemindeki en yüksek mertebeli lineer terim ve en yüksek dereceli lineer olmayan terim arasında dengeleme işlemi yapılmak suretiyle N değeri hesaplanır. Bulunan N değeri için (3.3.1) denklemi (3.1.3) denkleminde yerine yazılarak elde edilen denklemde $Q(\xi)$ ile aynı dereceye sahip terimlerin katsayılarının sıfıra eşitlenmesiyle $a_0,...,a_N$, a ve d bilinmeyenli cebirsel denklem sistemi elde edilir. Elde edilen cebirsel denklem sisteminin çözülmesiyle bilinmeyen sabitler bulunur. Daha sonra bulunan sabitler (3.3.1) denkleminde yerine konulursa ve (3.1.2) dönüşümü kullanılırsa (3.1.1) uyumlu kesirli diferansiyel denkleminin seyahat eden dalga çözümlerini elde edilir.

3.3.2 Uygulamalar

3.3.2.1 Uyumlu Kesirli CD(Calogero-Degasperis) Denklemi

Aşağıdaki uyumlu kesirli CD diferansiyel denklemini ele alalım: (Tauseef ve Din, 2017)

$$T_t^{\alpha}T_x^{\beta}u - 4T_x^{\beta}u.T_x^{\beta}T_x^{\beta}u - 2T_y^{\theta}u.T_x^{\beta}T_x^{\beta}u + T_y^{\theta}T_x^{\beta}T_x^{\beta}T_x^{\beta}u = 0 . \tag{3.3.4}$$

Burada $t > 0$, $0 < \alpha, \beta, \theta \leq 1$dir. CD diferansiyel denklemi, sıvı mekanik, astrofizik, katı hal fiziği, plazmafiziği, kimyasal kinematik, kimyasal kimya, optik lif ve jeokimya gibi bilimsel modellemelerde ortaya çıkar.

(3.1.38) değişken dönüşümü (3.3.4) denklemine uygulanırsa ve elde edilen denklem integrasyon sabitini sıfır alarak integrallenirse

$$m^3nU''' - (2m^3 + nm^2)(U')^2 + kmU' = 0 \tag{3.3.5}$$

bulunur. (3.3.5) deki U''' ve $\left(U'\right)^2$ terimlerinin kullanılmasıyla yapılan dengeleme işleminden

$$N+3=2N+2,$$
$$N=1,$$

olur. Farz edelim ki (3.3.5) in çözümü aşağıdaki şekilde olsun:

$$U(\xi)=a_0+a_1Q(\xi),\ a_0,a_1\neq 0. \tag{3.3.6}$$

(3.3.6) ve (3.3.3) denklemlerinin kullanılmasıyla

$$U'(\xi)=a_1(Q^2-Q)\ln a, \tag{3.3.7}$$

$$U''(\xi)=lna^2(2a_1Q^3-3a_1Q^2+a_1Q), \tag{3.3.8}$$

$$U'''\left(\xi\right)=-lna^3(-6a_1Q^4+12a_1Q^3-7a_1Q^2+a_1Q), \tag{3.3.9}$$

denklemleri elde edilir. (3.3.7)-(3.3.9) denklemleri (3.3.5) da yerine yazılmasıyla ve $Q(\xi)^k$ $\left(k=0,1\right)$ nin aynı dereceye sahip terimlerinin katsayılarının sıfıra eşitlenmesiyle aşağıda verilen cebirsel denklem sistemi elde edilir:

$$6(\ln a)^3a_1m^3n-(\ln a)^2a_1^2(2m^3+nm^2)=0,$$

$$2(\ln a)^2a_1^2(2m^3+nm^2)-12(\ln a)^3a_1m^3n=0,$$

$$7(\ln a)^3a_1m^3n-(\ln a)^2a_1^2(2m^3+nm^2)+(\ln a)a_1km=0,$$

$$-a_1n(\ln a)^3m^3-a_1k(\ln a)m=0.$$

Elde edilen denklem sisteminin çözümü

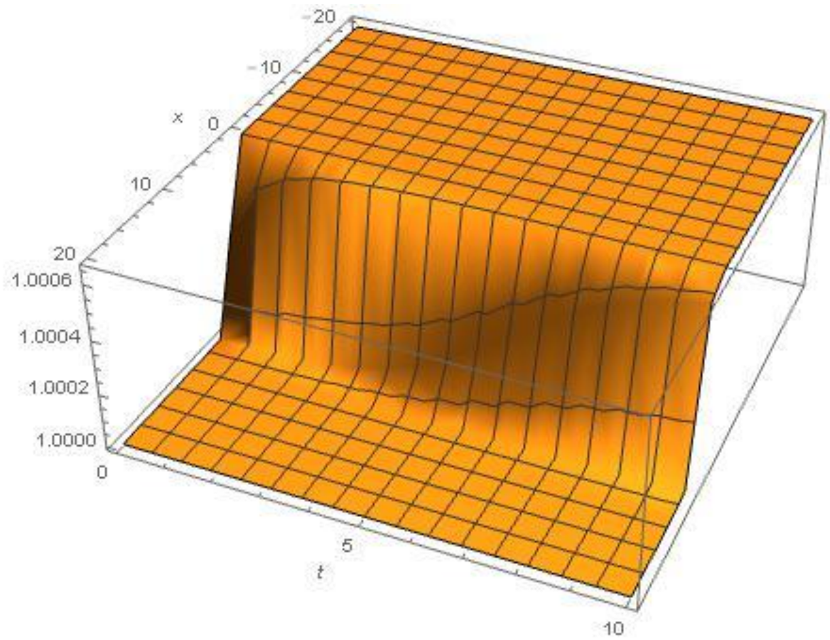
$$a_1=\frac{6\ln amn}{2m+n},\qquad k=-(\ln a)^2nm^2 \tag{3.3.10}$$

şeklindedir. (3.3.10) 'de bulunan sabitler (3.3.6) de yerine yazılırsa

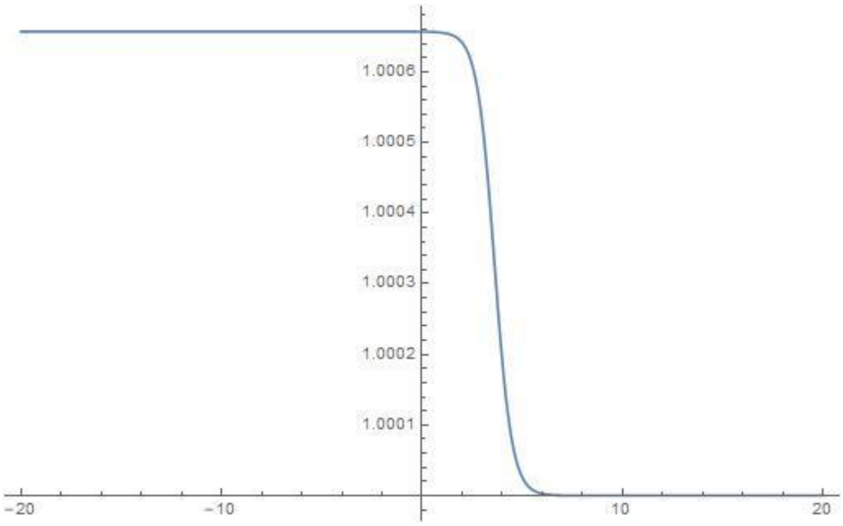
$$U(\xi) = a_0 + \frac{6\ln amn}{2m+n} Q(\xi) \tag{3.3.11}$$

bulunur. (3.3.11) denkleminin (3.3.6) da yerine yazılıp (3.1.38) dönüşümünün kullanılmasıyla (3.3.4) denkleminin aşağıdaki şekilde verilen seyahat eden dalga çözümü elde edilir.

$$u_{3,1}(x,y,t) = a_0 + \frac{6(\ln a)mn}{2m+n}(1+da^{-(\ln a)^2 nm^2 \frac{t^\alpha}{\alpha} + m\frac{x^\beta}{\beta} + n\frac{y^\theta}{\theta}})^{-1}.$$



Şekil 3.7 : $u_{3,1}(x,1,t)$ çözümünün üç boyutlu grafiği.



Şekil 3.8: $u_{3,1}(x,1,1)$ çözümünün iki boyutlu grafiği.

3.3.2.2 Uyumlu Kesirli Bogoyavlenskii Denklemi

Aşağıdaki uyumlu kesirli Bogoyavlenskii diferansiyel denklemini ele alalım: (Mohammed, 2015)

$$\begin{aligned} 4T_t^{\alpha}u + T_x^{\beta}T_x^{\beta}T_y^{\theta}u - 4u^2T_y^{\theta}u - 4T_x^{\beta}uv = 0, \\ uT_y^{\theta}u = T_x^{\beta}v, \end{aligned} \tag{3.3.12}$$

burada $t > 0$, $0 < \alpha, \beta, \theta \leq 1$ dir. Bogoyavlenskii denklemi, gerçek dünyadaki izospektral saçılma problemleriyle ilişkili denklemlerden biridir.

(3.1.38) değişken dönüşümü (3.3.12) denklemine uygulanırsa

$$4kU' + m^2nU''' - 4nU^2U' - 4mU'V = 0, \tag{3.3.13}$$

$$nUU' = mV', \tag{3.3.14}$$

elde edilir. (3.3.13) ve (3.3.14) denklemleri integrasyon sabitini sıfır alarak integrallenirse ve $V = \frac{n}{2m}U^2$, (3.3.13) da yerine yazılırsa

$$4kU' + m^2nU''' - 6nU^2U' = 0 \tag{3.3.15}$$

bulunur. (3.3.15) deki U'''' ve U^2U' terimlerinin kullanılmasıyla yapılan dengeleme işleminden

$$N+3=2N+N+1,\quad N=1,$$

olur. Farz edelim ki (3.3.15) in çözümü aşağıdaki şekilde olsun:

$$U(\xi)=a_0+a_1Q(\xi),\quad a_0,a_1\neq 0. \tag{3.3.16}$$

(3.3.3) ve (3.3.16) denklemlerinin kullanılmasıyla elde edilen $U(\xi)$ nin türevleri ve kendisi (3.3.16)'da yerine yazılmasıyla ve $Q(\xi)^k\ (k=0,1)$ nin aynı dereceye sahip terimlerinin katsayılarının sıfıra eşitlenmesiyle aşağıda verilen cebirsel denklem sistemi elde edilir:

$$2n(\ln a)^2a_1m^2-2na_1^3=0,$$

$$-3n(\ln a)^2a_1m^2-6a_0na_1^2=0,$$

$$a_1n(\ln a)^2m^2-6a_1na_0^2+4a_1k=0,$$

$$-2na_0^3+4ka_0=0.$$

Elde edilen denklem sisteminin çözümü

$$a_0=\frac{(\ln a)m}{2},\quad a_1=-(\ln a)m,\quad k=\frac{8k}{(\ln a)^2m^2} \tag{3.3.17}$$

şeklindedir. (3.3.17) 'de bulunan sabitler (3.3.16) de yerine yazılırsa

$$U(\xi)=\frac{(\ln a)m}{2}-(\ln a)mQ(\xi) \tag{3.3.18}$$

bulunur. (3.3.2) denkleminin (3.3.18) de yerine yazılıp (3.1.38) dönüşümünün kullanılmasıyla (3.3.12) denkleminin aşağıdaki şekilde verilen seyahat eden dalga çözümü elde edilir.

$$u_{3,2}(x,y,t)=\frac{(\ln a)m}{2}-(\ln a)m(1+da^{\frac{8k}{(\ln a)^2 m^2}\frac{t^{\alpha}}{\alpha}+m\frac{x^{\beta}}{\beta}+n\frac{y^{\theta}}{\theta}})^{-1},$$

$$v_{3,2}(x,y,t)=\frac{n}{2m}\left(\frac{(\ln a)m}{2}-(\ln a)m(1+da^{\frac{8k}{(\ln a)^2 m^2}\frac{t^{\alpha}}{\alpha}+m\frac{x^{\beta}}{\beta}+n\frac{y^{\theta}}{\theta}})^{-1}\right)^2.$$

3.3.2.3 Uyumlu Kesirli Kadomtsev–Petviashvili Denklemi

Aşağıdaki uyumlu kesirli Kadomtsev–Petviashvili diferansiyel denklemini ele alalım: (Tauseef ve Din, 2017)

$$T_x^{\beta}(T_t^{\alpha}u-6u.T_x^{\beta}u+T_x^{\beta}T_x^{\beta}u)+3T_y^{\theta}T_y^{\theta}u+3T_z^{\gamma}T_z^{\gamma}u=0, \tag{3.3.19}$$

burada $t>0$, $0<\alpha,\beta,\theta,\gamma\leq 1$ ’dir. KP denklemi,1970’ te Kadomtsev ve Petviashivilitarafından tanıtılmıştır ve lineer olmayan dalga teorisindeki en evrensel modellerden biridir. Lineer olmayan dağıtıcı ortamlardaki yarı düzlem dalgaları açıklar. Su dalgaları için dinamik sistem metodlarının uygulamalarında kullanılmıştır.

(3.1.17) değişken dönüşümü (3.3.29) denklemine uygulanırsa ve integrasyon sabitini sıfır alarak integrallenirse

$$(km+3n^2+3p^2)U-3m^2U^2+m^4U''=0 \tag{3.3.20}$$

elde edilir. (3.3.20) daki U'' ve U^2 terimlerinin kullanılmasıyla yapılan dengeleme işleminden

$$N+2=2N,$$
$$N=2,$$

bulunur. Farz edelim ki (3.3.20) un çözümü aşağıdaki şekilde olsun:

$$U(\xi)=a_0+a_1Q(\xi)+a_2Q(\xi)^2. \tag{3.3.21}$$

Burada $a_0 \neq 0$ ve a_1, a_2 'ler hepsi birden sıfır olmayan sabitlerdir.

(3.3.3) ve (3.3.21) denklemlerinin kullanılmasıyla elde edilen $U(\xi)$ nin türevleri ve kendisi (3.3.20) de yerine yazılmasıyla ve $Q(\xi)^k$ $(k=0,1)$ nin aynı dereceye sahip terimlerinin katsayılarının sıfıra eşitlenmesiyle aşağıda verilen cebirsel denklem sistemi elde edilir:

$$6(\ln a)^2 a_2 m^4 - 3a_2^2 m^2 = 0,$$

$$(2a_1 - 10a_2)(\ln a)^2 m^4 - 6a_1 a_2 m^2 = 0,$$

$$a_2(3n^2 + 3p^2 + km) - 3m^2(a_1^2 + 2a_0 a_2) - (\ln a)^2 m^4 (3a_1 - 4a_2) = 0,$$

$$a_1(3n^2 + 3p^2 + km) + (\ln a)^2 a_1 m^4 - 6a_0 a_1 m^2 = 0,$$

$$a_0(3n^2 + 3p^2 + km) - 3a_0^2 m^2 = 0.$$

Elde edilen denklem sisteminin çözümü

$$\begin{aligned} &a_0 = \frac{(\ln a)^2 m^2}{3}, \quad a_1 = -2(\ln a)^2 m^2, \quad a_2 = 2(\ln a)^2 m^2, \\ &k = \frac{(\ln a)^2 m^4 - 3n^2 - 3p^2}{m}. \end{aligned} \tag{3.3.22}$$

şeklindedir. (3.3.22) 'de bulunan sabitler (3.3.21) de yerine yazılırsa

$$U(\xi) = \frac{(\ln a)^2 m^2}{3} - 2(\ln a)^2 m^2 Q(\xi) + 2(\ln a)^2 m^2 Q(\xi)^2 \tag{3.3.23}$$

bulunur. (3.3.2) denkleminin (3.3.23) de yerine yazılıp (3.1.17) dönüşümünün kullanılmasıyla (3.3.19) denkleminin aşağıdaki şekilde verilen seyahat eden dalga çözümü elde edilir.

$$\begin{aligned} u_{3,3}(x,y,z,t) = \frac{(\ln a)^2 m^2}{3} &- 2(\ln a)^2 m^2 \left(1 + d a^{\frac{(\ln a)^2 m^4 - 3n^2 - 3p^2}{m}\frac{t^\alpha}{\alpha} + m\frac{x^\beta}{\beta} + n\frac{y^\theta}{\theta} + p\frac{z^\gamma}{\gamma}}\right)^{-1} \\ &+ 2(\ln a)^2 m^2 \left(1 + d a^{\frac{(\ln a)^2 m^4 - 3n^2 - 3p^2}{m}\frac{t^\alpha}{\alpha} + m\frac{x^\beta}{\beta} + n\frac{y^\theta}{\theta} + p\frac{z^\gamma}{\gamma}}\right)^{-2}. \end{aligned}$$

3.3.2.4 Uyumlu Kesirli Benjamin–Bona–Mahony Denklemi

Aşağıdaki uyumlu kesirli Benjamin–Bona–Mahony diferansiyel denklemini ele alalım: (Muatjetjeja ve Khalique, 2014)

$$T_t^{\alpha}u + T_x^{\beta}u + uT_x^{\beta}u - T_x^{\beta}T_x^{\beta}T_t^{\alpha}u = 0, \tag{3.3.24}$$

Burada $t > 0$, $0 < \alpha, \beta, \theta \le 1$dir. Bu denklem düzenli uzun dalga denklemi olarak da bilinir ve sığ su dalgalarına ve plazmadaki dalgaların ya da dönen akışkanlardaki Rossby dalgalarının çalışmasında uygulanabilir.

(3.1.2) değişken dönüşümü (3.3.24) denklemine uygulanırsa ve integrasyon sabitini sıfır alarak integrallenirse

$$(k+m)U + \frac{m}{2}U^2 - m^2kU'' = 0 \tag{3.3.25}$$

elde edilir. (3.3.25) deki U'' ve U^2 terimlerinin kullanılmasıyla yapılan dengeleme işleminden

$$N + 2 = 2N,$$
$$N = 2,$$

bulunur. Farz edelim ki (3.3.25) in çözümü aşağıdaki şekilde olsun:

$$U(\xi) = a_0 + a_1Q(\xi) + a_2Q(\xi)^2. \tag{3.3.26}$$

Burada $a_0 \ne 0$ ve a_1, a_2'ler hepsi birden sıfır olmayan sabitlerdir.

(3.3.3) ve (3.3.26) denklemlerinin kullanılmasıyla elde edilen $U(\xi)$ nin türevleri ve kendisinin (3.3.21) de yerine yazılmasıyla ve $Q(\xi)^k$ $(k = 0,1)$ nin aynı dereceye sahip terimlerinin katsayılarının sıfıra eşitlenmesiyle aşağıda verilen cebirsel denklem sistemi elde edilir:

$$-6k(\ln a)^2 a_2m^2 + (a_2^2m)/2 = 0,$$

$$-k(2a_1 - 10a_2)(\ln a)^2 m^2 + a_1 a_2 m = 0,$$

$$(m(a_1^2 + 2a_0 a_2))/2 + a_2(k+m) + (\ln a)^2 km^2(3a_1 - 4a_2) = 0,$$

$$a_1(k+m) + a_0 a_1 m - (\ln a)^2 a_1 km^2 = 0,$$

$$(ma_0^2)/2 + (k+m)a_0 = 0.$$

Elde edilen denklem sisteminin çözümü

$$a_0 = \frac{a_2}{6},\quad a_1 = -a_2,\quad k = \pm\frac{1}{12}\left(\frac{12\sqrt{a_2}}{\sqrt{-(\ln a)^2(12+a_2)}} + \frac{a_2^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{-(\ln a)^2(12+a_2)}}\right),$$
$$m = \mp\frac{\sqrt{a_2}}{\sqrt{-(\ln a)^2(12+a_2)}} \tag{3.3.27}$$

şeklindedir. (3.3.27) 'de bulunan sabitler (3.3.26) de yerine yazılırsa ve (3.1.2) dönüşümünün kullanılırsa (3.3.24) denkleminin aşağıdaki şekilde verilen seyahat eden dalga çözümü elde edilir.

$$u_{3,4}(x,t) = \frac{a_2}{6} - a_2\left(1 + da^{\left(\pm\frac{1}{12}\left(\frac{12\sqrt{a_2}}{\sqrt{-(\ln a)^2(12+a_2)}} + \frac{a_2^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{-(\ln a)^2(12+a_2)}}\right)\frac{t^\alpha}{\alpha} + \mp\frac{\sqrt{a_2}}{\sqrt{-(\ln a)^2(12+a_2)}}\frac{x^\beta}{\beta}\right)}\right)^{-1}$$
$$+ a_2\left(1 + da^{\left(\pm\frac{1}{12}\left(\frac{12\sqrt{a_2}}{\sqrt{-(\ln a)^2(12+a_2)}} + \frac{a_2^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{-(\ln a)^2(12+a_2)}}\right)\frac{t^\alpha}{\alpha} + \mp\frac{\sqrt{a_2}}{\sqrt{-(\ln a)^2(12+a_2)}}\frac{x^\beta}{\beta}\right)}\right)^{-2}.$$

3.3.2.5 Uyumlu Kesirli Klein-Gordon Denklemi

Aşağıdaki uyumlu kesirli Klein-Gordon diferansiyel denklemini ele alalım: (Sirendaoreji, 2007)

$$T_t^\alpha T_t^\alpha u - \lambda^2 T_x^\beta T_x^\beta u + \mu u - \nu u^3 = 0, \tag{3.3.28}$$

Burada $t>0$, $0<\alpha,\beta\leq 1$ ve λ , μ , ν sabittir. Klein-Gordon denklemi, kuantum alan teorisi, doğrusal olmayan optik ve katı hal fiziği gibi farklı gerçek dünya uygulamalarında ortaya çıkar.

(3.1.2) değişken dönüşümü (3.3.28) denklemine uygulanırsa

$$(k^2-\lambda^2 m^2)U''+\mu U-\nu U^3=0 \tag{3.3.29}$$

bulunur. (3.3.29) daki U'' ve U^3 terimlerinin kullanılmasıyla yapılan dengeleme işleminden

$$N+2=3N,$$
$$N=1,$$

olur. Farz edelim ki (3.3.29) in çözümü aşağıdaki şekilde olsun:

$$U(\xi)=a_0+a_1Q(\xi).,\ a_0,a_1\neq 0 \tag{3.3.30}$$

(3.3.3) ve (3.3.30) denklemlerinin kullanılmasıyla elde edilen $U(\xi)$ nin türevleri ve kendisi (3.3.29) de yerine yazılmasıyla ve $Q(\xi)^k$ $(k=0,1)$ nin aynı dereceye sahip terimlerinin katsayılarının sıfıra eşitlenmesiyle aşağıda verilen cebirsel denklem sistemi elde edilir:

$$2(\ln a)^2 a_1(-\lambda^2m^2+k^2)-a_1^3\nu=0,$$

$$-3(\ln a)^2 a_1(-\lambda^2m^2+k^2)-3a_0a_1^2\nu=0,$$

$$a_1(-\lambda^2m^2+k^2)(\ln a)^2-3a_1\nu a_0^2+a_1\mu=0,$$

$$-\nu a_0^3+\mu a_0=0.$$

Elde edilen denklem sisteminin çözümü

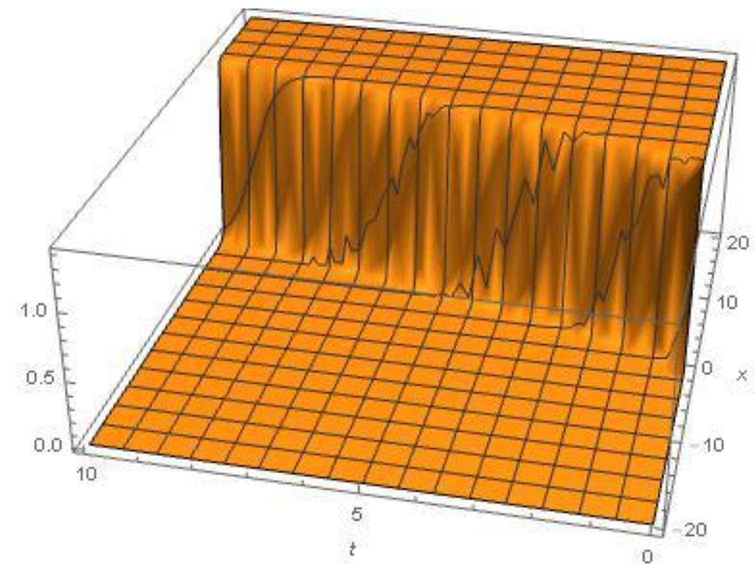
$$a_0=\pm\frac{\sqrt{\mu}}{\sqrt{\nu}},\quad a_1=\mp 2\frac{\sqrt{\mu}}{\sqrt{\nu}},\quad k=\mp\frac{\sqrt{(\ln a)^2\lambda^2m^2+2\mu}}{(\ln a)} \tag{3.3.31}$$

şeklindedir. (3.3.31) 'de bulunan sabitler (3.3.30) de yerine yazılırsa

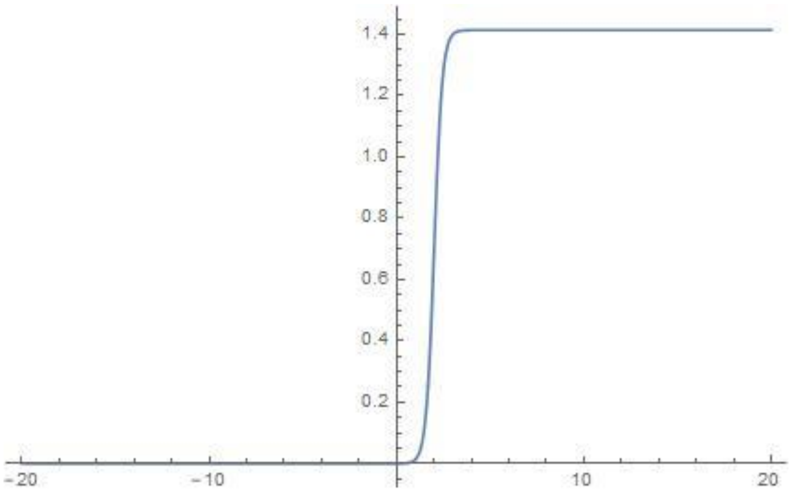
$$U(\xi) = \pm \frac{\sqrt{\mu}}{\sqrt{\nu}} \mp 2 \frac{\sqrt{\mu}}{\sqrt{\nu}} Q(\xi) \tag{3.3.32}$$

bulunur. (3.3.2) denkleminin (3.3.32)’de yerine yazılıp (3.1.2) dönüşümünün kullanılmasıyla (3.3.28) denkleminin aşağıdaki şekilde verilen seyahat eden dalga çözümü elde edilir.

$$u_{3,5}(x,t) = \pm \frac{\sqrt{\mu}}{\sqrt{\nu}} \mp 2 \frac{\sqrt{\mu}}{\sqrt{\nu}} \left(1 + da^{\left(\mp \frac{\sqrt{(\ln a)^2 \lambda^2 m^2 + 2\mu}}{(\ln a)} \frac{t^{\alpha}}{\alpha} + m \frac{x^{\beta}}{\beta}\right)}\right)^{-1}.$$



Şekil 3.9: $u_{3,5}(x,t)$ çözümünün üç boyutlu grafiği.



Şekil 3.10: $u_{3,5}(x,1)$ çözümünün iki boyutlu grafiği.

3.4 $(b+Q^2)$ Tanjant Fonksiyonu Metodu ve Değiştirilmiş Tanjant Fonksiyonu Metodu

3.4.1 Yöntem

(3.1.1) ile verilen lineer olmayan uyumlu kesirli kısmi diferansiyel denklemini ele alalım. (3.1.2) dönüşümü, (3.1.1) denklemine uygulanırsa ve Teorem (2.1.5)'de verilen zincir kuralı kullanılırsa (3.1.3) denklemi elde edilir. Varsayalım ki (3.1.3) denkleminin çözümü

$$U(\xi)=\sum_{i=0}^{N}a_iQ^i(\xi)+\sum_{i=1}^{N}b_iQ^{-i}(\xi) \tag{3.4.1}$$

formunda olsun. (3.4.1) denkleminde verilen $Q=Q(\xi)$ fonksiyonu aşağıdaki diferansiyel denklemi sağladığını kabul edelim.

$$Q'=b+Q^2. \tag{3.4.2}$$

Burada $Q'=\dfrac{dQ(\xi)}{d\xi}$ ve $a_0,...,a_N,b_1,...,b_N,b$ ler sabitlerdir.

(3.4.2) diferansiyel denklemi aşağıdaki çözümlere sahiptir: (Abdelsalam, 2017)

$b > 0$ olduğunda $Q = \sqrt{b}\tan(\sqrt{b}\xi)$ yada $Q = -\sqrt{b}\cot(\sqrt{b}\xi)$,

$$b < 0 \text{ olduğunda } Q = -\sqrt{-b}\tanh(\sqrt{-b}\xi) \text{ yada } Q = -\sqrt{-b}\coth(\sqrt{-b}\xi), \tag{3.4.3}$$

$b = 0$ olduğunda $Q = -\dfrac{1}{(\xi + D)}$ (D sabit) dir.

(3.4.1) açılımı (3.1.3) de yerine yazılır. (3.1.3) denklemindeki en yüksek mertebeli lineer terim ve en yüksek dereceli lineer olmayan terim arasında dengeleme işlemi yapılmak suretiyle N değeri hesaplanır. Bulunan N değeri için (3.4.1) denklemi (3.1.3) denkleminde yerine yazılarak elde edilen denklemde $Q(\xi)$ ile aynı dereceye sahip terimlerin katsayılarının sıfıra eşitlenmesiyle $a_0,...,a_N$, $b_1,...,b_N, b$ bilinmeyenli cebirsel denklem sistemi elde edilir. Elde edilen cebirsel denklem sisteminin çözülmesiyle bilinmeyen sabitler bulunur. Daha sonra bulunan sabitler (3.4.1) denkleminde yerine konulursa ve (3.1.2) dönüşümü kullanılırsa (3.4.1) uyumlu kesirli diferansiyel denkleminin seyahat eden dalga çözümlerini elde edilir.

Eğer $b_i = 0$ ise bu metoda tanjant fonksiyonu metodu denir, $b_i \neq 0$ ise de değiştirilmiş genişletilmiş tanjant fonksiyonu metodu denir.

3.4.2 Tanjant Fonksiyonu Yöntemi Uygulamaları

Korteweg-de Vries (KdV) tipi denklemler ise sığ suda uzun dalga hareketini, hidrodinamiği, kuantum mekaniğini, plazma fiziğini ve optiği tanımlamak için kullanılan önemli matematiksel modellerdir. Yüksek dereceli dağılım veya diğer özelliklerinden dolayı, KdV hiyerarşisindeki yüksek dereceli bütünleştirilebilir üyeler de incelenmiştir ki bunlar yüzey ve iç dalgalar, yerçekimi-kılcal dalgalar, su dalgası arasındaki etkileşimler gibi bazı fiziksel olayları modelleyebilir. Sawada-Kotera-Ito diferansiyel denklemi, Lax diferansiyel denklemi ve Kaup-Kupershmidt diferansiyel denklemi gibi denklemler genel 7. Mertebe KdV denkleminin özel halleridir.

3.4.2.1 Uyumlu Kesirli Sawada-Kotera-ItoDenklemi

Aşağıdaki uyumlu kesirli Sawada-Kotera-Ito diferansiyel denklemini ele alalım: (Wazwaz, 2010)

$$
\begin{aligned}
&T_t^{\alpha}u+252u^3T_x^{\beta}u+63(T_x^{\beta}u)^3+378uT_x^{\beta}uT_x^{\beta}T_x^{\beta}u+126u^2T_x^{\beta}T_x^{\beta}T_x^{\beta}u \\
&+63T_x^{\beta}T_x^{\beta}uT_x^{\beta}T_x^{\beta}T_x^{\beta}u+42T_x^{\beta}uT_x^{\beta}T_x^{\beta}T_x^{\beta}T_x^{\beta}u+21uT_x^{\beta}T_x^{\beta}T_x^{\beta}T_x^{\beta}T_x^{\beta}u \\
&+T_x^{\beta}T_x^{\beta}T_x^{\beta}T_x^{\beta}T_x^{\beta}T_x^{\beta}T_x^{\beta}u=0,
\end{aligned}
\tag{3.4.4}
$$

Burada $t>0$, $0<\alpha,\beta\leq 1$dir. Korteweg-de Vries (KdV) tipi denklemdir.

(3.1.2) değişken dönüşümü (3.4.4) denklemine uygulanırsa

$$
\begin{aligned}
&kU'+252mU^3U'+63m^3(U')^3+378m^3UU'U''+126m^3U'''U^2+63m^5U''U''' \\
&+42m^5U'U^{(4)}+21m^5UU^{(5)}+m^7U^{(7)}=0.
\end{aligned}
\tag{3.4.5}
$$

elde edilir.(3.4.5) deki $U^{(7)}$ ve $UU^{(5)}$ terimlerinin kullanılmasıyla yapılan dengeleme işleminden

$$
\begin{aligned}
N+7&=2N+5, \\
N&=2,
\end{aligned}
$$

bulunur. Farz edelim ki (3.4.5) in çözümü aşağıdaki şekilde olsun:

$$
U(\xi)=a_0+a_1Q+a_2Q^2. \tag{3.4.6}
$$

Burada $a_0\neq 0$ ve a_1,a_2'ler hepsi birden sıfır olmayan sabitlerdir.

(3.4.2) ve (3.4.6) denklemlerinin kullanılmasıyla $U^{(7)}$ 'e kadar olan türevler hesaplanarak (3.4.5) de yerine yazılır ve $Q(\xi)^k$ $\left(k=0,1,2\right)$ nin aynı dereceye sahip terimlerinin katsayılarının sıfıra eşitlenmesiyle aşağıda verilen cebirsel denklem sistemi elde edilir:

$$
504a_2^4m+8064a_2^3m^3+34272a_2^2m^5+40320a_2m^7=0,
$$

$$41764a_1a_2^3m+15876a_1a_2^2m^3+29988a_1a_2m^5+5040a_1m^7=0,$$

$$378a_2(2a_1^2m^3+28ba_2^2m^3)+4284a_1^2m^5+...+504a_2^4bm+120960a_2bm^7=0,$$

$$378a_1(2a_1^2m^3+28ba_2^2m^3)+...+1764a_1a_2^3bm+74928a_1a_2bm^5+21672a_1a_2^2bm^3=0,$$

$$378a_2(4a_1^2bm^3+20a_2^2b^2m^3)+378a_0(2a_1^2m^3+28ba_2^2m^3)+...+504a_2bm(a_2(a_1^2+2a_0a_2)$$
$$+a_0a_2^2+2a_1^2a_2)=0,$$

$$378a_1(4a_1^2bm^3+20a_2^2b^2m^3)+756a_0^2a_1m^3+...+252a_1bm(a_2(a_1^2+2a_0a_2)+a_0a_2^2+2a_1^2a_2)$$
$$+18396a_0a_1a_2bm^3=0,$$

$$378a_0(4a_1^2bm^3+20a_2^2b^2m^3)+126b(4a_1^2bm^5+32a_2^2b^2m^5)+...+504a_2bm(a_0(a_1^2+2a_0a_2)$$
$$+2a_0a_1^2+a_0^2a_2)=0,$$

$$a_1k+378a_1(2a_1^2b^2m^3+4a_2^2b^3m^3)+3968a_1b^3m^7+...+252a_1bm(a_0(a_1^2+2a_0a_2)+2a_0a_1^2$$
$$+a_0^2a_2)+9324a_0a_1a_2b^2m^3+1512a_0^2a_1a_2bm=0,$$

$$378a_0(2a_1^2b^2m^3+4a_2^2b^3m^3)+63b^2(4a_1^2bm^5+32a_2^2b^2m^5)+...+504a_0^3a_2bm+756a_0^2a_1^2bm$$
$$+5712a_0a_2b^3m^5=0,$$

$$252a_0^3a_1bm+252a_0^2a_1b^2m^3+336a_0a_1b^3m^5+756a_2a_0a_1b^3m^3+63a_1^3b^3m^3+272a_1b^4m^7$$
$$+924a_2a_1b^4m^5+ka_1b=0.$$

Elde edilen denklem sisteminin çözümü

$$a_0=\frac{-8bm^2}{3},\quad a_1=0,\quad a_2=-4m^2,\quad k=\frac{-256}{3}b^3m^7: \tag{3.4.7}$$

şeklindedir. (3.4.7) 'de bulunan sabitler (3.4.6) da yerine yazılırsa

$$U(\xi)=\frac{-8bm^2}{3}-4m^2Q^2, \tag{3.4.8}$$

bulunur. (3.4.3) denkleminin (3.4.8) 'de yerine yazılıp (3.1.2) dönüşümünün kullanılmasıyla (3.4.4) denkleminin aşağıdaki şekilde verilen seyahat eden dalga çözümleri elde edilir.

$b>0$ için

$$u_{4,1}(x,t)=\frac{-8bm^2}{3}-4m^2\left(\sqrt{b}\tan(\sqrt{b}(\frac{-256}{3}b^3m^7\frac{t^\alpha}{\alpha}+m\frac{x^\beta}{\beta}))\right)^2$$

yada $u_{4,2}(x,t)=\frac{-8bm^2}{3}+4m^2\left(\sqrt{b}\cot(\sqrt{b}(\frac{-256}{3}b^3m^7\frac{t^\alpha}{\alpha}+m\frac{x^\beta}{\beta}))\right)^2.$

$b<0$ için

$$u_{4,3}(x,t)=\frac{-8bm^2}{3}+4m^2\left(\sqrt{-b}\tanh(\sqrt{-b}(\frac{-256}{3}b^3m^7\frac{t^\alpha}{\alpha}+m\frac{x^\beta}{\beta}))\right)^2 \text{ yada}$$

$$u_{4,4}(x,t)=\frac{-8bm^2}{3}+4m^2\left(\sqrt{-b}\coth(\sqrt{-b}(\frac{-256}{3}b^3m^7\frac{t^\alpha}{\alpha}+m\frac{x^\beta}{\beta}))\right)^2.$$

$b=0$ için

$$u_{4,5}(x,t)=-\frac{1}{\frac{-256}{3}b^3m^7\frac{t^\alpha}{\alpha}+m\frac{x^\beta}{\beta}+D} \text{ bulunur.}$$

3.4.2.2 Uyumlu Kesirli Lax Denklemi

Aşağıdaki uyumlu kesirli Lax diferansiyel denklemini ele alalım: (Zayed ve Alurrfi, 2015)

$$\begin{aligned}&T_t^\alpha u+2016u^3T_x^\beta u+630(T_x^\beta u)^3+2268uT_x^\beta uT_x^\beta T_x^\beta u+504u^2T_x^\beta T_x^\beta T_x^\beta u\\&+252T_x^\beta T_x^\beta uT_x^\beta T_x^\beta T_x^\beta u+147T_x^\beta uT_x^\beta T_x^\beta T_x^\beta T_x^\beta u+42uT_x^\beta T_x^\beta T_x^\beta T_x^\beta T_x^\beta u\\&+T_x^\beta T_x^\beta T_x^\beta T_x^\beta T_x^\beta T_x^\beta T_x^\beta u=0,\end{aligned}\tag{3.4.9}$$

Burada $t > 0$, $0 < \alpha, \beta \leq 1$dir. Korteweg-de Vries (KdV) tipi denklemdir.

(3.1.2) değişken dönüşümü (3.4.9) denklemine uygulanırsa

$$
\begin{aligned}
&kU' + 2016mU^3U' + 630m^3(U')^3 + 2268m^3UU'U'' + 504m^3U'''U^2 \\
&+252m^5U''U''' + 147m^5U'U^{(4)} + 42m^5UU^{(5)} + m^7U^{(7)} = 0.
\end{aligned}
\tag{3.4.10}
$$

elde edilir.(3.4.10) deki $U^{(7)}$ ve $UU^{(5)}$ terimlerinin kullanılmasıyla yapılan dengeleme işleminden

$$
\begin{aligned}
&N + 7 = 2N + 5, \\
&\quad N = 2,
\end{aligned}
$$

bulunur. Farz edelim ki (3.4.10) 'un çözümü aşağıdaki şekilde olsun:

$$
U(\xi) = a_0 + a_1Q + a_2Q^2. \tag{3.4.11}
$$

Burada $a_0 \neq 0$ ve a_1, a_2 'ler hepsi birden sıfır olmayan sabitlerdir.

(3.4.2) ve (3.4.11) denklemlerinin kullanılmasıyla $U^{(7)}$ 'e kadar olan türevler hesaplanarak (3.4.10) 'de yerine yazılır ve $Q(\xi)^k$ $\left(k = 0,1,2\right)$ nin aynı dereceye sahip terimlerinin katsayılarının sıfıra eşitlenmesiyle aşağıda verilen cebirsel denklem sistemi elde edilir:

$$
280a_2^4m + 5600a_2^3m^3 + 30240a_2^2m^5 + 40320a_2m^7 = 0,
$$

$$
980a_1a_2^3m + 10780a_1a_2^2m^3 + 24696a_1a_2m^5 + 5040a_1m^7 = 0,
$$

$$
\begin{aligned}
&280a_2(2a_1^2m^3 + 28ba_2^2m^3) + 3528a_1^2m^5 + 3360a_0a_2^2m^3 + ... + 10080a_0a_2m^5 + 280a_2^4bm \\
&+120960a_2bm^7 = 0,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&280a_1(2a_1^2m^3 + 28ba_2^2m^3) + 70a_1^3m^3 + 280a_2m(a_1(a_1^2 + 2a_0a_2) + 4a_0a_1a_2) + ... + 63056a_1 \\
&.a_2bm^5 + 14840a_1a_2^2bm^3 = 0,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&280a_2(4a_1^2bm^3 + 20a_2^2b^2m^3) + 280a_0(2a_1^2m^3 + 28ba_2^2m^3) + ... + 8540a_1^2a_2bm^3 \\
&+280a_2bm(a_2(a_1^2 + 2a_0a_2) + a_0a_2^2 + 2a_1^2a_2) = 0,
\end{aligned}
$$

$$280a_1(4a_1^2bm^3+20a_2^2b^2m^3)+420a_0^2a_1m^3+210a_1^3bm^3+...+140a_1bm(a_2(a_1^2+2a_0a_2)$$
$$+a_0a_2^2+2a_1^2a_2)+11760a_0a_1a_2bm^3=0,$$

$$280a_0(4a_1^2bm^3+20a_2^2b^2m^3)+140b(4a_1^2bm^5+32a_2^2b^2m^5)+2a_2k+...+17248a_0a_2b^2m^5$$
$$+280a_2bm(a_0(a_1^2+2a_0a_2)+2a_0a_1^2+a_0^2a_2)=0,$$

$$a_1k+280a_1(2a_1^2b^2m^3+4a_2^2b^3m^3)+3968a_1b^3m^7+210a_1^3b^2m^3+...+6160a_0a_1a_2b^2m^3$$
$$+840a_0^2a_1a_2bm=0,$$

$$280a_0(2a_1^2b^2m^3+4a_2^2b^3m^3)+70b^2(4a_1^2bm^5+32a_2^2b^2m^5)+...+280a_0^3a_2bm+420.$$
$$a_0^2a_1^2bm+3808a_0a_2b^3m^5=0,$$

$$140a_0^3a_1bm+140a_0^2a_1b^2m^3+224a_0a_1b^3m^5+560a_2a_0a_1b^3m^3+70a_1^3b^3m^3+272a_1b^4m^7$$
$$+952a_2a_1b^4m^5+ka_1b=0.$$

Elde edilen denklem sisteminin çözümü

$$a_1=0,\quad a_2=-2m^2,\quad k=-4(35a_0^3m+140a_0^2bm^3+196a_0b^2m^5+96b^3m^7): \qquad (3.4.12)$$

şeklindedir. (3.4.12) 'de bulunan sabitler (3.4.11) 'de yerine yazılırsa

$$U(\xi)=a_0-2m^2Q^2, \qquad (3.4.13)$$

bulunur. (3.4.3) denkleminin (3.4.13) 'de yerine yazılıp (3.1.2) dönüşümünün kullanılmasıyla (3.4.9) denkleminin aşağıdaki şekilde verilen seyahat eden dalga çözümleri elde edilir.

$b>0$ için

$$u_{4,6}(x,t)=a_0$$
$$-2m^2(\sqrt{b}\tan(\sqrt{b}(-4(35a_0^3m+140a_0^2bm^3+196a_0b^2m^5+96b^3m^7\frac{t^\alpha}{\alpha}+m\frac{x^\beta}{\beta})))^2$$

ya da

$$u_{4,7}(x,t)=a_0$$
$$+2m^2(\sqrt{b}\cot(\sqrt{b}(-4(35a_0^3m+140a_0^2bm^3+196a_0b^2m^5+96b^3m^7\frac{t^\alpha}{\alpha}+m\frac{x^\beta}{\beta})))^2,$$

$b<0$ için

$$u_{4,8}(x,t)=a_0$$
$$+2m^2(\sqrt{-b}\tanh(\sqrt{b}(-4(35a_0^3m+140a_0^2bm^3+196a_0b^2m^5+96b^3m^7\frac{t^\alpha}{\alpha}+m\frac{x^\beta}{\beta})))^2$$

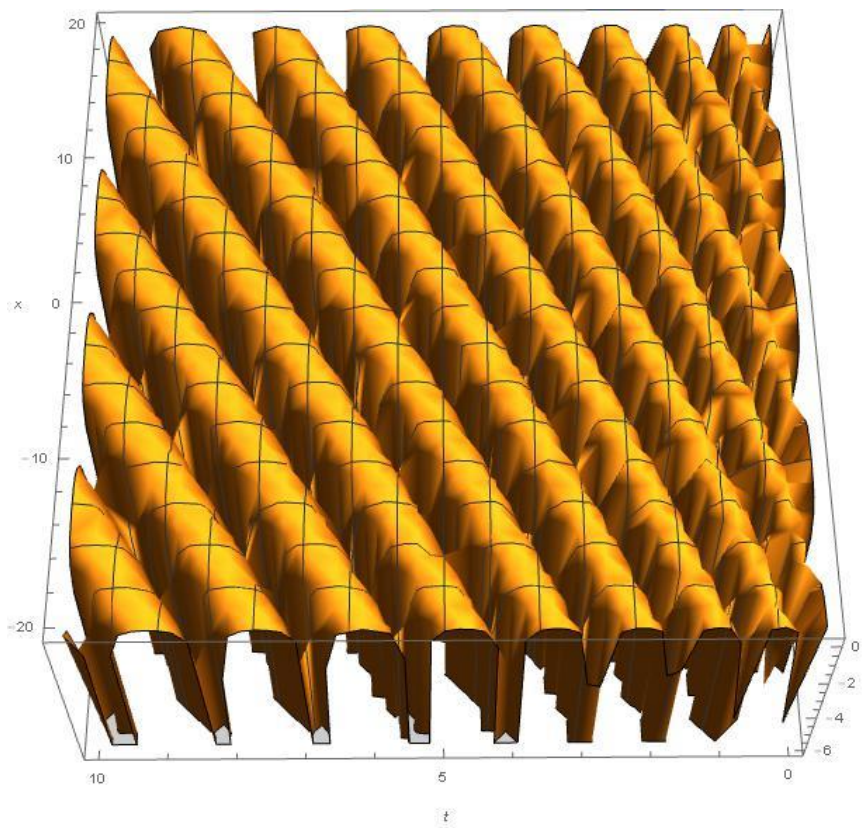
ya da

$$u_{4,9}(x,t)=a_0$$
$$+2m^2(\sqrt{-b}\coth(\sqrt{b}(-4(35a_0^3m+140a_0^2bm^3+196a_0b^2m^5+96b^3m^7\frac{t^\alpha}{\alpha}+m\frac{x^\beta}{\beta})))^2,$$

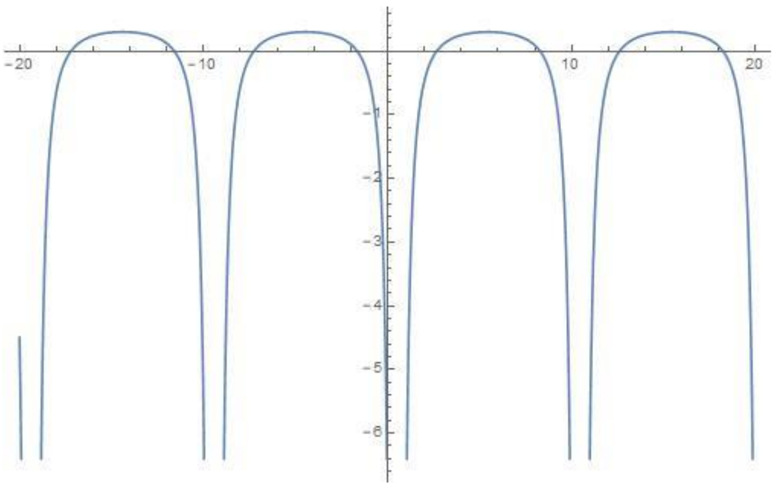
$b=0$ için

$$u_{4,10}(x,t)=-\frac{1}{-4(35a_0^3m+140a_0^2bm^3+196a_0b^2m^5+96b^3m^7\frac{t^\alpha}{\alpha}+m\frac{x^\beta}{\beta})+D}$$

bulunur.



Şekil 3.11: $u_{4,6}(x,t)$ çözümünün üç boyutlu grafiği.



Şekil 3.12: $u_{4,6}(x,1)$ çözümünün iki boyutlu grafiği.

3.4.2.3 Uyumlu Kesirli Kaup-Kupershmidt Denklemi

Aşağıdaki uyumlu kesirli Kaup-Kupershmidt diferansiyel denklemini ele alalım: (Ganji ve diğerleri, 2010)

$$T_t^{\alpha}u+140u^3T_x^{\beta}u+70(T_x^{\beta}u)^3+280uT_x^{\beta}uT_x^{\beta}T_x^{\beta}u+70u^2T_x^{\beta}T_x^{\beta}T_x^{\beta}u+70T_x^{\beta}T_x^{\beta}uT_x^{\beta}T_x^{\beta}T_x^{\beta}u$$
$$+42T_x^{\beta}uT_x^{\beta}T_x^{\beta}T_x^{\beta}T_x^{\beta}u+14uT_x^{\beta}T_x^{\beta}T_x^{\beta}T_x^{\beta}T_x^{\beta}uT_x^{\beta}T_x^{\beta}T_x^{\beta}T_x^{\beta}T_x^{\beta}T_x^{\beta}T_x^{\beta}u=0$$

(3.4.14)

Burada $t>0$, $0<\alpha,\beta\leq 1$ dir. Korteweg-de Vries (KdV) tipi denklemdir. (3.1.12) değişken dönüşümü (3.4.14) denklemine uygulanırsa

$$\begin{aligned}&kU'+140mU^3U'+70m^3(U')^3+280m^3UU'U''+70m^3U'''U^2+70m^5U''U''' \\ &+42m^5U'U^{(4)}+14m^5UU^{(5)}+m^7U^{(7)}=0.\end{aligned} \qquad (3.4.15)$$

elde edilir. (3.4.15) deki $U^{(7)}$ ve $UU^{(5)}$ terimlerinin kullanılmasıyla yapılan dengeleme işleminden

$$N+7=2N+5,$$
$$N=2,$$

bulunur. Farz edelim ki (3.4.15) 'in çözümü aşağıdaki şekilde olsun:

$$U(\xi)=a_0+a_1Q+a_2Q^2. \qquad (3.4.16)$$

Burada $a_0\neq 0$ ve a_1,a_2 'ler hepsi birden sıfır olmayan sabitlerdir.

(3.4.2) ve (3.4.16) denklemlerinin kullanılmasıyla $U^{(7)}$ 'e kadar olan türevler hesaplanarak (3.4.15) 'de yerine yazılır ve $Q(\xi)^k$ $\left(k=0,1,2\right)$ nin aynı dereceye sahip terimlerinin katsayılarının sıfıra eşitlenmesiyle aşağıda verilen cebirsel denklem sistemi elde edilir:

$$4032a_2^4m+44352a_2^3m^3+101808a_2^2m^5+40320a_2m^7=0,$$

$$14112a_1a_2^3m+84672a_1a_2^2m^3+81144a_1a_2m^5+5040a_1m^7=0,$$

$$2268a_2(2a_1^2m^3+28ba_2^2m^3)+11592a_1^2m^5+27216a_0a_2^2m^3+6048a_1^2a_2^2m+...+12096a_2m^3.$$
$$(a_1^2+2a_0a_2)+30240a_0a_2m^5+4032a_2^4bm+120960a_2bm^7=0,$$

$$2268a_1(2a_1^2m^3+28ba_2^2m^3)+630a_1^3m^3+4032a_2m(a_1(a_1^2+2a_0a_2)+4a_0a_1a_2)+...+13440$$
$$.a_1bm^7+46872a_0a_1a_2m^3+14112a_1a_2^3bm+208824a_1a_2bm^5+116928a_1a_2^2bm^3=0,$$

$$2268a_2(4a_1^2bm^3+20a_2^2b^2m^3)+2268a_0(2a_1^2m^3+28ba_2^2m^3)+...+70560a_0a_2bm^5$$
$$+6048a_1^2a_2^2bm+69300a_1^2a_2bm^3+4032a_2bm(a_2(a_1^2+2a_0a_2)+a_0a_2^2+2a_1^2a_2)=0,$$

$$2268a_1(4a_1^2bm^3+20a_2^2b^2m^3)+3024a_0^2a_1m^3+1890a_1^3bm^3+...+179592a_1a_2b^2m^5+2016.$$
$$a_1bm(a_2(a_1^2+2a_0a_2)+a_0a_2^2+2a_1^2a_2)+90216a_0a_1a_2bm^3=0,$$

$$2268a_0(4a_1^2bm^3+20a_2^2b^2m^3)+504b(4a_1^2bm^5+32a_2^2b^2m^5)+...+8064a_0a_1^2bm^3$$
$$+20160a_0^2a_2bm^3+51744a_0a_2b^2m^5+4032a_2bm(a_0(a_1^2+2a_0a_2)+2a_0a_1^2+a_0^2a_2)=0,$$

$$a_1k+2268a_1(2a_1^2b^2m^3+4a_2^2b^3m^3)+3968a_1b^3m^7+1890a_1^3b^2m^3+...+2016a_1bm(a_0(a_1^2$$
$$+2a_0a_2)+2a_0a_1^2+a_0^2a_2)+47880a_0a_1a_2b^2m^3+12096a_0^2a_1a_2bm=0,$$

$$2268a_0(2a_1^2b^2m^3+4a_2^2b^3m^3)+252b^2(4a_1^2bm^5+32a_2^2b^2m^5)+...+8316a_1^2a_2b^3m^3+4032$$
$$.a_0^3a_2bm+6048a_0^2a_1^2bm+11424a_0a_2b^3m^5=0,$$

$$2016a_0^3a_1bm+1008a_0^2a_1b^2m^3+672a_0a_1b^3m^5+4536a_2a_0a_1b^3m^3$$
$$+630a_1^3b^3m^3+272a_1b^4m^7+3360a_2a_1b^4m^5+ka_1b=0.$$

Elde edilen denklem sisteminin çözümü

$$a_0=-\frac{bm^2}{3},\quad a_1=0,\quad a_2=-\frac{m^2}{2},\quad k=\frac{-4}{3}b^3m^7: \tag{3.4.17}$$

şeklindedir. (3.4.17) 'da bulunan sabitler (3.4.15) de yerine yazılırsa

$$U(\xi)=-\frac{bm^2}{3}-\frac{m^2}{2}Q^2, \tag{3.4.18}$$

bulunur. (3.4.3) denkleminin (3.4.18) 'de yerine yazılıp (3.1.2) dönüşümünün kullanılmasıyla (3.4.14) denkleminin aşağıdaki şekilde verilen seyahat eden dalga çözümleri elde edilir.

$b > 0$ olduğunda

$$u_{4,11}(x,t) = -\frac{bm^2}{3} - \frac{m^2}{2}(\sqrt{b}\tan(\sqrt{-b}(\frac{-4}{3}b^3m^7\frac{t^\alpha}{\alpha} + m\frac{x^\beta}{\beta})))^2$$

ya da

$$u_{4,12}(x,t) = -\frac{bm^2}{3} - \frac{m^2}{2}(\sqrt{b}\cot(-\sqrt{b}(\frac{-4}{3}b^3m^7\frac{t^\alpha}{\alpha} + m\frac{x^\beta}{\beta})))^2.$$

$b < 0$ olduğunda

$$u_{4,13}(x,t) = -\frac{bm^2}{3} - \frac{m^2}{2}(-\sqrt{-b}\tanh(\sqrt{-b}(\frac{-4}{3}b^3m^7\frac{t^\alpha}{\alpha} + m\frac{x^\beta}{\beta})))^2.$$

ya da

$$u_{4,14}(x,t) = -\frac{bm^2}{3} - \frac{m^2}{2}(-\sqrt{-b}\coth(\sqrt{-b}(\frac{-4}{3}b^3m^7\frac{t^\alpha}{\alpha} + m\frac{x^\beta}{\beta})))^2,$$

$b = 0$ olduğunda

$$u_{4,15}(x,t) = -\frac{1}{\frac{-4}{3}b^3m^7\frac{t^\alpha}{\alpha} + m\frac{x^\beta}{\beta} + D}$$

bulunur.

3.4.3 Değiştirilmiş Genişletilmiş Tanjant Yöntemi Uygulamaları

3.4.3.1 Uyumlu Kesirli (2+1)-Boyutlu Boussinesq Denklemi

Aşağıdaki uyumlu kesirli (2+1)-Boyutlu Boussinesq diferansiyel denklemini ele alalım: (Ren ve diğ. 2015)

$$T_t^{\alpha}T_t^{\alpha}u + 6(T_x^{\beta}u)^2 + 6uT_x^{\beta}T_x^{\beta}u - T_x^{\beta}T_x^{\beta}u - T_x^{\beta}T_x^{\beta}T_x^{\beta}T_x^{\beta}u - T_y^{\theta}T_y^{\theta}u = 0, \tag{3.4.19}$$

burada $t > 0$, $0 < \alpha, \beta \leq 1$ dir. Yerçekimi dalgalarının su yüzeyindeki yayılımını, özellikle de eğik dalgaların baş üstü çarpışmasını tanımlamak için kullanılır.

(3.1.38) değişken dönüşümü (3.4.19) denklemine uygulanırsa ve elde edilen denklem integrasyon sabiti sıfır alınarak integrallenirse

$$k^2U' + 6m^2UU' - m^2U' - m^4U''' - n^2U' = 0. \tag{3.4.20}$$

elde ederiz.(3.4.20)'deki U''' ve UU' terimlerinin kullanılmasıyla yapılan dengeleme işleminden

$$N + 3 = 2N + 1,$$
$$N = 2,$$

bulunur. Farz edelim ki (3.4.20) nın çözümü aşağıdaki şekilde olsun:

$$U(\xi) = a_0 + a_1\phi + a_2\phi^2 + b_1\phi^{-1} + b_2\phi^{-2}. \tag{3.4.21}$$

Burada $a_0 \neq 0$ ve a_1, a_2, b_1, b_2’ler hepsi birden sıfır olmayan sabitlerdir.

(3.4.2) ve (3.4.21) denklemlerinin kullanılmasıyla U''' ‘e kadar olan türevler hesaplanarak (3.4.20) de yerine yazılır ve $Q(\xi)^k, Q(\xi)^{-k}$ $(k = 0,1,2)$ nin aynı dereceye sahip terimlerinin katsayılarının sıfıra eşitlenmesiyle aşağıda verilen cebirsel denklem sistemi elde edilir:

$$12a_2^2m^2 - 24a_2m^4 = 0,$$

$$18a_1a_2m^2 - 6a_1m^4 = 0,$$

$$2a_2k^2 - 2a_2m^2 - 2a_2n^2 + 6a_1^2m^2 + 12a_2^2bm^2 + 12a_0a_2m^2 - 40a_2bm^4 = 0,$$

$$a_1k^2 - a_1m^2 - a_1n^2 + 6a_0a_1m^2 - 8a_1bm^4 + 6a_2b_1m^2 + 18a_1a_2bm^2 = 0,$$

$$6a_1^2bm^2 - 16a_2b^2m^4 + 2a_2bk^2 - 2a_2bm^2 - 2a_2bn^2 + 12a_0a_2bm^2 = 0,$$

$$b_1m^2 - b_1k^2 + b_1n^2 - 2a_1b^2m^4 + a_1bk^2 - 6a_0b_1m^2 - a_1bm^2 - 6a_1b_2m^2 - a_1bn^2 + 2bb_1m^4$$
$$+6a_0a_1bm^2 + 6a_2bb_1m^2 = 0,$$

$$2b_2m^2 - 2b_2k^2 + 2b_2n^2 - 6b_1^2m^2 - 12a_0b_2m^2 + 16bb_2m^4 = 0,$$

$$8b^2b_1m^4 - bb_1k^2 + bb_1m^2 - 18b_1b_2m^2 + bb_1n^2 - 6a_0bb_1m^2 - 6a_1bb_2m^2 = 0,$$

$$40b^2b_2m^4 - 6bb_1^2m^2 - 12b_2^2m^2 - 2bb_2k^2 + 2bb_2m^2 + 2bb_2n^2 - 12a_0bb_2m^2 = 0,$$

$$6b_1b^3m^4 - 18b_1b_2bm^2 = 0,$$

$$24b^3b_2m^4 - 12bb_2^2m^2 = 0.$$

Elde edilen denklem sisteminin çözümü

$$\begin{aligned} &a_0 = \frac{-k^2 + m^2 + 8bm^4 + n^2}{6m^2}, \quad a_1 = 0, \quad a_2 = 2m^2, \quad b_1 = 0, \quad b_2 = 2b^2m^2, \\ &k = \frac{-256}{3}b^3m^7 : \end{aligned} \tag{3.4.22}$$

şeklindedir. (3.4.22) 'da bulunan sabitler (3.4.21) 'da yerine yazılırsa

$$U(\xi) = \frac{-k^2 + m^2 + 8bm^4 + n^2}{6m^2} + 2m^2\phi^2 + 2b^2m^2\phi^{-2} \tag{3.4.23}$$

bulunur. (3.4.3) denkleminin (3.4.23) 'de yerine yazılıp (3.1.38) dönüşümünün kullanılmasıyla (3.4.19) denkleminin aşağıdaki şekilde verilen seyahat eden dalga çözümleri elde edilir.

$b > 0$ için

$$u_{4,16}(x,y,t)=\frac{-k^2+m^2+8bm^4+n^2}{6m^2}$$
$$+2m^2\left(\sqrt{b}tan(\sqrt{b}(\frac{-256}{3}b^3m^7\frac{t^\alpha}{\alpha}+m\frac{x^\beta}{\beta}+n\frac{y^\theta}{\theta}))\right)^2$$
$$+2b^2m^2\left(\sqrt{b}tan(\sqrt{b}(\frac{-256}{3}b^3m^7\frac{t^\alpha}{\alpha}+m\frac{x^\beta}{\beta}+n\frac{y^\theta}{\theta}))\right)^{-2},$$

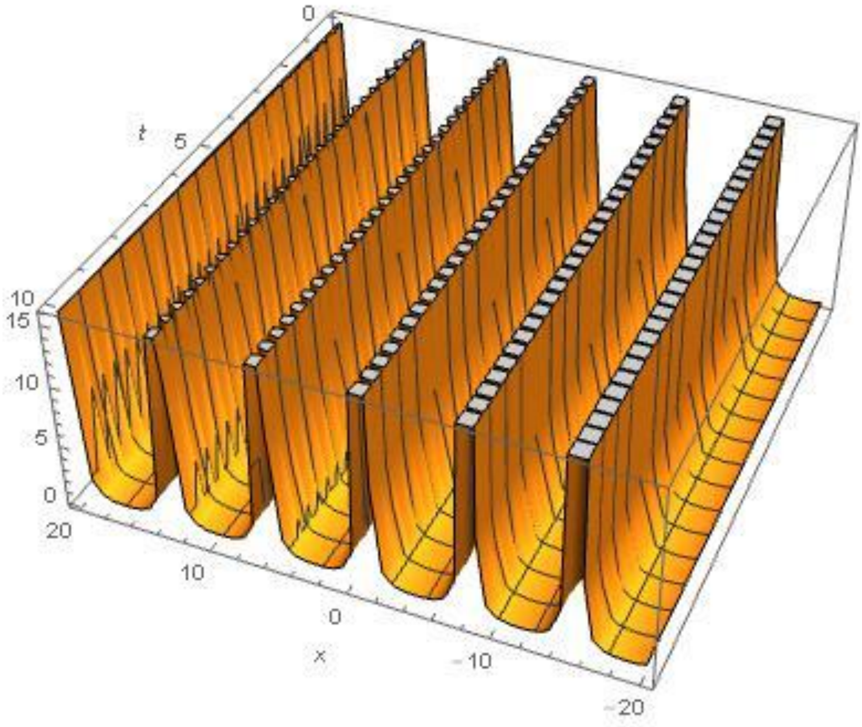
$b<0$ için

$$u_{4,17}(x,y,t)=\frac{-k^2+m^2+8bm^4+n^2}{6m^2}$$
$$+2m^2\left(-\sqrt{-b}tanh(\sqrt{-b}(\frac{-256}{3}b^3m^7\frac{t^\alpha}{\alpha}+m\frac{x^\beta}{\beta}+n\frac{y^\theta}{\theta}))\right)^2$$
$$+2b^2m^2\left(-\sqrt{-b}tanh(\sqrt{-b}(\frac{-256}{3}b^3m^7\frac{t^\alpha}{\alpha}+m\frac{x^\beta}{\beta}+n\frac{y^\theta}{\theta}))\right)^{-2},$$

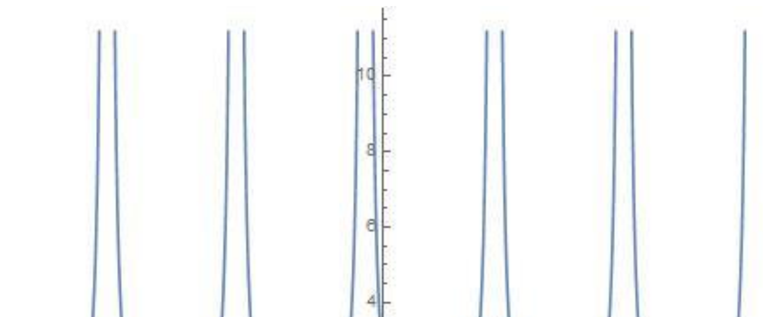
$b=0$ için

$$u_{4,18}(x,y,t)=\frac{-k^2+m^2+8bm^4+n^2}{6m^2}+2m^2\left(-\frac{1}{((\frac{-256}{3}b^3m^7\frac{t^\alpha}{\alpha}+m\frac{x^\beta}{\beta}+n\frac{y^\theta}{\theta})+D)}\right)^2$$
$$+2b^2m^2\left(-\frac{1}{((\frac{-256}{3}b^3m^7\frac{t^\alpha}{\alpha}+m\frac{x^\beta}{\beta}+n\frac{y^\theta}{\theta})+D)}\right)^{-2}$$

bulunur.



Şekil 3.13: $u_{4,16}(x,1,t)$ çözümünün üç boyutlu grafiği.



Şekil 3.14: $u_{4,16}(x,1,1)$ çözümünün iki boyutlu grafiği.

3.4.3.2 Uyumlu Kesirli CoupleBoiti-Leon-Pempinelli Denklemi

Aşağıdaki uyumlu kesirli Couple-Boiti-Leon-Pempinelli diferansiyel denklemini ele alalım: (Fazli ve diğerleri, 2011)

$$T_t^{\alpha}T_y^{\theta}u = T_x^{\beta}T_y^{\theta}(u^2 - T_x^{\beta}u) + 2T_x^{\beta}T_x^{\beta}T_x^{\beta}v,$$
$$T_t^{\alpha}v = T_x^{\beta}T_x^{\beta}v + 2uT_x^{\beta}v, \tag{3.4.24}$$

burada $t>0$, $0<\alpha,\beta\leq 1$dir. Çok bileşenli alaşım sistemlerinde faz ayırma işlemini tanımlayan matematiksel fiziğin reaksiyon difüzyon denklemini açıklar.

(3.1.38) değişken dönüşümü (3.4.24) denklemine uygulandığında

$$nm^4U'' - 2nm^2U^3 + 3knmU^2 - k^2nU = 0. \tag{3.4.25}$$

elde edilir.(3.4.25) deki U'' ve U^3 terimlerinin kullanılmasıyla yapılan dengeleme işleminden

$$N + 2 = 3N,$$
$$N = 1,$$

bulunur. Farz edelim ki (3.4.25) nın çözümü aşağıdaki şekilde olsun:

$$U(\xi) = a_0 + a_1\phi + b_1\phi^{-1}. \tag{3.4.26}$$

Burada $a_0 \neq 0$ ve a_1, b_1'ler hepsi birden sıfır olmayan sabitlerdir.

(3.4.2) ve (3.4.26) denklemlerinin kullanılmasıyla U''' 'e kadar olan türevler hesaplanarak (3.4.25) de yerine yazılır ve $Q(\xi)^k, Q(\xi)^{-k}$ $(k=0,1)$ nin aynı dereceye sahip terimlerinin katsayılarının sıfıra eşitlenmesiyle aşağıda verilen cebirsel denklem sistemi elde edilir:

$$-2na_1^3m^2 + 2na_1m^4 = 0,$$

$$-6a_0na_1^2m^2 + 3kna_1^2m = 0,$$

$$-6na_0^2a_1m^2 + 6na_0a_1km - 6b_1na_1^2m^2 - na_1k^2 + 2bna_1m^4 = 0,$$

$$-2na_0^3m^2 + 3na_0^2km - na_0k^2 - 12a_1b_1na_0m^2 + 6a_1b_1nkm = 0,$$

$$-6na_0^2b_1m^2+6na_0b_1km-6a_1nb_1^2m^2-nb_1k^2+2bnb_1m^4=0,$$

$$-6a_0nb_1^2m^2+3knb_1^2m=0,$$

$$2nb^2b_1m^4-2nb_1^3m^2=0.$$

Elde edilen denklem sisteminin çözümleri

1. Durum:

$$a_0=0,\quad a_1=\frac{-2m}{a},\quad b_1=\frac{-2bm}{a},$$
$$k=\frac{4(3c^2m+2a^2bm^3)}{a^2},\quad n=\frac{2cm}{a}, \tag{3.4.27}$$

şeklindedir. (3.4.27) 'da bulunan sabitler (3.4.26) 'de yerine yazılırsa

$$U(\xi)=-\frac{2m}{a}\phi^1-\frac{2bm}{a}\phi^{-1} \tag{3.4.28}$$

bulunur. (3.4.3) denkleminin (3.4.28) 'de yerine yazılıp (3.1.38) dönüşümünün kullanılmasıyla (3.4.24) denkleminin aşağıdaki şekilde verilen seyahat eden dalga çözümleri elde edilir.

$b>0$ için

$$u_{4,19}(x,y,t)=\frac{-2m}{a}\left(\sqrt{b}tan(\sqrt{b}(\frac{4(3c^2m+2a^2bm^3)}{a^2}\frac{t^\alpha}{\alpha}+m\frac{x^\beta}{\beta}+\frac{2cm}{a}\frac{y^\theta}{\theta}))\right)$$
$$+\frac{-2bm}{a}\left(\sqrt{b}tan(\sqrt{b}(\frac{4(3c^2m+2a^2bm^3)}{a^2}\frac{t^\alpha}{\alpha}+m\frac{x^\beta}{\beta}+\frac{2cm}{a}\frac{y^\theta}{\theta}))\right)^{-1},$$

$b<0$ için

$$u_{4,20}(x,y,t)=\frac{-2m}{a}\left(-\sqrt{-b}tanh(\sqrt{-b}(\frac{4(3c^2m+2a^2bm^3)}{a^2}\frac{t^\alpha}{\alpha}+m\frac{x^\beta}{\beta}+\frac{2cm}{a}\frac{y^\theta}{\theta}))\right)$$
$$+\frac{-2bm}{a}\left(-\sqrt{-b}tanh(\sqrt{-b}(\frac{4(3c^2m+2a^2bm^3)}{a^2}\frac{t^\alpha}{\alpha}+m\frac{x^\beta}{\beta}+\frac{2cm}{a}\frac{y^\theta}{\theta}))\right)^{-1},$$

$b = 0$ için

$$u_{4,21}(x,y,t) = \frac{-2m}{a}\Big(-\frac{1}{((\frac{4(3c^2m+2a^2bm^3)}{a^2}\frac{t^\alpha}{\alpha}+m\frac{x^\beta}{\beta}+\frac{2cm}{a}\frac{y^\theta}{\theta})+D)}\Big)$$

$$+\frac{-2bm}{a}\Big(-\frac{1}{((\frac{4(3c^2m+2a^2bm^3)}{a^2}\frac{t^\alpha}{\alpha}+m\frac{x^\beta}{\beta}+\frac{2cm}{a}\frac{y^\theta}{\theta})+D)}\Big)^{-1}$$

bulunur.

2. Durum:

$$a_0 = m\sqrt{2b},\ \ a_1 = m,\ \ b_1 = bm,\ \ k = 2\sqrt{2b}m^2 : \tag{3.4.29}$$

şeklindedir. (3.4.29) 'da bulunan sabitler (3.4.26) 'de yerine yazılırsa

$$U(\xi) = m\sqrt{2b} + m\phi^1 + bm\phi^{-1} \tag{3.4.30}$$

bulunur. (3.4.2) denkleminin (3.4.30) 'de yerine yazılıp (3.1.38) dönüşümünün kullanılmasıyla (3.4.24) denkleminin aşağıdaki şekilde verilen seyahat eden dalga çözümleri elde edilir.

$b > 0$ için

$$u_{4,22}(x,y,t) = m\sqrt{2b} + m\Big(\sqrt{b}tan(\sqrt{b}(2\sqrt{2b}m^2\frac{t^\alpha}{\alpha}+m\frac{x^\beta}{\beta}+n\frac{y^\theta}{\theta}))\Big)$$

$$+bm\Big(\sqrt{b}tan(\sqrt{b}(2\sqrt{2b}m^2\frac{t^\alpha}{\alpha}+m\frac{x^\beta}{\beta}+n\frac{y^\theta}{\theta}))\Big)^{-1},$$

$b < 0$ için

$$u_{4,23}(x,y,t) = m\sqrt{2b} + m\Big(-\sqrt{-b}tanh(\sqrt{-b}(2\sqrt{2b}m^2\frac{t^\alpha}{\alpha}+m\frac{x^\beta}{\beta}+n\frac{y^\theta}{\theta}))\Big)$$

$$+bm\Big(-\sqrt{-b}tanh(\sqrt{-b}(2\sqrt{2b}m^2\frac{t^\alpha}{\alpha}+m\frac{x^\beta}{\beta}+n\frac{y^\theta}{\theta}))\Big)^{-1},$$

$b = 0$ için

$$u_{4,24}(x,y,t)=m\sqrt{2b}+m\Big(-\frac{1}{((2\sqrt{2b}m^2\frac{t^\alpha}{\alpha}+m\frac{x^\beta}{\beta}+n\frac{y^\theta}{\theta})+D)}\Big)$$

$$+bm\Big(-\frac{1}{((2\sqrt{2b}m^2\frac{t^\alpha}{\alpha}+m\frac{x^\beta}{\beta}+n\frac{y^\theta}{\theta})+D)}\Big)^{-1}$$

bulunur.

3.5 Üstel-Fonksiyon Metodu

3.5.1 Yöntem

(3.1.1) ile verilen lineer olmayan uyumlu kesirli kısmi diferansiyel denklemini ele alalım. (3.1.2) dönüşümü, (3.1.1) denklemine uygulanırsa ve Teorem 2.1.5 ' de verilen zincir kuralı kullanılırsa (3.1.3) denklemi elde edilir.

Varsayalım ki (3.1.3) denkleminin çözümü (Ebaid, 2012)

$$U(\xi)=\frac{\sum_{n=-c}^{d}a_n\exp[n\xi]}{\sum_{m=-p}^{q}b_m\exp[m\xi]}. \tag{3.5.1}$$

şeklinde olsun. Buradaki p , q , c , d pozitif tamsayılar ve a_n, b_m de bilinmeyen sabitlerdir. (3.5.1) deki en yüksek mertebeli lineer terim ve en yüksek dereceli lineer olmayan terim arasında dengeleme işlemi yapılmak suretiyle c ve p değerleri hesaplanır. d ve q değerleri de benzer şekilde hesaplanır. Bulunan c ve p değerleri için (3.5.1) denklemi (3.1.3) denkleminde yerine yazılarak elde edilen denklemde e^k $(k=-p,...,q,-c,...,d)$ ile aynı dereceye sahip terimlerin katsayılarının sıfıra eşitlenmesiyle $a_{-c},...,a_d$,$b_{-p},...,b_q$ bilinmeyenli cebirsel denklem sistemi elde edilir. Elde edilen cebirsel denklem sistemin çözülmesiyle bilinmeyen sabitleri bulunur. Daha sonra bulunan sabitler (3.5.1) denkleminde yerine konulursa ve (3.1.2) dönüşümü kullanılırsa (3.1.1) uyumlu kesirli diferansiyel denkleminin seyahat eden dalga çözümleri elde edilir.

3.5.2 Uygulamalar

3.5.2.1 Uyumlu Kesirli Sharma-Tasso-Olever Denklemi

Aşağıdaki uyumlu kesirli Sharma-Tasso-Olever diferansiyel denklemini ele alalım: (Taghizadeh ve diğerleri, 2013)

$$T_t^{\alpha}u + 3c(T_x^{\beta}u)^2 + 3cu^2T_x^{\beta}u + 3cuT_x^{\beta}T_x^{\beta}u + cT_x^{\beta}T_x^{\beta}T_x^{\beta}u = 0. \tag{3.5.2}$$

Burada $t > 0$, $0 < \alpha, \beta \le 1$ dir. STO diferansyel denklemi lineer olmayan evrim denklemlerindendir(NLEE) ve su dalgaları, doğrusal olmayan optik, plazma fiziği ve katı hal fiziği gibi birçok bilimsel uygulamada kullanılır.

(3.1.2) değişken dönüşümü (3.5.2) denklemine uygulanırsa ve integrasyon sabitini sıfır alınarak integrallenirse

$$kU + 3cm^2UU' + cmU^3 + cm^3U'' = 0. \tag{3.5.3}$$

elde edilir. (3.5.3) 'deki U'' ve UU' terimlerinin kullanılmasıyla yapılan dengeleme işleminden

$$U'' = \frac{c_1 \exp[(d+3q)\xi] + ...}{c_2 \exp[(4q)\xi] + ...}$$

ve

$$UU' = \frac{c_3 \exp[(2d+2q)\xi] + ...}{c_4 \exp[(4q)\xi] + ...}$$

bulunur. Burada c_i ler sabitlerdir. (3.5.3) 'de en yüksek mertebe lineer terimle en yüksek derece lineer olmayan terim dengelenirse:

d+3q =2d+2q,
q=d

elde edilir. Benzer şekilde c ve p nin dengelenmesiyle de c=p bulunur. Basitlik için $q=d=1$ ve $c=p=1$ alınırsa,

$$U(\xi)=\frac{a_1\exp[\xi]+a_0+a_{-1}\exp[-\xi]}{b_1\exp[\xi]+b_0+b_{-1}\exp[-\xi]} \tag{3.5.4}$$

bulunur. Farz edelim ki (3.5.3) 'ün çözümü (3.5.4) olsun. (3.5.4) denkleminin U'' ‘ye kadar olan türevleri hesaplanarak (3.5.3) 'de yerine yazılıp, e^k $(k=3,2,1,0,-1,-2,-3)$ 'nin aynı dereceye sahip terimlerinin katsayılarının sıfıra eşitlenmesiyle aşağıda verilen cebirsel denklem sistemi elde edilir:

$$cma_1^3+ka_1b_1^2=0,$$

$$3b_0ca_1^2m^2+3a_0ca_1^2m-b_0ca_1b_1m^3-3a_0ca_1b_1m^2+2b_0ka_1b_1+a_0cb_1^2m^3+a_0kb_1^2=0,$$

$$\begin{aligned}&3ca_0^2a_1m-3ca_0^2b_1m^2+3ca_0a_1b_0m^2-ca_0b_0b_1m^3+2ka_0b_0b_1+6b_{-1}ca_1^2m^2+3a_{-1}ca_1^2m\\&+ca_1b_0^2m^3+ka_1b_0^2-4b_{-1}ca_1b_1m^3-6a_{-1}ca_1b_1m^2+2b_{-1}ka_1b_1+4a_{-1}cb_1^2m^3+a_{-1}kb_1^2=0,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&a_0b_0^2k+a_0^3cm+2a_0b_1b_{-1}k+2a_1b_0b_{-1}k+2a_{-1}b_0b_1k+6a_0a_1a_{-1}cm+9a_0a_1b_{-1}cm^2\\&-9a_0a_{-1}b_1cm^2-6a_0b_1b_{-1}cm^3+3a_1b_0b_{-1}cm^3+3a_{-1}b_0b_1cm^3=0,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&3ca_0^2a_{-1}m+3ca_0^2b_{-1}m^2-3ca_0a_{-1}b_0m^2-ca_0b_0b_{-1}m^3+2ka_0b_0b_{-1}-6b_1ca_{-1}^2m^2+3a_1ca_{-1}^2m\\&+ca_{-1}b_0^2m^3+ka_{-1}b_0^2-4b_1ca_{-1}b_{-1}m^3+6a_1ca_{-1}b_{-1}m^2+2b_1ka_{-1}b_{-1}+4a_1cb_{-1}^2m^3+a_1kb_{-1}^2=0,\end{aligned}$$

$$-3b_0ca_{-1}^2m^2+3a_0ca_{-1}^2m-b_0ca_{-1}b_{-1}m^3+3a_0ca_{-1}b_{-1}m^2+2b_0ka_{-1}b_{-1}+a_0cb_{-1}^2m^3+a_0kb_{-1}^2=0,$$

$$cma_{-1}^3+ka_{-1}b_{-1}^2=0.$$

Elde edilen denklem sisteminin çözümleri

1. Durum:

$$a_1 = a_1, \quad a_0 = a_0, \quad a_{-1} = \frac{a_0^2}{4a_1}, \; b_1 = \frac{a_1}{m},$$
$$b_0 = 0, \quad b_{-1} = -\frac{a_0^2}{4a_1 m}, \quad k = -cm^3 : \tag{3.5.5}$$

şeklindedir. Burada a_1 ve a_0 keyfi sabittir. (3.5.5) 'de bulunan sabitler (3.5.4)'de yerine yazılıp (3.1.2) dönüşümünün kullanılmasıyla (3.5.2) denkleminin aşağıdaki şekilde verilen seyahat eden dalga çözümü elde edilir.

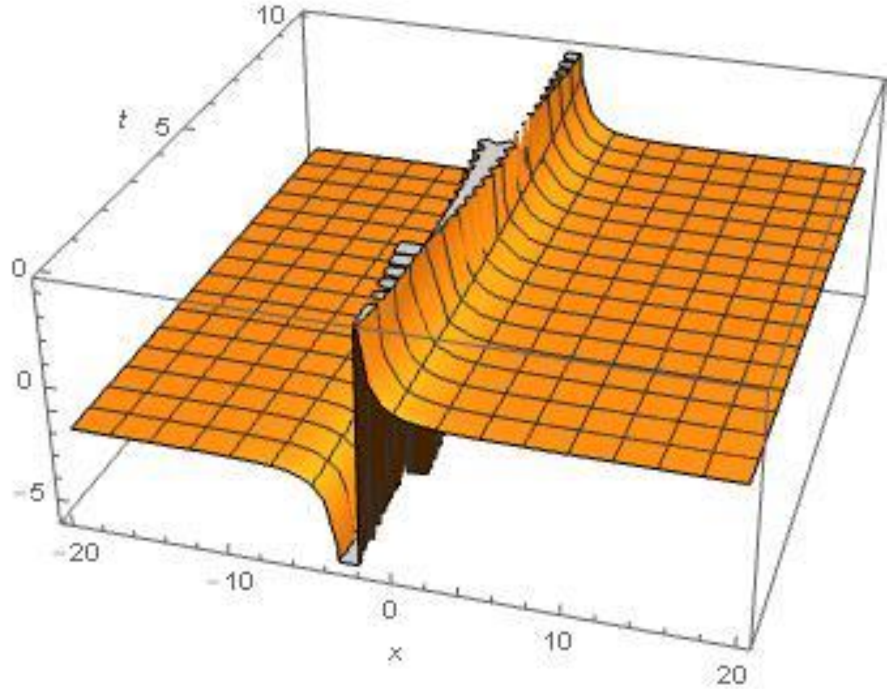
$$u_{5,1}(x,t) = \frac{a_1 \exp[-cm^3 \frac{t^\alpha}{\alpha} + m\frac{x^\beta}{\beta}] + a_0 + \frac{a_0^2}{4a_1}\exp[cm^3 \frac{t^\alpha}{\alpha} - m\frac{x^\beta}{\beta}]}{\frac{a_1}{m}\exp[(-cm^3 \frac{t^\alpha}{\alpha} + m\frac{x^\beta}{\beta})] - \frac{a_0^2}{4a_1 m}\exp[cm^3 \frac{t^\alpha}{\alpha} - m\frac{x^\beta}{\beta}]}. \tag{3.5.6}$$

2. Durum:

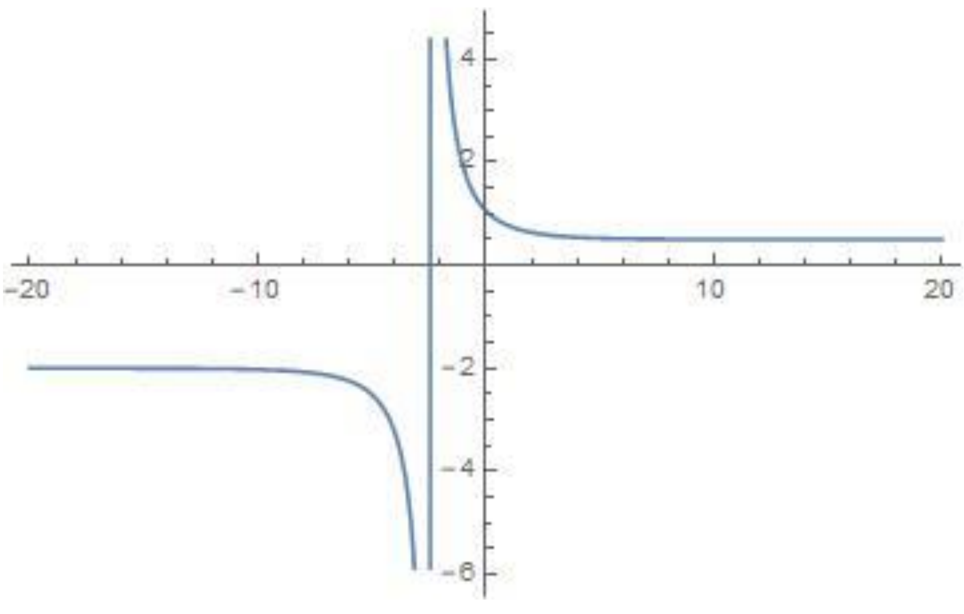
$$a_1 = a_1, \; a_0 = a_0, \quad a_{-1} = 0, \quad b_1 = \frac{a_1}{m},$$
$$b_0 = -\frac{a_0}{m}, \quad b_{-1} = -\frac{2a_0^2}{a_1 m}, \quad k = -cm^3 : \tag{3.5.7}$$

şeklindedir. Burada a_1 ve a_0 keyfi sabittir. (3.5.7) 'de bulunan sabitler (3.5.4) 'de yerine yazılıp (3.1.2) dönüşümünün kullanılmasıyla (3.5.2) denkleminin aşağıdaki şekilde verilen seyahat eden dalga çözümü elde edilir.

$$u_{5,2}(x,t) = \frac{a_1 \exp[(-cm^3 \frac{t^\alpha}{\alpha} + m\frac{x^\beta}{\beta})] + a_0}{\frac{a_1}{m}\exp[(-cm^3 \frac{t^\alpha}{\alpha} + m\frac{x^\beta}{\beta})] - \frac{a_0}{m} - \frac{2a_0^2}{a_1 m}\exp[(cm^3 \frac{t^\alpha}{\alpha} - m\frac{x^\beta}{\beta})]}. \tag{3.5.8}$$



Şekil 3.15: $u_{5,1}(x,t)$ çözümünün üç boyutlu grafiği.



Şekil 3.16: $u_{5,1}(x,1)$ çözümünün iki boyutlu grafiği.

3.5.2.2 Uyumlu Kesirli ZKBBM Denklemi

Aşağıdaki uyumlu kesirli ZKBBM diferansiyel denklemini ele alalım: (Tauseef ve diğ, 2017)

$$T_t^{\alpha}u + T_x^{\beta}u - 2auT_x^{\beta}u - bT_t^{\alpha}(T_x^{\beta}T_x^{\beta}u) = 0, \tag{3.5.9}$$

burada $t > 0$, $0 < \alpha, \beta \le 1$ dir. Bu denklem uzun dalga rejiminde yerçekimi su dalgalarının bir modellenmesi olarak ortaya çıkar.

(3.1.2) değişken dönüşümü (3.5.9) denklemine uygulanırsa ve integrasyon sabitini sıfır alarak integrallenirse

$$(k+m)U - amU^2 - bm^2kU'' = 0. \tag{3.5.10}$$

elde edilir.(3.5.10) deki U'' ve U^2 terimlerinin kullanılmasıyla yapılan dengeleme işleminden

$$U'' = \frac{c_1 \exp[(d+3q)\xi] + ...}{c_2 \exp[(4q)\xi] + ...}$$

ve

$$U^2 = \frac{c_3 \exp[(2d+2q)\xi] + ...}{c_4 \exp[(4q)\xi] + ...},$$

olur. Burada c_i ler sabitlerdir. (3.5.10) ‘da en yüksek mertebe lineer terimle en yüksek derece lineer olmayan terim dengelenirse:

d+3q=2d+2q ,
q=d.

elde edilir. Benzer şekilde c ve p nin dengelenmesiyle de c=p bulunur. Kolaylık için $q = d = 1$ ve $c = p = 1$ alınırsa,

$$U(\xi) = \frac{a_1 \exp[\xi] + a_0 + a_{-1} \exp[-\xi]}{b_1 \exp[\xi] + b_0 + b_{-1} \exp[-\xi]} \tag{3.5.11}$$

bulunur. Farz edelim ki (3.5.9) 'in çözümü (3.5.11) olsun. (3.5.11) denkleminin U'' 'e kadar olan türevlerin hesaplanarak (3.5.10) 'de yerine yazılıp, e^k $(k=3,2,1,0,-1,-2,-3)$ 'nin aynı dereceye sahip terimlerinin katsayılarının sıfıra eşitlenmesiyle aşağıda verilen cebirsel denklem sistemi elde edilir:

$$a_1b_1^2k + a_1b_1^2m - aa_1^2b_1m = 0,$$

$$a_0b_1^2k + a_0b_1^2m - aa_1^2b_0m + 2a_1b_0b_1k + 2a_1b_0b_1m - a_0bb_1^2km^2 - 2aa_0a_1b_1m + a_1bb_0b_1km^2 = 0,$$

$$a_1b_0^2k + a_{-1}b_1^2k + a_1b_0^2m + a_{-1}b_1^2m - aa_0^2b_1m - aa_1^2b_{-1}m + 2a_0b_0b_1k + 2a_1b_1b_{-1}k + 2a_0b_0b_1m$$
$$+2a_1b_1b_{-1}m - a_1bb_0^2km^2 - 4a_{-1}bb_1^2km^2 - 2aa_0a_1b_0m - 2aa_1a_{-1}b_1m + a_0bb_0b_1km^2$$
$$+4a_1bb_1b_{-1}km^2 = 0,$$

$$a_0b_0^2k + a_0b_0^2m - aa_0^2b_0m + 2a_0b_1b_{-1}k + 2a_1b_0b_{-1}k + 2a_{-1}b_0b_1k + 2a_0b_1b_{-1}m + 2a_1b_0b_{-1}m$$
$$+2a_{-1}b_0b_1m - 2aa_0a_1b_{-1}m - 2aa_0a_{-1}b_1m - 2aa_1a_{-1}b_0m + 6a_0bb_1b_{-1}km^2 - 3a_1bb_0b_{-1}km^2$$
$$-3a_{-1}bb_0b_1km^2 = 0,$$

$$a_{-1}b_0^2k + a_1b_{-1}^2k + a_{-1}b_0^2m + a_1b_{-1}^2m - aa_0^2b_{-1}m - aa_{-1}^2b_1m + 2a_0b_0b_{-1}k + 2a_{-1}b_1b_{-1}k + 2a_0b_0.$$
$$b_{-1}m + 2a_{-1}b_1b_{-1}m - a_{-1}bb_0^2km^2 - 4a_1bb_{-1}^2km^2 - 2aa_0a_{-1}b_0m - 2aa_1a_{-1}b_{-1}m + a_0bb_0b_{-1}km^2$$
$$+4a_{-1}bb_1b_{-1}km^2 = 0,$$

$$a_0b_{-1}^2k + a_0b_{-1}^2m - aa_{-1}^2b_0m + 2a_{-1}b_0b_{-1}k + 2a_{-1}b_0b_{-1}m - a_0bb_{-1}^2km^2 - 2aa_0a_{-1}b_{-1}m$$
$$+a_{-1}bb_0b_{-1}km^2 = 0,$$

$$a_{-1}b_{-1}^2k + a_{-1}b_{-1}^2m - aa_{-1}^2b_{-1}m = 0.$$

Elde edilen denklem sisteminin çözümleri

1. Durum:

$$a_1 = \frac{b_1bm^2}{a(1+m^2b)}, \quad a_0 = -\frac{2bb_0m^2}{a(1+m^2b)}, \quad a_{-1} = \frac{bb_0m^2}{4b_1a(1+m^2b)},\ b_1 = b_1,$$
$$b_0 = b_0, \quad b_{-1} = \frac{b_0^2}{4b_1}, \quad k = -\frac{m}{1+bm^2}: \tag{3.5.12}$$

şeklindedir. Burada b_1 ve b_0 keyfi sabitlerdir. (3.5.12) 'de bulunan sabitler (3.5.11) 'de yerine yazılıp (3.1.2) dönüşümünün kullanılmasıyla (3.5.9) denkleminin aşağıdaki şekilde verilen seyahat eden dalga çözümü elde edilir.

$$u_{5,3}(x,t)=\frac{\dfrac{b_1bm^2}{a(1+m^2b)}\exp[(-\dfrac{m}{1+bm^2}\dfrac{t^\alpha}{\alpha}+m\dfrac{x^\beta}{\beta})]-\dfrac{2bb_0m^2}{a(1+m^2b)}}{b_1\exp[(-\dfrac{m}{1+bm^2}\dfrac{t^\alpha}{\alpha}+m\dfrac{x^\beta}{\beta})]+b_0+\dfrac{b_0^2}{4b_1}\exp[(\dfrac{m}{1+bm^2}\dfrac{t^\alpha}{\alpha}-m\dfrac{x^\beta}{\beta})]}$$
$$+\frac{\dfrac{bb_0m^2}{4b_1a(1+m^2b)}\exp[(\dfrac{m}{1+bm^2}\dfrac{t^\alpha}{\alpha}-m\dfrac{x^\beta}{\beta})]}{b_1\exp[(-\dfrac{m}{1+bm^2}\dfrac{t^\alpha}{\alpha}+m\dfrac{x^\beta}{\beta})]+b_0+\dfrac{b_0^2}{4b_1}\exp[(\dfrac{m}{1+bm^2}\dfrac{t^\alpha}{\alpha}-m\dfrac{x^\beta}{\beta})]}. \quad (3.5.13)$$

2. Durum:

$$a_1=0,\quad a_0=\frac{4bb_0m^2}{a(1+4m^2b)},\quad a_{-1}=\frac{4bb_{-1}m^2}{a(1+4m^2b)},\ b_1=0,$$
$$b_0=b_0,\quad b_{-1}=b_{-1},\quad k=-\frac{m}{1+4bm^2}: \quad (3.5.14)$$

şeklindedir. Burada b_0 ve b_{-1} keyfi sabitlerdir. (3.5.14) 'de bulunan sabitler (3.5.11) 'de yerine yazılıp (3.1.2) dönüşümünün kullanılmasıyla (3.5.9) denkleminin aşağıdaki şekilde verilen seyahat eden dalga çözümü elde edilir.

$$u_{5,4}(x,t)=\frac{\dfrac{4bb_0m^2}{a(1+4m^2b)}+\dfrac{4bb_{-1}m^2}{a(1+4m^2b)}\exp[(\dfrac{m}{1+4bm^2}\dfrac{t^\alpha}{\alpha}-m\dfrac{x^\beta}{\beta})]}{b_0+b_{-1}\exp[(\dfrac{m}{1+4bm^2}\dfrac{t^\alpha}{\alpha}-m\dfrac{x^\beta}{\beta})]}. \quad (3.5.15)$$

3.6 Basitleştirilmiş $tan(\phi(\xi)/2)$ - Açılım Metodu (SITEM)

3.6.1 Yöntem

(3.1.1) ile verilen lineer olmayan uyumlu kesirli kısmi diferansiyel denklemini ele alalım. (3.1.2) dönüşümü, (3.1.1) denklemine uygulanırsa ve Teorem

(2.1.5) ' de verilen zincir kuralı kullanılırsa (3.1.3) denklemi elde edilir. Varsayalım ki (3.1.3) denkleminin çözümü

$$U(\xi)=S(\phi)=\sum_{k=0}^{m}A_k\left[p+\tan\left(\frac{\phi(\xi)}{2}\right)\right]^k+\sum_{k=1}^{m}B_k\left[p+\tan\left(\frac{\phi(\xi)}{2}\right)\right]^{-k} \tag{3.6.1}$$

formunda $\left(p+\tan\left(\frac{\phi}{2}\right)\right)$'nin seri açılımı şeklinde olsun. (3.6.1) denkleminde verilen $\phi=\phi(\xi)$ fonksiyonu aşağıdaki diferansiyel denklemi sağlar (Manafian ve Lakestani, 2016) .

$$\phi'(\xi)=a\sin(\phi(\xi))+b\cos(\phi(\xi))+c. \tag{3.6.1}$$

Burada $\phi'=\frac{d\phi(\xi)}{d\xi}$ ve $A_k(0\le k\le m)$, $B_k(1\le k\le m)$, a, b, c ler sabitlerdir.

(3.6.1) diferansiyel denklemi aşağıdaki çözümlere sahiptir: (Yaslan ve Girgin, 2018)

- b=c, a=0 için

$$p+\tan\left(\frac{\phi}{2}\right)=b\xi+C1, \tag{3.6.2}$$

- $b=c,\quad a\neq 0$ için

$$p+\tan\left(\frac{\phi}{2}\right)=c_1\exp(a\xi)-\frac{b-ap}{a}, \tag{3.6.3}$$

- $b\neq c,\quad \Delta=a^2+b^2-c^2>0$ için

$$p+\tan\left(\frac{\phi}{2}\right)=\frac{2}{b-c}\frac{c_1r_1\exp(r_1\xi)+c_2r_2\exp(r_2\xi)}{c_1\exp(r_1\xi)+c_2\exp(r_2\xi)}, \tag{3.6.4}$$

- $b\neq c,\quad \Delta=a^2+b^2-c^2=0$ için

$$p+\tan\left(\frac{\phi}{2}\right)=p+\frac{a}{b-c}+\frac{2}{b-c}\frac{c_2}{c_1+c_2\xi}, \tag{3.6.5}$$

- $b \neq c, \quad \Delta = a^2 + b^2 - c^2 < 0$ için

$$p + \tan(\frac{\phi}{2}) = p + \frac{a}{b-c} + \frac{\sqrt{-\Delta}}{b-c} \frac{-c_1 \sin(\frac{\sqrt{-\Delta}}{2}\xi) + c_2 \cos(\frac{\sqrt{-\Delta}}{2}\xi)}{c_1 \cos(\frac{\sqrt{-\Delta}}{2}\xi) + c_2 \sin(\frac{\sqrt{-\Delta}}{2}\xi)}. \tag{3.6.6}$$

Burada c_1 ve c_2 keyfi sabit, $r_1 = \frac{\left(a + p(b-c) + \sqrt{\Delta}\right)}{2}$, $r_2 = \frac{\left(a + p(b-c) - \sqrt{\Delta}\right)}{2}$ dir.

(3.6.1) açılımı (3.1.3) de yerine yazılır. (3.1.3) denklemindeki en yüksek mertebeli lineer terim ve en yüksek dereceli lineer olmayan terim arasında dengeleme işlemi yapılmak suretiyle N değeri hesaplanır. Bulunan N değeri için (3.6.1) denklemi (3.1.2) denkleminde yerine yazılarak elde edilen denklemde $k = (0,1,2,...)$ için $\left(p + \tan\left(\frac{\phi}{2}\right)\right)^k$ ve $\left(p + \tan\left(\frac{\phi}{2}\right)\right)^{-k}$ ile aynı dereceye sahip terimlerin katsayılarının sıfıra eşitlenmesiyle A_0, $A_k\,(k = 1,2,...,m)$, $B_k\,(k = 1,2,...,m)$, a , b, c ve p bilinmeyenli cebirsel denklem sistemi elde edilir. Elde edilen cebirsel denklem sisteminin çözülmesiyle bilinmeyen sabitler bulunur. Daha sonra bulunan sabitler (3.6.1) denkleminde yerine konulursa ve (3.1.2) dönüşümü kullanılırsa (3.1.1) uyumlu kesirli diferansiyel denkleminin seyahat eden dalga çözümleri elde edilir.

3.6.2 Uygulamalar

3.6.2.1 Uyumlu Kesirli Konopelchenko–Dubrovsky Denklemi

Aşağıdaki uyumlu kesirli Konopelchenko–Dubrovsky diferansiyel denklemini ele alalım: (Bekir ve Boz, 2009)

$$T_t^{\alpha}u + T_x^{\beta}T_x^{\beta}T_x^{\beta}u - 6\lambda_2 u T_x^{\beta}u + \frac{3}{2}(\lambda_1)^2 u^2 T_x^{\beta}u - 3T_y^{\theta}v + 3\lambda_1 T_x^{\beta}uv = 0,$$
$$T_y^{\theta}u = T_x^{\beta}v, \tag{3.6.7}$$

burada $t > 0$, $0 < \alpha, \beta, \theta \leq 1$, λ_1, λ_2 sabittir. KD denklemleri Konopelchenko ve Dubrovsky tarafından tanıtılmıştır ve bu denklemler okyanus dinamiği, akışkan mekaniği ve plazma fiziğindeki uygulamalarda kullanılır.

(3.1.38) değişken dönüşümü (3.6.7) denklemine uygulanırsa

$$kU' - m^3U''' - 6\lambda_2 mUU' + \frac{3}{2}\lambda_1^2 mU^2U' - nV' + 3\lambda_1 mU'V = 0,$$
$$n\,U' = m\,V'. \tag{3.6.8}$$

elde edilir. (3.6.8) denkleminde $n\,U'=m\,V'$ integrasyon sabiti sıfır alınarak integrallenirse ve V yerine $V = \frac{n}{m}U$ yerine yazılırsa

$$kU' - m^3U''' - 6\lambda_2 mUU' + \frac{3}{2}\lambda_1^2 mU^2U' - 3\frac{n^2}{m}U' + 3\lambda_1 nU'U = 0 \tag{3.6.9}$$

olup, (3.6.9) daki U''' ve U^2U' terimlerinin kullanılmasıyla yapılan dengeleme işleminden

$$N + 3 = 3N + 1,$$
$$N = 1,$$

bulunur. Farz edelim ki (3.6.9) un çözümü aşağıdaki şekilde olsun:

$$U(\xi) = A_0 + A_1\left[p + \tan\left(\frac{\phi(\xi)}{2}\right)\right] + B_1\left[p + \tan\left(\frac{\phi(\xi)}{2}\right)\right]^{-1}. \tag{3.6.10}$$

Burada $A_0 \neq 0$ ve A_1, B_1 ’ler hepsi birden sıfır olmayan sabitlerdir.

(3.6.1) denklemleminin kullanılmasıyla (3.6.10)’nın U''' ‘e kadar olan türevleri hesaplanarak (3.6.9) ‘da yerine yazılmasıyla ve $\left(\tan(\frac{\phi}{2})\right)^k$ $(k = 0,1)$ nin aynı dereceye sahip terimlerinin katsayılarının sıfıra eşitlenmesiyle aşağıda verilen cebirsel denklem sistemi elde edilir:

$$A_1^3\lambda_1^2m^2 - A_1b^2m^4 + 2A_1bcm^4 - A_1c^2m^4 = 0,$$

$$3A_0A_1^2\lambda_1^2m^2 - 6A_1^2\lambda_2m^2 + 3aA_1bm^4 - 3aA_1cm^4 + 3A_1^2\lambda_1mn = 0,$$

$$-2a^2A_1m^4 + 3A_0^2A_1\lambda_1^2m^2 + 6A_0A_1\lambda_1mn - 12\lambda_2A_0A_1m^2 + 3B_1A_1^2\lambda_1^2m^2 + A_1b^2m^4$$
$$-A_1c^2m^4 + 2kA_1m - 6A_1n^2 = 0,$$

$$2A_0km - 6A_0^2\lambda_2m^2 - 6A_0n^2 + A_0^3\lambda_1^2m^2 - aA_1bm^4 - aA_1cm^4 + abB_1m^4 - aB_1cm^4 - 12A_1$$
$$.B_1\lambda_2m^2 + 3A_0^2\lambda_1mn + 6A_0A_1B_1\lambda_1^2m^2 + 6A_1B_1\lambda_1mn = 0,$$

$$-2a^2B_1m^4 + 3A_0^2B_1\lambda_1^2m^2 + 6A_0B_1\lambda_1mn - 12\lambda_2A_0B_1m^2 + b^2B_1m^4 + 3A_1B_1^2\lambda_1^2m^2 - B_1c^2m^4$$
$$+2kB_1m - 6B_1n^2 = 0,$$

$$3A_0B_1^2\lambda_1^2m^2 - 6B_1^2\lambda_2m^2 - 3abB_1m^4 - 3aB_1cm^4 + 3B_1^2\lambda_1mn = 0,$$

$$-b^2B_1m^4 - 2bB_1cm^4 + B_1^3\lambda_1^2m^2 - B_1c^2m^4 = 0.$$

Elde edilen denklem sisteminin çözümleri

1. Durum:

$$A_0 = \pm\frac{an}{2\lambda_2},\quad A_1 = \mp\frac{(b-c)n}{2\lambda_2},\quad B_1 = 0,\quad m = \frac{\lambda_1 n}{2\lambda_2},$$
$$k = \frac{96\lambda_2^4 n - (a^2+b^2-c^2)\lambda_1^4 n^3}{16\lambda_1\lambda_2^3}: \qquad (3.6.11)$$

şeklindedir. Burada $\lambda_1,\ \lambda_2, a, b, c$ keyfi sabittir. (3.6.11) 'de bulunan sabitler (3.6.10) 'da yerine yazılırsa

$$U(\xi) = \pm\frac{an}{2\lambda_2} \mp \frac{(b-c)n}{2\lambda_2}\left[p + \tan\left(\frac{\phi(\xi)}{2}\right)\right] \qquad (3.6.12)$$

bulunur. (3.6.2)-(3.6.6) denklemlerinin (3.6.12) 'de yerine yazılıp (3.1.38) dönüşümünün kullanılmasıyla (3.6.7) denkleminin aşağıdaki şekilde verilen seyahat eden dalga çözümleri elde edilir.

$b=c,\ a\neq 0$ için

$$U_{6,1}(\xi)=\pm\frac{an}{2\lambda_2},$$

$\Delta>0,\ b\neq c$ için

$$U_{6,2}(\xi)=\pm\frac{an}{2\lambda_2}\mp\frac{n}{\lambda_2}\Big[\frac{c_1r_1\exp(r_1\xi)+c_2r_2\exp(r_2\xi)}{c_1\exp(r_1\xi)+c_2\exp(r_2\xi)}\Big],$$

$\Delta=0,\ b\neq c$ için

$$U_{6,3}(\xi)=\pm\frac{an}{2\lambda_2}\mp\frac{n}{2\lambda_2}\Big[a+\frac{2c_2}{c_1+c_2\xi}\Big],$$

$\Delta<0,\ b\neq c$ için

$$U_{6,4}(\xi)=\pm\frac{an}{2\lambda_2}\mp\frac{n}{2\lambda_2}\Big[a+\sqrt{-\Delta}\,\frac{-c_1\sin(\frac{\sqrt{-\Delta}}{2}\xi)+c_2\cos(\frac{\sqrt{-\Delta}}{2}\xi)}{c_1\cos(\frac{\sqrt{-\Delta}}{2}\xi)+c_2\sin(\frac{\sqrt{-\Delta}}{2}\xi)}\Big)\Big].$$

Burada $\xi=\left(\frac{96\lambda_2^4 n-(a^2+b^2-c^2)\lambda_1^4 n^3}{16\lambda_1\lambda_2^3}\right)\frac{t^\alpha}{\alpha}+\left(\frac{\lambda_1 n}{2\lambda_2}\right)\frac{x^\beta}{\beta}+n\frac{y^\theta}{\theta}$ dir.

2. Durum:

$$A_0=\pm\frac{an}{2\lambda_2},\ A_1=0,\ B_1=\pm\frac{(b+c)n}{2\lambda_2},\ m=\frac{\lambda_1 n}{2\lambda_2},$$
$$k=\frac{96\lambda_2^4 n-(a^2+b^2-c^2)\lambda_1^4 n^3}{16\lambda_1\lambda_2^3}: \tag{3.6.13}$$

şeklindedir. Burada $\lambda_1,\ \lambda_2, a, b, c$ keyfi sabitlerdir. (3.6.13) 'de bulunan sabitler (3.6.10) 'da yerine yazılırsa

$$U(\xi) = \pm\frac{an}{2\lambda_2} \pm \frac{(b+c)n}{2\lambda_2}\left[p + \tan\left(\frac{\phi(\xi)}{2}\right)\right]^{-1} \tag{3.6.14}$$

bulunur. (3.6.2)-(3.6.6) denklemlerinin (3.6.14) 'de yerine yazılıp (3.1.38) dönüşümünün kullanılmasıyla (3.6.7) denkleminin aşağıdaki şekilde verilen seyahat eden dalga çözümleri elde edilir.

$b = c,\ a = 0$

$$U_{6,5}(\xi) = \pm\frac{bn}{\lambda_2}\left[b\xi + C1\right]^{-1},$$

$b = c,\ a \neq 0$

$$U_{6,6}(\xi) = \pm\frac{an}{2\lambda_2} \pm \frac{bn}{\lambda_2}\left[c_1\exp(a\xi) - \frac{b-ap}{a}\right]^{-1},$$

$\Delta > 0,\ b \neq c$ için

$$U_{6,7}(\xi) = \pm\frac{an}{2\lambda_2} \pm \frac{(b+c)n}{\lambda_2}\left[\frac{1}{b-c}\frac{c_1r_1\exp(r_1\xi) + c_2r_2\exp(r_2\xi)}{c_1\exp(r_1\xi) + c_2\exp(r_2\xi)}\right]^{-1},$$

$\Delta = 0,\ b \neq c$ için

$$U_{6,8}(\xi) = \pm\frac{an}{2\lambda_2} \pm \frac{(b+c)n}{2\lambda_2}\left[\frac{a}{b-c} + \frac{2}{b-c}\frac{c_2}{c_1 + c_2\xi}\right]^{-1},$$

$\Delta < 0,\ b \neq c$ için

$$U_{6,9}(\xi) = \pm\frac{an}{2\lambda_2} \pm \frac{(b+c)n}{2\lambda_2}\left[\frac{a}{b-c} + \frac{\sqrt{-\Delta}}{b-c}\frac{-c_1\sin(\frac{\sqrt{-\Delta}}{2}\xi) + c_2\cos(\frac{\sqrt{-\Delta}}{2}\xi)}{c_1\cos(\frac{\sqrt{-\Delta}}{2}\xi) + c_2\sin(\frac{\sqrt{-\Delta}}{2}\xi)}\right]^{-1},$$

Burada $\xi = \left(\frac{96\lambda_2^4 n - (a^2 + b^2 - c^2)\lambda_1^4 n^3}{16\lambda_1\lambda_2^3}\right)\frac{t^\alpha}{\alpha} + \left(\frac{\lambda_1 n}{2\lambda_2}\right)\frac{x^\beta}{\beta} + n\frac{x^\theta}{\theta}$ dir.

3.6.2.2 Uyumlu Kesirli Cahn–Hilliard Denklemi

Aşağıdaki uyumlu kesirli Cahn–Hilliard diferansiyel denklemini ele alalım: (Hosseini ve diğerleri, 2017)

$$T_t^{\alpha}u - T_x^{\beta}u - 6u(T_x^{\beta}u)^2 - (3u^2-1)T_x^{\beta}T_x^{\beta}u + T_x^{\beta}T_x^{\beta}T_x^{\beta}T_x^{\beta}u = 0, \tag{3.6.15}$$

Burada $t>0$, $0<\alpha,\beta\leq 1$, dir. Cahn-Hilliard diferansiyel denklemi, karmaşık akışkanlar ve yumuşak maddelerde arayüzey akışkan akışı, polimer bilimi ve endüstriyel uygulamalar gibi birçok farklı alanda kullanılır.

(3.1.2) değişken dönüşümü (3.6.15) denklemine uygulanırsa ve integrasyon sabiti sıfır alınarak integrallenirse

$$(k-m)U - 3m^2U'U^2 + m^2U' + m^4U''' = 0 \tag{3.6.16}$$

olur. (3.6.16) 'daki U''' ve U^2U' terimlerinin kullanılmasıyla yapılan dengeleme işleminden

$$\begin{aligned} N+2 &= 3N+1, \\ N &= 1, \end{aligned}$$

bulunur. Farz edelim ki (3.6.16) 'nın çözümü aşağıdaki şekilde olsun:

$$U(\xi) = A_0 + A_1\left[p + \tan\left(\frac{\phi(\xi)}{2}\right)\right] + B_1\left[p + \tan\left(\frac{\phi(\xi)}{2}\right)\right]^{-1}. \tag{3.6.17}$$

Burada $A_0 \neq 0$ ve A_1, B_1 ’ler hepsi birden sıfır olmayan sabitlerdir.

(3.6.1) ve (3.6.17) denklemlerinin kullanılmasıyla U''' ‘e kadar olan türevleri hesaplanarak (3.6.16) 'da yerine yazılır ve $\left(\tan(\frac{\phi}{2})\right)^k$ $(k=0,1)$ 'nin aynı dereceye sahip terimlerinin katsayılarının sıfıra eşitlenmesiyle aşağıda verilen cebirsel denklem sistemi elde edilir:

$$12A_0A_1^2bm^2 - 12aA_1^3m^2 - 12A_0A_1^2cm^2 + 12aA_1b^2m^4 - 24aA_1bcm^4 + 12aA_1c^2m^4 = 0,$$

$$14a^2A_1cm^4 - 14a^2A_1bm^4 - 24aA_0A_1^2m^2 + 6A_0^2A_1bm^2 - 6A_0^2A_1cm^2 - 6A_1^3bm^2 - 6A_1^3cm^2$$
$$+6B_1A_1^2bm^2 - 6B_1A_1^2cm^2 + 4A_1b^3m^4 - 4A_1b^2cm^4 - 4A_1bc^2m^4 - 2A_1bm^2 + 4A_1c^3m^4$$
$$+2A_1cm^2 = 0,$$

$$4a^3A_1m^4 - 12aA_0^2A_1m^2 - 12B_1aA_1^2m^2 - 8aA_1b^2m^4 + 8aA_1c^2m^4 + 4aA_1m^2 - 12A_0A_1^2bm^2$$
$$-12A_0A_1^2cm^2 - 4A_1m + 4kA_1 = 0,$$

$$2a^2A_1bm^4 + 2a^2A_1cm^4 + 2a^2bB_1m^4 - 2a^2B_1cm^4 - 6A_0^2A_1bm^2 - 6A_0^2A_1cm^2 - 6A_0^2bB_1m^2$$
$$+6A_0^2B_1cm^2 - 4A_0m + 4kA_0 - 6A_1^2bB_1m^2 - 6A_1^2B_1cm^2 - A_1b^3m^4 - A_1b^2cm^4 - 6A_1bB_1^2m^2$$
$$+A_1bc^2m^4 + 2A_1bm^2 + 6A_1B_1^2cm^2 + A_1c^3m^4 + 2A_1cm^2 - b^3B_1m^4 + b^2B_1cm^4 + bB_1c^2m^4$$
$$+2bB_1m^2 - B_1c^3m^4 - 2B_1cm^2 = 0,$$

$$12aA_0^2B_1m^2 - 4a^3B_1m^4 + 8ab^2B_1m^4 + 12A_1aB_1^2m^2 - 8aB_1c^2m^4 - 4aB_1m^2 - 12A_0bB_1^2m^2$$
$$+12A_0B_1^2cm^2 - 4B_1m + 4kB_1 = 0,$$

$$24aA_0B_1^2m^2 - 14a^2B_1cm^4 - 14a^2bB_1m^4 + 6A_0^2bB_1m^2 + 6A_0^2B_1cm^2 + 4b^3B_1m^4 + 4b^2B_1cm^4$$
$$-6bB_1^3m^2 + 6A_1bB_1^2m^2 - 4bB_1c^2m^4 - 2bB_1m^2 + 6B_1^3cm^2 + 6A_1B_1^2cm^2 - 4B_1c^3m^4 - 2B_1cm^2$$
$$= 0,$$

$$12A_0bB_1^2m^2 - 12ab^2B_1m^4 - 24abB_1cm^4 + 12aB_1^3m^2 + 12A_0B_1^2cm^2 - 12aB_1c^2m^4 = 0,$$

$$-3b^3B_1m^4 - 9b^2B_1cm^4 + 6bB_1^3m^2 - 9bB_1c^2m^4 + 6B_1^3cm^2 - 3B_1c^3m^4 = 0.$$

Elde edilen denklem sisteminin çözümleri

1. Durum:

$$A_0 = \pm\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2-c^2}}, \quad A_1 = \mp\frac{b-c}{\sqrt{a^2+b^2-c^2}}, \quad B_1 = 0,$$
$$k = m = -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{a^2+b^2-c^2}} \tag{3.6.18}$$

şeklindedir. Burada a,b,c keyfi sabittir. (3.6.18)'de bulunan sabitler (3.6.17)'de yerine yazılırsa

$$U(\xi)=\pm\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2-c^2}}\mp\frac{b-c}{\sqrt{a^2+b^2-c^2}}\left[p+\tan\left(\frac{\phi(\xi)}{2}\right)\right] \tag{3.6.19}$$

bulunur. (3.6.2)-(3.6.6) denklemlerinin (3.6.19) 'de yerine yazılıp (3.1.2) dönüşümünün kullanılmasıyla (3.6.15) denkleminin aşağıdaki şekilde verilen seyahat eden dalga çözümleri elde edilir.

$b=c,\ a\neq 0$

$$U_{6,10}(\xi)=\pm\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2-c^2}},$$

$\Delta>0,\ b\neq c$ için

$$U_{6,11}(\xi)=\pm\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2-c^2}}\mp\frac{b-c}{\sqrt{a^2+b^2-c^2}}\left[\frac{2}{b-c}\frac{c_1r_1\exp(r_1\xi)+c_2r_2\exp(r_2\xi)}{c_1\exp(r_1\xi)+c_2\exp(r_2\xi)}\right].$$

Burada $\xi=-\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{a^2+b^2-c^2}}\left(\frac{t^\alpha}{\alpha}+\frac{x^\beta}{\beta}\right)$ dir.

2. Durum:

$$A_0=\pm\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2-c^2}},\ A_1=0,\ B_1=\pm\frac{b+c}{\sqrt{a^2+b^2-c^2}},$$
$$k=m=\pm\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{a^2+b^2-c^2}}: \tag{3.6.20}$$

şeklindedir. Burada a,b,c keyfi sabittir. (3.6.20) 'de bulunan sabitler (3.6.17) 'de yerine yazılırsa

$$U(\xi)=\pm\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2-c^2}}\pm\frac{b+c}{\sqrt{a^2+b^2-c^2}}\left[p+\tan\left(\frac{\phi(\xi)}{2}\right)\right]^{-1} \tag{3.6.21}$$

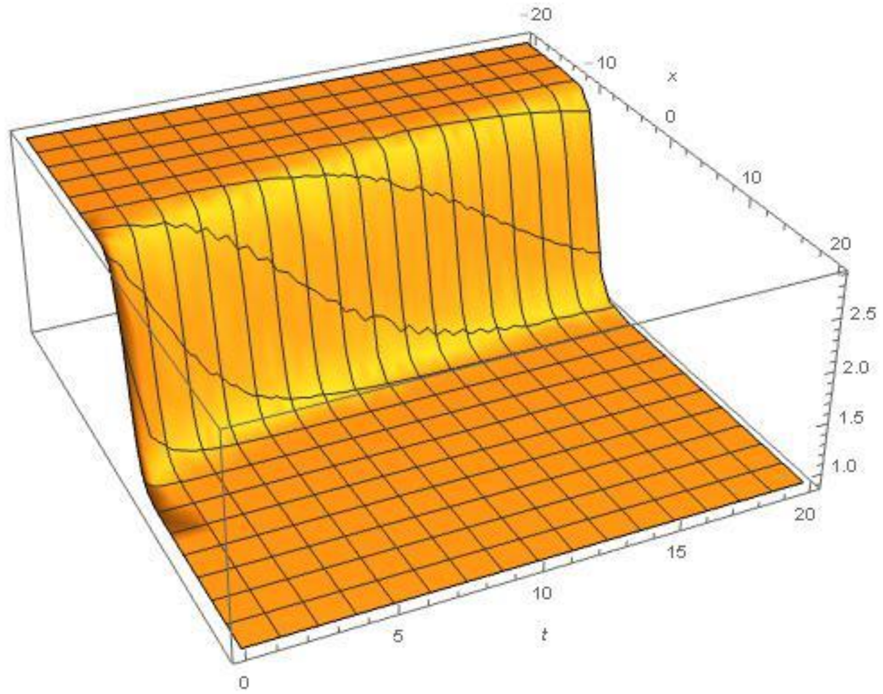
bulunur. (3.6.2)-(3.6.6) denklemlerinin (3.6.21) 'de yerine yazılıp (3.1.2) dönüşümünün kullanılmasıyla (3.6.15) denkleminin aşağıdaki şekilde verilen seyahat eden dalga çözümleri elde edilir.

$b = c, \;\; a \neq 0$

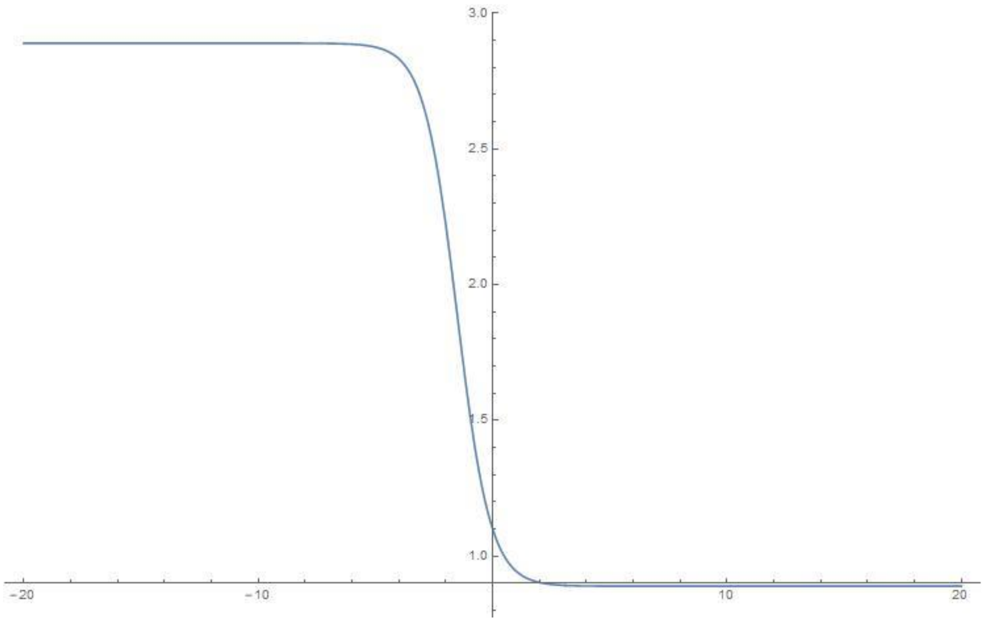
$$U_{6,12}(\xi) = \pm \frac{a}{\sqrt{a^2}} \pm \frac{2b}{\sqrt{a^2}} \left[c_1 \exp((a)(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{a^2+b^2-c^2}}(\frac{t^\alpha}{\alpha} + \frac{x^\beta}{\beta}))) - \frac{b-ap}{a} \right]^{-1},$$

$\Delta > 0, \;\; b \neq c$ için

$$U_{6,13}(\xi) = \pm \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2-c^2}} \pm \frac{b+c}{\sqrt{a^2+b^2-c^2}} \left[\frac{2}{b-c} \frac{c_1 r_1 \exp(r_1\xi) + c_2 r_2 \exp(r_2\xi)}{c_1 \exp(r_1\xi) + c_2 \exp(r_2\xi)} \right]^{-1}.$$



Şekil 3.17: $u_{6,11}(x,t)$ çözümünün üç boyutlu grafiği.



Şekil 3.18: $u_{6,11}(x,1)$ çözümünün iki boyutlu grafiği.

3.7 Auxiliary Metodu

3.7.1 Yöntem

(3.1.1) ile verilen lineer olmayan uyumlu kesirli kısmi diferansiyel denklemini ele alalım. (3.1.2) dönüşümü, (3.1.1) denklemine uygulanırsa ve Teorem 2.1.5 ' de verilen zincir kuralı kullanılırsa (3.1.3) denklemi elde edilir.

Varsayalım ki (3.1.3) denkleminin çözümü

$$U(\xi) = \sum_{i=0}^{N} a_i y^i(\xi) \tag{3.7.1}$$

formunda $y(\xi)$ 'nin polinom açılımı şeklinde olsun.

(3.7.1) denkleminde verilen $y(\xi)$ fonksiyonu aşağıdaki adi diferansiyel denklemi sağlar. (Sirendaoreji, Sun Jiong, 2003)

$$\left(\frac{dy}{d\xi}\right)^2 = ay^2 + by^3 + cy^4, \tag{3.7.2}$$

burada $a_0,...,a_N$, a , b , c ler sabitlerdir.

(3.7.2) adi denklemi aşağıdaki çözüm ailelerine sahiptir: (Sirendaoreji, 2006)

1. Aile: $a>0$ için $y(\xi) = \operatorname{sech}\left(\sqrt{a}\xi\right)\left(\dfrac{-ab}{b^2 - ac\left(1+\varepsilon\tanh\left(\sqrt{a}\xi\right)\right)^2}\right)^{\frac{1}{2}}$, (3.7.3)

2. Aile: $a>0$ için $y(\xi) = \operatorname{csch}\left(\sqrt{a}\xi\right)\left(\dfrac{ab}{b^2 - ac\left(1+\varepsilon\coth\left(\sqrt{a}\xi\right)\right)^2}\right)^{\frac{1}{2}}$, (3.7.4)

3. Aile: $a>0,\ \Delta>0$ için $y(\xi) = \left(\dfrac{2a}{\varepsilon\sqrt{\Delta}\cosh\left(2\sqrt{a}\varepsilon\right) - b}\right)^{\frac{1}{2}}$, (3.7.5)

4. Aile: $a<0,\ \Delta>0$ için $y(\xi) = \left(\dfrac{2a}{\varepsilon\sqrt{\Delta}\cos\left(2\sqrt{-a}\varepsilon\right) - b}\right)^{\frac{1}{2}}$, (3.7.6)

5. Aile: $a>0,\ \Delta<0$ için $y(\xi) = \left(\dfrac{2a}{\varepsilon\sqrt{-\Delta}\sinh\left(2\sqrt{a}\varepsilon\right) - b}\right)^{\frac{1}{2}}$, (3.7.7)

6. Aile: $a<0,\ \Delta>0$ için $y(\xi) = \left(\dfrac{2a}{\varepsilon\sqrt{\Delta}\sinh\left(2\sqrt{-a}\varepsilon\right) - b}\right)^{\frac{1}{2}}$, (3.7.8)

7. Aile: $a>0,\ c>0$ için $y(\xi) = \operatorname{sech}\left(\sqrt{a}\varepsilon\right)\left(\dfrac{-a}{b+2\varepsilon\sqrt{ac}\tanh\left(\sqrt{a}\varepsilon\right)}\right)^{\frac{1}{2}}$, (3.7.9)

8. Aile: $a<0,\ c>0$ için $y(\xi)=\operatorname{sech}\left(\sqrt{-a}\varepsilon\right)\left(\dfrac{-a}{b+2\varepsilon\sqrt{-ac}\tanh\left(\sqrt{-a}\varepsilon\right)}\right)^{\frac{1}{2}}$, (3.7.10)

9. Aile: $a>0,\ c>0$ için $y(\xi)=\operatorname{csch}\left(\sqrt{a}\varepsilon\right)\left(\dfrac{a}{b+2\varepsilon\sqrt{ac}\coth\left(\sqrt{a}\varepsilon\right)}\right)^{\frac{1}{2}}$, (3.7.11)

10. Aile: $a<0,\ c>0$ için $y(\xi)=\csc\left(\sqrt{-a}\varepsilon\right)\left(\dfrac{-a}{b+2\varepsilon\sqrt{-ac}\cot\left(\sqrt{-a}\varepsilon\right)}\right)^{\frac{1}{2}}$, (3.7.12)

11. Aile: $a>0,\ \Delta=0$ için $y(\xi)=\left(-\dfrac{a}{b}\left(1+\varepsilon\tanh\left(\dfrac{\sqrt{a}}{2}\varepsilon\right)\right)\right)^{1/2}$, (3.7.13)

12. Aile: $a>0,\ \Delta=0$ için $y(\xi)=\left(-\dfrac{a}{b}\left(1+\varepsilon\coth\left(\dfrac{\sqrt{a}}{2}\varepsilon\right)\right)\right)^{1/2}$, (3.7.14)

13. Aile: $a>0$ için $y(\xi)=4\left(\dfrac{ae^{2\varepsilon\sqrt{a}\xi}}{\left(e^{2\varepsilon\sqrt{a}\xi}-4b\right)^2-64ac}\right)^{1/2}$, (3.7.15)

14. Aile: $a>0,\ b=0$ için $y(\xi)=4\left(\dfrac{\pm ae^{2\varepsilon\sqrt{a}\xi}}{1-64ace^{4\varepsilon\sqrt{a}\xi}}\right)^{1/2}$. (3.7.16)

(3.7.1) açılımı (3.1.1) de yerine yazılır.(3.1.1) denklemindeki en yüksek mertebeli lineer terim ve en yüksek dereceli lineer olmayan terim arasında dengeleme işlemi yapılmak suretiyle N değeri hesaplanır. Bulunan N değeri için (3.7.1) denklemi (3.1.1) denkleminde yerine yazılarak elde edilen denklemde $y(\xi)$ ile aynı dereceye sahip terimlerin katsayılarının sıfıra eşitlenmesiyle $a_0,...,a_N$, a , b , c bilinmeyenli cebirsel denklem sistemi elde edilir. Elde edilen cebirsel denklem sisteminin çözülmesiyle bilinmeyen sabitler bulunur. Daha sonra bulunan sabitler (3.7.1) denkleminde yerine konulursa ve (3.1.2) dönüşümü kullanılırsa (3.1.1) uyumlu kesirli diferansiyel denkleminin seyahat eden dalga çözümleri elde edilir

Bu yöntemde (3.7.2) denklemi

$$\left(\frac{dy}{d\xi}\right)^2 = ay^2 + by^4 + cy^6 \tag{3.7.17}$$

formunda alınırsa yöntem Yeni Auxiliary Metodu olarak adlandırılır (Sirendaoreji, 2006).

(3.7.2) denklemi

$$\left(\frac{dy}{d\xi}\right)^2 = ay^2 + by^4 + cy^6 + c_0 \tag{3.7.18}$$

formunda alınırsa da yöntem, Genişletilmiş Auxiliary Metodu olarak adlandırılır (Zayed ve Alurrfi, 2016).

3.7.2 Uygulamalar

3.7.2.1 Uyumlu Kesirli 3. Mertebeden KdV Denklemi

Aşağıdaki uyumlu kesirli 3. Mertebeden KdV diferansiyel denklemini ele alalım: (Odibat, 2017)

$$T_t^{\alpha} u + 6puT_x^{\beta} u + 6ru^2 T_x^{\beta} u + qT_x^{\beta} T_x^{\beta} T_x^{\beta} u = 0, \tag{3.7.19}$$

Burada $t > 0$, $0 < \alpha, \beta, \theta \le 1$ ve p, r, q sabittir. KdV denklemi sığ su yüzeylerindeki dalgaların matematiksel bir modelidir.

(3.1.2) değişken dönüşümü (3.7.19) denklemine uygulanırsa ve elde edilen denklemde integrasyon sabiti sıfır alınıp integrallenirse

$$kU + 3pmU^2 + 2rmU^3 + qm^3 U'' = 0 \tag{3.7.20}$$

elde edilir. (3.7.20) 'deki U'' ve U^3 terimlerinin kullanılmasıyla yapılan dengeleme işleminden

$$N+2=3N,$$
$$N=1,$$

bulunur. Farz edelim ki (3.7.20) 'un çözümü aşağıdaki şekilde olsun:

$$U(\xi)=a_0+a_1y(\xi), \quad a_0,a_1\neq 0 \tag{3.7.21}$$

(3.7.1) ve (3.7.21) denklemlerinin kullanılmasıyla U'' 'e kadar olan türevler hesaplanarak (3.7.20) 'da yerine yazılır ve $y(\xi)^k$ $(k=0,1)$ 'nin aynı dereceye sahip terimlerinin katsayılarının sıfıra eşitlenmesiyle aşağıda verilen cebirsel denklem sistemi elde edilir:

$$3a_1cm^3q=0,$$

$$2ra_1^3m+2bqa_1m^3=0,$$

$$3a_1^2mp+6a_0a_1^2mr=0,$$

$$6a_1ra_0^2m+6a_1pa_0m+aa_1qm^3+a_1k=0,$$

$$2mra_0^3+3mpa_0^2+ka_0=0.$$

Elde edilen denklem sisteminin çözümü:

$$a_0=-\frac{p}{2r}, \quad a=\frac{p^2}{2m^2qr}, \quad b=-\frac{a_1^2r}{m^2q}, \quad c=0, \quad k=\frac{mp^2}{r}: \tag{3.7.22}$$

şeklindedir. Burada p,r,q keyfi sabittir. (3.7.22) 'de bulunan sabitler (3.7.21) de yerine yazılırsa

$$U(\xi)=-\frac{p}{2r}+a_1y(\xi). \tag{3.7.23}$$

bulunur. (3.7.3)-(3.7.16) denklerinin (3.7.23)'de yerine yazılıp (3.1.2) dönüşümünün kullanılmasıyla (3.7.19) denkleminin aşağıdaki şekilde verilen seyahat eden dalga çözümleri elde edilir.

1. Aile için:

$$u_{7,1}(x,t)=-\frac{p}{2r}+\operatorname{sech}\left(\sqrt{\frac{p^2}{2m^2qr}}\xi\right)\left(\frac{\frac{p}{\sqrt{2}}}{r\left(1+\varepsilon\tanh\left(\sqrt{\frac{p^2}{2m^2qr}}\xi\right)\right)}\right),$$

2. Aile için:

$$u_{7,2}(x,t)=-\frac{p}{2r}+\operatorname{csch}\left(\sqrt{\frac{p^2}{2m^2qr}}\xi\right)\left(\frac{-\frac{p}{\sqrt{2}}}{r\left(1+\varepsilon\coth\left(\sqrt{\frac{p^2}{2m^2qr}}\xi\right)\right)}\right),$$

3. Aile için:

$$u_{7,3}(x,t)=-\frac{p}{2r}+\left(\frac{p^2}{\varepsilon\cosh\left(2\sqrt{\frac{p^2}{2m^2qr}}\varepsilon\right)+1}\right)^{\frac{1}{2}},$$

4. Aile için:

$$u_{7,4}(x,t)=-\frac{p}{2r}+\left(\frac{p^2}{\varepsilon\cos\left(2\sqrt{-\frac{p^2}{2m^2qr}}\varepsilon\right)+1}\right)^{\frac{1}{2}},$$

6. Aile için:

$$u_{7,5}(x,t)=-\frac{p}{2r}+\left(\frac{p^2}{\varepsilon\sin\left(2\sqrt{-\frac{p^2}{2m^2qr}}\varepsilon\right)+1}\right)^{\frac{1}{2}},$$

12. Aile için:

$$u_{7,6}(x,t)=-\frac{p}{2r}+\frac{p}{2r}\left(1+\varepsilon\coth\left(\frac{\sqrt{\frac{p^2}{2m^2qr}}}{2}\varepsilon\right)\right)^{1/2} \quad \text{bulunur.}$$

3.7.2.1 Uyumlu Kesirli Lineer Olmayan Schrödinger Denklemi

3.7.2.1.1 NLS+ Denklemi

Aşağıdaki uyumlu kesirli NLS+ diferansiyel denklemini ele alalım: (Manafian, 2016)

$$iT_t^{\alpha}q+T_x^{\beta}T_x^{\beta}q+2\gamma|q|^2q=0. \tag{3.7.24}$$

Burada $t>0$, $i^2=-1$, $0<\alpha,\beta\leq 1$ ve γ sabittir. (3.7.24) denklemi lineer olmayan Schrödinger denklemidir. Schrödinger denklemi doğal dispersiyonun bir optik fiber boyunca periyodik olarak değiştiği fiber-optik iletişim sistemlerinde kullanılan optik dalga kılavuzlarında elektromanyetik dalga yayılması için bir zarf denklemidir. Bir fiber optik kablo üzerinden bir taşıyıcı dalganın amplitüd modülasyonu yoluyla iletilen bir sinyalin genliğini açıklar. NLS+ ve NLS- versiyonları vardır. γ yerine $-\gamma$ alındığında NLS- denklemi olarak adlandırılır.

$k_1,\ k_2,m_1,\ m_2$ sabit olmak üzere aşağıdaki değişken dönüşümünü ele alalım

$$q(x,t)=U(\xi)e^{i\theta}, \quad \xi=k_1\frac{t^{\alpha}}{\alpha}+m_1\frac{x^{\beta}}{\beta}, \quad \theta=k_2\frac{t^{\alpha}}{\alpha}+m_2\frac{x^{\beta}}{\beta}. \tag{3.7.25}$$

(3.7.25) değişken dönüşümü (3.7.24) denklemine uygulanırsa

$$U''m_1^2-(k_2+m_2^2)U+2\gamma U^3=0. \tag{3.7.26}$$

elde edilir. (3.7.26)'daki U'' ve U^3 terimlerine göre dengeleme işlemi yapmak için

$$U^3=\left(a_0+a_1y\right)^3,$$

$$U''=3a_1cy^5+2a_1by^3+aa_1y.$$

şeklinde alalım. U^3'nün en yüksek derecesine $3N$ denilirse, U''ninki de $N+4$ olur. Böylece $N+4=3N$ den $N=2$ bulunur. Farz edelim ki (3.7.26)'nın çözümü aşağıdaki şekilde olsun:

$$U(\xi)=a_0+a_1y(\xi)+a_2y^2(\xi).\ a_0,a_1,a_2\neq 0 \tag{3.7.27}$$

(3.7.2) ve (3.7.27) denklemlerinin kullanılmasıyla

$$U'\left(\xi\right)=(a_1+2a_2y)\sqrt{cy^6+by^4+ay^2} \tag{3.7.28}$$

$$U''\left(\xi\right)=8a_2cy^6+3a_1cy^5+6a_2by^4+2a_1by^3+4aa_2y^2+aa_1y \tag{3.7.29}$$

bulunur. (3.7.27)-(3.7.29) denklemleri (3.7.26)'da yerine yazılır ve $y\left(\xi\right)^k\ \left(k=0,1,2\right)$ 'nin aynı dereceye sahip terimlerinin katsayılarının sıfıra eşitlenmesiyle aşağıda verilen cebirsel denklem sistemi elde edilir:

$$2\gamma a_2^3+8ca_2m_1^2=0,$$

$$6a_1\gamma a_2^2+3a_1cm_1^2=0,$$

$$6a_2bm_1^2+2\gamma(a_2(a_1^2+2a_0a_2)+a_0a_2^2+2a_1^2a_2)=0,$$

$$2a_1bm_1^2+2\gamma(a_1(a_1^2+2a_0a_2)+4a_0a_1a_2)=0,$$

$$4aa_2m_1^2+2\gamma(a_0(a_1^2+2a_0a_2)+2a_0a_1^2+a_0^2a_2)-a_2(m_2^2+k_2)=0,$$

$$6a_1\gamma a_0^2+aa_1m_1^2-a_1(m_2^2+k_2)=0,$$

$$2\gamma a_0^3+(-m_2^2-k_2)a_0=0.$$

Elde edilen denklem sisteminin çözümü:

$$a_0=\frac{1}{2}\left(\pm\frac{\sqrt{2}k_2}{\sqrt{\gamma\left(k_2+m_2^2\right)}}\pm\frac{\sqrt{2}m_2^2}{\sqrt{\gamma\left(k_2+m_2^2\right)}}\right),\ a_1=0,$$
$$a_2=\mp\frac{\sqrt{2}bm_1^2}{\sqrt{\gamma k_2+\gamma m_2^2}},\quad a=-\frac{k_2+m_2^2}{2m_1^2},\ c=-\frac{b^2m_1^2}{2\left(k_2+m_2^2\right)}: \tag{3.7.30}$$

şeklindedir. Burada γ keyfi sabittir. (3.7.30) 'da bulunan sabitler (3.7.27)'de yerine yazılırsa

$$U(\xi)=\frac{1}{2}\left(\pm\frac{\sqrt{2}k_2}{\sqrt{\gamma\left(k_2+m_2^2\right)}}\pm\frac{\sqrt{2}m_2^2}{\sqrt{\gamma\left(k_2+m_2^2\right)}}\right)\mp\frac{\sqrt{2}bm_1^2}{\sqrt{\gamma k_2+\gamma m_2^2}}y^2(\xi). \tag{3.7.31}$$

bulunur. (3.7.3)-(3.7.16) denklemlerinin (3.7.31)'de yerine yazılıp (3.1.2) dönüşümünün kullanılmasıyla (3.7.24) denkleminin aşağıdaki şekilde verilen seyahat eden dalga çözümleri elde edilir.

1. Aile için:

$$U_{7,7}(\xi)=\frac{1}{2}\left(\pm\frac{\sqrt{2}k_2}{\sqrt{\gamma\left(k_2+m_2^2\right)}}\pm\frac{\sqrt{2}m_2^2}{\sqrt{\gamma\left(k_2+m_2^2\right)}}\right)$$
$$\mp\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\gamma k_2+\gamma m_2^2}}\operatorname{sech}^2\left(\sqrt{\frac{-k_2-m_2^2}{2m_1^2}}\xi\right)\left(\frac{\frac{k_2+m_2^2}{2}}{1-\frac{1}{4}\left(1+\varepsilon\tanh\left(\sqrt{\frac{-k_2-m_2^2}{2m_1^2}}\xi\right)\right)^2}\right),$$

2. Aile için:

$$U_{7,8}(\xi)=\frac{1}{2}\left(\pm\frac{\sqrt{2}k_2}{\sqrt{\gamma\left(k_2+m_2^2\right)}}\pm\frac{\sqrt{2}m_2^2}{\sqrt{\gamma\left(k_2+m_2^2\right)}}\right)$$

$$\mp\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\gamma k_2+\gamma m_2^2}}\operatorname{csch}^2\left(\sqrt{-\frac{k_2+m_2^2}{2m_1^2}}\xi\right)\left(\frac{-\frac{k_2+m_2^2}{2}}{1-\frac{1}{4}\left(1+\varepsilon\coth\left(\sqrt{-\frac{k_2+m_2^2}{2m_1^2}}\xi\right)\right)^2}\right),$$

3. Aile için:

$$U_{7,9}(\xi)=\frac{1}{2}\left(\pm\frac{\sqrt{2}k_2}{\sqrt{\gamma\left(k_2+m_2^2\right)}}\pm\frac{\sqrt{2}m_2^2}{\sqrt{\gamma\left(k_2+m_2^2\right)}}\right)$$

$$\mp\frac{\sqrt{2}b}{\sqrt{\gamma k_2+\gamma m_2^2}}\left(\frac{-k_2-m_2^2}{\varepsilon\sqrt{\Delta}\cosh\left(2\sqrt{-\frac{k_2+m_2^2}{2m_1^2}}\varepsilon\right)-b}\right),$$

4. Aile için:

$$U_{7,10}(\xi)=\frac{1}{2}\left(\pm\frac{\sqrt{2}k_2}{\sqrt{\gamma\left(k_2+m_2^2\right)}}\pm\frac{\sqrt{2}m_2^2}{\sqrt{\gamma\left(k_2+m_2^2\right)}}\right)$$

$$\mp\frac{\sqrt{2}b}{\sqrt{\gamma k_2+\gamma m_2^2}}\left(\frac{-k_2-m_2^2}{\varepsilon\sqrt{\Delta}\cos\left(2\sqrt{\frac{k_2+m_2^2}{2m_1^2}}\varepsilon\right)-b}\right),$$

5. Aile için:

$$U_{7,11}(\xi)=\frac{1}{2}\left(\pm\frac{\sqrt{2}k_2}{\sqrt{\gamma\left(k_2+m_2^2\right)}}\pm\frac{\sqrt{2}m_2^2}{\sqrt{\gamma\left(k_2+m_2^2\right)}}\right)$$

$$\mp\frac{\sqrt{2}b}{\sqrt{\gamma k_2+\gamma m_2^2}}\left(\frac{-k_2-m_2^2}{\varepsilon\sqrt{-\Delta}\sinh\left(2\sqrt{-\frac{k_2+m_2^2}{2m_1^2}}\varepsilon\right)-b}\right),$$

6. Aile için:

$$U_{7,12}(\xi)=\frac{1}{2}\left(\pm\frac{\sqrt{2}k_2}{\sqrt{\gamma\left(k_2+m_2^2\right)}}\pm\frac{\sqrt{2}m_2^2}{\sqrt{\gamma\left(k_2+m_2^2\right)}}\right)$$

$$\mp\frac{\sqrt{2}b}{\sqrt{\gamma k_2+\gamma m_2^2}}\left(\frac{-k_2-m_2^2}{\varepsilon\sqrt{\Delta}\sinh\left(2\sqrt{\frac{k_2+m_2^2}{2m_1^2}}\varepsilon\right)-b}\right),$$

7. Aile için:

$$U_{7,13}(\xi)=\frac{1}{2}\left(\pm\frac{\sqrt{2}k_2}{\sqrt{\gamma\left(k_2+m_2^2\right)}}\pm\frac{\sqrt{2}m_2^2}{\sqrt{\gamma\left(k_2+m_2^2\right)}}\right)$$

$$\mp\frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{\gamma k_2+\gamma m_2^2}}\operatorname{sech}^2\left(\sqrt{-\frac{k_2+m_2^2}{2m_1^2}}\varepsilon\right)\left(\frac{k_2+m_2^2}{1+\varepsilon\tanh\left(\sqrt{-\frac{k_2+m_2^2}{2m_1^2}}\varepsilon\right)}\right),$$

8. Aile için:

$$U_{7,14}(\xi)=\frac{1}{2}\left(\pm\frac{\sqrt{2}k_2}{\sqrt{\gamma\left(k_2+m_2^2\right)}}\pm\frac{\sqrt{2}m_2^2}{\sqrt{\gamma\left(k_2+m_2^2\right)}}\right.$$

$$\left.\mp\frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{\gamma k_2+\gamma m_2^2}}\operatorname{sech}^2\left(\sqrt{\frac{k_2+m_2^2}{2m_1^2}}\varepsilon\right)\left(\frac{k_2+m_2^2}{1-\varepsilon\tanh\left(\sqrt{\frac{k_2+m_2^2}{2m_1^2}}\varepsilon\right)}\right)\right),$$

9. Aile için:

$$U_{7,15}(\xi)=\frac{1}{2}\left(\pm\frac{\sqrt{2}k_2}{\sqrt{\gamma\left(k_2+m_2^2\right)}}\pm\frac{\sqrt{2}m_2^2}{\sqrt{\gamma\left(k_2+m_2^2\right)}}\right.$$

$$\left.\mp\frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{\gamma k_2+\gamma m_2^2}}\operatorname{csch}^2\left(\sqrt{-\frac{k_2+m_2^2}{2m_1^2}}\varepsilon\right)\left(\frac{-k_2-m_2^2}{1+\varepsilon\coth\left(\sqrt{-\frac{k_2+m_2^2}{2m_1^2}}\varepsilon\right)}\right)\right),$$

10. Aile için:

$$U_{7,16}(\xi)=\frac{1}{2}\left(\pm\frac{\sqrt{2}k_2}{\sqrt{\gamma\left(k_2+m_2^2\right)}}\pm\frac{\sqrt{2}m_2^2}{\sqrt{\gamma\left(k_2+m_2^2\right)}}\right.$$

$$\left.\mp\frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{\gamma k_2+\gamma m_2^2}}\csc^2\left(\sqrt{\frac{k_2+m_2^2}{2m_1^2}}\varepsilon\right)\left(\frac{k_2+m_2^2}{1+i\varepsilon\cot\left(\sqrt{\frac{k_2+m_2^2}{2m_1^2}}\varepsilon\right)}\right)\right),$$

11. Aile için:

$$U_{7,17}(\xi)=\frac{1}{2}\left(\pm\frac{\sqrt{2}k_2}{\sqrt{\gamma\left(k_2+m_2^2\right)}}\pm\frac{\sqrt{2}m_2^2}{\sqrt{\gamma\left(k_2+m_2^2\right)}}\right.$$

$$\left.\mp\frac{k_2+m_2^2}{\sqrt{2}\sqrt{\gamma k_2+\gamma m_2^2}}\left(1+\varepsilon\tanh\left(\frac{\sqrt{-\frac{k_2+m_2^2}{2m_1^2}}}{2}\varepsilon\right)\right)\right),$$

12. Aile için:

$$U_{7,18}(\xi)=\frac{1}{2}\left(\pm\frac{\sqrt{2}k_2}{\sqrt{\gamma\left(k_2+m_2^2\right)}}\pm\frac{\sqrt{2}m_2^2}{\sqrt{\gamma\left(k_2+m_2^2\right)}}\right.$$

$$\left.\mp\frac{k_2+m_2^2}{\sqrt{2}\sqrt{\gamma k_2+\gamma m_2^2}}\left(1+\varepsilon\coth\left(\frac{\sqrt{-\frac{k_2+m_2^2}{2m_1^2}}}{2}\varepsilon\right)\right)\right),$$

13. Aile için:

$$U_{7,19}(\xi)=\frac{1}{2}\left(\pm\frac{\sqrt{2}k_2}{\sqrt{\gamma\left(k_2+m_2^2\right)}}\pm\frac{\sqrt{2}m_2^2}{\sqrt{\gamma\left(k_2+m_2^2\right)}}\right.$$

$$\left.\pm 8\frac{\sqrt{2}b}{\sqrt{\gamma k_2+\gamma m_2^2}}\left(\frac{\left(k_2+m_2^2\right)e^{2\varepsilon\sqrt{-\frac{k_2+m_2^2}{2m_1^2}}\xi}}{\left(e^{2\varepsilon\sqrt{-\frac{k_2+m_2^2}{2m_1^2}}\xi}-4b\right)^2-16b^2}\right)\right),$$

14. Aile için

$$U_{7,20}(\xi)=\frac{1}{2}\left(\pm\frac{\sqrt{2}k_2}{\sqrt{\gamma\left(k_2+m_2^2\right)}}\pm\frac{\sqrt{2}m_2^2}{\sqrt{\gamma\left(k_2+m_2^2\right)}}\right.$$

$$\left.+8\frac{\sqrt{2}b}{\sqrt{\gamma k_2+\gamma m_2^2}}\left(\frac{\left(k_2+m_2^2\right)e^{2\varepsilon\sqrt{-\frac{k_2+m_2^2}{2m_1^2}}\xi}}{1-16b^2e^{4\varepsilon\sqrt{-\frac{k_2+m_2^2}{2m_1^2}}\xi}}\right)\right).$$

4. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu tez çalışmasında bazı fiziksel lineer olmayan uyumlu uzay-zaman kesirli kısmi diferansiyel denklemlerin seyahat eden dalga çözümleri elde edilmiştir.

Birinci bölümde kesirli türevin tarihi ve kesirli türev çeşitleri anlatılmıştır. Literatürdeki kesirli ve lineer olmayan kısmi diferansiyel denklemlerin çözümü üzerine yapılan çalışmalardan bahsedilmiştir.

İkinci bölümde uyumlu kesirli türevin tanımı, özellikleri ve önemli bazı teoremler verilmiştir. Uyumlu kesirli türevin diğer popüler kesirli türevlere göre birçok kolaylığı vardır. Uyumlu kesirli türevdeki birçok kural genellikle klasik türeve benzerlik gösterir. Örneğin, sabit fonksiyonun uyumlu kesirli türevi sıfır iken Riemann kesirli türevi için bu durum geçerli değildir. Genellikle kesirli türevler iki fonksiyonun çarpımı ve bölümünün türev fomülünü, zincir kuralını sağlamazken uyumlu kesirli türev için bu özellikler sağlanır. Bu nedenle uyumlu kesirli türevle çalışmak avantaj sağlamaktadır.

Üçüncü bölümde kesirli mertebeli lineer olmayan kısmi diferansiyel denklemlerin çözümü için sırasıyla $\frac{G'}{G}$ -açılım yöntemi, $\frac{G'}{G^2}$ - açılım yöntemi, Kudryashov yöntemi, $\left(b+Q^2\right)$-tanjant fonksiyonu yöntemi, $\left(b+Q^2\right)$ değiştirilmiş tanjant fonksiyonu yöntemi, Üstel-fonksiyon yöntemi, basitleştirilmiş $\tan\left(\frac{F}{2}\right)$-açılım yöntemi ve Auxilary yöntemi tanıtılmıştır. Ardından her yöntem farklı lineer olmayan uyumlu kesirli kısmi diferansiyel denklemlere uygulanarak denklemlerin tam çözümlerinin elde edildiği görülmüştür. Bu yöntemlerin tümü, bilgisayar programı kullanımına elverişli olduğundan kısa zamanda lineer olmayan uyumlu kesirli kısmi diferansiyel denklemlerin çözümüne ulaşmamızı mümkün kılmaktadır. Ancak yöntemin dezavantajı da vardır. Verilen yöntemler, lineer veya lineer olmayan terimlerin katsayılarının bağımsız değişkenin fonksiyonu olduğu durumdaki kısmi diferansiyel denklemlere uygulanamazlar. Diğer bir deyişle, sunulan yöntemlere uygulanan kesirli kısmi diferansiyel denklemlerin tüm katsayıları sabit olmak zorundadır.

Sunulan yöntemler, uyumlu kesirli türevli, lineer olmayan, tüm katsayıları sabit olan kısmi diferansiyel denklem sistemlerine de uygulanabilir.

5. KAYNAKLAR

Allahviranloo T., Gouyandeh Z, Armand A., “Numerical solutions for fractional differential equations by Tau-Collocation method”, *Applied Mathematics and Computation,* 271, 979-990, 2015.

Abdeljawad T., “On conformable fractional calculus.”, *Journal of Computational and Applied Mathematics,* 279, 57-66, (2015).

Abdelsalam E., Gumma E., “Analytical Solution Of Nonlinear Space–Time Fractional Differential Equations Using The İmproved Fractional Riccati Expansion Method”, *Ain Shams Engineering Journal* 613–620 (2015).

Abdelsalam U.M., “Exact travelling solutions of two coupled (2+1)-Dimensional Equations”, *Journal of the Egyptian Mathematical Society*, 25, 125-128 (2017)

Abdulkarem A., Al-Shawba, K.A. Gepreel, F.A. Abdullah, A. Azmi, “Abundant closed form solutions of the conformable time fractional Sawada-Kotera-Ito equation using (G′/G)-expansion method,” *Results in Physics*, 9, 337-343, (2018).

Aiyer RN, Fuchssteiner B, Oevel W., “Solitons and DiscreteEigenfunctions of the Recursion Operator of Nonlinear Evolution Equations: The Caudrey-Dodd- Gibbon-Sawada-Kotera Equations.”, *Journal of Physics A: Mathematical and General*, 19, 3755-3770, (1986).

Akbulut A., Kaplan M., “Auxiliary equation method for time-fractional differential equations with conformable derivative”, *Computers & Mathematics with Applications,* 75, 876-882, (2018).

Ali A., Kamal S., Khan R.A., “Numerical treatment for traveling wave solutions of fractional Whitham-Broer-Kaup equations”, *Alexandria Engineering Journal*, 57, 1991-1998, (2018).

Ayub K., Khan M.Y., Hassan Q.M., “Solitary and periodicwave solutions of Calogero–Bogoyavlenskii–Schiffequationviaexp-functionmethods”, *Computers&Mathematicswith Applications*, 74, 3231-3241, (2017).

Bekir A., Boz, A. “Application of Exp-function method for (2 + 1)-dimensional Nonlinear evolution equations”, *Chaos, Solitons and Fractals*, 40, 458–465, (2009).

Bekir A., Guner O., "The $\left(G'/G\right)$-Expansion Method Using Modified Riemann–Liouville Derivative For Some Space-Time Fractional Differential Equations", *Ain Shams Engineering Journal,* 959–965 (2014).

Bekir A.,Guner O., ve Cevikel A., "The Exp-function Method for Some Time-fractional Differential Equations", *Journal Of Automatıca Sınıca,* 4, 315-321, (2017).

Bibi S., Tauseef S., Din M., Khan U, Ahmed N., "Khater method for Nonlinear Sharma Tasso-Olever (STO) equation of fractional order." *Results in Physics,* 7, 4440-4450, (2017).

Boiti M., J. J. P. Leon, and F. Pempinelli, "Integrabletwo-dimensional generalisation of the sine- and sine-Gordon equations.", *Inverse Prob.,* 3, 37-49, (1987).

Chen C., Yao-Lin Jiang, "Simplest equation method for some time-fractional partial differential equations with conformable derivative", *Computers & Mathematics with Applications*, 75, 2978-2988, (2018).

Choi J., Kim H., "Soliton Solutions For The Space-Time Nonlinear Partial Differential Equations With Fractional-Orders", *Chinese Journal Of Physics,* 556–565 (2017).

Choi J., Kim H., Sakthivel R., "On Certain Exact Solutions Of Diffusive Predator-Prey System Of Fractional Order", *Chinese Journal Of Physics,* 135-146 (2016).

Çenesiz Y., Tasbozan O., Kurt A., "Functional Variable Method For Conformable Fractional Modified Kdv-Zk Equation And Maccari System", *Tbilisi Mathematical Journal*, 117-125 (2017).

Din M., Tauseef S., Nawaz, Touqeer, Azhar, Ehtsham, Akbar, M. Ali, "Fractional sub-equation method to space–time fractional Calogero-Degasperis and potential Kadomtsev-Petviashvili equations", *Journal of Taibah University for Science,* 11, 258-263, (2017).

Ebaid A., "An improvement on the Exp-function method when balancing the highest order linear and Nonlinear terms", *Journal of Mathematical Analysis and Applications,* 392, 1-5, (2012).

Eslami M, “Exact Traveling Wave Solutions To The Fractional Coupled Nonlinear Schrodinger Equations”, *Applied Mathematics And Computation*, 141–148 (2016).

Fazli M.,Aghdaei, J. Manafianheris, “Exact Solutions of the Couple-Boiti-Leon-Pempinelli System by the Generalized $\frac{G'}{G}$ -expansion Method”, *Journal of Mathematical Extension*, 5, 91-104, (2011).

Feng Q., “A New Analytical Method For Seeking Traveling Wave Solutions Of Space–Time Fractional Partial Differential Equations Arising İn Mathematical Physics”, *Optik*, 310-323 (2017).

Foroutan M., Kumar D., Manafian J., Hoque A., “New explicit soliton and other solutions for the conformable fractional Biswas–Milovic equation with Kerr and parabolic nonlinearity through an integration scheme”, *Optik*, 170, 190-202, (2018).

Ganji D.D., Davodi A.G., Geraily Y.A. “Sawada KoteraIto, Lax and Kaup-Kupershmidt equations using Exp-function method.” .*Math. Meth. Appl. Sci*., 33, 167-176, (2010).

Ghany H., Elegan S., Hyder A., “Exact Travelling Wave Solutions For Stochastic Fractional Hirota-Satsuma Coupled Kdv Equations”, *Chınese Journal Of Physıcs*, (2015).

Guner O., Atik H., “Soliton Solution Of Fractional-Order Nonlinear Differential Equations Based On The Exp-Function Method”, *Optik* 10076–10083 (2016).

Guner O., Atik H., Kayyrzhanovich A., “New Exact Solution For Space-Time Fractional Differential Equations Via $\left(G'/G\right)$ -Expansion Method”, *Optik* 696-701 (2017).

Guner O., Bekir A., “A Novel Method For Nonlinear Fractional Differential Equations Using Symbolic Computation”, *Waves İn Random And Complex Media*, 163-170 (2016).

Guner O., Bekir A., “The Exp-Function Method For Solving Nonlinear Space–Time Fractional Differential Equations İn Mathematical Physics”, *Journal Of The Association Of Arab Universities For Basic And Applied Sciences*, (2017).

Guner O., Atik H, Kayyrzhanovichc A.A., “New exact solution for space-time fractional differential equations via $\left(\frac{G'}{G}\right)$-expansion method ” *Optik,* 130, 696-701, (2017).

Hosseini K., Bekir A., Ansari R, “New Exact Solutions Of The Conformable Time-Fractional Cahn–Allen And Cahn–Hilliard Equations Using The Modified Kudryashov Method”, *Optik*, 203-209 (2017).

Inan E., Duran S., Uğurlu Y., “ $\tan\left(\frac{F}{2}\right)$-expansion method for travelingwave solutions of AKNS and Burgers-like equations ” *Optik*, 138, 15–20, (2017).

Inc M. Yusuf A., Isa A., Baleanu D., “Dark and singular optical solitons for the conformable space-time nonlinear Schrödinger equation with Kerr and power law nonlinearity,” *Optik*, 162, 65-75, (2018).

Islam T. Akbar A., Azad A.K., “Traveling wave solutions to some nonlinear fractional partial differential equations through the rational (G′/G)-expansion method,” *Journal of Ocean Engineering and Science,* 3, 76-81, 2018.

Jawada A., Marko D. Petković b., Biswas A., “Soliton solutions for nonlinear Calaogero–Degasperis and potential Kadomtsev–Petviashvili equations”, *Computers and Mathematicswith Applications*, 62, 2621-2628, (2011).

Jiang Y.L., Ding X.L. “Waveform relaxation methods for fractional differential equations wit”h the Caputo derivatives”, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 238, 51-67, (2013).

Jimbo M. and Miwa T, “Solitons and infinite dimensional Liealgebras”, *Publ. RIMS. Kyoto Univ. 19*, 943–1001, (1983).

Khalil R., Horani M. Al, Yousef A., Sababheh M., “A newdefinition of fractional derivative.”, *Journal of Computational and Applied Mathematics,* 264, 65-70, (2014).

Khater M.M.A., Seadawy A.R., Lu D., “Elliptic and solitary wave solutions for Bogoyavlenskii equations system, couple Boiti-Leon-Pempinelli equations system and Time-fractional Cahn-Allen equations”, *Results in Physics,* 7, 2325-2333, (2017).

Korkmaz A., Hepson O.E., Kamyar Hosseini K., Rezazadeh H., Eslami M, “Sine-Gordon expansion method for exact solutions to conformable time fractional equations in RLW-class," *Journal of King Saud University - Science,* (2018).

Korkmaz A., Hepson O.E., "Traveling waves in rational expressions of exponential functions to the conformable time fractional Jimbo–Miwa and Zakharov–Kuznetsov equations", *Optical and Quantum Electronics,* 50-42 (2017).

Korkmaz A. "The Modified Kudryashov Method for the Conformable Time Fractional (3+1)-dimensional Kadomtsev-Petviashvili and the Modified Kawahara Equations." preprints, (2016).

Korpınar Z., Tchier, Inc, Ragoub, Bayram, "New solutions of the fractional Boussinesq-like equations by means of conformable derivatives", *Results in Physics*, 13,2211-3797 (2019).

Kumar D., Seadawy A.R., Joardar AK., "Modified Kudryashov method via new exact solutions for some conformable fractional differential equations arising in mathematical biology," *Chinese Journal of Physics,* 56, 75-85, (2018).

Kumar D., Kaplan M., "New analytical solutions of $(2+1)$-dimensional conformable time fractional Zoomeron equation via two distinct techniques," *Chinese Journal of Physics*, 56, 2173-2185, (2018).

Kurt A., "New periodic wave solutions of a time fractional integrable shallow water equation," *Applied Ocean Research*, 85, 128-135, (2019).

Manafian J., Lakestani M., "Application of $\tan(\phi/2)$-expansion method for solving the Biswas–Milovic equation for Kerrlaw nonlinearity", *Optik,* 127, 2040-2054, (2016).

Manafian J, "Optical soliton solutions for Schrödinger type Nonlinear evolution equations by the $\tan(\phi/2)$-expansion method", *Optik,* 127, 4222-4245, (2016).

Moatimid G.M., Rehab M. El-Shiekh, Abdul-Ghani A.A.H. Al-Nowehy, " Exact solutions for Calogero–Bogoyavlenskii–Schiff equations using symmetry method." *Applied Mathematics and Computation,* 220, 455-462, (2013).

Mohammed O. Al-Amr, “Exact solutions of the generalized (2+1)-dimensional Nonlinear evolution equations via the modified simple equation method”, *Computers&Mathematics with Applications*, 69, 390-397, (2015).

Muatjetjeja B. And Khalique C. M., “Benjamin–Bona–Mahony Equation with Variable Coefficients: Conservation Laws” *International Institute for Symmetry Analysis and Mathematical Modelling,* 6, 1026-1036, (2014).

Muhannad A. Shallal, Hawraz N. Jabbar, Khalid K. Ali, “Analytic solution for the space-time fractional Klein-Gordon and coupled conformable Boussinesq equations.” *Results in Physics*, 8, 372-378, (2018).

Neamaty A, Agheli B, Darzi R. “Exact travellingwave Solutions for some nonlinear time fractional fifth-order Caudrey-Dodd-Gibbon equations by $\frac{G'}{G}$-expansion method.”, *SeMa Journal*, 73, 121-129, (2016).

Odibat Z. A “Riccati equations approach and travelling wave solutions for nonlinea revolution equations”, *Int J Appl. Comput Math*. 3, 1-13, (2017).

Osman M.S., Korkmaz A., Rezazadeh H., Mirzazadeh M., Eslami M., Zhou Q., “The unified method for conformable time fractional Schro¨dinger equation with perturbation terms,” *Chinese Journal of Physics,* 56, 2500-2506, (2018).

Raslan K.R, Ali K.K., Shallal M.A., “The Modified Extended Tanh Method With The Riccati Equation For Solving The Space-Time Fractional EW And MEW Equations”, *Chaos, Solitons And Fractals,* 404–409 (2017).

Ray S.S., Gupta A.K., “Two-dimensional Legendre wavelet method for travelling wave solutions of time-fractional generalized seventh order KdV equations”, *Computers & Mathematics with Applications*, 73, 1118-1133, (2017).

Ren B., Yu J., Liu X.Z., “New Interaction Solutions of (3+1)-Dimensional KP and (2+1)-Dimensional Boussinesq Equations”, *Institute of Nonlinear Science,* (2015).

Rezazadeh H., Alizamini S.M.M., Eslami M., Rezazadeh M., Mirzazadeh M., Abbagari S., “New optical solitons of nonlinear conformable fractional Schrödinger-Hirota equations”, *Optik*, 172, 545-553 (2018).

Shallal M.A., Jabbar H.N., Ali K.K., “Analytic solution for the space-time fractional Klein-Gordon and coupled conformable Boussinesq equations,” *Results in Physics,* 8, 372-378, (2018).

Sirendaoreji, “A new Auxiliary equation and exact Travelling wave solutions of nonlinear equations”, *Physics Letters A,* 356, 124–130, (2006).

Sirendaoreji, “Exact Travelling wave solutions for fourforms of Nonlinear Klein–Gordon equations.”, *PhysicsLetters A,* 363, 440–447, (2007).

Sirendaoreji, Jiong S., “Auxiliary equation method for solving Nonlinear partial differential equations”, *Physics Letters A,* 309, 387–396, (2003).

Taghizadeh N., Mirzazadeh M., Rahimian M., Akbari M., “Application of the simplestequation method tosome time-fractional partial differential equations,” *Ain Shams Engineering Journal,* 4, 897-902, (2013).

Tamsir M., Srivastava V.K., “Analytical study of time-fractional order Klein–Gordon equations”, *Alexandria Engineering Journal*, 55, 561-567, (2016).

Tauseef, Din M., Bibi S., “Exact solutions for nonlinear fractional differential equations using $\frac{G'}{G^2}$ -expansion method.” *Alexandria Engineering Journal*, 57, 1003-1008, (2017).

Thabet H., Subhash Kendre, “Analytical solutions for conformable space-time fractional partial differential equations via fractional differential transform”, *Chaos, Solitons & Fractals,* 109, 238-245, (2018).

Wazwaz M. “Partial differential equations and solitary waves theory.” *Springer Science and Business Media*, (2010).

Xu W., Zhang S, “The averaging principle for stochastic differential equations with Caputo fractional derivative”, *Applied Mathematics Letters,* 93, 79-84, (2019).

Yaslan H.C, “New Analytic Solutions Of The Conformable Space–Time Fractional Kawahara Equation”, *Optik,* 123-126, (2017).

Yaslan H.C. “New analytic solutions of the space-time fractional Broer–Kaup and approximate long water wave equations,” *Journal of Ocean Engineering and Science,* 3, 295-302, (2018).

Yaslan H.C., “New Analytic Solutions Of The Space–Time Fractional Cahn–Hilliard Equations”, *Optik*, 990–995, (2017).

Yaslan H.C., Girgin A., “(G’/G)-expansion Method for the conformable space-time fractional Jimbo-Miwa and Burger-Like Equations”, *Mathematical Sciences and Applications E-Notes,* 7(1) 47-53, (2019).

Yaslan H.C., Girgin A., “Exp-function method for the conformable space-time Fractional STO, ZKBBM and coupled Boussinesq equations”, *Arab Journal of Basic and Applied Sciences*, 26(1) 163-170, (2019).

Yaslan H.C., Girgin A., “New exact solutions for the conformable space-time fractional KdV, CDG, (2+1)-dimensional CBS and (2+1)-dimensional AKNS equations”, *Journal of Taibah University for Science,* 13 (1) 1-8, (2019).

Yaslan H.C., Girgin A., “SITEM for the Conformable Space-Time Fractional Coupled KD Equations”, *Journal of Engineering Technology and Applied Sciences*, 3(3) 223-233, (2018).

Zayed E. M. E., Alurr K. A. E. “The modified Kudryashov method for solving some seventh order Nonlinear PDEs in mathematical physics.” *WJMS*, 11,308-319, (2015).

Zayed E., Amer Y., Shohib R., “The Fractional Complex Transformation For Nonlinear Fractional Partial Differential Equations İn The Mathematical Physics”, Journal Of The Association Of Arab Universities For Basic And *Applied Sciences*, 59-69 (2016).

Zayed E.M.E., Alurrfi K.A.E., “Extended Auxiliary equation method and its applications for finding the exact solutions for a class of Nonlinear Schrödinger-type equations”, *Applied Mathematics and Computation,* 289, 111-131, (2016).

Zhang H., Jiang X., Zhao, Zheng, “Spectral method for solving the time fractional Boussinesq equations”, *Applied Mathematics Letters*, 85, 164-170, (2018).

Zhang, Xia T.C., “New exact solutions of the conformable time-fractional Cahn–Allen and Cahn–Hilliard equations using the modified Kudryashov method”, *Journal Of Physıcs A: Mathematıcal And Theoretıcal*, 40, 227-248, (2007).

Zhou Y., Zhang C., “One-leg methods for nonlinear stiff fractional differential equations with Caputo derivatives”, *Applied Mathematics and Computation*, 348, 594-608, (2019).

6. ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı	: Ayşe GİRGİN
Doğum Yeri ve Tarihi	: DENİZLİ/21.01.1993
Lisans Üniversite	: Pamukkale Üniversitesi
Elektronik Posta	: aysegirgin20@gmailcom

Yayın Listesi :

•Yaslan H.C., Girgin A., "(G'/G)-expansion Method for the conformable space-time fractional Jimbo-Miwa and Burger-Like Equations." *Mathematical Sciences and Applications E-Notes,* 7(1) 47-53, (2019).

• Yaslan H.C., Girgin A., "Exp-function method for the conformable space-time Fractional STO, ZKBBM and coupled Boussinesq equations." *Arab Journal of Basic and Applied Sciences*, 26(1) 163-170, (2019).

• Yaslan H.C., Girgin A., "New exact solutions for the conformable space-time fractional KdV, CDG, (2+1)-dimensional CBS and (2+1)-dimensional AKNS equations." *Journal of Taibah University for Science,* 13 (1) 1-8, (2019).

• Yaslan H.C., Girgin A., "SITEM for the Conformable Space-Time Fractional Coupled KD Equations." *Journal of Engineering Technology and Applied Sciences,* 3(3) 223-233, (2018).