**T.C.**
**PAMUKKALE ÜNİVERSİTESİ**
**FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**
**MATEMATİK ANABİLİM DALI**

# $f(R)$ GRAVİTASYON MODELİNİN KÜRESEL SİMETRİK STATİK ÇÖZÜMLERİ

**YÜKSEK LİSANS TEZİ**

**BEYDA DOYRAN**

**DENİZLİ, TEMMUZ-2019**

T.C.
PAMUKKALE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

# $f(R)$ GRAVİTASYON MODELİNİN KÜRESEL SİMETRİK STATİK ÇÖZÜMLERİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

BEYDA DOYRAN

DENİZLİ, TEMMUZ-2019

# KABUL VE ONAY SAYFASI

**Beyda Doyran** tarafından hazırlanan "$f(R)$ **GRAVİTASYON MODELİNİN KÜRESEL SİMETRİK STATİK ÇÖZÜMLERİ** " adlı tez çalışmasının savunma sınavı 03.07.2019 tarihinde yapılmış olup aşağıda verilen jüri tarafından oy birliği / oy çokluğu ile Pamukkale Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı Uygulamalı Matematik Bilim Dalı Yüksek Lisans Tezi olarak kabul edilmiştir.

| Jüri Üyeleri | İmza |
|---|---|
| Danışman<br>Doç.Dr. Özcan SERT | ................................. |
| Üye<br>Prof.Dr. Muzaffer ADAK<br>Pamukkale Üniversitesi | ................................. |
| Üye<br>Doç. Dr. Tolga BİRKANDAN<br>İstanbul Teknik Üniversitesi | ................................. |

Pamukkale Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulunun 17/07/2019 tarih ve 29/15-22 sayılı kararıyla onaylanmıştır.

.................................
Prof. Dr. Uğur YÜCEL U.

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

Bu tezin tasarımı, hazırlanması, yürütülmesi, araştırmalarının yapılması ve bulgularının analizlerinde bilimsel etiğe ve akademik kurallara özenle riayet edildiğini; bu çalışmanın doğrudan birincil ürünü olmayan bulguların, verilerin ve materyallerin bilimsel etiğe uygun olarak kaynak gösterildiğini ve alıntı yapılan çalışmalara atfedildiğine beyan ederim.

BEYDA DOYRAN

# ÖZET

**$f(R)$ GRAVİTASYON MODELİNİN KÜRESEL SİMETRİK STATİK ÇÖZÜMLERİ**
**YÜKSEK LİSANS TEZİ**
**BEYDA DOYRAN**
**PAMUKKALE ÜNİVERSİTESİ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**
**MATEMATİK ANABİLİM DALI**
**TEZ DANIŞMANI: DOÇ. DR. ÖZCAN SERT**
**DENİZLİ, TEMMUZ-2019**

Bu tezin ilk kısmında, çalışma boyunca kullanılan dış cebir uzayı ve ilgili temel kavramlar tanıtılarak diferansiyel formların genel özellikleri verilmektedir. Daha sonra bu kavramlar kullanılarak, Einstein'ın gravitasyon teorisinin modifiye bir durumu olan ve eylem integralindeki $R$ Ricci skalarının $f(R)$ fonksiyonuyla değiştirilmesiyle elde edilen gravitasyon teorisi incelenmektedir. Bu teorinin alan denklemlerinin $f(R)$ gravitasyon teorisinin eyleminden varyasyon hesabıyla diferansiyel formlar kullanılarak adım adım nasıl türetildiği gösterilmektedir. Daha sonra, bu alan denklemlerinin küresel simetrik statik çözümleri incelenmektedir. Bu alan denkleminde veya eylemde madde kısmının varlığı da düşünülmüştür. İdeal bir akışkan denilen $\rho$ enerji yoğunluğu ve $p$ basıncına sahip bir yıldızın iç çözümlerini bulmak için bu alan denklemleri kullanılmaktadır.

**ANAHTAR KELİMELER**: $f(R)$ Gravitasyonu, küresel simetrik çözümler, Diferansiyel formlar.

# ABSTRACT


**SPHERICALLY SYMMETRIC STATIC SOLUTIONS OF $f(R)$ GRAVITATION MODEL**
**MSC THESIS**
**BEYDA DOYRAN**
**PAMUKKALE UNIVERSITY INSTITUTE OF SCIENCE**
**MATHEMATICS**
**(SUPERVISOR: DOÇ. DR. ÖZCAN SERT)**
**DENİZLİ, JULY-2019**

In the first part of this thesis, the general properties of differential forms are given by introducing the exterior algebraic space and the related basic concepts which used throughout the study. Then, using these concepts, the gravitation theory which is a modified Einstein's theory of gravitation obtained by replacing $R$ Ricci scalar with $f(R)$ function in the action integral is examined. It is shown that how the field equations of this theory are derived step by step using differential forms from the action of the theory of $f(R)$ gravity. Then, static, spherically symmetric solutions of the field equations are investigated. The presence of the matter part is also considered in the field equations or action. These field equations are used to find the interior solutions of a star which called an ideal fluid with energy density $\rho$ and pressure $p$.



**KEYWORDS**: $f(R)$ Gravity, Spherically symmetric solutions, Differential forms.

# İÇİNDEKİLER

**Sayfa**

# SEMBOL LİSTESİ

| | | |
|---|---|---|
| $\boldsymbol{M}$ | : | Manifold |
| $\boldsymbol{g}$ | : | Metrik |
| $\{\boldsymbol{x^\mu}\}$ | : | Koordinat Fonksiyonları |
| $\boldsymbol{T(M)}$ | : | Tanjant uzayı |
| $\boldsymbol{T^\star(M)}$ | : | Kotanjant uzayı |
| $\boldsymbol{\eta_{ab}}$ | : | Minkowski metriği |
| $\{\boldsymbol{e^a}\}$ | : | Ortonormal Referans Koçerçevesi 1-formları |
| $\{\boldsymbol{X_b}\}$ | : | Ortonormal Referans Çerçevesi |
| $\wedge$ | : | Dış çarpım işlemi |
| $\boldsymbol{\imath}$ | : | iç çarpım işlemi |
| $\boldsymbol{d}$ | : | Dış türev işlemi |
| $*$ | : | Hodge Star İşlemi |
| $\boldsymbol{\Lambda^p(M)}$ | : | p-formları uzayı |
| $\boldsymbol{\Lambda^a{}_b}$ | : | Bağlantı 1-formları |
| $\boldsymbol{D}$ | : | Kovariant Dış Türev |
| $\boldsymbol{T^a}$ | : | Burulma 2-formları |
| $\boldsymbol{\omega^a{}_b}$ | : | Levi-Civita Bağlantı 1-formları |
| $\boldsymbol{K^a{}_b}$ | : | Kontorsiyon 1-formları |
| $\boldsymbol{q^a{}_b}$ | : | Anti-Simetrik Bağlantı 1-formları |
| $\boldsymbol{R^a{}_b}$ | : | Eğrilik 2-formları |
| $\boldsymbol{R^a}$ | : | Ricci Eğrilik 1-formları |
| $\boldsymbol{R}$ | : | Ricci Eğrilik skaları |
| $\boldsymbol{L}$ | : | Lagrange Yoğunluğu 4-formu |
| $\boldsymbol{\mathcal{L}}$ | : | Lagrange Fonksiyonu |
| $\boldsymbol{\kappa}$ | : | Evrensel Gravitasyonel bağlanma sabiti |
| $\boldsymbol{\delta}$ | : | Sonsuz küçük varyasyon |

# ÖNSÖZ

Bu çalışma süresince zamanını, bilgisini, rehberliğini ve anlayışını hiç esirgemeyen değerli danışman hocam Doç. Dr. Özcan SERT'e en samimi duygularımla teşekkür ederim. Yüksek lisans öğretimim boyunca derslerini aldığım ve üzerimde emeği olan Prof. Dr. Muzaffer ADAK'a ve Doç. Dr. Mustafa AŞÇI'ya; sohbetini, güler yüzünü ve yol göstericiliğini esirgemeyerek beni hep cesaretlendiren Daire Başkanı'm Ramazan OYMAK'a çok teşekkür ederim. Ayrıca yardımlarını bana cömertce sunan dönem arkadaşım Fatma ÇELİKTAŞ'a teşekkürlerimi bir borç bilirim. Hayatım boyunca her türlü desteğini arkamda hissettiğim başta annem ve babam olmak üzere sevgili aileme ve arkadaşlarıma sonsuz teşekkür ederim.

# 1. GİRİŞ

İnsanoğlunun evren ile ilgili düşünceleri tarih boyunca gelişim göstermiştir. İçinde bulunduğumuz zamana kadar evren hakkında birçok yeni bilgilere erişilse de, fizikçilerin ve astronomların açıklanamayan kozmoloji problemleri üzerindeki çözüm arayışları halen devam etmektedir. 1600'lü yıllara kadar evrenin merkezinde Dünya'nın olduğu iddia ediliyordu. 1400 yıl boyunca süre gelen bu yanılgıdan sonra, kolay olmasa da Kopernik'in Güneş merkezli evren modeli kabul görülüyor. Gezegenlerin Güneş'in etrafında döndüğü anlaşıldığında, Kepler bu dönme hareketini sağlayan gücün varlığını fark ediyor. Çok daha sonrasında ise Gezegenlerin Güneş'in etrafında dönmelerinin sebebi Newton tarafından 1687' de açıklanıyor. Büyük nesneler arasındaki bir kuvvet olarak, Newton'un gravitasyon tarifi hiç şüphesiz bugün ortak olarak en çok kullanılan gravitasyon tasviridir. Newton' un bu yasası "iki kütle arasındaki çekim kuvveti, kütlelerin çarpımıyla orantılı, aralarındaki merkezlerine olan uzaklığın karesiyle ters orantılı olarak, yani $F = G\frac{m_1 m_2}{r^2}$ formülüyle ifade edilir. Burada $G$ gravitasyonel kütle çekim sabiti olarak bilinir. Newton'un teorisi sadece günlük yaşamdaki Dünya üzerindeki basit olayları tasvir etmek için değil, hatta çoğunlukla büyük kozmolojik galaksiler arasındaki gravitasyonel etkileşimler hakkında kabaca fikir sahibi olmak için kullanılabilir. Ancak bazı konularda bu teori yetersizdir. Bu eksiklikleri aşağıdaki maddelerde sıralayalım.

- Merkür' ün perihelyon hareketi : Merkür' ün yörüngesinin doğrultusunda oluşan sapmalar Newton yasasıyla yapılan tahminlerle uyuşmuyor. Hesaplamalarda gözlenen farka, Newton mekaniği ile bir açıklık getirelemiyor.

- Kızıla kayma : Işığın dalga özelliğinden dolayı, galaksilerden gelen ışının dalga boyunun artması, ışık kaynağının (galaksinin) bizden giderek uzaklaştığını gösterir. Galaksinin istinasız hepsinde kızıla kayma gözleniyor olması, Newton teorisinde kütle çekimden dolayı uzaklaşmak yerine dengede olması gerektiğiyle çelişiyor.

- Işığın bükülmesi : Eğer Newton teorisi tüm parçacıklar için geçerliyse ışık için de geçerli olmalıdır. Işık kütlesiz olduğu için kütlelerden birini 0 alırsak kütle çekim kuvvetini de 0 bulmamız gerekiyor. Ancak teleskoplarla gözlemler yapılıyor ve ışığın büyük bir gezegen etrafında büküldüğü gözlemleniyor.

- Sonsuz hızda etki : Newton' un kuramına göre kütleler birbirinden ne kadar uzakta olursa olsunlar, bu kuvvet anlık etkiyor. Cisimlerden birinin konumunda bir değişiklik yapıldığında sonsuz bir hızla diğerini etkilemesi gerektiği yani özel göreliliğe aykırı bir şekilde ışık hızından daha hızlı bir şekilde kuvvet etkisinin hissedildiği görülüyor. Einstein evrendeki en yüksek hızın c ışık hızı olduğunu göstermiştir.

  Yukarıda bahsettiğimiz eksiklikler yeni arayışlara neden olmuş ve Einstein 1915-16 yıllarında Newton 'un gravitasyonel kütle çekim kanununu modifiye ederek evren hakkındaki düşüncelerimizi de değiştirmiştir. Peki 20. yy'ın en mükemmel teorilerinden biri olarak anılan ve 2015 Kasım ayında 100. yaşını kutladığımız Genel Görelilik kuramı tam olarak nedir? Gravitasyonel etkileşimlerle bağlantılı diğer olaylar hakkında bize bilgi veren Genel Göreliliğe göre; maddenin sahip olduğu kütlenin etkisiyle uzay-zaman bükülmektedir. Newton'un kütle-çekim kuramından ayıran temel özellik de burasıdır; kütleçekim cisimlerin kütlelerinden kaynaklanan bir kuvvet değil, bu kütlelerin etkisiyle uzay-zamanın bükülmesidir. Böylece bu bükülmüş geometride parçacıklar kendi jeodeziklerinde hareket ederler.

- Esasında Merkür' ün yörüngesinde meydana gelen sapma, Güneş' in sahip olduğu büyük kütlesinden ötürü meydana gelen uzay-zaman bükülmesiyle açıklanabilmektedir.

- İçinde bulunduğumuz galaksinin, evrenin tamamı olabileceği düşüncesine yanıt olarak; 1929 yılında Hubble, teleskopuyla yaptığı gözlemler sonunda, uzayda hangi yöne bakılırsa bakılsın galaksilerin birbirinden uzaklaştığını farketti Hubble (1929). Yaşadığımız galaksinin milyarca galaksiden biri olduğu ve Einstein' ın öngördüğü gibi evrenin statik bir yapısı olmayıp sürekli genişleyeceği düşüncesi doğrulanmış oldu.

- 1959 yılında yeryüzündeki bir labaratuvardan gönderilen gamma ışınlarıyla, bir yıldızın çekiminden uzaklaşan ışığın enerjisinin azaldığı gözlemlendi Pound ve Rebka (1959).

- Gündelik hayatta kullandığımız akıllı telefonlar uyduların GPS mekanizmasını kullanır ve Einstein'ın kütle-çekim teorisinin öngörüsü sayesinde konum ve zamandaki sapmalar ortadan kaldırılır.

- Einstein'ın teorisinin bir diğer öngörüsü kütle-çekim dalgalarının varlığıdır. Dünyadaki labaratuvar ortamında bundan yaklaşık 1.3 milyar yıl önce iki karadeliğin çarpışmasıyla oluşan kütle-çekim dalgaları, Abbott ve diğ. (2016a,b) kaynaklarından da anlaşılacağı gibi 2016 yılında gözlenmiş ve bu öneri doğrulanmıştır.

Einstein'in Genel görelilik teorisi uzay-zaman geometrisini tensörel formda kodlayan gravitasyonel alan denkleminden oluşur. Uzay-zamanın gravitasyonel davranışını belirleyen bu alan denklemleri Einstein-Hilbert eylemi olarak bilinen bir eylemden (action) varyasyon hesabıyla türetilebilir. Bu Einstein-Hilbert eylemi $R$ Ricci eğrilik skalarının manifold üzerinden integrali olarak önerilir. Buradan elde edilen alan denklemlerinin yukarıdaki problemleri açıkladığı görülmüştür.

Hem gravitasyonun kendisini daha iyi anlamak, teorinin limit durumlarındaki sorulara cevap bulmak, hem de Genel Göreliliğin ötesinde gravitasyon ile ilgili düşüncelerimizi genişletmenin en doğal yolu, Einstein teorisinin bazı modifikasyonlarını çalışmaktır. Bunun için yeni gravitasyon teorisi arayışları sürmektedir. Örneğin, Brill ve Gowdy (1970), Isham (1981) kaynaklarında tartışıldığı gibi $10^{-33}$m olan Plank ölçeği mesafesinde nasıl sonuçlar vereceği bilinmemektedir. Benzer şekilde çok küçük ölçeklerde geçerli olan kuantum alan teorisinin büyük ölçeklerdeki sonuçlarının Sotiriou (2007) makalesinde de bahsedildiği gibi gravitasyon teorisiyle uyumlu olması istenmektedir. Son yapılan kozmolojik gözlemler Einstein'ın gravitasyon teorisinin modifiye edilmesi gerektiğini göstermektedir. Bu gözlemlerin en önemlilerinden birisi Hubble teleskobunun gösterdiği evrenin ivmeli bir şekilde genişlemesi olayıdır. Bununla ilgili açıklamalar Albrecht ve Steinhardt (1982), Guth (1981), Linde (1982), Starobinsky (1980) kaynaklarında bulunabilir. Bu olayı açıklamak için Amanullah (2010), Felice ve Tsujikawa (2010), Knop (2003), Perlmutter (1999), Riess (1998), Schwarz ve diğ. (2016), Weinberg ve diğ. (2013) referansları başta olmak üzere karanlık enerji (dark energy) ve Baer ve diğ. (2015), Overduin (2004) referanslarıyla karanlık madde (dark matter) kavramları ortaya atılmıştır. Evrenin bilinmeyen bu kısmı, hızlanmaya sebep olan karanlık enerji yüzde 68, karanlık madde yüzde 27 olmak üzere yüzde 95 'lik büyük kısmı oluşturur evrendeki bildiğimiz tüm nesnelerin yani galaksilerin, yıldızların sahip olduğu madde miktarı ise toplam miktarın yüzde 5'lik kısmına karşılık gelir. Karanlık madde galaksilerin dönme hızlarından elde edilen kütle ile parlaklıklarından (gözlemlenen madde miktarından) elde edilen kütlenin karşılaştırıldığında ortaya çıkan fark olarak tanımlanır. Karanlık madde ve karanlık enerjyi açıklamak için yeni egzotik alanlar veya parçacıklar tanımlayarak bir çok yeni model önerilmiştir. Bu gibi yeni alanlar önermek yerine Einstein'ın gravitasyon teorisini modifiye etmek daha açıklayıcıdır. Çünkü bu egzotik parçacıklar gözlemlenememiştir.

Bu nedenle sadece Ricci eğrilik skaları R'yi içeren Einstein teorisinin eylem fonksiyonelini f(R), yani Ricci eğrilik skalarının keyfi bir fonkiyonu olması durumu ortaya atılmıştır. Burada f(R) fonksiyonu güneş sistemi ölçeğinde Einstein teorisi ile uyumlu olmalı ve yukarıda anlattığımız problemlere çözüm bulacak şekilde seçilmelidir. $f(R)$ gravitasyon teorisiyle ilgili Allemandi ve diğ. (2004), Capozziello (2002), Capozziello ve diğ. (2003a), Capozziello ve diğ. (2003b), Capozziello ve diğ. (2004, 2006), Carroll ve diğ. (2004), Cognola ve diğ. (2005), Kerner (1982), Nojiri ve Odintsov (2004), Odintsov ve Nojiri (2003), Starobinsky (1980) makaleleri başta olmak üzere çok geniş bir litaratüre sahiptir. Diğer kaynaklara bu makalelerin referanslarından bakılabilir.

# 2. DIŞ CEBİR VE DİFERANSİYEL FORMLAR

Tez boyunca hesapları dış cebir kullanarak yapacağımızdan öncelikle bu cebirde bazı temel kavramları verelim. Bu kavramlar için Cartan (1923), Dereli (1984), Flanders (1963), Sert (2005) kaynaklarından yararlanılmıştır. Bu tezde $\{M, g\}$ ile temsil edilen uzay-zaman için M 4-boyutlu diferansiyellenebilir bir manifold ve g bu manifold üzerinde verilen uzay-zamandaki mesafeleri ölçmeye yarayan (0,2) tipi bir metrik tensörüdür. Tensörlerin paralel taşınmasından ortaya çıkan bağlantı niceliği $\omega$ ile gösterilecektir. $\{x^\mu(p)\}$ koordinat fonksiyonları uzay-zamandaki bir p noktasında oluşturulan koordinat sistemi için kullanılır. Bu koordinat sistemi, $T_p(M)$ tanjant uzayının $\{\frac{\partial}{\partial x^\mu}\} = \{\partial_\mu\}$ baz vektörlerini oluşturur ve koordinat referans çerçevesi olarak tanımlanır. Benzer şekilde, koordinat fonksiyonlarının diferansiyelleriyle oluşturulan $\{dx^\mu\}$ baz ko-vektörleri de $T_p^*(M)$ kotanjant uzayının herhangi bir p noktasında koordinat referans ko-çerçevesini oluşturur, yani tanjant uzayının ikilisidir. Çalıştığımız geometri üzerindeki fonksiyonlar (0,0) tipi tensörlerden, vektörler (1,0) tipi tensörlerden ve kovektörler de (0,1) tipi tensörlerden oluşur. Teğet ve koteğet uzaylarının sırasıyla baz ve ko-baz vektörlerinin iç çarpımı yapıldığında, Kroenecker sembolü elde edilir. Bu ifade

$$dx^\mu(\frac{\partial}{\partial x^\mu}) = \imath_{\frac{\partial}{\partial x^\nu}} dx^\mu = \delta^\mu{}_\nu \tag{2.1}$$

şeklinde gösterilir. $T_p(M)$ tanjant uzayının lineer olarak bağımsız vektörler kümesi ortonormalleştirilebilir. Ortonormal hale getirilen bu küme $X_a$ şeklinde yazılır ve "ortonormal referans çerçevesi" olarak tanımlanır. Burada $a = 0, 1, 2, 3$'tür. Benzer şekilde, $X_a$ kümesinin dual bazı, ko-tanjant uzayında ortonormal baz ko-vektörleri $e^a$ ile gösterilir ve

$$e^a(X_b) \equiv \imath_{X_b}(e^a) = \delta^a_b \tag{2.2}$$

eşitliğini sağlar. Bu M manifoldu üzerindeki (p,q) tipi bir tensör

$$\underbrace{T^*(M) \times ...T^*(M)}_{p\ kez} \underbrace{T(M) \times ...T(M)}_{q\ kez} \to \mathbb{R}$$

olan bir gönderimdir. Buradaki çarpım ise simetrik veya antisimetrik olabilen tensörel çarpımdır. $\Lambda^p(M)$ ile gösterilen p-formları uzayı ise $\underbrace{T_p{}^*(M) \wedge ... \wedge T_p{}^*(M)}_{p\ kez}$ tümüyle antisimetrik tensör çarpımıyla oluşur. $\eta_{ab}$ ile gösterilen köşegen elemanları (-1,1,1,1) olan $4x4$'lük matris Minkowski metriği olarak tanımlanır ve iki ortonormal vektör alanının iç çarpımıyla $g(x_a, x_b) = \eta_{ab} \quad (a, b, \cdots = 0, 1, 2, 3)$ olarak ifade edilir.

Manifold üzerindeki iki nokta arasındaki sonsuz küçük uzaklık eğri uzay-zaman metriğini tarifleyen

$$ds^2 = \eta_{ab} e^a \otimes e^b = -e^0 \otimes e^0 + e^1 \otimes e^1 + e^2 \otimes e^2 + e^3 \otimes e^3$$

metriğiyle ortonormal 1-formlar cinsinden yukarıdaki gibi verilir. Bu metrik (0,2) tipi bir tensördür. Buradaki çarpım ise simetrik tensör çarpımıdır.

B bir p-formlu tensör olmak üzere $B \in \Lambda^p(M)$ $dx^\mu$ 1-formlar ve $B_\mu$ bileşenler cinsinden

$$B = \frac{1}{p!} B_{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_p} dx^{\mu_1} \wedge ... \wedge dx^{\mu_p}$$

olarak açılır.

Dış cebirde tanımlı $A_1 \in \Lambda^p(M), A_2 \in \Lambda^q(M), A_3 \in \Lambda^r(M)$ ve $\alpha$ reel bir sabit için aşağıdaki bağıntılar sağlanır:

1. $(\alpha A_1) \wedge A_2 = A_1 \wedge (\alpha A_2) = \alpha(A_1 \wedge A_2)$

2. $(A_1 + A_2) \wedge (A_3) = A_1 \wedge A_3 + A_2 \wedge A_3$

3. $A_1 \wedge (A_2 \wedge A_3) = (A_1 \wedge A_2) \wedge A_3$

4. $A_1 \wedge A_2 = (-1)^{p.q} A_2 \wedge A_1$

Diferansiyel formların dış cebirinde dış türev

$$d : \Lambda^p(M) \longrightarrow \Lambda^{p+1}(M)$$

ile tanımlanır ve bir $p$-formu $p+1$-forma gönderir. Yine $A, A_1 \in \Lambda^p(M), A_2 \in \Lambda^q(M)$ olsun. Dış türev operatörü olarak aşağıdaki maddeler sağlanır.

1. $d(A_1 + A_2) = dA_1 + dA_2$

2. $dA = \frac{1}{p!} \frac{\partial A_{\mu_1 \wedge \cdots \wedge \mu_p}}{\partial x^\mu} dx^\mu \wedge dx^{\mu_1} \wedge \cdots \wedge dx^{\mu_p}$

3. $d(A_1 \wedge A_2) = dA_1 \wedge A_2 + (-1)^p A_1 \wedge dA_2$

4. $d(dA) = 0$

Benzer olarak iç çarpım işlemi ise

$$\imath : \Lambda^p(M) \longrightarrow \Lambda^{p-1}(M)$$

$p$ formu $p-1$ forma gönderen bir eşlemedir ve $A \in \Lambda^p(M)$ için aşağıdaki özellikleri sağlar.

1. $\imath_a f = 0$

2. $\imath_{f_a} A = f \imath_a A$

3. $e^a \wedge \imath_a A = pA$

4. $\imath_a \imath_b A = -\imath_b \imath_a A$

5. $\imath_a (A_1 \wedge A_2) = \imath_a A_1 \wedge A_2 + (-1)^p A_1 \wedge \imath_a A_2$

Hodge star işlemi ise

$$* : \quad \Lambda^p(M) \longrightarrow \Lambda^{4-p}(M) \tag{2.3}$$

$p$-formu 4 boyutlu bir manifold için $4-p$ forma eşleyen bir operatör olarak tanımlanır. $M_n$ üzerinde tanımlı bir n formun Hodge starı

$$*e^1 \wedge \cdots \wedge e^n = \frac{1}{n!}\epsilon_{i_1\cdots i_n} e^{i_1} \wedge \cdots \wedge e^{i_n}$$

ifadesiyle verilir. Burada $\epsilon_{i_1 i_2 \cdots i_n}$ niceliğine Levi-Civita tensörü denir.
Ayrıca

$$*1 = e^{0123} = e^0 \wedge e^1 \wedge e^2 \wedge e^3 = \frac{1}{4!}\epsilon_{abcd} e^a \wedge e^b \wedge e^c \wedge e^d \tag{2.4}$$

ise yönlendirilmiş hacim elemanıdır.

Bu tezde antisimetrik Levi-civita tensörü $\epsilon_{0123} = +1$ şeklinde seçilmiştir. $A, B \in \Lambda^p(M)$ olsun. Hodge star operatörünün p-formun üzerine etkisi aşağıdaki gibidir.

1. $A \wedge *B = B \wedge *A$ ve $*B \wedge A = *A \wedge B$

2. $*(A \wedge e_a) = \imath_a * A$

3. $** A = \pm A$

$B$ $(p,q)$ tipi bir tensör olsun ve bu tensörün kovaryant dış türevi, normal dış türeve ilave olarak bağlantı (connection) terimleri eklenerek

$$\begin{aligned} DB_{a_1\cdots a_p}{}^{b_1\cdots b_q} &= dB_{a_1\cdots a_p}{}^{b_1\cdots b_q} + \omega^{b_1}{}_c \wedge B_{a_1\cdots a_p}{}^{cb_2\cdots b_q} + \cdots \\ &\quad -\omega^c{}_{a_1} \wedge B_{ca_2\cdots a_p}{}^{b_1\cdots b_q} - \cdots . \end{aligned}$$

ile tanımlanır. Bu eklenen terimler düz uzaydan sapmaları belirtir. Bu nedenle düz uzayda sapmalar sıfırken, eğri uzayda sıfırdan farklı olarak karşımıza çıkar.

Burulma tensörü ya da torsion olarak adlandırdığımz tensör ise $e^a$ ko-frame 1-formların kovaryant dış türeviyle tanımlanır:

$$T^a := De^a = de^a + \omega^a{}_b \wedge e^b$$

Eğri uzay-zamanda sıfırdan farklı olan eğrilik tensörü 2- formu ise diferansiyel formlarla bağlantı 1-formları kullanılarak

$$R^a{}_b(\omega) := d\omega^a{}_b + \omega^a{}_c \wedge \omega^c{}_b$$

şeklinde tanımlanır.

Metrik Gradyant Tensörü olarak adlandırdığımız $Q_{ab}$ 1-formu

$$Q_{ab} = -\frac{1}{2} D\eta_{ab}$$

nonmetrisiti (non-metricity) tensörü metriğin kovaryant dış türevi olarak tanımlanır.

# 3. f(R) GRAVİTASYON TEORİSİ

Bu çalışmada $R$ eğrilik skalarını $R$'nin herhangi bir fonksiyonu olan $f(R)$ ile değiştirerek elde edilen, Capozziello ve diğ. (2004, 2006, 2007), Felice ve Tsujikawa (2010), Sotiriou ve Faraoni (2010) kaynakları başta olmak üzere çok fazla literatüre sahip olan $f(R)$ gravitasyon modelini inceleyeceğiz. Bu tezde Riemansal geometride çalıştığımızdan dolayı $Q_{ab} = 0$ ve $T^a = 0$ sınırlandırması koyuyoruz. $Q_{ab}$ simetrik bir tensör olduğu için $f(R)$ modellerinde simetrik kısım kendiliğinden ayrışır ve Lagrangiana bir kısıt eklemek gerekmez. Fakat $T^a$ antisimetrik bağlantıya sahip olduğundan bunu ayrıca kısıt olarak belirtmemiz gerekir. Aksi halde burulmalı ($T^a \neq 0$) olan uzay-zamanda modeli incelemiş oluruz. Böylece $e^a$ ve $\omega$ varyasyonları ayrı ayrı iki denklem verecektir. $T^a = 0$ olduğunu sonra kullanırsak bu iki denklemi birbirine bağlayacak bir bağıntı bulamayız. Bunu ancak ya başta Lagrangianda belirtip sadece $e^a$ varyasyonuyla tek bir gravitasyonel alan denklemi buluruz, ya da aşağıda olduğu gibi Lagrange çarpanları yöntemiyle $T^a$ yı sıfırlayarak elde edilen iki denklemden birini yok ederek tek bir gravitasyon denklemini elde ederiz.

## 3.1 Varyasyon ile Alan Denklemlerinin Bulunuşu

$f(R)$ Gravitasyon modelinin Lagrange 4-formu diferansiyel form notasyonuyla

$$L = f(R) * 1 + L_{mat} + \lambda_a \wedge T^a \tag{3.1}$$

olarak verilir. Burada $f(R)$ Ricci skaları $R$ nin keyfi bir fonksiyonu, $L_{mat}$ madde Lagrangianı, $\lambda_a$ ise burulma tensörünü sıfır yapan bir Lagrange çarpanıdır. Genel formda gravitasyon alanının davranışını tarifleyen alan denklemlerini bulmak için bu Lagrange yoğunluğunun $e^a$ ko-çerçeve 1-formu ve $\omega^a{}_b$ bağlantı 1-formuna göre varyasyonunu alalım.

$$\delta L = 0 \tag{3.2}$$

Buradaki ilk terimin varyasyonunu hesaplayalım

$$\begin{aligned}
\delta(f(R)*1) &= \delta f(R)*1+f(R)\delta*1 \\
&= \frac{df}{dR}\delta R*1+f(R)\delta(\frac{1}{4!}\epsilon_{abcd}e^{abcd}) \\
&= f_R\delta\left(\imath_{ba}R^{ab}\right)*1+f(R)\frac{1}{4!}[\epsilon_{abcd}\delta e^a\wedge e^{bcd}+\epsilon_{abcd}e^a\wedge\delta e^b\wedge e^{cd} \\
&\quad +\epsilon_{abcd}e^{ab}\wedge\delta e^c\wedge e^d+\epsilon_{abcd}e^{abc}\wedge\delta e^d] \\
&= f_R\delta\left(\imath_{ba}R^{ab}\right)*1+f(R)\frac{1}{4!}[\epsilon_{abcd}\delta e^a\wedge e^{bcd}-\epsilon_{abcd}\delta e^b\wedge e^{acd} \\
&\quad +\epsilon_{abcd}\delta e^c\wedge e^{abd}-\epsilon_{abcd}\delta e^d e^{abc}]
\end{aligned} \tag{3.3}$$

burada $\delta e^a$ parantezine almak için $b\leftrightarrow a,\ \ c\leftrightarrow a$ ve $d\leftrightarrow a$ indis değişiklikleri uyguluyoruz.

$$\begin{aligned}
\delta(f(R)*1) &= f_R\delta\left(\imath_{ba}R^{ab}\right)*1+f(R)\frac{1}{4!}[\epsilon_{abcd}\delta e^a\wedge e^{bcd}-\epsilon_{bacd}\delta e^a\wedge e^{bcd} \\
&\quad +\epsilon_{cbad}\delta e^a\wedge e^{cbd}-\epsilon_{dbca}\delta e^a e^{dbc}]
\end{aligned} \tag{3.4}$$

köşeli parantez içindeki 3. ve 4. terimdeki indislerin sıralamasını $e^{bcd}$ şeklinde yazdığımızda

$$\begin{aligned}
\delta(f(R)*1) &= f_R\delta\left(\imath_{ba}R^{ab}\right)*1+f(R)\frac{1}{4!}[\epsilon_{abcd}\delta e^a\wedge e^{bcd}+\epsilon_{abcd}\delta e^a\wedge e^{bcd} \\
&\quad +\epsilon_{abcd}\delta e^a\wedge e^{bcd}+\epsilon_{abcd}\delta e^a e^{bcd}]
\end{aligned} \tag{3.5}$$

elde ediyoruz. Gerekli düzenlemelerle

$$\delta(f(R)*1)=f_R\delta\left(\imath_{ba}R^{ab}\right)*1+f(R)\frac{1}{3!}\epsilon_{abcd}\delta e^a\wedge e^{bcd} \tag{3.6}$$

sonucunu elde ederiz. Şimdi $\delta\left(\imath_{ba}R^{ab}\right)$ hesabını yapalım.

$$\begin{aligned}
\delta\left(f(R)*1\right) &= f_R\left[\left(\delta\imath_b\right)\imath_a R^{ab}+\imath_b\left(\delta\imath_a\right)R^{ab}+\imath_{ba}\left(\delta R^{ab}\right)\right]*1 \\
&\quad +f(R)\delta e^a\wedge\frac{1}{3!}\epsilon_{abcd}\wedge e^{bcd}
\end{aligned} \tag{3.7}$$

köşeli parantez içindeki 2. ve 3. terimlerdeki $a \leftrightarrow b$ indislerini değiştirerek

$$\begin{aligned}\delta\left(f(R)*1\right) &= f_R\left[\left(\delta\imath_b\right)R^b+\imath_a\left(\delta\imath_b\right)R^{ba}+\imath_{ba}\left(\delta R^{ab}\right)\right]*1\\ &\quad +f(R)\delta e^a\wedge\frac{1}{3!}\epsilon_{abcd}\wedge e^{bcd}\end{aligned} \tag{3.8}$$

elde ettik.

$$\begin{aligned}\delta\left(f(R)*1\right) &= f_R\left[\left(\delta\imath_b\right)R^b+\left(\delta\imath_b\right)R^b+\imath_{ba}\left(\delta R^{ab}\right)\right]*1\\ &\quad +f(R)\delta e^a\wedge\frac{1}{3!}\epsilon_{abcd}\wedge e^{bcd}\end{aligned} \tag{3.9}$$

gerekli düzenlemeler yapılarak

$$\begin{aligned}\delta\left(f(R)*1\right) &= f_R\left[2\left(\delta\imath_b\right)R^b+\imath_{ba}\delta\left(d\omega^{ab}+\omega^a{}_c\wedge\omega^c{}_b\right)\right]*1\\ &\quad +f(R)\delta e^a\wedge\frac{1}{3!}\epsilon_{abcd}\wedge e^{bcd}\\ \delta\left(f(R)*1\right) &= f_R\imath_{ba}\left(d\delta\omega^{ab}+\delta\omega^a{}_c\wedge\omega^c{}_b+\omega^a{}_c\wedge\delta\omega^c{}_b\right)*1\\ &\quad +f(R)\delta e^a\wedge\frac{1}{3!}\epsilon_{abcd}\wedge e^{bcd}+2f_R\left(\delta\imath_b\right)\left(R^{b,}{}_c e^c\right)*1\end{aligned}$$

elde ediyoruz ve burada $X = f_R\imath_{ba}\left(d\delta\omega^{ab}+\delta\omega^a{}_c\wedge\omega^c{}_b+\omega^a{}_c\wedge\delta\omega^c{}_b\right)$ olarak tanımlayalım.

$$\delta\left(f(R)*1\right)=2f_R\left(R^{b,}{}_c\right)\left(\delta\imath_b\right)e^c*1+X+f(R)\delta e^a\wedge *e^a \tag{3.10}$$

$$\delta\left(f(R)*1\right)=-2f_R R^{b,}{}_c\delta e^c\imath_b*1+X+f(R)\delta e^a\wedge *e^a \tag{3.11}$$

c ve a indisleri arasında değişim yaparak $\delta e^a$ parantezine alalım.

$$\delta\left(f(R)*1\right)=\delta e^a\wedge\left(-2f_R*R_a\right)+X+f(R)\delta e^a\wedge *e^a \tag{3.12}$$

olduğu bulunur. Burada $f_R\imath_{ba}D\delta\omega^{ab}*1=X$ ifadesinden $\delta w^{ab}$ yi çekersek

$$\imath_b(f_R\imath_a D\delta\omega^{ab}*1)=f_R\imath_{ba}D\omega^{ab}*1-f_R\imath_a D\delta\omega^{ab}*e_b \tag{3.13}$$

sol taraf 5-form olduğundan sıfıra eşittir.

$$\begin{aligned} 0 &= X - f_R \imath_a D\delta\omega^{ab} * e_b \\ X &= f_R \imath_a D\omega^{ab} * e_b \end{aligned} \tag{3.14}$$

Benzer bir işlem ile

$$\imath_a(f_R D\delta\omega^{ab} \wedge *e_b) = X + f_R D\delta\omega^{ab} \wedge *e_{ba} = 0 \tag{3.15}$$

buradan $X = -f_R D\delta\omega^{ab} \wedge *e_{ba}$

$$D(f_R \delta\omega^{ab} \wedge *e_{ba}) = -X - \delta\omega^{ab} D(f_R * e_{ba}) \tag{3.16}$$

tam türevin alan denklemlerine katkıda bulunmadığı bilinerek sol taraf sıfır alınır. Buradan $X$ terimi

$$\begin{aligned} X &= -\delta\omega^{ab} \wedge D(f_R \wedge *e_{ba}) \\ &= \delta\omega^{ab} \wedge D(f_R \wedge *e_{ab}) \end{aligned} \tag{3.17}$$

olarak bulunur.Böylece ilk terimin varyasyonu

$$\delta\left(f(R) * 1\right) = \delta e^a \wedge (-2f_R * R_a + f(R) * e^a) + \delta\omega^{ab} \wedge D(f_R \wedge *e_{ab}) \tag{3.18}$$

olarak hesaplanır. Yine madde Lagrangianının varyasyonu aşağıdaki enerji-momentum tensörüyle verilir.

$$\delta L_{mat} = 2\delta e^a \left[(\rho + p)U^a * U + p * e^a\right] \tag{3.19}$$

burada $\rho$ enerji yoğunluğu ve $p$ ise basınç olarak isimlendirilir. Burada $U$ zamansal bir vektör alanıdır ve

$$U^a U_a = -1 \tag{3.20}$$

koşulunu sağlar. Bu zamansal vektör alanını

$$U^a = (-1, 0, 0, 0) \quad ve \quad U_a = (1, 0, 0, 0) \tag{3.21}$$

olarak alabiliriz. Son olarak (3.1) Lagrangianındaki son terimin varyasyonunu bulalım.

$$\begin{aligned}\delta(\lambda_a \wedge T^a) &= \delta\lambda_a \wedge T^a + \lambda_a \wedge \delta T^a \\ &= \delta\lambda_a \wedge T^a + \lambda_a \wedge \delta(de^a + \omega^{ab} \wedge e_b) \\ &= \delta\lambda_a \wedge T^a + \delta e^a \wedge D\lambda_a + \delta\omega^{ab} \wedge \lambda_a \wedge e_b \qquad (3.22)\end{aligned}$$

Böylece bağlantı 1-form varyasyonundan gelen denklem

$$\delta\omega^{ab} \wedge [D(f_R \wedge *e_{ab}) + \frac{1}{2}(\lambda_a \wedge e_b - \lambda_b \wedge e_a)] = 0 \qquad (3.23)$$

Burada son işlem $\lambda_a \wedge e_b$ çarpımını antisimetrik yapmak içindir. Böylece Lagrangiandaki her bir terimin varyasyonunu almış oluyoruz. Bu sonuçları $\delta e^a$ ve $\delta\omega_{ab}$ parantezinde toplarsak

$$\delta e_a \wedge (-2f_R * R^a + f(R) \wedge *e^a + (\rho + p)U^a * U + p * e^a + D\lambda^a) = 0 \qquad (3.24)$$

$$\delta\omega^{ab} \wedge [\frac{1}{2}(\lambda_a \wedge e_b - \lambda_b \wedge e_a) + D(f_R * e_{ab})] = 0 \qquad (3.25)$$

$$\delta\lambda_a \wedge T^a = 0 \qquad (3.26)$$

denklemlerini elde ederiz. Buradaki $\delta\omega_{ab}$ denklemini $\imath^a$ ile çarparak $\lambda_a$ yı aşağıdaki gibi çözeriz.

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}(\lambda_a \wedge e_b - \lambda_b \wedge e_a) = \Sigma_{ab} &= -D(f_R * e_{ab}) \\ \lambda_a \wedge e_b - \lambda_b \wedge e_a &= 2\Sigma_{ab} \\ \imath^a\lambda_a \wedge e_b + \lambda_a\delta^a{}_b - \imath_a\lambda_b \wedge e^a - \lambda_b\delta^a{}_a &= 2\imath^a\Sigma_{ab} \qquad (3.27)\end{aligned}$$

son satırın 3. teriminde $\lambda_b$ 2 form olduğu için $\lambda_b$ ile $e_a$ yer değiştirdiğimizde bir $-$ işareti gelir. $-3\lambda_b + 2\lambda_b = -\lambda_b$ olur. Aşağıda elde edilen denklemi bir kez daha

$\imath^a$ ile çarparsak

$$
\begin{aligned}
-\lambda_b + \imath^a \lambda_a \wedge e_b &= 2\imath^a \Sigma_{ab} \\
4\imath^a \lambda_a &= 2\imath^b \imath^a \Sigma_{ab} \\
\imath^a \lambda_a &= \frac{1}{2} \imath^m \imath^n \Sigma_{mn} \qquad (3.28)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\lambda_b &= \imath^a \lambda_a \wedge e_b - 2\imath^a \Sigma_{ab} \qquad (3.29) \\
&= \frac{1}{2} \imath^m \imath^n \Sigma_{mn} \wedge e_b - 2\imath^a \Sigma_{ab} \qquad (3.30)
\end{aligned}
$$

son $\Sigma_{ab}$ teriminde $a \leftrightarrow b$ değişikliği yaparsak,

$$
\lambda_a = \frac{1}{2} \imath^m \imath^n \Sigma_{mn} \wedge e_a - 2\imath^b \Sigma_{ba} \qquad (3.31)
$$

yine buradaki son terimde $b \leftrightarrow a$ değişikliği yaparsak

$$
\begin{aligned}
\lambda_a &= -2\imath^b D(f_R * e_{ab}) + \frac{1}{2} \imath^{mn} \Sigma_{mn} \wedge e_a \qquad (3.32) \\
&= -2\imath^b D f_R \wedge * e_{ab} - 2\imath^b f_R D * e_{ab} \\
&\quad + \frac{1}{2} \imath^{mn} (D f_R \wedge * e_{mn} + f_R D * e_{mn}) \wedge e_a \qquad (3.33)
\end{aligned}
$$

bulunur. Burada $T_a = 0$ ve $Q_{ab} = 0$ olduğundan $D * e_{ab} = 0$ olur.

$$
\lambda_a = -2\imath^b D f_R \wedge * e_{ab} + \frac{1}{2} (\imath^{mn} D f_R \wedge * e_{mn} + D f_R \wedge \imath^{mn} * e_{mn}) \qquad (3.34)
$$

burada $\imath^{mn} D f_R \wedge * e_{mn} = 0$ ve $D f_R \wedge * e_{mn} + D f_R \wedge \imath^{mn} * e_{mn} = 0$ olduğu için

$$
\begin{aligned}
\lambda_a &= -2 * (e_a \wedge e_b \wedge \imath^b D f_R) \qquad (3.35) \\
\lambda_a &= -2 * (e_a \wedge D f_R) \qquad (3.36)
\end{aligned}
$$

elde edilir. Bu $\lambda_a$ nın kovaryant dış türevini alalım:

$$
D\lambda_a = -2D * (e_a \wedge D f_R) \qquad (3.37)
$$

bu ifadeyi (3.24) gravitasyonel alan denkleminde yerine yazdığımızda

$$
f(R) * e^a - 2 f_R * R^a - 2D * (e^a \wedge D f_R) = -2(\rho + p) U^a * U - 2p * e^a \qquad (3.38)
$$

elde ederiz. Bu denklemde, $f = R/\kappa^2$ yazıldığında Einstein'ın gravitasyon alan denkleminde dönüşmesi için bu denklemi $-1/2$ ile çarpalım.

$$f_R * R^a - \frac{1}{2}f(R) * e^a + D * (e^a \wedge Df_R) = (\rho + p)U^a * U + p * e^a \tag{3.39}$$

Böylece $f = R/\kappa^2$ için açıkça görülüyor ki

$$*R^a - \frac{1}{2}R * e^a = \kappa^2(\rho + p)U^a * U + \kappa^2 p * e^a \tag{3.40}$$

veya başka bir ifadeyle

$$G^a = \kappa^2 \tau^a \tag{3.41}$$

Einstein alan denklemine indirgenir. (3.39) denkleminde Sırasıyla $a = 0, 1, 2, 3$ olarak aldığımızda ise

$$f_R * R^0 - \frac{1}{2}f(R) * e^0 + D * (e^0 \wedge Df_R) = (\rho + p)U^0 * U + p * e^0 \tag{3.42}$$

$$f_R * R^1 - \frac{1}{2}f(R) * e^1 + D * (e^1 \wedge Df_R) = (\rho + p)U^1 * U + p * e^1 \tag{3.43}$$

$$f_R * R^2 - \frac{1}{2}f(R) * e^2 + D * (e^2 \wedge Df_R) = (\rho + p)U^2 * U + p * e^2 \tag{3.44}$$

$$f_R * R^3 - \frac{1}{2}f(R) * e^3 + D * (e^3 \wedge Df_R) = (\rho + p)U^3 * U + p * e^3 \tag{3.45}$$

her bir bileşen için alan denklemlerini elde ederiz. Burada küresel simetrik metrikler için $a = 2$ ve $a = 3$ aynı diferansiyel denklemleri verir.

## 3.2 Küresel Simetrik, Statik Çözümler

Einstein denklemini çözmek $4 \times 4$-lük matristen oluşan metriğin her bir elemanını çözmek anlamına gelir. Metriğin simetrik olmasından dolayı 10 bileşeni olduğunu biliyoruz ve böylece genel bir metrik için lineer olmayan diferansiyel denklem sistemine dönüşen Einstein denklemlerini tam çözmek imkansızdır. Bu sebepten, metriğin küresel simetrik olduğu yaklaşımı kullanalım. f(R) modelinin küresel simetrik statik çözümlerini araştırarak bunları yıldızların kütle ve yarıçaplarını belirlemek için kullanacağız. Genel bir küresel simetrik statik metrik

$$ds^2 = -h(r)dt^2 + g(r)dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 sin^2\theta d\phi^2 \tag{3.46}$$

olarak alınır. Bu metrik için uygun ortnormal ko-çerçeve

$$e^0 = \sqrt{h(r)}dt \quad e^1 = \sqrt{g(r)}dr \quad e^2 = rd\theta \quad e^3 = rsin\theta d\phi \tag{3.47}$$

olarak belirlenir. Ayrıca bu ortonormal olmayan bazlar da ortonormal 1-formlar cinsinden yazılabilir.

$$dt = \frac{e^0}{\sqrt{h(r)}} \quad dr = \frac{e^1}{\sqrt{g(r)}} \quad d\theta = \frac{e^2}{r} \quad d\phi = \frac{e^3}{rsin\theta} \tag{3.48}$$

Bu ortonormal baz 1-formların dış türevleri hesaplanır.

$$\begin{aligned}
de^0 &= \frac{1}{2\sqrt{h}}h'dr \wedge dt + \sqrt{h}dt \wedge dt = \frac{h'(r)}{2h\sqrt{g}}e^{10} \\
de^1 &= (\frac{1}{2\sqrt{g}})g'dr \wedge dr = 0, \\
de^2 &= 1dr \wedge d\theta + rd\theta \wedge d\theta = dr \wedge d\theta = \frac{1}{r\sqrt{g}}e^{12} \\
de^3 &= sin\theta dr \wedge d\phi + rcos\theta d\theta \wedge d\phi \\
&= sin\theta dr \wedge d\phi + rcos\theta d\theta \wedge d\phi \\
&= \frac{1}{r\sqrt{g}}e^{13} + \frac{cot\theta}{r}e^{23}
\end{aligned}$$

Bu modelde Riemansal uzay-zamanı kullanıyoruz. Bu uzay-zamanda $T^a = 0$ olduğundan $de^a = e^b \wedge \omega^a{}_b$ bağıntısını kullanarak Levi-Civita bağlantısının her bir bileşenini hesaplayabiliriz.

$$\begin{aligned} de^0 &= e^1 \wedge \omega^0{}_1 + e^2 \wedge \omega^0{}_2 + e^3 \wedge \omega^0{}_3 = \frac{h'}{2h\sqrt{g}} e^{10} && (3.49) \\ de^1 &= e^0 \wedge \omega^1{}_0 + e^2 \wedge \omega^1{}_2 + e^3 \wedge \omega^1{}_3 = 0 && (3.50) \\ de^2 &= e^0 \wedge \omega^2{}_0 + e^1 \wedge \omega^2{}_1 + e^3 \wedge \omega^2{}_3 = \frac{1}{r\sqrt{g}} e^{12} && (3.51) \\ de^3 &= e^0 \wedge \omega^3{}_0 + e^1 \wedge \omega^3{}_1 + e^2 \wedge \omega^3{}_2 = \frac{1}{r\sqrt{g}} e^{13} + \frac{cot\theta}{r} e^{23} && (3.52) \end{aligned}$$

Sonuç olarak Levi-Civita bağlantısının her bir bileşenini

$$\omega^0{}_1 = \frac{h'(r)}{2h\sqrt{g}} e^0, \quad \omega^2{}_1 = \frac{1}{r\sqrt{g}} e^2, \quad \omega^3{}_1 = \frac{1}{r\sqrt{g}} e^3, \quad \omega^3{}_2 = \frac{cot\theta}{r} e^3 \qquad (3.53)$$

$$\omega^0{}_0 = \omega^1{}_1 = \omega^2{}_2 = \omega^0{}_3 = \omega^2{}_0 = 0 \qquad (3.54)$$

olarak buluruz. Eğriliği bulmak için bağlantı bileşenlerinin dış türevleri alınır.

$$\begin{aligned} d\omega^0{}_1 &= d\left(\frac{h'}{2h\sqrt{g}} e^0\right) = \left(\frac{h'}{2h\sqrt{g}}\right)' dr \wedge e^0 + \left(\frac{h'}{2h\sqrt{g}}\right) de^0 \\ &= \left(\frac{h'}{2h\sqrt{g}}\right)' \frac{1}{\sqrt{g}} e^{10} + \left(\frac{(h')^2}{4h^2 g}\right) e^{10} \\ &= \left(\left(\frac{h'}{2h\sqrt{g}}\right)' \frac{1}{\sqrt{g}} + \frac{h'^2}{4h^2 g}\right) e^{10} && (3.55) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d\omega^2{}_1 &= d\left(\frac{1}{r\sqrt{g}} e^2\right) = \left(\frac{1}{r\sqrt{g}}\right)' dr \wedge e^2 + \frac{1}{r\sqrt{g}} de^2 \\ &= \left(\left(\frac{1}{r\sqrt{g}}\right)' \frac{1}{\sqrt{g}} + \frac{1}{r^2 g}\right) e^{12} && (3.56) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d\omega^3{}_1 &= d\left(\frac{1}{r\sqrt{g}} e^3\right) = (\frac{1}{r\sqrt{g}})' dr \wedge e^3 + \frac{1}{r\sqrt{g}} de^3 \\ &= \left(\left(\frac{1}{r\sqrt{g}}\right)' \frac{1}{\sqrt{g}} + \frac{1}{r^2 g}\right) e^{13} + \frac{cot\theta}{r^2\sqrt{g}} e^{23} && (3.57) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
d\omega^3{}_2 &= d\left(\frac{cot\theta}{r}e^3\right) = \left(\frac{cot\theta}{r}\right)' \wedge e^3 + \frac{cot\theta}{r}de^3 \\
&= -\frac{1}{r^2}e^{23}
\end{aligned}
\tag{3.58}
$$

olarak bağlantı bileşenlerinin dış türevlerini buluruz.

Bu çalışmada burulma ve nonmetricity sıfırdır, $T^a = 0$ ve $Q^a{}_b = 0$, $R_{ab} \neq 0$. Bu eğrilik 2-form

$$
R^a{}_b = d\omega^a{}_b + \omega^a{}_c \wedge \omega^c{}_b \tag{3.59}
$$

olarak tanımlanır. Bu denklemi kullanarak ve bağlantı bir formlarını aşağıdaki ifadelerde yerine yazarak her bir eğrilik bileşenini hesap edelim.

$$
\begin{aligned}
R^0{}_1 &= d\omega_{01} + \omega^0{}_0 \wedge \omega^0{}_1 + \omega^0{}_1 \wedge \omega^1{}_1 + \omega^0{}_2 \wedge \omega^2{}_1 + \omega^0{}_3 \wedge \omega^3{}_1 \\
&= d\omega_{01} \\
R^0{}_1 &= \left(\left(\frac{h'}{2h\sqrt{g}}\right)' \frac{1}{\sqrt{g}} + \frac{(h')^2}{4h^2 g}\right) e^{10}
\end{aligned}
\tag{3.60}
$$

ve $i = 1, 2, 3$ için $R^0{}_i = R^i{}_0$ olduğundan, benzer işlemlerle diğer bileşenleri de

$$
\begin{aligned}
R^0{}_2 &= d\omega^0{}_2 + \omega^0{}_0 \wedge \omega^0{}_2 + \omega^0{}_1 \wedge \omega^1{}_2 + \omega^0{}_2 \wedge \omega^2{}_2 + \omega^0{}_3 \wedge \omega^3{}_2 \\
&= \omega^0{}_1 \wedge \omega^1{}_2 \\
R^0{}_2 &= \left(\frac{h'}{2hgr}\right) e^{20}
\end{aligned}
\tag{3.61}
$$

$$
\begin{aligned}
R^0{}_3 &= d\omega^0{}_3 + \omega^0{}_0 \wedge \omega^0{}_3 + \omega^0{}_1 \wedge \omega^1{}_3 + \omega^0{}_2 \wedge \omega^2{}_3 + \omega^0{}_3 \wedge \omega^3{}_3 \\
&= \omega^0{}_1 \wedge \omega^1{}_3 \\
R^0{}_3 &= \left(\frac{h'}{2hgr}\right) e^{30}
\end{aligned}
\tag{3.62}
$$

$$
\begin{aligned}
R^2{}_1 &= d\omega^2{}_1 + \omega^2{}_0 \wedge \omega^0{}_1 + \omega^2{}_1 \wedge \omega^1{}_1 + \omega^2{}_2 \wedge \omega^2{}_1 + \omega^2{}_3 \wedge \omega^3{}_1 \\
R^2{}_1 &= \left[\left(\frac{1}{r\sqrt{g}}\right)' \frac{1}{\sqrt{g}} + \frac{1}{r^2 g}\right] e^{12}
\end{aligned}
\tag{3.63}
$$

$$
\begin{aligned}
R^3{}_1 &= d\omega^3{}_1 + \omega^3{}_0 \wedge \omega^0{}_1 + \omega^3{}_1 \wedge \omega^1{}_1 + \omega^3{}_2 \wedge \omega^2{}_1 + \omega^3{}_3 \wedge \omega^3{}_1 \\
&= d\omega^3{}_1 + \omega^3{}_2 \wedge \omega^2{}_1 \\
R^3{}_1 &= \left[\left(\frac{1}{r\sqrt{g}}\right)' \frac{1}{\sqrt{g}} + \frac{1}{r^2 g}\right] e^{13} \qquad (3.64)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
R^3{}_2 &= d\omega^3{}_2 + \omega^3{}_0 \wedge \omega^0{}_2 + \omega^3{}_1 \wedge \omega^1{}_2 + \omega^3{}_2 \wedge \omega^2{}_2 + \omega^3{}_3 \wedge \omega^3{}_2 \\
&= d\omega^3{}_2 + \omega^3{}_1 \wedge \omega^1{}_2 \\
R^3{}_2 &= \frac{1}{r^2}\left(1 - \frac{1}{g}\right) e^{32} \qquad (3.65)
\end{aligned}
$$

olarak hesaplanır. Ayrıca simetriden ötürü $R^0{}_0 = R^1{}_1 = R^2{}_2 = R^3{}_3 = 0$'dır. Yukarıdaki bağıntıları ve

$$
R_a = \imath_b R^b{}_a \qquad (3.66)
$$

tanımını kullanarak boşlukta Einstein denklemlerini oluşturabilmek için her bir Ricci eğrilik bir formu bileşenini bulalım.

$$
R_0 = \imath_0 R^0{}_0 + \imath_1 R^1{}_0 + \imath_2 R^2{}_0 + \imath_3 R^3{}_0 = \imath_1 R^1{}_0 + \imath_2 R^2{}_0 + \imath_3 R^3{}_0
$$

ve metrik yardımıyla

$$
\begin{aligned}
R_0 &= \imath_1 \left(\left(\frac{h'}{2h\sqrt{g}}\right)' \frac{1}{\sqrt{g}} + \frac{(h')^2}{4h^2 g}\right) e^{10} + \imath_2 \left(\frac{h'}{2hgr}\right) e^{20} + \imath_3 \left(\frac{h'}{2hgr}\right) e^{30} \\
R^0 &= -\left(\left(\frac{h'}{2h\sqrt{g}}\right)' \frac{1}{\sqrt{g}} + \frac{(h')^2}{4h^2 g} + \frac{h'}{hgr}\right) e^0 \qquad (3.67)
\end{aligned}
$$

elde ederiz. $R^1, R^2$ ve $R^3$ için de benzer hesapları yaparsak

$$
\begin{aligned}
R_1 &= \imath_0 R^0{}_1 + \imath_1 R^1{}_1 + \imath_2 R^2{}_1 + \imath_3 R^3{}_1 = \imath_0 R^0{}_1 + \imath_2 R^2{}_1 + \imath_3 R^3{}_1 \\
R_1 &= \imath_0 \left(\left(\frac{h'}{2h\sqrt{g}}\right)' \frac{1}{\sqrt{g}} + \frac{(h')^2}{4h^2 g}\right) e^{10} \\
&\quad + \imath_2 \left(\left(\frac{1}{r\sqrt{g}}\right)' \frac{1}{\sqrt{g}} + \frac{1}{r^2 g}\right) e^{12} \\
&\quad + \imath_3 \left(\left(\frac{1}{r\sqrt{g}}\right)' \frac{1}{\sqrt{g}} + \frac{1}{r^2 g}\right) e^{13}
\end{aligned}
$$

$$
R_1 = \left[-\left(\frac{h'}{2h\sqrt{g}}\right)' \frac{1}{\sqrt{g}} - \frac{(h')^2}{4h^2 g} - 2\left(\left(\frac{1}{r\sqrt{g}}\right)' \frac{1}{\sqrt{g}} + \frac{1}{r^2 g}\right)\right] e^1 \qquad (3.68)
$$

$$
\begin{aligned}
R_2 &= \imath_0 R^0{}_2 + \imath_1 R^1{}_2 + \imath_2 R^2{}_2 + \imath_3 R^3{}_2 = \imath_0 R^0{}_2 + \imath_1 R^1{}_2 + \imath_3 R^3{}_2 \\
R_2 &= \imath_0 \left(\frac{h'}{2hgr}\right) e^{20} + \imath_1 \left(\left(\frac{1}{r\sqrt{g}}\right)' \frac{1}{\sqrt{g}} + \frac{1}{r^2 g}\right) e^{21} \\
&\quad + \imath_3 \frac{1}{r^2}\left(1 - \frac{1}{g} e^{32}\right) \\
R^2 &= \left[-\frac{h'}{2hgr} - \left(\frac{1}{r\sqrt{g}}\right)' \frac{1}{\sqrt{g}} - \frac{1}{r^2 g} + \frac{1}{r^2}\left(1 - \frac{1}{g}\right)\right] e^2
\end{aligned}
\tag{3.69}
$$

$$
\begin{aligned}
R_3 &= \imath_0 R^0{}_3 + \imath_1 R^1{}_3 + \imath_2 R^2{}_3 + \imath_3 R^3{}_3 = \imath_0 R^0{}_3 + \imath_1 R^1{}_3 + \imath_2 R^2{}_3 \\
R_3 &= \imath_0 \left[\left(\frac{h'}{2hgr}\right) e^{30}\right] + \imath_1 \left[\left(\left(\frac{1}{r\sqrt{g}}\right)' \frac{1}{\sqrt{g}} + \frac{1}{r^2 g}\right) e^{31}\right] + \imath_2 \left[-\frac{1}{r^2}\left(1 - \frac{1}{g}\right) e^{32}\right] \\
R^3 &= \left(-\frac{h'}{2hgr} - \left(\frac{1}{r\sqrt{g}}\right)' \frac{1}{\sqrt{g}} - \frac{1}{r^2 g} + \frac{1}{r^2}\left(1 - \frac{1}{g}\right)\right) e^3
\end{aligned}
\tag{3.70}
$$

olur. $R = \imath_a R^a$ tanımını kullanarak eğrilik skalarını hesaplayalım.

$$
R = \imath_0 R^0 + \imath_1 R^1 + \imath_2 R^2 + \imath_3 R^3 \tag{3.71}
$$

burada $R^a$ Ricci bir formlarını yerine koyduğumuzda

$$
\begin{aligned}
R &= -\left(\left(\frac{h'}{2h\sqrt{g}}\right)' \frac{1}{\sqrt{g}} + \frac{(h')^2}{4h^2 g} + \frac{h'}{hgr}\right) \imath_0 e^0 \\
&\quad + \left(-\left(\frac{h'}{2h\sqrt{g}}\right)' \frac{1}{\sqrt{g}} - \frac{(h')^2}{4h^2 g} - \left(\frac{1}{r\sqrt{g}}\right)' \frac{2}{\sqrt{g}} - \frac{2}{r^2 g}\right) \imath_1 e^1 \\
&\quad + \left(-\frac{h'}{2hgr} - \left(\frac{1}{r\sqrt{g}}\right)' \frac{1}{\sqrt{g}} - \frac{1}{r^2 g} + \frac{1}{r^2} - \frac{1}{gr^2}\right) \imath_2 e^2 \\
&\quad + \left(-\frac{h'}{2hgr} - \left(\frac{1}{r\sqrt{g}}\right)' \frac{1}{\sqrt{g}} - \frac{1}{r^2 g} + \frac{1}{r^2} - \frac{1}{gr^2}\right) \imath_3 e^3
\end{aligned}
$$

elde ederiz. $\imath_a e^b = \delta_a^b$ olduğu kullanılırsa ve gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$
R = -\left(\frac{h'}{2h\sqrt{g}}\right)' \frac{2}{\sqrt{g}} - \frac{(h')^2}{2h^2 g} - \frac{2h'}{hgr} - \left(\frac{1}{r\sqrt{g}}\right)' \frac{4}{\sqrt{g}} - \frac{6}{r^2 g} + \frac{2}{r^2} \tag{3.72}
$$

olur. Gravitasyonel alan denkleminin $a = 0, 1, 2$ bileşenleri olan (3.42), (3.43), (3.44) denklemlerinde (3.67), (3.68), (3.69) ifadelerini yerine koyduğumuzda üç farklı diferansiyel denklemi elde edeceğiz. Bunlardan ilki olan 0. bileşenini aşağıdaki gibi hesaplarız.

$$-2f_R * R^0 + f(R) \wedge *e^0 - 2D * (e^0 \wedge Df_R) = -(\rho + p)U^0 * U - p * e^0 \quad (3.73)$$

Buradaki $D * (e^0 \wedge Df_R)$ terimi hesaplamak için

$$L^a = *(e^a \wedge df_R) \quad (3.74)$$

tanımı yapıyoruz. Daha sonra kovaryant dış türev tanımını kullanarak aşağıdaki işlemleri yapalım.

$$\begin{aligned} D * (e^0 \wedge df_R) = DL^0 &= dL^0 + \omega^0{}_b \wedge L^b \\ &= dL^0 + \omega^0{}_1 \wedge L^1 + \omega^0{}_2 \wedge L^2 + \omega^0{}_3 \wedge L^3 \quad (3.75) \end{aligned}$$

Burada daha önce hesapladığımız bağlantı 1-formları yerine koyulursa

$$\begin{aligned} DL^0 &= d * (e^0 \wedge f'_R dr) \\ &= d * (\frac{f'_R}{\sqrt{g}} e^{01}) \\ &= -d(\frac{f'_R}{\sqrt{g}} e^{23}) \\ &= -d(\frac{f'_R}{\sqrt{g}}) e^{23} - \frac{f'_R}{\sqrt{g}} de^{23} \\ &= -(\frac{f'_R}{\sqrt{g}})' \frac{1}{\sqrt{g}} e^{123} - \frac{2}{\sqrt{g}} \frac{f'_R}{\sqrt{g}} e^{123} \\ &= (-\frac{f''_R}{g} + \frac{f'_R g'}{2g^2} - \frac{2f'_R}{rg}) e^{123} \quad (3.76) \end{aligned}$$

Burada $*e^{01} = -e^{23}$ olduğu ve (3.49), (3.50), (3.51) ve (3.52) denklemleri kullanıldı. Benzer şekilde diğer bileşenleri de hesaplanırsa

$$\begin{aligned} DL^1 &= (-\frac{h' f'_R}{2hg} - \frac{2f'_R}{rg}) e^{023} \quad (3.77) \\ DL^2 &= (\frac{f''_R}{g} - \frac{f'_R g'}{2g^2} + \frac{f'_R h'}{2gh} \frac{f'_R}{rg}) e^{013} \quad (3.78) \\ DL^3 &= -(\frac{f''_R}{g} - \frac{f'_R g'}{2g^2} + \frac{f'_R h'}{2gh} \frac{f'_R}{rg}) e^{012} \quad (3.79) \end{aligned}$$

(3.80)

elde ederiz.

Denklem (3.20) yi bu denklemde aşağıdaki şekilde kullanalım.

$$U^0 * U = U^0 * U_a e^a = U^0 U_a * e^a = U^0 U_0 * e^0 = - * e^0$$

Bu eşitlikleri ilk olarak (3.42) denklemlerinde yerine koyacağız. O halde gravitasyonel alan denkleminin 0. bileşeni

$$-\frac{f_R''}{g} + (\frac{g'}{2g^2} - \frac{2}{gr})f_R' + (-\frac{h'^2}{4h^2 g} - \frac{h'g'}{4hg^2} + \frac{h''}{2hg} + \frac{h'}{hgr})f_R + \frac{f}{2} = \rho \qquad (3.81)$$

haline gelir. Benzer şekilde $U^1, U^2, U^3 = 0$ olduğundan $U^1 * U = U^2 * U = U^3 * U = 0$ alınarak ve (3.68), (3.69) ve (3.70) kullanılarak Gravitasyonel alan denkleminin 1., 2. ve 3. bileşenleri olan (3.43), (3.44) ve (3.45) denklemleri de hesaplanırsa, sonuç olarak $*e^1$ ve $*e^2$ katsayılarını alarak elde ettiğimiz diferansiyel denklemler aşağıdaki gibidir.

$$-(\frac{h'}{2hg} + \frac{2}{gr})f_R' + (-\frac{h'^2}{4h^2 g} - \frac{h'g'}{4hg^2} + \frac{h''}{2hg} - \frac{g'}{g^2 r})f_R + \frac{f}{2} = -p \qquad (3.82)$$

$$\frac{f_R''}{g} + (\frac{h'}{2hg} - \frac{g'}{2g^2} + \frac{1}{gr})f_R' + (\frac{g'}{2g^2 r} - \frac{h'}{2hgr} + \frac{1}{r^2} - \frac{1}{gr^2})f_R - \frac{f}{2} = p \qquad (3.83)$$

Burada $f_R = \frac{df}{dR}$ olduğu ve $R$ Ricci eğrilik skalarının (3.72) olduğu unutulmamalıdır.

$$R = -\left(\frac{h'}{2h\sqrt{g}}\right)' \frac{2}{\sqrt{g}} - \frac{(h')^2}{2h^2 g} - \frac{2h'}{hgr} - \left(\frac{1}{r\sqrt{g}}\right)' \frac{4}{\sqrt{g}} - \frac{6}{r^2 g} + \frac{2}{r^2} \qquad (3.84)$$

Bu 5 bilinmeyenli 3 diferansiyel denkleme çözümler aranır. Burada bilinmeyenlerden biri olan $f(R)$ fonksiyonunu belirlerken gözlemlerle uyumlu ve fiziksel olup olmadığına dikkat edilir. $p$ basıç ile $\rho$ enerji yoğunluğu arasında çoğu zaman bir durum denklemi (equation of state) denilen ve $p = f(\rho)$ şeklinde bir bağıntı olduğu varsayılır ve böylece 5 bilinmeyenli 4 denkleme dönüşür. $p = \omega\rho$ lineer ve $p = \omega\rho^k$ politropik durum denklemi yaklaşımları literatürde çok kullanılmıştır. Yine de yıldızların içindeki durum denkleminin ne olduğu ile ilgili çalışmalar sürmektedir. Bu nedenle bu fonksiyonlar keyfi alınarak çözümlere bakılabilir.

### 3.2.1 Boşlukta çözümler ($\rho = p = 0$ )

Bu (3.81), (3.82) ve (3.83) diferansiyel denklemlerinin boşlukta, yani $\rho = p = 0$ iken genel bir çözümü Clifton (2005) tarafından

$$f(R) = R^{1+\alpha} \tag{3.85}$$

için aşağıdaki gibi bulunmuştur.

$$h(r) = r^{\frac{2\alpha(1+2\alpha)}{1-\alpha}} + \frac{c}{r^{\frac{1-4\alpha}{1-\alpha}}} \tag{3.86}$$

$$g(r) = \frac{(1-2\alpha+4\alpha^2)(1-2\alpha(1+\alpha))}{(1-\alpha)^2}\left(1+\frac{c}{r^{\frac{1-2\alpha+4\alpha^2}{1-\alpha}}}\right)^{-1} \tag{3.87}$$

Bu durumda

$$R = \frac{6\alpha(1+\alpha)}{2\alpha^2+2\alpha-1}r^{-2} \tag{3.88}$$

olarak hesaplanır ve

$$f_R = (1+\alpha)R^{\alpha} \tag{3.89}$$

olur. Bu çözümde $\alpha = 0$ alınırsa Genel Görelilikteki Schwarzchild çözümü bulunur.

Bu (3.81), (3.82) ve (3.83) diferansiyel denklemlerine bir diğer çözüm olarak Saffari (2008), Sebastiani ve Zerbini (2011) makalelerinde düşünülen ve

$$h(r) = \frac{1}{2}(1 - \frac{c_1}{r^2} + c_2 r^2) \tag{3.90}$$

ile

$$g(r) = \frac{1}{h(r)} \tag{3.91}$$

metrik fonksiyonları alınırsa

$$R(r) = -6c_2 + \frac{1}{r^2} \tag{3.92}$$

$$f_R(r) = ar \tag{3.93}$$

$$f(r) = \frac{2f_R(r)}{r^2} = \frac{2ar}{r^2} = \frac{2a}{r} \tag{3.94}$$

olarak elde edilir. (3.92) denkleminin tersi alınarak $r = \sqrt{\frac{1}{R+6c_2}}$ bulunur. Bu ifade (3.93) ve (3.94) de yerine yazılarak

$$f_R(R) = \frac{df}{dR} = a\sqrt{\frac{1}{R+6c_2}} \tag{3.95}$$

$$f(R) = \frac{a}{2}\sqrt{R+6c_2} + C_3 \tag{3.96}$$

olduğu görülür.

$f(R)$ gravitasyon teorisinde küresel simetri ve zayıf alan yaklaşımı altındaki bağıntılarda düşünülerek detaylı bir şekilde Capozziello ve diğ. (2008) makalesinde tartışılmıştır. Yine bu makalede küresel simetrik çözümler bulmak için pertürbasyon yaklaşımı kullanılmış ve sonuçları tartışılmıştır. $f(R)$ gravitasyon modelinin boşlukta küresel simetrik statik çözümleri yüksek boyutlu uzay-zamanlara Carames ve Bezerra de Mello (2009) makalesinde genelleştririlmiştir.

Yine $f(R)$ gravitasyon medelinin sahip olduğu küresel simetrik çözümler, Capozziello, Cardone ve Troisi (2006), Capozziello ve diğ. (2007), Frgerio ve Salucci (2007), Mendoza ve Rosas-Guevara (2007), Sobouti (2007) makalelerinde de incelendiği gibi spiral galaksilerin dönme hız eğrilerinde görülen ve açıklanamayan durumu karanlık maddeye ihtiyaç duymadan açıklayabilmektedir.

### 3.2.2 Yıldız Çözümleri ($\rho \neq p \neq 0$)

Diğer yandan nötron yıldızı gibi kompakt yıldızların kütle ve yarıçap gibi fiziksel özelliklerine öngörüler elde edebilmek için, (3.81), (3.82) ve (3.83) denklemlerinde $\rho$ enerji yoğunluğu ve $p$ basıncının sıfırdan farklı olduğu veya madde enerji-momentum tensörünün sıfırdan farklı olduğu durumlar için analitik ve realistik modeller bulmak oldukça zordur. Çünkü elde edilen model yıldızın dışında yani $\rho = p = 0$ olduğu durumda gözlemlerle tutarlı olmalı ve Schwarzchild tipi bir çözümler elde edilmelidir. Ayrıca yıldızın yüzeyinde metrik potansiyelin sürekli olduğu bir geçiş sağlanmalıdır. Bu denklemlerin pertürbatif bir yaklaşımla $\rho$ ile $p$ arasında gerçekçi durum denklemleri kullanılarak nötron yıldızlarına uygulanması Alavirad ve diğ. (2013), Arapoğlu ve diğ. (2011), Astashenok ve diğ. (2013, 2014), Cooney ve diğ. (2010), Yazadjiev ve diğ. (2014) makalelerinde incelenmiştir.

Yine bu denklemlerin pertürbatif olmayan nümerik çözümleri Astashenok ve diğ. (2015), Gannouji ve diğ. (2014), Yazadjiev ve diğ. (2014) makalelerinde bulunabilir.

Bu denklemlerdeki basıncın $p_r$ ve $p_t$ şeklinde anizotropik olduğu denklemlere çözümler ise Abbas ve diğ. (2015), Zubair ve diğ. (2016) makalelerinde bulunabilir.

Nötron yıldızı araştırmalarının en büyük problemlerinden biri; gerçekçi bir durum denklemine sahip bir yıldız için Einstein'in Genel Relativite teorisinden elde edilen kütle ile gözlemlenen değer arasında büyük bir kütle farkının olmasıdır. Bu durumu açıklamak için kullanılan bu $f(R)$ modelleri oldukça başarılı sonuçlar vermektedir.

# 4. SONUÇ

Bu tezde modifiye bir gravitasyon teorisi olan $f(R)$ gravitasyon teorisi ve küresel simetrik statik çözümleri differansiyel formlar ve dış cebrin özellikleri kullanılarak incelendi. İlk olarak $f(R)$ gravitasyon modelini temsil eden eylem integralinin ortanormal koçerçeve 1-form ve bağlantı bir formlarına göre varyasyonu alınarak gravitasyonel alan denklemleri elde edildi. Burada bağlantı 1-formlarının oluşturduğu denklemdeki bilinmeyen Lagrange çarpanları ko-çerçeve varyasyonundan gelen denklemde yerine yazılarak, tek bir 4-bileşenli alan denklemine ulaşıldı. Bu alan denkleminden küresel simetrik statik bir metrik için 3 tane diferansiyel denklem elde edildi. Bu diferansiyel denklemlerin daha önce literatürde verilen ve diferansiyel formlar kullanılmadan varyasyon yöntemiyle farklı bir şekilde elde edilen diferansiyel denklemlerle aynı olduğu gösterildi. Bu diferansiyel denklemlere çözümler araştırıldı ve daha önce bulunan çözümler tekrar kontrol edildi. Bu çözümlerin ideal bir akışkanın iç çözümlerini tarif etmesi istenilerek, $\rho$ enerji yoğunluğuna ve $p$ basıncına sahip ideal bir akışkan için çözümlerin hangi şartları sağlaması gerektiği tartışıldı.

# 5. KAYNAKLAR


Abbas, G., Zubair, M., Mustafa, G.,"Anisotropic strange quintessence stars in f(R) gravity", *Astrophys.Space Sci. 358 no.2, 26* (2015) (2015-07-03)

Abbott, B. P., et al. (LIGO Scientific- and Virgo Collaborations), "Astrophysical Implications of the Binary Black-hole Merger GW150914" *The Astrophysical Journal Letters* 818, L22, (2016).

Abbott, B. P., et al. (LIGO Scientific- and Virgo Collaborations), "Observation of Gravitational Waves from a Binary Black Hole Merger" *Phys. Rev. Lett.*116, 061102, (2016).

Alavirad, H., Weller, J.M., "Modified gravity with logarithmic curvature corrections and the structure of relativistic stars " *Phys. Rev. D* 88, 124034 (2013), arXiv:1307.7977v1 [gr-qc]

Albrecht, A., and Steinhardt, P. J., "Cosmology for Grand Unified Theories with Radiatively Induced Symmetry Breaking", *Phys. Rev. Lett.* 48, 1220, (1982).

Allemandi, G., Borowiec, A., Francaviglia, M., "Accelerated Cosmological Models in Ricci squared Gravity", *Phys. Rev. D.*, 70, 103503, (2004).arXiv:hep-th/0407090

Amanullah, R., "Spectra and Light Curves of Six Type Ia Supernovae at $0.511 < z < 1.12$ and the Union2 Compilation" *et al., Astrophys. J.* 716, 712, (2010).

Arapoglu, S., Deliduman, C., Yavuz Eksi, K., "Constraints on Perturbative f(R) Gravity via Neutron Stars" *JCAP 1107, 020* (2011) arXiv:1003.3179v3 [gr-qc].

Astashenok, A., Capozziello, S., Odintsov,S.D., "Extreme neutron stars from Extended Theories of Gravity" *JCAP 12, 040* (2013).

Astashenok, A., Capozziello, S., Odintsov,S.D., "Maximal neutron star mass and the resolution of hyperon puzzle in modified gravity " *Phys. Rev. D 89, 103509* (2014) arXiv:1401.4546 [gr-qc].

Astashenok, A.V., Capozziello, S., Odintsov, S.D., "Nonperturbative models of quark stars in f(R) gravity", *Phys.Lett. B742 160-166* DOI: 10.1016/j.physletb.2015.01.030 (2015) arXiv:1412.5453 [gr-qc]

Baer, H., Choi, K.-Y., Kim, J. E., and Roszkowski, L. "Dark matter production in the early Universe: beyond the thermal WIMP paradigm", *Physics Reports* 555, 1, (2015).

Brill, D. R., and Gowdy, R. H., "Quantization of general relativity" *Rep. Prog. Phys.* 33, 413, (1970).

Capozziello, S., "Curvature Quintessence" *Int. J. Mod. Phys. D,* 11, 483, (2002).

Capozziello, S., Carloni, S., Troisi, A., "Quintessence without scalar fields" *Recent Res.Dev.Astron.Astrophys.* 1:625, (2003), arXiv : astro - ph/0303041.

Capozziello, S. , Cardone, V.F. , Carloni, S. , Troisi, A. "Curvature quintessence matched with observational data" *Int. J. Mod. Phys. D*, 12, 1969, (2003).

Capozziello, S., Cardone, V.F.,Carloni, S., Troisi, A., "Can higher order curvature theories explain rotation curves of galaxies?" *Phys. Lett. A,* 326, 292, (2004).

Capozziello, S., Cardone V.F., Troisi A., "Dark energy and dark matter as curvature effects" *JCAP* 08, 001, (2006).

Capozziello, S., Cardone, V.F., Troisi, A.," Dark energy and dark matter as curvature effects" *JCAP 0608, 001* (2006)

Capozziello, S., Cardone, V.F., Troisi, A. "Low surface brightness galaxies rotation curves in the low energy limit of $R^n$ gravity : no need for dark matter? " *Mon. Not. Roy. Astron. Soc. 375, 1423*, (2007).

Capozziello, S., Stabile, A. and Troisi, A. "Spherical symmetry in $f(R)$ gravity" *Class. Quant. Grav.* 25, 085004 (2008). [arXiv:0709.0891 [gr-qc]].

Carames, T. R. P., Bezerra de Mello, E. R., "Spherically symmetric vacuum solutions of modified gravity theory in higher dimensions"*Eur. Phys. J. C* 64, 113-121 (2009). arXiv:0901.0814 [gr-qc].

Cartan, E., "On manifolds with an affine connection and the theory of general relativity", edited 1986, *Bibliopolis*, Italy, (1923).

Carroll, S.M., Duvvuri, V. ,Trodden, M., Turner, M.,"Is cosmic speed-up due to new gravitational physics?" *Phys. Rev. D*, 70, 043528, (2004).

Clifton, T. and Barrow, J.D., "The Power of General Relativity" *Phys. Rev. D* 72, 103005 (2005).

Cognola, G., Elizalde, E. ,Nojiri, S., Odintsov, S.D., Zerbini, S., "One-loop f(R) gravity in de Sitter universe" *JCAP*, 010, (2005).

Cooney, A., DeDeo, S., Psaltis, D., "Neutron Stars in f(R) Gravity with Perturbative Constraints" *Phys.Rev. D82 064033* (2010) DOI: 10.1103/PhysRevD.82.064033 arXiv:0910.5480 [astro-ph.HE]

Dereli, T., "Differential Forms and Maxwell Equations, Lectures Notes", *TÜBİTAK Graduate Summer School*, 18-28 Sep, (1984).

Felice, A. de and Tsujikawa, S."f(R) theories" *Living Rev. Rel.* 13, 3 (2010).

Flanders, H., "Differential Forms with Applications to the Physical Sciences", *ISBN 0122596501, Academic Press*, New York, USA, (1963).

Frgerio, M.C., Salucci, P., "Analysis of Rotation Curves in the framework of $R^n$ gravity " *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.*, arXiv: astro - ph/0703243 (2007).

Gannouji,R., Goswami, R., Ray, S.,"Neutron stars in the Starobinsky model Apratim Ganguly", *Phys.Rev. D89 no.6, 064019* (2014) DOI: 10.1103/PhysRevD.89.064019 arXiv:1309.3279 [gr-qc]

Guth, A. H., "The Inflationary Universe: A Possible Solution to the Horizon and Flatness Problems", *Phys. Rev.* D 23, 347, (1981).

Hubble, E. P.: "A Relation between Distance and Radial Velocity among Extra-Galactic Nebulae", *Proc. US Nat. Acad. Sci.* 15, 168-173, (1929).

Isham, C. J., "Quantum Gravity 2: A Second Oxford Symposium", edited by Isham, C. J., Penrose, R., and Sciama, D. W., *Clarendon Press*, Oxford, (1981).

Kerner, R., "Cosmology without Singularity and Nonlinear Gravitational Lagrangians" *Gen. Rel. Grav.*, 14, 453, (1982).

Knop, R. A., "New Constraints on $\omega_M$, $\omega_\lambda$, and w from an Independent Set of Eleven High-Redshift Supernovae Observed with HST" *et al., Astrophys. J.* 598, 102, (2003).

Linde, A. D., "A New Inflationary Universe Scenario: A Possible Solution of the Horizon, Flatness, Homogeneity, Isotropy and Primordial Monopole Problems", *Phys. Lett. B* 108, 389, (1982).

Mendoza, S., Rosas-Guevara, Y.M., " ", *A A, 472, 367* (2007)

Nojiri, S., Odintsov, S.D, "Modified Gravity with $lnR$ Terms and Cosmic Acceleration" *Gen. Rel. Grav.* 36, 1765, (2004).

Overduin, J. M. and Wesson, P. S., "Dark matter and background light" *Physics Reports* 402, 267, (2004).

Odintsov, S.D., Nojiri, S., "Where new gravitational physics comes from: M-theory?" *Phys. Lett. B*, 576, 5(2003);

Pound, R.V. and Rebka, G.A. Jr., "Gravitational Red-Shift in Nuclear Resonance" *Phys. Rev. Lett.* 3, 439, (1959).

Perlmutter, S., "Measurements of Omega and Lambda from 42 High-Redshift Supernovae" *et al., Astrophys. J.* 517, 565, (1999).

Riess, A. G., "Observational Evidence from Supernovae for an Accelerating Universe and a Cosmological Constant" *et al., Astron. J.* 116, 1009, (1998).

Saffari, R., Rahvar, S. "f(R) Gravity: From the Pioneer Anomaly to the Cosmic Acceleration" *Phys. Rev. D* 77, 104028 (2008).

Sebastiani, L., Zerbini, S., "Static Spherically Symmetric Solutions in F(R) Gravity" *Eur.Phys.J. C* 71 (2011) 1591

Sobouti, Y., "An gravitation for galactic environments", *A A 464, 921-925* (2007).

Schwarz, D. J. , Copi, C. J., Huterer, D. and Starkman, G. D., "CMB Anomalies after Planck" *Class. Quant. Grav.* 33 184001, (2016).

Sert, Ö., "Genel rölativitenin simetrik teleparalel eşdeğeri ve Dirac denklemi", Yüksek Lisans Tezi Pamukkale Üniversitesi, *FenBilimleri Enstitüsü*, (2005).

Sert, Ö., "Electromagnetic duality and new solutions of the non-minimally coupled Y(R)-Maxwell Gravity", *Modern Physics Letters A*, 28:12 1350049, 1-8 pp., DOI: 10.1142/S0217732313500491, arXiv:1303.2436, (2013).

Sotiriou, T.P. "Modified Actions for Gravity: Theory and Phenomenology" *PhD thesis*, 230 pages, (2007) .

Sotiriou, T.P. and Faraoni V. "$f(R)$ theories of gravity" *Rev. Mod. Phys.* 82, 451 (2010).

Starobinsky, A.A., "A new type of isotropic cosmological models without singularity" *Phys. Lett. B*, 91, 99, (1980).

Weinberg, D. H., Mortonson M. J., Eisenstein D. J., Hirata C., Riess A. G., and Rozo E., "Observational probes of cosmic acceleration" Physics Reports 530, 87, (2013).

Yazadjiev, S.S., Doneva, D.D., Kokkotas, K.D., Staykov, K.V., "Slowly rotating neutron and strange stars in $R^2$ gravity " *JCAP* 1406, 003 (2014) arXiv:1402.4469 [gr-qc].

Zubair, M., Abbas, G., "Some interior models of compact stars in f(R) gravity", *Astrophys.Space Sci. 361* (2016) no.10, 342 DOI: 10.1007/s10509-016-2933-7

## ÖZGEÇMİŞ

| | |
|---|---|
| Adı Soyadı | : BEYDA DOYRAN |
| Doğum Yeri ve Tarihi | : DENİZLİ 11.05.1987 |
| Lisans Üniversite | : STRASBOURG ÜNİVERSİTESİ |
| Elektronik posta | : beyda_d@hotmail.com |
| İletişim Adresi | : Kervansaray Mah. 3036 Sok. No:3 Kat:3 Bağbaşı / DENİZLİ |